ОРДЕНА ЛЕНИНА АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКАЯ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

А . Г. Н И К И Т И Н

НЕЛАГРАНЖЕВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЧАСТИЦ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико - математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
В.И ФУЩИЧ

КИЕВ - 1 9 7 4

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

После открытия Дираком [1] уравнения для электрона прошло уже почти полвека. И всё это время не прекращаются интенсивные исследования, посвящённые релятивиатским уравнениям для частиц с произвольным спином. Сейчас эти исследования приобретают особую актуальность ввиду экспериментального открытия большого числа относительно стабильных частиц и их резонансов с различными спинами и массами. Вместе с тем есть все основания утверждать, что до настоящего времени не найдено удовлетворительных уравнений для частиц со спином $S > 1$.

Для того, чтобы уравнения движения невзаимодействующих релятивистских частиц представляли не только теоретический, но и практический интерес, они должны допускать обобщение на случай заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле, а также могли служить основой для построения квантовой теории поля. К сожалению, все известные до сих пор уравнения для частиц с $S > 1$ приводят к большим трудностям как при описании взаимодействия, так и при вторичном квантовании. Рассмотрим коротко основные типы релятивистских уравнений и обсудим причины этих трудностей.

Долгое время основным постулатом в теории релятивистских уравнений было требование явной ковариантности. Это требование состоит в том что уравнение должно быть лоренц-инвариантным и симметричным по пространственным и временной координатам. Явно ковариантными являются уравнения Дирака-Фирца-Паули [2], де Бройля [3], Кеммера -Дуффина-Петье, Баргмана-Вигнера и другие [4]. Общие методы построения таких уравнений развиты в работах Хариш-Чандры [5], Гельфанда, Яглома [6], Боргардта [7], Персея [8], Умезавы [9].

Однако существуют уравнения, которые, не будучи явно ковариантными, являются тем не менее релятивистски инвариантными. Широковым [10], а позднее Фолди [11] было замечено, что требование явной ковариантности не является необходимым и может быть заменено более слабым условием, состоящем в том, что совокупность решений релятивистского уравнения должна образовывать пространство представления группы Пуанкаре $P(1,3)$. К таким неявно ковариантным" относятся уравнения Широкова [10], ФФолди [11], Сакаты-Такетани [12], Йордана-Мукунды [13], Вивера-Хаммера-Гуда-Метьюза [14], [17].

Не вдаваясь в детальную характеристику перечисленных уравнений, мы остановимся на некоторых их характерных особенностях.

1. Явно ковариантные уравнения симметричны по пространственным и временной координатам и локально ковариантны. Последнее означает, что при преобразованиях Лоренца

$$x_\mu \to x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu \tag{1}$$

закон преобразования решений этих уравнений имеет вид

$$\Psi'(x'_\mu) = \mathcal{D}(\Lambda)\,\Psi(x_\mu) \tag{2}$$

где $\mathcal{D}(\Lambda)$ - матрица, зависящая только от параметров преобразования и являющаяся элементом неунитарного конечномерного представления группы Лоренца $O(1,3)$. Представления группы Лоренца приводимы относительно группы трёхмерных вращений $O(3)$, и поэтому явно ковариантные уравнения описывают в общем случае сразу несколько спинов [2]. Это приводит к наличию в уравнениях лишних (нефизических) компонент. Например, уравнение Кеммера-Дуффина-Петье для частиц с $S=1$ десятикомпонентно, хотя частица и античастица со спином 1 имеют только шесть степеней свободы. А уравнение, предлагаемое Хагеном [21] для поля со спином 2 имеет 50 компонент, среди которых 40 „лишних".

Наличие нефизических компонент и необходимость в дополнительных условиях для их отбора приводят к серьёзным трудностям при обобщении явно ковариантных уравнений на случай заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле. Так, системы уравнений Дирака-Фирца-Паули, Баргмана-Вигнера, де Бройля при замене $p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$, A_μ - вектор-потенциал электромагнитного поля становятся несовместными [22], [4].

