ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ АН УССР

на правах рукописи

Марченко Валентин Александрович

УДК 519.46:517.9

ПОДГРУППОВАЯ СТРУКТУРА ОБОБЩЕННЫХ ГРУПП ГАЛИЛЕЯ И РЕДУКЦИЯ НЕКОТОРЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения
и математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
член-корреспондент АН УССР
доктор физико-математических наук, профессор
ФУЩИЧ В.И.

КИЕВ – 1989

С О Д Е Р Ж А Н И Е

В В Е Д Е Н И Е

Многие реальные физические процессы могут быть описаны с помощью дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Поэтому не вызывает сомнения важность нахождения точных решений этих уравнений. Был создан ряд методов: метод интегралов энергии, метод Пуассона, метод разделения переменных [29], метод обратной задачи теории рассеяния [20] и связанный с ним алгебраический метод Лезнова-Савельева [26] и другие.

Каждый из этих подходов имеет свои плюсы и минусы. Так, метод обратной задачи теории рассеяния позволяет эффективно интегрировать довольно широкий класс двумерных и одномерных динамических систем, но не применим к многомерным ДУЧП.

Для нахождения точных решений как линейных, так и нелинейных многомерных ДУЧП применяют теоретико-групповые методы, основанные на идеях выдающегося норвежского математика Софуса ЛИ, который ввел и исследовал фундаментальное понятие группы преобразований, допускаемой данным дифференциальным уравнением [63]. Кроме того теория ЛИ позволяет сводить сложные нелинейные задачи к более простым линейным. Современное изложение теории ЛИ дано в монографии [31], а теории групп ЛИ в [32].

К настоящему времени методом ЛИ были найдены максимальные группы симметрии таких важных уравнений математической и теоретической физики, как уравнения Дирака, Максвелла, Шредингера, Даламбера, Монжа-Ампера, Лиувилля и многих других: построены точные решения этих уравнений [39, 40, 41, 44-49, 61, 62].

Также были описаны классы нелинейных ДУЧП, которые допускают такие группы инвариантности, как группы Евклида, Галилея, Пуанкаре, Гамильтона-Якоби и т.д.

При реализации метода Ли для отыскания точных решений ДУ возникает проблема нахождения всех неэквивалентных подгрупп группы симметрии, допускаемой данным уравнением. Кроме того знание подгрупповой структуры используется при разделении переменных [14,15,29,48], а также позволяет решать задачу о редукции представлений группы по подгруппам. В работе [30] проведена редукция неприводимых унитарных представлений группы Пуанкаре $P(1, n)$ по ее подгруппам $P(1, n-k)$, а в [60] – редукция представлений алгебры Пуанкаре $AP(1,4)$ по ее подалгебре – алгебре Галилея $A\tilde{G}(1,3)$.

Таким образом актуальность исследований подгрупповой структуры очевидна. К настоящему времени получен ряд важных результатов. Описаны редуктивные подалгебры комплексных алгебр Ли, полупростые подалгебры классических вещественных алгебр Ли [18,19,23,33,35], изучены их максимальные неприводимые подалгебры [34].

В работах Й.Патеры, П.Винтерница, Г.Цассенхауза предложен метод классификации подалгебр конечномерной вещественной алгебры Ли L с нетривиальным абелевым идеалом N относительно некоторой сопряженности [66,67]. Дальнейшее развитие этот метод получил в работах В.И.Фущича, А.Ф.Баранника, Л.Ф.Баранника [7,8,10,42,54]. Его краткая суть такова.

1. Классифицируем относительно сопряженности подалгебры F_j фактор-алгебры L/N.

2. Для каждой подалгебры F_j находим все несопряженные инвариантные подпространства N_{ji} пространства N, т.е. такие что

$[F_j, N_{ji}] \subset N_{ji}$.

3. Используя полученные результаты, ищем подалгебры вида $< X_i + \sum_j Y_{ij}, Y_k >$, где $< X_i > = F_j$; $Y_k, Y_{ij} \in N$.

Этим методом проклассифицированы подалгебры следующих алгебр: AE(3) [55], $AG(1,3)$, $A\tilde{G}(1,3)$ [42,51,52], AP(1,3) [66], $A\tilde{P}(1,3)$ [67], AO(1,4) [68], AO(2,3), AOpt(1,3), AOpt(1,2) [57], $AG(3,2)$, $A\tilde{G}(3,2)$ [56], $AG(3,3)$, $A\tilde{G}(3,3)$ [10], AE(4) [3], AE(5) [42,43], AP(1,4) [36,37,38], $A\tilde{P}(1,4)$ [8,54], AP(2,2) [4,24], AP(2,3) [25], AC(1,4).

Также получен ряд общих результатов для алгебр $AO(1,n)$, $AO(2,n)$, $AP(1,n)$, $A\tilde{P}(1,n)$, $AP(2,n)$, $AG(3,n)$, $A\tilde{G}(3,n)$, $AC(1,n)$. Например, явно выписаны одномерные подалгебры алгебр $AO(1,n)$, $AO(2,n)$ [7], $AG(3,n)$, $A\tilde{G}(3,n)$ [10], $AP(1,n)$ [9]; максимальные разрешимые подалгебры алгебр $A\tilde{P}(1,n)$ [8], $AP(2,n)$ [4]; максимальные абелевы подалгебры алгебр $A\tilde{P}(1,n)$ [8], $AG(3,n)$, $A\tilde{G}(3,n)$ [10,28] и т.д.

Для подалгебр указанных алгебр найдены инварианты и проведена редукция некоторых уравнений математической физики [5,6, 9,25,45,46,47,58,61]. Найдены некоторые точные решения.

Интерес к алгебрам Галилея $AG_3(1,n)$ и $A\tilde{G}_3(1,n)$ вызван их связью с рядом задач теоретической и математической физики. Так, группа $\tilde{G}_3(1,2)$ является максимальной подгруппой группы P(2,3), которую В.Г.Кадышевский предложил использовать для расширения S-матриц за массовую оболочку. Кроме того, некоторые уравнения математической фивики инвариантны относительно алгебры $A\tilde{G}_3(1,n)$ и ее подалгебр. Например, уравнение $2im\frac{\partial u}{\partial \tau} = \Box u$ инвариантно относительно $A\tilde{G}_3(1,3)$.

В настоящей диссертационной работе изучается подгрупповая структура обобщенных групп Галилея. Целью работы является:

- классификация некоторых классов подалгебр алгебр $AG_3(I, n)$ и $A\tilde{G}_3(I, n)$;
- классификация подалгебр алгебр $AG_3(I,2)$ и $A\tilde{G}_3(I,2)$;
- нахождение инвариантов некоторых подалгебр алгебр $AG_3(I, n)$ и $A\tilde{G}_3(I, n)$;
- нахождение инвариантов неэквивалентных подалгебр алгебр $AG_3(I,2)$ и $AG(3,4)$;
- редукция некоторых волновых уравнений (уравнение теплопроводности, нелинейные уравнения Шредингера).

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложения. Краткое содержание диссертационной работы следующее.

Первая глава. В § I получены некоторые общие результаты о структуре подалгебр алгебр $AG_3(I, n)$ и $A\tilde{G}_3(I, n)$. Во втором параграфе описаны абелевы подалгебры указанных алгебр, а также выписаны их одномерные и максимальные абелевы подалгебры. В § 3 проведена классификация подалгебр алгебр $AG_3(I,2)$ и $A\tilde{G}_3(I,2)$. Списки этих подалгебр вынесены в приложение.

Вторая глава. В § I найдены инварианты абелевых подалгебр алгебр $AG(3, n)$ и $A\tilde{G}(3, n)$, а во втором – одномерных подалгебр алгебр $AG_3(I, n)$ и $A\tilde{G}_3(I, n)$. В § 3,4 выписаны неэквивалентные подалгебры алгебр $AG_3(I,2)$, $AG(3,4)$ и найдены их инварианты.

Третья глава. В §I проведена редукция и найдены некоторые точные решения 4-мерного уравнения теплороводности. Аналогичная задача решена во втором параграфе для уравнения Шредингера с различными нелинейностями, а в третьем – для нелиней- уравнения Шредингера в пространстве Минковского $R_{1,2}$.

В заключении дана краткая характеристика основных результатов исследования, а в приложении приведены подалгебры алгебр AG_3 (I,2) и $A\tilde{G}_3$ (I,2).

Основные результаты диссертации докладывались на Всесоюзной конференции по нелинейным проблемам дифференциальных уравнений и математической физики (г.Тернополь, 1989 г.) на научных семинарах отдела прикладных исследований Института математики АН УССР (г.Киев, 1986-1989 гг).

По теме диссертации опубликовано четыре работы [5,6,28,50].

Автор выражает благодарность научному руководителю члену-корреспонденту АН УССР В.И.Фущичу за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Глава I. Подалгебры алгебр Галилея.

В этой главе описаны абелевы подалгебры обобщенных алгебр Галилея $A\tilde{G}_3(1,n)$ и $AG_3(1,n)$. Найдены в явном виде одномерные, максимальные разрешимые и максимальные абелевы подалгебры указанных алгебр. Полностью описаны все подалгебры алгебр $AG_3(1,2)$ и $A\tilde{G}_3(1,2)$. Доказан критерий расщепляемости всех расширений в $A\tilde{G}_3(1,n)$.

§I. Алгебра Галилея $A\tilde{G}_3(1,n)$.

Основные понятия и определения.

Пусть R – поле вещественных чисел, $R_{1,n}$ – $n+1$-мерное псевдоевклидово пространство со скалярным произведением

$$(X, Y) = x_0 y_0 - (x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n),$$

AG – алгебра Ли группы Ли G, $\langle X_1, \ldots, X_s \rangle$ – векторное пространство или алгебра Ли над R с образующими $X_1, \ldots, X_s$.

Полная группа Галилея $G_3(1,n)$ пространства $R_{1,n}$ – это мультипликативная группа матриц

$$\begin{pmatrix} W & \vec{a} & \vec{b} \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

где $W \in O(1,n)$, $\vec{a}, \vec{b} \in R^{1+n}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R)$.

Матрицы из $G_3(1,n)$, удовлетворяющие дополнительному условию $\gamma = 0$, образуют специальную группу Галилея $G_2(1,n)$. Если же $\gamma = 0$, $\alpha = \delta = 1$, то получим классическую группу Галилея $G_1(1,n)$. Наконец, в случае когда $\gamma = \beta = 0$, $\alpha = \delta = 1$, матрицы образуют изохронную группу Галилея $G_0(1,n)$. Таким образом имеет место включение

$$G_3(1,n) \supset G_2(1,n) \supset G_1(1,n) \supset G_0(1,n).$$

Кроме того, очевидно, $G_i(1,n) \supset G(i,n)$ $(i=0, 1, 2, 3)$.

Полную группу Галилея $G_3(1,n)$ можно также определять как группу преобразований

$$\vec{x} \longrightarrow \frac{W\vec{x} + t\vec{a} + \vec{b}}{\gamma t + \delta}, \quad t \longrightarrow \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta},$$

где t - время, $\vec{x}$ - переменный вектор пространства $R_{1,n}$.

Алгебра Ли $AG_3(1,n)$ состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} X & \vec{a} & \vec{b} \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$$

где $X \in AO(1,n)$, $\vec{a}, \vec{b} \in R^{1,n}$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Пусть $I_{\mu\nu}$ - матрица порядка $n+3$, имеющая единицу на пересечении μ-ой строки и ν-го столбца, и нули на всех остальных местах ($\mu, \nu = \overline{0, n+2}$). Базис алгебры $AG_3(1,n)$ образуют такие матрицы

$$J_{ab} = I_{ba} - I_{ab}, \quad J_{0a} = I_{0a} + I_{a0}, \quad P_\alpha = I_{\alpha, n+2},$$
$$G_\alpha = I_{\alpha, n+1}, \quad D = -I_{n+1, n+1} + I_{n+2, n+2}, \quad S = -I_{n+2, n+1},$$
$$T = I_{n+1, n+2} \quad (a < b;\ a, b = \overline{1, n},\ \alpha = \overline{0, n}).$$

Они связаны следующими коммутационными соотношениями

$$[J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] = g_{\alpha\delta} J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma} J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma} J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta} J_{\alpha\gamma};$$
$$[P_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta} P_\gamma - g_{\alpha\gamma} P_\beta; \quad [G_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta} G_\gamma - g_{\alpha\gamma} G_\beta;$$
$$[P_\alpha, P_\beta] = [G_\alpha, G_\beta] = [P_\alpha, G_\beta] = 0;$$

$$[D, J_{\alpha\beta}] = [S, J_{\alpha\beta}] = [T, J_{\alpha\beta}] = 0;\ [D, P_\alpha] = -P_\alpha,\ [D, G_\alpha] = G_\alpha;$$
$$[S, P_\alpha] = G_\alpha,\ [S, G_\alpha] = 0;\ [T, G_\alpha] = -P_\alpha,\ [T, P_\alpha] = 0;$$
$$[D, S] = 2S,\ [D, T] = -2T,\ [T, S] = D\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta = \overline{0, n}),$$

где $g_{\mu\nu} = 0$, при $\mu \neq \nu$, $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = \ldots = -g_{nn} = 1$.

Алгебру $AG_3(1,n)$ будем называть полной алгеброй Галилея. Аналогично вводятся понятия специальной, классической и изохронной алгебр Галилея.

Расширенная полная алгебра Галилея $A\tilde{G}_3(1,n)$ получается из $AG_3(1,n)$ путем центрального расширения. При этом присоединяется коммутирующий со всеми элементами $AG_3(1,n)$ оператор M, такой что $[G_\alpha, P_\beta] = g_{\alpha\beta} M$. Аналогично определяется и расширение алгебр $AG_0(1,n)$, $AG_1(1,n)$, $AG_2(1,n)$.

Подалгебры L_1, L_2 алгебры $AG_3(1,n)$ называются $G_3(1,n)$-сопряженными, если $gL_1g^{-1} = L_2$ для некоторого элемента $g \in G_3(1,n)$. Отображение $\varphi_g: X \to gXg^{-1}$, $X \in AG_3(1,n)$ называется автоморфизмом алгебры $AG_3(1,n)$, соответствующим элементу g.

В дальнейшем будем использовать такие обозначения:

$\langle X_i \mid i = \overline{k, l} \rangle$ – алгебра с базисом $\langle X_k, \ldots, X_l \rangle$,

$V[k, l]$ – пространство с базисом $\langle G_k, \ldots, G_l \rangle$,

$V[k,k] = V[k]$, $W[k,l] = \langle P_k, \ldots, P_l \rangle$, $W[k,k] = W[k]$,

$\mathfrak{M}[k,l] = \langle M, G_k, \ldots, G_l, P_k, \ldots, P_l \rangle$, $\mathfrak{M}[k,k] = \mathfrak{M}[k]$,

$\overline{\mathfrak{M}}[k,l] = \mathfrak{M}[k,l]/\langle M \rangle$; $H_k = J_{0k} - J_{kn}$,

$U[k,l] = \langle H_k, \ldots, H_l \rangle$, $U[k,k] = U[k]$;

$\pi, \tau, \varphi, \psi, \omega$ – проектирования алгебр $A\tilde{G}_3(1,n)$, $AG_3(1,n)$ на $AO(1,n)\oplus ASl(2,R)$, $ASl(2,R)$, $V[0,n]$, $W[0,n]$, $AO(1,n)$ соответственно. Группы изометрий пространств $V[k,l]$, $W[k,l]$, $V[k,l]$ ($1\leq k\leq l$) будем обозначать через $O[k,l]$, следовательно $AO[k,l]=\langle J_{ab} \mid a,b=k,\ldots,l\rangle$. Пусть $AH(0)=0$;

$AH(2d)=AH(2d+1)=\langle J_{12},\ldots,J_{2d-1,2d}\rangle$, $J(a,b)=J_{2a-1,2a}+\ldots+J_{2b-1,2b}$, $J(a)=J(a,a)$. Пусть U – подпространство пространства $\mathfrak{M}[0,n]$, $\hat{F}$ – такая подалгебра алгебры $AG_3(1,n)$, что $\pi(\hat{F})=F$. Запись $\hat{F}+U$ означает, что $[F,U]\subset U$ и $F\cap\mathfrak{M}[0,n]\subset U$. Если мы рассматриваем алгебры $\hat{F}+U_1,\ldots,F+U_s$, то будем употреблять обозначение $F:U_1,\ldots,U_s$.

Теорема I.I.I. Относительно $O(1,n)\times Sl(2,R)$-сопряженности алгебра $AO(1,n)\oplus ASl(2,R)$ обладает такими максимальными разрешимыми подалгебрами:

$$AH(n)\oplus\langle S+T\rangle,\ AH(n)\oplus\langle D,T\rangle,\ V[1,n-1]\supset\!\!\!\!+(\langle J_{0n}\rangle\oplus AH(n-2))\oplus$$
$$\oplus\langle S+T\rangle,\ V[1,n-1]\supset\!\!\!\!+(\langle J_{0n}\rangle\oplus AH(n-2))\oplus\langle D,T\rangle\ (n=2k);$$
$$V[1,n-1]\supset\!\!\!\!+(\langle J_{0n}\rangle\oplus AH(n-1))\oplus\langle S+T\rangle,$$
$$V[1,n-1]\supset\!\!\!\!+(\langle J_{0n}\rangle\oplus AH(n-1))\oplus\langle D,T\rangle\ (n=2k+1).$$

Справедливость теоремы следует из того факта, что $ASl(2,R)$ обладает двумя максимальными разрешимыми подалгебрами $\langle S+T\rangle$ и $\langle D,T\rangle$, а $AO(1,n)$ – одной ($V[1,n-1]\supset\!\!\!\!+(\langle J_{0n}\rangle\oplus AH(n-1))$) при n – нечетном, и двумя ($V[1,n-1]\supset\!\!\!\!+(\langle J_{0n}\rangle\oplus AH(n-2))$ и $AH(n)$) при n – четном.

Поскольку расширение абелевой алгебры с помощью разрешимой является разрешимой алгеброй, то максимальные разрешимые подалгебры алгебры $AG_3(1,n)$ имеют вид $\tilde{\mathfrak{M}}[0,n]\supset\!\!\!\!+F$, где F – максимальная разрешимая подалгебра алгебры

$AO(1,n) \oplus ASl(2,R)$. Максимальные разрешимые подалгебры алгебры $A\tilde{G}_3(1,n)$ исчерпываются алгебрами $\mathcal{M}[0,n] \supset\!\!\!\!+ F$.

Теорема I.I.2. С точностью до $O(1,n) \times Sl(2,R)$-сопряженности алгебра $AO(1,n) \oplus ASl(2,R)$ имеет следующие подалгебры:

I) $F \oplus K$, где $F \subset AO(1,n)$, $K \subset ASl(2,R)$;

2) $F \supset\!\!\!\!+ \langle X+Y \rangle$, где $F \supset\!\!\!\!+ \langle X \rangle \subset AO(1,n)$, $Y \subset ASl(2,R)$;

3) $(F \oplus \langle T \rangle) \supset\!\!\!\!+ \langle X+D \rangle$, где $F \supset\!\!\!\!+ \langle X \rangle \subset AO(1,n)$;

4) $\langle 2J_{0n}+D, H_{n-1}+T \rangle \oplus F$; где $F \subset AO(n-2)$;

5) $\langle 2J_{0n}+D, 2J_{n-1,n}-(S+T), 2J_{0,n-1}+(T-S) \rangle \oplus F$, где $F \subset AO(n-2)$

Доказательство. Пусть A – подалгебра алгебры $AO(1,n)$, B – подалгебра алгебры $ASl(2,R)$, C – подпрямая сумма A, B и $C \neq A \oplus B$. По теореме Гурса [66] $A/F \cong B/H$, где $F \neq A$, $H \neq B$.

С точностью до $Sl(2,R)$-сопряженности $B/H \in \{\langle D \rangle, \langle T \rangle, \langle S+T \rangle, \langle D,T \rangle, \langle D,S,T \rangle\}$.

Если $B/H \in \{\langle T \rangle, \langle S+T \rangle\}$, то $C = F \supset\!\!\!\!+ \langle X+Y \rangle$, где $F \supset\!\!\!\!+ \langle X \rangle = A$, $\langle Y \rangle = B$ ($Y=T$ или $Y=S+T$).

Если $B/H = \langle D \rangle$, то $C = F \supset\!\!\!\!+ \langle X+D \rangle$, где $F \supset\!\!\!\!+ \langle X \rangle = A$, $\langle D \rangle = B$ или $C = (F \oplus \langle T \rangle) \supset\!\!\!\!+ \langle X+D \rangle$, где $F \supset\!\!\!\!+ \langle X \rangle = A$, $\langle D,T \rangle = B$.

Если $B/H = \langle D,T \rangle$, то с точностью до $O(1,n)$-сопряженности $A/F = \langle 2J_{0n}, H_{n-1} \rangle$. Тогда $C = \langle 2J_{0n}+D, H_{n-1}+T \rangle \oplus F$, где $\langle 2J_{0n}, H_{n-1} \rangle \oplus F = A$, $\langle D,T \rangle = B$.

Если $B/H = \langle D,S,T \rangle$, то с точностью до $O(1,n)$-сопряженности $A/F = \langle 2J_{0n}, H_{n-1}, -J_{0,n-1}-J_{n-1,n} \rangle$. Тогда

$C = \langle 2J_{0n} + D,\ 2J_{n-1,n} - (S+T),\ 2J_{0,n-1} + (T-S) \rangle \oplus F$,
где $\langle J_{0n}, J_{0,n-1}, J_{n-1,n} \rangle \oplus F = A$, $ASl(2,R) = B$.
Теорема доказана.

Пусть F – подалгебра алгебры $AO(1,n)$; $\hat{F}$ – такая подалгебра алгебры $AG_i(1,n)$, что $\pi(\hat{F}) = F$ (i=0, I, 2, 3). Если алгебра $\hat{F}$ $G_i(1,n)$-сопряжена алгебре $\mathcal{N} \ni F$, где $\mathcal{N}$ есть F-инвариантное подпространство пространства $\mathcal{M}[0,n]$ (т.е. $[F,\mathcal{N}] \subset \mathcal{N}$), то $\hat{F}$ называется расщепляемой в алгебре $AG_i(1,n)$. Аналогично определяется и понятие расщепляемой подалгебры в $A\tilde{G}_i(1,n)$. Если любая подалгебра $\hat{F}$ является расщепляемой, то будем говорить, что подалгебра F обладает только расщепляемыми расширениями в $AG_i(1,n)$.

Таким образом для описания расщепляемых подалгебр $AG_3(1,n)$ необходимо знать подалгебры F алгебры $AO(1,n) \oplus ASl(2,R)$ и структуру F-инвариантных подпространств пространства $\mathcal{M}[0,n]$.

Предложение I.I.I. Пусть $F = \langle T + J_{0n} \rangle$, $\mathcal{N}$ – F-инвариантное подпространство пространства $\mathcal{M}[0,n]$. Тогда $[T,\mathcal{N}] \subset \mathcal{N}$, $[J_{0n},\mathcal{N}] \subset \mathcal{N}$.

Доказательство. Пусть $Y = \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i P_i + \beta_i G_i) \in \mathcal{N}$. Тогда

$$Y_1 = [T + J_{0n}, Y] = -\sum_{i=0}^{n} \beta_i P_i - (\alpha_0 P_n + \alpha_n P_0 + \beta_0 G_n + \beta_n G_0) \in \mathcal{N},$$

$$Y_2 = [T + J_{0n}, Y_1] = 2(\beta_0 P_n + \beta_n P_0) + (\alpha_0 P_0 + \alpha_n P_n + \beta_0 G_0 + \beta_n G_n) \in \mathcal{N},$$

$$Y_3 = [T + J_{0n}, Y_2] = -3(\beta_0 P_0 + \beta_n P_n) - (\alpha_n P_0 + \alpha_0 P_n + \beta_n G_0 + \beta_0 G_n) \in \mathcal{N},$$

$$Y_4 = [T + J_{0n}, Y_3] = 4(\beta_0 P_n + \beta_n P_0) + (\alpha_0 P_0 + \alpha_n P_n + \beta_0 G_0 + \beta_n G_n) \in \mathcal{N}.$$

Из условий $Y_2, Y_4 \in \mathcal{N}$ следует $\alpha_0 P_0 + \alpha_n P_n + \beta_0 G_0 + \beta_n G_n \in \mathcal{N}$,

$\beta_0 P_n + \beta_n P_0 \in \mathcal{N}$, следовательно $\alpha_0 P_n + \alpha_n P_0 + \beta_n G_0 + \beta_0 G_n \in \mathcal{N}$, а т.к. $Y_1 \in \mathcal{N}$, то $\sum_{i=0}^{n} \beta_i P_i = [T, Y] \in \mathcal{N}$, что и требовалось доказать.

Предложение I.I.2. Пусть $F=\langle \mathbb{D}+H_1\rangle$, $\mathcal{N}$ - F-инвариантное подпространство пространства $\mathcal{M}[0,n]$. Тогда $[\mathbb{D},\mathcal{N}]\subset\mathcal{N}$, $[H_1,\mathcal{N}]\subset\mathcal{N}$.

Предложение I.I.3. Пусть $F=\langle S+T+X\rangle$, где $X=H_1$ или $X=\alpha J_{0n}$, $\mathcal{N}$ - F-инвариантное подпространство пространства $\mathcal{M}[0,n]$. Тогда $[S+T,\mathcal{N}]\subset\mathcal{N}$, $[X,\mathcal{N}]\subset\mathcal{N}$.

Доказательства предложений I.I.2. и I.I.3. аналогичны доказательству предложения I.I.I.

Предложение I.I.4. Пусть $F=\langle T+H_1\rangle$ $\mathcal{N}$-нерасслоенное F-инвариантное подпространство пространства $\mathcal{M}[0,n]$. Тогда $\mathcal{N}$ сопряжено подпрямой сумме пространств $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$, где $[T,\mathcal{N}_1]\subset\mathcal{N}_1$, $[H_1,\mathcal{N}_1]\subset\mathcal{N}_1$, а $\mathcal{N}_2$ удовлетворяет одному из условий: I) $\mathcal{N}_2=\langle G_0+G_n-P_1\rangle$;

2) $\mathcal{N}_2=\langle G_1+\gamma G_2+P_n-P_0+\varepsilon(P_0+P_n),\ G_0+G_n-P_1+\gamma P_2\rangle$ $(\varepsilon=0,\pm1)$;

3) $\mathcal{N}_2=\langle G_0+G_n+\gamma P_2+\alpha P_1,\ G_1+\gamma G_2+(\alpha-1)P_0,\ P_0+P_n\rangle$ (при $n=2,\gamma=0$).

Доказательство. I). Пусть $X_1=G_0+G_n+\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i P_i\in\mathcal{N}$, $P_0+P_n\notin\mathcal{N}$. Тогда $[T+H_1,X_1]=(\alpha_n-\alpha_0)P_1-(1+\alpha_1)(P_0+P_n)\in\mathcal{N}$. Если $\alpha_0\neq\alpha_n$, то $P_0+P_n\in\mathcal{N}$, если $\alpha_1\neq-1$, то $P_0+P_n\in\mathcal{N}$, значит $\alpha_0=\alpha_n$, $\alpha_1=-1$, т.е. $X_1=G_0+G_n+\alpha_0(P_0+P_n)-P_1+\sum\limits_{i=2}^{n-1}\alpha_iP_i$. Тогда автоморфизмом $\exp(\alpha_0 T)$ генератор X_1 переводится в

$$X_1'=G_0+G_n-P_1+\sum_{i=2}^{n-1}\alpha_i P_i.$$

2). Пусть $X_1\in\mathcal{N}$, $X_2=G_1+\gamma G_2+\sum\limits_{i=0}^{n}\beta_i P_i\in\mathcal{N}$, $P_0+P_n\notin\mathcal{N}$.

Тогда $X_1=G_0+G_n-P_1+\sum\limits_{i=2}^{n-1}\alpha_i P_i$,

$$Y_1=[T+H_1,X_2]=(\beta_n-\beta_0-1)P_1-\beta_1(P_0+P_n)-(G_0+G_n)-\gamma P_2\in\mathcal{N}.$$

Следовательно $X_1+Y_1=(\beta_n-\beta_0-2)P_1-\beta_1(P_0+P_n)-\gamma P_2+\sum\limits_{i=3}^{n-1}\alpha_i P_i\in\mathcal{N}$, но так как $[T+H_1,X_1+Y_1]=(2+\beta_0-\beta_n)(P_0+P_n)$, то

$\beta_n=2+\beta_0$, $-\beta_1(P_0+P_n)-\gamma P_2+\sum_{i=3}^{n-1}\alpha_i P_i \in \mathcal{N}$, но

$\exp(\beta_1 T)\cdot X_2\cdot \exp(-\beta_1 T) = G_1+\beta_0(P_0+P_n)+2P_n+\sum_{i=2}^{n-1}\beta_i P_i+\gamma G_2$,

$\exp(\beta_1 T)\cdot X_1\cdot \exp(-\beta_1 T) = G_0+G_n-P_1+\sum_{i=2}^{n-1}\alpha_i P_i-\beta_1(P_0+P_n)$,

а значит $G_0+G_n-P_1+\gamma P_2\in\mathcal{N}$. Далее нетрудно заметить, что

$$\exp(\lambda(2J_{0n}+\mathbb{D}))(G_1+\beta_0(P_0+P_n)+2P_n)\exp(-\lambda(2J_{0n}+\mathbb{D}))=$$
$$=(G_1+P_n-P_0)e^{\lambda}+(\beta_0+1)(P_0+P_n)e^{-\lambda}.$$

Таким образом в зависимости от значения β_0 X_2 сопряжен либо $G_1+2P_n+\sum_{i=2}^{n-1}\beta_i P_i$ $(\beta_0>-1)$, либо $G_1-2P_0+\sum_{i=2}^{n-1}\beta_i P_i$ $(\beta_0<-1)$, либо $G_1+P_n-P_0+\sum_{i=2}^{n-1}\beta_i P_i$ $(\beta_0=-1)$.

3). Пусть $X_1\in\mathcal{N}$, $X_2\in\mathcal{N}$, $P_0+P_n\in\mathcal{N}$, $P_1\notin\mathcal{N}$; тогда $\alpha_0=\alpha_n=0$ (см. I)), $X_1=G_0+G_n+\alpha P_1+\sum_{i=2}^{n-1}\alpha_i P_i$,

$(\beta_n-\beta_0-1+\alpha)P_1+\sum_{i=2}^{n-1}\alpha_i P_i-\gamma P_2\in\mathcal{N}$ (см. 2)),

$X_1'=G_0+G_n+(1+\beta_0-\beta_n)P_1+\gamma P_2\in\mathcal{N}$, причем с точностью до сопряженности $\beta_1=0$, $\beta_n=0$. Значит

$G_0+G_n+(\beta_0+1)P_1+\gamma P_2\in\mathcal{N}$, $G_1+\gamma G_2+\beta_0 P_0+\sum_{i=2}^{n-1}\beta_i P_i\in\mathcal{N}$

Предложение доказано.

Предложение I.I.5. Пусть $F=\langle \mathbb{D}+\lambda J_{0n}\rangle$ $(\lambda>0)$, $\mathcal{N}$ - F-инвариантное подпространство пространства $\overline{\mathcal{M}[0,n]}$. Если $\lambda\neq 1$, $\lambda\neq 2$, то $[\mathbb{D},\mathcal{N}]\subset\mathcal{N}$, $[J_{0n},\mathcal{N}]\subset\mathcal{N}$. Если же $\mathcal{N}$ - нерасслоенное подпространство и $\lambda=1$, то

$\mathcal{N}=\langle P_0-P_n\pm(G_0+G_n)\rangle\oplus\mathcal{N}_1$, где $[\mathbb{D},\mathcal{N}_1]\subset\mathcal{N}_1$, $[J_{0n},\mathcal{N}_1]\subset\mathcal{N}_1$;

при $\lambda=2$ $\mathcal{N}=\langle P_0-P_n-G_1, \varepsilon(G_0+G_n+\alpha P_1+\beta P_2)\rangle\oplus\mathcal{N}_1$ $(\varepsilon\in\{0,1\})$, где $[\mathbb{D},\mathcal{N}_1]\subset\mathcal{N}_1$, $[J_{0n},\mathcal{N}_1]\subset\mathcal{N}_1$ (если $n=2$, то $\beta=0$).

Доказательство. Пусть $X_1=\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i P_i+\beta_i G_i)+\alpha(P_0+P_n)+$ $+\beta(G_0+G_n)+\gamma(P_0-P_n)+\delta(G_0-G_n)\in\mathcal{N}$. Тогда

$$\tfrac{1}{\lambda}(X_3-X_1)=(\lambda+2)[\alpha(P_0+P_n)+\delta(G_0-G_n)]+(\lambda-2)[\beta(G_0+G_n)+\gamma(P_0-P_n)],$$
$$\tfrac{1}{\lambda}(X_4-X_2)=(\lambda+2)(\lambda+1)[-\alpha(P_0+P_n)+\delta(G_0-G_n)]+(\lambda-2)(\lambda-1)[-\beta(G_0+G_n)+\gamma(P_0-P_n)],$$
$$\tfrac{1}{\lambda}(X_5-X_3)=(\lambda+2)(\lambda+1)^2[\alpha(P_0+P_n)+\delta(G_0-G_n)]+(\lambda-2)(\lambda-1)^2[\beta(G_0+G_n)+\gamma(P_0-P_n)],$$
$$\tfrac{1}{\lambda}(X_6-X_4)=(\lambda+2)(\lambda+1)^3[-\alpha(P_0+P_n)+\delta(G_0-G_n)]+(\lambda-2)(\lambda-1)^3[-\beta(G_0+G_n)+\gamma(P_0-P_n)],$$

где $X_{i+1}=[\mathbb{D}+\lambda J_{0n}, X_i]$.

Но
$$\begin{vmatrix} (\lambda+2)\alpha & (\lambda+2)\delta & (\lambda-2)\beta & (\lambda-2)\gamma \\ -(\lambda+1)(\lambda+2)\alpha & (\lambda+1)(\lambda+2)\delta & -(\lambda-1)(\lambda-2)\beta & (\lambda-1)(\lambda-2)\gamma \\ (\lambda+1)^2(\lambda+2)\alpha & (\lambda+1)^2(\lambda+2)\delta & (\lambda-1)^2(\lambda-2)\beta & (\lambda-1)^2(\lambda-2)\gamma \\ -(\lambda+1)^3(\lambda+2)\alpha & (\lambda+1)^3(\lambda+2)\delta & -(\lambda-1)^3(\lambda-2)\beta & (\lambda-1)^3(\lambda-2)\gamma \end{vmatrix} = 64\alpha\beta\gamma\delta\cdot\lambda^2\cdot(\lambda^2-1)(\lambda^2-4)^2$$

При $\lambda>0$, $\lambda\neq1$, $\lambda\neq2$ $\alpha(P_0+P_n)\in\mathcal{N}$, $\beta(G_0+G_n)\in\mathcal{N}$, $\gamma(P_0-P_n)\in\mathcal{N}$, $\delta(G_0-G_n)\in\mathcal{N}$. Пусть $\lambda=1$, тогда $\alpha(P_0+P_n)\in\mathcal{N}$, $\delta(G_0-G_n)\in\mathcal{N}$. Таким образом
$$\beta(G_0+G_n)+\gamma(P_0-P_n)\in\mathcal{N},\quad X_1=\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i P_i+\beta_i G_i).$$
Пусть $\lambda=2$, тогда $\alpha(P_0+P_n)+\delta(G_0-G_n)\in\mathcal{N}$,
$$X_1=\beta(G_0+G_n)+\gamma(P_0-P_n)+\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i P_i+\beta_i G_i)\in\mathcal{N}.$$
Но $[\mathbb{D}+2J_{0n}, \alpha(P_0+P_n)+\delta(G_0-G_n)]=-3\alpha(P_0+P_n)+3\delta(G_0+G_n)$, следовательно $\alpha(P_0+P_n)\in\mathcal{N}$, $\delta(G_0+G_n)\in\mathcal{N}$,
$$X_2=\sum_{i=1}^{n-1}(-\alpha_i P_i+\beta_i G_i)-\beta(G_0+G_n)+\gamma(P_0-P_n).$$
Тогда
$$\tfrac{1}{2}(X_1+X_2)=\gamma(P_0-P_n)+\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i G_i\in\mathcal{N},$$
$$\tfrac{1}{2}(X_1-X_2)=\beta(G_0+G_n)+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i P_i\in\mathcal{N}.$$
Но с точностью до $G_3(1,n)$-сопряженности $\beta_1=-\gamma$, $\beta_i=0$ $(i=\overline{2,n-1})$, $\alpha_j=0$ $(j=\overline{3,n-1})$. Таким образом $\beta(G_0+G_n)+\alpha_1P_1+\alpha_2P_2\in\mathcal{N}$, $P_0-P_n-G_1\in\mathcal{N}$. Предложение доказано.

Замечание. F-инвариантные нерасслоенные подпространства пространства $\mathfrak{M}[0,n]$ для случая $F=\langle S\dot{+}T+\alpha X\rangle$ $(X\in AO(n))$

описаны в работе [10] .

Таким образом предложения I.I.I – I.I.5 сводят задачу нахождения пространств инвариантных относительно алгебры $A \dotplus B$ (A – подалгебра алгебры $AO(1,n)$, B – подалгебра алгебры $ASl(2,R)$) к описанию пространств инвариантных относительно $A \oplus B$.

Для описания нерасщепляемых подалгебр полезны следующие утверждения.

Предложение I.I.6. Пусть F – подалгебра алгебры $AO(1,n) \oplus ASl(2,R)$. Если $D \in F$ или $S+T \in F$, то F обладает только расщепляемыми расширениями в $AG_3(1,n)$.

Доказательство. Пусть $\hat{F}$ – расширение F , т.е. $\pi(\hat{F})=F$, $X = Y + Z$, где $Y \in F$, $Z \in \mathfrak{M}[0,n]$.

Если $D \in F$, тогда $Y = \alpha T + \beta S + Y'$, где $Y' \in AO(1,n)$.

На основании коммутационных соотношений имеем

$$[D,[D,X]]=4(\alpha T+\beta S)+Z\,,\ [D,[D,[D,[D,X]]]]=16(\alpha T+\beta S)+Z.$$

Следовательно $Z \in \hat{F}$, т.е. расширение расщепляемо.

Аналогично рассматривается случай $S+T \in F$.

Теорема I.I.3. Подалгебра F алгебры $AO(1,n) \oplus ASl(2,R)$ обладает только расщепляемыми расширениями в $A\tilde{G}_3(1,n)$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий: I) F – полупростая, 2) с точностью до $O(1,n) \times Sl(2,R)$-сопряженности $F = U[1,k] \ni (L_1 \dotplus L_2 \oplus L_3)$, где L_2 – полупростая подалгебра алгебры $AO[k+1,n-1]$, L_1 – полупростая подалгебра алгебры $AO(k)$, неприводимая, если $L_3 = 0$ и несопряженная никакой подалгебре алгебры $AO(k-1)$, если $L_3 = ASl(2,R)$.

Доказательство. Достаточность. Если F – полупростая, то по теореме Уайтхеда [I7] она обладает только расщепляемыми расширениями.

Пусть $F=V[1,k]\ni(L_1+L_2)$ $(L_3=0)$. Предположим, что существует нерасщепляемое расширение в $A\tilde{G}_3(1,n)$. Т.к. L_1 и L_2 - полупростые, то расширение имеет вид

$$<H_i+\sum_{j=0}^{n}(\alpha_{ij}P_j+\beta_{ij}G_j)+\gamma_i M \mid i=\overline{1,k}>\ni(L_1+L_2).$$

Так как L_1 - неприводима в $V[1,k]$, то $\gamma_i=0$ $(i=\overline{1,k})$, $\alpha_{ij}=0$, $\beta_{ij}=0$ $(j=0, j=\overline{k+1,n})$, причем матрицы $(\alpha_{ij}),(\beta_{ij})$ $(i,j=\overline{1,k})$ кососимметричны. Тогда существует преобразование $g\in O(k)$, что $g(\alpha_{ij})g^{-1}=\lambda E$. Автоморфизм $\exp(-\lambda P_0)$ переводит матрицу λE в нулевую. Тепёрь существует преобразование $\bar{g}\in O(k)$, что $\bar{g}(\beta_{ij})\bar{g}^{-1}=\mu E$. Автоморфизм $\exp(-\mu G_0)$ переводит матрицу μE в нулевую. Таким образом расширение расщепимо.

Пусть $L_3=ASl(2,R)$. Тогда расширение может производится только присоединением M (предложение I.I.6). Но так как L_1, L_2 - - полупростые и L_1 не сопряжена подалгебре алгебры $AO(k-1)$, то такого расширения не существует.

Необходимость. Пусть F обладает только расщепляемыми расширениями. Тогда, в силу теоремы I.I.2, F совпадает с одной из следующих алгебр.

I). Пусть $F=<2J_{0n}+D, 2J_{n-1,n}-(T+S), 2J_{0,n-1}+T-S>\oplus A$, где $A\subset AO(n-2)$; если F неполупроста, то A неполупроста, т.е. A имеет вид $Q+Z(A)$, где Q - фактор Леви, $Z(A)$- центр [I7]. Пусть $Z(A)=<X_1,\dots,X_m>$ ($m\geq 1$). Тогда расширение

$\hat{F}=<2J_{0n}+D, 2J_{n-1,n}-(T+S), 2J_{0,n-1}+T-S>\oplus Q\oplus<X_i+\alpha_i M\mid i=\overline{1,m}>$ нерасщепляемо. Значит F - полупроста.

2). Пусть $F=<2J_{0n}+D, H_{n-1}+T>\oplus A$, где $A\subset AO(n-2)$. Эта алгебра неполупроста и обладает нерасщепляемым расширением

$$\hat{F}=<2J_{0n}+D+\alpha M, H_{n-1}+T>\oplus A.$$

3). Пусть $F=(A\oplus<T>)\ni<X+D>$, где $A\ni<X>\in AO(1,n)$. Эта алгебра неполупроста и обладает нерасщепляемым расширением

$\hat{F} = (A \oplus \langle T \rangle) \ni \langle X + D + \alpha M \rangle$.

4). Пусть $F = A \ni \langle X + Y \rangle$, где $A \ni \langle X \rangle \subset AO(1,n)$, $Y \in ASl(2,R)$. Эта алгебра неполупроста и обладает нерасщепляемым расширением $\hat{F} = A \ni \langle X + Y + \alpha M \rangle$.

5). Пусть $F = A \oplus B$, где $A \subset AO(1,n)$, $B \subset ASl(2,R)$. Если $B = \langle T \rangle$, то F неполупроста и обладает нерасщепляемым расширением $\hat{F} = A \oplus \langle T + \alpha M \rangle$. Аналогично, если $B = \langle S + T \rangle$, $B = \langle D \rangle$, $B = \langle D, T \rangle$. Если $B = 0$ либо $B = ASl(2,R)$ и A полупроста, то F также полупроста и обладает только расщепляемыми расширениями.

Пусть A неполупроста. Достаточно рассмотреть два случая.

а). A - подалгебра алгебры $AO(1,k) \oplus L$, где L - неполупростая подалгебра алгебры $AO[k+1,n]$. Тогда $L = Q \oplus Z(L)$; если $Z(L) = \langle X_1, \ldots, X_m \rangle$, то расширение $\hat{F} = (AO(1,k) \dotplus (Q \oplus \oplus \langle X_i + \alpha_i M \mid i = \overline{1,m} \rangle)) \oplus B$ нерасщепляемо.

б). Пусть A' - подалгебра алгебры $U[1,k] \ni (AO(k) \oplus \langle J_{0n} \rangle) \oplus \oplus AO[k+1,n-1]$. Если $A = \langle J_{0n} + X_0, X_1, \ldots, X_m \rangle$, то $[J_{0n} + X_0, X_i] = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} X_j$ $(i = \overline{1,m})$. Тогда расширение $\hat{F} = \langle J_{0n} + X_0 + \alpha M, X_1, \ldots, X_m \rangle \oplus B$ нерасщепляемо. Пусть A - подалгебра алгебры $U[1,k] \ni AO(k) \oplus AO[k+1,n-1]$, то есть $A = L_0 \dotplus L_1 \dotplus L_2$, где L_0 - подалгебра алгебры $U[1,k]$, L_1 - подалгебра алгебры $AO(k)$, L_2 - подалгебра алгебры $AO[k+1,n-1]$. Если L_2 неполупроста, то $L_2 = Q + Z(L_2) = Q \oplus \langle X_1, \ldots, X_m \rangle$. Тогда расширение $\hat{F} = L_0 \dotplus L_1 \dotplus (Q \oplus \langle X_i + \alpha_i M \mid i = \overline{1,m} \rangle) \oplus B$ нерасщепляемо. Аналогично, если L_1 неполупроста. Пусть L_1 и L_2 - полупростые алгебры, $B = 0$, L_1 приводима в пространстве $U[1,k]$, т.е. $[L_1, U[1,r]] \subset U[1,r]$, $[L_1, U[r+1,k]] \subset U[r+1,k]$ $(1 \le r \le k-1)$. Тогда расширение $\hat{F} = \langle H_i + \alpha P_i \mid i = \overline{1,r} \rangle \oplus U[1+r,k] \ni L_1 \dotplus L_2$ нерасщепляемо.

Если же $B=ASl(2,R)$ и L_1 сопряжена некоторой подалгебре алгебры $AO(k-1)$, то расширение $\hat{F}=(U[1,k-1]\oplus\langle H_k+\alpha M)\supset\supset(L_1\dotplus L_2\oplus ASl(2,R))$ нерасщепляемо. Теорема доказана.

§2. Абелевы подалгебры алгебр $AG_3(1,n)$ и $A\tilde{G}_3(1,n)$.

Теорема I.2.I. Пусть L – ненулевая абелева подалгебра алгебры $A\tilde{G}_3(1,n)$, $\varepsilon,\lambda;\mu,\nu,\varkappa\in\{0,1\}$. Если $\tau(L)=\langle D\rangle$, то L сопряжена с $L_1\dotplus L_2\dotplus L_3\dotplus L_4$, где $L_1\subset AH(2d)$ $(0\leq d\leq[\frac{n}{2}]$ $)$, $L_2\subset\langle M\rangle$, а алгебры L_3, L_4 удовлетворяют одному из условий:

I) $L_3=\langle\dot{D}\rangle$, $L_4=\varepsilon\langle J_{0n}\rangle+\lambda U[2d+1,2d+\tau]$

$(\varepsilon\lambda\neq1$, $d\leq[\frac{n-1}{2}]$ при $\varepsilon=1$, $1\leq\tau\leq n-1-2d$ при $\lambda=1$ $)$;

2) $L_3=\langle J_{0n}+D+\varepsilon(P_0+\alpha G_0)\rangle$ $(d\leq[\frac{n-1}{2}])$, $L_4=\langle P_0-P_n+\alpha(G_0+G_n)\rangle$ при $\varepsilon=1$, $L_4=\langle P_0-P_n\pm(G_0+G_n)\rangle$ при $\varepsilon=0$.

Если $\tau(L)=\langle S+T\rangle$, то L сопряжена с $L_1\dotplus L_2\dotplus L_3\dotplus L_4\dotplus L_5$, где $L_1\subset AH(2d)$ $(0\leq d\leq[\frac{n}{2}]$ $)$, $L_2\subset\langle M\rangle$, а алгебры L_3,L_4,L_5 удовлетворяют одному из условий:

I) $L_3=\langle S+T\rangle$, $L_4=\varepsilon\langle J_{0n}\rangle+\lambda U[2d+1,2d+\tau]$

$(\varepsilon\lambda\neq1$, $d\leq[\frac{n-1}{2}]$ при $\varepsilon=1$, $1\leq\tau\leq n-1-2d$ при $\lambda=1$ $)$, $L_5=0$;

2) $L_3=J(d+1,t)+S+T+\alpha(P_1+G_2)$ $\quad(d+1\leq t\leq[\frac{n}{2}]$, $\alpha\geq0)$,

$L_4=\varepsilon\langle J_{0n}\rangle+\lambda U[2t+1,2t+\tau]$ $(\varepsilon\lambda\neq1$, $t\leq[\frac{n-1}{2}]$ при $\varepsilon=1$, $1\leq\tau\leq n-1-2t$ при $\lambda=1$ $)$, $L_5=0$ $(\alpha>0)$ или $L_5=\langle P_{2i-1}+G_{2i}\,|\,i=\overline{d+1,s}\rangle$ $(s\leq t$, $\alpha\geq0)$.