Существуют, правда, уравнения, свободные от указанного недостатка Кеммера-Дуффина-Петье, Рариты-Швингера, Прока [24] и некоторые други Но эти уравнения приводят к не менее сложным противоречиям. Так, Вело и Цванзингер [25] показали, что уравнение Рариты-Швингера для частиц со спином $\frac{3}{2}$ во внешнем электромагнитном поле имеет решения, соответствующие сверхсветовой скорости. Вело [28] показал, что такая же ситуация имеет место и в теории частиц со спином 2. В [26] - [27] замечено, что уравнения Прока и Кеммера-Дуффина-Петье для частицы со спином 1 и аномальным магнитным моментом в однородном магнитном поле приводя к комплексным энергиям. Наконец, в [29] показано, что к сверхсветовым скоростям приводят все известные явно ковариантные уравнения первого порядка по $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$, если рассматривать движение частиц со спином $S > 1$ в произвольном внешнем поле.

Новые трудности возникают при вторичном квантовании уравнений с лишними компонентами. Джонсон и Судершан [30] заметили, что каноническое квантование уравнения Рариты-Швингера для частицы со спином во внешнем электромагнитном поле приводит к неположительно определённым антикоммутаторам полей, что несовместимо с положительно определённой метрикой. Хаген [31] показал, что такой же результат получается и в том случае, если рассматривать взаимодействие частицы с $S = \frac{3}{2}$ со спинорным и скалярным полями. В [32] было продемонстрировано, что с аналогичными проблемами приходится сталкиваться и при квантовании уравнения Баба. Основная причина этих трудностей состоит в том, что компоненты полей с высшими спинами не являются независимыми, поскольку на них налагаются дополнительные условия, устраняющие нефизические компоненты.

Чтобы избавиться от лишних компонент, Йосс [33] и Вайнберг[34] предложили использовать поля, преобразующиеся по представлению $D(0,S)\oplus \oplus D(S,0)$ группы Лоренца. Уравнения для частиц с произвольным спином , найденные в[33] и [34], явно ковариантны, но содержат производные по времени порядка $2S$. При $S > \frac{1}{2}$ функция Грина уравнения Йосса-Вайнберга содержит полюса, соответствующие нефизическим частицам [29], как указал Вайтман [29] , это приводит к нарушению унитарности S - матрицы.

Все упомянутые (и многие другие [35] - [38]) трудности возникают из-за того, что перечисленные выше уравнения либо содержат лишние компоненты, либо включают производные по времени выше первого порядка. Приведение таких уравнений к канонической форме Шредингера даже в случае свободного поля требует построения специальных алгебраических методов[7], [41] - [43] , а иногда вообще бывает невозможным.

. В случае взаимодействующих полей ситуация ещё более осложняется. Так, введение аномального магнитного момента в уравнения Кеммера-Дуффина-Петье и Прока, по-видимому, приводит к тому, что гамильтониан частицы становится неэрмитовым(а значения энергии - комплексными) . Требование эрмитовости гамильтониана существенно ограничивает возможные типы взаимодействия. Однако вопрос о том, как сформулировать это требование в случае явно ковариантных уравнений пока остаётся открыты

2. Ввиду неудовлетворительности всех известных до настоящего времени явноковариантных уравнений для $S > 1$ в последние годы большое внимание уделяется развитию неявно ковариантного подхода в теории частиц с произвольным спином. Вивер, Хаммер и Гуд[14] предложили исполь

зовать для описания частицы со спином s уравнение в форме Шредингера

$$H_s \Psi(t,\vec{x}) = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\vec{x}), \tag{3}$$

где $\Psi(t,\vec{x})$ – $2(2s+1)$ -компонентная волновая функция. Из-за выделенности производной по времени уравнения вида (3) нельзя считать явно ковариантными. Тем не менее уравнения, найденные в [14], пуанкаре-инвариантны, причём на множестве их решений генераторы группы $P(1,3)$ имеют вид

$$P_0 = H_s, \quad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a},$$
$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \tag{4}$$

где $S_{\mu\nu}$ – генераторы представления $D(0,s)\oplus D(s,0)$ группы Лоренца. Иными словами, выполняются соотношения

$$\left[H_s - i\frac{\partial}{\partial t}, Q_i\right]\Psi(t,\vec{x}) = 0, \tag{5}$$

где Q_i – произвольный генератор из представления (4). Из (5) следует инвариантность (3) относительно любых конечных преобразований группы Пуанкаре.