Если $\tau(L)=\langle T\rangle$, то L сопряжена с $L_1\dotplus L_2\dotplus L_3\dotplus L_4\dotplus L_5\dotplus L_6$, где $L_1\subset AH(2d)$ $(0\leq d\leq[\frac{n}{2}]$ $)$, $L_2\subset\langle M\rangle$, а алгебры L_3,L_4,L_5,L_6 удовлетворяют одному из условий:

I) $L_3=\langle T+\varepsilon G_{2d+1}\rangle$, $L_4=\lambda\langle P_0+P_n\rangle+\mu\langle J_{0n}\rangle$
($\lambda\mu\neq 1$, $d\leq[\frac{n-1}{2}]$ при $\varepsilon=0$, $\lambda+\mu=1$; $d\leq[\frac{n}{2}]-1$ при $\varepsilon=\lambda+\mu=1$),
$L_5=\nu W[2d+1+\varepsilon, 2d+\tau]$ $(1+\varepsilon\leq\tau\leq n-2d-\mu)$ или
$L_4=\lambda\langle P_0+P_n\rangle+\langle H_{2d+1+\varepsilon}+P_0\rangle$ $(d\leq[\frac{n-\varepsilon-2}{2}])$, $L_5=\mu W[2d+2+\varepsilon, 2d+\tau]$
$(2+\varepsilon\leq\tau\leq n-2d-1)$ или $L_4=\lambda\langle P_0+P_n\rangle+\langle H_i+\alpha_i P_i \mid i=\overline{2d+1+\varepsilon, 2d+\tau}\rangle$
$(\varepsilon+1\leq\tau\leq n-2d-1)$, $L_5=\mu W[2d+\tau+1, 2d+s]$ $(\tau+1\leq s\leq n-1-2d)$, $L_6=0$;
2) $L_3=\langle T+G_0\rangle$, $L_4=0$, $L_5=\mu W[2d+1, 2d+\tau]$ $(1\leq\tau\leq n-1-2d)$, $L_6=0$;
3) $L_3=\langle T+G_0+G_n\rangle$, $L_4=\lambda\langle P_0+P_n\rangle+\mu\langle H_i+\alpha_i P_i \mid i=\overline{2d+1, 2d+\tau}\rangle$
$(d\leq[\frac{n-1}{2}]$ при $\lambda=1$, $1\leq\tau\leq n-1-2d)$, $L_5=\nu W[2d+1+\mu\tau, 2d+s]$
$(\mu\tau+1\leq s\leq n-1-2d)$, $L_6=0$;
4) $L_3=\langle H_{2d+1}+T+\varepsilon G_{2d+2}+\alpha G_{2d+1}\rangle$ (если $\varepsilon=0$, $\alpha\in\{0, \pm 1\}$; $d\leq[\frac{n-\varepsilon-2}{2}]$),
$L_4=\lambda\langle P_0+P_n\rangle+\mu\langle H_i+\alpha_i P_i \mid i=\overline{2d+2+\varepsilon, 2d+\tau}\rangle$ $(2+\varepsilon\leq\tau\leq n-1-2d)$,
$L_5=\nu W[2d+2+\varepsilon+\mu(\tau-\varepsilon-1), 2d+s]$ $(2+\varepsilon+\mu(\tau-\varepsilon-1)\leq s\leq n-1-2d-\mu)$, $L_6=0$ при
$\alpha\neq 0$, $L_6\subset\langle G_0+G_n-P_{2d+1}\rangle$ при $\alpha=0$;
5) $L_3=\langle H_{2d+1}+T+\alpha G_0\rangle$ $(\alpha>0, d\leq[\frac{n}{2}]-1)$, $L_4=0$,
$L_5=\lambda W[2d+2, 2d+\tau]$ $(2\leq\tau\leq n-1-2d)$, $L_6\subset\langle G_0+G_n-P_{2d+1}\rangle$.

Если $\tau(L)=0$, то L сопряжена с $L_1\dotplus L_2\dotplus L_3\dotplus L_4\dotplus L_5\dotplus L_6$, где $L_1\subset AH(2d)$, $L_2\subset\langle M\rangle$, а алгебры L_3, L_4, L_5, L_6 удовлетворяют одному из условий:

I) $L_3=\langle J_{0n}\rangle$ $(d\leq[\frac{n-1}{2}])$, $L_4=\lambda\langle G_i+\gamma_i P_i \mid i=\overline{2d+1, 2d+\tau}\rangle$
$(1\leq\tau\leq n-1-2d)$, $L_5=\mu W[2d+1+\lambda\tau, 2d+s]$

$(1+\lambda\tau \le s \le n-1-2d$ $)$, $L_6=0$;

2) $L_3=\lambda\langle H_i+\alpha_i G_i+\beta_i P_i \mid i=\overline{2d+1,2d+\tau}\rangle$ $(1\le\tau\le n-1-2d$ $)$,

$L_4=\mu\langle G_i+\gamma_i P_i \mid i=\overline{2d+1+\lambda\tau,\,2d+s}\rangle$ $(1+\lambda\tau\le s\le n-1-2d)$,

$L_5=\nu W[2d+1+\mu s+(\mu-1)\lambda\tau,\,2d+t]$ $(1+\mu s+(\mu-1)\lambda\tau\le t\le -2d-1+n$ $)$,

$L_6\subset\langle P_0+P_n,\,G_0+G_n\rangle$;

3) $L_3=\langle H_{2d+1}+P_0\rangle$ $(d\le[\frac{n-2}{2}]$ $)$, $L_4=\lambda\langle G_i+\gamma_i P_i \mid i=\overline{2d+2,\,2d+\tau}\rangle$

$(2\le\tau\le n-1-2d)$, $L_5=\mu W[2d+1+\lambda\tau,\,2d+s]$ $(1+\lambda\tau\le s\le n-1-2d$ $)$,

$L_6\subset\langle P_0+P_n\rangle$;

4) $L_3=\langle G_0+P_{2d+1},\,G_{2d+1}+\alpha P_{2d+1}-P_0\rangle$ $(d\le[\frac{n-1}{2}])$,

$L_4=\mu\langle G_i+\gamma_i P_i \mid i=\overline{2d+2,\,2d+\tau}\rangle$ $(2\le\tau\le n-2d$ $)$,

$L_5=\nu W[2d+\mu(\tau-1)+2,\,2d+s]$ $(\mu(\tau-1)+2\le s\le n-2d$ $)$, $L_6=0$;

5) $L_3=\lambda\langle P_0+P_n+\varepsilon G_{2d+1},\,2P_1+G_0-G_n\rangle+\mu\langle P_0\rangle$ $(\lambda\mu\ne 1$ $, d\le[\frac{n-\lambda-\varepsilon}{2}])$,

$L_4=\nu W[2d+1+\lambda\varepsilon,\,2d+\tau]$ $(1+\lambda\varepsilon\le\tau\le n-\lambda-2d)$, $L_6\subset\lambda\langle G_0+G_n\rangle$,

$L_5=\varkappa\langle G_i+\gamma_i P_i \mid i=\overline{2d+\tau+1,\,2d+s}\rangle$ $(1+(\nu-1)\lambda\varepsilon+\nu\tau\le s\le n-1-2d$ $)$.

Доказательство. I) $\tau(L)=\langle D\rangle$. Пусть $L=\langle X_0+D,X_1,\dots,X_p\rangle+\mathfrak{N}$, где $F=\langle X_0,X_1,\dots,X_p\rangle\subset AO(1,n)$, $\mathfrak{N}<\mathfrak{M}[0,n]$, $[X_0,X_i]=[X_i,X_j]=0$ $(i,j=\overline{1,p}$ $)$. С точностью до $O(1,n)$ -сопряженности F подалгебра либо алгебры $\langle J_{0n}\rangle\oplus AH(2k)$, либо алгебры $AH(2k)\oplus V[2k+1,2k+\tau]$. В силу предложений I.I.2, I.I.5 пространство $\mathfrak{N}$ может быть отлично от $\langle M\rangle$ лишь при $X_0=J_{0n}+\alpha_1 J_{12}+\dots+\alpha_\ell J_{2\ell-1,2\ell}$. При этом возможно нерасщепляемое расширение $\langle J_{0n}+D+P_0+\alpha G_0+\alpha_1 J_{12}\dots\rangle$. Других нерасщепляемых расширений $\langle X_0+D,X_1,\dots,X_p\rangle$ нет, в чем нетрудно убедиться непосредственными вычислениями. При этом пространство, аннулируемое $\langle X_0 + D \rangle$, является подпространством ~~пространства~~ $\langle P_0 - P_n, G_0 + G_n, M \rangle$.

2) $\tau(L) = \langle S + T \rangle$. В силу предложения I.I.3 этот случай сводится к задаче для подалгебр алгебры $A\tilde{G}(3,n)$, которая рассмотрена в работе [IO].

3) $\tau(L) = \langle T \rangle$. В силу предложений I.I.I, I.I.4 следует рассмотреть случаи $\langle T \rangle \dotplus V[0,n] \subset L$ и $\langle T + H_{n-1} \rangle \dotplus V[0,n-2] \subset L$.

Пусть $(\tau + \varphi)L = \langle T \rangle$, тогда $L = \langle T \rangle \dotplus A$, где A - абелева подалгебра алгебры $AP(1,n) \oplus \langle M \rangle$; $(\tau + \varphi)L = \langle T + G_0 \rangle$, тогда $L = \langle T + G_0 \rangle \dotplus A$, где A - абелева подалгебра алгебры $AE(n) \oplus \langle M \rangle$; $(\tau + \varphi)L = \langle T + G_n \rangle$, тогда $L = \langle T + G_n \rangle \dotplus A$, где A - абелева подалгебра алгебры $AP(1,n-1) \oplus \langle M \rangle$; $(\tau + \varphi)L = \langle T + G_0 + G_n \rangle$, тогда $L = \langle T + G_0 + G_n \rangle \dotplus A$, где A - абелева подалгебра алгебры $\langle M \rangle \oplus A\tilde{G}(0,n-1) = \langle M, P_0 + P_n, H_i, P_i, J_{ij} \mid i,j = \overline{1,n-1} \rangle$.

Пусть $\pi(L) = \langle T + H_{n-1} \rangle$. Возможны следующие случаи: $(\pi + \varphi)L = \langle T + H_{n-1} \rangle + L'$, $\langle T + H_{n-1} + G_{n-1} \rangle + L'$, $\langle T + H_{n-1} + G_{n-2} \rangle + L'$, $\langle T + H_{n-1} + G_{n-1} + \alpha G_{n-2} \rangle + L'$, $\langle T + H_{n-1} + \alpha G_0 \rangle + L'$ $(\alpha > 0)$ (что других нерасщепляемых расширений нет, проверяется непосредственными вычислениями). Для этих случаев L' является абелевой подалгеброй следующих алгебр (соответственно): $\langle M, G_0 + G_n - P_{n-1}, P_0 + P_n, H_i, P_i, J_{ij} \mid i,j = \overline{1,n-2} \rangle =$

$= \langle M, G_0 + G_n - P_{n-1} \rangle \oplus A\tilde{G}(0,n-2)$, $A\tilde{G}(0,n-2) \oplus \langle M \rangle$, $A\tilde{G}(0,n-3) \oplus$

$\oplus \langle M, G_0 + G_n - P_{n-1} \rangle$, $\langle M \rangle \oplus A\tilde{G}(0,n-3)$, $\langle M, G_0 - G_n - P_{n-1} \rangle \oplus AG(0,n-3)$

Таким образом для завершения доказательства следует воспользоваться результатами работ [8, 9, IO, 42].

4) $\tau(L) = 0$. Тогда $\omega(L) = \langle J_{0n} \rangle \dotplus AH(2k)$ или

$\omega(L) = AH(2k) \dotplus V[2k+1, 2k+2]$ или $\omega(L) = AH(2k)$. Первый и третий случаи сводятся к нахождению абелевых подалгебр алгебр

$\langle J_{0n}, M\rangle \oplus AG(0,n-1)$ и $\langle P_0, G_0, M\rangle \oplus AG(0,n-1)$ соответственно. Рассмотрим второй случай. Если с точностью до сопряженности $P_0 \in \Psi(L)$, то $L = \langle H_{n-1} + P_0 + \varepsilon G_{n-2}\rangle \dotplus L'$, где L' – абелева подалгебра алгебры $\langle M, G_{n-2}, P_{n-2} - \varepsilon(G_0+G_n), P_1, \ldots, P_{n-3}, G_1, \ldots, G_{n-3}, J_{ij} \mid i,j = \overline{1, n-2-\varepsilon}\rangle \cong \varepsilon\langle G_{n-2}, P_{n-2} - \varepsilon(G_0+G_n)\rangle \oplus AG(0, n-2-\varepsilon)$. В противном случае $L \subset \langle P_0 + P_n\rangle \dotplus AG(0,k) \dotplus L'$, где L' – абелева подалгебра алгебры $\langle H_i, G_i, P_i \mid i = \overline{k+1, \ell}\rangle$. Пусть $L_1 = \langle H_i + \sum_j (\alpha_{ij} G_j + \beta_{ij} P_j) \mid i,j = \overline{k+1,\ell}\rangle$. Так как L_1 – абелева, то $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, а следовательно существует ортогональное преобразование, диагонализирующее матрицу (α_{ij}). Но теперь, в силу коммутативности L', имеет место равенство $\alpha_{jj}\beta_{ij} = \alpha_{ii}\beta_{ji}$, следовательно $(\alpha_{ii} - \alpha_{jj})\beta_{ij} = 0$, $\beta_{ij} = \beta_{ji}$. Пусть $\alpha_{ii} \neq \alpha_{jj}$, тогда $\beta_{ij} = \beta_{ji} = 0$, если $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, то существует ортогональное преобразование, диагонализирующее матрицу (β_{ij}). Таким образом $L' = \langle H_i + \alpha_i G_i + \beta_i P_i \mid i = \overline{k+1,\ell}$. Теорема доказана.

Следствие I.2.I. Максимальные абелевы подалгебры алгебры $A\tilde{G}_3(1,n)$ исчерпываются относительно $G_3(1,n)$-сопряженности следующими алгебрами:

$\langle M, D\rangle \oplus AH(n)$ $(n \equiv 0 \pmod 2)$, $\langle M, D, J_{0n}\rangle \oplus AH(n-1)$, $\langle M, D\rangle \oplus AH(2k) \oplus V[2k+1, n-1]$ $(k \leq [\frac{n-2}{2}])$, $\langle D + J_{0n}, M, P_0 - P_n \pm (G_0 + G_n)\rangle \oplus AH(n-1)$, $\langle D + J_{0n}, M, P_0 - P_n\rangle \oplus AH(n-1)$, $\langle D + J_{0n} + P_0, M, P_0 - P_n\rangle \oplus AH(n-1)$, $\langle D + J_{0n} + P_0 + \alpha G_0, P_0 - P_n + \alpha(G_0 + G_n), M\rangle \oplus AH(n-1)$, $\langle M, T, P_0\rangle \oplus AH(n-1)$ $(n \equiv 0 \pmod 2)$, $\langle M, T, J_{0n}\rangle \oplus AH(n-1)$ $(n \equiv 1 \pmod 2)$, $\langle M, T, P_0\rangle \oplus AH(2k) \oplus W[2k+1, n]$ $(k \leq [\frac{n-1}{2}])$,

$\langle M, T, J_{0n} \rangle \oplus AH(2K) \oplus W[2K+1, n-1]\ (K \le [\frac{n-2}{2}])$,
$\langle M, T, P_0+P_n \rangle \oplus AH(2K) \oplus \langle H_i + \alpha_i P_i \mid i=\overline{2K+1, n-1} \rangle\ (K \le [\frac{n-2}{2}])$,
$\langle M, T, P_0+P_n \rangle \oplus AH(2K) \oplus W[2K+1, 2K+\tau] \oplus \langle H_i + \alpha_i P_i \mid i=\overline{2K+\tau+1, n-1} \rangle$
$(1 \le \tau \le n-2-2K)$, $\langle M, T, P_0+P_n, H_{n-1}+P_0 \rangle \oplus AH(n-2)\ (n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2))$,
$\langle M, T, P_0+P_n, H_{n-1}+P_0 \rangle \oplus AH(2K) \oplus W[2K+1, n-2]\ (K \le [\frac{n-3}{2}])$,
$\langle M, T+G_n, P_0 \rangle \oplus AH(n-1)\ (n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2))$, $\langle M, T+G_{2K+1}, P_0 \rangle \oplus$
$\oplus AH(2K) \oplus W[2K+2, n]\ (K \le [\frac{n-2}{2}])$, $\langle M, T+G_{n-1}, J_{0n} \rangle \oplus AH(n-2)$
$(n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2))$, $\langle M, T+G_{2K+1}, J_{0n} \rangle \oplus AH(2K) \oplus W[2K+2, n-1]$
$(K \le [\frac{n-3}{2}])$, $\langle M, T+G_{2K+1}, P_0+P_n \rangle \oplus \langle H_i + \alpha_i P_i \mid i=\overline{2K+2, n-1} \rangle \oplus AH(2K)$
$(K \le [\frac{n-3}{2}])$, $\langle M, T+G_{2K+1}, P_0+P_n \rangle \oplus AH(2K) \oplus W[2K+2, 2K+\tau] \oplus$
$\oplus \langle H_i + \alpha_i P_i \mid i=\overline{2K+\tau+1, n-1} \rangle\ (2 \le \tau \le n-2-2K)$, $\langle M, T+G_{n-2},$
$H_{n-1}+P_0, P_0+P_n \rangle \oplus AH(n-3)\ (n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2))$, $\langle M, T+G_{2K+1}, P_0+P_n,$
$H_{n-1}+P_0 \rangle \oplus AH(2K) \oplus W[2K+2, n-2]\ (K \le [\frac{n-4}{2}])$, $\langle M, T+G_0 \rangle \oplus AH(n)$
$(n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2))$, $\langle M, T+G_0 \rangle \oplus AH(2K) \oplus W[2K+1, n]\ (K \le [\frac{n-1}{2}])$,
$\langle M, T+G_0+G_n, P_0+P_n \rangle \oplus AH(n-1)\ (n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2))$, $\langle M, T+G_0+G_n,$
$P_0+P_n \rangle \oplus AH(2K) \oplus W[2K+1, n-1]\ (K \le [\frac{n-2}{2}])$, $\langle M, T+G_0+G_n, P_0+P_n \rangle \oplus$
$\oplus AH(2K) \oplus \langle H_i + \alpha_i P_i \mid i=\overline{2K+1, n-1} \rangle\ (K \le [\frac{n-2}{2}])$, $\langle M, T+G_0+G_n,$
$P_0+P_n \rangle \oplus AH(2K) \oplus W[2K+1, 2K+\tau] \oplus \langle H_i + \alpha_i P_i \mid i=\overline{2K+\tau+1, n-1} \rangle$
$(1 \le \tau \le n-2-2K)$, $\langle M, H_{n-1}+T, P_0+P_n, G_0+G_n-P_{n-1} \rangle \oplus AH(n-2)$
$(n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2))$, $\langle M, H_{2K+1}+T, P_0+P_n, G_0+G_n-P_{2K+1} \rangle \oplus AH(2K) \oplus$

$\oplus W[2K+2, n-1]$ $(K \leq [\frac{n-3}{2}])$, $\langle M, H_{2K+1}+T, P_0+P_n, G_0+G_n-P_{2K+1}\rangle \oplus$ $\oplus AH(2K) \oplus \langle H_i+\alpha_i P_i \mid i=\overline{2K+2, n-1}\rangle$, $\langle M, H_{2K+1}+T, P_0+P_n,$ $G_0+G_n-P_{2K+1}\rangle \oplus AH(2K) \oplus W[2K+2, 2K+\tau] \oplus \langle H_i+\alpha_i P_i \mid$ $i=\overline{2K+\tau+1, n-1}\rangle$ $(2 \leq \tau \leq n-2-2K)$, $\langle M, T+H_{n-1}+G_{n-1}, P_n+P_0\rangle \oplus$ $\oplus AH(n-2)$ $(n \equiv 0 \pmod 2)$, $\langle M, T+H_{2K+1}+G_{2K+1}, P_0+P_n\rangle \oplus AH(2K) \oplus$ $\oplus W[2K+2, n-1]$ $(K \leq [\frac{n-3}{2}])$, $\langle M, T+H_{2K+1}+G_{2K+1}, P_0+P_n\rangle \oplus$ $\oplus AH(2K) \oplus \langle H_i+\alpha_i P_i \mid i=\overline{2K+2, n-1}\rangle$ $(K \leq [\frac{n-3}{2}])$, $\langle M, T+H_{2K+1}+G_{2K+1}, P_0+P_n\rangle \oplus AH(2K) \oplus W[2K+2, 2K+\tau] \oplus$ $\oplus \langle H_i+\alpha_i P_i \mid i=\overline{2K+\tau+1, n-1}\rangle$ $(2 \leq \tau \leq n-2-2K)$, $\langle M, P_0+P_n,$ $T+H_{n-2}+G_{n-1}, G_0+G_n-P_{n-2}\rangle \oplus AH(n-3)$ $(n \equiv 1 \pmod 2)$, $\langle M, T+H_{2K+1}+G_{2K+2}, P_0+P_n, G_0+G_n-P_{2K+1}\rangle \oplus AH(2K) \oplus$ $\oplus W[2K+3, n-1]$ $(K \leq [\frac{n-4}{2}])$, $\langle M, T+H_{2K+1}+G_{2K+2}, G_0+G_n-P_{2K+1},$ $P_0+P_n\rangle \oplus AH(2K) \oplus \langle H_i+\alpha_i P_i \mid i=\overline{2K+3, n-1}\rangle$ $(K \leq [\frac{n-4}{2}])$, $\langle M, T+H_{2K+1}+G_{2K+2}, G_0+G_n-P_{2K+1}, P_0+P_n\rangle \oplus AH(2K) \oplus$ $\oplus W[2K+3, 2K+\tau] \oplus \langle H_i+\alpha_i P_i \mid i=\overline{2K+\tau+1, n-1}\rangle$ $(3 \leq \tau \leq n-2-2K)$, $\langle M, T+H_{n-2}+G_{n-2}+\alpha G_{n-1}, P_0+P_n\rangle \oplus AH(n-3)$ $(n \equiv 1 \pmod 2)$, $\langle M, T+H_{2K+1}+G_{2K+1}+\alpha G_{2K+2}, P_0+P_n\rangle \oplus AH(2K) \oplus W[2K+3, n-1]$ $(K \leq [\frac{n-4}{2}])$, $\langle M, T+H_{2K+1}+G_{2K+1}+\alpha G_{2K+2}, P_0+P_n\rangle \oplus AH(2K) \oplus$ $\oplus \langle H_i+\alpha_i P_i \mid i=\overline{2K+3, n-1}\rangle$ $(K \leq [\frac{n-4}{2}])$, $\langle M, T+H_{2K+1}+G_{2K+1}+$ $+\alpha G_{2K+2}, P_0+P_n\rangle \oplus AH(2K) \oplus W[2K+3, 2K+\tau] \oplus \langle H_i+\alpha_i P_i \mid$

$i=\overline{2k+\tau+1,n-1}>$ $(3\le\tau\le n-2-2k)$, $<M, H_{n-1}+T+\alpha G_0,$ $G_0+G_n-P_{n-1}>\oplus AH(n-2)$ $(n\equiv 0 \pmod 2)$, $<M, H_{2k+1}+T+\alpha G_0,$ $G_0+G_n-P_{2k+1}>\oplus AH(2k)\oplus W[2k+2,n-1]$ $(k\le[\frac{n-3}{2}])$, $<M, S+T>\oplus AH(n)$ $(n\equiv 0 \pmod 2)$, $<M, S+T, J_{0n}>\oplus AH(n-1)$, $<M, J(k+1,\frac{n}{2})+S+T>\oplus<P_{2i-1}+G_{2i} \mid i=\overline{k+1,\frac{n}{2}}>\oplus AH(2k)$ $(n\equiv 0 \pmod 2,\ k\le\frac{n}{2}-1)$, $<M, J_{0n}, J(k+1,[\frac{n-1}{2}])+S+T>\oplus$ $\oplus<P_{2i-1}+G_{2i} \mid i=\overline{k+1,[\frac{n-1}{2}]}>\oplus AH(2k)$ $(k\le[\frac{n-3}{2}])$, $<M, J_{0n}>\oplus AH(2k)\oplus W[2k+1,2k+\tau]\oplus<G_i+\gamma_i P_i \mid i=\overline{2k+\tau+1,n-1}>$ $(1\le\tau\le n-2-2k)$, $<M, H_{2k+1}+P_0, P_0+P_n>\oplus AH(2k)\oplus<G_i+\gamma_i P_i \mid$ $i=\overline{2k+2,n-1}>$ $(k\le[\frac{n-3}{2}])$, $<M, H_{2k+1}+P_0, P_0+P_n>\oplus AH(2k)\oplus$ $\oplus W[2k+2,2k+\tau]\oplus<G_i+\gamma_i P_i \mid i=\overline{2k+\tau+1,n-1}>$ $(2\le\tau\le n-2-2k)$, $<M, G_0+P_n, G_n-P_0+\alpha P_n>\oplus AH(n-1)$ $(n\equiv 1 \pmod 2)$, $<M, G_0+P_n, G_n-P_0+\alpha P_n>\oplus AH(2k)\oplus W[2k+1,n-1]$ $(k\le[\frac{n-2}{2}])$, $<M, G_0+P_n, G_n-P_0+\alpha P_n>\oplus AH(2k)\oplus<G_i+\gamma_i P_i \mid i=\overline{2k+1,n-1}>$ $(k\le[\frac{n-2}{2}])$, $<M, G_0+P_n, G_n-P_0+\alpha P_n>\oplus AH(2k)\oplus<G_i+\gamma_i P_i \mid$ $i=\overline{2k+1,2k+\tau}>\oplus W[2k+\tau+1,n-1]$ $(1\le\tau\le n-2-2k)$, $<M, P_0+P_n+G_{n-1}, 2P_{n-1}+G_0-G_n, P_0-P_n>\oplus AH(n-2)$ $(n\equiv 0 \pmod 2)$, $<M, P_0+P_n+G_{n-1}, 2P_{n-1}+G_0-G_n, P_0-P_n>\oplus AH(2k)\oplus W[2k+1,n-2]$ $(k\le[\frac{n-3}{2}])$, $<M, P_0+P_n+G_{n-1}, 2P_{n-1}+G_0-G_n, P_0-P_n>\oplus AH(2k)\oplus$ $\oplus<G_i+\gamma_i P_i \mid i=\overline{2k+1,n-2}>$ $(k\le[\frac{n-3}{2}])$, $<M, P_0+P_n+G_{n-1}, P_0-P_n,$

$$2P_{n-1}+G_0-G_n\rangle \oplus AH(2K)\oplus \langle G_i+\gamma_i P_i \mid i=\overline{2K+1,2K+\tau}\rangle \oplus$$
$$\oplus W[2K+\tau+1,n-2]\ (1\le\tau\le n-3-2K),\ \langle M,P_0+P_n,G_0+G_n+P_0\rangle\oplus$$
$$\oplus AH(n-1)\ (n\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)),\ \langle M,P_0+P_n,G_0+G_n+P_0\rangle\oplus AH(2K)\oplus$$
$$\oplus W[2K+1,n-1]\ (K\le[\tfrac{n-2}{2}]),\ \langle M,P_0+P_n,G_0+G_n+P_0\rangle\oplus AH(2K)\oplus$$
$$\oplus\langle G_i+\gamma_i P_i \mid i=\overline{2K+1,n-1}\rangle\ (K\le[\tfrac{n-2}{2}]),\ \langle M,P_0+P_n,G_0+G_n+P_0\rangle\oplus$$
$$\oplus AH(2K)\oplus W[2K+1,2K+\tau]\oplus\langle G_i+\gamma_i P_i \mid i=\overline{2K+\tau+1,n-1}\rangle$$
$$(1\le\tau\le n-2-2K),\ \langle M,P_0+P_n,G_0+G_n\rangle\oplus AH(n-1)\ (n\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)),$$
$$\langle M,P_0+P_n,G_0+G_n\rangle\oplus AH(2K)\oplus W[2K+1,n-1]\ (K\le[\tfrac{n-2}{2}]),$$
$$\langle M,P_0+P_n,G_0+G_n\rangle\oplus AH(2K)\oplus\langle G_i+\gamma_i P_i \mid i=\overline{2K+1,n-1}\rangle\ (K\le[\tfrac{n-2}{2}]),$$
$$\langle M,P_0+P_n,G_0+G_n\rangle\oplus AH(2K)\oplus\langle H_i+\alpha_i G_i+\beta_i P_i \mid i=\overline{2K+1,n-1}\rangle\ (K\le[\tfrac{n-2}{2}]),$$
$$\langle M,P_0+P_n,G_0+G_n\rangle\oplus AH(2K)\oplus W[2K+1,2K+\tau]\oplus\langle G_i+\gamma_i P_i \mid$$
$$i=\overline{2K+\tau+1,n-1}\rangle\ (1\le\tau\le n-2-2K),\ \langle M,P_0+P_n,G_0+G_n\rangle\oplus AH(2K)\oplus$$
$$\oplus W[2K+1,2K+\tau]\oplus\langle H_i+\alpha_i P_i+\beta_i G_i \mid i=\overline{2K+\tau+1,n-1}\rangle\ (1\le\tau\le n-2-2K),$$
$$\langle M,P_0+P_n,G_0+G_n\rangle\oplus AH(2K)\oplus\langle G_i+\gamma_i P_i \mid i=\overline{2K+1,2K+\tau}\rangle\oplus\langle H_i+\alpha_i G_i+\beta_i P_i \mid$$
$$i=\overline{2K+\tau+1,n-1}\rangle,\ \langle M,P_0+P_n,G_0+G_n\rangle\oplus W[2K+1,2K+\tau]\oplus AH(2K)\oplus$$
$$\oplus\langle G_i+\gamma_i P_i \mid i=\overline{2K+\tau+1,2K+\tau+S}\rangle\oplus\langle H_i+\alpha_i G_i+\beta_i P_i \mid i=\overline{2K+\tau+S+1,n-1}\rangle$$
$$(1\le\tau,\ 1\le S\le n-2-\tau-2K),\ \langle M,P_0\rangle\oplus AH(2K)\oplus\langle G_i+\gamma_i P_i \mid i=\overline{2K+1,n}\rangle$$
$$(K\le[\tfrac{n-1}{2}]),\ \langle M,P_0\rangle\oplus AH(2K)\oplus W[2K+1,2K+\tau]\oplus\langle G_i+\gamma_i P_i \mid i=\overline{2K+\tau+1,n}\rangle$$
$$(1\le\tau\le n-1-2K),\ \langle M,H_{n-1}+P_0+G_{n-2},G_0+G_n-P_{n-2},P_0+P_n\rangle\oplus AH(n-3)$$
$$(n\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)),\ \langle M,H_{2K+1}+P_0+G_{2K+2},G_0+G_n-P_{2K+2},P_0+P_n\rangle\oplus AH(2K)\oplus$$

$\oplus W[2K+3, n-1]$ $(K \leq [\frac{n-4}{2}])$, $\langle M, H_{2K+1}+P_0+G_{2K+2}, G_0+G_n-P_{2K+2}, P_0+P_n\rangle \oplus AH(2K) \oplus \langle G_i+\gamma_i P_i \mid i=\overline{2K+3, n-1}\rangle$ $(K \leq [\frac{n-4}{2}])$, $\langle M, H_{2K+1}+P_0+G_{2K+2}, G_0+G_n-P_{2K+2}, P_0+P_n\rangle \oplus AH(2K) \oplus \langle G_i+\gamma_i P_i \mid i=\overline{2K+3, 2K+r}\rangle \oplus W[2K+r+1, n-1]$ $(3 \leq r \leq -2-2K+n)$.

Пусть $X_t = \alpha_1 J_{12} + \ldots \alpha_t J_{2t-1,2t}$ $(1=\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_t > 0)$.

Следствие I.2.2. Одномерные подалгебры алгебры $A\widetilde{G}_3(1,n)$ $(n \geq 2)$ с точностью до $\widetilde{G}_3(1,n)$-сопряженности исчерпываются следующими алгебрами:

$\Lambda_1 = \langle X_t + \gamma M\rangle$, $\Lambda_2 = \langle X_t + P_0\rangle$, $\Lambda_3 = \langle X_s + P_0 + P_n\rangle$, $\Lambda_4 = \langle X_s + P_n\rangle$, $\Lambda_5 = \langle X_s + P_0 + \alpha G_{2s+1}\rangle$, $\Lambda_6 = \langle X_r + P_0 + P_n + \alpha G_{2r+1}\rangle$, $\Lambda_7 = \langle X_r + P_n + \alpha G_{2r+1}\rangle$, $\Lambda_8 = \langle X_s + \alpha J_{0n} + \gamma M\rangle$, $\Lambda_9 = \langle X_r + P_{2r+1} + \alpha J_{0n}\rangle$, $\Lambda_{10} = \langle X_q + P_{2q+1} + \beta G_{2q+2} + \alpha J_{0n}\rangle$, $\Lambda_{11} = \langle X_r + H_{2r+1} + \gamma M\rangle$, $\Lambda_{12} = \langle X_q + H_{2q+1} + P_{2q+2}\rangle$, $\Lambda_{13} = \langle X_p + H_{2p+1} + P_{2p+2} + \alpha G_{2p+3}\rangle$, $\Lambda_{14} = \langle X_r + H_{2r+1} + P_0\rangle$, $\Lambda_{15} = \langle X_q + H_{2q+1} + P_0 + \alpha G_{2q+2}\rangle$, $\Lambda_{16} = \langle P_0\rangle$, $\Lambda_{17} = \langle P_n\rangle$, $\Lambda_{18} = \langle P_0 + P_n\rangle$, $\Lambda_{19} = \langle P_0 + G_n\rangle$, $\Lambda_{20} = \langle P_0 + P_n + G_1\rangle$, $\Lambda_{21} = \langle P_1 + G_2\rangle$, $\Lambda_{22} = \langle H_1 + \delta M\rangle$, $\Lambda_{23} = \langle H_1 + P_2\rangle$ $(n \geq 3)$, $\Lambda_{24} = \langle H_1 + P_2 + G_3\rangle$ $(n \geq 4)$, $\Lambda_{25} = \langle H_1 + P_0\rangle$, $\Lambda_{26} = \langle H_1 + P_0 + G_2\rangle$ $(n \geq 3)$, $\Lambda_{27} = \langle J_{0n} + \gamma M\rangle$, $\Lambda_{28} = \langle J_{0n} + P_1\rangle$, $\Lambda_{29} = \langle J_{0n} + P_1 + \alpha G_2\rangle$ $(n \geq 3)$, $\Lambda_{30} = \langle X_t + T \pm \gamma M\rangle$, $\Lambda_{31} = \langle X_t + \alpha(T + G_0)\rangle$, $\Lambda_{32} = \langle X_s + \alpha(T + G_0 + G_n)\rangle$, $\Lambda_{33} = \langle X_t + \alpha(T + G_n)\rangle$, $\Lambda_{34} = \langle X_s + \alpha J_{0n} + T \pm \gamma M\rangle$,

$\Lambda_{35}=\langle X_r+\alpha J_{0n}+\beta(T+G_{2r+1})\rangle$, $\Lambda_{36}=\langle X_r+H_{2r+1}+T\pm\gamma M\rangle$,
$\Lambda_{37}=\langle X_r+H_{2r+1}+\alpha(T+G_0)\rangle$, $\Lambda_{38}=\langle X_r+H_{2r+1}+\alpha(T+G_{2r+1})\rangle$,
$\Lambda_{39}=\langle X_q+H_{2q+1}+\alpha(T+G_{2q+2})\rangle$, $\Lambda_{40}=\langle X_q+H_{2q+1}+\alpha(T+G_{2q+1}+\beta G_{2q+2})\rangle$
$\Lambda_{41}=\langle T+G_0\rangle$, $\Lambda_{42}=\langle T+G_n\rangle$, $\Lambda_{43}=\langle T+G_0+G_n\rangle$, $\Lambda_{44}=\langle H_1+T\pm\delta M\rangle$,
$\Lambda_{45}=\langle H_1+T+G_1\rangle$, $\Lambda_{46}=\langle H_1+\alpha(T+G_0)\rangle$, $\Lambda_{47}=\langle H_1+T+G_2\rangle\,(n\geq 3)$,
$\Lambda_{48}=\langle H_1+T+G_1+\alpha G_2\rangle\,(n\geq 3)$, $\Lambda_{49}=\langle J_{0n}+T\pm\gamma M\rangle$,
$\Lambda_{50}=\langle J_{0n}+\alpha(T+G_1)\rangle$, $\Lambda_{51}=\langle T\pm\delta M\rangle$, $\Lambda_{52}=\langle \mathbb{D}+\gamma M\rangle$,
$\Lambda_{53}=\langle X_t+\alpha\mathbb{D}+\gamma M\rangle$, $\Lambda_{54}=\langle J_{0n}+\alpha\mathbb{D}+\gamma M\rangle$,
$\Lambda_{55}=\langle X_s+\alpha J_{0n}+\beta\mathbb{D}+\gamma M\rangle$, $\Lambda_{56}=\langle \mathbb{D}+J_{0n}+\alpha X_s+P_0\rangle$,
$\Lambda_{57}=\langle \mathbb{D}+J_{0n}+\alpha X_s+P_0+\beta G_0\rangle$, $\Lambda_{58}=\langle \mathbb{D}+J_{0n}+P_0\rangle$,
$\Lambda_{59}=\langle \mathbb{D}+J_{0n}+P_0+\beta G_0\rangle$, $\Lambda_{60}=\langle H_1+\mathbb{D}+\gamma M\rangle$,
$\Lambda_{61}=\langle X_r+H_{2r+1}+\alpha\mathbb{D}+\gamma M\rangle$, $\Lambda_{62}=\langle S+T+\gamma M\rangle$,
$\Lambda_{63}=\langle X_t+\alpha(S+T)+\gamma M\rangle$, $\Lambda_{64}=\langle J_{0n}+\alpha(S+T)+\gamma M\rangle$,
$\Lambda_{65}=\langle X_s+\alpha J_{0n}+\beta(S+T)+\gamma M\rangle$, $\Lambda_{66}=\langle H_1+S+T+\gamma M\rangle$,
$\Lambda_{67}=\langle X_r+H_{2r+1}+\alpha(S+T)+\gamma M\rangle$, $\Lambda_{68}=\langle X_t+S+T+\alpha(P_1+G_2)\rangle$,
$\Lambda_{69}=\langle X_s+\beta J_{0n}+S+T+\alpha(P_1+G_2)\rangle$, $\Lambda_{70}=\langle X_r+H_{2r+1}+S+T+$
$+\alpha(P_1+G_2)\rangle$, $\Lambda_{71}=\langle M\rangle$.

$\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma\geq 0,\ \delta\in\{0,1\},\ t=\overline{1,[\frac{n}{2}]},\ s=\overline{1,[\frac{n-1}{2}]},$
$r=\overline{1,[\frac{n-2}{2}]},\ q=\overline{1,[\frac{n-3}{2}]},\ p=\overline{1,[\frac{n-4}{2}]}.$

Указанные подалгебры попарно не сопряжены.

Теорема I.2.2. Пусть L – ненулевая абелева подалгебра алгебры $AG_3(1,n)$, $\varepsilon, \lambda, \mu, \nu \in \{0, 1\}$.

Если $\tau(L)=\langle D\rangle$, то L сопряжена с $L_1 \dotplus L_2 \dotplus L_3$, где $L_1 \subset AH(2d)$ $(0 \le d \le [n/2])$, а алгебры L_2, L_3 удовлетворяют одному из условий:

I) $L_2=\langle D\rangle$, $L_3=\varepsilon\langle J_{0n}\rangle+\lambda U[2d+1, 2d+\tau]$

$(\varepsilon\lambda \ne 1$; $d \le [\frac{n-1}{2}]$ при $\varepsilon=1$; $1 \le \tau \le n-1-2d$ при $\lambda=1$);

2) $L_2=\langle J_{0n}+D+\varepsilon(P_0+\alpha G_0)\rangle$ $(d \le [\frac{n-1}{2}])$, $L_3 \subset \langle P_0-P_n, G_0+G_n\rangle$.

Если $\tau(L)=\langle S+T\rangle$, то L сопряжена с $L_1 \dotplus L_2 \dotplus L_3 \dotplus L_4$, где $L_1 \subset AH(2d)$ $(0 \le d \le [\frac{n}{2}])$, а алгебры L_2, L_3, L_4 удовлетворяют одному из условий:

I) $L_2=\langle S+T\rangle$, $L_3=\varepsilon\langle J_{0n}\rangle+\lambda U[2d+1, 2d+\tau]$
$(\varepsilon\lambda \ne 1$; $d \le [\frac{n-1}{2}]$ при $\varepsilon=1$; $1 \le \tau \le n-1-2d$ при $\lambda=1$), $L_4=0$;

2) $L_2=\langle J(d+1,t)+S+T+\alpha(P_1+G_2)\rangle$ $(\alpha \ge 0$, $d+1 \le t \le [\frac{n}{2}]$),

$L_3=\varepsilon\langle J_{0n}\rangle+\lambda U[2t+1, 2t+\tau]$ $(\varepsilon\lambda \ne 1$; $t \le [\frac{n-1}{2}]$ при $\varepsilon=1$;

$1 \le \tau \le n-1-2t$ при $\lambda=1$), $L_4 \subset \langle P_{2i-1}+G_{2i}, P_{2i}-G_{2i-1} \mid i=\overline{d+1,s}\rangle$

$(d+1 \le s \le t$) или $L_4=0$ ($\alpha=0$).

Если $\tau(L)=\langle T\rangle$, то L сопряжена с $L_1 \dotplus L_2 \dotplus L_3 \dotplus L_4 \dotplus L_5 \dotplus L_6$, где $L_1 \subset AH(2d)$ $(0 \le d \le [n/2])$, а алгебры L_2, L_3, L_4, L_5, L_6 удовлетворяют одному из условий:

I) $L_2=\langle T+\varepsilon G_{2d+1}\rangle$, $L_3=\lambda\langle P_0+P_n\rangle+\mu\langle J_{0n}\rangle$

$(\lambda\mu \ne 1$; $d \le [\frac{n-1}{2}]$ при $\varepsilon=0$, $\lambda+\mu=1$; $d \le [\frac{n}{2}]-1$ при $\varepsilon=\lambda+\mu=1$),

$L_4=\nu W[2d+1+\varepsilon, 2d+\tau]$ $(1+\varepsilon \le \tau \le n-2d-\mu)$, $L_5 \subset \varepsilon\langle P_{2d+1}\rangle$,

или $L_3=\lambda\langle P_0+P_n\rangle+\langle H_{2d+1+\varepsilon}+P_0\rangle$ $(d \le [\frac{n-2-\varepsilon}{2}])$,

$L_4 = \mu W[2d+2+\varepsilon, 2d+\tau]\ (2+\varepsilon \leq \tau \leq n-1-2d),\ L_5 \subset \varepsilon\langle P_{2d+1}\rangle$ или

$L_3 = \lambda\langle P_0+P_n\rangle + \langle H_i+\alpha_i P_i \mid i=\overline{2d+1+\varepsilon, 2d+\tau}\rangle\ (1+\varepsilon \leq \tau \leq n-1-2d)$

$L_4 = \mu W[2d+\tau+1, 2d+s]\ (\tau+1 \leq s \leq n-1-2d),\ L_5 \subset \varepsilon\langle P_{2d+1}\rangle,\ L_6 = 0$;

2) $L_2 = \langle T+G_0\rangle$, $L_3 = 0$, $L_4 = \lambda W[2d+1, 2d+\tau]$

$(1 \leq \tau \leq n-1-2d),\ L_5 \subset \langle P_0\rangle,\ L_6 = 0$;

3) $L_2 = \langle T+G_0+G_n\rangle$, $L_3 = \lambda\langle P_0+P_n\rangle + \mu\langle H_i+\alpha_i P_i \mid i=\overline{2d+1, 2d+\tau}\rangle$

$(d \leq [\frac{n-1}{2}]$ при $\lambda = 1$, $1 \leq \tau \leq n-1-2d),\ L_4 = \varepsilon W[2d+1+\mu\tau, 2d+s]$,

$(\mu\tau+1 \leq s \leq n-1-2d),\ L_5 \subset \langle(\mu-1)P_0-P_n\rangle,\ L_6 = 0$;

4) $L_4 = \langle H_{2d+1}+T+\varepsilon G_{2d+2}+\alpha G_{2d+1}\rangle$ $\quad (d \leq [\frac{n-\varepsilon-2}{2}],\ \alpha \geq 0$;

если $\varepsilon = 0$, то $\alpha \in \{0, 1\}$), $L_3 = \lambda\langle P_0+P_n\rangle + \mu\langle H_i+\alpha_i P_i \mid$

$i=\overline{2d+2+\varepsilon, 2d+\tau}\rangle\ (2+\varepsilon \leq \tau \leq n-1-2d),\ L_4 = \nu W[2d+1+\mu\tau, 2d+s]$

$(1+\mu\tau \leq s \leq n-1-2d)$, $L_5 \subset \varepsilon\langle P_{2d+2}\rangle$, $L_6 \subset \langle G_0+G_n-P_{2d+1}\rangle$;

5) $L_2 = \langle H_{2d+1}+T+\alpha G_0\rangle$ $(\alpha > 0$, $d \leq [\frac{n-2}{2}])$, $L_3 = 0$,

$L_4 = \lambda W[2d+2, 2d+\tau]\ (2 \leq \tau \leq n-1-2d),\ L_5 \subset \langle P_0\rangle,\ L_6 \subset \langle G_0+G_n-P_{2d+1}\rangle$.

Если $\tau(L) = 0$, то L сопряжена с $L_1 \dotplus L_2 \dotplus L_3 \dotplus L_4$, где $L_1 \subset AH(2d)$ $(0 \leq d \leq [n/2]$), а алгебры L_2 , L_3 , L_4 удовлетворяют одному из условий:

I) $L_2 = \langle J_{0n}\rangle$, $L_3 \subset \mathfrak{M}[2d+1, n-1]$, $L_4 = 0$;

2) $L_2 = \lambda\langle H_i+\alpha_i G_i+\sum_j \beta_{ij} P_j \mid i,j=\overline{2d+1, 2d+\tau}\rangle$ $(1 \leq \tau \leq n-1-2d$;

$\beta_{ij} = \beta_{ji}$; если $\alpha_a = \alpha_b$, то $\beta_{ai} = \beta_{bi} = 0$ при $i \neq a$, $i \neq b$),

$L_3 \subset \mathfrak{M}[2d+1+\lambda\tau, n-\lambda]$, $L_4 \subset \langle P_0+P_n, G_0+G_n\rangle$;

3) $L_2=\langle H_{2d+1}+P_0\rangle$ $(d\leq[\frac{n-2}{2}])$, $L_3\subset \mathfrak{M}[2d+2,n-1]$, $L_4\subset\langle P_0+P_n, G_0+G_n\rangle$.

Доказательство теоремы I.2.2 аналогично доказательству теоремы I.2.I.