В [14] найден явный вид гамильтонианов H_s для $s \le \frac{3}{2}$. Вильямс, Драйвер и Вебер [15] обобщили результаты [14] на случай произвольного спина. Наиболее полно задача о нахождении всех возможных пуанкаре-инвариантных уравнений вида (3) в представлении (4) решена в работах Метьюза с сотрудниками [17] - [20].

Наряду с очевидными достоинствами (отсутствие лишних компонент, каноническая форма уравнений) теория Вивера-Хаммера-Гуда-Метьюза имеет серьёзные недостатки. Гамильтонианы H_s для $s > \frac{1}{2}$ имеют сложную структуру, что затрудняет обобщение уравнений (3) на случай частицы во внешнем поле. Скалярное произведение для решений уравнения (3) имеет вид [20]

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\, \Psi_1^\dagger \hat{M} \Psi_2, \tag{6}$$

где $\hat{M}$ — некоторый метрический оператор, зависящий от импульсов. Это обстоятельство затрудняет квантовомеханическую интерпретацию $\Psi(t, \vec{x})$. Кроме того, метрический оператор $\hat{M}$ не имеет удовлетворительного предела при $\frac{p}{m} \to \infty$ (p — импульс, m — масса частицы) [46], следовательно, найденные в [14], [17] уравнения непригодны для описания ультрарелятивистских и безмассовых частиц.

Метьюз [19] рассмотрел вопрос о вторичном квантовании уравнений, полученных в [14], [17], [18], и показал, что для получения причинной перестановочной функции в случае полуцелых S, необходимо использовать гамильтонианы Бивера-Хаммера-Гуда [14], а в случае целого спина — гамильтонианы, предложенные в [18]. Однако, как отмечалось в [47], [48], в случае целых S эти гамильтонианы приводят к пуанкаре-неинвариантным уравнениям (3). Следовательно, уравнения, полученные в [14], [17]-[20] могут служить основой для построения квантовой теории поля только в случае полуцелого спина.

В связи с изложенным выше естественно возникает вопрос: существуют ли релятивистские уравнения вида (3) без лишних компонент, свободные от перечисленных недостатков? Результаты, полученные в диссертации, позволяют ответить на этот вопрос положительно.

3. Особое место в теории элементарных частиц занимают уравнения для частиц с нулевой массой. Интерес к этим уравнениям обусловлен тем обстоятельством, что они могут быть использованы не только для описания безмассовых частиц (что, конечно, важно и само по себе), но и ультрарелятивистских частиц с отличной от нуля массой m. Хорошо известно, что релятивистские уравнения для частиц с отличной от нуля массой в общем случае не допускают предельного перехода $m \to 0$ [46], поэтому описание частиц с $m=0$ представляет собой отдельную задачу.

Решению этой задачи посвящено большое колличество работ, появившихся в последние годы [49]-[55]. Предложено множество различных (не всегда неэквивалентных) уравнений для частиц нулевой массы и в то же время описаны не все возможные в рамках группы Пуанкаре существенно различные типы таких уравнений. Так, например, в [89] мы показали, что уравнения, полученные в [54] и [55], эквивалентны уравнениям Дирака и Вейля соответственно. В [89] также были найдены все неэквивалентные пуанкаре-инвариантные уравнения для безмассовых частиц со спином $s=\frac{1}{2}$ и исследованы их свойства относительно преобразований отражения пространственных координат P , зарядового сопряжения C и обращения времени T . В диссертации результаты [89] обобщены на случай произвольного спина.