Следствие I.2.3. Максимальные абелевы подалгебры алгебры $AG_3(1,n)$ исчерпываются относительно $G_3(1,n)$-сопряженности следующими алгебрами:

$\langle D\rangle\oplus AH(n)$ $(n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2))$, $\langle D, J_{0n}\rangle\oplus AH(n-1)$, $\langle D\rangle\oplus AH(2k)\oplus U[2k+1,n-1]$ $(k\leq[\frac{n-2}{2}])$, $\langle T,P_0\rangle\oplus AH(n)$ $(n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2))$, $\langle T, J_{0n}\rangle\oplus AH(n-1)$ $(n\equiv 1(\mathrm{mod}\,2))$, $\langle T,P_0\rangle\oplus\oplus AH(2k)\oplus W[2k+1,n]$, $\langle T,P_0+P_n, H_{n-1}+P_0\rangle\oplus AH(n-2)$ $(n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2))$, $\langle T,P_0+P_n,H_{2k+1}+P_0\rangle\oplus AH(2k)\oplus W[2k+2,n-1]$ $(k\leq[\frac{n-3}{2}])$, $\langle T+G_0+G_n, P_0+P_n\rangle\oplus AH(2k)\oplus\langle H_i+\alpha_iP_i\mid i=\overline{2k+1,n-1}\rangle$ $(k\leq[\frac{n-2}{2}])$, $\langle T+G_0+G_n, P_0+P_n\rangle\oplus AH(2k)\oplus\oplus\langle H_i+\alpha_iP_i\mid i=\overline{2k+1,2k+r}\rangle\oplus W[2k+r+1,n-1]$ $(1\leq r\leq n-2-2k)$, $\langle H_{n-1}+T, P_0+P_n, G_0+G_n-P_{n-1}\rangle\oplus AH(n-2)$ $(n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2))$, $\langle H_{2k+1}+T, P_0+P_n, G_0+G_n-P_{2k+1}\rangle\oplus AH(2k)\oplus W[2k+2,n-1]$ $(k\leq[\frac{n-3}{2}])$, $\langle H_{2k+1}+T, P_0+P_n, G_0+G_n-P_{2k+1}\rangle\oplus AH(2k)\oplus\oplus\langle H_i+\alpha_iP_i\mid i=\overline{2k+2,n-1}\rangle$ $(k\leq[\frac{n-3}{2}])$, $\langle H_{2k+1}+T, P_0+P_n, G_0+G_n-P_{2k+1}\rangle\oplus AH(2k)\oplus W[2k+2,2k+r]\oplus\oplus\langle H_i+\alpha_iP_i\mid i=\overline{2k+r+1,n-1}\rangle$ $(2\leq r\leq n-2-2k)$,

$\langle S+T\rangle \oplus AH(n)$ $(n\equiv 0 \pmod 2)$, $\langle S+T, J_{0n}\rangle \oplus AH(n-1)$,
$\langle D+J_{0n}, P_0-P_n, G_0+G_n\rangle \oplus AH(n-2)$ $(n\equiv 0 \pmod 2)$,
$\langle D+J_{0n}, P_0-P_n, G_0+G_n\rangle \oplus AH(n-1)$ $(n\equiv 1 \pmod 2)$,
$\langle D+J_{0n}+P_0, P_0-P_n, G_0+G_n\rangle \oplus AH(n-1)$, $\langle D+J_{0n}+P_0+\alpha G_0,$
$P_0-P_n, G_0+G_n\rangle \oplus AH(n-1)$, $\langle T+G_{2k+1}, P_0\rangle \oplus AH(2k) \oplus$
$\oplus W[2k+1,n]$ $(k\le[\frac{n-1}{2}])$, $\langle T+G_{2k+1}, P_0+P_n\rangle \oplus AH(2k) \oplus$
$\oplus W[2k+1,2k+\tau] \oplus \langle H_i+\alpha_i P_i \mid i=\overline{2k+\tau+1,n-1}\rangle$ $(1\le\tau\le n-2-2k)$,
$\langle T+G_{2k+1}, J_{0n}\rangle \oplus AH(2k) \oplus W[2k+1,n-1]$ $(k\le[\frac{n-2}{2}])$
$\langle T+G_{2k+1}, H_{n-1}+P_0, P_0+P_n\rangle \oplus AH(2k) \oplus W[2k+1,n-2]$ $(k\le[\frac{n-3}{2}])$,
$\langle T+G_0, P_0\rangle \oplus AH(n)$ $(n\equiv 0 \pmod 2)$, $\langle T+G_0, P_0\rangle \oplus AH(2k) \oplus$
$\oplus W[2k+1,n]$ $(k\le[\frac{n-1}{2}])$, $\langle T+G_0+G_n, P_0\rangle \oplus AH(2k) \oplus$
$\oplus W[2k+1,n]$ $(k\le[\frac{n-1}{2}])$, $\langle H_{2k+1}+T+G_{2k+2}, G_0+G_n-P_{2k+1},$
$P_0+P_n\rangle \oplus AH(2k) \oplus W[2k+2,n-1]$ $(k\le[\frac{n-3}{2}])$,
$\langle H_{2k+1}+T+G_{2k+2}, G_0+G_n-P_{2k+1}, P_0+P_n\rangle \oplus AH(2k) \oplus$
$\oplus W[2k+2,2k+\tau] \oplus \langle H_i+\alpha_i P_i \mid i=\overline{2k+\tau+1,n-1}\rangle$ $(2\le\tau\le n-2-2k)$,
$\langle H_{2k+1}+T+G_{2k+1}+\alpha G_{2k+2}, P_0+P_n, G_0+G_n-P_{2k+1}\rangle \oplus AH(2k) \oplus$
$\oplus W[2k+2,n-1]$ $(k\le[\frac{n-3}{2}])$, $\langle H_{2k+1}+T+G_{2k+1}+\alpha G_{2k+2}, P_0+P_n,$
$G_0+G_n-P_{2k+1}\rangle \oplus AH(2k) \oplus W[2k+2,2k+\tau] \oplus \langle H_i+\alpha_i P_i \mid$
$i=\overline{2k+\tau+1,n-1}\rangle$ $(2\le\tau\le n-2-2k)$, $\langle H_{n-1}+T+G_{n-1}, G_0+G_n-P_{n-1},$
$P_0+P_n\rangle \oplus AH(n-2)$ $(n\equiv 0 \pmod 2)$, $\langle H_{2k+1}+T+G_{2k+1}, G_0+G_n-P_{2k+1},$

$P_0+P_n> \oplus AH(2K)\oplus W[2K+2,n-1]$ $(K\leq[\frac{n-3}{2}])$, $\langle H_{2K+1}+T+G_{2K+1}, G_0+G_n-P_{2K+1}, P_0+P_n\rangle\oplus AH(2K)\oplus\langle H_i+\alpha_i P_i \mid i=\overline{2K+2,n-1}\rangle$ $(K\leq[\frac{n-3}{2}])$, $\langle H_{2K+1}+T+G_{2K+1}, G_0+G_n-P_{2K+1}, P_0+P_n\rangle\oplus AH(2K)\oplus W[2K+2,2K+\tau]\oplus\langle H_i+\alpha_i P_i \mid i=\overline{2K+\tau+1,n-1}\rangle$ $(2\leq\tau\leq n-2-2K)$, $\langle H_{n-1}+T+\alpha G_0, P_0+P_n, G_0+G_n-P_{n-1}\rangle\oplus$ $\oplus AH(n-2)$ $(n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2))$, $\langle H_{2K+1}+T+\alpha G_0, P_0+P_n, G_0+G_n-$ $-P_{2K+1}\rangle\oplus AH(2K)\oplus W[2K+2,n-1]$ $(K\leq[\frac{n-3}{2}])$, $\langle J(K+1,n/2)+S+T\rangle\oplus AH(2K)\oplus\langle P_{2i-1}+G_{2i}, P_{2i}-G_{2i-1} \mid i=\overline{K+1,n/2}\rangle$ $(K\leq\frac{n}{2}-1,\ n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2))$, $\langle J(K+1,[\frac{n-1}{2}])+S+T, J_{0n}\rangle\oplus AH(2K)\oplus\langle P_{2i-1}+G_{2i}, P_{2i}-G_{2i-1} \mid i=\overline{K+1,[\frac{n-1}{2}]}\rangle$ $(K\leq[\frac{n-3}{2}])$, $\langle P_0,G_0\rangle\oplus AH(n)$ $(n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2))$, $\langle P_0,G_0\rangle\oplus$ $\oplus AH(2K)\oplus\overline{\mathcal{M}}[2K+1,n]$ $(K\leq[\frac{n-1}{2}])$, $\langle J_{0n}\rangle\oplus AH(2K)\oplus$ $\oplus\overline{\mathcal{M}}[2K+1,n-1]$ $(K\leq[\frac{n-2}{2}])$, $\langle H_{n-1}+P_0, P_0+P_n, G_0+G_n\rangle\oplus AH(n-2)$ $(n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2))$, $\langle H_{n-1}+P_0, P_0+P_n, G_0+G_n\rangle\oplus W[2K+1,n-2]\oplus$ $\oplus AH(2K)$ $(K\leq[\frac{n-3}{2}])$, $\langle P_0+P_n, G_0+G_n\rangle\oplus AH(2K)\oplus$ $\oplus\langle H_i+\alpha_i G_i+\sum_j\beta_{ij}P_j \mid i,j=\overline{2K+\tau,n-1}\rangle\oplus\overline{\mathcal{M}}[2K+1,2K+\tau-1]$ $(2\leq\tau\leq n-1-2K,\ \beta_{ij}=\beta_{ji})$.

Следствие I.2.4. Одномерные подалгебры алгебры $AG_3(1,n)$ исчерпываются с точностью до $G_3(1,n)$-сопряженности алгебрами $\Lambda_1-\Lambda_{70}$, перечисленными в следствии I.2.2 при $\gamma=\delta=0$.

§3. Классификация подалгебр алгебры $\widetilde{AG}_3(1,2)$.

В данном параграфе проведена полная классификация подалгебр алгебр $AG_3(1,2)$ и $\widetilde{AG}_3(1,2)$. Списки представителей классов сопряженности вынесены в приложение. Непосредственно в параграфе рассмотрен ряд вспомогательных утверждений.

Лемма I.3.I. Пусть $F=\langle D\rangle$, тогда F-инвариантные подпространства пространства $\overline{\mathfrak{M}}[0,2]$, не принадлежащие $\overline{\mathfrak{M}}[0]$, $\overline{\mathfrak{M}}[1,2]$, сопряжены следующим пространствам:

$\langle P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0,P_2\rangle$, $\langle P_0+P_2,P_1\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle P_0,G_1\rangle$, $\langle P_2,G_0+G_1\rangle$,
$\langle P_1,G_1+\alpha G_0\rangle$, $\langle P_2,G_0+G_1+\alpha G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2,G_0\pm G_2\rangle$, $\langle P_0,P_2,G_0\rangle$,
$\langle P_0,P_2,G_1\rangle$, $\langle P_0,P_2,G_2\rangle$, $\langle P_0,P_2,G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0,P_2,G_0+\alpha G_1\rangle$,
$\langle P_0,P_2,G_0+G_2+\alpha G_1\rangle$, $\langle P_0,P_2,G_2+\alpha G_1\rangle$, $\langle P_0,P_2,G_0+G_2,G_1\rangle$,
$\langle P_0,P_2,G_0,G_2\rangle$, $\langle P_0,P_2,G_0,G_1\rangle$, $\langle P_0,P_2,G_1,G_2\rangle$, $\langle P_0,P_2,G_0,G_2+\alpha G_1\rangle$,
$\langle P_0,P_2,G_2,G_0+\alpha G_1\rangle$, $\langle P_1,P_2,G_0\rangle$, $\langle P_1,P_2,G_0+\alpha G_2\rangle$, $\langle P_1,P_2,G_1,G_0+\alpha G_2\rangle$,
$\langle P_0+P_2,P_1,G_0\rangle$, $\langle P_0+P_2,P_1,G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2,P_1,G_0\pm G_2\rangle$,
$\langle P_0+P_2,P_1,G_0\pm G_2,G_1\rangle$, $\langle P_0+P_2,P_1,G_0\pm G_2,G_1+\alpha G_2\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,G_0\rangle$,
$\langle P_0,P_1,P_2,G_2\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,G_1,G_0+G_2\rangle$,
$\langle P_0,P_1,P_2,G_0,G_2\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,G_1,G_2\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2;G_0,G_1,G_2\rangle$ $(\alpha>0)$.

Записанные пространства попарно не сопряжены.

Лемма I.3.2. Пусть $F=\langle S+T\rangle$, тогда F-инвариантные подпространства пространства $\overline{\mathfrak{M}}[0,2]$, не сопряженные подпространствам пространств $\overline{\mathfrak{M}}[0]$, $\overline{\mathfrak{M}}[1,2]$, сопряжены следующим пространствам:

$\langle P_0+P_2,G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0,P_1,G_0,G_1\rangle$, $\langle P_0+P_2,P_1,G_0+G_2,G_1\rangle$,

$\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$, $\langle G_0+\lambda P_1, P_0-\lambda G_1\rangle$,
$\langle G_0+G_2+\lambda P_1, G_1-1/\lambda\,(P_0+P_2)\rangle$, $\langle G_1+\lambda P_2, \lambda G_2-P_1, P_0, G_0\rangle$,
$\langle G_0+\lambda P_1, P_0-\lambda G_1, G_2, P_2\rangle$, $\langle G_1+\lambda P_2, P_1-\lambda G_2, P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$
$(0<\lambda<1)$.

Записанные пространства попарно не сопряжены.

Лемма I.3.3. Пусть $F=\langle T\rangle$, тогда F-инвариантные подпространства пространства $\overline{\mathfrak{M}}[0,2]$, не принадлежащие $\overline{\mathfrak{M}}[1,2]$, $\overline{\mathfrak{M}}[0]$, сопряжены следующим пространствам:

$\langle P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, P_1\rangle$, $\langle P_0, P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_0, P_0, P_2\rangle$,
$\langle G_0, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2, P_0, P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2, P_1, P_0+P_2\rangle$,
$\langle G_0+G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1, P_1, P_0\rangle$, $\langle G_1, P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_1, P_0, P_1, P_2\rangle$,
$\langle G_0+G_2, G_1, P_0+P_2, P_1\rangle$, $\langle G_0+G_2, G_1, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_0, G_2, P_0, P_2\rangle$,
$\langle G_0, G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_0, G_1, G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$,
$\langle G_0+P_1, P_0\rangle$, $\langle G_0+P_1, P_0, P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2+P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2+P_1, P_0, P_2\rangle$,
$\langle G_0+G_2\pm P_2, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2+P_1+\alpha P_2, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2\pm P_2, P_0+P_2, P_1\rangle$,
$\langle G_0+P_2, G_1, P_0, P_1\rangle$, $\langle G_0, G_1+P_2, P_0, P_1\rangle$, $\langle G_0+P_2, G_1+P_2, P_0, P_1\rangle$.

Записанные пространства попарно не сопряжены.

Леммы I.3.I – I.3.3 и предложения I.I.I – I.I.5 значительно упрощают процесс нахождения F-инвариантных подпространств пространства $\overline{\mathfrak{M}}[0,2]$, где F – подалгебра алгебры $AO(1,2)\oplus ASl(2,R)$.

В дальнейшем вместо $H_1=J_{01}-J_{12}$ будем писать просто H. Непосредственно из теоремы I.I.2 следует

Лемма I.3.4. Подалгебры алгебры $AO(1,2)\oplus ASl(2,R)$

с точностью до $O(1,2)\times Sl(2,R)$-сопряженности исчерпываются следующими алгебрами:

$\langle J_{02}\rangle$, $\langle J_{12}\rangle$, $\langle H\rangle$, $\langle J_{02},H\rangle$, $\langle J_{01},J_{02},J_{12}\rangle$, $\langle D\rangle$, $\langle T\rangle$, $\langle S+T\rangle$, $\langle D,T\rangle$, $\langle D,S,T\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha D\rangle$, $\langle J_{12}+T\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha(S+T)\rangle$, $\langle J_{02}+\alpha D\rangle$, $\langle J_{02}+T\rangle$, $\langle J_{02}+\alpha(S+T)\rangle$, $\langle H+D\rangle$, $\langle H+T\rangle$, $\langle H+S+T\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha D,T\rangle$, $\langle J_{02}+\alpha D,T\rangle$, $\langle H+D,T\rangle$, $\langle J_{12},D\rangle$, $\langle J_{12},T\rangle$, $\langle J_{12},S+T\rangle$, $\langle J_{02},D\rangle$, $\langle J_{02},T\rangle$, $\langle J_{02},S+T\rangle$, $\langle H,D\rangle$, $\langle H,T\rangle$, $\langle H,S+T\rangle$, $\langle J_{12},D,T\rangle$, $\langle J_{02},D,T\rangle$, $\langle H,D,T\rangle$, $\langle J_{12},D,S,T\rangle$, $\langle J_{02},D,S,T\rangle$, $\langle H,D,S,T\rangle$, $\langle H,J_{02}+\alpha D\rangle$, $\langle H,J_{02}+T\rangle$, $\langle H,J_{02}+\alpha(S+T)\rangle$, $\langle H,J_{02}+\alpha D,T\rangle$, $\langle 2J_{02}+D,H+T\rangle$, $\langle H,J_{02},D\rangle$, $\langle H,J_{02},S+T\rangle$, $\langle H,J_{02},T\rangle$, $\langle H,J_{02},D,T\rangle$, $\langle H,J_{02},D,S,T\rangle$, $\langle 2J_{02}+D,\ 2J_{12}-(S+T),\ 2J_{01}+T-S\rangle$, $\langle J_{01},J_{02},J_{12},D\rangle$, $\langle J_{01},J_{02},J_{12},T\rangle$, $\langle J_{01},J_{02},J_{12},S+T\rangle$, $\langle J_{01},J_{02},J_{12},D,T\rangle$, $\langle J_{01},J_{02},J_{12},D,S,T\rangle$ $(\alpha>0)$.

Записанные алгебры попарно не сопряжены.

Лемма I.3.5. Пусть $F=\langle 2J_{0n}+D,\ H+T\rangle$. Тогда F-инвариантные подпространства пространства $\mathfrak{M}[0,2]$ с точностью до сопряженности исчерпываются следующими протранствами:

$\langle\theta\rangle$, $\langle P_0+P_2\rangle$, $\langle P_1,P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle P_0+P_2,G_0+G_2\rangle$,

$\langle P_1, P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_1, P_0+P_2, G_1, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_1, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$, $\langle G_0+G_2-P_1\rangle$, $\langle G_0+G_2+\alpha P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0-P_2+\alpha G_1, G_0+G_2, P_0+P_2, P_1\rangle$, $\langle G_0+G_2+\alpha P_1, G_1+(\alpha-1)P_0, P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0-P_2-G_1, G_0+G_2-P_1\rangle$.

Записанные пространства попарно не сопряжены.

Лемма I.3.5. Пусть $F=\langle 2J_{02}+\mathbb{D}, S+T-2J_{12}, 2J_{01}+T-S\rangle$ Тогда с точностью до сопряженности F-инвариантные подпространства пространства $\mathfrak{M}[0,2]$ исчерпываются следующими пространствами:

$\langle\theta\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$, $\langle P_0-P_2-G_1, G_0+G_2-P_1\rangle$

Записанные пространства попарно не сопряжены.

Для доказательства двух последних лемм проверяем пространства, инвариантные относительно $H+T$ (см. предложение I.I.4 и приложение), на инвариантность относительно $2J_{02}+\mathbb{D}$. А затем выделенные пространства проверяем на инвариантность относительно $S+T-2J_{12}$.

Теперь укажем несколько результатов, касающихся расщепляемости расширений подалгебр алгебры $AO(1,2)\oplus ASl(2,R)$.

Лемма I.3.7. Минимальные нерасщепляемые расширения подалгебр алгебры $AO(1,2)\oplus ASl(2,R)$ в $AG_3(1,n)$ с точностью до $G_3(1,n)$-сопряженности исчерпываются следующими алгебрами:

$\langle J_{12}+P_0\rangle$, $\langle J_{02}+P_1\rangle$, $\langle H+P_0\rangle$, $\langle J_{02}+P_1, H, P_0+P_2\rangle$, $\langle T+G_0\rangle$, $\langle T+G_1\rangle$, $\langle T+G_0+G_2\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha(T+G_0)\rangle$, $\langle J_{02}+\alpha(T+G_1)\rangle$, $\langle J_{12}+S+T+\alpha(P_1+G_2)\rangle$, $\langle H+T+G_1\rangle$, $\langle H+T+\alpha G_0\rangle$, $\langle J_{02}+\mathbb{D}+P_0\rangle$, $\langle J_{02}+\mathbb{D}+P_0+\alpha G_0\rangle$,

$\langle J_{02}+\mathbb{D}+P_0, T\rangle$, $\langle J_{02}+\mathbb{D}+G_0, T, P_0, P_2\rangle$, $\langle J_{02}+\mathbb{D}+G_0+G_2,$
$T, P_0+P_2\rangle$, $\langle J_{02}+\mathbb{D}+G_0+G_2+\alpha P_0, T, P_0+P_2\rangle$,
$\langle J_{12}+P_0, T\rangle$, $\langle J_{12}+G_0, T, P_0\rangle$, $\langle J_{02}+P_1, T\rangle$, $\langle J_{02}+G_1, T, P_1\rangle$,
$\langle J_{12}, T+G_0\rangle$, $\langle J_{12}+P_0, T+\alpha G_0\rangle$, $\langle J_{12}+G_0, T+\alpha G_0, P_0\rangle$,
$\langle J_{02}, T+G_1\rangle$, $\langle J_{02}+P_1, T+\alpha G_1\rangle$, $\langle J_{02}+G_1, T+\alpha G_1, P_1\rangle$,
$\langle H+P_0, T\rangle$, $\langle H+G_0, T, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle H+P_0, T+\alpha(G_0+G_2)\rangle$,
$\langle H+P_0, T+\alpha G_1, G_0+G_2, P_0+P_2\rangle$, $\langle H+G_0, T+\alpha(G_0+G_2), P_0, P_1, P_2\rangle$,
$\langle H+G_0, T+\alpha G_1, G_0+G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle H, T+G_0+G_2\rangle$, $\langle H, G_1+T,$
$G_0+G_2, P_0+P_2\rangle$, $\langle H+G_1, T, P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle H+G_1, T+\alpha G_1, G_0+G_2,$
$P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle H+G_1, T+\alpha(G_0+G_2), P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle J_{02}+\mathbb{D}+P_0,$
$H, P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle J_{02}-\mathbb{D}+P_0+P_2, H\rangle$, $\langle J_{02}+2\mathbb{D}, H+P_0-P_2\rangle$,
$\langle J_{02}+2\mathbb{D}, H+P_0, P_0+P_2\rangle$, $\langle J_{02}+\alpha(T+G_1), H, G_0+G_2, P_0+P_2\rangle$,
$\langle J_{02}+\mathbb{D}+P_0, T, H, P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle J_{02}-\mathbb{D}+P_0+P_2, H, T\rangle$,
$\langle J_{02}+2\mathbb{D}, H+P_0-P_2, T\rangle$, $\langle J_{02}+2\mathbb{D}, H+P_0, T, P_0+P_2\rangle$,
$\langle J_{02}+\mathbb{D}+G_0+G_2, H, T, P_0+P_2\rangle$, $\langle J_{02}+\mathbb{D}+G_0+G_2+\alpha P_0, H, T,$
$P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle J_{02}+\mathbb{D}+G_0, T, H, G_1, G_0+G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$,
$\langle J_{02}-2\mathbb{D}, H+G_0-G_2, T, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle J_{02}+P_1, H, T, P_0+P_2\rangle$
$\langle J_{02}-2\mathbb{D}, H+G_0, T, G_0+G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle J_{02}+G_1, H, T, G_0+G_2,$
$P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle J_{02}+P_1, T+\alpha G_1, H, P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle J_{02}, T+G_1,$
$H, G_0+G_2, P_0+P_2\rangle$, $\langle J_{02}+G_1, T, H, P_1, P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$,

$< J_{02}+G_1, T+\alpha G_1, H, P_1, P_0+P_2, G_0+G_2 >$ $(\alpha>0)$.

Указанные алгебры попарно не сопряжены.

Остальные подалгебры алгебры $AO(1,2)\oplus ASL(2,R)$ обладают только расщепляемыми расширениями в $AG_3(1,2)$.

Лемма I.3.8. Среди подалгебр алгебры $AO(1,2)\oplus ASL(2,R)$ только расщепляемыми расширениями в $A\tilde{G}_3(1,2)$ обладают следующие алгебры:

$$< J_{01}, J_{02}, J_{12} >, < D, S, T >, < J_{01}, J_{02}, J_{12}, D, S, T >,$$
$$< 2J_{02}+D, S+T-2J_{12}, 2J_{01}+T-S >.$$

Остальные подалгебры имеют нерасщепляемые расширения.

Лемма I.3.8 непосредственно вытекает из теоремы I.I.3 и леммы I.3.4.

Для получения полной классификации подалгебр алгебры $AG_3(1,2)$ следует найти подпространства пространства $\mathfrak{M}[0,2]$, инвариантные относительно алгебр, перечисленных в леммах I.3.4, I.3.7 (к примеру леммы I.3.I, I.3.2, I.3.3, I.3.5, I.3.6) .

Рассмотрим случай, когда алгебра L является подпространством пространства $\mathfrak{M}[0,2]$. Например, пусть $L=W[0,2]\dotplus V[0,2]$, причем $L\cap W[0,2]=L\cap V[0,2]=0$. Выберем базис алгебры следующим: I) $< P_i+\sum_j \alpha_{ij}G_j \mid i,j=\overline{0,2}>$, 2) $< P_0+P_2+\sum_{j=0}^{2}\gamma_j G_j, P_1+\sum_{j=0}^{2}\delta_j G_j>$.

Рассмотрим оба случая.

I). Для упрощения матрицы коэффициентов (α_{ij}) воспользуемся $O(1,2)$-преобразованиями. Представим матрицу (α_{ij}) как сумму двух матриц A и B, причем $A\in AO(1,2)$. Тогда с точностью до $O(1,2)$-сопряженности A совпадает с одной из матриц:

$$\text{а)}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \text{б)}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&x\\0&-x&0\end{pmatrix},\ \text{в)}\begin{pmatrix}0&x&0\\x&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \text{г)}\begin{pmatrix}0&x&0\\x&0&x\\0&-x&0\end{pmatrix}(x\neq 0\ );$$

при этом $B=\begin{pmatrix} \lambda & \alpha & \beta \\ -\alpha & \mu & \gamma \\ -\beta & \gamma & \nu \end{pmatrix}$.

Рассмотрим каждый вариант в отдельности.

а). $O(2)$-автоморфизмом делаем $\gamma=0$; $O(1,1)$ -автоморфизмом либо α приравниваем нулю, либо μ приравниваем ν ; в первом случае с точностью до сопряженности либо $\beta=0$, либо $\mu=\nu$; а во втором случае $O(2)$-автоморфизмом делаем $\alpha=0$. И с точностью до $Sl(2,R)$-сопряженности L совпадает с одной из следующих алгебр:

$\langle P_0, G_1, P_2 \pm G_2\rangle$, $\langle P_0, G_1, P_2\rangle$, $\langle P_0+G_2, P_2-G_0, P_1\rangle$.

б). Преобразование, сохраняющее A, имеет вид

$$g=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Z}} \\ 0 & & \end{pmatrix}, \text{ где } Z\in O(2).$$

Но с точностью до g-сопряженности $\gamma=0$, т.е.

$$L=\langle P_0+\lambda G_0+\alpha G_1+\beta G_2,\ P_1-\alpha G_0+\mu G_1+x G_2,\ P_2-\beta G_0-x G_1+\nu G_2\rangle.$$

$Sl(2,R)$-автоморфизмом сводим алгебру L к такой

$$\langle P_0+\alpha G_1+\beta G_2,\ P_1+G_2-\alpha G_0+\mu G_1,\ P_2-G_1-\beta G_0+\nu G_2\rangle.$$

в). Преобразование, сохраняющее A имеет вид

$$g=\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Z}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } Z\in O(1,1).$$

Но с точностью до g-сопряженности либо $\alpha=0$, либо $\lambda=\mu$, и с помощью $Sl(2,R)$-преобразований L сводится к одной из алгебр:

$$\langle P_0+G_1+\beta G_2,\ P_1+G_0+\mu G_1+\gamma G_2,\ P_2-\beta G_0+\gamma G_1+\nu G_2\rangle,$$

$<P_0+(\alpha+1)G_1+\beta G_2,\ P_1+(1-\alpha)G_0+\gamma G_2,\ P_2-\beta G_0+\gamma G_1+\nu G_2>.$

г). Преобразованием вида $\exp t J_{02}$ можно сделать либо $\beta=0$, либо $\lambda=\nu$. Преобразованием $\exp \tau H$ элемент α переводится в $\alpha'=\tau^3\left(\frac{\nu-\lambda}{2}+\beta\right)+\frac{3}{2}\tau^2(\alpha+\gamma)+\tau(-\lambda+\mu+\beta)+\alpha$.
Если $\nu-\lambda+2\beta\neq 0$, то существует такое τ, что $\alpha'=0$. Если $\nu-\lambda+2\beta=0$, то одновременно $\beta=0$, $\nu=\lambda$. Таким образом, используя $Sl(2,R)$-автоморфизмы, можно выделить следующие типы алгебр:

$$<P_0+(\alpha+1)G_1;\ P_1+(1-\alpha)G_0+(\gamma+1)G_2,\ P_2+(\gamma-1)G_1+\mu G_2>,$$

$$<P_0+G_1,\ P_1+G_0+\mu G_1+(\gamma+1)G_2;\ P_2+(\gamma-1)G_1+\nu G_2>,$$

$$<P_0+G_1+\beta G_2,\ P_1+G_0+(\gamma+1)G_2,\ P_2-\beta G_0+(\gamma-1)G_1+\nu G_2>.$$

2). Перепишем алгебру L в следующем виде

$$<P_1+\alpha_1\frac{G_0-G_2}{2}+\alpha_2 G_1+\alpha_3(G_0+G_2),\ P_0+P_2+\beta_1\frac{G_0-G_2}{2}+\beta_2 G_1+\beta_3(G_0+G_2)>.$$

Тогда при воздействии автоморфизма $\exp(\lambda J_{0n}+\mu H)$ матрица коэффициентов перейдет в следующую

$$\left(\begin{array}{c|c|c} e^{\lambda}\left(\alpha_1-\frac{\mu}{\lambda}(e^{-\lambda}-1)\beta_1\right) & \begin{array}{c}-\left(\alpha_1-\frac{\mu}{\lambda}(e^{-\lambda}-1)\beta_1\right)(e^{\lambda}-1)\frac{\mu}{\lambda}+\\ +\alpha_2-\frac{\mu}{\lambda}(e^{-\lambda}-1)\beta_2\end{array} & \begin{array}{c}\left(\alpha_1-\frac{\mu}{\lambda}(e^{-\lambda}-1)\beta_1\right)\frac{\mu^2}{\lambda^2}(\operatorname{ch}\lambda-1)-\\ -\left(\alpha_2-\frac{\mu}{\lambda}(e^{-\lambda}-1)\beta_2\right)\frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda}-1)+\\ +\left(\alpha_3-\frac{\mu}{\lambda}(e^{-\lambda}-1)\beta_3\right)e^{-\lambda}\end{array} \\ \hline \beta_1 e^{\lambda} & -\beta_1\frac{\mu}{\lambda}(e^{-\lambda}-1)+\beta_2 & \beta_1\frac{\mu^2}{\lambda^2}(\operatorname{ch}\lambda-1)+\beta_2\frac{\mu}{\lambda}(e^{-\lambda}-1)+\beta_3 e^{\lambda} \end{array}\right)$$

(эти формулы получены непосредственными вычислениями).

Выделим два случая: $\beta_1\neq 0$, $\beta_1=0$.

а). $\beta_1\neq 0$, тогда при $\lambda=0$, $\mu=\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ $\alpha_1\to\alpha_1'=0$, автоморфизмом $\exp tS$ добиваемся, чтобы $\alpha_2'>0$, $\beta_3'>0$; $\exp\left(\ln\frac{\alpha_2'}{\beta_3'}J_{02}\right)$ уравнивает эти коэффициенты, т.е. $\alpha_2''=\beta_3''$, а $\exp(-\alpha_2'' S)$ приравнивает их нулю. Таким образом

$$L = \langle P_1 + \alpha(G_0 + G_2),\ P_0 + P_2 \pm (G_0 + G_2) + \beta G_1 \rangle.$$

б). $\beta_1 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$, тогда существует λ, что $\alpha_1 \neq 2e^{-\lambda}\beta_2$, и при

$$\mu = \frac{(\beta_3 e^{-\lambda} - \alpha_2)\lambda}{(-\alpha_1 + 2e^{-\lambda}\beta_2)(e^{\lambda} - 1)} \qquad \alpha_2' = \beta_3'.$$

Применив автоморфизм $\exp(-\alpha_2' S)$, получим $\alpha_2'' = \beta_3'' = 0$, т.е.

$$L = \langle P_1 + \alpha_1 \frac{G_0 - G_2}{2} + \alpha_3(G_0 + G_2),\ P_0 + P_2 + \beta_2 G_1 \rangle.$$

В зависимости от значений $\alpha_1, \alpha_3, \beta_2$, используя $O(1,1)$-автоморфизмы, получим следующие алгебры:

$$\langle P_1 + G_0 - G_2,\ P_0 + P_2 + \beta_2 G_1 \rangle,\ \langle P_1 + G_0 + G_2,\ P_0 + P_2 + \beta_2 G_1 \rangle,$$

$$\langle P_1 + G_0,\ P_0 + P_2 + \beta_2 G_1 \rangle,\ \langle P_1 + G_2,\ P_0 + P_2 + \beta_2 G_1 \rangle.$$

Замечание. Рассмотренные алгебры тогда и только тогда будут подалгебрами алгебры $A\tilde{G}_3(1,2)$, если $A = 0$ (т.е. случай Iа) или $\alpha_1 = -\beta_2$ (случай 2).

Остальные случаи подалгебр алгебры $\mathfrak{M}[0,2]$ либо сводятся к рассмотренным, либо анлизируются анлогично.

Глава 2. Инварианты подалгебр алгебр Галилея.

В этой главе найдены инварианты абелевых подалгебр алгебры $A\tilde{G}(3,n)$, одномерных подалгебр алгебры $A\tilde{G}_3(1,n)$. Полностью описаны с точностью до эквивалентности подалгебры алгебр $AG(3,4)$ и $AG_3(1,2)$ и найдены их инварианты.

§I. Инварианты абелевых подалгебр алгебры $A\tilde{G}(3,n)$.

Алгебра $A\tilde{G}(3,n)$ изморфна алгебре дифференциальных операторов, действующих в пространстве скалярных функций $u(t,\vec{x})$, где $\vec{x}\in R^n$:

$$J_{ab}=x_a\partial_b-x_b\partial_a,\ P_a=-\partial_a,\ G_a=t\partial_a-mx_a u\partial_u,$$
$$T=\partial_t,\ D=2t\partial_t+\sum_{j=1}^{n}x_j\partial_j-\frac{n}{2}u\partial_u, \qquad /2.I.I/$$
$$S=t^2\partial_t+t\sum_{j=1}^{n}x_j\partial_j-\left(\frac{nt}{2}+\frac{m}{2}|x|^2\right)u\partial_u,\ M=-mu\partial_u$$
$$\left(|x|^2=\sum_{j=1}^{n}x_j^2;\ \partial_a=\frac{\partial}{\partial x_a},\ \partial_t=\frac{\partial}{\partial t},\ \partial_u=\frac{\partial}{\partial u};\ a,b=1,\dots,n\right).$$

Следует заметить, что если отбросить слагаемые с $u\partial_u$, то мы получим представление алгебры $AG(3,n)$.

Пусть L - подалгебра алгебры $A\tilde{G}(3,n)$, $\Phi(t,\vec{x},u)$ - произвольная гладкая функция. Если $L\Phi(t,\vec{x},u)=0$, то Φ называется инвариантом алгебры L. Множество всех функционально независимых инвариантов L называется полной системой инвариантов /ПСИ/ данной алгебры. Число функций ПСИ равно $n+2-r$ /$n+2$ - размерность пространства, в котором действуют функции Φ; r - ранг системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных, заданной алгеброй / [I6] .

Найдем ПСИ абелевых подалгебр алгебры $A\tilde{G}(3,n)$ /сами абелевы подалгебры этой алгебры рассмотрены в § 4 работы [IO] /.

Пусть $X_0=\sum_{j=r+1}^{p}\alpha_{0j}J_{2j-1,2j}$, $X_k=J_{2k-1,2k}+\sum_{j=r+1}^{p}\alpha_{kj}J_{2j-1,2j}$ $(k=\overline{1,r};\ p\leq[\frac{n}{2}])$, $\varphi(a,x)=x_{2a-1}^2+x_{2a}^2$, $\psi(a,x)=\operatorname{arctg}\frac{x_{2a-1}}{x_{2a}}$.

Предложение 2.I.I. ПСИ алгебры $\langle X_0+\mathbb{D}+\delta_0 M, X_\kappa+\delta_\kappa M \mid \kappa=\overline{1,r}\rangle$ составляют функции

$$\ln u - m\sum_{j=1}^{r}\delta_j \Psi(j,x)+\frac{1}{2}(n/2+m\delta_0)\ln t,\ \frac{\varphi(a,x)}{t},\ \frac{x_c^2}{t},$$
$$\Psi(b,x)-\sum_{j=1}^{r}\alpha_{jb}\Psi(j,x)+\frac{1}{2}\alpha_{0b}\ln t\ (a=\overline{1,p};\ b=\overline{r+1,p};\ c=\overline{2p+1,n}). \qquad /2.I.2/$$

Доказательство. Непосредственными вычислениями проверяем, что

$$J_{2\kappa-1,2\kappa}\left(\frac{\varphi(\kappa,x)}{t}\right)=0,\ J_{2\kappa-1,2\kappa}(\Psi(\ell,x))=\delta_{\kappa\ell},\ M(\ln u)=-m,$$
$$\mathbb{D}\left(\frac{\varphi(\kappa,x)}{t}\right)=0,\ \mathbb{D}(\Psi(\kappa,x))=0,\ \mathbb{D}\left(\tfrac{1}{2}\ln t\right)=1.$$

Значит функции /2.I.2/ являются инвариантами алгебры L. Ранг R алгебры очевидно равен $r+1$, а число функций $N=n-r+1$, т.е. $R+N=n+2$. Остается доказать их функциональную независимость. Для первого инварианта это очевидно, а для остальных, по сути, доказано в работе [9] .

Предложение 2.I.2. ПСИ алгебры $\langle X_0+S+T+\delta_0 M, X_\kappa+\delta_\kappa M \mid \kappa=\overline{1,r}\rangle$ составляют функции $\ln u - m\sum_{j=1}^{r}\delta_j\Psi(j,x)+\frac{n}{4}\ln(t^2+1)+\frac{mt|x|^2}{2(t^2+1)}-m\delta_0\,\mathrm{arctg}\,t$,

$$\frac{\varphi(a,x)}{t^2+1},\ \Psi(b,x)-\sum_{j=1}^{r}\alpha_{jb}\Psi(j,x)+\alpha_{0b}\,\mathrm{arctg}\,t,$$
$$\frac{x_c^2}{t^2+1}\quad (a=\overline{1,p};\ b=\overline{r+1,p};\ c=\overline{2p+1,n}). \qquad /2.I.3/$$

Доказательство. Первый инвариант проверяется непосредственно. Остальные рассуждения полностью аналогичны рассуждениям, проведенным в предложении 2.I.I.

Предложение 2.I.3. ПСИ алгебры $\langle X_0+T+\delta_0 M, X_\kappa+\delta_\kappa M+\sum_{j=p+1}^{q}\gamma_{\kappa j}P_j \mid \kappa=\overline{1,r}\rangle \oplus W[q+1,S]$ составляют функции

$$\ln u - m\sum_{j=1}^{r}\delta_j\Psi(j,x)+m\delta_0 t,\ \varphi(a,x),\ \Psi(b,x)-\sum_{j=1}^{r}\alpha_{jb}\Psi(j,x)+\alpha_{0b}t, \qquad /2.I.4/$$
$$x_c-\sum_{j=1}^{r}\gamma_{jc}\Psi(j,x),\ x_d\ (a=\overline{1,p};\ b=\overline{r+1,p};\ c=\overline{2p+1,q};\ d=\overline{S+1,n}).$$

Доказательство. Очевидно $T(t)=1$, $P_\kappa(x_\ell)=-\delta_{\kappa\ell}$. Значит функции /2.I.4/ суть инварианты алгебры L . Ранг R алгебры равен $r+1+S-q$, а число функций $N=1+(n-S)+p+(p-r)+(q-2p)=1+n-S+q-r$, т.е. $R+N=n+2$. Функциональная независимость проверяется аналогично предложению 2.I.I.

Предложение 2.I.4. ПСИ алгебры $\langle X_0+T+G_{2p+1}, X_k+\delta_k M+\sum_{j=2p+2}^{q}\gamma_{kj}P_j \mid k=\overline{1,r}\rangle \oplus W[q+1,s]$ составляют функции

$$\ln u - m\sum_{j=1}^{r}\delta_j\psi(j,x)-\frac{m}{3}t^3+mtx_{2p+1},\ t^2-x_{2p+1},\ \varphi(a,x),\ x_d, \qquad /2.I.5/$$
$$\psi(b,x)-\sum_{j=1}^{r}\alpha_{jb}\psi(j,x)+\alpha_{0b}t,\ x_c-\sum_{j=1}^{r}\gamma_{jc}\psi(j,x)\ (a=\overline{1,p};\ b=\overline{r+1,p};$$
$$c=\overline{2p+2,q};\ d=\overline{s+1,n}).$$

Предложение 2.I.5, ПСИ алгебры $\langle X_0+J(p+1,s)+S+T+\alpha(G_{2p+1}+P_{2p+2}), X_k+\sum_{j=p+1}^{q}\gamma_{kj}(G_{2j-1}+P_{2j})+\delta_k M \mid k=\overline{1,r}\rangle \oplus$
$\oplus \langle G_{2i-1}+P_{2i} \mid i=\overline{q+1,s}\rangle \quad (p<q<s)$
составляют функции

$$\ln u+\frac{n}{4}\ln(t^2+1)+\frac{mt|x|^2}{2(t^2+1)}+m\alpha\,\mathrm{arctg}\,t-\sum_{i=1}^{r}\left[\delta_i+\sum_{j=p+1}^{q}\gamma_{ij}\frac{x_{2j-1}+tx_{2j}}{t^2+1}\right]\psi(i,x)+$$
$$+m\sum_{i=q+1}^{s}\frac{(x_{2i-1}^2-x_{2i}^2)t+x_{2i-1}x_{2i}(t^2-1)}{(t^2+1)^2},\ \frac{tx_{2p+1}-x_{2p+2}}{t^2+1}-\sum_{j=1}^{r}\gamma_{jp}\psi(j,x)-$$
$$-\alpha\,\mathrm{arctg}\,t,\ \frac{\varphi(a,x)}{t^2+1},\ \psi(b,x)-\sum_{j=1}^{r}\alpha_{jb}\psi(j,x)+\alpha_{0b}\,\mathrm{arctg}\,t, \qquad /2.I.6/$$
$$\frac{tx_{2c-1}-x_{2c}}{t^2+1}-\sum_{j=1}^{r}\gamma_{jc}\psi(j,x),\ \frac{x_{2d+1}+tx_{2d}}{t^2+1},\ \frac{x_e^2}{t^2+1}$$
$$(a=\overline{1,p};\ b=\overline{r+1,p};\ c=\overline{2p+2,q};\ d=\overline{p+1,s};\ e=\overline{2s+1,n}).$$

Доказательство. Непосредственными, но довольно громоздкими, вычислениями проверяем первый инвариант. При проверке остальных используем формулы:

$$(J_{ab}+S+T)\left(\frac{x_a+tx_b}{t^2+1}\right)=0,\quad (G_a+P_b)\left(\frac{x_a+tx_b}{t^2+1}\right)=0,$$
$$(J_{ab}+S+T)\left(\frac{tx_a-x_b}{t^2+1}\right)=0,\quad (G_a+P_b)\left(\frac{tx_a-x_b}{t^2+1}\right)=1.$$

Этот процесс аналогичен доказательствам предыдущих предложений.

Ранг алгебры $R=1+r+s-q$, а число функций $N=1+p+(p-r)+(q-p)+(s-p)+(n-2s)=1+n-r-s+q$, т.е. $R+N=n+2$.

Функциональная независимость первого инварианта от остальных очевидна; инварианты $\frac{\varphi(a,x)}{t^2+1}$, $\psi(b,x)-\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ib}\psi(i,x)+\alpha_{0b}\operatorname{arctg} t$, $\frac{x_e^2}{t^2+1}$ функционально независимы между собой и с остальными в силу рассуждений, аналогичным рассуждениям, изложенным в предложении 2.I.I. Докажем функциональную независимость $\frac{tx_{2c-1}-x_{2c}}{t^2+1}-\sum_{j=1}^{r}\gamma_{jc}\psi(j,x)$ и $\frac{x_{2c-1}+tx_{2c}}{t^2+1}$. Составим функциональную матрицу /с точностью до перестановки строк и столбцов/:

$$\Gamma = \left(E_{q-p} \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2+1} & \frac{t}{t^2+1} \\ \frac{t}{t^2+1} & -\frac{1}{t^2+1} \end{pmatrix} \middle| A \right),$$

где $\otimes$ - символ внешнего произведения матриц, E_{q-p} - единичная матрица порядка $q-p$, A - некоторая прямоугольная матрица. Но $2(q-p) \geq \operatorname{rank}\Gamma \geq \operatorname{rank}\Gamma'$, где

$$\Gamma' = E_{q-p} \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2+1} & \frac{t}{t^2+1} \\ \frac{t}{t^2+1} & -\frac{1}{t^2+1} \end{pmatrix},$$

а $\det\Gamma' = \left(-\frac{1}{t^2+1}\right)^{q-p} \neq 0$, т.е. указанные инварианты функционально независимы. Предложение доказано.

Предложение 2.I.6. ПСИ алгебры $\langle X_k + \sum_{j=2p+1}^{q}\beta_{kj}(G_j+\gamma_j P_j) \mid k=\overline{1,r}\rangle \oplus \langle G_i+\gamma_i P_i \mid i=\overline{q+1,s}\rangle$ составляют функции

$$\ln u - m\sum_{j=1}^{r}\delta_j\psi(j,x)+\frac{m}{2}\sum_{i=p+1}^{s}\frac{x_i^2}{t-\gamma_i},\ t,\ \varphi(a,x),$$
$$\psi(b,x)-\sum_{j=1}^{r}\alpha_{jb}\psi(j,x),\ x_c+(t-\gamma_c)\sum_{j=1}^{r}\beta_{jc}\psi(j,x), \qquad /2.I.7/$$
$$x_d\ (a=\overline{1,p};\ b=\overline{r+1,p};\ c=\overline{2p+1,q};\ d=\overline{s+1,n}).$$

Замечание. Если $L' = L\oplus\langle M\rangle$, где L - одна из подалгебр, описанных в предложениях 2.I.I - 2.I.6, то ПСИ алгебры L' получается из ПСИ алгебры L отбрасыванием инварианта, содержащего

U /в предложениях этот инвариант указан первым/.

Теперь перейдем к изучению абелевых подалгебр алгебры $AG(3,n)$. Очевидно, что алгебры L, рассмотренные в предложениях 2.I.I – 2.I.6, при $\delta_K=0$ будут также подалгебрами, причем абелевыми, алгебры $AG(3,n)$. И ПСИ этих алгебр в $AG(3,n)$ будут совпадать с ПСИ алгебры $L\oplus\langle M\rangle$ в $A\tilde{G}(3,n)$. Рассмотрим оставшиеся случаи.

Предложение 2.I.7. ПСИ алгебры $\langle \sum\limits_{i=1}^{s}(\beta_{Ki}P_i+\gamma_{Ki}G_i)\,|\,K=\overline{1,p}\rangle$ составляют функции $t, x_{s+1},\ldots,x_n, \xi_1(x_1,\ldots,x_s),\ldots,\xi_r(x_1,\ldots,x_s)$, где $\xi_i=\sum\limits_{j=1}^{s} a_{ij}x_j$, а наборы $(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{is})$ являются фундаментальными решениями системы линейных уравнений:

$$\begin{cases}(\beta_{11}t-\alpha_{11})a_1+(\beta_{12}t-\alpha_{12})a_2+\ldots+(\beta_{1s}t-\alpha_{1s})a_s=0\\ (\beta_{21}t-\alpha_{21})a_1+\ \ldots\ \ldots+(\beta_{2s}t-\alpha_{2s})a_s=0\\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\ (\beta_{p1}t-\alpha_{p1})a_1+\ \ldots+(\beta_{ps}t-\alpha_{ps})a_s=0\,.\end{cases}\qquad /2.I.8/$$

Доказательство. Будем искать инварианты в виде $\Phi=\sum\limits_{i=1}^{s}a_i x_i$, тогда условие инвариантности запишется в виде системы /2.I.8/. Базисом пространства решений будут функции, указанные в условии. Ранг алгебры $R=m$ /где m – ранг системы /2.I.8//. Число инвариантов $N=1+(n-s)+r$, причем количество фундаментальных решений $r=s-m$. Тогда $R+N=m+1+(n-s)+(s-m)=n+1$, что равно числу переменных $t, x_1,\ldots,x_n$.

Инварианты функционально независимы в силу линейной независимости фундаментальных решений. Предложение доказано.

Предложение 2.I.8. Пусть $L=\langle X_K+\sum\limits_{i=2p+1}^{s}(\delta_{Ki}P_i+\varepsilon_{Ki}G_i)\,|\,K=\overline{1,r}\rangle\in\mathcal{N}$ где $\mathcal{N}$ – подпространство пространства $\overline{\mathcal{M}}[2p+1,s]$, имеющее ПСИ $t, x_1,\ldots,x_{2p}, \xi_1(x_{2p+1},\ldots,x_s),\ldots,\xi_q(x_{2p+1},\ldots,x_s)$.
Тогда ПСИ алгебры L образуют функции

$$t,\ \varphi(a,x),\ \psi(b,x)-\sum_{j=1}^{r}\alpha_{jb}\psi(j,x),\ x_d,$$

$$\xi_1(y_{2p+1},\ldots,y_s),\ldots,\xi_q(y_{2p+1},\ldots,y_s),\qquad /2.I.9/$$

где $y_c = x_c + \sum_{j=1}^{r} (t\delta_{jc} - \varepsilon_{jc})\Psi(j,x)$ $(a=\overline{1,p};\ b=\overline{r+1,p};\ c=\overline{2p+1,s};\ d=\overline{s,n})$.

Доказательство. На основании предложений 2.I.6, 2.I.7 убеждаемся, что указанные функции действительно инварианты L. Ранг алгебры $R=r+m$ (m - ранг системы /2.I.8/), число функций $N=1+p+(p-r)+q+(n-s)$, причем $q=s-m-2p$, т.е. $R+N=r+m+1+p+(p-r)+(s-m-2p)+(n-s)=n+1$. Функциональная независимость инвариантов следует из того, что $\xi_1,\ldots,\xi_q$ - функционально независимы по условию. Предложение доказано.

Пусть $z_{2a-1}=\dfrac{tx_{2a-1}-x_{2a}}{t^2+1}$, $z_{2a}=\dfrac{x_{2a-1}+tx_{2a}}{t^2+1}$, $Y_{2a-1}=G_{2a-1}+P_{2a}$, $Y_{2a}=G_{2a}-P_{2a-1}$.

Предложение 2.I.9. ПСИ алгебры $\langle \sum_{i=2p+1}^{2s} \gamma_{ij} Y_j \mid j=\overline{1,q} \rangle \oplus$ $\oplus \langle X_0 + J(p+1,s) + S + T + \alpha Y_{2p+1}, \sum_{j=2p+1}^{2s} \beta_{kj} Y_j + X_k \mid k=\overline{1,r} \rangle$ образуют функции

$$\frac{\Psi(a,x)}{t^2+1},\ \Psi(b,x)-\sum \alpha_{jb}\Psi(j,x)+\alpha_{0b}\,\mathrm{arctg}\,t, \qquad /2.I.10/$$

$$\frac{x_d^2}{t^2+1},\ \xi_1(y_{2p+1},\ldots,y_{2s}),\ldots,\ \xi_q(y_{2p+1},\ldots,y_{2s}),$$

где $y_c=z_c+\sum\beta_{jc}\Psi(j,x)$, $\xi_i(y_{2p+1},\ldots,y_{2s})=\sum_{j=2p+1}^{2s} a_{ij}y_j$ $(i=\overline{1,q})$ и наборы $(a_{i,2p+1},\ldots,a_{i,2s})$ являются фундаментальными решениями системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \gamma_{1,2p+1}a_{2p+1} + \ldots + \gamma_{1,2s}a_{2s} = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \gamma_{q,2p+1}a_{2p+1} + \ldots + \gamma_{q,2s}a_{2s} = 0 \end{cases}$$

$(a=\overline{1,p};\ b=\overline{r+1,p};\ c=\overline{2p+1,2s};\ d=\overline{2s+1,n})$.