4. Одной из самых плодотворных идей в физике элементарных частиц является предположение, что различные частицы можно рассматривать как состояния некоторой единой физической системы. Эта идея лежит в основе классификации адронов на базе $SU(3)$-симметрии сильных взаимодействий. Поэтому естественный интерес вызывает задача о построении релятивистских уравнений для „частицы", которая может находиться в различных спиновых и массовых состояниях.

Имеются разнообразные подходы к этой проблеме. Майорана [58], а позже Гельфанд и Яглом [6], используя бесконечномерные унитарные представления однородной группы Лоренца $O(1,3)$, построили основы теории уравнений, описывающих частицу с бесконечным числом спиновых состояний (о современном положении в этой теории см., например, в [9]). В других работах [59]-[61] предполагается, что волновая функция такой частицы обладает помимо трёх пространственных переменных ещё некоторым числом дополнительных переменных (внутренние степени свободы), и на этой основе строятся релятивистские уравнения для частиц с переменными спином и массой (например, для частиц типа ротатора). Расширяя четырёхмерное пространство Минковского до пятимерного и используя представления неоднородной группы де Ситтера $P(1,4)$, содержащей в качестве подгруппы группу Пуанкаре $P(1,3)$, в [62] найдены уравнения, которые можно интерпретировать как уравнения движения для частицы (или системы двух частиц) с переменным дискретным спином и переменной (непрерывной) массой. Причём, в отличие от вышеуказанных работ [58]-[61], где частица всегда имеет бесконечное число спиновых состояний, в рамках группы $P(1,4)$ частица обладает только конечным числом спиновых состояний. Это связано с тем, что любое неприводимое представление группы $O(4)$ (малой группы группы $P(1,4)$) раскладывается в конечную прямую сумму неприводимых представлений группы вращений $O(3)$. Как будет видно из результатов настоящей диссертации, расширение четырёхмерного пространства до пятимерного не является необходимым, и уравнения для частиц с конечным числом спиновых состояний могут быть получены в рамках группы $P(1,3)$.

Изложенные выше факты позволяют сформулировать следующие задачи, которые представляются нам весьма актуальными:

а) нахождение релятивистских уравнений без лишних компонент в форме Шредингера (3) для частиц с произвольным фиксированным спином и отличной от нуля массой. Эти уравнения должны быть определены в пространстве $2(2s+1)$-компонентных функций с обычным принятым в квантовой механике скалярным произведением (см. ниже (1.4 гл. I)), иметь разумный предел при $m \to 0$ и допускать обобщение на случай заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле - иными словами, не иметь недостатков, перечисленных в п.2., стр. 1-4;

б) определение всех возможных неэквивалентных уравнений для части нулевой массы и произвольной спиральности,

в) построение в рамках группы $P(1,3)$ уравнений без лишних компонент для частиц с переменными спином и массой,

г) нахождение новых явно ковариантных уравнений для частиц с произвольным спином, которые, в отличие от упоминаемых в п.1 обычно принятых уравнений, не приводили бы к противоречиям при описании взаимодействия и при вторичном квантовании в случае $s > \frac{1}{2}$.

Решению этих задач и посвящена настоящая диссертация. При решении всех перечисленных задач используется единый подход, который мы называем алгебраическим или неспинорным. Суть этого подхода состоит в том, что по заданным операторам P_a, $J_{\mu\nu}$, используя коммутационные соотношения алгебры $P(1,3)$, находится неизвестный гамильтониан $P_0 = H$ такой, чтобы совокупность операторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ образовывала алгебру Пуанкаре. Это позволяет получить принципиально новые результаты по сравнению с традиционным спинорным подходом, который формулируется в терминах представлений группы $O(1,3) \subset P(1,3)$ (см., например, [63]).

В диссертации получены следующие результаты.

1. Исходя из определённого представления алгебры $P(1,3)$ (совпадающего для $s = \frac{1}{2}$ с тем, которое реализуется на решениях уравнения Дирака), найдены все возможные (с точностью до эквивалентности) релятивистские уравнения вида (3) без лишних компонент, описывающие частицу с в общем случае переменным спином s и массой m_s, которая может принимать конечное число значений, зависящих от s. Эти уравнения удовлетворяют все требованиям, перечисленным в п.а) на предыдущей странице.