Доказательство. Используя соотношения $Y_a(z_b)=0$ при $a\neq b$, $Y_a(z_a)=1$ и результаты предложений 2.I.3, 2.I.5, 2.I.8, нетрудно убедиться, что указанные функции действительно инварианты данной алгебры.

Предложение 2.I.IO. ПСИ алгебры $< X_0+T+G_{2p+1}, X_k+\sum_{j=2p+1}^{q}\gamma_{kj}P_j \mid k=\overline{1,\tau} > \oplus < P_{2q+1}+\beta P_{2p+1} > \oplus W[2q+2,s]$ образуют функции

$$\varphi(a,x),\ \psi(b,x)-\sum_{j=1}^{\tau}\alpha_{jb}\psi(j,x)+\alpha_{0b}t,\ x_c-\sum_{j=1}^{\tau}\gamma_{jc}\psi(j,x),$$
$$x_d,\ \frac{1}{2}t^2-x_{2p+1}+\sum_{j=1}^{\tau}\gamma_{j,2p+1}\psi(j,x)+\beta x_{2q+1}$$
$(a=\overline{1,p};\ b=\overline{\tau+1,p};\ c=\overline{2p+2,q};\ d=\overline{s+1,n})$.

§2. Инварианты одномерных подалгебр алгебры $A\tilde{G}_3(1,n)$.

Алгебра $A\tilde{G}_3(1,n)$ изоморфна алгебре дифференциальных операторов, действующих в пространстве скалярных функций $u(t,\vec{x})$, где $\vec{x}\in R_{1,n}$:

$$\begin{aligned}
&J_{0a}=-(x_0\partial_a+x_a\partial_0),\ P_0=\partial_0,\ G_0=-t\partial_0+mx_0u\partial_u,\\
&J_{ab}=x_b\partial_a-x_a\partial_b,\ P_a=-\partial_a,\ G_a=t\partial_a+mx_au\partial_u,\\
&T=\partial_t,\ D=2t\partial_t+\sum_{j=0}^{n}x_j\partial_j-\frac{n+1}{2}u\partial_u,\\
&S=t^2\partial_t+t\sum_{j=0}^{n}x_j\partial_j-\left(\frac{n+1}{2}t+\frac{m}{2}|x|^2\right)u\partial_u,\ M=-mu\partial_u
\end{aligned}\qquad /2.2.I/$$

$\left(|x|^2=x_0^2-x_1^2-\ldots-x_n^2;\ \partial_a=\frac{\partial}{\partial x_a},\ \partial_t=\frac{\partial}{\partial t},\ \partial_u=\frac{\partial}{\partial u};\ a,b=\overline{1,n}\right)$.

Если отбросить слагаемые с $u\partial_u$, то получим представление алгебры $AG_3(1,n)$.

Если функции $f_1,f_2,\ldots,f_k$ образуют ПСИ алгебры L, то будем записывать это так: $L: f_1,f_2,\ldots,f_k$.

Теорема 2.2.I. Пусть Λ_i – одномерные подалгебры алгебры $A\tilde{G}_3(1,n)$, перечисленные в следствии I.2.2. Тогда ПСИ алгебр Λ_i /$i=1,71$/ составляют функции:

$$\Lambda_1:\ \ln u+\gamma m\psi(1,x),\ t,\ x_0,\ x_i,\ \varphi(j,x),\ \alpha_k\psi(1,x)-\psi(k,x)$$
$(i=\overline{2t+1,n};\ j=\overline{1,t};\ k=\overline{2,t})$;

$\Lambda_2: u, t, \psi(1,x)-x_0, \varphi(j,x), \alpha_k\psi(1,x)-\psi(k,x)$
$(i=\overline{2t+1,n};\ j=\overline{1,t};\ k=\overline{2,t});$

$\Lambda_3: u, t, x_0+x_n, \psi(1,x)-x_0, x_i, \varphi(j,x), \alpha_k\psi(1,x)-\psi(k,x)$
$(i=\overline{2s+1,n-1};\ j=\overline{1,s};\ k=\overline{2,s});$

$\Lambda_4: u, t, x_0, \psi(1,x)+x_n, x_i, \varphi(j,x), \alpha_k\psi(1,x)-\psi(k,x)$
$(i=\overline{2s+1,n-1};\ j=\overline{1,s};\ k=\overline{2,s});$

$\Lambda_5: \ln u-\frac{m}{2t}x_{2s+1}^2, t, \psi(1,x)-x_0, \alpha t x_0-x_{2s+1}, x_i, \varphi(j,x),$
$\alpha_k\psi(1,x)-\psi(k,x)\ (i=\overline{2s+2,n};\ j=\overline{1,s};\ k=\overline{2,s});$

$\Lambda_6: \ln u-\frac{m}{2t}x_{2r+1}^2, t, x_0+x_n, \psi(1,x)-x_0, \alpha t x_0-x_{2r+1}, x_i,$
$\varphi(j,x), \alpha_k\psi(1,x)-\psi(k,x)\ (i=\overline{2r+2,n-1};\ j=\overline{1,r};\ k=\overline{2,r});$

$\Lambda_7: \ln u-\frac{m}{2t}x_{2r+1}^2, t, x_0, \alpha t x_n+x_{2r+1}, \psi(1,x)+x_n, x_i, \varphi(j,x),$
$\alpha_k\psi(1,x)-\psi(k,x)\ (i=\overline{2r+2,n-1};\ j=\overline{1,r};\ k=\overline{2,r});$

$\Lambda_8: \ln u+\gamma m\psi(1,x), t, x_0^2-x_n^2, \alpha\psi(1,x)+\ln(x_0+x_n), x_i, \varphi(j,x),$
$\alpha_k\psi(1,x)-\psi(k,x)\ (i=\overline{2s+1,n-1};\ j=\overline{1,s};\ k=\overline{2,s});$

$\Lambda_9: u, t, x_0^2-x_n^2, \psi(1,x)+x_{2r+1}, \alpha\psi(1,x)+\ln(x_0+x_n), x_i,$
$\varphi(j,x), \alpha_k\psi(1,x)-\psi(k,x)\ (i=\overline{2r+2,n-1};\ j=\overline{1,r};\ k=\overline{2,r});$

$\Lambda_{10}: \ln u-\frac{m}{2t}x_{2q+2}^2, t, x_0^2-x_n^2, \psi(1,x)+x_{2q+1}, \alpha\psi(1,x)+\ln(x_0+x_n),$
$\beta t x_{2q+1}+x_{2q+2}, x_i, \varphi(j,x), \alpha_k\psi(1,x)-\psi(k,x)$
$(i=\overline{2q+3,n-1};\ j=\overline{1,q};\ k=\overline{2,q});$

$\Lambda_{11}: \ln u+\gamma m\psi(1,x), t, x_0+x_n, x_0^2-x_{2r+1}^2-x_n^2, \psi(1,x)+\frac{x_{2r+1}}{x_0+x_n},$
$x_i, \varphi(j,x), \alpha_k\psi(1,x)-\psi(k,x)\ (i=\overline{2r+2,n-1};\ j=\overline{1,r};\ k=\overline{2,r}).$

$\Lambda_{12}: u, t, x_0+x_n, x_0^2-x_{2q+1}^2-x_n^2, \Psi(1,x)+\frac{x_{2q+1}}{x_0+x_n}, x_i, \varphi(j,x),$
$\Psi(1,x)+x_{2q+2}, \alpha_k\Psi(1,x)-\Psi(k,x)\ (i=\overline{2q+3,n-1}; j=\overline{1,q}; k=\overline{2,q});$

$\Lambda_{13}: \ln u-\frac{m}{2t}x_{2p+3}^2, t, x_0+x_n, x_0^2-x_{2p+1}^2-x_n^2, (x_0+x_n)\Psi(1,x)+x_{2p+1},$
$\alpha t x_{2p+2}+x_{2p+3}, x_i, \varphi(j,x), \alpha_k\Psi(1,x)-\Psi(k,x)$
$(i=\overline{2p+4,n-1}; j=\overline{1,p}; k=\overline{2,p});$

$\Lambda_{14}: u, t, (x_0+x_n)^2+2x_{2r+1}, (x_0+x_n)^3+3x_{2r+1}(x_0+x_n)-3x_n, \varphi(j,x),$
$x_i, \Psi(1,x)-x_0-x_n, \alpha_k\Psi(1,x)-\Psi(k,x)\ (i=\overline{2r+2,n-1}; j=\overline{1,r}; k=\overline{2,r});$

$\Lambda_{15}: \ln u-\frac{m}{2t}x_{2q+2}^2, t, (x_0+x_n)^2+2x_{2q+1}, (x_0+x_n)^3+3x_{2q+1}(x_0+x_n)-3x_n,$
$\Psi(1,x)-x_0-x_n, \alpha t\Psi(1,x)-x_{2q+2}, x_i, \varphi(j,x), \alpha_k\Psi(1,x)-\Psi(k,x)$
$(i=\overline{2q+3,n-1}; j=\overline{1,q}; k=\overline{2,q});$

$\Lambda_{16}: u, t, x_i\ (i=\overline{1,n});$

$\Lambda_{17}: u, t, x_i\ (i=\overline{0,n-1});$

$\Lambda_{18}: u, t, x_0+x_n, x_i\ (i=\overline{1,n-1});$

$\Lambda_{19}: \ln u-\frac{m}{2t}x_n^2, t, tx_0-x_n, x_i\ (i=\overline{1,n-1});$

$\Lambda_{20}: \ln u-\frac{m}{2t}x_1^2, t, x_0+x_n, tx_0-x_1, x_i\ (i=\overline{2,n-1});$

$\Lambda_{21}: \ln u-\frac{m}{2t}x_2^2, t, x_0, tx_1+x_2, x_i\ (i=\overline{3,n});$

$\Lambda_{22}: \ln u-sm\frac{x_1}{x_0+x_n}, t, x_0+x_n, x_0^2-x_1^2-x_n^2, x_i\ (i=\overline{2,n-1});$

$\Lambda_{23}: u, t, x_0+x_n, x_2-\frac{x_1}{x_0+x_n}, x_0^2-x_1^2-x_n^2, x_i\ (i=\overline{3,n-1});$

$\Lambda_{24}: u-\frac{m}{2t}x_3^2, t, x_0+x_n, x_2-\frac{x_1}{x_0+x_n}, x_0^2-x_1^2-x_n^2, tx_2+x_3, x_i$
$(i=\overline{4,n-1});$

$\Lambda_{25}: u, t, (x_0+x_n)^2+2x_1, (x_0+x_n)^3+3x_1(x_0+x_n)-3x_n, x_k\ (k=\overline{2,n-1});$

$\Lambda_{26}: \ln u-\frac{m}{2t}x_2^2, t, (x_0+x_n)^2+2x_1, (x_0+x_n)^3+3x_1(x_0+x_n)-3x_n,$
$t(x_0+x_n)-x_2, x_i\ (i=\overline{3,n-1});$

$\Lambda_{27}: \ln u-\gamma m\ln(x_0+x_n), t, x_0^2-x_n^2, x_i\ (i=\overline{1,n-1});$

$\Lambda_{28}: u, t, x_0^2-x_n^2, \ln(x_0+x_n)-x_1, x_i\ (i=\overline{2,n-1});$

$\Lambda_{29}: \ln u-\frac{m}{2t}x_2^2, t, x_0^2-x_n^2, \ln(x_0+x_n)-x_1, \alpha t x_1+x_2, x_i$
$(i=\overline{3,n-1});$

$\Lambda_{30}: \ln u\pm\gamma m\Psi(1,x), t-\Psi(1,x), x_0, x_i, \Psi(j,x), \alpha_k\Psi(1,x)-\Psi(k,x)$
$(i=\overline{2t+1,n};\ j=\overline{1,t};\ k=\overline{2,t});$

$\Lambda_{31}: \ln u-\frac{m}{3}t^3-mtx_0, t-\alpha\Psi(1,x), t^2+2x_0, x_i, \Psi(j,x),$
$\alpha_k\Psi(1,x)-\Psi(k,x)\ (i=\overline{2t+1,n};\ j=\overline{1,t};\ k=\overline{2,t});$

$\Lambda_{32}: \ln u-mt(x_0+x_n), t-\alpha\Psi(1,x), t^2+2x_0, x_0+x_n, x_i, \Psi(j,x),$
$\alpha_k\Psi(1,x)-\Psi(k,x)\ (i=\overline{2s+1,n-1};\ j=\overline{1,s};\ k=\overline{2,s});$

$\Lambda_{33}: \ln u+\frac{m}{3}t^3-mtx_n, t^2-2x_n, x_0, x_i, \Psi(j,x), t-\alpha\Psi(1,x),$
$\alpha_k\Psi(1,x)-\Psi(k,x)\ (i=\overline{2s+1,n-1};\ j=\overline{1,s};\ k=\overline{2,s});$

$\Lambda_{34}: \ln u\pm\gamma m\Psi(1,x), t-\Psi(1,x), \ln(x_0+x_n)+\alpha\Psi(1,x), x_0^2-x_n^2,$
$x_i, \Psi(j,x), \alpha_k\Psi(1,x)-\Psi(k,x)\ (i=\overline{2s+1,n-1};\ j=\overline{1,s};\ k=\overline{2,s});$

$\Lambda_{35}: \ln u+\frac{m}{3}t^3-mtx_{2\tau+1}, t-\Psi(1,x), \ln(x_0+x_n)+\alpha\Psi(1,x), x_0^2-x_n^2,$
$t^2-2x_{2\tau+1}, \Psi(j,x), \alpha_k\Psi(1,x)-\Psi(k,x)$
$(i=\overline{2\tau+2,n-1};\ j=\overline{1,\tau};\ k=\overline{2,\tau});$

Λ_{36}: $\ln u \pm \gamma m \Psi(1,x),\ t-\Psi(1,x),\ x_0+x_n,\ x_0^2-x_{2r+1}^2-x_n^2,\ x_i,\ \varphi(j,x),$
$\Psi(1,x)+\dfrac{x_{1+2r}}{x_0+x_n},\ \alpha_k\Psi(1,x)-\Psi(k,x)\ (i=\overline{2r+2,n-1};\ j=\overline{1,r};\ k=\overline{2,r});$

Λ_{37}: $\ln u - mt\left(x_0+\frac{1}{2\alpha}tx_{2r+1}+\frac{1}{6\alpha^2}t^2(x_0+x_n)+\frac{\alpha}{3}t^2+\frac{1}{30\alpha^2}t^4\right),$
$t-\alpha\Psi(1,x),\ t^2+2(x_0+x_n),\ \alpha^2x_n-\alpha t x_{2r+1}-\frac{1}{2}t^2(x_0+x_n)-\frac{1}{8}t^4,$
$\alpha x_{2r+1}+\frac{1}{3}t^3+t(x_0+x_n),\ x_i,\ \varphi(j,x),\ \alpha_k\Psi(1,x)-\Psi(k,x)$
$(i=\overline{2r+2,n-1};\ j=\overline{1,r};\ k=\overline{2,r});$

Λ_{38}: $\ln u+\frac{m}{3}t^3-mtx_{2r+1}-\frac{m}{2\alpha}t^2(x_0+x_n),\ t-\alpha\Psi(1,x),\ x_0+x_n,$
$\alpha\left(\frac{t^2}{2}-x_{2r+1}\right)-t(x_0+x_n),\ \alpha^2x_n-\frac{1}{2}t^2(x_0+x_n)-\alpha t x_{2r+1}+\frac{\alpha}{3}t^3,$
$x_i,\ \varphi(j,x),\ \alpha_k\Psi(1,x)-\Psi(k,x)\ (i=\overline{2r+2,n-1};\ j=\overline{1,r};\ k=\overline{2,r});$

Λ_{39}: $\ln u+\frac{m}{3}t^3-mtx_{2q+2},\ t-\alpha\Psi(1,x),\ x_0+x_n,\ 2x_{2q+2}-t^2,\ x_i,$
$x_0^2-x_{2q+1}^2-x_n^2,\ \Psi(1,x)+\dfrac{x_{2q+1}}{x_0+x_n},\ \alpha_k\Psi(1,x)-\Psi(k,x),$
$\varphi(j,x)\quad (i=\overline{2q+3,n-1};\ j=\overline{1,q};\ k=\overline{2,q});$

Λ_{40}: $\ln u+\frac{m}{3}t^3(\beta^2+1)-mt(x_{2q+1}+\beta x_{2q+2})-\frac{m}{2\alpha}t^2(x_0+x_n),\ x_0+x_n,$
$\alpha\left(\frac{t^2}{2}-x_{2q+1}\right)-t(x_0+x_n),\ \alpha^2x_n-\frac{1}{2}t^2(x_0+x_n)-\alpha t x_{2q+1}+\frac{\alpha}{3}t^3,$
$t-\alpha\Psi(1,x),\ \beta t^2-2x_{2q+2},\ x_i,\ \varphi(j,x),\ \alpha_k\Psi(1,x)-\Psi(k,x)$
$(i=\overline{2q+3,n-1};\ j=\overline{1,q};\ k=\overline{2,q});$

Λ_{41}: $\ln u-\frac{m}{3}t^3-mtx_0,\ t^2+2x_0,\ x_i\ (i=\overline{1,n});$

Λ_{42}: $\ln u+\frac{m}{3}t^3-mtx_n,\ t^2-2x_n,\ x_i\ (i=\overline{0,n-1});$

Λ_{43}: $\ln u-mt(x_0+x_n),\ t^2+2x_0,\ x_0+x_n,\ x_i\ (i=\overline{1,n-1});$

Λ_{44}: $\ln u\pm\delta mt,\ t+\dfrac{x_1}{x_0+x_n},\ x_0^2-x_1^2-x_n^2,\ x_0+x_n,\ x_i\ (i=\overline{2,n-1});$

Λ_{45}: $\ln u+\frac{m}{3}t^3-mtx_1-\frac{m}{2}t^2(x_0+x_n),\ x_0+x_n,\ 2x_1-t^2+2t(x_0+x_n),$
$x_n-\frac{1}{2}t^2(x_0+x_n)-tx_1+\frac{1}{3}t^3,\ x_i\ \ (i=\overline{2,n-1});$

Λ_{46}: $\ln u-mt(x_0+\frac{1}{2\alpha}tx_1+\frac{1}{6\alpha^2}t^2(x_0+x_n)+\frac{\alpha}{3}t^2+\frac{1}{30\alpha^2}t^4),\ t^2+2(x_0+x_n),$
$\alpha x_1+\frac{1}{3}t^3+t(x_0+x_n),\ \alpha^2x_n-\alpha tx_1-\frac{1}{2}t^2(x_0+x_n)-\frac{1}{8}t^4,\ x_i$
$(i=\overline{2,n-1});$

Λ_{47}: $\ln u+\frac{m}{3}t^3-mtx_2,\ x_0+x_n,\ 2x_2-t^2,\ x_0^2-x_1^2-x_n^2,$
$x_1+t(x_0+x_n),\ x_i\ \ (i=\overline{3,n-1});$

Λ_{48}: $\ln u+\frac{m}{3}t^3(\alpha^2+1)-mt(x_1+\alpha x_2)-\frac{m}{2}t^2(x_0+x_n),\ t^2-2x_2,$
$2x_1-t^2+2t(x_0+x_n),\ x_n-\frac{1}{2}t^2(x_0+x_n)-tx_1+\frac{1}{3}t^3,$
$x_0+x_n,\ x_i\ \ (i=\overline{3,n-1});$

Λ_{49}: $\ln u\pm\gamma mt,\ t+\ln(x_0+x_n),\ x_0^2-x_n^2,\ x_i\ \ (i=\overline{1,n-1});$

Λ_{50}: $\ln u+\frac{m}{3}t^3-mtx_1,\ x_0^2-x_n^2,\ \alpha\ln(x_0+x_n)+t,\ t^2-2x_1,\ x_i$
$(i=\overline{2,n-1});$

Λ_{51}: $\ln u\pm\delta mt,\ x_i\ \ (i=\overline{0,n});$

Λ_{52}: $\ln u+\frac{n+1+2\gamma m}{4}\ln t,\ \frac{x_i^2}{t}\ \ (i=\overline{0,n});$

Λ_{53}: $\ln u+(\frac{\alpha(n+1)}{2}+\gamma m)\Psi(1,x),\ 2\alpha\Psi(1,x)-\ln t,\ \frac{\Psi(j,x)}{t},\ \frac{x_0^2}{t},$
$\frac{x_i^2}{t},\ \alpha_k\Psi(1,x)-\Psi(k,x)\ (i=\overline{2t+1,n};\ j=\overline{1,t};\ k=\overline{2,t});$

Λ_{54}: $\ln u-\frac{1}{2}(\frac{\alpha(n+1)}{2}+\gamma m)\ln\frac{x_0+x_n}{x_0-x_n},\ \alpha\ln\frac{x_0+x_n}{x_0-x_n}+\ln t,$
$\frac{x_0^2-x_n^2}{t},\ \frac{x_i^2}{t}\ \ (i=\overline{1,n-1});$

Λ_{55}: $\ln u + \left(\frac{\beta(n+1)}{2} + \gamma m\right)\Psi(1,x)$, $2\beta\Psi(1,x) - \ln t$, $\frac{x_0^2 - x_n^2}{t}$, $\frac{x_i^2}{t}$, $\frac{\varphi(j,x)}{t}$, $2\alpha\Psi(1,x) + \ln\frac{x_0 + x_n}{x_0 - x_n}$, $\alpha_k\Psi(1,x) - \Psi(k,x)$ $(i = \overline{2s+1,n};\ j = \overline{1,s};\ k = \overline{2,s})$;

Λ_{56}: $\ln u + \frac{n+1}{4}\ln t$, $2\Psi(1,x) - \alpha\ln t$, $x_0 + x_n - \frac{1}{2}\ln t$, $\frac{x_0 - x_n + \frac{1}{2}}{t}$, $\frac{\varphi(j,x)}{t}$, $\frac{x_i^2}{t}$, $\alpha_k\Psi(1,x) - \Psi(k,x)$ $(i = \overline{2s+1,n-1};\ j = \overline{1,s};\ k = \overline{2,s})$;

Λ_{57}: $\ln u + \frac{\beta m + 2(n-1)}{8}\ln t - \frac{\beta m}{8}\left[2\ln t\left(x_0 + x_n - \frac{1}{2}\ln t + \frac{\beta}{2}t\right) + 2t\left(\frac{x_0 - x_n + \frac{1}{2}}{t} + \frac{\beta}{2}\ln t\right) + \frac{1}{2}\ln^2 t - \beta t\ln t\right]$, $2\Psi(1,x) - \ln t$, $x_0 + x_n - \frac{1}{2}\ln t + \frac{\beta}{2}t$, $\frac{x_0 - x_n + \frac{1}{2}}{t} + \frac{\beta}{2}\ln t$, $\frac{x_i^2}{t}$, $\frac{\varphi(j,x)}{t}$, $\alpha_k\Psi(1,x) - \Psi(k,x)$ $(i = \overline{2s+1,n-1};\ j = \overline{1,s};\ k = \overline{2,s})$;

Λ_{58}: $\ln u + \frac{n+1}{4}\ln t$, $x_0 + x_n - \frac{1}{2}\ln t$, $\frac{x_0 - x_n + \frac{1}{2}}{t}$, $\frac{x_i^2}{t}$ $(i = \overline{1,n-1})$;

Λ_{59}: $\ln u + \frac{\beta m + 2(n-1)}{8}\ln t - \frac{\beta m}{8}\left[2\ln t\left(x_0 + x_n - \frac{1}{2}\ln t + \frac{\beta}{2}t\right) + 2t\left(\frac{x_0 - x_n + \frac{1}{2}}{t} + \frac{\beta}{2}\ln t\right) + \frac{1}{2}\ln^2 t - \beta t\ln t\right]$, $x_0 + x_n - \frac{1}{2}\ln t + \frac{\beta}{2}t$, $\frac{x_0 - x_n + \frac{1}{2}}{t} + \frac{\beta}{2}\ln t$, $\frac{x_i^2}{t}$ $(i = \overline{1,n-1})$;

Λ_{60}: $\ln u + \frac{n+1+2\gamma m}{4}\ln t$, $\frac{x_0^2 - x_1^2 - x_n^2}{t}$, $\frac{(x_0 + x_n)^2}{t}$, $\frac{2x_1}{x_0 + x_n} + \ln t$, $\frac{x_i^2}{t}$ $(i = \overline{2,n-1})$;

Λ_{61}: $\ln u + \left(\frac{\alpha(n+1)}{2} + \gamma m\right)\Psi(1,x)$, $\frac{x_0^2 - x_{2r+1}^2 - x_n^2}{t}$, $\frac{(x_0 + x_n)^2}{t}$, $\Psi(1,x) + \frac{x_{2r+1}}{x_0 + x_n}$, $\frac{\varphi(j,x)}{t}$, $\frac{x_i^2}{t}$, $\alpha_k\Psi(1,x) - \Psi(k,x)$ $(i = \overline{2r+2,n-1};\ j = \overline{1,r};\ k = \overline{2,r})$;

Λ_{62}: $\ln u + \frac{n+1}{4}\ln(t^2+1) + \frac{mt|x|^2}{2(t^2+1)} + m\gamma\,\mathrm{arctg}\,t$, $\frac{x_i^2}{t^2+1}$ $(i = \overline{0,n})$;

Λ_{63}: $\ln u + \frac{n+1}{4}\ln(t^2+1) + \frac{mt|x|^2}{2(t^2+1)} + m\gamma \operatorname{arctg} t$, $\alpha\Psi(1,x) - \operatorname{arctg} t$,
$\frac{\varphi(j,x)}{t^2+1}$, $\frac{x_0^2}{t^2+1}$, $\frac{x_i^2}{t^2+1}$, $\alpha_k\Psi(1,x) - \Psi(k,x)$
$(i = \overline{2t+1,n};\ j = \overline{1,t};\ k = \overline{2,t})$;

Λ_{64}: $\ln u + \frac{n+1}{4}\ln(t^2+1) + \frac{mt|x|^2}{2(t^2+1)} + \frac{m\gamma}{\alpha}\operatorname{arctg} t$, $\alpha \ln\frac{x_0+x_n}{x_0-x_n} + 2\operatorname{arctg} t$,
$\frac{x_0^2-x_n^2}{t^2+1}$, $\frac{x_i^2}{t^2+1}$ $(i=\overline{1,n-1})$;

Λ_{65}: $\ln u + \frac{n+1}{4}\ln(t^2+1) + \frac{mt|x|^2}{2(t^2+1)} + \frac{m\gamma}{\beta}\operatorname{arctg} t$, $\beta\Psi(1,x) - \operatorname{arctg} t$,
$2\alpha\Psi(1,x) + \ln\frac{x_0+x_n}{x_0-x_n}$, $\frac{\varphi(j,x)}{t^2+1}$, $\frac{x_0^2-x_n^2}{t^2+1}$, $\frac{x_i^2}{t^2+1}$,
$-\alpha_k\Psi(1,x) + \Psi(k,x)$ $(i=\overline{2s+1,n-1};\ j=\overline{1,s};\ k=\overline{2,s})$;

Λ_{66}: $\ln u + \frac{n+1}{4}\ln(t^2+1) + \frac{mt|x|^2}{2(t^2+1)} + m\gamma\operatorname{arctg} t$, $\frac{x_0^2-x_1^2-x_n^2}{t^2+1}$,
$\frac{(x_0+x_n)^2}{t^2+1}$, $\operatorname{arctg} t + \frac{x_1}{x_0+x_n}$, $\frac{x_i^2}{t^2+1}$ $(i=\overline{2,n-1})$;

Λ_{67}: $\ln u + \frac{n+1}{4}\ln(t^2+1) + \frac{mt|x|^2}{2(t^2+1)} + \frac{m\gamma}{\alpha}\operatorname{arctg} t$, $\frac{x_0^2 - x_{2\tau+1}^2 - x_n^2}{t^2+1}$,
$\alpha\Psi(1,x) - \operatorname{arctg} t$, $\Psi(1,x) + \frac{x_1}{x_0+x_n}$, $\frac{x_i^2}{t^2+1}$, $\frac{\varphi(j,x)}{t^2+1}$,
$\alpha_k\Psi(1,x) - \Psi(k,x)$ $(i=\overline{2\tau+2,n-1};\ j=\overline{1,\tau};\ k=\overline{2,\tau})$;

Λ_{68}: $\ln u + \frac{n+1}{4}\ln(t^2+1) + \frac{mt|x|^2}{2(t^2+1)} - \frac{\alpha m(tx_1+x_2)}{t^2+1}\operatorname{arctg} t$,
$\frac{tx_1+x_2}{t^2+1}$, $\frac{x_1-tx_2}{t^2+1} + \alpha\operatorname{arctg} t$, $\frac{x_0^2}{t^2+1}$, $\frac{x_i^2}{t^2+1}$, $\frac{\varphi(k,x)}{t^2+1}$,
$\Psi(k,x) - \alpha_k\operatorname{arctg} t$ $(i=\overline{2t+1,n};\ k=\overline{2,t})$;

Λ_{69}: $\ln u + \frac{n+1}{4}\ln(t^2+1) + \frac{mt|x|^2}{2(t^2+1)} - \frac{\alpha m(tx_1+x_2)}{t^2+1}\operatorname{arctg} t$;
$\frac{tx_1+x_2}{t^2+1}$, $\frac{x_1-tx_2}{t^2+1} + \alpha\operatorname{arctg} t$, $2\beta\operatorname{arctg} t + \ln\frac{x_0+x_n}{x_0-x_n}$,
$\frac{x_0^2-x_n^2}{t^2+1}$, $\frac{\varphi(k,x)}{t^2+1}$, $\frac{x_i^2}{t^2+1}$, $\Psi(k,x) - \alpha_k\operatorname{arctg} t$
$(i=\overline{2s+1,n-1};\ k=\overline{2,s})$;

$$\Lambda_{70}: \ln u + \frac{n+1}{4}\ln(t^2+1) + \frac{mt|x|^2}{2(t^2+1)} - \frac{\alpha m(tx_1+x_2)}{t^2+1}\operatorname{arctg} t,$$
$$\frac{tx_1+x_2}{t^2+1}, \ \frac{x_1-tx_2}{t^2+1} + \alpha \operatorname{arctg} t, \ \frac{x_0^2 - x_{2r+1}^2 - x_n^2}{t^2+1}, \ \frac{(x_0+x_n)^2}{t^2+1},$$
$$\operatorname{arctg} t + \frac{x_{2r+1}}{x_0+x_n}, \ \frac{\varphi(k,x)}{t^2+1}, \ \psi(k,x) - \alpha_k \operatorname{arctg} t, \ \frac{x_i^2}{t^2+1}$$
$$(i=\overline{2r+2, n-1};\ k=\overline{2,r});$$

$$\Lambda_{71}: t, x_i \ (i=\overline{0,n}).$$

Доказательство теоремы проводится непосредственным решением систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных, соответствующих алгебрам $\Lambda_1 - \Lambda_{71}$.

Для получения ПСИ одномерных подалгебр алгебры $AG_3(1,n)$ необходимо отбросить инварианты, зависящие от u (в теореме 2.2.I они указаны первыми).

§3. Инварианты подалгебр алгебры $AG_3(1,2)$.

При изучении инвариантов подалгебр часто бывает так, что несопряженные подалгебры имеют одинаковые ПСИ. Поэтому полезно ввести понятие эквивалентности.

Подалгебры L_1, L_2 алгебры $AG_3(1,2)$ называются эквивалентными, если для некоторого внутреннего автоморфизма φ алгебры $AG_3(1,2)$ подалгебры L_1 и $\varphi(L_2)$ обладают одними и теми же инвариантами.

Очевидно, что сопряженные подалгебры эквивалентны. Поэтому для нахождения всех неэквивалентных подалгебр достаточно найти инварианты представителей классов сопряженности (см. приложение) и выбрать подалгебры, обладающие различными инвариантами.

Теорема 2.3.I. Подалгебры алгебры $AG_3(1,2)$ исчерпываются относительно эквивалентности следующими алгебрами:

I) подалгебры ранга I –

$A_1^1 = \langle J_{12} \rangle$, $A_2^1 = \langle J_{12} + P_0 \rangle$, $A_3^1 = \langle P_0 \rangle$, $A_4^1 = \langle P_2 \rangle$, $A_5^1 = \langle P_0 + P_2 \rangle$,
$A_6^1 = \langle P_0 + G_2 \rangle$, $A_7^1 = \langle P_0 + P_2 + G_1 \rangle$, $A_8^1 = \langle P_1 + G_2 \rangle$, $A_9^1 = \langle H \rangle$,
$A_{10}^1 = \langle H + P_0 \rangle$, $A_{11}^1 = \langle J_{02} \rangle$, $A_{12}^1 = \langle J_{02} + P_1 \rangle$, $A_{13}^1 = \langle J_{12} + T \rangle$,
$A_{14}^1 = \langle J_{12} + \alpha(T + G_0) \rangle$, $A_{15}^1 = \langle T + G_0 \rangle$, $A_{16}^1 = \langle T + G_0 + G_2 \rangle$,
$A_{17}^1 = \langle T + G_1 \rangle$, $A_{18}^1 = \langle H + T \rangle$, $A_{19}^1 = \langle H + T + G_1 \rangle$,
$A_{20}^1 = \langle H + \alpha(T + G_0) \rangle$, $A_{21}^1 = \langle J_{02} + T \rangle$, $A_{22}^1 = \langle J_{02} + \alpha(T + G_1) \rangle$,
$A_{23}^1 = \langle D \rangle$, $A_{24}^1 = \langle T \rangle$, $A_{25}^1 = \langle J_{12} + \alpha D \rangle$, $A_{26}^1 = \langle J_{02} + \alpha D \rangle$,
$A_{27}^1 = \langle J_{02} + D + P_0 \rangle$, $A_{28}^1 = \langle J_{02} + D + P_0 + \alpha G_0 \rangle$, $A_{29}^1 = \langle H + D \rangle$,
$A_{30}^1 = \langle S + T \rangle$, $A_{31}^1 = \langle J_{12} + \alpha(S + T) \rangle$, $A_{32}^1 = \langle J_{02} + \alpha(S + T) \rangle$,
$A_{33}^1 = \langle H + S + T \rangle$, $A_{34}^1 = \langle J_{12} + S + T + \alpha(P_1 + G_2) \rangle$;

2) подалгебры ранга 2 –

$A_1^2 = \langle J_{12}, P_0 \rangle$, $A_2^2 = \langle P_1, P_2 \rangle$, $A_3^2 = \langle P_0 + P_2, P_1 \rangle$, $A_4^2 = \langle J_{02}, H \rangle$,
$A_5^2 = \langle T, P_0 + P_2 \rangle$, $A_6^2 = \langle T, P_0 \rangle$, $A_7^2 = \langle T, P_2 \rangle$, $A_8^2 = \langle D, P_0 \rangle$,
$A_9^2 = \langle D, P_2 \rangle$, $A_{10}^2 = \langle D, P_0 + P_2 \rangle$, $A_{11}^2 = \langle S + T, P_0 + P_2, G_0 + G_2 \rangle$,
$A_{12}^2 = \langle S + T, P_0, G_0 \rangle$, $A_{13}^2 = \langle S + T, P_2, G_2 \rangle$, $A_{14}^2 = \langle D, T \rangle$,
$A_{15}^2 = \langle J_{02}, T \rangle$, $A_{16}^2 = \langle J_{02} + T, P_0 \pm P_2 \rangle$, $A_{17}^2 = \langle J_{02} + T, P_1 \rangle$,
$A_{18}^2 = \langle J_{12} + T, P_0 \rangle$, $A_{19}^2 = \langle J_{12}, T \rangle$, $A_{20}^2 = \langle H, T \rangle$,
$A_{21}^2 = \langle H + T, P_0 + P_2 \rangle$, $A_{22}^2 = \langle H + T, G_0 + G_2 - P_1 \rangle$, $A_{23}^2 = \langle J_{02} \pm T, H \rangle$,
$A_{24}^2 = \langle J_{02} + \alpha D, P_0 + P_2 \rangle$, $A_{25}^2 = \langle J_{02} + \alpha D, P_1 \rangle$, $A_{26}^2 = \langle J_{02}, D \rangle$,

$A^2_{27} = \langle J_{02} + D, P_0 - P_2 \pm (G_0 + G_2) \rangle$, $A^2_{28} = \langle 2J_{02} + D, P_0 - P_2 - G_1 \rangle$,

$A^2_{29} = \langle J_{12} + \alpha D, P_0 \rangle$, $A^2_{30} = \langle J_{12}, D \rangle$, $A^2_{31} = \langle H + D, P_0 + P_2 \rangle$,

$A^2_{32} = \langle H, D \rangle$, $A^2_{33} = \langle J_{02} + \alpha D, H \rangle$, $A^2_{34} = \langle J_{02} + \alpha D, T \rangle$,

$A^2_{35} = \langle 2J_{02} + D, H + T \rangle$, $A^2_{36} = \langle J_{12} + \alpha D, T \rangle$, $A^2_{37} = \langle H + D, T \rangle$,

$A^2_{38} = \langle J_{02} + \alpha(S + T), P_1, G_1 \rangle$, $A^2_{39} = \langle J_{02} + \alpha(S + T), P_0 + P_2, G_0 + G_2 \rangle$,

$A^2_{40} = \langle J_{02}, S + T \rangle$, $A^2_{41} = \langle H + S + T, P_0 + P_2, G_0 + G_2 \rangle$, $A^2_{42} = \langle H, S + T \rangle$,

$A^2_{43} = \langle J_{02} + \alpha(S + T), H \rangle$, $A^2_{44} = \langle J_{12} + \alpha(S + T), P_0, G_0 \rangle$,

$A^2_{45} = \langle J_{12}, S + T \rangle$, $A^2_{46} = \langle P_0, P_2 \rangle$, $A^2_{47} = \langle P_0, G_1 + P_2 \rangle$,

$A^2_{48} = \langle P_0 \pm G_0 + \alpha G_2, G_1 + \beta G_2 \rangle$, $A^2_{49} = \langle P_0 + \alpha G_0 + G_2 + \beta G_1, P_2 - G_0 + \gamma G_1 \rangle$,

$A^2_{50} = \langle P_0 + G_1 + \alpha G_2, P_1 + \beta G_2 + \gamma G_1 + G_0 \rangle$, $A^2_{51} = \langle P_0 + (\alpha + 1)G_1 + \beta G_2,$
$P_1 + (\alpha - 1)G_0 + \gamma G_2 \rangle$, $A^2_{52} = \langle P_1 + \alpha(G_0 + G_2), P_0 + P_2 \pm (G_0 - G_2) + \beta G_1 \rangle$

$A^2_{53} = \langle P_1 + G_0 - G_2, P_0 + P_2 + \alpha G_1 \rangle$, $A^2_{54} = \langle P_1 + G_0, P_0 + P_2 + \alpha G_1 \rangle$,

$A^2_{55} = \langle P_1 - G_2, P_0 + P_2 + \beta G_1 \rangle$, $A^2_{56} = \langle P_1 \pm G_1 + \alpha G_0, \beta G_0 + P_2 \rangle$,

$A^2_{57} = \langle P_1 - G_2 + \alpha G_0, P_2 + \beta G_2 + G_1 + \gamma G_0 \rangle$, $A^2_{58} = \langle J_{02} + P_1, P_0 + P_2 \rangle$,

$A^2_{59} = \langle H + P_0, P_0 + P_2 \rangle$, $A^2_{60} = \langle T + G_0, P_0 + P_2 \rangle$, $A^2_{61} = \langle T + G_1, P_0 \rangle$;

$A^2_{62} = \langle T + G_1, P_2 \rangle$, $A^2_{63} = \langle T + G_1, P_0 + P_2 \rangle$, $A^2_{64} = \langle T + G_1, P_0 + P_2 + \alpha P_1 \rangle$,

$A^2_{65} = \langle T + G_0 + G_2, P_0 - P_2 \rangle$, $A^2_{66} = \langle T + G_0 + G_2, P_1 \rangle$,

$A^2_{67} = \langle J_{02} + \alpha(T + G_1), P_0 + P_2 \rangle$, $A^2_{68} = \langle H + \alpha(T + G_0), P_0 + P_2 \rangle$,

$A^2_{69} = \langle H + T + \alpha G_0, G_0 + G_2 - P_1 \rangle$, $A^2_{70} = \langle H + T + G_1, P_0 + P_2 \rangle$,

$A^2_{71} = \langle H + T + G_1, G_0 + G_2 - P_1 \rangle$, $A^2_{72} = \langle J_{02} + P_1, T \rangle$,

$A^2_{73} = \langle J_{02}+P_1, T+\alpha G_1\rangle$, $A^2_{74} = \langle J_{12}+P_0, T\rangle$, $A^2_{75} = \langle J_{12}+P_0, T+\alpha G_0\rangle$,

$A^2_{76} = \langle J_{02}, T+G_1\rangle$, $A^2_{77} = \langle J_{12}, T+G_0\rangle$, $A^2_{78} = \langle H+P_0, T\rangle$,

$A^2_{79} = \langle H+P_0, T+\alpha(G_0+G_2)\rangle$, $A^2_{80} = \langle H, T+G_0+G_2\rangle$,

$A^2_{81} = \langle J_{02}+D+P_0, P_0+P_2\rangle$, $A^2_{84} = \langle J_{02}+D+P_0, P_0-P_2\rangle$,

$A^2_{83} = \langle J_{02}+D+P_0, P_0-P_2 \pm (G_0+G_2)\rangle$, $A^2_{84} = \langle J_{02}+D+P_0, P_1\rangle$,

$A^2_{85} = \langle J_{02}+D+P_0+\alpha G_0, P_0+P_2\rangle$, $A^2_{86} = \langle J_{02}+D+P_0+\alpha G_0, P_0-P_2\rangle$,

$A^2_{87} = \langle J_{02}+D+P_0+\alpha G_0, P_1\rangle$, $A^2_{88} = \langle J_{02}+D+P_0+\alpha G_0, P_0-P_2 \pm (G_0+G_2)\rangle$,

$A^2_{89} = \langle J_{02}+D+P_0, T\rangle$, $A^2_{90} = \langle J_{02}+2D, H+P_0-P_2\rangle$,

$A^2_{91} = \langle J_{02}-D+P_0+P_2, H\rangle$, $A^2_{92} = \langle J_{12}+S+T+\alpha(P_1+G_2), P_0, G_0\rangle$,

$A^2_{93} = \langle J_{12}+S+T, P_1+G_2\rangle$, $A^2_{94} = \langle J_{12}+S+T+\alpha(P_1+G_2), P_2-G_1\rangle$;

3) подалгебры ранга 3 -

$A^3_1 = \langle P_0, P_1, P_2\rangle$, $A^3_2 = \langle T, P_0+P_2, P_1\rangle$, $A^3_3 = \langle T, P_0, P_2\rangle$,

$A^3_4 = \langle T, P_1, P_2\rangle$, $A^3_5 = \langle D, P_0+P_2, P_1\rangle$, $A^3_6 = \langle D, P_0, P_2\rangle$,

$A^3_7 = \langle D, P_1, P_2\rangle$, $A^3_8 = \langle S+T, P_0+P_2, P_1, G_0+G_2, G_1\rangle$, $A^3_9 = \langle S+T, P_0, P_2, G_0, G_2\rangle$, $A^3_{10} = \langle S+T, P_1, P_2, G_1, G_2\rangle$, $A^3_{11} = \langle D, T, P_0+P_2\rangle$,

$A^3_{12} = \langle D, T, P_0\rangle$, $A^3_{13} = \langle D, T, P_2\rangle$, $A^3_{14} = \langle J_{02}+T, P_0+P_2, P_1\rangle$,

$A^3_{15} = \langle J_{02}, T, P_1\rangle$, $A^3_{16} = \langle J_{12}, T, P_0\rangle$, $A^3_{17} = \langle H+T, P_0-P_2-G_1, G_0+G_2-P_1\rangle$, $A^3_{18} = \langle H+T, G_1+2P_2, G_0+G_2-P_1\rangle$, $A^3_{19} = \langle H+T, G_0+G_2-P_1, G_1-2P_0\rangle$, $A^3_{20} = \langle J_{02}, H, T\rangle$, $A^3_{21} = \langle J_{02}+\alpha D, P_0+P_2, P_1\rangle$,

$A^3_{22} = \langle J_{02}, D, P_1\rangle$, $A^3_{23} = \langle J_{02}+D, P_0-P_2 \pm (G_0+G_2), P_1\rangle$,

$A^3_{24} = \langle J_{12}, D, P_0 \rangle$, $A^3_{25} = \langle 2J_{02} + D, H+T, G_0+G_2-P_1 \rangle$,

$A^3_{26} = \langle 2J_{02} + D, P_0-P_2-G_1, G_0+G_2+\alpha P_1 \rangle$, $A^3_{27} = \langle 2J_{02}+D, P_0-P_2-G_1, P_0+P_2 \rangle$,

$A^3_{28} = \langle J_{02} + \alpha D, T, P_0+P_2 \rangle$, $A^3_{29} = \langle J_{02} + \alpha D, T, P_0 \rangle$, $A^3_{30} = \langle J_{02}, D, T \rangle$,

$A^3_{31} = \langle J_{12}, D, T \rangle$, $A^3_{32} = \langle J_{12} + \alpha D, T, P_0 \rangle$, $A^3_{33} = \langle H+D, T, P_0+P_2 \rangle$,

$A^3_{34} = \langle H, D, T \rangle$, $A^3_{35} = \langle J_{02} + \alpha D, H, T \rangle$, $A^3_{36} = \langle J_{02} + \alpha(S+T)$,

$P_0+P_2, P_1, G_0+G_2, G_1 \rangle$, $A^3_{37} = \langle S+T+J_{12}, P_1+G_2, P_0, G_0 \rangle$,

$A^3_{38} = \langle S+T+2J_{12}, G_2+P_1+\alpha P_0, G_1-P_2-\alpha G_0 \rangle$, $A^3_{39} = \langle 2J_{02}+D$,

$2J_{12}+S+T, 2J_{01}+S-T \rangle$, $A^3_{40} = \langle T+G_0, P_1, P_0+P_2 \rangle$,

$A^3_{41} = \langle T+G_0, P_1, P_2 \rangle$, $A^3_{42} = \langle T+G_1, P_0+P_2 \rangle$, $A^3_{43} = \langle T+G_0+G_2, P_1, P_0-P_2 \rangle$,

$A^3_{44} = \langle H+T+\alpha G_0, P_0-P_2-G_1, G_0+G_2-P_1 \rangle$, $A^3_{45} = \langle H+T+\alpha G_0$,

$G_1+2P_2, G_0+G_2-P_1 \rangle$, $A^3_{46} = \langle H+T+\alpha G_0, G_1-2P_0, G_0+G_2-P_1 \rangle$,

$A^3_{47} = \langle H+T+G_1, P_0-P_2-G_1, G_0+G_2-P_1 \rangle$, $A^3_{48} = \langle H+T+G_1$,

$G_1+2P_2, G_0+G_2-P_1 \rangle$, $A^3_{49} = \langle H+T+G_1, G_1-2P_0, G_0+G_2-P_1 \rangle$,

$A^3_{50} = \langle J_{02}+P_1, T, P_0+P_2 \rangle$, $A^3_{51} = \langle J_{02}+P_1, T+\alpha G_1, P_0+P_2 \rangle$,

$A^3_{52} = \langle H+P_0, T, P_0+P_2 \rangle$, $A^3_{53} = \langle H+P_0, T+\alpha G_1, G_0+G_2, P_0+P_2 \rangle$,

$A^3_{54} = \langle J_{02}+D+P_0, P_1, P_0+P_2 \rangle$, $A^3_{55} = \langle J_{02}+D+P_0, P_1, P_0-P_2 \rangle$,

$A^3_{56} = \langle J_{02}+D+P_0, P_0-P_2 \pm (G_0+G_2), P_1 \rangle$, $A^3_{57} = \langle J_{02}+D+P_0+\alpha G_0, P_1, P_0+P_2 \rangle$,

$A^3_{58} = \langle J_{02}+D+P_0+\alpha G_0, P_0-P_2, P_1 \rangle$, $A^3_{59} = \langle J_{02}+D+P_0+\alpha G_0, P_0-P_2 \pm (G_0+G_2), P_1 \rangle$,

$A^3_{60} = \langle J_{02}+D+P_0, T, P_0+P_2 \rangle$, $A^3_{61} = \langle J_{02}+D+P_0, T, P_0-P_2 \rangle$,

$A^3_{62} = \langle J_{02}+D+P_0, T, P_1 \rangle$, $A^3_{63} = \langle J_{02}+2D, H+P_0-P_2, P_0+P_2 \rangle$,

$A^3_{64} = \langle J_{02} + 2D, H + P_0 - P_2, T \rangle$, $A^3_{65} = \langle J_{02} + 2D, H + P_0, P_0 + P_2 \rangle$,

$A^3_{66} = \langle J_{02} - D + P_0 + P_2, H, T \rangle$.