2. Полученные уравнения обобщены на случай заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле при условии, что импульсы частиц малы по сравнению с массами. Вычислены значения электромагнитных моментов (дипольного, квадрупольного, спин-орбитального) для частиц произвольного (в том числе и переменного) спина.

3. Найдены все неэквивалентные уравнения для безмассовых частиц произвольного спина и исследованы свойства этих уравнений относительно преобразований P, T, C. Отмечено, что существуют пуанкаре-инвариантные уравнения, которые не инвариантны относительно преобразования $C \cdot P \cdot T$

4. Найдены новые явно ковариантные уравнения для частиц с произвольным спином и отличной от нуля массой. Эти уравнения имеют простую форму, которая не усложняется при переходе от s к $s+1$ и не приводят

в отличие от обычно используемых уравнений, к противоречиям, перечисленным в п.1, стр.1 – 4. Используя полученные уравнения, решена задача об определении спектра энергий частицы с произвольным спином в однородном магнитном поле. Показано, что уравнения Фейнмана-Гелл-Манна могут быть получены из найденных нами явно ковариантных уравнений.

5. Получено четырёхкомпонентное уравнение для заряженной бесспиновой частицы во внешнем поле. Это уравнение формально совпадает с уравнением Дирака, содержащим некоторый явно ковариантный дополнительный член.

6. Найдены операторы координаты, скорости и спина для частиц, описываемых уравнениями, полученными в диссертации, а также для частиц, описываемых уравнениями Рариты-Швингера.

Опишем коротко расположение материала. В I главе найдены уравнения без лишних компонент для частиц произвольного (в том числе и переменного) спина. В §§ 1.– 4 получены все неэквивалентные гамильтонианы H_s для частиц с фиксированным спином s, такие, что уравнение (3) инвариантно относительно преобразований из полной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$. В § 1 дано определение исходного представления алгебры $P(1,3)$ и найдены условия, которым должен удовлетворять H_s. В §2, исходя из коммутационных соотношений полной (включающей отражения) алгебры $\tilde{P}(1,3)$, определён явный вид операторов P и T. В §§3,4 найдены все возможные (с точностью преобразований эквивалентности, не зависящих от импульсов и координат) гамильтонианы H_s для произвольных s. В §5 отдельно рассмотрен случай частиц с нулевой массой. В §§6 – 8, изложен вывод уравнений вида (3) для частиц, которые могут находиться в конечном числе различных спиновых и массовых состояний. Наконец, в §9 полученные уравнения обобщены на случай заряженных частиц во внешнем поле.

С помощью несложного обобщения исходного представления алгебры $P(1,3)$, используемого в I главе, во второй главе диссертации для частиц с произвольным спином найдены явно ковариантные уравнения первого порядка по $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$. В §§ 1-2 приведен вывод этих уравнений на основе методов, развитых в гл. I. В §3 уравнения обобщаются на случай заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле. Показано, что из найденных уравнений могут быть получены хорошо известные уравнения Фейнмана-Гелл-Манна. В §4 решается задача о движении заряженной частицы с произвольным спином в однородном магнитном поле. Отмечается, что уравнения, найденные в главе II, не приводят к противоречиям, характерным для обычно используемых явно ковариантных уравнений, когда спин частицы $s \geq 1$. В §5 показано, что для описания бесспиновой частицы во внешнем электромагнитном поле можно использовать обычное четырёхкомпонентное уравнение Дирака, если добавить к нему некоторое явно ковариантное слагаемое.

Третья глава посвящена теоретико-групповому анализу уравнений, найденных в диссертации, а также уравнений Рариты-Швингера. В §§ 1-3 получены операторы динамических переменных для частиц, описываемых перечисленными уравнениями.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [87]-[92] и частично докладывались на Всесоюзном совещании по теории элементарных частиц, Ужгород, 1973.