Теорема 2.3.2. Подалгебры алгебры $AG_3(1,2)$ имеют такие ПСИ:

$A^1_1: t, \varphi(1,x), x_0$; $A^1_2: t, \varphi(1,x), \psi(1,x) - x_0$; $A^1_3: t, x_1, x_2$;

$A^1_4: t, x_0, x_1$; $A^1_5: t, x_0 + x_2, x_1$; $A^1_6: t, tx_0 - x_2, x_1$;

$A^1_7: t, x_0 + x_2, tx_0 - x_1$; $A^1_8: t, x_0, tx_1 + x_2$; $A^1_9: t, x_0 + x_2, x_0^2 - \varphi(1,x)$,

$A^1_{10}: t, (x_0+x_2)^2 + 2x_1, (x_0+x_2)^3 + 3x_1(x_0+x_2) - 3x_2$;

$A^1_{11}: t, x_0^2 - x_2^2, x_1$; $A^1_{12}: t, \ln|x_0 + x_2| - x_1, x_0^2 - x_2^2$;

$A^1_{13}: \varphi(1,x), \psi(1,x) - t, x_0$; $A^1_{14}: \varphi(1,x), t - \alpha\psi(1,x), t^2 + 2x_0$;

$A^1_{15}: x_1, x_2, t^2 + 2x_0$; $A^1_{16}: x_1, x_0 + x_2, t^2 + 2x_0$; $A^1_{17}: x_0, x_2, t^2 - 2x_1$;

$A^1_{18}: x_0 + x_2, x_0^2 - x_1^2 - x_2^2, t + \dfrac{x_1}{x_0 + x_2}$; $A^1_{19}: x_0 + x_2, 2x_1 - t^2 + 2t(x_0 + x_2)$,

$x_2 - \frac{1}{2}t^2(x_0 + x_2) - tx_1 + \frac{1}{3}t^3$; $A^1_{20}: t^2 + 2(x_0 + x_2), \alpha x_1 + \frac{1}{3}t^3 + t(x_0 + x_2)$,

$\alpha^2 x_2 - \alpha t x_1 - \frac{1}{2}t^2(x_0 + x_2) - \frac{1}{8}t^4$; $A^1_{21}: x_1, x_0^2 - x_2^2, t + \ln|x_0 + x_2|$,

$A^1_{22}: x_0^2 - x_2^2, t + \alpha\ln|x_0 + x_2|, t^2 - 2x_1$; $A^1_{23}: \dfrac{x_0^2}{t}, \dfrac{x_1^2}{t}, \dfrac{x_2^2}{t}$;

$A^1_{24}: x_0, x_1, x_2$; $A^1_{25}: 2\alpha\psi(1,x) - \ln t, \dfrac{\varphi(1,x)}{t}, \dfrac{x_0^2}{t}$;

$A^1_{26}: \alpha\ln\left|\dfrac{x_0 + x_2}{x_0 - x_2}\right| + \ln t, \dfrac{x_0^2 - x_2^2}{t}, \dfrac{x_1^2}{t}$; $A^1_{27}: x_0 + x_2 - \frac{1}{2}\ln t, \dfrac{x_0 - x_2 + 1/2}{t}, \dfrac{x_1^2}{t}$,

$A^1_{28}: x_0 + x_2 - \frac{1}{2}\ln t + \frac{\alpha}{2}t, \dfrac{x_0 - x_2 + 1/2}{t} + \frac{\alpha}{2}\ln t, \dfrac{x_1^2}{t}$;

$A^1_{29}: \dfrac{(x_0 + x_2)^2}{t}, \dfrac{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2}{t}, \dfrac{2x_1}{x_0 + x_2} + \ln t$; $A^1_{30}: \dfrac{x_0^2}{t^2+1}, \dfrac{x_1^2}{t^2+1}, \dfrac{x_2^2}{t^2+1}$;

$A^1_{31}: \dfrac{\varphi(1,x)}{t^2+1}, \dfrac{x_0^2}{t^2+1}, \alpha\psi(1,x) - \operatorname{arctg} t$; $A^1_{32}: \dfrac{x_0^2 - x_2^2}{t^2+1}, \dfrac{x_1^2}{t^2+1}, \alpha\ln\left|\dfrac{x_0 + x_2}{x_0 - x_2}\right| + 2\operatorname{arctg} t$;

$A^1_{33}: \dfrac{(x_0 + x_2)^2}{t^2+1}, \dfrac{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2}{t^2+1}, \dfrac{\alpha x_1}{x_0 + x_2} + \operatorname{arctg} t$; $A^1_{33}: \dfrac{tx_1 + x_2}{t^2+1}, \dfrac{x_1 - tx_2}{t^2+1} + \alpha\operatorname{arctg} t, \dfrac{x_0^2}{t^2+1}$;

$A_1^2: t, \varphi(1,x)$; $A_2^2: t, x_0$; $A_3^2: t, x_0+x_2$; $A_4^2: t, x_0^2-x_1^2-x_2^2$;

$A_5^2: x_1, x_0+x_2$; $A_6^2: x_1, x_2$; $A_7^2: x_0, x_1$; $A_8^2: \frac{x_1^2}{t}, \frac{x_2^2}{t}$;

$A_9^2: \frac{x_0^2}{t}, \frac{x_1^2}{t}$; $A_{10}^2: \frac{x_1^2}{t}, \frac{(x_0+x_2)^2}{t}$; $A_{11}^2: \frac{x_1^2}{t^2+1}, \frac{(x_0+x_2)^2}{t^2+1}$; $A_{12}^2: \frac{x_1^2}{t^2+1}, \frac{x_2^2}{t^2+1}$;

$A_{13}^2: \frac{x_0^2}{t^2+1}, \frac{x_1^2}{t^2+1}$; $A_{14}^2: \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}$; $A_{15}^2: x_1, x_0^2-x_2^2$;

$A_{16}^2: x_1, t \pm \ln|x_0+x_2|$; $A_{17}^2: x_0^2-x_2^2, t+\ln|x_0+x_2|$;

$A_{18}^2: \varphi(1,x), t-\psi(1,x)$; $A_{19}^2: x_0, \varphi(1,x)$; $A_{20}^2: x_0+x_2, x_0^2-x_1^2-x_2^2$;

$A_{21}^2: x_0+x_2, t(x_0+x_2)+x_1$; $A_{22}^2: x_0+x_2, x_0^2-x_1^2-x_2^2+(t(x_0+x_2)+x_1)^2$;

$A_{23}^2: x_0^2-x_1^2-x_2^2, t\pm\ln|x_0+x_2|$; $A_{24}^2: \frac{x_1^2}{t}, 2\alpha\ln|x_0+x_2|+(1-\alpha)\ln t$;

$A_{25}^2: \frac{x_0^2-x_2^2}{t}, \alpha\ln\left|\frac{x_0+x_2}{x_0-x_2}\right|+\ln t$; $A_{26}^2: \frac{x_0^2-x_2^2}{t}, \frac{x_1^2}{t}$;

$A_{27}^2: \frac{x_0-x_2}{t}\pm(x_0+x_2), \frac{x_1^2}{t}$; $A_{28}^2: \frac{x_0-x_2}{t^{3/2}}, \frac{2x_1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}(x_0+x_2)$;

$A_{29}^2: \frac{\varphi(1,x)}{t}, 2\alpha\psi(1,x)-\ln t$; $A_{30}^2: \frac{\varphi(1,x)}{t}, \frac{x_0^2}{t}$; $A_{31}^2: \frac{2x_1}{x_0+x_2}+\ln t,$
$\frac{x_0^2-x_1^2-x_2^2}{t}$; $A_{32}^2: \frac{(x_0+x_2)^2}{t}, \frac{x_0^2-x_1^2-x_2^2}{t}$; $A_{33}^2: \frac{x_0^2-x_1^2-x_2^2}{t}, 2\alpha\ln|x_0+x_2|+(1-\alpha)\ln t$;

$A_{34}^2: (1-\alpha)\ln|x_0-x_2|+(1+\alpha)\ln|x_0+x_2|, \frac{x_0^2-x_2^2}{x_1^2}$;

$A_{35}^2: x_1(x_0+x_2)+t(x_0+x_2)^2, (x_0+x_2)^2(x_0^2-x_1^2-x_2^2)$;

$A_{36}^2: 2\alpha\psi(1,x)-\ln\varphi(1,x), \frac{\varphi(1,x)}{x_0^2}$; $A_{37}^2: \frac{x_1}{x_0+x_2}+\ln(x_0^2-x_1^2-x_2^2), \frac{x_0^2-x_1^2-x_2^2}{(x_0+x_2)^2}$

$A_{38}^2: \alpha\ln\left|\frac{x_0+x_2}{x_0-x_2}\right|+2\operatorname{arctg} t, \frac{x_0^2-x_2^2}{t^2+1}$; $A_{39}^2: \alpha\ln|x_0+x_2|+(1-\alpha t)\operatorname{arctg} t, \frac{x_1^2}{t^2+1}$;

$A_{40}^2: \frac{x_0^2-x_2^2}{t^2+1}, \frac{x_1^2}{t^2+1}$; $A_{41}^2: x_1+(x_0+x_2)\operatorname{arctg} t, \frac{(x_0+x_2)^2}{t^2+1}$;

$A_{42}^2: \frac{(x_0+x_2)^2}{t^2+1}, \frac{x_0^2-x_1^2-x_2^2}{t^2+1}$; $A_{43}^2: \alpha\ln|x_0+x_2|+(1-\alpha t)\operatorname{arctg} t, \frac{x_0^2-x_1^2-x_2^2}{t^2+1}$;

$A_{44}^2: \frac{\varphi(1,x)}{t^2+1}, \alpha\psi(1,x)-\operatorname{arctg} t$; $A_{45}^2: \frac{x_0^2}{t^2+1}, \frac{\varphi(1,x)}{t^2+1}$; $A_{46}^2: t, x_1$;

$A_{47}^2: t, x_1+tx_2$; $A_{48}^2: t, \alpha t x_0+(t\mp 1)(\beta t x_1+x_2)$;

A^2_{49}: t, $-t(\beta+\gamma t)x_0+(1-\alpha t+t^2)x_1+t(\gamma-(\alpha+\beta)t)x_2$;

A^2_{50}: t, $t(\alpha+(\beta-\alpha\gamma)t)x_0+t(\alpha t+\beta)x_1+(t^2-\gamma t-1)x_2$;

A^2_{51}: t, $t(\gamma(\alpha+1)t+\beta)x_0+t(\beta(\alpha-1)-\gamma)x_1-((\alpha^2-1)t^2+1)x_2$;

A^2_{52}: t, $\pm(\alpha\beta t^2+1)(x_0+x_2)+t(x_2-x_0)+2\alpha t^2x_1$;

A^2_{53}: t, $(\alpha+1)tx_0+(1-\alpha t)tx_1-(t+1)x_2$;

A^2_{54}: t, $x_0-tx_1+(\alpha t^2-1)x_2$; A^2_{55}: $(1+\beta t^2)x_0-tx_1+x_2$, t;

A^2_{56}: t, $\alpha tx_1-(1\pm t)(x_0-\beta tx_2)$; A^2_{57}: $(t^2-\beta t+1)x_0+t((\alpha\beta+\gamma)t-\alpha)x_1-$
$-t(\alpha t+\gamma)x_2$, t; A^2_{58}: t, $\ln|x_0+x_2|-x_1$; A^2_{59}: t, $(x_0+x_2)^2+2x_1$;

A^2_{60}: x_1, $t^2+2(x_0+x_2)$; A^2_{61}: x_2, t^2-2x_1; A^2_{62}: x_0, t^2-2x_1;

A^2_{63}: x_0+x_2, t^2-2x_1; A^2_{64}: x_0+x_2, $t^2-2(x_1+\alpha x_0)$; A^2_{65}: x_1, $t^2+x_0-x_2$;

A^2_{66}: t^2+2x_0, x_0+x_2; A^2_{67}: t^2-2x_1, $\alpha\ln|x_0+x_2|+t$;

A^2_{68}: $t^2+2(x_0+x_2)$, $\alpha x_1+\frac{1}{3}t^3+t(x_0+x_2)$; A^2_{69}: $\alpha t^2+2(x_0+x_2)$,
$x_2-tx_1-\frac{1}{2}t^2(x_0+x_2)-\frac{\alpha}{8}t^4$; A^2_{70}: x_0+x_2, $2x_1-t^2+2t(x_0+x_2)$;

A^2_{71}: x_0+x_2, $x_2-\frac{1}{2}t^2(x_0+x_2)-x_1+\frac{1}{3}t^3$; A^2_{72}: $x_0^2-x_2^2$, $\ln|x_0+x_2|-x_1$;

A^2_{73}: $x_0^2-x_2^2$, $\alpha t^2+2(\ln|x_0+x_2|-x_1)$; A^2_{74}: $\varphi(1,x)$, $\psi(1,x)-x_0$;

A^2_{75}: $\varphi(1,x)$, $\alpha t^2+2(x_0-\psi(1,x))$; A^2_{76}: $x_0^2-x_2^2$, t^2-2x_1;

A^2_{77}: $\varphi(1,x)$, t^2+2x_0; A^2_{78}: $(x_0+x_2)^2+2x_1$, $(x_0+x_2)^3+3x_1(x_0+x_2)-3x_2$;

A^2_{79}: $(x_0+x_2)^2+2x_1$, $\alpha t^2+\frac{1}{3}(x_0+x_2)^3+x_1(x_0+x_2)-x_2$;

A^2_{80}: x_0+x_2, $t^2+x_0-x_2-\dfrac{x_1}{x_0+x_2}$, A^2_{81}: $x_0+x_2-\frac{1}{2}\ln t$, $\dfrac{x_1^2}{t}$;

A^2_{82}: $\dfrac{x_0-x_2+1/2}{t}$, $\dfrac{x_1^2}{t}$; A^2_{83}: $x_0+x_2-\frac{1}{2}\ln t\pm\dfrac{x_0-x_2+1/2}{t}$, $\dfrac{x_1^2}{t}$;

$A^2_{84}: x_0+x_2-\frac{1}{2}\ln t,\ \frac{x_0-x_2+1/2}{t};\ A^2_{85}: x_0+x_2-\frac{1}{2}\ln t+\frac{\alpha}{2}t,\ \frac{x_1^2}{t};$

$A^2_{86}: \frac{x_0-x_2+1/2}{t}+\frac{\alpha}{2}\ln t,\ \frac{x_1^2}{t};\ A^2_{87}: x_0+x_2-\frac{1}{2}\ln t+\frac{\alpha}{2}t,\ \frac{x_0-x_2+1/2}{t}+\frac{\alpha}{2}\ln t;$

$A^2_{88}: x_0+x_2-\frac{1}{2}\ln t+\frac{\alpha}{2}t \pm \left(\frac{x_0-x_2+1/2}{t}+\frac{\alpha}{2}\ln t\right);\ A^2_{89}: \frac{x_0-x_2+1/2}{x_1^2},$

$x_0+x_2+\frac{1}{2}\ln\left|x_0-x_2+1/2\right|;\ A^2_{90}: \frac{x_0-x_2+\frac{1}{6}(x_0+x_2)^3+x_1(x_0+x_2)}{t^{3/4}},\ \frac{1}{\sqrt{t}}\left[(x_0+x_2)^2+4x_1\right];$

$A^2_{91}: \frac{x_0+x_2}{t},\ \frac{x_0^2-x_1^2-x_2^2+(x_0+x_2)\ln t}{t};\ A^2_{92}: \frac{tx_1+x_2}{t^2+1},\ \frac{x_1-tx_2}{t^2+1}+\alpha\,\mathrm{arctg}\,t;$

$A^2_{93}: \frac{tx_1+x_2}{t^2+1},\ \frac{x_0^2}{t^2+1};\ A^2_{94}: \frac{x_0^2}{t^2+1},\ \frac{x_1-tx_2}{t^2+1}+\alpha\,\mathrm{arctg}\,t;$

$A^3_1: t;\ A^3_2: x_0+x_2;\ A^3_3: x_1;\ A^3_4: x_0;\ A^3_5: \frac{(x_0+x_2)^2}{t};\ A^3_6: \frac{x_1^2}{t};\ A^3_7: \frac{x_0^2}{t};$

$A^3_8: \frac{(x_0+x_2)^2}{t^2+1};\ A^3_9: \frac{x_1^2}{t^2+1};\ A^3_{10}: \frac{x_0^2}{t^2+1};\ A^3_{11}: \frac{x_0+x_2}{x_1};\ A^3_{12}: \frac{x_1}{x_2};\ A^3_{13}: \frac{x_0}{x_1};$

$A^3_{14}: \ln|x_0+x_2|+t;\ A^3_{15}: x_0^2-x_2^2;\ A^3_{16}: \varphi(1,x);\ A^3_{17}: x_0-x_2+t^2(x_0+x_2)+2tx_1;$

$A^3_{18}: 2x_0+t^2(x_0+x_2)+2tx_1;\ A^3_{19}: -2x_2+t^2(x_0+x_2)+2tx_1;\ A^3_{20}: x_0^2-x_1^2-x_2^2;$

$A^3_{21}: 2\alpha\ln|x_0+x_2|+(1-\alpha)\ln t;\ A^3_{22}: \frac{x_0^2-x_2^2}{t};\ A^3_{23}: \frac{x_0-x_2}{t}\pm(x_0+x_2);$

$A^3_{24}: \frac{\varphi(1,x)}{t};\ A^3_{25}: (x_0+x_2)^2\left(x_0^2-x_2^2+t^2(x_0+x_2)^2+2tx_1(x_0+x_2)\right);$

$A^3_{26}: \sqrt{t}\left(\frac{2x_1}{t}+x_0+x_2-\frac{\alpha(x_0-x_2)}{t^2}\right);\ A^3_{27}: \sqrt{t}\left(\frac{2x_1}{t}+x_0+x_2\right);$

$A^3_{28}: \alpha\ln|x_0+x_2|+(1-\alpha)\ln x_1;\ A^3_{29}: (1-\alpha)\ln|x_0-x_2|+(1+\alpha)\ln|x_0+x_2|;$

$A^3_{30}: \frac{x_0^2-x_2^2}{x_1^2};\ A^3_{31}: \frac{\varphi(1,x)}{x_0^2};\ A^3_{32}: 2\alpha\psi(1,x)-\ln\varphi(1,x);\ A^3_{33}: \frac{2x_1}{x_0+x_2}+$

$+\ln|x_0^2-x_1^2-x_2^2|;\ A^3_{34}: \frac{x_0^2-x_1^2-x_2^2}{(x_0+x_2)^2};\ A^3_{35}: 2\alpha\ln|x_0+x_2|+(1-\alpha)\ln|x_0^2-x_1^2-x_2^2|;$

$A^3_{36}: \alpha\ln|x_0+x_2|+(1-\alpha t)\,\mathrm{arctg}\,t;\ A^3_{37}: \frac{tx_1+x_2}{t^2+1};$

$A^3_{38}: \frac{(t^2+1)x_0+\alpha(1-t^2)x_1-2\alpha tx_2}{(t^2+1)^{3/2}};\ A^3_{39}: \left[\frac{(x_1-(x_0+x_2)t)^2}{x_0^2-x_1^2-x_2^2}+1\right]\cdot\frac{1}{(x_0+x_2)\sqrt{x_0^2-x_1^2-x_2^2}};$

$A^3_{40}: t^2+2(x_0+x_2);\ A^3_{41}: t^2+2x_0;\ A^3_{42}: t^2-2x_1;\ A^3_{43}: t^2+x_0-x_2;$

$A^3_{44}: \frac{\alpha}{4}t^2 + \frac{x_0-x_2}{2} + tx_1 + \frac{1}{2}t^2(x_0+x_2) + \frac{\alpha}{8}t^4;$

$A^3_{45}: \frac{\alpha}{2}t^2 + x_0 + tx_1 + \frac{1}{2}t^2(x_0+x_2) + \frac{\alpha}{8}t^4;$

$A^3_{46}: \quad -x_2 + tx_1 + \frac{1}{2}t^2(x_0+x_2) + \frac{\alpha}{8}t^4;$

$A^3_{47}: x_0-x_2-2tx_1+t^2(x_0+x_2)-\frac{2}{3}t^3;$ $A^3_{48}: x_0-tx_1+\frac{t^2}{2}(x_0+x_2)-\frac{1}{3}t^3;$

$A^3_{49}: -x_2-tx_1+\frac{t^2}{2}(x_0+x_2)-\frac{1}{3}t^3;$ $A^3_{50}: \ln|x_0+x_2|-x_1;$

$A^3_{51}: 2\ln|x_0+x_2|+\alpha t^2-2x_1;$ $A^3_{52}: (x_0+x_2)^2+2x_1;$

$A^3_{53}: (x_0+x_2)^2+2x_1-\alpha t^2;$ $A^3_{54}: x_0+x_2-\frac{1}{2}\ln t;$ $A^3_{55}: \frac{x_0-x_2+1/2}{t};$

$A^3_{56}: x_0+x_2-\frac{1}{2}\ln t \pm \frac{x_0-x_2+1/2}{t};$ $A^3_{57}: x_0+x_2-\frac{1}{2}\ln t+\frac{\alpha}{2}t;$

$A^3_{58}: \frac{x_0-x_2+1/2}{t}+\frac{\alpha}{2}\ln t;$ $A^3_{59}: x_0+x_2-\frac{1}{2}\ln t+\frac{\alpha}{2}t \pm \left(\frac{x_0-x_2+1/2}{t}+\frac{\alpha}{2}\ln t\right);$

$A^3_{60}: x_0+x_2-\ln x_1;$ $A^3_{61}: \frac{x_0-x_2+1/2}{x_1^2};$ $A^3_{62}: x_0+x_2-\frac{1}{2}\ln|x_0-x_2+1/2|;$

$A^3_{63}: \frac{1}{\sqrt{t}}[(x_0+x_2)^2+4x_1];$ $A^3_{64}: \frac{[x_0-x_2+\frac{1}{6}(x_0+x_2)^3+x_1(x_0+x_2)]^2}{[(x_0+x_2)^2+4x_1]^3};$

$A^3_{65}: \frac{1}{\sqrt{t}}[(x_0+x_2)^2+2x_1];$ $A^3_{66}: \frac{x_0^2-x_1^2-x_2^2}{x_0+x_2}+\ln|x_0+x_2|.$

§4. Инварианты подалгебр алгебры $AG(3,4)$.

Как и в §3 будем классифицировать подалгебры относительно эквивалентности, которая вводится так же, как и для алгебры $AG_3(1,2)$.

Теорема 2.4.I. Подалгебры алгебры $AG(3,4)$ исчерпываются относительно эквивалентности следующими алгебрами:

I) подалгебры ранга I –

$B^1_1 = \langle J_{12} \rangle$, $B^1_2 = \langle J_{12}+\alpha J_{34} \rangle$, $B^1_3 = \langle P_1 \rangle$, $B^1_4 = \langle P_1+G_2 \rangle$, $B^1_5 = \langle D \rangle$,

$B^1_6 = \langle T \rangle$, $B^1_7 = \langle S+T \rangle$, $B^1_8 = \langle J_{12}+P_3 \rangle$, $B^1_9 = \langle J_{12}+P_3+\alpha G_4 \rangle$,

$B^1_{10} = \langle J_{12}+\beta D \rangle$, $B^1_{11} = \langle J_{12}+T \rangle$, $B^1_{12} = \langle J_{12}+\beta(S+T) \rangle$,

$B^1_{13}=\langle J_{12}+\alpha J_{34}+\beta D\rangle$, $B^1_{14}=\langle J_{12}+\alpha J_{34}+T\rangle$, $B^1_{15}=\langle J_{12}+\alpha J_{34}+\beta(S+T)\rangle$,
$B^1_{16}=\langle T+G_1\rangle$, $B^1_{17}=\langle J_{12}+\alpha(T+G_3)\rangle$, $B^1_{18}=\langle J_{12}+S+T+\beta(G_1+P_2)\rangle$,
$B^1_{19}=\langle J_{12}+\alpha J_{34}+S+T+\beta(G_1+P_2)\rangle$;

2) подалгебры ранга 2 –
$B^2_1=\langle J_{12},J_{34}\rangle$, $B^2_2=\langle J_{12},J_{13},J_{23}\rangle$, $B^2_3=\langle P_1,P_2\rangle$, $B^2_4=\langle P_1+G_2,P_3\rangle$,
$B^2_5=\langle P_1+G_2,P_3+\alpha G_3+\beta G_4\rangle$, $B^2_6=\langle P_1+G_2+\alpha G_3,P_2-G_1+\beta G_2+\gamma G_3+\delta G_4\rangle$,
$B^2_7=\langle D,T\rangle$, $B^2_8=\langle J_{12},P_3\rangle$, $B^2_9=\langle J_{12},P_3+G_4\rangle$, $B^2_{10}=\langle J_{12}+P_3,P_4\rangle$,
$B^2_{11}=\langle J_{12}+P_3,P_3+\alpha G_4\rangle$, $B^2_{12}=\langle J_{12}+P_3,P_4+\alpha G_3\rangle$, $B^2_{13}=\langle J_{12}+P_3,P_4+\alpha G_3+\beta G_4\rangle$,
$B^2_{14}=\langle J_{12}+P_3+\alpha G_4,P_4+\beta G_3\rangle$, $B^2_{15}=\langle J_{12}+P_3+\alpha G_4,P_4+\beta G_3+\gamma G_4\rangle$,
$B^2_{16}=\langle J_{12}+P_3+\alpha G_4,P_3+\beta P_4+\gamma G_3+\delta G_4\rangle$, $B^2_{17}=\langle J_{12},T\rangle$, $B^2_{18}=\langle J_{12},D\rangle$,
$B^2_{19}=\langle J_{12},S+T\rangle$, $B^2_{20}=\langle J_{12}+\alpha J_{34},T\rangle$, $B^2_{21}=\langle J_{12}+\alpha J_{34},D\rangle$, $B^2_{22}=\langle J_{12}+\alpha J_{34},$
$S+T\rangle$, $B^2_{23}=\langle J_{12}+T,P_3\rangle$, $B^2_{24}=\langle J_{12}+\alpha D,P_3\rangle$, $B^2_{25}=\langle J_{12}+\alpha(S+T),P_3,G_3\rangle$,
$B^2_{26}=\langle J_{12}+\beta D,T\rangle$, $B^2_{27}=\langle J_{12}+\alpha J_{34}+\beta D,T\rangle$, $B^2_{28}=\langle J_{12}+\alpha D,J_{34}+\beta D\rangle$,
$B^2_{29}=\langle J_{12}+T,J_{34}+\alpha T\rangle$, $B^2_{30}=\langle J_{12}+\alpha(S+T),J_{34}+\beta(S+T)\rangle$, $B^2_{31}=\langle T,P_1\rangle$,
$B^2_{32}=\langle D,P_1\rangle$; $B^2_{33}=\langle S+T,P_1,G_1\rangle$, $B^2_{34}=\langle T+G_1,P_2\rangle$, $B^2_{35}=\langle J_{12},T+G_3\rangle$,
$B^2_{36}=\langle J_{12}+\alpha P_3+\beta P_4,T+G_3\rangle$, $B^2_{37}=\langle J_{12}+\alpha(T+G_3),P_4\rangle$, $B^2_{38}=\langle G_2-P_1,$
$J_{12}+S+T+\alpha(G_1+P_2)\rangle$, $B^2_{39}=\langle J_{12}+\beta J_{34}+S+T+\alpha(G_1+P_2),G_2-P_1\rangle$,
$B^2_{40}=\langle J_{12}+S+T+\alpha(G_1+P_2),J_{34}\rangle$, $B^2_{41}=\langle J_{12}+J_{34}+\alpha(G_1+P_2),G_3+P_4\rangle$,
$B^2_{42}=\langle J_{12}+\beta J_{34}+S+T,G_1+P_2\rangle$, $B^2_{43}=\langle J_{12}+S+T,G_1+P_2\rangle$, $B^2_{44}=\langle S+T+$
$+J_{12}+\alpha(G_1+P_2),J_{34}+\beta(G_1+P_2)\rangle$, $B^2_{45}=\langle S+T+J_{12}+\alpha(G_1+P_2),J_{34}+\beta(G_2-P_1)+\gamma(G_1+P_2)\rangle$;

3) подалгебры ранга 3 –

$B_1^3 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{14}, J_{24}, J_{34} \rangle$, $B_2^3 = \langle P_1, P_2, P_3 \rangle$, $B_3^3 = \langle P_1 + G_2, P_3, P_4 \rangle$,
$B_4^3 = \langle P_1 + G_2 + \alpha G_3, P_2 - G_1 + \beta G_2 + \gamma G_3, P_4 \rangle$, $B_5^3 = \langle J_{12}, P_3, P_4 \rangle$, $B_6^3 = \langle J_{12} + J_{34},$
$P_1 + G_3, P_2 + G_4 \rangle$, $B_7^3 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_4 \rangle$, $B_8^3 = \langle J_{12}, J_{34}, D \rangle$,
$B_9^3 = \langle J_{12}, J_{34}, T \rangle$, $B_{10}^3 = \langle J_{12}, J_{34}, S + T \rangle$, $B_{11}^3 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, D \rangle$,
$B_{12}^3 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, T \rangle$, $B_{13}^3 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, S + T \rangle$, $B_{14}^3 = \langle J_{12}, D, T \rangle$,
$B_{15}^3 = \langle J_{12} + \alpha J_{34}, D, T \rangle$, $B_{16}^3 = \langle D, P_3, P_4 \rangle$, $B_{17}^3 = \langle T, P_3, P_4 \rangle$,
$B_{18}^3 = \langle S + T, P_3, P_4, G_3, G_4 \rangle$, $B_{19}^3 = \langle J_{12} + \alpha D, J_{34} + \beta D, T \rangle$, $B_{20}^3 = \langle P_3, P_4,$
$J_{12} + \alpha D \rangle$, $B_{21}^3 = \langle J_{12} + T, P_3, P_4 \rangle$, $B_{22}^3 = \langle J_{12} + \alpha(S + T), P_3, P_4, G_3, G_4 \rangle$,
$B_{23}^3 = \langle J_{12} + \alpha D, T, P_3 \rangle$, $B_{24}^3 = \langle J_{12}, T + G_3, P_4 \rangle$, $B_{25}^3 = \langle J_{12} + \alpha P_3, T + G_3, P_4 \rangle$,
$B_{26}^3 = \langle S + T + J_{12} + \alpha(G_1 + P_2), P_3, P_4, G_4, G_3 \rangle$, $B_{27}^3 = \langle S + T + J_{12}, G_1 + P_2, P_4, G_4 \rangle$,
$B_{28}^3 = \langle S + T + J_{12} + \alpha(G_1 + P_2), G_2 - P_1, P_4, G_4 \rangle$, $B_{29}^3 = \langle S + T + J_{12}, J_{34}, G_1 + P_2 \rangle$
$B_{30}^3 = \langle S + T + J_{12} + \alpha(G_1 + P_2), G_2 - P_1, J_{34} \rangle$, $B_{31}^3 = \langle S + T + J_{12} + J_{34}, G_1 + P_2, G_3 + P_4 \rangle$,
$B_{32}^3 = \langle S + T + J_{12} + J_{34} + \alpha(G_1 + P_2), G_2 - P_1, G_3 + P_4 \rangle$, $B_{33}^3 = \langle S + T + J_{12} + \alpha(G_1 + P_2),$
$J_{34} + \beta(G_1 + P_2), G_2 - P_1 \rangle$, $B_{34}^3 = \langle S + T + 2J_{12}, G_1 + P_2 + \alpha P_3, G_2 - P_1 - \alpha G_3 \rangle$,
$B_{35}^3 = \langle S + T + 2J_{12}, G_1 + P_2 + \alpha(P_3 + \lambda G_4), G_2 - P_1 - \alpha(G_3 - \lambda P_4) \rangle$,
$B_{36}^3 = \langle S + T + (\beta + 2) J_{12} + \beta J_{34}, G_1 + P_2 + \alpha(G_3 - P_4), G_2 - P_1 + \alpha(G_4 + P_3) \rangle$;

4) подалгебры ранга 4 –

$B_1^4 = \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, $B_2^4 = AO(4) \oplus \langle D \rangle$, $B_3^4 = \langle T \rangle \oplus AO(4)$,
$B_4^4 = AO(4) \oplus \langle S + T \rangle$, $B_5^4 = \langle J_{12}, J_{34}, D, T \rangle$, $B_6^4 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, D, T \rangle$,

$B_7^4=\langle D, P_2, P_3, P_4\rangle$, $B_8^4=\langle T, P_2, P_3, P_4\rangle$, $B_9^4=\langle S+T, P_2, P_3, P_4, G_2, G_3, G_4\rangle$, $B_{10}^4=\langle D, T, P_3, P_4\rangle$, $B_{11}^4=\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, D, P_4\rangle$, $B_{12}^4=\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_4, T\rangle$, $B_{13}^4=\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, S+T, P_4, G_4\rangle$, $B_{14}^4=\langle J_{12}, P_3, P_4, D\rangle$, $B_{15}^4=\langle J_{12}, P_3, P_4, T\rangle$, $B_{16}^4=\langle J_{12}, S+T, P_3, P_4, G_3, G_4\rangle$, $B_{17}^4=\langle J_{12}+\alpha D, T, P_3, P_4\rangle$, $B_{18}^4=\langle T+G_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $B_{19}^4=\langle S+T+J_{12}, G_1+P_2, P_3, P_4, G_3, G_4\rangle$, $B_{20}^4=\langle S+T+J_{12}+\alpha(G_1+P_2), G_2-P_1, P_3, P_4, G_3, G_4\rangle$, $B_{21}^4=\langle S+T+2J_{12}, -G_2+P_1+\alpha G_3, G_1+P_2+\alpha P_3, P_4, G_4\rangle$, $B_{22}^4=\langle S+T+2J_{12}, J_{12}+J_{34}, G_1+P_2+\alpha(P_3+G_4), G_2-P_1+\alpha(P_4-G_3)\rangle$.

Теорема 2.4.2. Подалгебры алгебры $AG(3,4)$ имеют такие ПСИ: $B_1^1: t, \varphi(1,x), x_3, x_4$; $B_2^1: t, \alpha\psi(1,x)-\psi(2,x), \varphi(1,x), \varphi(2,x)$; $B_3^1: t, x_2, x_4, x_4$; $B_4^1: t, tx_1+x_2, x_3, x_4$; $B_5^1: \frac{x_1^2}{t}, \frac{x_2^2}{t}, \frac{x_3^2}{t}, \frac{x_4^2}{t}$; $B_6^1: x_1, x_2, x_3, x_4$; $B_7^1: \frac{x_1^2}{t^2+1}, \frac{x_2^2}{t^2+1}, \frac{x_3^2}{t^2+1}, \frac{x_4^2}{t^2+1}$; $B_8^1: t, \psi(1,x)-x_3, \varphi(1,x), x_4$; $B_9^1: t, \varphi(1,x), \psi(1,x)-x_3, \alpha t x_3+x_4$; $B_{10}^1: \frac{\varphi(1,x)}{t}, \frac{x_3^2}{t}, \frac{x_4^2}{t}, 2\beta\psi(1,x)+\ln t$; $B_{11}^1: \varphi(1,x), x_3, x_4, \psi(1,x)+t$; $B_{12}^1: \frac{\varphi(1,x)}{t^2+1}, \frac{x_3^2}{t^2+1}, \frac{x_4^2}{t^2+1}, \beta\psi(1,x)+\operatorname{arctg} t$; $B_{13}^1: \frac{\varphi(1,x)}{t}, \frac{\varphi(2,x)}{t}, \alpha\psi(1,x)-\psi(2,x), 2\beta\psi(1,x)+\ln t$; $B_{14}^1: \varphi(1,x), \varphi(2,x), \psi(1,x)+t, \alpha\psi(1,x)-\psi(2,x)$; $B_{15}^1: \frac{\varphi(1,x)}{t^2+1}, \frac{\varphi(2,x)}{t^2+1}, \alpha\psi(1,x)-\psi(2,x), \beta\psi(1,x)+\operatorname{arctg} t$; $B_{16}^1: t^2-2x_1, x_2, x_3, x_4$; $B_{17}^1: \varphi(1,x), t^2-2x_3, \alpha\psi(1,x)+t, x_4$;
$B_{18}^1: \frac{x_1+tx_2}{t^2+1}, \frac{tx_1-x_2}{t^2+1}-\beta\operatorname{arctg} t, \frac{x_3^2}{t^2+1}, \frac{x_4^2}{t^2+1}$;
$B_{19}^1: \frac{x_1+tx_2}{t^2+1}, \frac{tx_1-x_2}{t^2+1}-\beta\operatorname{arctg} t, \frac{\varphi(2,x)}{t^2+1}, \beta\psi(2,x)+\alpha\operatorname{arctg} t$;

$B^2_1: t, \varphi(1,x), \varphi(2,x)$; $B^2_2: t, x_1^2+x_2^2+x_3^2, x_4$; $B^2_3: t, x_3, x_4$;

$B^2_4: t, tx_1+x_2, x_4$; $B^2_5: t, tx_1+x_2, \beta t x_3+(1-\alpha t)x_4$;

$B^2_6: t, \alpha\delta t x_1+\delta x_3+(\alpha t-\gamma)x_4, \delta t^2 x_1+\delta t x_2+(1-\beta t+t^2)x_4$;

$B^2_7: \frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$; $B^2_8: t, \varphi(1,x), x_4$; $B^2_9: t, \varphi(1,x), tx_3+x_4$;

$B^2_{10}: t, \varphi(1,x), \psi(1,x)-x_3$; $B^2_{11}: t, \varphi(1,x), \alpha t\psi(1,x)-(\alpha t x_3+x_4)$;

$B^2_{12}: t, \varphi(1,x), \psi(1,x)-(x_3+\alpha t x_4)$; $B^2_{13}: t, (1-\beta t)(\psi(1,x)-x_3)+\alpha t x_4$, $\varphi(1,x)$; $B^2_{14}: t, \varphi(1,x), (\alpha\beta t^2-1)\psi(1,x)+x_3+\beta t x_4$;

$B^2_{15}: t, \varphi(1,x), (\alpha\beta t^2+\gamma t-1)\psi(1,x)+(1-\gamma t)x_3+\beta t x_4$;

$B^2_{16}: t, \varphi(1,x), [\beta+(\alpha-\delta)t-\alpha\gamma t^2]\psi(1,x)+(\delta t-\beta)x_3+(1-\gamma t)x_4$;

$B^2_{17}: \varphi(1,x), x_3, x_4$; $B^2_{18}: \frac{\varphi(1,x)}{t}, \frac{x_3^2}{t}, \frac{x_4^2}{t}$; $B^2_{19}: \frac{\varphi(1,x)}{t^2+1}, \frac{x_3^2}{t^2+1}, \frac{x_4^2}{t^2+1}$;

$B^2_{20}: \varphi(1,x), \varphi(2,x), \alpha\psi(1,x)-\psi(2,x)$; $B^2_{21}: \frac{\varphi(1,x)}{t}, \frac{\varphi(2,x)}{t}, \alpha\psi(1,x)-\psi(2,x)$;

$B^2_{22}: \frac{\varphi(1,x)}{t^2+1}, \frac{\varphi(2,x)}{t^2+1}, \alpha\psi(1,x)-\psi(2,x)$; $B^2_{23}: \varphi(1,x), \psi(1,x)+t, x_4$;

$B^2_{24}: \frac{\varphi(1,x)}{t}, \frac{x_4^2}{t}, 2\alpha\psi(1,x)+\ln t$; $B^2_{25}: \frac{\varphi(1,x)}{t^2+1}, \frac{x_4^2}{t^2+1}, \alpha\psi(1,x)+\operatorname{arctg} t$;

$B^2_{26}: \frac{\varphi(1,x)}{x_3^2}, \frac{x_4}{x_3}, 2\beta\psi(1,x)+\ln\varphi(1,x)$; $B^2_{27}: \frac{\varphi(1,x)}{\varphi(2,x)}, \alpha\psi(1,x)-\psi(2,x)$, $2\beta\psi(1,x)+\ln\varphi(1,x)$; $B^2_{28}: \frac{\varphi(1,x)}{t}, \frac{\varphi(2,x)}{t}, 2\alpha\psi(1,x)+2\beta\psi(1,x)+\ln t$;

$B^2_{29}: \varphi(1,x), \varphi(2,x), \psi(1,x)+\alpha\psi(2,x)+t$; $B^2_{30}: \frac{\varphi(1,x)}{t^2+1}, \frac{\varphi(2,x)}{t^2+1}, \alpha\psi(1,x)+$ $+\beta\psi(2,x)+\operatorname{arctg} t$; $B^2_{31}: x_2, x_3, x_4$; $B^2_{32}: \frac{x_2^2}{t}, \frac{x_3^2}{t}, \frac{x_4^2}{t}$;

$B^2_{33}: \frac{x_2^2}{t^2+1}, \frac{x_3^2}{t^2+1}, \frac{x_4^2}{t^2+1}$; $B^2_{34}: t^2-2x_1, x_3, x_4$; $B^2_{35}: t^2-2x_3, \varphi(1,x), x_4$;

$B^2_{36}: \varphi(1,x), \beta\psi(1,x)-x_4, \beta t^2-2(\beta x_3-\alpha x_4)$; $B^2_{37}: \varphi(1,x), t^2-2x_3, \alpha\psi(1,x)+t$;

$B^2_{38}: \frac{tx_1-x_2}{t^2+1}-\alpha\operatorname{arctg} t, \frac{x_3^2}{t^2+1}, \frac{x_4^2}{t^2+1}$; $B^2_{39}: \frac{tx_1-x_2}{t^2+1}-\alpha\operatorname{arctg} t, \frac{\varphi(2,x)}{t^2+1}, \psi(1,x)+\beta\operatorname{arctg} t$;

$B^2_{40}: \frac{tx_1-x_2}{t^2+1}-\alpha\,\mathrm{arctg}\,t,\ \frac{x_1+tx_2}{t^2+1},\ \frac{\varphi(2,x)}{t^2+1}$; $B^2_{41}: \frac{tx_1-x_2}{t^2+1}-\alpha\,\mathrm{arctg}\,t$, $\frac{x_1+tx_2}{t^2+1},\ \frac{x_3+tx_4}{t^2+1}$; $B^2_{42}: \frac{x_1+tx_2}{t^2+1},\ \frac{\varphi(2,x)}{t^2+1},\ \psi(1,x)+\beta\,\mathrm{arctg}\,t$;

$B^2_{43}: \frac{x_1+tx_2}{t^2+1},\ \frac{x_3^2}{t^2+1},\ \frac{x_4^2}{t^2+1}$; $B^2_{44}: \frac{tx_1-x_2}{t^2+1}-\alpha\,\mathrm{arctg}\,t+\beta\psi(2,x),\ \frac{\varphi(2,x)}{t^2+1}$, $\frac{x_1+tx_2}{t^2+1}$; $B^2_{45}: \frac{\varphi(2,x)}{t^2+1},\ \frac{x_1+tx_2}{t^2+1}+\beta\psi(2,x),\ \frac{tx_1-x_2}{t^2+1}-\alpha\,\mathrm{arctg}\,t+\gamma\psi(2,x)$;

$B^3_1: t,\ \varphi(1,x)+\varphi(2,x)$; $B^3_2: t,\ x_4$; $B^3_3: t,\ tx_1+x_2$;

$B^3_4: t,\ [-\alpha t^3+\alpha(\beta+1)t^2-(\alpha+\gamma)t]x_1+(\alpha t-\gamma)x_2+(\beta t-t^2-1)x_3$;

$B^3_5: t,\ \varphi(1,x)$; $B^3_6: t,\ (tx_1+x_3)^2+(tx_2+x_4)^2$; $B^3_7: t,\ x_1^2+x_2^2+x_3^2$;

$B^3_8: \frac{\varphi(1,x)}{t},\ \frac{\varphi(2,x)}{t}$; $B^3_9: \varphi(1,x),\ \varphi(2,x)$; $B^3_{10}: \frac{\varphi(1,x)}{t^2+1},\ \frac{\varphi(2,x)}{t^2+1}$;

$B^3_{11}: \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{t},\ \frac{x_4^2}{t}$; $B^3_{12}: x_1^2+x_2^2+x_3^2,\ x_4$; $B^3_{13}: \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{t^2+1},\ \frac{x_4^2}{t^2+1}$;

$B^3_{14}: \frac{\varphi(1,x)}{x_3^2},\ \frac{x_4}{x_3}$; $B^3_{15}: \frac{\varphi(1,x)}{\varphi(2,x)},\ \alpha\psi(1,x)-\psi(2,x)$; $B^3_{16}: \frac{x_1^2}{t},\ \frac{x_2^2}{t}$;

$B^3_{17}: x_1,\ x_2$; $B^3_{18}: \frac{x_1^2}{t^2+1},\ \frac{x_2^2}{t^2+1}$; $B^3_{19}: \frac{\varphi(1,x)}{\varphi(2,x)},\ 2\alpha\psi(1,x)+2\beta\psi(2,x)+\ln\varphi(1,x)$;

$B^3_{20}: \frac{\varphi(1,x)}{t},\ 2\alpha\psi(1,x)+\ln t$; $B^3_{21}: \varphi(1,x),\ \psi(1,x)+t$; $B^3_{22}: \alpha\psi(1,x)+\mathrm{arctg}\,t$, $\frac{\varphi(1,x)}{t^2+1}$; $B^3_{23}: \frac{\varphi(1,x)}{x_4^2},\ 2\alpha\psi(1,x)+\ln\varphi(1,x)$; $B^3_{24}: \varphi(1,x),\ t^2-2x_3$;

$B^3_{25}: \varphi(1,x),\ 2\alpha\psi(1,x)+t^2-2x_3$; $B^3_{26}: \frac{x_1+tx_2}{t^2+1},\ \frac{x_3^2}{t^2+1}$; $B^3_{27}: \frac{x_1+tx_2}{t^2+1}$, $\frac{tx_1-x_2}{t^2+1}-\alpha\,\mathrm{arctg}\,t$; $B^3_{28}: \frac{tx_1-x_2}{t^2+1}-\alpha\,\mathrm{arctg}\,t,\ \frac{x_3^2}{t^2+1}$; $B^3_{29}: \frac{x_1+tx_2}{t^2+1},\ \frac{\varphi(2,x)}{t^2+1}$;

$B^3_{30}: \frac{tx_1-x_2}{t^2+1}-\alpha\,\mathrm{arctg}\,t,\ \frac{\varphi(2,x)}{t^2+1}$; $B^3_{33}: \frac{tx_1-x_2}{t^2+1}-\alpha\,\mathrm{arctg}\,t+\beta\psi(2,x),\ \frac{\varphi(2,x)}{t^2+1}$;

$B^3_{32}: \frac{tx_1-x_2}{t^2+1}-\alpha\,\mathrm{arctg}\,t,\ \frac{x_3+tx_4}{t^2+1}$; $B^3_{31}: \frac{x_1+tx_2}{t^2+1},\ \frac{x_3+tx_4}{t^2+1}$;

$B^3_{34}: \frac{2\alpha t x_1+\alpha(t^2-1)x_2+(t^2+1)x_3}{(t^2+1)^{3/2}},\ \frac{x_4^2}{t^2+1}$;

$B^3_{35}: \frac{2\alpha t x_1+\alpha(t^2-1)x_2+(t^2+1)x_3}{(t^2+1)^{3/2}},\ \frac{\alpha\lambda(1-t^2)x_1+2\alpha\lambda t x_2+(t^2+1)x_4}{(t^2+1)^{3/2}}$;

B^3_{36}: $\dfrac{(-2\alpha t x_1+\alpha(1-t^2)x_2+(t^2+1)x_4)^2+(\alpha(1-t^2)x_1+2\alpha t x_2+(t^2+1)x_3)^2}{(t^2+1)^3}$,

$\operatorname{arctg}\dfrac{-2\alpha t x_1+\alpha(1-t^2)x_2+(t^2+1)x_4}{\alpha(1-t^2)x_1+2\alpha t\, x_2+(t^2+1)x_3}-\beta\operatorname{arctg} t$;

$B^4_1: t$; $B^4_2: \dfrac{\varphi(1,x)+\varphi(2,x)}{t}$; $B^4_3: \varphi(1,x)+\varphi(2,x)$; $B^4_4: \dfrac{\varphi(1,x)+\varphi(2,x)}{t^2+1}$;
$B^4_5: \dfrac{\varphi(1,x)}{\varphi(2,x)}$; $B^4_6: \dfrac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_4^2}$; $B^4_7: \dfrac{x_1^2}{t}$; $B^4_8: x_1$; $B^4_9: \dfrac{x_1^2}{t^2+1}$;
$B^4_{10}: \dfrac{x_1}{x_2}$; $B^4_{11}: \dfrac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{t}$; $B^4_{12}: x_1^2+x_2^2+x_3^2$; $B^4_{13}: \dfrac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{t^2+1}$;
$B^4_{14}: \dfrac{\varphi(1,x)}{t}$; $B^4_{15}: \varphi(1,x)$; $B^4_{16}: \dfrac{\varphi(1,x)}{t^2+1}$; $B^4_{17}: 2\alpha\,\psi(1,x)+\ln\varphi(1,x)$;
$B^4_{18}: t^2-2x_1$; $B^4_{19}: \dfrac{x_1+tx_2}{t^2+1}$; $B^4_{20}: \dfrac{tx_1-x_2}{t^2+1}-\alpha\operatorname{arctg} t$;
$B^4_{21}: \dfrac{2\alpha t x_1+\alpha(t^2-1)x_2+(t^2+1)x_3}{(t^2+1)^{3/2}}$;
$B^4_{22}: \dfrac{[2\alpha t x_1+\alpha(t^2-1)x_2+(t^2+1)x_3]^2+[\alpha(1-t^2)x_1+2\alpha t x_2+(t^2+1)x_4]^2}{(t^2+1)^3}$.

Глава 3. Редукция и решения некоторых галилеевски инвариантных дифференциальных уравнений в частных производных.

В этой главе проведена редукция 4-мерного уравнения теплопроводности и найдены некоторые его точные решения. Нелинейное уравнение Шредингера редуцировано по всем подалгебрам алгебры $A\tilde{G}(3,3)$ с точностью до эквивалентности. Используя подалгебры ранга 3, получены некоторые точные решения уравнения Шредингера в пространстве $R_{1,2}$.

§I, Редукция и решения 4-мерного уравнения теплопроводности.

Известно, что n-мерное уравнение теплопроводности

$$k\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \qquad /3.I.I/$$

инвариантно относительно полной алгебры Галилея $A\tilde{G}(3,n)$, базисные элементы которой задаются формулами /2.I.I/ при $m=2k$, $t=\tau$. В этом параграфе будет проведена симметрийная редукция уравнения /3.I.I/ для $n=4$ по подалгебрам ранга 4 алгебры $A\tilde{G}(3,4)$.

Используя результаты [5] можно показать, что если F – подалгебра $A\tilde{G}(3,4)$, $M \notin F$ и ранг F равен 4, то F $\tilde{G}(3,4)$-эквивалентна одной из следующих алгебр:

$F_1 = \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, $F_2 = \langle P_1, P_2, P_3 + G_3, G_4 \rangle$,

$F_3 = \langle P_1, P_2, G_3, G_4 \rangle$, $F_4 = \langle P_1, G_2, P_3 + G_3, P_4 + \alpha G_4 \rangle$,

$F_5 = \langle P_1, P_2, P_3, G_4 \rangle$, $F_5 = \langle T + G_4, P_1, P_2, P_3 \rangle$,

$F_7 = \langle T - \varepsilon M, P_1, P_2, P_3 \rangle$ $(\varepsilon = 0, \pm 1)$, $F_8 = \langle T - \varepsilon M, J_{12} + \lambda M, P_3, P_4 \rangle$

$(\varepsilon=0,\pm 1;\lambda\geq 0)$, $F_9=\langle T-\varepsilon M, P_4\rangle \oplus AO(3)$ $(\varepsilon=0,\pm 1)$, $F_{10}=\langle T-\varepsilon M\rangle\oplus AO(4)$ $(\varepsilon=0,\pm 1)$, $F_{11}=\langle J_{12}+\beta D-4\beta k^{-1}(\alpha+1)M, T, P_3, P_4\rangle$ $(\beta>0, k(\alpha+1)\geq 0)$, $F_{12}=\langle D-4k^{-1}(\alpha+1)M, P_1, P_2, P_3\rangle$, $(k(1+\alpha)\geq 0)$, $F_{13}=\langle D-4k^{-1}(\alpha+1)M, P_1, P_2, G_3\rangle$ $(k(1+\alpha)\geq 0)$, $F_{14}=\langle D-2k^{-1}(2+\alpha)M, T, P_1, P_2\rangle$, $F_{15}=\langle D-4k^{-1}(\alpha+1)M, P_4\rangle\oplus\oplus AO(3)$, $F_{16}=\langle D-2k^{-1}(2+\alpha)M, T\rangle\oplus AO(3)$, $F_{17}=\langle D-4k^{-1}(\alpha+1)M\rangle\oplus\oplus AO(4)$, $F_{18}=\langle S+T-2\alpha k^{-1}M\rangle\oplus AO(4)$, $F_{19}=\langle S+T+2J_{12}-\alpha M, J_{12}+J_{34}-\beta M, G_1+P_2+P_3+G_4, G_2-P_1-G_3+P_4\rangle$, $F_{20}=\langle J_{12}+2\beta k^{-1}M, D-4(1+\alpha)k^{-1}M, P_3, G_4\rangle$, $F_{21}=\langle D-4k^{-1}(\alpha+1)M, J_{12}+2\beta k^{-1}M, P_3, P_4\rangle$, $F_{22}=\langle D-2k^{-1}(2+\alpha)M, T, J_{12}+2\beta k^{-1}M, P_3\rangle$, $F_{23}=\langle D-\alpha M, T, J_{12}-\beta M, J_{34}-\gamma M\rangle$ $(\beta\geq 0,\gamma\geq 0)$, $F_{24}=\langle D, S, T, J_{12}-\beta M\rangle$, $F_{25}=\langle D, S, T, J_{12}+\alpha J_{34}-\beta M\rangle$ $(0\leq\beta, 0<\alpha\leq 1)$.

Используя результаты §4 главы 2, находим основные инварианты алгебр F_j ($j=1,\ldots,23$). Имеем

F_1: u, τ; F_2: $u\exp\left(\frac{k}{4(\tau-1)}x_3^2+\frac{k}{4\tau}x_4^2\right), \tau$;

F_3: $u\exp\left[\frac{k}{4\tau}(x_3^2+x_4^2)\right], \tau$; F_4: $u\exp\left(\frac{kx_2^2}{4\tau}+\frac{kx_3^2}{4(\tau-1)}+\frac{k\alpha x_4^2}{4(\alpha\tau-1)}\right), \tau$;

F_5: $u\exp\left(\frac{k}{4\tau}x_4^2\right), \tau$; F_6: $u\exp\left(-\frac{k}{6}\tau^3+\frac{k}{2}\tau x_4\right), \tau^2-2x_4$;

F_7: $u\exp\left(-\frac{\varepsilon k}{2}\tau\right), x_4$; F_8: $u\exp\left(-\frac{\varepsilon k}{2}\tau+\frac{\lambda k}{2}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right), x_1^2+x_2^2$;

F_9: $u\exp\left(-\frac{\varepsilon k}{2}\tau\right), x_1^2+x_2^2+x_3^2$; F_{10}: $u\exp\left(-\frac{\varepsilon k}{2}\tau\right), x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$;

F_{11}: $u(x_1^2+x_2^2)^{-\alpha}, \beta\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}+\frac{1}{2}\ln(x_1^2+x_2^2)$; F_{12}: $u\tau^{-\alpha}, \frac{x_4^2}{\tau}$;

$F_{13}: u\tau^{-\alpha}\exp\left(\frac{kx_3^2}{4\tau}\right),\ \frac{x_4^2}{\tau}$; $F_{14}: ux_4^{-\alpha},\ \frac{x_3}{x_4}$;

$F_{15}: u\tau^{-\alpha},\ \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{\tau}$; $F_{16}: u x_4^{-\alpha},\ \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_4^2}$;

$F_{17}: u\tau^{-\alpha},\ \frac{|x|^2}{\tau}\quad (|x|^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$;

$F_{18}: u(\tau^2+1)\exp\left(\frac{k\tau|x|^2}{4(\tau^2+1)}-\alpha\,\mathrm{arctg}\,\tau\right),\ \frac{|x|^2}{\tau^2+1}$;

$$F_{19}: u(\tau^2+1)\exp\left\{\frac{k}{8\tau}\left[(x_1+x_4)^2+(x_2-x_3)^2+(\tau^2-1)\omega\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{k\alpha}{2}\mathrm{arctg}\,\tau+\frac{k\beta}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{2\tau x_1+(\tau^2-1)x_2+(\tau^2+1)x_3}{2\tau x_2+(1-\tau^2)x_1+(\tau^2+1)x_4}\right.,$$

$$\omega=(\tau^2+1)^{-3}\left\{\left[2\tau x_1+(\tau^2-1)x_2+(\tau^2+1)x_3\right]^2+\left[2\tau x_2+(1-\tau^2)x_1+(\tau^2+1)x_4\right]^2\right\};$$

$F_{20}: u\tau^{-\alpha}\exp\left(-\beta\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_1}{x_2}+\frac{k}{4\tau}x_4^2\right),\ \frac{x_1^2+x_2^2}{\tau}$;

$F_{21}: u\tau^{-\alpha}\exp\left(-\beta\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_1}{x_2}\right),\ \frac{x_1^2+x_2^2}{\tau}$; $F_{22}: ux_4^{-\alpha}\exp\left(-\beta\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_1}{x_2}\right),\ \frac{x_1^2+x_2^2}{x_4^2}$;

$F_{23}: u(x_1^2+x_2^2)^{1-\frac{k\alpha}{4}}\exp\left(\frac{k\beta}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{x_1}{x_2}+\frac{k\gamma}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{x_3}{x_4}\right),\ \frac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2+x_4^2}$.

Применяя анзац $\omega_j'=\varphi(\omega_j)$, где ω_j',ω_j – основные инварианты алгебры F_j ($j=1,\ldots,23$), получаем такие редуцированные уравнения:

1) $\dot\varphi=0$; 2) $\dot\varphi+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega-1}+\frac{1}{\omega}\right)\varphi=0$; 3) $\dot\varphi+\frac{1}{\omega}\varphi=0$;

4) $\dot\varphi+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega-1}+\frac{\alpha}{\varkappa\omega-1}\right)\varphi=0$; 5) $\dot\varphi+\frac{1}{2\omega}\varphi=0$;

6) $\ddot\varphi-\frac{k^2}{16}\omega\varphi=0$; 7) $\ddot\varphi-\frac{\varepsilon k^2}{2}\varphi=0$;

8) $\omega^2\ddot\varphi+\omega\dot\varphi+\left(\frac{\lambda^2k^2}{16}-\frac{\varepsilon k^2}{8}\omega\right)\varphi=0$;

9) $\omega\ddot\varphi+\frac{3}{2}\dot\varphi-\frac{\varepsilon k^2}{2}\varphi=0$; 10) $\omega\ddot\varphi+2\dot\varphi-\frac{\varepsilon k^2}{8}\varphi=0$;

11) $(\beta^2+1)\ddot{\varphi}+4\alpha\dot{\varphi}+4\alpha^2\varphi=0$; 12) $\omega\ddot{\varphi}+\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{4}\omega\right)\dot{\varphi}-\frac{k\alpha}{4}\varphi=0$;

13) $\omega\ddot{\varphi}+\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{4}\omega\right)\dot{\varphi}-\frac{k(2\alpha+1)}{8}\varphi=0$;

14) $(1+\omega^2)\ddot{\varphi}+2(1-\alpha)\omega\dot{\varphi}+\alpha(\alpha-1)\varphi=0$;

15) $\omega\ddot{\varphi}+\left(\frac{3}{2}+\frac{k}{4}\omega\right)\dot{\varphi}-\frac{k\alpha}{4}\varphi=0$;

16) $\omega(\omega+1)\ddot{\varphi}+\left[\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)\omega\right]\dot{\varphi}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{4}\varphi=0$;

17) $\omega\ddot{\varphi}+\left(2+\frac{k}{4}\omega\right)\dot{\varphi}-\frac{k\alpha}{4}\varphi=0$;

18) $\omega\ddot{\varphi}+2\dot{\varphi}+\left(-\frac{\alpha k}{4}+\frac{k^2}{16}\omega\right)\varphi=0$;

19) $\omega^2\ddot{\varphi}+\omega\dot{\varphi}+\frac{k^2}{16}\left[\omega^2+(\beta-\alpha)\omega+\beta^2\right]\varphi=0$;

20) $\omega^2\ddot{\varphi}+\left(\omega+\frac{k}{4}\omega^2\right)\dot{\varphi}+\left(\frac{\beta^2}{4}-\frac{k(2\alpha+1)}{8}\omega\right)\varphi=0$;

21) $\omega^2\ddot{\varphi}+\left(\omega+\frac{k}{4}\omega^2\right)\dot{\varphi}+\left(\frac{\beta^2}{4}-\frac{k\alpha}{4}\omega\right)\varphi=0$;

22) $\omega^2(\omega+1)\ddot{\varphi}+\left[1+\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)\omega\right]\omega\dot{\varphi}+\left[\frac{\beta^2}{4}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{4}\omega\right]\varphi=0$;

23) $\omega^2(\omega+1)\ddot{\varphi}+\left(\frac{k\alpha}{2}-1+\omega\right)\omega\dot{\varphi}+\frac{1}{16}\left[(\alpha k-4)^2+(\beta k)^2+(\gamma k)^2\omega\right]\varphi=0$.

Пусть $F(a,b;c,x)={}_2F_1(a,b;c,x)$ - гипергеометрическая функция, $F(a,b;x)={}_1F_1(a,b;x)$ - функция Похгаммера или вырожденная гипергеометрическая функция, $Z_\nu(x)$ - цилиндрическая функция [13].

Используя [22], находим следующие решения уравнений 1 - 17:

1) $\varphi=C$; 2) $\varphi=C|\omega(\omega-1)|^{-1/2}$; 3) $\varphi=C\omega^{-1}$;

4) $\varphi=C|\omega(\omega-1)(\omega-\alpha)|^{-1/2}$; 5) $\varphi=C|\omega|^{-1/2}$;

6) $\varphi=\omega^{\frac{1}{2}}Z_{1/3}\left(\frac{ik}{6}\omega^{3/2}\right)$; 7) $\varphi=C_1\omega+C_2$ $(\varepsilon=0)$,

$$\varphi = C_1 \exp\left(\frac{k\omega}{\sqrt{2}}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{k\omega}{\sqrt{2}}\right) \quad (\varepsilon = 1),$$

$$\varphi = C_1 \cos\left(\frac{k\omega}{\sqrt{2}}\right) + C_2 \sin\left(-\frac{k\omega}{\sqrt{2}}\right) \quad (\varepsilon = -1);$$

8) $\varphi = C_1 + C_2 \ln|\omega| \quad (\varepsilon = 0,\ \lambda = 0),$

$$\varphi = C_1 \cos\left(\frac{\lambda k}{4} \ln|\omega| + C_2\right) \quad (\varepsilon = 0,\ \lambda \neq 0),$$

$$\varphi = Z_{\frac{i\lambda k}{2}}\left(\sqrt{-\frac{\varepsilon k^2}{2}\omega}\right) \quad (\varepsilon \neq 0);$$

9) $\varphi = C_1 |\omega|^{-1/2} + C_2 \quad (\varepsilon = 0)$

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\omega}}\, C_1 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon k^2}{2}\omega} + C_2\right), & \varepsilon\omega > 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{-\varepsilon\omega}}\, C_1 \cos\left(\sqrt{-\dfrac{\varepsilon k^2}{2}\omega} + C_2\right), & \varepsilon\omega < 0 \end{cases} \quad (\varepsilon \neq 0);$$

10) $\varphi = C_1 \omega^{-1} + C_2 \quad (\varepsilon = 0), \quad \varphi = \omega^{-1/2} Z_1\left(\sqrt{-\frac{\varepsilon k^2}{2}\omega}\right) \quad (\varepsilon \neq 0);$

11) $\varphi = C_1\omega + C_2 \quad (\alpha = 0), \quad \varphi = (C_1\omega + C_2)\exp(-2\alpha\omega) \quad (\beta = 0),$

$$\varphi = C_1 \exp\left(-\frac{2\alpha}{1+\beta^2}\omega\right) \cos\left(\frac{2\alpha\beta}{1+\beta^2}\omega + C_2\right) \quad (\alpha\beta \neq 0);$$

12) $\varphi = C_1 F\left(-\alpha, \frac{1}{2}; -\frac{k}{4}\omega\right) + C_2\left(-\frac{k}{4}\omega\right)^{1/2} F\left(\frac{1}{2} - \alpha, \frac{3}{2}; -\frac{k}{4}\omega\right);$

13) $\varphi = C_1 F\left(-\frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2}; -\frac{k}{4}\omega\right) + C_2\left(-\frac{k}{4}\omega\right)^{1/2} F\left(-\alpha, \frac{3}{2}; -\frac{k}{4}\omega\right);$

14) $\varphi = C_1 \operatorname{arctg}\omega + C_2 \quad (\alpha = 0),$

$$\varphi = C_1 (1 + \omega^2)^{\alpha/2} \cos(\alpha \operatorname{arctg}\omega + C_2) \quad (\alpha \neq 0);$$

15) $\varphi = C_1 F\left(-\alpha, \frac{3}{2}; -\frac{k}{4}\omega\right) + C_2\left(-\frac{k}{4}\omega\right)^{1/2} F\left(-\alpha - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{k}{4}\omega\right);$

16) $\varphi = C F\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}; -\frac{3}{2}, -\omega\right) \quad (|\omega| < 1),$

если $-1<\omega<0$, то общее решение имеет вид

$$\varphi = C_1 F\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}; -\frac{3}{2}, -\omega\right) + C_2(-\omega)^{-5/2} F\left(\frac{5-\alpha}{2}, \frac{7-\alpha}{2}; \frac{7}{2}, -\omega\right);$$

$$\alpha=\frac{5}{2}, \quad \varphi = C_1\left(1+\sqrt{1+\omega}\right)^{-\frac{13}{2}} + C_2\,\omega^{-5}\left(1+\sqrt{1+\omega}\right)^{5},$$

$$\alpha=-2, \quad \varphi = \omega^{5/2}(1+\omega)^{-\frac{13}{2}}\left[C_1(1+\omega)^{5/2} + C_2(\omega^3+2\omega^2-2)\right],$$

$$\alpha=3, \quad \varphi=(1+\omega)\left[C_1 + C_2\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\omega} - \frac{3\sqrt{\omega}}{2(1+\omega)}\right)\right],$$

$$\alpha=5, \quad \varphi = C_1\,\omega^{5/2} + C_2\left(\omega^2+\frac{2}{3}\omega+\frac{1}{5}\right);$$

17) $$\varphi = C_1 F\left(-\alpha, 2; -\frac{k}{4}\omega\right) + C_2\Big[F\left(-\alpha, 2; -\frac{k}{4}\omega\right)\cdot \ln\left(-\frac{k}{4}\omega\right) + \sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{-\alpha(-\alpha+1)\ldots(-\alpha+\tau+1)}{\tau!\,(\tau+1)!}\left(-\frac{k}{4}\omega\right)^{\tau}\sum_{\nu=0}^{\tau-1}\left(\frac{1}{\nu-\alpha}-\frac{1}{\nu+2}-\frac{1}{1-\nu}\right)\Big].$$

Имея решения редуцированных уравнений, легко найти соответствующие инвариантные решения уравнения теплопроводности.

§2. Редукция и решения нелинейного уравнения Шредингера.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$iU_\tau = k\Delta U + H(x, U, U^*), \qquad /3.2.I/$$

где H – произвольная дифференцируемая функция, $U=U(\tau, x_1, x_2, x_3)$, k – ненулевое вещественное число. Это уравнение при $H=0$ превращается в свободное уравнение Шредингера, поэтому естественно называть его нелинейным уравнением Шредингера.

Симметрийные свойства уравнения/3.2.I/ исследовались в ряде работ [40, 45,70]. Чтобы сформулировать полученные результаты, введем в рассмотрение расширенную алгебру Галилея $A\tilde{G}(3,3)$, базис которой составляют такие векторные поля:

$$P_a = -\partial_a,\ J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a,\ G_a = \tau\partial_a + \frac{x_a}{2ki}(u\partial_u - u^*\partial_{u^*}),$$

$$D = 2\tau\partial_\tau + x^a\partial_a - \frac{3}{2}(u\partial_u + u^*\partial_{u^*}),\ T = \partial_\tau,$$

$$S = \tau^2\partial_\tau + \tau x^a\partial_a + \frac{|x|^2}{4ki}(u\partial_u - u^*\partial_{u^*}) - \frac{3}{2}\tau(u\partial_u + u^*\partial_{u^*}),$$

$$M = \frac{1}{2ki}(u\partial_u - u^*\partial_{u^*}),$$

где $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$; $a, b = 1,2,3$; u^* – функция, комплексно-сопряженная u. Алгебра $A\tilde{G}(3,3)$ содержит расширенную специальную алгебру Галилея, порожденную $P_a, J_{ab}, G_a, D, T, M$, а последняя, в свою очередь, содержит классическую алгебру Галилея, порожденную P_a, J_{ab}, G_a, T, M ($a, b = 1,2,3$).

Хорошо известно, что свободное уравнение Шредингера инвариантно относительно $A\tilde{G}(3,3)$. Нелинейное уравнение /3.2.1/ обладает такой же симметрией тогда и только тогда, когда $H = \lambda u|u|^{4/3}$, где λ – произвольное комплексное число [70]. Если требовать инвариантность уравнения /3.2.1/ относительно $A\tilde{G}(2,3)$, то необходимо и достаточно, чтобы $H = \lambda u|u|^q$, где q – вещественное число, при этом генератор D видоизменяется

$$D = 2\tau\partial_\tau + x^a\partial_a - \frac{2}{q}(u\partial_u + u^*\partial_{u^*}).$$

Уравнение /3.2.1/ инвариантно относительно алгебры $A\tilde{G}(1,3)$ тогда и только тогда, когда $H = uF(|u|)$, где F – произвольная гладкая функция [70].

Если L – подалгебра ранга r ($1 \le r \le n$) алгебры $A\tilde{G}(3,n)$, то L обладает основными инвариантами $\omega_1(x,\tau), \dots, \omega_{r-1}(x,\tau)$, $\omega_r(x,\tau,u)$. Анзац

$$\omega_r = \varphi(\omega_1, \dots, \omega_{r-1}) \qquad /3.2.2/$$

редуцирует уравнение /3.2.1/ к уравнению, содержащему только $\omega_1, \dots, \omega_{r-1}, \varphi$ и производные от φ по $\omega_1, \dots, \omega_{r-1}$. Условимся использовать такие обозначения

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \; \varphi_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1 \le i, j \le r-1).$$

Если $r = 2$, то вместо ω_1 будем писать ω, а вместо φ_1 – $\dot{\varphi}$. Для сокращения записи анзац будем записывать в разрешенном виде $u = f(x, \tau)\varphi(\omega_1, \dots, \omega_{r-1})$ с явным указанием под знаком φ инвариантов $\omega_1, \dots, \omega_{r-1}$.

2.I. Редукция уравнения Шредингера с произвольной нелинейностью.

В данном пункте мы рассмотрим редукцию уравнения Шредингера

$$i u_\tau = k \Delta u + u F(|u|) \qquad /3.2.3/$$

по подалгебрам алгебры $\widetilde{AG}(1,3)$.

а). Редукция по подалгебрам ранга 3.

1) $\langle T - 2k\alpha M, P_2, P_3 \rangle$, $u = \exp(i\alpha\tau)\varphi(x_1)$,

$$k\ddot{\varphi} + \alpha\varphi + \varphi F(|\varphi|) = 0; \qquad /3.2.4/$$

2) $\langle J_{12} + 2k\alpha M, T - 2k\beta M, P_3 \rangle$,

$u = \exp\left(i\beta\tau + i\alpha \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2}\right)\varphi(x_1^2 + x_2^2)$,

$4k\omega\ddot{\varphi} + 4k\dot{\varphi} + \left(\beta - \frac{k\alpha^2}{\omega}\right)\varphi + \varphi F(|\varphi|) = 0$;

3) $\langle T - 2k\alpha M \rangle \oplus AO(3)$, $u = \exp(i\alpha\tau)\varphi(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$,

$$4k\omega\ddot{\varphi} + 6k\dot{\varphi} + \alpha\varphi + \varphi F(|\varphi|) = 0; \qquad /3.2.5/$$

4) $\langle T + \alpha G_1, P_2, P_3 \rangle$, $u = \exp\left(\frac{i\alpha^2}{6k}\tau^3 - \frac{i\alpha\tau x_1}{2k}\right)\varphi(\alpha\tau^2 - 2x_1)$,

$4k\ddot{\varphi} + \frac{\alpha}{4k}\omega\varphi + \varphi F(|\varphi|) = 0$;

5) $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $u=\varphi(\tau)$,

$$i\dot{\varphi}-\varphi F(|\varphi|)=0;$$

6) $\langle G_1, P_2, P_3\rangle$, $u=\exp\left(\frac{-ix_1^2}{4k\tau}\right)\varphi(\tau)$,

$$i\dot{\varphi}+\frac{i}{2\omega}\varphi-\varphi F(|\varphi|)=0; \qquad /3.2.6/$$

7) $\langle G_1+\alpha P_1, G_2, P_3\rangle$, $u=\exp\left(-\frac{ix_1^2}{4k(\tau-\alpha)}-\frac{ix_2^2}{4k\tau}\right)\varphi(\tau)$,

$$i\dot{\varphi}+\frac{i}{2}\left(\frac{1}{\omega-\alpha}+\frac{1}{\omega}\right)\varphi-\varphi F(|\varphi|)=0; \qquad /3.2.7/$$

8) $\langle G_1+\alpha P_1, G_2+\beta P_2, G_3\rangle$,

$$u=\exp\left(-\frac{ix_1^2}{4k(\tau-\alpha)}-\frac{ix_2^2}{4k(\tau-\beta)}-\frac{ix_3^2}{4k\tau}\right)\varphi(\tau),$$

$$i\dot{\varphi}+\frac{i}{2}\left(\frac{1}{\omega-\alpha}+\frac{1}{\omega-\beta}+\frac{1}{\omega}\right)\varphi-\varphi F(|\varphi|)=0;$$

б). Редукция по подалгебрам ранга 2.

1) $\langle P_1, P_2\rangle$, $u=\varphi(\tau, x_3)$,

$$i\varphi_1=k\varphi_{22}+\varphi F(|\varphi|);$$

2) $\langle G_1, P_2\rangle$, $u=\exp\left(-\frac{ix_1^2}{4k\tau}\right)\varphi(\tau, x_3)$,

$$i\varphi_1=k\varphi_{22}-\frac{i}{2\omega_1}\varphi+\varphi F(|\varphi|);$$

3) $\langle G_1, G_2\rangle$, $u=\exp\left(-\frac{i}{4k\tau}(x_1^2+x_2^2)\right)\varphi(\tau, x_3)$,

$$i\varphi_1=k\varphi_{22}-\frac{i}{\omega_1}\varphi+\varphi F(|\varphi|);$$

4) $\langle G_1+\gamma P_1, G_2\rangle$, $u=\exp\left(-\frac{ix_1^2}{4k(\tau-\gamma)}-\frac{ix_2^2}{4k\tau}\right)\varphi(\tau, x_3)$,

$$i\varphi_1=k\varphi_{22}-\frac{i}{2}\left(\frac{1}{\omega_1-\gamma}+\frac{1}{\omega_1}\right)\varphi+\varphi F(|\varphi|);$$

5) $\langle T-2k\alpha M, P_3\rangle$, $u=\exp(i\alpha\tau)\varphi(x_1, x_2)$,

$$\alpha\varphi+k(\varphi_{11}+\varphi_{22})+\varphi F(|\varphi|)=0;$$

6) $\langle T+\alpha G_1, P_3\rangle$, $u=\exp\left(\frac{i\alpha^2}{6k}\tau^3-\frac{i\alpha\tau x_1}{2k}\right)\varphi(\alpha t^2-2x_1, x_2)$,

$$k(4\varphi_{11}+\varphi_{22})+\frac{\alpha}{4k}\omega_1\varphi+\varphi F(|\varphi|)=0;$$

7) $\langle G_1+\lambda P_1, G_2+\alpha P_2+\mu P_3\rangle$,

$$u=\exp\left(-\frac{ix_1}{4k(t-\lambda)}-\frac{ix_2^2}{4k(\tau-\alpha)}\right)\varphi(\tau, \mu x_2+(\tau-\alpha)x_3),$$

$$i\varphi_1=-\frac{i\omega_2}{\omega_1-\alpha}\varphi_2+k[\mu^2+(\omega_1-\alpha)^2]\varphi_{22}-\frac{i}{2}\left(\frac{1}{\omega_1-\lambda}+\frac{1}{\omega_1-\alpha}\right)\varphi+\varphi F(|\varphi|);$$

8) $\langle J_{12}+2k\alpha M, P_3\rangle$, $u=\exp\left(i\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_1}{x_2}\right)\varphi(\tau, x_1^2+x_2^2)$,

$$i\varphi_1=4k(\varphi_2+\omega_2\varphi_{22})-\frac{k\alpha^2}{\omega_2}\varphi+\varphi F(|\varphi|);$$

9) $\langle J_{12}+2k\alpha M, G_3\rangle$, $u=\exp\left(i\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_1}{x_2}-\frac{ix^3}{4k\tau}\right)\varphi(\tau, x_1^2+x_2^2)$,

$$i\varphi_1=4k(\varphi_2+\omega_2\varphi_{22})-\left(\frac{i}{2\omega_1}+\frac{k\alpha^2}{\omega_2}\right)\varphi+\varphi F(|\varphi|);$$

10) $\langle J_{12}+\alpha T+2k\beta M, P_3\rangle$,

$$u=\exp\left(i\beta\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_1}{x_2}\right)\varphi\left(x_1^2+x_2^2, \tau+\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_1}{x_2}\right),$$

$$i\varphi_2=k\left(4\varphi_1+4\omega_1\varphi_{11}+\frac{2i\alpha\beta}{\omega_1}\varphi_2+\frac{\alpha^2}{\omega_1}\varphi_{22}\right)-\frac{k\beta^2}{\omega_1}\varphi+\varphi F(|\varphi|);$$

11) $\langle J_{12}+2k\alpha M, T-2k\beta M\rangle$,

$$u=\exp\left(i\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_1}{x_2}+i\beta\tau\right)\varphi(x_1^2+x_2^2, x_3),$$

$$4k\omega_1\varphi_{11}+k\varphi_{22}+4k\varphi_1+\left(\beta-\frac{k\alpha^2}{\omega_1}\right)\varphi+\varphi F(|\varphi|)=0;$$

12) $\langle J_{12}+\gamma P_3+2k\alpha M, T-2k\beta M\rangle$,

$$u=\exp\left(i\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_1}{x_2}+i\beta\tau\right)\varphi\left(x_1^2+x_2^2, \gamma\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_1}{x_2}-x_3\right),$$

$$4k\omega_1\varphi_{11}+k\left(1+\frac{\gamma^2}{\omega_1}\right)\varphi_{22}+4k\varphi_1+\frac{2ik\alpha\gamma}{\omega_1}\varphi_2+\left(\beta-\frac{k\alpha^2}{\omega_1}\right)\varphi+\varphi F(|\varphi|)=0;$$

13) $\langle J_{12}+2k\alpha M, T+\beta G_3\rangle$,

$$u=\exp\left(\frac{i\beta^2}{6k}\tau^3-\frac{i\beta\tau x_3}{2k}+i\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_1}{x_2}\right)\varphi(x_1^2+x_2^2, \beta\tau^2-2x_3),$$

$$4k(\omega_1\varphi_{11}+\varphi_1+\varphi_{22})+\left(\frac{\beta}{4k}\omega_2-\frac{k\alpha^2}{\omega_1}\right)\varphi+\varphi F(|\varphi|)=0;$$

14) $\langle G_1+\alpha P_2, P_3\rangle$, $u=\exp\left(-\frac{ix_1}{4k\tau}\right)\varphi(\tau,\alpha x_1+\tau x_2)$,

$$i\varphi_1=-i\frac{\omega_2}{\omega_1}\varphi_2+k(\alpha^2+\omega_1^2)\varphi_{22}-\frac{i}{2\omega_1}\varphi+\varphi F(|\varphi|);$$

15) $\langle G_1+\alpha P_2, G_3\rangle$, $u=\exp\left(-\frac{i}{4k\tau}(x_1^2+x_3^2)\right)\varphi(\tau,\alpha x_1+\tau x_2)$,

$$i\varphi_1=-i\frac{\omega_2}{\omega_1}\varphi_2+k(\alpha^2+\omega_1^2)\varphi_{22}-\frac{i}{\omega_1}\varphi+\varphi F(|\varphi|);$$

16) $AO(3)$, $u=\varphi(\tau,x_1^2+x_2^2+x_3^2)$,

$$i\varphi_1=4k\omega_2\varphi_{22}+6k\varphi_2+\varphi F(|\varphi|).$$

в). Редукция по подалгебрам ранга I –

1) $\langle P_1\rangle$, $u=\varphi(\tau,x_2,x_3)$,

$$-i\varphi_1+k(\varphi_{22}+\varphi_{33})+\varphi F(|\varphi|)=0;$$

2) $\langle G_1\rangle$, $u=\exp\left(-\frac{ix_1^2}{4k\tau}\right)\varphi(\tau,x_2,x_3)$,

$$i\varphi_1=k(\varphi_{22}+\varphi_{33})-\frac{i}{2\omega_1}\varphi+\varphi F(|\varphi|);$$

3) $\langle G_1+\alpha P_2\rangle$, $u=\exp\left(-\frac{ix_1^2}{4k\tau}\right)\varphi(\tau,\alpha x_1+\tau x_2,x_3)$,

$$i\varphi_1=-i\frac{\omega_2}{\omega_1}\varphi_2+k[(\alpha^2+\omega_1^2)\varphi_{22}+\varphi_{33}]-\frac{i}{2\omega_1}\varphi+\varphi F(|\varphi|);$$

4) $\langle T-2k\alpha M\rangle$, $u=\exp(i\alpha\tau)\varphi(x_1,x_2,x_3)$,

$$k\Delta\varphi+\alpha\varphi+\varphi F(|\varphi|)=0;$$

5) $\langle T+\alpha G_1\rangle$, $u=\exp\left(\frac{i\alpha^2}{6k}\tau^3-\frac{i\alpha\tau x_1}{2k}\right)\varphi(\alpha\tau^2-2x_1,x_2,x_3)$,

$$k(4\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_{33})+\frac{\alpha}{4k}\omega_1\varphi+\varphi F(|\varphi|)=0;$$

6) $\langle J_{12}+\alpha T+2k\beta M\rangle$, $u=\exp\left(i\beta\,\mathrm{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right)\varphi\left(x_1^2+x_2^2,\alpha\,\mathrm{arctg}\frac{x_1}{x_2}+\tau,x_3\right)$,

$$i\varphi_2=k\left(4\varphi_1+4\omega_1\varphi_{11}+\frac{2i\alpha\beta}{\omega_1}\varphi_2+\frac{\alpha^2}{\omega_1}\varphi_{22}+\varphi_{33}-\frac{\beta^2}{\omega_1}\varphi\right)+\varphi F(|\varphi|);$$

7) $\langle J_{12}+\alpha P_3\rangle$, $u=\varphi(\tau, x_1^2+x_2^2, \alpha \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}-x_3)$,

$$i\varphi_1=k\left(4\varphi_2+4\omega_2\varphi_{22}+\left(\frac{\alpha^2}{\omega_2}+1\right)\varphi_{33}\right)+\varphi F(|\varphi|);$$

8) $\langle J_{12}+\alpha G_3\rangle$, $u=\exp\left(-\frac{ix_3^2}{4k\tau}\right)\varphi(\tau, x_1^2+x_2^2, \alpha\tau \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}-x_3)$,

$$i\varphi_1=k\left(4\varphi_2+4\omega_2\varphi_{22}+\left(\frac{\alpha^2}{\omega_2}+1\right)\varphi_{33}\right)-\frac{i}{\omega_1}\left(\omega_3\varphi_3+\frac{1}{2}\varphi\right)+\varphi F(|\varphi|);$$

9) $\langle J_{12}+\alpha(T+\beta G_3)\rangle$,

$$u=\exp\left(\frac{i\beta^2}{6k}\tau^3-\frac{i\beta}{2k}\tau x_3\right)\varphi\left(\beta\tau^2-2x_3, x_1^2+x_2^2, \alpha \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}+\tau\right),$$

$$i\varphi_3-\frac{\beta}{4k}\omega_1\varphi=k\left(4\varphi_1+4\varphi_2+4\omega_2\varphi_{22}+\frac{\alpha^2}{\omega_2}\varphi_{33}\right)+\varphi F(|\varphi|);$$

2.2. Редукция уравнения Шредингера с произвольной степенной нелинейностью.

В этом пункте мы проведем редукцию уравнения Шредингера

$$iu_\tau=k\Delta u+\lambda u|u|^q, \qquad /3.2.8/$$

где λ – произвольное комплексное число, q – произвольное вещественное число, по подалгебрам алгебры $A\tilde{G}(2,3)$, которые не сопряжены с подалгебрами алгебры $A\tilde{G}(1,3)$.

а). Редукция по подалгебрам ранга 3.

1) $\langle D+4k\alpha M, G_2, G_3\rangle$,

$$u=\tau^{-i\alpha-1/q}\exp\left(-\frac{i}{4k\tau}(x_2^2+x_3^2)\right)\varphi\left(\frac{x_1^2}{\tau}\right),$$

$$4k\omega\ddot{\varphi}+(2k+i\omega)\dot{\varphi}+\left(\frac{i}{q}-i-\alpha\right)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^q=0; \qquad /3.2.9/$$

2) $\langle J_{12}+2k\alpha M, D+4k\beta M, G_3\rangle$,

$$u=\tau^{-i\beta-1/q}\exp\left(i\alpha \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}-i\frac{x_3^2}{4k\tau}\right)\varphi\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{\tau}\right),$$

$$4k\omega\ddot{\varphi}+(4k+i\omega)\dot{\varphi}+\left(-\frac{k\alpha^2}{\omega}-\beta+\frac{i}{q}-\frac{i}{2}\right)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^q=0;$$

3) $\langle D+4k\alpha M, P_2, P_3\rangle$, $u=\tau^{-i\alpha-1/q}\varphi\left(\frac{x_1^2}{\tau}\right)$,

$$4k\omega\ddot{\varphi}+(2k+i\omega)\dot{\varphi}+\left(\frac{i}{q}-\alpha\right)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{q}=0; \qquad /3.2.10/$$

4) $\langle D+4k\alpha M, G_2, P_3\rangle$, $u=\tau^{-i\alpha-1/q}\exp\left(-\frac{ix_2^2}{4k\tau}\right)\varphi\left(\frac{x_1^2}{\tau}\right)$,

$$4k\omega\ddot{\varphi}+(2k+i\omega)\dot{\varphi}+\left(\frac{i}{q}-\frac{i}{2}-\alpha\right)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{q}=0; \qquad /3.2.11/$$

5) $\langle D+2k\alpha M, T, P_3\rangle$, $u=x_1^{-i\alpha-2/q}\varphi\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$,

$$k(\omega^2+1)\ddot{\varphi}+2\left(\frac{2}{q}+1+i\alpha\right)k\omega\dot{\varphi}+k\left(\frac{2}{q}+i\alpha\right)\left(\frac{2}{q}+i\alpha+1\right)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{q}=0; \qquad /3.2.12/$$

6) $\langle J_{12}+2k\alpha M, D+4k\beta M, P_3\rangle$,

$$u=\tau^{-i\beta-1/q}\exp\left(i\alpha\,\mathrm{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right)\varphi\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{\tau}\right),$$

$$4k\omega\ddot{\varphi}+(4k+i\omega)\dot{\varphi}+\left(-\frac{k\alpha^2}{\omega}-\beta+\frac{i}{q}\right)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{q}=0;$$

7) $\langle J_{12}+\frac{\alpha}{2}D+2k\beta M, T, P_3\rangle$,

$$u=(x_1^2+x_2^2)^{-i\beta-1/q}\varphi\left(\alpha\,\mathrm{arctg}\frac{x_1}{x_2}+\ln(x_1^2+x_2^2)\right),$$

$$(\alpha^2+4)\ddot{\varphi}-8\left(\frac{1}{q}+i\beta\right)\dot{\varphi}+4\left(\frac{1}{q}+i\beta\right)^2\varphi+\frac{\lambda}{k}\varphi|\varphi|^{q}=0; \qquad /3.2.13/$$

8) $\langle J_{12}+2k\alpha M, D+2k\beta M, T\rangle$,

$$u=x_3^{-i\beta-2/q}\exp\left(i\alpha\,\mathrm{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right)\varphi\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2}\right),$$

$$4\omega(\omega+1)\ddot{\varphi}+\left(4\left(\frac{2}{q}+\frac{3}{2}+i\beta\right)\omega+4\right)\dot{\varphi}+$$

$$+\left[-\frac{\alpha^2}{\omega}+\left(\frac{2}{q}+i\beta\right)\left(\frac{2}{q}+i\beta+1\right)\right]\varphi+\frac{\lambda}{k}\varphi|\varphi|^{q}=0;$$

9) $AO(3)\oplus\langle D+4k\alpha M\rangle$, $u=\tau^{-i\alpha-1/q}\varphi(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$,

$$4k\omega\ddot{\varphi}+(6k+i\omega)\dot{\varphi}+\left(\frac{i}{q}-\alpha\right)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{q}=0.$$

б). Редукция по подалгебрам ранга 2.

1) $\langle D+4k\alpha M, P_3\rangle$, $u=\tau^{-i\alpha-1/q}\varphi\left(\frac{x_1^2}{\tau},\frac{x_2^2}{\tau}\right)$,

$$\left(\alpha-\frac{i}{q}\right)\varphi-i(\omega_1\varphi_1+\omega_2\varphi_2)=2k(2\omega_1\varphi_{11}+2\omega_2\varphi_{22}+\varphi_1+\varphi_2)+\lambda\varphi|\varphi|^{q};$$

2) $\langle D+4k\alpha M, G_3\rangle$, $u=\tau^{-i\alpha-1/q}\exp\left(-\frac{ix_3^2}{4k\tau}\right)\varphi\left(\frac{x_1^2}{\tau},\frac{x_2^2}{\tau}\right)$,

$$\left(\alpha-\frac{i}{q}\right)\varphi-i(\omega_1\varphi_1+\omega_2\varphi_2)=2k(2\omega_1\varphi_{11}+2\omega_2\varphi_{22}+\varphi_1+\varphi_2)-\frac{i}{2}\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^q;$$

3) $\langle J_{12}+\frac{\alpha}{2}D+2k\beta M, P_3\rangle$, $u=\tau^{-i\beta/\alpha-1/q}\varphi\left(\ln\tau+\alpha\,\mathrm{arctg}\frac{x_1}{x_2},\frac{x_1^2+x_2^2}{\tau}\right)$,

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{i}{q}\right)\varphi+i(\varphi_1-\omega_2\varphi_2)=k\left(\frac{\alpha^2}{\omega_2}\varphi_{11}+4\varphi_2+4\omega_2\varphi_{22}\right)+\lambda\varphi|\varphi|^q;$$

4) $\langle J_{12}+\frac{\alpha}{2}D+2k\alpha\beta M, G_3\rangle$,

$$u=\tau^{-i\beta-1/q}\exp\left(-\frac{ix_3^2}{4k\tau}\right)\varphi\left(\ln\tau+\alpha\,\mathrm{arctg}\frac{x_1}{x_2},\frac{x_1^2+x_2^2}{\tau}\right),$$

$$\left(\beta-\frac{i}{q}\right)\varphi+i(\varphi_1-\omega_2\varphi_2)=k\left(\frac{\alpha^2}{\omega_2}\varphi_{11}+4\varphi_2+4\omega_2\varphi_{22}\right)-\frac{i}{2}\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^q;$$

5) $\langle D+2k\alpha M, T\rangle$, $u=x_3^{-i\alpha-2/q}\varphi\left(\frac{x_1}{x_2},\frac{x_3}{x_2}\right)$,

$$\omega_2^2(\omega_1^2+1)\varphi_{11}+\omega_2^2(\omega_2^2+1)\varphi_{22}+2\omega_1\omega_2^3\varphi_{12}+2\omega_1\omega_2^2\varphi_1+$$
$$+\left(2\omega_2^3-2(i\alpha+2/q)\omega_2\right)\varphi_2+(i\alpha+2/q)(i\alpha+2/q+1)\varphi+\frac{\lambda}{k}\varphi|\varphi|^q=0;$$

6) $\langle J_{12}+2k\alpha M, D+4k\beta M\rangle$,

$$u=\tau^{-i\beta-1/q}\exp\left(i\alpha\,\mathrm{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right)\varphi\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{\tau},\frac{x_3^2}{\tau}\right),$$

$$(\beta-i/q)\varphi-i(\omega_1\varphi_1+\omega_2\varphi_2)=k\left(-\frac{\alpha^2}{\omega_1}\varphi+4\varphi_1+4\omega_1\varphi_{11}+\right.$$
$$\left.+2\varphi_2+4\omega_2\varphi_{22}\right)+\lambda\varphi|\varphi|^q;$$

7) $\langle J_{12}+\frac{\alpha}{2}D+2k\alpha\beta M, T\rangle$,

$$u=(x_1^2+x_2^2)^{-i\beta-1/q}\varphi\left(\ln(x_1^2+x_2^2)+\alpha\,\mathrm{arctg}\frac{x_1}{x_2},\frac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2}\right),$$

$$4\omega_2^2(\omega_2+1)\varphi_{22}+(\alpha^2+4)\varphi_{11}+8\omega_2\varphi_{12}-8(1/q+i\beta)\varphi_1+$$
$$+\omega_2\left(6\omega_2-8i\beta-\frac{8}{q}+4\right)\varphi_2+4\left(i\beta+\frac{1}{q}\right)^2\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^q=0.$$

в). Редукция по подалгебрам ранга I.

1) $\langle D+4k\alpha M\rangle$; $u=\tau^{-1/q-i\alpha}\varphi\left(\frac{x_1^2}{\tau},\frac{x_2^2}{\tau},\frac{x_3^2}{\tau}\right)$,

$$(\alpha-\frac{i}{q})\varphi - i(\omega_1\varphi_1+\omega_2\varphi_2+\omega_3\varphi_3)=2k(2\omega_1\varphi_{11}+\varphi_1+$$
$$+2\omega_2\varphi_{22}+\varphi_2+2\omega_3\varphi_{33}+\varphi_3)+\lambda\varphi|\varphi|^q;$$

2) $\langle J_{12}+\frac{\alpha}{2}D+2k\alpha\beta M\rangle$,

$$u=\tau^{-1/q-i\beta}\varphi(\ln\tau+\alpha\,\mathrm{arctg}\frac{x_1}{x_2},\ \frac{x_1^2+x_2^2}{\tau},\ \frac{x_3^2}{\tau}),$$
$$(\beta-\frac{i}{q})\varphi+i(\varphi_1-\omega_2\varphi_2-\omega_3\varphi_3)=k(\frac{\alpha^2}{\omega_1}\varphi_{11}+4\omega_2\varphi_{22}+4\varphi_2+$$
$$+4\omega_3\varphi_{33}+2\varphi_3)+\lambda\varphi|\varphi|^q.$$

2.3. Редукция уравнения Шредингера с нелинейностью степени $4/3$.

Настоящий пункт посвящен симметрийной редукции уравнения

$$iu_\tau=k\Delta u+\lambda u|u|^{4/3}, \qquad /3.2.I4/$$

где λ – произвольное комплексное число. Как было указано ранее, уравнение/3.2.I4/ является частным случаем уравнений /3.2.3, 3.2.8/, то при исследовании симметрийной редукции уравнения /3.2.I4/ по подалгебрам алгебры $A\tilde{G}(3,3)$ можно, в силу результатов, полученных в пунктах 2.I и 2.2, ограничиться теми подалгебрами, которые не сопряжены подалгебрам алгебр $A\tilde{G}(1,3)$ и $A\tilde{G}(2,3)$.

1) $\langle S+T+2J_{12}-2k\alpha M,\ G_1+P_2+\sqrt{2}P_3,\ G_2-P_1-\sqrt{2}G_3\rangle$,

$$u=\exp\{-\frac{i\omega^2\tau}{2k}-\frac{3}{4}\ln(\tau^2+1)-\frac{i}{2k}[\frac{\tau(\tau^2-3)}{2(\tau^2+1)^2}(x_1^2-x_2^2)+$$
$$+\frac{1-3\tau^2}{(\tau^2+1)^2}x_1x_2-\frac{\sqrt{2}}{t^2+1}x_1x_3-\frac{\sqrt{2}\tau}{\tau^2+1}x_2x_3]+i\alpha\,\mathrm{arctg}\,\tau\}\,\varphi(\omega),$$
$$\omega=\frac{2\tau x_1+(\tau^2-1)x_2+\frac{1}{\sqrt{2}}(\tau^2+1)x_3}{(\tau^2+1)^{3/2}},$$
$$\frac{3k}{2}\ddot{\varphi}+\alpha(1-\frac{3}{2\alpha k}\omega^2)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{4/3}=0;$$

2) $AO(3)\oplus\langle S+T-2k\alpha M\rangle$,

$$u = \exp\left[\frac{i\tau|x|^2}{4k(\tau^2+1)} - \frac{3}{4}\ln(\tau^2+1) + i\alpha \operatorname{arctg}\tau\right]\varphi\left(\frac{|x|^2}{\tau^2+1}\right),$$

$$4k\omega\ddot{\varphi} + 6k\dot{\varphi} + \left(\alpha - \frac{\omega}{4k}\right)\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3} = 0;$$

3) $\langle S+T+J_{12}+2k\alpha M,\ G_1+P_2\rangle$,

$$u = \exp\left[-i\alpha\operatorname{arctg}\tau - \frac{i}{4k}\left(\frac{\tau|x|^2}{\tau^2+1} + 2\,\frac{\tau(x_1^2-x_2^2)+(\tau^2-1)x_1x_2}{(\tau^2+1)^2}\right) - \frac{3}{4}\ln(\tau^2+1)\right]\cdot$$

$$\cdot\,\varphi\left(\frac{x_1+\tau x_2}{\tau^2+1},\ \frac{x_3^2}{\tau^2+1}\right),$$

$$k(\varphi_{11} + 4\omega_2\varphi_{22} + 2\varphi_2) - \left(\alpha + \frac{4\omega_1^2+\omega_2}{4k}\right)\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3} = 0;$$

4) $\langle J_{12}+2k\alpha M,\ S+T+2k\beta M\rangle$,

$$u = \exp\left(-\frac{3}{4}\ln(\tau^2+1) + i\alpha\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2} - i\beta\operatorname{arctg}\tau - \frac{i\tau|x|^2}{4k(\tau^2+1)}\right)\varphi\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{\tau^2+1},\ \frac{x_3^2}{\tau^2+1}\right),$$

$$k(4\omega_1\varphi_{11} + 4\omega_2\varphi_{22} + 4\varphi_1 + 2\varphi_2) - \left(\frac{k\alpha^2}{\omega_1} + \beta + \frac{\omega_1+\omega_2}{4k}\right)\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3} = 0;$$

5) $\langle S+T+2k\alpha M\rangle$,

$$u = \exp\left(-\frac{3}{4}\ln(\tau^2+1) - i\alpha\operatorname{arctg}\tau - \frac{i\tau|x|^2}{4k(\tau^2+1)}\right)\varphi\left(\frac{x_1^2}{\tau^2+1},\ \frac{x_2^2}{\tau^2+1},\ \frac{x_3^2}{\tau^2+1}\right),$$

$$2k(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3 + 2\omega_1\varphi_{11} + 2\omega_2\varphi_{22} + 2\omega_3\varphi_{33}) -$$

$$-\left(\alpha + \frac{\omega_1+\omega_2+\omega_3}{4k}\right)\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3} = 0;$$

6) $\langle S+T-\alpha J_{12}+2k\beta M\rangle$,

$$u = \exp\left(-\frac{3}{4}\ln(\tau^2+1) - i\beta\operatorname{arctg}\tau - \frac{i\tau|x|^2}{4k(\tau^2+1)}\right)\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3),$$

$$\omega_1 = \frac{x_1\cos(\alpha\operatorname{arctg}\tau) - x_2\sin(\alpha\operatorname{arctg}\tau)}{\sqrt{\tau^2+1}},$$

$$\omega_2 = \frac{x_1\sin(\alpha\operatorname{arctg}\tau) + x_2\cos(\alpha\operatorname{arctg}\tau)}{\sqrt{\tau^2+1}},$$

$$\omega_3 = \frac{x_3}{\sqrt{\tau^2+1}},$$

$$k(\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_{33}) + i\alpha(\omega_2\varphi_1 - \omega_1\varphi_2) - \left(\beta + \frac{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}{4k}\right)\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3} = 0;$$

7) $\langle S+T+J_{12}+\alpha(G_1+P_2)\rangle$,

$$u=\exp\left[-\frac{3}{4}\ln(\tau^2+1)-\frac{i}{4k}\left(\frac{\tau|x|^2}{\tau^2+1}+2\alpha\frac{x_1+\tau x_2}{\tau^2+1}\operatorname{arctg}\tau\right)\right]\cdot$$
$$\cdot\varphi\left(\frac{x_1+\tau x_2}{\tau^2+1},\ \frac{x_1\tau-x_2}{\tau^2+1}-\alpha\operatorname{arctg}\tau,\ \frac{x_3}{\sqrt{\tau^2+1}}\right),$$
$$k\Delta\varphi+i(\omega_2\varphi_1-(\omega_1-\alpha)\varphi_2)-$$
$$-\frac{1}{4k}(2\alpha\omega_1+\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{4/3}=0.$$

2.4. Точные решения уравнения Шредингера.