В диссертации используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$. Индексы, обозначенные греческими буквами μ, ν, ρ, ..., пробегают значения 0, 1, 2, 3, а обозначенные латинскими буквами a, b, c, ..., принимают значения 1, 2, 3. Операции эрмитова сопряжения и комплексного сопряжения обозначаются значками $\dagger$ и $*$ соответственно.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность моему научному руководителю доктору физико-математических наук Вильгельму Ильичу Фущичу за постоянную и всестороннюю помощь при выполнении данной работы. Я благодарен также А.Л.Грищенко за сотрудничество в получении некоторых вошедших в диссертацию результатов и Ю.Н.Сегеде за проверку основных формул главы II.

ГЛАВА I

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ УРАВНЕНИЯ БЕЗ "ЛИШНИХ" КОМПОНЕНТ

В этой главе найдены пуанкаре-инвариантные уравнения в форме Шредингера (3) для свободной частицы с массой m и спином s. Рассмотрен случай фиксированных m и s и случай, когда частица может находиться в различных спиновых и массовых состояниях. В квазирелятивистском приближении описано движение заряженной частицы с произвольным (в общем случае переменным) спином во внешнем электромагнитном поле. Количество компонент в найденных уравнениях равно числу степеней свободы описываемой системы.

§ I. Постановка задачи для случая частиц с фиксированными спином и массой

Будем искать уравнения, описывающие частицу со спином s и массой m в виде (3)

$$H_s \Psi(t,\vec{x}) = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\vec{x}), \tag{I.I}$$

где H_s – неизвестный пока гамильтониан частицы, Ψ – волновая функция, имеющая $2(2s+1)$ компонент.

Для произвольного s постулируем явный вид генераторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ группы $P(1,3)$

$$P_0 = H_s,\quad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a},\quad a=1,2,3; \tag{I.2а}$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}; \tag{I.2б}$$

$$J_{0a} = t p_a - \frac{1}{2}\{x_a, H_s\},\quad \{x_a, H_s\} = x_a H_s + H_s x_a. \tag{I.2в}$$

Здесь S_{ab} - матрицы, имеющие следующую структуру

$$S_{ab} = S_{c} = \begin{pmatrix} \hat{S}_c & 0 \\ 0 & \hat{S}_c \end{pmatrix}, \ (a, b, c) - \text{цикл } (1, 2, 3). \qquad (I.3)$$

где $\hat{S}_c$ - генераторы неприводимого представления $D(s)$ группы $O(3)$, удовлетворяющие соотношениям

$$[\hat{S}_a, \hat{S}_b] = i\hat{S}_c, \qquad (I.4а)$$

$$\sum_a \hat{S}_a^2 = s(s+1). \qquad (I.4в)$$

Выбор представления алгебры $P(1,3)$ в форме (I.2) обусловлен следующими соображениями:

I. Генераторы (I.2) эрмитовы относительно обычного принятого в квантовой механике скалярного произведения

$$(\psi_1, \psi_2) = \int d^3x\, \psi_1^{+}(t, \vec{x})\, \psi_2(t, \vec{x}). \qquad (I.5)$$

Это означает, что $\psi(t, \vec{x})$ может быть дана обычная квантовомеханическая интерпретация.

2. В случае $s = \frac{1}{2}$ операторы (I.2) совпадают с генераторами представления группы Пуанкаре, по которому преобразуются решения уравнения Дирака. Мы обобщаем это представление на случай произвольного спина.

3. Как будет показано ниже, в представлении (I.2) операторы динамических переменных имеют достаточно простой вид. В частности, оператор координаты для частицы с произвольным спином выглядит так же, как оператор средней координаты для электрона, найденный Фолди и Вуйтхайзеном [98].