Полагая в уравнении /3.2.4/ $\varphi=C$ ($C\in R$, $C\neq 0$), находим, что уравнение Шредингера /3.2.3/ имеет решение $C\exp(i\alpha\tau)$, где $\alpha+F(C)=0$. Исходя из решений вида $\varphi=C$ редуцированных уравнений /3.2.9 - 3.2.13/ получаем, что уравнение Шредингера /3.2.8/ обладает такими точными решениями:

$$u=\gamma\tau^{-i\alpha-1/q}\exp\left(-\frac{i(x_2^2+x_3^2)}{4k\tau}\right),\quad |\gamma|^q=\frac{\alpha+i-i/q}{\lambda};$$
$$u=\gamma\tau^{-i\alpha-1/q},\quad |\gamma|^q=\frac{\alpha-i/q}{\lambda};$$
$$u=\tau^{-i\alpha-1/q}\exp\left(\frac{-ix_2^2}{4k\tau}\right),\quad |\gamma|^q=\frac{\alpha+i/2-i/q}{\lambda};$$
$$u=\gamma x_1^{-i\alpha-2/q},\quad |\gamma|^q=-\frac{k(i\alpha+2/q)(i\alpha+2/q+1)}{\lambda};$$
$$u=\gamma(x_1^2+x_2^2)^{-i\beta-1/q},\quad |\gamma|^q=-\frac{4k(i\beta+1/q)^2}{\lambda}$$

При $F(|\varphi|)=\lambda|\varphi|^q$, уравнение /3.2.4/ примет вид
$$k\ddot{\varphi}+\alpha\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^q=0. \qquad /3.2.15/$$
Если $\alpha=0$, то уравнение /3.2.15/ обладает решением
$$\varphi=\gamma\omega^{-2/q}.$$
Ему соответствует такое решение уравнения /3.2.8/
$$u=\gamma(x_1+C)^{-2/q}$$
где $C\in R$, $|\gamma|^q=-2k(2+q)\lambda^{-1}q^{-2}$.

Пусть $|\varphi|=\varphi$, $q\neq-2$, λ – вещественное число. Тогда общий интеграл уравнения /3.2.15/ имеет вид

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{C_1 - \frac{\alpha}{k}\varphi^2 - \frac{2\lambda}{k(q+2)}\varphi^{q+2}}} = \pm\omega + C_2 .$$

Если $C_1 = 0$, то при $\alpha k < 0$

$$\varphi^{-q} = \frac{\lambda}{\alpha(q+2)}\left\{ ch\left[q\sqrt{-\frac{\alpha}{k}}\,(C_2 \pm \omega)\right] - 1\right\},$$

а при $\alpha k > 0$

$$\varphi^{-q} = -\frac{2\lambda}{\alpha(q+2)}\cos^2\left[\frac{q}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\,(C_2 \pm \omega)\right].$$

Им соответствуют следующие решения уравнения Шредингера /3.2.8/

$$u = \exp(i\alpha\tau)\left\{\frac{\lambda}{\alpha(q+2)}\left[ch\left(C \pm q\sqrt{-\frac{\alpha}{k}}\,x_1\right) - 1\right]\right\}^{-1/q} \quad (C\in R, \alpha k<0, q\neq -2),$$

$$u = \exp(i\alpha\tau)\left\{\frac{-2\lambda}{\alpha(q+2)}\cos^2\left(C \pm \frac{q}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\,x_1\right)\right\}^{-1/q} \quad (C\in R, \alpha k>0, q\neq -2).$$

Найдем решения уравнения Шредингера /3.2.3/, соответствующие решениям редуцированных уравнений /3.2.6, 3.2.7/, в предположении, что $F(|\varphi|)$ – вещественная функция. Пусть $\varphi(\omega) = \rho(\omega)\exp(i\theta(\omega))$, где $\rho(\omega)$, $\theta(\omega)$ – вещественные функции. Поскольку $\dot\varphi = \dot\rho\exp(i\theta) + i\dot\theta\rho\exp(i\theta)$, то уравнение /3.2.6/ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \dot\rho + \frac{\rho}{2\omega} = 0 \\ \rho(\dot\theta + F(\rho)) = 0 \end{cases} .$$

Легко получить, что $\rho = C\omega^{-\frac{1}{2}}$, $\theta = -\int F(C\omega^{-\frac{1}{2}})\,d\omega + \tilde C$.

Следовательно уравнение /3.2.3/ имеет решение

$$u = C\tau^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{ix_1^2}{4k\tau} - i\int F(C\tau^{-\frac{1}{2}})\,d\tau + i\tilde C\right].$$

Полагая $F(|u|) = \lambda|u|^q$, где λ – ненулевое число, находим, что функция

$$u = C\tau^{-1/2}\exp\left[-\frac{ix_1^2}{4k\tau} - \frac{2i\lambda C^q}{2-q}\tau^{1-q/2} + i\tilde C\right]$$

является решением уравнения /3.2.8/. Аналогично получаем, что общим решением уравнения /3.2.3/ является выражение

$$C[\tau(\tau-\alpha)]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{ix_1^2}{4k(\tau-\alpha)} - \frac{ix_2^2}{4k\tau} - i\int\limits_0^{\tau} F\left(C[\omega(\omega-\alpha)]^{-\frac{1}{2}}\right) d\omega + i\tilde{C}\right\},$$

где $C, \tilde{C} \in R$. Соответствующее решение уравнения Шредингера /3.2.8/ имеет вид

$$u = C[\tau(\tau-\alpha)]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{ix_1^2}{4k(\tau-\alpha)} - \frac{ix_2^2}{4k\tau} - i\int \frac{\lambda C^q}{[\tau(\tau-\alpha)]^{q/2}} d\tau + i\tilde{C}\right\}.$$

§3. Редукция и решения нелинейного уравнения Шредингера в пространстве Минковского $R_{1,2}$.

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$2im\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + uf(|u|), \qquad /3.3.1/$$

где $m \in R$, $m \neq 0$ и $f: R \to C$ – произвольная функция. Уравнение /3.3.I/ описывает движение нерелятивистской частицы в пространстве Минковского $R_{1,2}$. Можно показать, что максимальной алгеброй инвариантности рассматриваемого уравнения является алгебра $A\tilde{G}_1(1,2)$ с базисом

$$J_{0a} = -(x_0\partial_a + x_a\partial_0), \quad J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b,$$

$$G_0 = -\tau\partial_0 + imx_0(u\partial_u - u^*\partial_{u^*}), \quad P_0 = \partial_0,$$

$$G_a = \tau\partial_a + imx_a(u\partial_u - u^*\partial_{u^*}), \quad P_a = -\partial_a,$$

$$T = \partial_\tau, \quad M = -im(u\partial_u - u^*\partial_{u^*}),$$

где $a, b = 1, 2$.

Используем подалгебры алгебры $A\tilde{G}_3(1,2)$ для нахождения инвариантных решений уравнения /3.3.I/. Будем рассматривать подалгебры ранга 3 алгебры $A\tilde{G}_1(1,2)$. Такие подалгебры обладают ПСИ, состоящей из двух инвариантов $\bar{\omega}(\tau, x_0, x_1, x_2, u, u^*)$ и

$\omega(\tau, x_0, x_1, x_2)$. Подстановка $\bar{w} = \varphi(\omega)$ редуцирует уравнение /3.3.I/ к обыкновенному дифференциальному уравнению, содержащему только ω и производные от φ по ω. Классификацию подалгебр алгебры $A\tilde{G}_1(1,2)$, относительно которых проводится редукция данного уравнения, достаточно рассмотреть с точностью до эквивалентности. Так как редукция уравнения /3.3.I/ по подалгебрам алгебры $A\tilde{G}(1,2)$ фактически была проведена в §2, то мы рассматриваем только те подалгебры алгебры $A\tilde{G}_1(1,2)$, которые не сопряжены с подалгебрами алгебры $A\tilde{G}(1,2)$.

Теорема 3.3.I. Подалгебры ранга 3 алгебры $A\tilde{G}_1(1,2)$, не сопряженные с подалгебрами алгебры $A\tilde{G}(1,2)$ исчерпываются с точностью до эквивалентности следующими алгебрами:

$F_1 = \langle J_{02} + \lambda M, P_1, P_0 + P_2 \rangle \quad (\lambda \geq 0)$,

$F_2 = \langle J_{02} + \lambda M, G_1, P_0 + P_2 \rangle \quad (\lambda \geq 0)$,

$F_3 = \langle J_{02} + \lambda M, G_0 + G_2, P_1 \rangle \quad (\lambda \geq 0)$,

$F_4 = \langle J_{02} + \lambda M, G_0 + G_2, G_1 \rangle \quad (\lambda \geq 0)$,

$F_5 = \langle T + \mu M, P_0 + P_2, P_1 \rangle \quad (\mu \in R)$,

$F_6 = \langle T + \alpha(G_0 + G_2), P_0 + P_2, P_1 \rangle \quad (\alpha > 0)$,

$F_7 = \langle J_{02} + \alpha P_1 + \lambda M, T + \mu M, P_0 + P_2 \rangle \; (\alpha > 0, \lambda \geq 0, \mu \in R)$,

$F_8 = \langle H + \alpha P_0 + \lambda M, T + \mu M, P_0 + P_2 \rangle \; (\alpha > 0, \lambda \geq 0, \mu \in R)$,

$F_9 = \langle J_{02} + \lambda M, T + \alpha G_1, P_0 + P_2 \rangle \quad (\alpha > 0, \lambda \geq 0)$,

$F_{10} = \langle P_0 + \alpha G_0, G_1, G_2 \rangle \quad (\alpha \neq 0)$,

$F_{11} = \langle P_2 + \alpha G_2, G_0, G_1 \rangle \quad (\alpha \neq 0)$,

$F_{12} = \langle P_0 + P_2 + \alpha G_0, G_0 + G_2, G_1 \rangle \quad (\alpha \neq 0)$,

$F_{14} = < P_0 + \alpha G_0, P_1 + \beta G_1, G_2 > \quad (\alpha \neq 0, \beta \in R)$,

$F_{13} = < P_0 + P_2 + \beta G_0, G_0 + G_2, P_1 + \alpha G_1 > \quad (\beta \neq 0, \alpha \in R)$,

$F_{15} = < G_0 + \beta P_0 + \alpha P_2, G_2 - \alpha P_0, P_1 > \quad (\alpha > 0, \beta \in R)$,

$F_{16} = < G_0 + \beta P_0 + \alpha P_2, G_2 - \alpha P_0, G_1 > \quad (\alpha > 0, \beta \in R)$.

Теорема 3.3.2. Алгебры F_j, $j = 1, \ldots, 16$, выписанные в теореме 3.3.I имеют следующие ПСИ:

$F_1: \tau,\ (x_0 + x_2)^{-i\lambda m} u$;

$F_2: \tau,\ (x_0 + x_2)^{-i\lambda m} \exp\left(\frac{-imx_1^2}{2\tau}\right) u$;

$F_3: \tau,\ (x_0 + x_2)^{-i\lambda m} \exp\left[\frac{im}{2\tau}(x_0^2 - x_2^2)\right] u$;

$F_4: \tau,\ (x_0 + x_2)^{-i\lambda m} \exp\left[\frac{im}{2\tau}(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)\right] u$;

$F_5: x_0 + x_2,\ \exp(im\mu\tau) u$;

$F_6: x_0 + x_2,\ \exp[-i\alpha m\tau(x_0 + x_2)] u$;

$F_7: \alpha x_1 - \ln|x_0 + x_2|,\ \exp(im\mu\tau - im\alpha\lambda x_1) u$;

$F_8: \frac{\alpha}{2}(x_0 + x_2)^2 + x_1,\ \exp[im\mu\tau + im\alpha\lambda(x_0 + x_2)] u$;

$F_9: \frac{\alpha}{2}\tau^2 - x_1,\ \exp\left[-im\left(\lambda \ln|x_0 + x_2| - \alpha\tau x_1 + \frac{1}{3}\alpha^2\tau^3\right)\right] u$;

$F_{10}: \tau,\ \exp\left[-\frac{im}{2}\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{\tau} - \frac{\alpha x_0^2}{\alpha\tau - 1}\right)\right] u$;

$F_{11}: \tau,\ \exp\left[-\frac{im}{2}\left(\frac{x_1^2 - x_0^2}{\tau} + \frac{\alpha x_2^2}{\alpha\tau - 1}\right)\right] u$;

$F_{12}: \tau,\ \exp\left[-\frac{im}{2}\left(\frac{x_2^2 + x_1^2 - x_0^2}{\tau} - \frac{(x_0 + x_2)^2}{\alpha\tau^2}\right)\right] u$;

$F_{13}: \tau,\ \exp\left[-\frac{im}{2}\left(\frac{x_2^2 - x_0^2}{\tau} + \frac{\alpha x_1^2}{\alpha\tau - 1} - \frac{(x_0 + x_2)^2}{\beta\tau^2}\right)\right] u$;

$F_{14}: \tau,\ \exp\left[-\frac{im}{2}\left(\frac{x_2^2}{\tau} + \frac{\beta x_1^2}{\beta\tau - 1} - \frac{\alpha x_0^2}{\alpha\tau - 1}\right)\right] u$;

$$F_{15}: \tau,\ \exp\left[\frac{im}{2\tau}\left(\frac{(\alpha x_2+\tau x_0)^2}{\tau^2-\beta\tau+\alpha^2}-x_2^2\right)\right]u;$$

$$F_{16}: \tau,\ \exp\left[\frac{im}{2\tau}\left(\frac{(\alpha x_2+\tau x_0)^2}{\tau^2-\beta\tau+\alpha^2}-x_2^2-x_1^2\right)\right]u.$$

Пусть $\varphi=\rho\exp(iz)$, где $\rho(\omega)$, $z(\omega)$ - вещественные функции, $u(\rho)=\mathrm{Re}\, f$, $v(\rho)=\mathrm{Im}\, f$. Выпишем редуцированные уравнеия, соответствующие подалгебрам F_j, $j=1,\ldots,16$ и некоторые решения этих уравнений.

$$F_1: 2im\varphi'-\varphi f(|\varphi|)=0,$$

$$2m\int\frac{d\rho}{\rho v(\rho)}-\omega=C_1,\quad z=C_2-\frac{1}{2m}\int u(\rho(\omega))\,d\omega;$$

$$F_2: 2im\varphi'+im\omega^{-1}\varphi-\varphi f(|\varphi|)=0,$$

при $v(\rho)=a\in R$, $\rho=C_1\exp\left(\frac{a\omega}{2m}\right)\omega^{-1/2}$,

$$z=C_2-\frac{1}{2m}\int u\left(C_1\exp\left(\frac{a\omega}{2m}\right)\omega^{-1/2}\right)d\omega;$$

$$F_3: 2im\varphi'+(2im-\lambda m^2)\omega^{-1}\varphi-\varphi f(|\varphi|)=0,$$

при $v(\rho)=a\in R$, $\rho=C_1\exp\left(\frac{a\omega}{2m}\right)\omega^{-1}$,

$$z=C_2-\frac{1}{2m}\int u\left(C_1\exp\left(\frac{a\omega}{2m}\right)\omega^{-1}\right)d\omega-\frac{\lambda m}{2}\ln|\omega|;$$

$$F_4: 2im\varphi'+(3im-\lambda m^2)\omega^{-1}\varphi-\varphi f(|\varphi|)=0,$$

при $v(\rho)=a\in R$, $\rho=C_1\exp\left(\frac{a\omega}{2m}\right)\omega^{-3/2}$,

$$z=C_2-\frac{1}{2m}\int u\left(C_1\exp\left(\frac{a\omega}{2m}\right)\omega^{-3/2}\right)d\omega-\frac{\lambda m}{2}\ln|\omega|;$$

$$F_5: 2m^2\mu-f(|\varphi|)=0,$$

при $v(\rho)=0$, $\varphi=C\exp[ig(\omega)]$, где $f(C)=2\mu m^2$, $g: R\to R$;

$F_6: 2\alpha m^2\omega + f(|\varphi|) = 0$,

при $v(\rho)=0$, $\varphi = \exp[ig(\omega)]f^{-1}(-2\alpha m^2\omega)$, где $g: R \to R$;

$F_7: (2\mu - \alpha^2\lambda^2)m^2\varphi + 2im\alpha^2\lambda\varphi' + \alpha^2\varphi'' - \varphi f(|\varphi|) = 0$,

при $v(\rho)=0$, $\int[\frac{2}{\alpha^2}\int\rho u(\rho)d\rho - \frac{C_1}{\rho^2} - \frac{2\mu m^2}{\alpha^2}\rho^2 + C_2]^{-\frac{1}{2}}d\rho - \omega = C_3$,

$z = C_1\int\rho^{-2}(\omega)d\omega - \lambda m\omega + C_4$;

$F_8: -2\mu m^2\varphi - \varphi'' + \varphi f(|\varphi|) = 0$,

при $v(\rho)=0$, $\int[2\int\rho u(\rho)d\rho - C_1\rho^{-2} - 2\mu m^2\rho^2 + C_2]^{-1/2}d\rho - \omega = C_3$,

$z = C_1\int\rho^{-2}(\omega)d\omega + C_4$;

$F_9: -2\alpha m^2\omega\varphi - \varphi'' + \varphi f(|\varphi|) = 0$;

$F_{10,11,13}: 2im\varphi' + im(\frac{2}{\omega} + \frac{\alpha}{\alpha\omega - 1})\varphi + \varphi f(|\varphi|) = 0$,

при $v(\rho)=a$; $\rho = C_1\exp(\frac{a\omega}{2m})\omega^{-1}(\alpha\omega-1)^{-\frac{1}{2}}$,

$z = C_2 - \frac{1}{2m}\int u(C_1\exp(\frac{a\omega}{2m})\omega^{-1}(\alpha\omega-1)^{-\frac{1}{2}})d\omega$;

$F_{12}: 2im\varphi' + \frac{3im}{\omega}\varphi - \varphi f(|\varphi|) = 0$,

при $v(\rho)=a\in R$, $\rho = C_1\exp(\frac{a\omega}{2m})\omega^{-3/2}$,

$z = C_2 - \frac{1}{2m}\int u(C_1\exp(\frac{a\omega}{2m})\omega^{-3/2})d\omega$;

$F_{14}: 2im\varphi' + im(\frac{1}{\omega} + \frac{\alpha}{\alpha\omega-1} + \frac{\beta}{\beta\omega-1})\varphi - \varphi f(|\varphi|) = 0$,

при $v(\rho)=a\in R$, $\rho = C_1\exp(\frac{a\omega}{2m})[\omega(\alpha\omega-1)(\beta\omega-1)]^{-1/2}$,

$z = C_2 - \frac{1}{2m}\int u(C_1\exp(\frac{a\omega}{2m})[\omega(\alpha\omega-1)(\beta\omega-1)]^{-1/2})d\omega$;

$$F_{15}:\ 2im\varphi' + im\frac{2\omega-\beta}{\omega^2-\beta\omega+\alpha^2}\varphi - \varphi f(|\varphi|) = 0,$$

при $\upsilon(\rho) = a \in R$, $\rho = C_1 \exp\left(\frac{a\omega}{2m}\right)(\omega^2-\beta\omega+\alpha^2)^{-1/2}$,

$$z = C_2 - \frac{1}{2m}\int u\left(C_1 \exp\left(\frac{a\omega}{2m}\right)(\omega^2-\beta\omega+\alpha^2)^{-1/2}\right)d\omega;$$

$$F_{16}:\ 2im\varphi' + im\left(\frac{1}{\omega} + \frac{2\omega-\beta}{\omega^2-\beta\omega+\alpha^2}\right)\varphi - \varphi f(|\varphi|) = 0$$

при $\upsilon(\rho) = a \in R$, $\rho = C_1 \exp\left(\frac{a\omega}{2m}\right)\left[\omega(\omega^2-\beta\omega+\alpha^2)\right]^{-1/2}$,

$$z = C_2 - \frac{1}{2m}\int u\left(C_1 \exp\left(\frac{a\omega}{2m}\right)\left[\omega(\omega^2-\beta\omega+\alpha^2)\right]^{-1/2}\right)d\omega$$

З А К Л Ю Ч Е Н И Е

Подведем краткие итоги диссертационной работы.

В первой главе изучена подалгебраическая структура обобщенных алгебр Галилея $AG_3(I, n)$ и $A\tilde{G}_3(I, n)$ относительно группы внутренних автоморфизмов. В первом параграфе введены понятия обобщенных групп и алгебр Галилея, описаны подалгебры алгебры $AO(I, n) \oplus ASl(2, R)$, т.е. фактора Леви изучаемых алгебр. Построены подпространства пространства $\mathfrak{M}[0,n]$, инвариантные относительно одномерных подалгебр алгебры $AO(I, n) \oplus ASl(2, R)$. Получены некоторые результаты, касающиеся нерасщепляемых подалгебр алгебр $AG_3(I,n)$ и $A\tilde{G}_3(I, n)$, в частности, сформулирован и доказан критерий расщепляемости всех расширений подалгебр алгебры $AO(I, n) \oplus ASl(2, R)$ в $A\tilde{G}_3(I, n)$. Во втором параграфе описаны абелевы подалгебры алгебр Галилея, а также явно выписаны максимальные абелевы и одномерные подалгебры указанных алгебр. В третьем параграфе проведена классификация подалгебр алгебр $AG_3(I,2)$ и $A\tilde{G}_3(I,2)$. Полные списки этих подалгебр приведены в приложении.

Во второй главе решена задача о нахождении полных систем инвариантов некоторых классов подалгебр обобщенных алгебр Галилея. В первом параграфе найдены инварианты абелевых подалгебр алгебр $AG(3, n)$ и $A\tilde{G}(3, n)$, которые в свою очередь являются максимальными подалгебрами алгебр $AG_3(I, n)$ и $A\tilde{G}_3(I,n)$ соответственно. Инварианты одномерных подалгебр обобщенных алгебр Галилея явно выписаны во втором параграфе. В третьем параграфе описаны все неэквивалентные подалгебры алгебры $AG_3(I,2)$ и найдены их основные инварианты. Аналогичная задача для алгебры $AG(3,4)$ решена в четвертом параграфе.

Применению полученных результатов для нахождения точных решений некоторых уравнений математической физики посвящена третья глава диссертационной работы. В первом параграфе неэквивалентные подалгебры ранга 4 алгебры $A\tilde{G}(3,4)$ использованы для симметрийной редукции 4-мерного уравнения теплопроводности. Полученные решения редуцированных уравнений выражены через гипергеометрические функции. Во втором параграфе проведена редукция уравнения Шредингера. В пункте 3.I подалгебры алгебры $A\tilde{G}(1,3)$ применены для редукции уравнения Шредингера с произвольной нелинейностью, т.е. $i\frac{\partial u}{\partial \tau} = k\Delta u + uF(|u|)$. При $F(|u|)=\lambda|u|^q$ построены редуцированные уравнения по подалгебрам алгебры $A\tilde{G}(2,3)$ (пункт 3.2), а для $q=4/3$ – по подалгебрам алгебры $A\tilde{G}(3,3)$ (пункт 3.3). Найдены классы точных решений перечисленных уравнений. В третьем параграфе подалгебры ранга 3 алгебры $A\tilde{G}_3(1,2)$ использованы для редукции уравнения $2im\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + uf(|u|)$. Построены в квадратурах некоторые точные решения редуцированных уравнений при $\operatorname{Im} f = a$ и $\operatorname{Im} f = 0$ и произвольной действительной частью функции f.

Основные результаты диссертации являются новыми и могут быть применены при решении ряда задач математической физики.

СПИСОК ОСНОВНОЙ ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подалгебры обобщенной алгебры Галилея // Теоретико-групповые исслед. уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. - С. 39-43.
2. Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. О непрерывных подгруппах обобщенной группы Пуанкаре $P(1,n)$ // Теоретико-групповые методы в физике. Труды Третьего семинара. Т.2. М.: Наука, 1986. - С. 169-175.
3. Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Москаленко Ю.Д. Непрерывные подгруппы группы Евклида четырехмерного пространства // Теоретико-алгебраич. методы в задачах мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. - С. 119-123.
4. Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фущич В.И. Подалгебры обобщенной алгебры Пуанкаре $AP(2,n)$.-Киев, 1985. - 52 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.89).
5. Баранник Л.Ф., Марченко В.А. О симметрийной редукции для четырехмерного уравнения теплопроводности // Симметрия и решения нелинейных уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. - С. 54-58.
6. Баранник Л.Ф., Марченко В.А. О симметрийной редукции нелинейного уравнения Шредингера // Симметрийный анализ и решения уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. - С. 37-41.
7. Баранник А.Ф., Фущич В.И. О непрерывных подгруппах псевдоортогональных и псевдоунитарных групп. - Киев, 1986. - 48 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.87).
8. Баранник Л.Ф., Фущич В.И. Подалгебры алгебры Ли расширенной группы Пуанкаре $\hat{P}(1,n)$. - Киев, 1985. - 50 с. -

(Препринт / АНУССР. Ин-т математики; 85.90).
9. Баранник Л.Ф., Фущич В.И. Инварианты подгрупп обобщенной группы Пуанкаре P(I,n). – Киев, 1986. – 40 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.86).
10. Баранник Л.Ф., Фущич В.И. О непрерывных подгруппах обобщенных групп Шредингера. – Киев, 1987. – 48 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.16).
11. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. – М.: Мир, 1980, 1. – 456 с., 2. – 396 с.
12. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1954. – 216 с.
13. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. – М.: Наука, 1965. – 588 с.
14. Винтерницц П., Фриш И. Инвариантные разложения релятивистских амплитуд и подгруппы собственной группы Лоренца // Ядерная физика. – 1965. – 1, № 5. – С. 889-901.
15. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. – М.: Физматгиз, 1958. – 368 с.
16. Гурса Е. Інтегрування рівнянь з частинними похідними першого порядку. – Київ: Рад. школа, 1941. – 415 с.
17. Джекобсон Н. Алгебры Ли. – М.: Мир, 1964. – 355с.
18. Дынкин Е.Б. Максимальные подгруппы классических групп // Труды Моск. матем. об-ва. – 1952. – 1, № 2. – С. 349-466.
19. Дынкин Е.Б. Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли // Матем. сб. – 1952. – 30, № 2. – С. 349-462.
20. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

21. Кадышевский В.Г. Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий // Физика элементар. частиц и атом. ядра. - 1980. - 11, вып.1. - С. 5-36.

22. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1976. - 576 с.

23. Карпелевич Ф.И. Простые подалгебры вещественных алгебр Ли // Труды Моск. матем. об-ва. - 1955. - 4, № 1. - С. 3-112.

24. Лагно В.И. Подалгебры алгебры Пуанкаре AP(2,2) // Теоретико-групповые исслед. уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. - С. 96-107.

25. Лагно В.И. О непрерывных подгруппах обобщенной группы Пуанкаре P(2,3) и их инвариантах // Симметрия и решения нелинейных уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. - С. 84-89.

26. Лезнов А.Н., Савельев М.В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. - М.: Наука, 1985. - 280 с.

27. Ленг С. Алгебра. - М.: Мир, 1968. - 564 с.

28. Марченко В.А. Об абелевых подалгебрах алгебры Шредингера ASch(4) // Симметрия и решения нелинейных уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. - С. 89-91.

29. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. - М.: Мир, 1981. - 342 с.

30. Никитин А.Г., Фущич В.И., Юрик И.И. Редукция неприводимых унитарных представлений обобщенных групп Пуанкаре по их подгруппам // Теор. и мат. физика. - 1976. - 26, № 2. - С. 206-220.

31. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 400с.

32. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. - М.: Наука, 1984. - 520 с.

33. Тауфик М.С. Ополупростых подалгебрах некоторых простых вещественных алгебр Ли // Успехи мат. наук. - 1975. - 30, № 4. - С. 261-262.

34. Тауфик М.С. О максимальных подалгебрах в классических вещественных алгебрах Ли // Вопр. теории групп и гомол. алгебры. - Ярославль. - 1979. - № 2. - С. 148-168.

35. Тауфик М.С. О полупростых подалгебрах псевдоунитарных алгебр Ли // Геометрич. методы в задачах алгебры и анализа. - Ярославль. - 1980. - С. 86-115.

36. Федорчук В.М. Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре P(1,4) // Укр. мат. журн. - 1979. - 31, № 6. - С. 717-722.

37. Федорчук В.М. Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера P(1,4). - Киев, 1978. - 36 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 78.18).

38. Федорчук В.М. Нерасщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре P(1,4) // Укр. мат. журн. - 1981. - 33, № 5. - С. 696-700.

39. Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений в частных производных // Теоретико-групповые методы в мат. физике. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. - С. 5-44.

40. Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики // Теоретико-алгебраич. исслед. в мат. физике. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. - С. 4-23.

41. Фущич В.И. О симмметрии и точных решениях многомерных

нелинейных волновых уравнений // Укр. мат. журн. - 1987. - 39, № 1. - С. 116-123.

42. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф. Непрерывные подгруппы обобщенной группы Галилея.I. - Киев, 1985. - 46 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.19).

43. Фущич В.И. , Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф. Непрерывные подгруппы обобщенной группы Евклида // Укр. мат. журн. - 1986. - 38, № 1. - С. 67-72.

44. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. - Киев: Наукова думка, 1983. - 196 с.

45. Фущич В.И., Чернига Р.М. О точных решениях двух нелинейных уравнений шредингеровского типа. - Киев, 1986. - 44 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.85).

46. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. - Киев: Наукова думка, 1989. - 336 с.

47. Фущич В.И., Федорчук В.М., Федорчук И.М. Подгрупповая структура обобщенной группы Пуанкаре и точные решения некоторых нелинейных волновых уравнений. - Киев, 1986. - 36 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.27).

48. Фущич В.И., Штелень В.М. О редукции и точных решениях нелинейного уравнения Дирака // Теор. и мат. физика. - 1987. - 72, № 1. - С. 35-44.

49. Шульга М.В. Симметрия и некоторые частные решения уравнения Даламбера с нелинейным условием // Теоретико-групповые исслед. уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. - С. 36-38.

50. Баранник Л.Ф., Марченко В.А. О точных решениях нелинейного

уравнения Шредингера // Всесоюзная конференция по нелинейным проблемам дифференциальных уравнений и математической физики: Тезисы сообщений. Часть первая. – Тернополь, 1989. – С. 30–31.

51. Bacry H., Combe P., Sorba P. Connected subgroups of the Poincare Group // Repts. Math. Phys.–1974. – 5, № 2. – P. 145–186.

52. Bacry H., Combe P., Sorba P. Connected subgroups of the Poincare group.II.// Ibid. – 1974. – 5, № 3. – P. 361–392.

53. Barannik L.F., Fushchich W.I. On subalgebras of the Lie algebra of the extended Poincare group $\tilde{P}(1,n)$ // J. Math. Phys. – 1987. – 27, № 7. – P. 1445–1458.

54. Barannik L.F., Fushchich W.I. On continuous subgroups of the generalized Schrödinger group // J. Math. Phys. – 1989. – 30, № 1. – P. 31–40.

55. Becker J., Patera J., Perroud M., Winternitz P. Subgroups of the Euclidean group and symmetry breaking in nonrelativistic quantum mechanics // J.Math. Phys. – 1977. – 18, № 1. – P. 72–83.

56. Burdet G., Patera J., Perrin M. et Winternitz P. Sous-algebras de Lie de l'algebra de Schrodinger // Ann. Sc. Math. Quebes. – 1978. – 2, № 1. – P. 81–108.

57. Burdet G., Patera J., Perrin M., Winternitz P. The optical group and its subgroups // J.Math. Phys. – 1978. – 19, № 8. – P. 1758–1780.

58. Gagnon L., Winternitz P. Lie symmetries of a generalized nonlinear Schrödinger equation. I. The symmetry group and

its subgroups // J. Phys. A. - 1988.-21, N° 7. - P. 1493-
-1511.

59. Fushchich W.I., Barannik A.F., Barannik L.F., Fedorchuck V.M. Continuous subgroups of the Poincare group P(1,4) // J. Phys. A. - 1985. - 18, N° 14. - P. 2893-2899.

60. Fushchich W.I., Nikitin A.G. Reduction of the representations of the generalized Poincare algebra by the Galilei algebra // Ibid. - 1980. - 13, N° 11. - P. 2319-2330.

61. Fushchich W.I., Serov N.I. On some exact solutions of the three-dimensional Schrödinger equation // J. Phys. A. - 1987. - 20, N° 16. - L929 - L933.

62. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P. Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations // J. Math. Phys. - 1984. - 25, N° 4. - P. 791-806.

63. Lie S., Engel F. Theorie der Transformations gruppen: Bd. 1-3. - Leipzig: Teubner, 1888, 1890, 1893.

64. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. The maximal solvable subgroups of the SU(p, q) groups and all subgroups of SU(2,1) // J. Math. Phys. - 1974. - 15, N° 8. - P. 1378-
-1393.

65. Patera J., Winternitz P., Sharp R.T., Zassenhaus H. Subgroups of the similitude group of the three-dimensional Minkovski space // Can. J Phys. - 1976. - 54, N° 9. - P. 950-961.

66. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics.1.General method and the Poincare group // J. Math. Phys.-1975 - 16, N° 8. - P. 1597-1614.

67. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundumental groups of physics.II.The similitude group // Ibid. - P. 1615-1624.

68. Patera J., Winternitz P., Zassenhause H. Quantum numbers f for particles in de Sitter space // Ibid. - 1976. - 17, N° 5. - P. 717-728.

69. Patera J., Winternitz P., Zassenhause H. Subgroups of the Poincare group and their invariants // Ibid. - N° 6. - P. 977-985.

70. Fushchich W.I., Cherniha R.M. The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations.// J. Phys. A. - 1985. - 18, N° 16. - P. 3122-3126.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Подалгебры алгебры $AG_3(1,2)$*.

Расщепляемые подалгебры алгебры $AG_3(1,2)$.

$\langle J_{02}\rangle : \langle P_0+P_2,\ G_0-G_2\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2,\ G_0+G_2\rangle$**, $\langle P_1,\ P_0+P_2,\ G_0-G_2\rangle$, $\sim\langle P_1,\ P_0+P_2,\ G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0,\ P_2,\ G_0+G_2\rangle$, $\sim\langle P_1,\ G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0,\ P_1,\ P_2,\ G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2,\ P_1,\ G_1\rangle$, $\langle P_1,\ G_1\rangle$, $\sim\langle P_0,\ P_2,\ G_1\rangle$, $\langle P_0,\ P_1,\ P_2,\ G_1\rangle$, $\langle P_0+P_2,\ G_0\pm G_2,\ P_1,\ G_1\rangle$, $\langle P_0,\ P_2,\ G_0+G_2,\ G_1\rangle$, $\langle P_0,\ P_1,\ P_2,\ G_0+G_2,\ G_1\rangle$, $\langle P_0,\ P_2,\ G_0,\ G_2\rangle$, $\langle P_0,\ P_1,\ P_2,\ G_0,\ G_2\rangle$, $\langle P_0,\ P_1,\ P_2,\ G_0,\ G_1,\ G_2\rangle$, $\langle P_0+G_2,\ P_2+G_0\rangle$, $\langle P_0+G_2,\ P_2+G_0,\ P_1\rangle$, $\langle P_0+G_2,\ P_2+G_0,\ P_1,\ G_1\rangle$;

$\langle J_{12}\rangle : \langle G_1+P_2,\ G_2+P_1,\ P_0\rangle$, $\langle G_1+P_2,\ G_2-P_1,\ P_0,\ G_0\rangle$, $\langle P_0,\ P_1,\ P_2,\ G_0,\ G_1,\ G_2\rangle$, $\langle P_0,\ P_1,\ P_2,\ G_0,\ G_2\rangle$, $\langle P_0,\ P_1,\ P_2,\ G_0\rangle$, $\sim\langle P_1,\ P_2,\ G_0\rangle$;

$\langle H\rangle : \sim\langle P_0+P_2,\ G_0+G_2\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2,\ P_1,\ G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2,\ P_1,\ G_0+G_2,\ G_1\rangle$, $\langle P_0,\ P_1,\ P_2,\ G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0,\ P_1,\ P_2,\ G_0+G_2,\ G_1\rangle$, $\langle P_0,\ P_1,\ P_2,\ G_0,\ G_1,\ G_2\rangle$, $\langle G_0+G_2,\ P_0+P_2,\ P_0-P_2+G_1,\ P_1\rangle$, $\sim\langle G_0+G_2+P_1,\ P_0+P_2\rangle$, $\sim\langle G_0+G_2\pm P_2,\ P_0+P_2,\ P_1\rangle$, $\langle P_0-P_2+G_1,\ G_0+G_2+2P_1,\ P_0+P_2\rangle$;

---

* – Которые не сопряжены подалгебрам алгебр $A\tilde{P}(1,2)$ и $AG(3,2)$.

** – $\sim$ стоит перед алгебрами, являющимися также подалгебрами алгебры $A\tilde{G}_3(1,2)$.

$\langle J_{02}, H\rangle$: $\sim\langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2, P_1, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, P_1, G_0+G_2, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0+G_2, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$;

$\langle J_{01}, J_{02}, J_{12}\rangle$: $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$;

$\langle T\rangle$: $\sim\langle P_0+P_2\rangle$, $\sim\langle P_1\rangle$, $\sim\langle P_1, P_0+P_2\rangle$, $\sim\langle P_0, P_2\rangle$, $\sim\langle P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_0, P_0, P_2\rangle$, $\langle G_0, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\sim\langle G_0+G_2, P_0+P_2\rangle$, $\sim\langle G_0+G_2, P_0+P_2, P_1\rangle$, $\langle G_0+G_2, P_0, P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1, P_1, P_0\rangle$, $\langle G_1, P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_1, P_1, P_0, P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2, G_1, P_0+P_2, P_1\rangle$, $\langle G_0+G_2, G_1, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_0, G_1, G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_0+P_1, P_0\rangle$, $\langle G_0+P_1, P_0, P_2\rangle$, $\sim\langle G_0+G_2+P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2+P_1, P_0, P_2\rangle$, $\sim\langle G_0+G_2\pm P_2, P_0+P_2\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2, G_0+G_2+P_1+\alpha P_2\rangle$, $\sim\langle G_0+G_2\pm P_2, P_0+P_2, P_1\rangle$, $\langle G_0+P_2, G_1, P_0, P_1\rangle$, $\langle G_0, G_1+P_2, P_0, P_1\rangle$, $\langle G_0+P_2, G_1+P_2, P_0, P_1\rangle$;

$\langle D\rangle$: $\sim\langle P_0, G_1\rangle$, $\langle P_1, G_1+\alpha G_0\rangle$, $\sim\langle P_2, G_0+G_1\rangle$, $\langle P_2, G_0+G_1+\alpha G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_0-G_2\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_0\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_2\rangle$, $\sim\langle P_0, P_2, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_0+\alpha G_1\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_2+\alpha G_1\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_0+G_2+\alpha G_1\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_0+G_2, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_0, G_2\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_0, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_1, G_2\rangle$,

$\langle P_0, P_2, G_0+\alpha G_1\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_0+\alpha G_1, G_2\rangle$, $\sim\langle P_1, P_2, G_0\rangle$, $\langle P_1, P_2, G_0+\alpha G_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, G_0+\alpha G_2, G_1\rangle$, $\langle P_0+P_2, P_1, G_0\rangle$, $\langle P_0+P_2, P_1, G_0-G_2\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2, P_1, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, P_1, G_0\pm G_2, G_1\rangle$, $\langle P_0+P_2, P_1, G_0\pm G_2, G_1+\alpha G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0+G_2, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_1, G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$;

$\langle S+T\rangle$: $\langle P_0, P_1, G_0, G_1\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, P_1, G_0+G_2, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$, $\langle P_0+\lambda G_1, G_0-\lambda P_1\rangle$, $\langle P_0+\lambda G_1, G_0-\lambda P_1, P_2, G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2+\lambda G_1, G_0+G_2-\lambda P_1\rangle$, $\langle P_2+\lambda G_1, G_2-\lambda P_1, P_0, G_0\rangle$, $\langle P_1-\lambda G_2, G_1+\lambda P_2, P_0+P_1, G_0+G_1\rangle$;

$\langle D, T\rangle$: $\sim\langle P_0+P_2\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2, P_1\rangle$, $\sim\langle P_0, P_2\rangle$, $\sim\langle P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_0, P_0, P_2\rangle$, $\langle G_0, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\sim\langle G_0+G_2, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2, P_0, P_2\rangle$, $\sim\langle G_0+G_2, P_0+P_2, P_1\rangle$, $\langle G_0+G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1, P_1, P_0\rangle$, $\langle G_1, P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_1, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2, G_1, P_0+P_2, P_1\rangle$, $\langle G_0+G_2, G_1, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_0, G_1, G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$;

$\langle D, S, T\rangle$: $\sim\langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, P_1, G_0+G_2, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_0, G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$;

$\langle J_{01}, J_{02}, J_{12}, T\rangle$: $\sim\langle\Theta\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$, $\sim\langle P_0, P_1, P_2\rangle$;

$\left.\begin{array}{l}\langle J_{02}+T\rangle\\ \langle J_{02},T\rangle\end{array}\right\}$: $\sim\langle\Theta\rangle$, $\sim\langle P_0\pm P_2\rangle$, $\sim\langle P_0\pm P_2, G_0\pm G_2\rangle$, $\sim\langle P_1\rangle$,
$\langle P_1,G_1\rangle$, $\sim\langle P_0\pm P_2,P_1\rangle$, $\sim\langle P_0\pm P_2,P_1,G_0\pm G_2\rangle$,
$\langle P_0\pm P_2,P_1,G_1\rangle$, $\langle P_0\pm P_2,P_1,G_0\pm G_2,G_1\rangle$, $\sim\langle P_0,P_2\rangle$,
$\langle P_0,P_2,G_0\pm G_2\rangle$, $\langle P_0,P_2,G_0,G_2\rangle$, $\sim\langle P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,$
$G_1\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,G_0\pm G_2\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,G_0,G_2\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,$
$G_0\pm G_2,G_1\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,G_0,G_1,G_2\rangle$;

$\left.\begin{array}{l}\langle J_{12}+T\rangle\\ \langle J_{12},T\rangle\end{array}\right\}$: $\sim\langle P_0\rangle$, $\langle P_0,G_0\rangle$, $\sim\langle P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,$
$G_0\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,G_1,G_2\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,G_0,G_1,G_2\rangle$;

$\left.\begin{array}{l}\langle H+T\rangle\\ \langle H,T\rangle\end{array}\right\}$: $\sim\langle\Theta\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2,G_0+G_2\rangle$, $\sim\langle P_1,P_0+P_2\rangle$,
$\sim\langle P_1,P_0+P_2,G_0+G_2\rangle$, $\langle P_1,P_0+P_2,G_1,G_0+G_2\rangle$,
$\sim\langle P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,G_1,G_0+G_2\rangle$,
$\langle P_0,P_1,P_2,G_0,G_1,G_2\rangle$, $\sim\langle G_0+G_2+P_1,P_0+P_2\rangle$, $\sim\langle G_0+G_2\pm P_2,$
$P_1,P_0+P_2\rangle$;

$\langle H,T\rangle$: $\langle P_0-P_2+G_1, P_1, P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$;

$\langle H+T\rangle$: $\sim\langle G_0+G_2-P_1\rangle$, $\langle P_0-P_2-G_1, G_0+G_2-P_1\rangle$,
$\langle G_1+2P_2, G_0+G_2-P_1\rangle$, $\langle G_1-2P_0, G_0+G_2-P_1\rangle$, $\langle G_0+G_2+\alpha P_1,$
$G_1+(\alpha-1)P_0, P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0-P_2+\alpha G_1, P_1, P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$;

$\left.\begin{array}{l}\langle J_{02}\pm T,H\rangle\\ \langle J_{02},H,T\rangle\end{array}\right\}$: $\sim\langle\Theta\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2,G_0+G_2\rangle$,
$\sim\langle P_1,P_0+P_2\rangle$, $\sim\langle P_1,P_0+P_2,G_0+G_2\rangle$, $\langle P_1,P_0+P_2,$
$G_1,G_0+G_2\rangle$, $\sim\langle P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,$
$G_1,G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,G_0,G_1,G_2\rangle$;

$\left.\begin{array}{l}\langle J_{02}+\alpha D\rangle\\ \langle J_{02}, D\rangle\end{array}\right\}:$ $\langle P_0+P_2, G_0-G_2\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2, G_1\rangle$, $\langle P_1, G_1\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_0-G_2, P_1\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2, G_0+G_2, P_1\rangle$, $\langle P_0+P_2, P_1, G_1\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_0\pm G_2, P_1, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_1, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_0, G_2\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_0+G_2, G_1\rangle$;

$\langle J_{02}+D,\ P_0-P_2\pm(G_0+G_2)\rangle$: $\sim\langle\Theta\rangle$, $\sim\langle P_1\rangle$, $\langle P_1, G_1\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_0-G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, P_1, G_0-G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, P_1, G_0-G_2, G_1\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2, P_1\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2, G_1\rangle$, $\langle P_0+P_2, P_1, G_1\rangle$;

$\langle 2J_{02}+D,\ P_0-P_2+G_1\rangle$: $\sim\langle\Theta\rangle$, $\langle G_0+G_2+\alpha P_1\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_0\pm G_2\rangle$, $\sim\langle G_0-G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_0, G_2\rangle$, $\langle G_0, G_2\rangle$, $\langle G_0+G_2+\alpha P_1, G_0-G_2\rangle$, $\langle G_0+G_2+\alpha P_1, G_0-G_2, P_0+P_2\rangle$, $\langle P_1\rangle$, $\langle P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle P_1, G_0\pm G_2\rangle$, $\langle P_1, P_0+P_2, G_0\pm G_2\rangle$, $\langle P_1, P_0+P_2, G_0, G_2\rangle$, $\langle P_1, G_0, G_2\rangle$;

$\left.\begin{array}{l}\langle J_{12}+\alpha D\rangle\\ \langle J_{12}, D\rangle\end{array}\right\}:$ $\sim\langle P_1, P_2, G_0\rangle$, $\langle P_0, G_0\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_1, G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$;

$\langle J_{01}, J_{02}, J_{12}, D\rangle$: $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$;

$\left.\begin{array}{l}\langle H+D\rangle\\ \langle H, D\rangle\\ \langle J_{02}+\alpha D, H\rangle\\ \langle J_{02}, H, D\rangle\end{array}\right\}:$ $\sim\langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2, P_1, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, P_1, G_0+G_2, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0+G_2, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$;

$\sim\langle J_{02}+\mathbb{D},\ H,\ P_0-P_2\pm(G_0+G_2),\ P_1,\ P_0+P_2\rangle;$

$\langle 2J_{02}+\mathbb{D},\ H,\ P_0+P_2\rangle:\ \sim\langle G_0+G_2-P_1\rangle,\quad \langle G_0+G_2-P_1,$

$P_0-P_2-2G_1\rangle,\ \langle P_0-P_2-G_1,\ P_1,\ G_0+G_2\rangle;$

$\langle 2J_{02}+\mathbb{D},\ T\rangle:\ \langle P_0-P_2-G_1,\ P_1,\ P_0+P_2\rangle,\ \langle P_0-P_2-G_1,\ P_1,\ P_0+P_2,$

$G_0+G_2\rangle,\ \langle P_0-P_2-G_1,\ P_1\rangle,\ \sim\langle G_0+G_2-P_1,\ P_0+P_2\rangle,$

$\langle G_0+G_2-P_1,\ P_0,\ P_2\rangle,\ \langle G_0+G_2-P_1,\ G_0-G_2,\ P_0,\ P_2\rangle;$

$\langle 2J_{02}+\mathbb{D},\ H,\ T\rangle:\ \langle P_0-P_2-G_1,\ P_1,\ P_0+P_2,\ G_0+G_2\rangle,$

$\sim\langle G_0+G_2-P_1,\ P_0+P_2\rangle;$

$\langle 2J_{02}+\mathbb{D},\ H+T\rangle:\ \sim\langle\theta\rangle,\ \sim\langle G_0+G_2-P_1\rangle,\ \sim\langle G_0+G_2+\alpha P_1,$

$P_0+P_2\rangle,\ \langle P_0-P_2+\alpha G_1,\ G_0+G_2,\ P_0+P_2,\ P_1\rangle,\ \langle G_0+G_2+\alpha P_1,$

$G_1+(\alpha-1)P_0,\ P_0+P_2\rangle,\ \langle P_0-P_2-G_1,\ G_0+G_2-P_1\rangle,\ \sim\langle P_0+P_2\rangle,$

$\sim\langle P_0+P_2,\ P_1\rangle,\ \sim\langle P_0,\ P_1,\ P_2\rangle,\ \sim\langle G_0+G_2,\ P_0+P_2\rangle,\ \sim\langle G_0+G_2,\ P_1,$

$P_0+P_2\rangle,\ \langle G_0+G_2,\ P_0,\ P_1,\ P_2\rangle,\ \langle G_0+G_2,\ G_1,\ P_0+P_2,\ P_1\rangle,$

$\langle G_0+G_2,\ G_1,\ P_0,\ P_1,\ P_2\rangle,\ \langle G_0,\ G_1,\ G_2,\ P_0,\ P_1,\ P_2\rangle;$

$\langle J_{02}+\mathbb{D},\ T,\ P_0-P_2\pm(G_0+G_2),\ P_0+P_2\rangle:\ \sim\langle\theta\rangle,\ \sim\langle P_1\rangle,\ \langle P_1,\ G_1\rangle;$

$\left.\begin{array}{l}\langle J_{02}+\alpha\mathbb{D},\ T\rangle\\ \langle J_{02},\ \mathbb{D},\ T\rangle\end{array}\right\}:\ \sim\langle\theta\rangle,\ \sim\langle P_0+P_2\rangle,\ \sim\langle P_0+P_2,\ G_0+G_2\rangle,\ \sim\langle P_1\rangle,$

$\langle P_1,\ G_1\rangle,\ \sim\langle P_0+P_2,\ P_1\rangle,\ \sim\langle P_0+P_2,\ P_1,\ G_0+G_2\rangle,$

$\langle P_0+P_2,\ P_1,\ G_1\rangle,\ \langle P_0+P_2,\ P_1,\ G_0+G_2,\ G_1\rangle,\ \sim\langle P_0,\ P_2\rangle,\ \langle P_0,\ P_2,$

$G_0+G_2\rangle,\ \langle P_0,\ P_2,\ G_0,\ G_2\rangle,\ \sim\langle P_0,\ P_1,\ P_2\rangle,\ \langle P_0,\ P_1,\ P_2,\ G_1\rangle,\ \langle P_0,\ P_1,$

$P_2,\ G_0+G_2\rangle,\ \langle P_0,\ P_1,\ P_2,\ G_0,\ G_2\rangle,\ \langle P_0,\ P_1,\ P_2,\ G_1,\ G_0+G_2\rangle,$

$\langle P_0,\ P_1,\ P_2,\ G_0,\ G_1,\ G_2\rangle;$

$\left.\begin{array}{l}\langle J_{12}+\alpha D, T\rangle\\ \langle J_{12}, D, T\rangle\end{array}\right\}$: $\sim\langle P_0\rangle$, $\langle P_0, G_0\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_1, G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$;

$\left.\begin{array}{l}\langle H+D, T\rangle\\ \langle H, D, T\rangle\end{array}\right\}$: $\sim\langle\theta\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\sim\langle P_1, P_0+P_2\rangle$, $\sim\langle P_1, P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_1, P_0+P_2, G_1, G_0+G_2\rangle$,

$\sim\langle P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_1, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$;

$\langle J_{01}, J_{02}, J_{12}, D, T\rangle$: $\sim\langle\theta\rangle$, $\sim\langle P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$;

$\left.\begin{array}{l}\langle J_{02}+\alpha(S+T)\rangle\\ \langle J_{02}, S+T\rangle\end{array}\right\}$: $\sim\langle\theta\rangle$, $\langle P_1, G_1\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_0, G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, P_1, G_0+G_2, G_1\rangle$,

$\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$;

$\left.\begin{array}{l}\langle H+S+T\rangle\\ \langle H, S+T\rangle\\ \langle J_{02}+\alpha(S+T), H\rangle\\ \langle J_{02}, H, S+T\rangle\end{array}\right\}$: $\sim\langle\theta\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_1, P_0+P_2, G_1, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$;

$\left.\begin{array}{l}\langle J_{12}+\alpha(S+T)\rangle\\ \langle J_{12}, S+T\rangle\end{array}\right\}$: $\langle P_0, G_0\rangle$, $\langle P_0, G_0, P_1-G_2, P_2+G_1\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$;

$\langle S+T+J_{12}, P_1+G_2\rangle$: $\langle P_0, G_0\rangle$, $\langle P_0, G_0, P_1+G_2, P_2-G_1\rangle$;

$\langle S+T+2J_{12}\rangle$: $\langle G_2+P_1+\alpha P_0, G_1-P_2-\alpha G_0\rangle$;

$\langle J_{01}, J_{02}, J_{12}, D, S, T\rangle$: $\sim\langle\theta\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$;

$\langle 2J_{02}+D, 2J_{01}+S-T, 2J_{12}+S+T\rangle$: $\sim\langle\theta\rangle$,

$\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$, $\langle G_0+G_2-P_1, P_0-P_2-G_1\rangle$;

$\sim\langle P_0+P_2\rangle, \sim\langle P_0+G_2\rangle, \sim\langle P_0+P_2+G_1\rangle, \sim\langle P_0, P_1+G_2\rangle, \sim\langle P_1, P_2+G_0\rangle,$

$\sim\langle P_0+\alpha G_0+\beta G_2, P_1\rangle, \sim\langle P_1+\alpha G_1+G_0, P_2\rangle, \langle P_0+P_2+G_1, P_1\rangle,$

$\sim\langle P_0+P_2, G_0+G_0\rangle, \sim\langle P_0+P_2, P_1+G_0+G_2\rangle, \langle P_0+P_2, P_1+G_0\rangle,$

$\langle P_0+P_2, P_1+G_2\rangle, \langle P_0+P_2, P_1+G_0-G_2\rangle, \langle P_0+P_2, G_0-G_2\rangle,$

$\langle G_0+P_2, P_0+\alpha P_1\rangle, \langle G_2+P_0, P_2+\alpha P_1\rangle, \sim\langle G_0+\gamma P_0+P_1, G_2+\alpha P_1\rangle,$

$\sim\langle G_2+\gamma P_2+P_1, G_0+\alpha P_1\rangle, \langle G_0+\alpha P_0+P_1, G_2+\alpha P_0\rangle, \langle G_2+\alpha P_2+P_1,$

$G_0+\alpha P_2\rangle, \langle G_1+\alpha P_1+P_0, G_2+\beta P_1+\alpha P_0\rangle, \langle P_0+\alpha G_1+P_2, \beta P_1+G_0+\alpha P_2\rangle,$

$\langle G_1+P_2+\alpha P_0, G_2-P_1+\beta P_2+\gamma P_0\rangle, \langle G_0+P_2+\alpha P_1, G_2+P_0+\beta P_2+\gamma P_1\rangle,$

$\sim\langle G_0, G_2\rangle, \sim\langle P_0, G_2\rangle, \sim\langle P_0+P_2, P_1\rangle, \sim\langle P_0, P_2\rangle, \langle P_0+P_2, G_1\rangle,$

$\langle P_1+\alpha(G_0+G_2), P_0+P_2+\beta(G_0+G_2)+G_1\rangle, \langle P_1+G_0-G_2, P_0+P_2+\alpha G_1\rangle,$

$\langle P_1+G_0+G_2, P_0+P_2+\alpha G_1\rangle, \langle P_1+G_0, P_0+P_2+\alpha G_1\rangle, \langle P_1+G_2,$

$P_0+P_2+\alpha G_1\rangle, \sim\langle P_0, P_1, P_2\rangle, \sim\langle P_0, P_1, G_2\rangle, \sim\langle P_1, P_2, G_0\rangle,$

$\langle P_0, G_0, P_1\rangle, \langle P_1, G_1, P_0\rangle, \langle P_1, G_1, P_2\rangle, \langle P_1, G_1, P_0+P_2\rangle,$

$\langle P_0+P_2, P_1, G_2\rangle, \sim\langle P_0+P_2, G_0+G_2, P_1\rangle, \langle P_0+P_2, G_0-G_2, P_1\rangle,$

$\langle P_0+P_2, P_1, G_1+\alpha G_2\rangle, \sim\langle P_0, G_1, P_2\pm G_2\rangle, \sim\langle P_0+G_2, P_2-G_0, P_1\rangle,$

$\langle P_0+\alpha G_1+\beta G_2, P_1+G_2-\alpha G_0+\gamma G_1, P_2-G_1-\beta G_0+\delta G_2\rangle,$

$\langle P_0+G_1+\beta G_2, P_1+G_0+\mu G_1+\gamma G_2, P_2-\beta G_0+\gamma G_1+\nu G_2\rangle,$

$\langle P_0+(\alpha+1)G_1+\beta G_2, P_1+(1-\alpha)G_0, P_2-\beta G_0+\gamma G_1+\nu G_2\rangle,$

$\langle P_0+(\alpha+1)G_2, P_2+(1-\alpha)G_0+(\gamma+1)G_1, P_1+(\gamma-1)G_2+\mu G_1\rangle,$

$\langle P_0+G_1, P_1+G_0+\mu G_1+(\gamma+1)G_2, P_2+(\gamma-1)G_1+\nu G_2\rangle,$

$\langle P_0+G_1+\beta G_2, P_1+G_0+(\gamma+1)G_2, P_2-\beta G_0+(\gamma-1)G_1+\nu G_2\rangle,$

$\langle P_0, P_1, P_2, G_0\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, G_0, G_1+\alpha G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, G_0+G_1, G_1+\alpha G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, G_1, G_0+\alpha G_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, G_0, G_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, G_0+\alpha G_1, G_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, G_1, P_0\pm G_0\rangle$, $\langle P_1, P_2, G_1, P_0+G_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, G_1, P_0+G_2+\alpha G_0\rangle$, $\langle P_0, P_2, P_1+G_0, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_2, P_1+G_0, G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_0-G_2, P_1, G_1\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_0+G_2, P_1, G_1\rangle$, $\langle G_0+P_2, G_2+P_0+\alpha P_2, G_1+\beta P_0+\gamma P_2, P_1\rangle$, $\langle G_1-P_2, G_2+P_1+\alpha P_2, G_0+\beta P_1+\gamma P_2, P_0\rangle$, $\langle G_0-P_2, G_2+P_0, P_1, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_1, G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0+G_2, G_1\rangle$, $\langle P_0+G_2, P_1, P_2, G_0, G_2\rangle$, $\langle P_1+G_2, P_0, P_2, G_0, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$.

Нерасщепляемые подалгебры алгебры $AG_3(1,2)$

$\langle J_{02}+P_1\rangle$: $\sim\langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_0, G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_1\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_0+G_2, G_1\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$, $\sim\langle G_0+G_2\rangle$, $\langle G_1\rangle$, $\langle G_0, G_2\rangle$, $\langle G_0+G_2, G_1\rangle$, $\langle G_0, G_2, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_0, G_2\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_1, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$, $\langle P_0+G_2, P_2+G_0\rangle$, $\langle G_1, P_0+G_2, P_2+G_0\rangle$;

$\langle J_{12}+P_0\rangle$: $\langle P_1, P_2, G_0\rangle$, $\langle P_1, P_2, G_1, G_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$, $\langle G_1+P_2, G_2-P_1\rangle$, $\langle G_0, G_1+P_2, G_2-P_1\rangle$;

$\langle H+P_0\rangle$: $\langle G_0+G_2\rangle$, $\langle G_0+G_2, G_1\rangle$, $\langle G_0, G_1, G_2\rangle$, $\langle G_0+G_2, P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_1, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, P_1, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, P_1, G_1, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, P_1, G_0, G_1, G_2\rangle$,

$\langle P_0+P_2+\alpha G_1, G_0+G_2\rangle$, $\langle G_0+G_2+\alpha P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0+P_2+\alpha G_2,$
$G_1, G_0+G_2\rangle$;

$\langle J_{02}+P_1, H, P_0+P_2\rangle$: $\langle G_0+G_2\rangle$, $\langle G_1, G_0+G_2\rangle$, $\langle G_0, G_1, G_2\rangle$;

$\langle T+G_0\rangle$: $\langle P_0+P_2\rangle$, $\sim\langle P_2\rangle$, $\langle P_1, P_0+\alpha P_2\rangle$, $\langle P_0, P_2\rangle$, $\langle P_2+\alpha P_0\rangle$, $\sim\langle P_1, P_2\rangle$,
$\langle P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2, P_0+P_2, P_1\rangle$, $\langle G_0+G_2,$
$P_0, P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2+\alpha P_1, P_0+P_2\rangle$,
$\langle G_0+G_2+\alpha P_1, P_0+P_2, P_0+\beta P_1\rangle$, $\langle G_0+G_2+\alpha P_1+\beta P_2, P_0+P_2\rangle$,
$\langle G_1, P_1\rangle$, $\langle G_1, P_1, P_0\rangle$, $\langle G_1, P_1, P_0+\alpha P_2\rangle$, $\langle G_1, P_1, P_0, P_2\rangle$,
$\langle G_1+\alpha P_0, P_1\rangle$, $\langle G_1+\alpha(P_0+P_2), P_1\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0+\beta P_2, P_1\rangle$,
$\langle G_0+G_2, G_1, P_0+P_2, P_1\rangle$, $\langle G_0+G_2+\alpha P_0, G_1+\beta P_0, P_0+P_2, P_1\rangle$;

$\langle T+G_1\rangle$: $\sim\langle P_0\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2\rangle$, $\sim\langle P_0, P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0+\alpha P_1\rangle$,
$\langle P_0+P_2+\alpha P_1\rangle$, $\langle G_0, P_0\rangle$, $\langle G_0, P_0, P_1\rangle$, $\langle G_0, P_0, P_1, P_2\rangle$,
$\langle G_0, P_0, P_2+\alpha P_1\rangle$, $\langle P_0, P_2+\alpha P_1\rangle$, $\langle P_2, P_0+\alpha P_1\rangle$, $\langle P_0+P_2,$
$P_0+\alpha P_1\rangle$, $\langle G_2, P_2, P_0\rangle$, $\langle G_2, P_2, P_0+\alpha P_1\rangle$, $\langle G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$,
$\sim\langle G_0+G_2, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2, P_0, P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2, P_0+P_2, P_1\rangle$,
$\langle G_0+G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2, P_0+P_2, P_0+\alpha P_1\rangle$, $\langle G_0+\alpha P_1,$
$P_0\rangle$, $\langle G_0+\alpha P_1, P_2+\beta P_1, P_0\rangle$, $\langle G_0+\alpha P_2, P_0\rangle$, $\langle G_0+\alpha P_2,$
$P_0, P_1\rangle$, $\langle G_0+\alpha P_1+\beta P_2, P_0\rangle$, $\langle G_2+\alpha P_0, P_2\rangle$, $\langle G_2+\alpha P_0, P_2,$
$P_1+\beta P_0\rangle$, $\langle G_2+\alpha P_1, P_2\rangle$, $\langle G_2+\alpha P_1, P_0, P_2\rangle$, $\langle G_2+\alpha P_1+\beta P_0,$
$P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2+\alpha P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2+\alpha P_1, P_0, P_2\rangle$,
$\sim\langle G_0+G_2+\alpha P_0, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2+\alpha P_0, P_0+P_2, P_1+\beta P_0\rangle$,

$\langle G_0+G_2+\alpha P_1+\beta P_0, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_0, G_2, P_0, P_2\rangle$, $\langle G_0, G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_0+\alpha P_1, G_2, P_0, P_2\rangle$, $\langle G_0+\alpha P_1, G_0+G_2, P_0, P_2\rangle$;

$\langle T+G_0+G_2\rangle$: $\sim\langle\Theta\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0-P_2\rangle$, $\langle P_0\rangle$, $\sim\langle P_1\rangle$, $\langle P_2\rangle$, $\langle P_0, P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0+\alpha P_1\rangle$, $\langle P_0, P_1+\alpha P_2\rangle$, $\langle P_1, P_0-P_2\rangle$, $\sim\langle P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0\pm P_2, P_1+\alpha P_0\rangle$, $\langle G_1, P_1\rangle$, $\langle G_1, P_1, P_0\rangle$, $\langle G_1, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1, P_1, P_0\pm P_2\rangle$, $\langle G_1, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, P_1\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, P_1, P_2+\beta P_0\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2, P_1\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2, P_0, P_1\rangle$, $\langle G_1+\alpha(P_0\pm P_2), P_1\rangle$;

$\langle J_{02}+\alpha(T+G_1)\rangle$: $\sim\langle\Theta\rangle$, $\sim\langle P_0\pm P_2\rangle$, $\sim\langle G_0\pm G_2, P_0\pm P_2\rangle$, $\langle G_0\pm G_2, P_0\pm P_2, P_1\rangle$, $\sim\langle P_0, P_2\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_0\pm G_2\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_0, G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0\pm G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_2\rangle$, $\langle P_1\rangle$, $\langle P_1, P_0\pm P_2\rangle$;

$\langle J_{12}+\alpha(T+G_0)\rangle$: $\sim\langle\Theta\rangle$, $\sim\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, G_1, G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0, G_1, G_2\rangle$, $\langle P_0\rangle$;

$\left.\begin{array}{l}\langle H+T+\alpha G_0\rangle\\ \langle H+T+G_1\rangle\end{array}\right\}:$ $\sim\langle\Theta\rangle$, $\langle P_0+P_2\rangle$, $\langle P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle G_0+G_2+\beta P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle P_1, P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle G_0+G_2-P_1\rangle$, $\langle G_0+G_2+\beta P_2, P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0-P_2-G_1, G_0+G_2-P_1\rangle$, $\langle G_1+2P_2, G_0+G_2-P_1\rangle$, $\langle G_1-2P_0, G_0+G_2-P_1\rangle$, $\langle G_0+G_2+\beta P_1, G_1+(\beta-1)P_0, P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0-P_2+\beta G_1, G_0+G_2, P_0+P_2, P_1\rangle$;

$$\langle H+T+\alpha G_0,\ G_0+G_2,\ G_1,\ P_0+P_2,\ P_1\rangle : \langle\Theta\rangle,\ \langle P_0-P_2\rangle;$$

$$\langle J_{02}+\alpha(T+G_1),\ H,\ G_0+G_2,\ P_0+P_2\rangle : \sim\langle\Theta\rangle,\ \langle P_1\rangle,\ \langle P_0,P_1\rangle,$$

$$\langle J_{02}+P_1,\ T\rangle : \sim\langle\Theta\rangle,\ \sim\langle P_0+P_2\rangle,\ \sim\langle P_0+P_2,\ G_0+G_2\rangle,\ \langle P_0,P_2,G_0+G_2\rangle,$$
$$\langle P_0,P_2,G_0,G_2\rangle;$$

$$\left.\begin{array}{l}\langle J_{02}+G_1,\ T,\ P_1\rangle\\ \langle J_{02}+P_1,\ T+\alpha G_1\rangle\\ \langle J_{02}+G_1,\ T+\alpha G_1,\ P_1\rangle\end{array}\right\} : \begin{array}{l}\langle\Theta\rangle,\ \langle P_0+P_2\rangle,\ \langle P_0+P_2,\ G_0+G_2\rangle,\\ \langle P_0,P_2,G_0+G_2\rangle,\ \langle P_0,P_2,G_0,G_2\rangle;\end{array}$$

$$\langle J_{12}+P_0,\ T\rangle : \sim\langle\Theta\rangle,\ \sim\langle P_1,P_2\rangle,\ \langle P_1,P_2,G_1,G_2\rangle;$$

$$\left.\begin{array}{l}\langle J_{12}+G_0,\ T,\ P_0\rangle\\ \langle J_{12}+P_0,\ T+\alpha G_0\rangle\\ \langle J_{12}+G_0,\ T+\alpha G_0,\ P_0\rangle\end{array}\right\} : \begin{array}{l}\langle\Theta\rangle,\ \langle P_1,P_2\rangle,\\ \langle P_1,P_2,G_1,G_2\rangle;\end{array}$$

$$\langle H+P_0,\ T\rangle : \sim\langle\Theta\rangle,\ \sim\langle P_0+P_2\rangle,\ \langle P_0+P_2,\ G_0+G_2\rangle,\ \sim\langle P_1,\ P_0+P_2\rangle,$$
$$\langle P_1,\ P_0+P_2,\ G_0+G_2\rangle,\ \langle P_1,\ P_0+P_2,\ G_1,\ G_0+G_2\rangle;$$

$$\langle H+G_0,\ T,\ P_0,\ P_1,\ P_2\rangle : \langle\Theta\rangle,\ \langle G_0+G_2\rangle,\ \langle G_1,\ G_0+G_2\rangle;$$

$$\langle H+G_0,\ T+\alpha(G_0+G_2)\rangle : \langle\Theta\rangle,\ \langle P_0+P_2\rangle,\ \langle P_1,\ P_0+P_2\rangle;$$

$$\langle H+P_0,\ T+\alpha G_1,\ G_0+G_2,\ P_0+P_2\rangle : \langle\Theta\rangle,\ \langle P_1\rangle;$$

$$\langle H+G_0,\ T+\alpha G_1,\ P_0,\ P_1,\ P_2,\ G_0+G_2\rangle;$$

$$\langle H+G_1,\ T,\ P_1,\ P_0+P_2\rangle : \langle\Theta\rangle,\ \langle P_0\rangle,\ \langle G_0+G_2\rangle,\ \langle P_0,\ G_0+G_2\rangle;$$

$$\langle H+G_1,\ T+\alpha G_1,\ P_1,\ P_0+P_2,\ G_0+G_2\rangle : \langle\Theta\rangle,\ \langle P_0\rangle;$$

$$\langle H+G_1,\ T+\alpha(G_0+G_2),\ P_1,\ P_0+P_2\rangle : \langle\Theta\rangle,\ \langle P_0\rangle;$$

$$\langle J_{02}+P_1,\ H,\ P_0+P_2,\ T\rangle;\ \langle J_{02}+P_1,\ H,\ P_0+P_2,\ T+\alpha(G_0+G_2)\rangle;$$

$$\langle J_{02}+P_1,\ H,\ T+\alpha G_1,\ P_0+P_2,\ G_0+G_2\rangle;$$

$$\langle J_{02}+G_1,\ H,\ G_0+G_2,\ P_1,\ P_0+P_2,\ T\rangle : \langle\Theta\rangle,\ \langle P_0\rangle;$$

$\langle J_{02}, T+G_1\rangle : \sim\langle\theta\rangle, \langle P_1\rangle, \sim\langle P_0+P_2\rangle, \sim\langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle, \sim\langle P_0, P_2\rangle,$
$\langle P_0, P_2, G_0+G_2\rangle, \langle P_0, P_2, G_0, G_2\rangle, \langle P_0+P_2, P_1\rangle, \langle G_0+G_2,$
$P_0+P_2, P_1\rangle, \langle P_0, P_1, P_2\rangle, \langle P_0, P_1, P_2, G_0+G_2\rangle, \langle G_0, G_2, P_0, P_1, P_2\rangle;$

$\langle J_{12}, T+G_0\rangle : \sim\langle\theta\rangle, \langle P_0\rangle, \sim\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_1, P_2, G_1, G_2\rangle, \langle P_0, P_1, P_2\rangle,$
$\langle P_0, P_1, P_2, G_1, G_2\rangle;$

$\langle H, T+G_0+G_2\rangle : \sim\langle\theta\rangle, \langle P_0, P_1, P_2\rangle, \sim\langle P_0+P_2\rangle, \sim\langle P_1, P_0+P_2\rangle;$

$\langle H, T+G_1, G_0+G_2, P_0+P_2\rangle : \sim\langle\theta\rangle, \langle P_1\rangle, \langle P_0, P_1\rangle;$

$\langle J_{02}+D+P_0\rangle : \langle G_0\pm G_2\rangle, \sim\langle G_1\rangle, \langle G_0, G_2\rangle, \langle G_0\pm G_2, G_1\rangle, \langle G_0, G_1, G_2\rangle,$
$\langle G_0\pm G_2, P_1\rangle, \langle P_1, G_1\rangle, \langle G_0, G_2, P_1\rangle, \langle G_0\pm G_2, G_1, P_1\rangle,$
$\langle G_0, G_1, G_2, P_1\rangle, \langle P_0-P_2\pm(G_0+G_2)\rangle, \langle P_0-P_2\pm(G_0+G_2), P_1\rangle,$
$\langle P_0-P_2\pm(G_0+G_2), G_1\rangle, \langle P_0-P_2\pm(G_0+G_2), P_1, G_1\rangle, \langle P_0-P_2\pm(G_0+G_2),$
$G_0-G_2\rangle, \langle P_0-P_2\pm(G_0+G_2), G_0-G_2, P_1\rangle, \langle P_0-P_2\pm(G_0+G_2), G_0-G_2, G_1\rangle,$
$\langle P_0-P_2\pm(G_0+G_2), G_0-G_2, P_1, G_1\rangle, \langle P_0-P_2\pm(G_0+G_2), P_0+P_2\rangle,$
$\langle P_0-P_2\pm(G_0+G_2), P_0+P_2, P_1\rangle, \langle P_0-P_2\pm(G_0+G_2), P_0+P_2, G_1\rangle,$
$\langle P_0-P_2\pm(G_0+G_2), P_0+P_2, P_1, G_1\rangle, \langle P_0\pm G_0, P_0+P_2, G_0-G_2\rangle,$
$\langle P_0\pm G_0, P_0+P_2, G_0-G_2, P_1\rangle, \langle P_0\pm G_0, P_0+P_2, G_0-G_2, G_1\rangle,$
$\langle P_0\pm G_0, P_0+P_2, G_0-G_2, P_1, G_1\rangle, \langle P_0+P_2, G_0\pm G_2\rangle, \langle P_0+P_2, G_0,$
$G_2\rangle, \sim\langle P_0+P_2, G_1\rangle, \langle P_0+P_2, G_0\pm G_2, G_1\rangle, \langle P_0-P_2, G_0\pm G_2\rangle,$
$\langle P_0-P_2, G_0\pm G_2, G_1\rangle, \langle P_0\pm P_2, P_1, G_1\rangle, \langle P_0\pm P_2, P_1, G_0, G_2\rangle,$
$\langle P_0+P_2, P_1, G_0\pm G_2, G_1\rangle, \langle P_0-P_2, P_1, G_0\pm G_2, G_1\rangle,$
$\langle P_0\pm P_2, P_1, G_0, G_1, G_2\rangle;$

$\langle J_{0z}+D+P_0+\alpha G_0\rangle : \sim\langle\theta\rangle,\ \langle P_0\pm P_z\rangle,\ \sim\langle P_1\rangle,\ \langle P_0\pm P_z, P_1\rangle,\ \langle G_0\pm G_z\rangle,$
$\sim\langle G_1\rangle,\ \langle G_1, G_0\pm G_z\rangle,\ \langle P_0+P_z, G_0\pm G_z\rangle,\ \langle P_0-P_z, G_0\pm G_z\rangle,$
$\langle P_0\pm P_z, G_1\rangle,\ \langle P_0+P_z, G_0\pm G_z, G_1\rangle,\ \langle P_0-P_z, G_0\pm G_z, G_1\rangle,$
$\langle P_1, G_0\pm G_z\rangle,\ \langle P_1, G_1\rangle,\ \langle P_1, G_1, G_0\pm G_z\rangle,\ \langle P_0+P_z, G_0\pm G_z, P_1\rangle,$
$\langle P_0-P_z, G_0\pm G_z, P_1\rangle,\ \langle P_0+P_z, G_0\pm G_z, P_1, G_1\rangle,\ \langle P_0-P_z, G_0\pm G_z,$
$P_1, G_1\rangle,\ \langle P_0\pm P_z, P_1, G_1\rangle,\ \langle P_0-P_z+\beta(G_0+G_z)\rangle,\ \langle P_1, G_1,$
$P_0-P_z+\beta(G_0+G_z)\rangle,\ \langle P_1, P_0-P_z+\beta(G_0+G_z)\rangle,\ \langle G_1,$
$P_0-P_z+\beta(G_0+G_z)\rangle;$

$\langle J_{0z}+D+P_0, T\rangle : \sim\langle\theta\rangle,\ \sim\langle P_0\pm P_z\rangle,\ \sim\langle P_1\rangle,\ \sim\langle P_1, P_0\pm P_z\rangle,\ \langle P_1, G_1\rangle,$
$\langle P_0\pm P_z, G_0\pm G_z\rangle,\ \langle P_1, G_1, P_0\pm P_z\rangle,\ \langle P_1, P_0\pm P_z, G_0\pm G_z\rangle,$
$\langle P_1, P_0\pm P_z, G_1, G_0\pm G_z\rangle,\ \langle P_0-P_z\pm(G_0+G_z), P_0+P_z\rangle,$
$\langle P_0-P_z\pm(G_0+G_z), P_0+P_z, P_1\rangle, \langle P_0-P_z\pm(G_0+G_z), P_0+P_z, P_1, G_1\rangle;$

$\langle J_{0z}+D+G_0, T, P_0, P_z\rangle : \langle\theta\rangle,\ \langle G_0\pm G_z\rangle,\ \langle P_1\rangle,\ \langle P_1, G_1\rangle,\ \langle G_0\pm G_z, P_1\rangle,$
$\langle G_0\pm G_z, G_1, P_1\rangle;$

$\langle J_{0z}+D+G_0+G_z, T, P_0+P_z\rangle : \sim\langle\theta\rangle, \sim\langle P_1\rangle,\ \langle P_0, P_1\rangle;$

$\langle J_{0z}+D+G_0+G_z+\alpha P_0, T, P_0+P_z\rangle :\ \sim\langle\theta\rangle,\ \sim\langle P_1\rangle;$

$\langle J_{0z}+D+P_0, H, P_0-P_z\pm(G_0+G_z), P_1, P_0+P_z\rangle;$

$\langle J_{0z}+2D, H+P_0-P_z\rangle : \langle G_0+G_z\rangle, \langle G_1, G_0+G_z\rangle,\ \langle G_0, G_1, G_z\rangle,\ \langle G_0+G_z, P_0+P_z\rangle,$
$\langle G_0+G_z, G_1, P_0+P_z\rangle,\ \langle G_0+G_z, G_1, P_1, P_0+P_z\rangle,$
$\langle G_0+G_z, P_1, P_0+P_z\rangle,\ \langle G_0, G_1, G_z, P_0+P_z\rangle, \langle G_0, G_1, G_z, P_1, P_0+P_z\rangle;$

$\langle J_{0z}-2D, H+G_0-G_z, T, P_0, P_1, P_z\rangle :\ \langle\theta\rangle,\ \langle G_0+G_z\rangle,\ \langle G_1, G_0+G_z\rangle;$

$\langle J_{02}+2D, H+P_0-P_2, T\rangle$: $\sim\langle\theta\rangle$, $\sim\langle P_0+P_2\rangle$, $\sim\langle P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2, P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_1, G_0+G_2, P_1, P_0+P_2\rangle$;

$\langle J_{02}+2D, H+P_0, P_0+P_2\rangle$: $\langle G_0+G_2\rangle$, $\langle G_1, G_0+G_2\rangle$, $\langle G_0, G_1, G_2\rangle$, $\langle P_1, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_1, G_1, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_1, G_0, G_1, G_2\rangle$;

$\langle J_{02}+2D, H+P_0, T, P_0+P_2\rangle$: $\sim\langle\theta\rangle$, $\langle G_0+G_2\rangle$, $\langle P_1, G_1, G_0+G_2\rangle$;

$\langle J_{02}-2D, H+G_0, G_0+G_2, T, P_0, P_1, P_2\rangle$: $\langle\theta\rangle$, $\langle G_1\rangle$;

$\langle J_{02}+D+P_0, H, P_1, P_0+P_2\rangle$: $\langle G_0+G_2\rangle$, $\langle G_1, G_0+G_2\rangle$, $\langle G_0, G_1, G_2\rangle$;

$\langle J_{02}+D+P_0, T, H, P_1, P_0+P_2\rangle$: $\sim\langle\theta\rangle$, $\langle G_0+G_2\rangle$, $\langle G_1, G_0+G_2\rangle$;

$\langle J_{02}-D+G_0, T, H, G_1, G_0+G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$; $\sim\langle J_{02}-D+P_0+P_2, H, T\rangle$;

$\langle J_{02}-D+P_0+P_2, H\rangle$: $\sim\langle G_0+G_2\rangle$, $\sim\langle G_1, G_0+G_2\rangle$, $\langle G_0, G_1, G_2\rangle$;

$\langle J_{02}+D+G_0+G_2, H, T, P_0+P_2\rangle$: $\sim\langle\theta\rangle$, $\sim\langle P_1\rangle$, $\langle P_0, P_1\rangle$;

$\langle J_{02}+D+G_0+G_2+\alpha P_0, H, T, P_1, P_0+P_2\rangle$;

$\langle J_{12}+S+T+\alpha(P_1+G_2)\rangle$: $\langle P_0, G_0\rangle$, $\langle P_0, G_0, P_1-G_2, P_2+G_1\rangle$.

Подалгебры алгебры $A\tilde{G}_3(1,2)$

с точностью до $\tilde{G}_3(1,2)$-сопряженности исчерпываются подалгебрами алгебры $A\tilde{G}(3,2)$ [56], алгебрами вида $\langle M\rangle \oplus A$, где A – подалгебра алгебры $AG_3(1,2)$, подалгебрами алгебры $AG_3(1,2)$, отмеченными знаком $\sim$ и такими алгебрами:

$\langle J_{02}+\alpha M\rangle$: $\langle 0\rangle$, $\langle P_0+P_2\rangle$, $\langle P_1\rangle$, $\langle P_0, P_2\rangle$, $\langle P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_1\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_1, P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$;

$\langle J_{12}+\alpha M\rangle$: $\langle P_0\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0, G_1, G_2\rangle$;

$\langle H+M\rangle$: $\langle 0\rangle$, $\langle P_0+P_2\rangle$, $\langle P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_1; P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle G_0+G_2+P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2\pm P_2, P_1, P_0+P_2\rangle$;

$\langle J_{02}+\alpha M, H\rangle$: $\langle 0\rangle$, $\langle P_0+P_2\rangle$, $\langle P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_1, P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$;

$\langle T\pm M\rangle$: $\langle P_0\rangle$, $\langle P_0, P_2\rangle$, $\langle P_0+P_2\rangle$, $\langle P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2, P_0+P_2, P_1\rangle$, $\langle G_0+G_2+\alpha P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2+\alpha P_0, P_0+P_2\rangle$, $\langle G_0+G_2+\alpha P_0, P_0+P_2, P_1\rangle$;

$\langle D+\alpha M\rangle$: $\langle P_0\rangle$, $\langle P_0, P_2\rangle$, $\langle P_0+P_2\rangle$, $\langle P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0, G_1\rangle$, $\langle P_0, P_2, G_1\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, P_1, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0+P_2, G_0+G_2+\alpha G_1\rangle$;

$\langle S+T+\alpha M\rangle$: $\langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle$, $\langle P_0+G_1, P_1-G_0\rangle$;

$\langle D+\alpha M, T\rangle$: $\langle P_0\rangle$, $\langle P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0, P_2\rangle$, $\langle P_1, P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2\rangle$,

$$\langle P_0+P_2,\, G_0+G_2\rangle,\ \langle P_1,\, P_0+P_2,\, G_0+G_2\rangle;$$

$$\left.\begin{matrix}\langle J_{02}+T+\alpha M\rangle\\ \langle J_{02},\, T\pm M\rangle\\ \langle J_{02}+\alpha M,\, T\rangle\\ \langle J_{02}+\alpha M,\, T\pm M\rangle\end{matrix}\right\}: \begin{matrix}\langle\Theta\rangle,\ \langle P_0+P_2\rangle,\ \langle P_1\rangle,\ \langle P_0, P_2\rangle,\ \langle P_1,\, P_0+P_2\rangle,\\ \langle P_0, P_1, P_2\rangle,\ \langle P_0+P_2,\, G_0+G_2\rangle,\ \langle P_1,\, P_0+P_2,\, G_0+G_2\rangle;\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}\langle J_{12}+T+\alpha M\rangle,\ \langle J_{12},\, T\pm M\rangle,\\ \langle J_{12}+\alpha M,\, T\rangle,\ \langle J_{12}+\alpha M,\, T\pm M\rangle\end{matrix}\right\}: \langle P_0\rangle,\ \langle P_0, P_1, P_2\rangle;$$

$$\left.\begin{matrix}\langle H+T\pm M\rangle\\ \langle H+M,\, T\pm M\rangle\\ \langle H,\, T\pm M\rangle\\ \langle H+M,\, T\rangle\end{matrix}\right\}: \begin{matrix}\langle\Theta\rangle,\ \langle P_0+P_2\rangle,\ \langle P_1,\, P_0+P_2\rangle,\ \langle P_0, P_1, P_2\rangle,\\ \langle P_0+P_2,\, G_0+G_2\rangle,\ \langle P_1,\, P_0+P_2,\, G_0+G_2\rangle,\\ \langle G_0+G_2+\alpha P_1,\, P_0+P_2\rangle,\ \langle G_0+G_2+\alpha P_0,\, P_1,\, P_0+P_2\rangle;\end{matrix}$$

$$\langle H+T\pm M\rangle : \langle G_0+G_2-P_1\rangle,\ \langle G_0+G_2+\tfrac{1}{2}P_1,\, P_0+P_2,\, 2G_1-P_0\rangle;$$

$$\left.\begin{matrix}\langle J_{02}+T+\alpha M,\, H\rangle\\ \langle J_{02}+\alpha M,\, T\pm M,\, H\rangle\\ \langle J_{02}+\alpha M,\, T,\, H\rangle\\ \langle J_{02},\, T\pm M,\, H\rangle\end{matrix}\right\}: \begin{matrix}\langle\Theta\rangle,\ \langle P_0+P_2\rangle,\ \langle P_1,\, P_0+P_2\rangle,\ \langle P_0, P_1, P_2\rangle,\\ \langle P_0+P_2,\, G_0+G_2\rangle,\ \langle P_1,\, P_0+P_2,\, G_0+G_2\rangle;\end{matrix}$$

$$\langle J_{01},\, J_{02},\, J_{12},\, T\pm M\rangle : \langle\Theta\rangle,\ \langle P_0, P_1, P_2\rangle;$$

$$\left.\begin{matrix}\langle J_{02}+\alpha\mathbb{D}+\beta M\rangle\\ \langle J_{02}+\alpha M,\, \mathbb{D}+\beta M\rangle\\ \langle J_{02}+\alpha M,\, \mathbb{D}\rangle\\ \langle J_{02},\, \mathbb{D}+\alpha M\rangle\end{matrix}\right\}: \begin{matrix}\langle\Theta\rangle,\ \langle P_0+P_2\rangle,\ \langle P_1\rangle,\ \langle P_1,\, P_0+P_2\rangle,\\ \langle P_0, P_2\rangle,\ \langle P_0, P_1, P_2\rangle,\ \langle P_0+P_2,\, G_0+G_2\rangle,\\ \langle P_0+P_2,\, G_1\rangle,\ \langle P_0, P_2, G_1\rangle,\ \langle P_1,\, P_0+P_2,\, G_0+G_2\rangle;\end{matrix}$$

$$\langle J_{02}+\mathbb{D}+\alpha M,\, P_0-P_2\pm(G_0+G_2)\rangle : \langle\Theta\rangle,\ \langle P_1\rangle,\ \langle P_0+P_2\rangle,$$
$$\langle P_1,\, P_0+P_2\rangle,\ \langle P_0+P_2,\, G_1\rangle;$$

$$\langle 2J_{02}+\mathbb{D}+\alpha M,\, P_0-P_2-G_1\rangle : \langle\Theta\rangle,\ \langle P_0+P_2\rangle,\ \langle G_0+G_2-2P_1\rangle,$$
$$\langle G_0-G_2\rangle,\ \langle G_0+G_2-2P_1,\, G_0-G_2\rangle;$$

$$\langle J_{02}+\mathbb{D}+\alpha M,\, H,\, P_0-P_2\pm(G_0+G_2),\, P_1,\, P_0+P_2\rangle;$$

$$\left.\begin{array}{l}\langle J_{12}+\alpha D+\beta M\rangle,\ \langle J_{12}+\alpha M,\ D+\beta M\rangle,\\ \langle J_{12}+\alpha M,\ D\rangle,\ \langle J_{12},\ D+\alpha M\rangle\end{array}\right\}:\ \langle P_0\rangle,\ \langle P_1, P_2, G_0\rangle;$$

$$\left.\begin{array}{l}\langle H+D+\alpha M\rangle,\ \langle H+M,\ D\rangle\\ \langle H,\ D+\alpha M\rangle,\ \langle H+M,\ D+\alpha M\rangle\\ \langle J_{02}+\alpha D+\beta M,\ H\rangle,\ \langle J_{02}+\alpha M,\ D,\ H\rangle\\ \langle J_{02},\ D+\alpha M,\ H\rangle,\ \langle J_{02}+\alpha M,\ D+\beta M,\ H\rangle\end{array}\right\}:\ \begin{array}{l}\langle \Theta\rangle,\ \langle P_0+P_2\rangle,\ \langle P_1, P_0+P_2\rangle,\\ \langle P_0, P_1, P_2\rangle,\ \langle P_0+P_2,\ G_0+G_2\rangle,\\ \langle P_1,\ P_0+P_2,\ G_0+G_2\rangle;\end{array}$$

$$\langle J_{01}, J_{02}, J_{12}, D+\alpha M\rangle:\ \langle \Theta\rangle,\ \langle P_0, P_1, P_2\rangle;$$

$$\langle 2J_{02}+D+\alpha M,\ H\rangle:\ \langle \Theta\rangle,\ \langle G_0+G_2-P_1,\ P_0+P_2\rangle;$$

$$\left.\begin{array}{l}\langle J_{02}+\alpha D+\beta M,\ T\rangle\\ \langle J_{02}+\alpha M,\ D+\beta M,\ T\rangle\\ \langle J_{02}+\alpha M,\ D,\ T\rangle\\ \langle J_{02},\ D+\alpha M,\ T\rangle\end{array}\right\}:\ \begin{array}{l}\langle \Theta\rangle,\ \langle P_1\rangle,\ \langle P_0+P_2\rangle,\ \langle P_1, P_0+P_2\rangle,\\ \langle P_0, P_2\rangle,\ \langle P_0, P_1, P_2\rangle,\ \langle P_0+P_2,\ G_0+G_2\rangle,\\ \langle P_1,\ P_0+P_2,\ G_0+G_2\rangle;\end{array}$$

$$\langle 2J_{02}+D+\alpha M,\ T,\ G_0+G_2-P_1,\ P_0+P_2\rangle;$$

$$\langle 2J_{02}+D+\alpha M,\ H,\ T,\ G_0+G_2-P_1,\ P_0+P_2\rangle;$$

$$\langle 2J_{02}+D+\alpha M,\ H+T\rangle:\ \begin{array}{l}\langle \Theta\rangle,\ \langle G_0+G_2-P_1\rangle,\ \langle G_0+G_2-P_1,\ P_0+P_2\rangle,\\ \langle G_0+G_2+\tfrac{1}{2}P_1,\ 2G_1-P_0,\ P_0+P_2\rangle,\ \langle P_0+P_2\rangle,\\ \langle P_1,\ P_0+P_2\rangle,\ \langle P_0+P_2,\ G_0+G_2\rangle,\ \langle P_0, P_1, P_2\rangle,\\ \langle P_1,\ P_0+P_2,\ G_0+G_2\rangle;\end{array}$$

$$\langle J_{02}+D,\ T,\ P_0-P_2\pm(G_0+G_2),\ P_0+P_2\rangle:\ \langle \Theta\rangle,\ \langle P_1\rangle;$$

$$\left.\begin{array}{l}\langle J_{12}+\alpha D+\beta M,\ T\rangle,\ \langle J_{12}+\alpha M,\ D,\ T\rangle\\ \langle J_{12}+\alpha M,\ D+\beta M,\ T\rangle,\ \langle J_{12},\ D+\alpha M,\ T\rangle\end{array}\right\}:\ \langle P_0\rangle;$$

$$\langle J_{01}, J_{02}, J_{12}, T,\ D+\alpha M\rangle:\ \langle \Theta\rangle,\ \langle P_0, P_1, P_2\rangle;$$

$$\langle H+T+\alpha G_0,\ G_0+G_2-P_1\rangle;\ \langle H+T+G_1,\ P_0+P_2\rangle:\ \langle \Theta\rangle,\ \langle G_0+G_2\rangle;$$

$$\left.\begin{array}{l}\langle H+D+\alpha M, T\rangle,\ \langle J_{02}+\alpha D+\beta M, H, T\rangle\\ \langle H+M, D+\alpha M, T\rangle,\ \langle J_{02}+\alpha M, D+\beta M, H, T\rangle\\ \langle H+M, D, T\rangle,\ \langle J_{02}+\alpha M, D, H, T\rangle\\ \langle H, D+\alpha M, T\rangle,\ \langle J_{02}, D+\alpha M, H, T\rangle\end{array}\right\}:\ \begin{array}{l}\langle\theta\rangle, \langle P_0+P_2\rangle,\\ \langle P_1, P_0+P_2\rangle, \langle P_0, P_1, P_2\rangle,\\ \langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle,\\ \langle P_1, P_0+P_2, G_0+G_2\rangle;\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\langle J_{02}+\alpha(S+T)+\beta M\rangle, \langle J_{02}+\alpha M, S+T+\beta M\rangle, \langle J_{02}, S+T+\alpha M\rangle\\ \langle J_{02}+\alpha M, S+T\rangle, \langle H+S+T+\alpha M\rangle, \langle H+M, S+T+\alpha M\rangle\\ \langle H+M, S+T\rangle, \langle H, S+T+\alpha M\rangle, \langle J_{02}+\alpha(S+T)+\beta M, H\rangle\\ \langle J_{02}+\alpha M, S+T+\beta M, H\rangle, \langle J_{02}, S+T+\beta M, H\rangle, \langle J_{02}+\alpha M, S+T, H\rangle\end{array}\right\}:\ \begin{array}{l}\langle\theta\rangle,\\ \langle P_0+P_2,\\ G_0+G_2\rangle,\end{array}$$

$\langle J_{02}+P_1, T+\alpha M\rangle : \langle\theta\rangle, \langle P_0+P_2\rangle, \langle P_0, P_2\rangle, \langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle;$

$\langle J_{12}+P_0, T+\alpha M\rangle : \langle\theta\rangle, \langle P_1, P_2\rangle;$

$\langle H+P_0, T+\alpha M\rangle : \langle\theta\rangle, \langle P_0+P_2\rangle, \langle P_1, P_0+P_2\rangle, \langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle,$
$\langle P_1, P_0+P_2, G_0+G_2;$

$\langle J_{02}+P_1, H, T+\alpha M, P_0+P_2\rangle;$

$\langle J_{02}+\alpha M, T+G_1\rangle : \langle\theta\rangle, \langle P_0+P_2\rangle, \langle P_0, P_2\rangle, \langle P_0+P_2, G_0+G_2\rangle;$

$\langle J_{12}+\alpha M, T+G_0\rangle : \langle\theta\rangle, \langle P_1, P_2\rangle;$

$\langle H+M, T+G_0+G_2\rangle : \langle\theta\rangle, \langle P_0+P_2\rangle, \langle P_1, P_0+P_2\rangle;$

$\langle H+M, T+G_1, G_0+G_2, P_0+P_2\rangle;$

$$\left.\begin{array}{l}\langle J_{02}+2D+\alpha M, H+P_0-P_2\rangle\\ \langle J_{02}+2D+\alpha M, H+P_0-P_2, T\rangle\end{array}\right\}: \langle\theta\rangle, \langle P_0+P_2\rangle, \langle P_1, P_0+P_2\rangle;$$

$\langle J_{02}+2D+\alpha M, H+P_0, P_0+P_2\rangle;$

$\langle J_{02}+D+P_0+\alpha G_0, P_0-P_2+\alpha(G_0+G_2)\rangle : \langle\theta\rangle, \langle P_1\rangle, \langle G_1\rangle.$