Уравнение (I.I) пуанкаре-инвариантно, если генераторы (I.2) удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $P(1,3)$, которые, как известно [65], имеют вид

$$[P_a, P_b] = 0, \ [P_a, I_{bc}] = i(\delta_{ab} P_c - \delta_{ac} P_b); \tag{I.6а}$$

$$[I_{ab}, I_{dc}] = i(\delta_{ac} I_{bd} + \delta_{bd} I_{ac} - \delta_{ad} I_{bc} - \delta_{bc} I_{ad}); \tag{I.6б}$$

$$[P_a, I_{ob}] = i\,\delta_{ab} P_o; \tag{I.6в}$$

$$[H_s, P_a] = [P_o, P_a] = 0; \tag{I.6г}$$

$$[H_s, I_{ab}] = [P_o, I_{ab}] = 0; \tag{I.6д}$$

$$[I_{ob}, I_{oc}] = i(\delta_{oc} I_{ob} - \delta_{bc} I_{oa}); \tag{I.6е}$$

$$[P_o, I_{oa}] = [H_s, I_{oa}] = i P_a; \tag{I.6ж}$$

$$[I_{oa}, I_{ob}] = -i I_{ab}. \tag{I.6з}$$

Действительно, из явного вида операторов (I.2) легко получить тождества

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}, P_a\right] = \left[i\frac{\partial}{\partial t}, I_{ab}\right] = 0; \tag{I.7а}$$

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}, I_{oa}\right] = i P_a. \tag{I.7б}$$

Сравнивая (I.7) и (I.6г), (I.6д), (I.6з), получаем соотношение

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - H_s, Q\right] \Psi(t, \vec{x}) = 0, \tag{I.8}$$

где Q - любой генератор группы $P(1,3)$ в представлении (I.2). Как уже отмечалось во введении, из (I.7) следует, что уравнение (I.I) инвариантно относительно произвольного преобразования из собственной группы Пуанкаре.

На множестве решений уравнения (I.I) определим обычным образом операторы пространственной инверсии P, отражения времени по Паули T и зарядового сопряжения C

$$P\Psi(t,\vec{x}) = r_1 \Psi(t, -\vec{x}); \tag{I.9а}$$

$$T\Psi(t,\vec{x}) = r_2 \Psi(-t, \vec{x}); \tag{I.9б}$$

$$C\Psi(t,\vec{x}) = r_3 \Psi^*(t, \vec{x}). \tag{I.9в}$$

Здесь r_1, r_2, r_3 - некоторые унитарные матрицы, явный вид которых будет найден ниже. Антиунитарный оператор отражения времени по Винеру эквивалентен произведению $C \cdot T$, поэтому мы его не рассматриваем.

Операторы P, T, C и генераторы P_μ, $I_{\mu\nu}$ должны удовлетворять соотношениям [11]

$$[P, I_{ob}] = 0; \tag{I.10а}$$

$$[P, P_0] = 0;$$

$$\{P, P_a\} = \{P, I_{oa}\} = 0; \tag{I.10б}$$

$$P^2 \sim 1, \tag{I.10г}$$

$$[T, I_{ob}] = 0; \tag{I.10д}$$

$$\{T, P_0\} = 0 ; \tag{I.10е}$$

$$[T, P_a] = \{T . I_{0a}\} = 0 ; \tag{I.10ж}$$

$$T^2 \sim 1 ; \tag{I.10з}$$

$$PT \sim TP ; \tag{I.10и}$$

$$\{C, P_0\} = \{C, P_a\} = \{C . I_{ab}\} = \{C . I_{0a}\} = 0 ; \tag{I.10к}$$

$$C^2 \sim 1 . \ CP \sim PC , \ CT \sim TC . \tag{I.10л}$$

Символ $\{A, B\}$ означает антикоммутатор A и B, а знак $\sim$ определяет равенство с точностью до фазового множителя; например

$$P^2 \sim 1 \rightarrow P^2 \Psi(t, \vec{x}) = e^{i\varphi} \Psi(t, \vec{x}) . \tag{I.10г}$$

Потребуем, чтобы уравнение (I.I) было P- и T- инвариантно. При этом к алгебре Пуанкаре (I.6) добавляются соотношения (I.10а–и).

Для того, чтобы уравнение (I.I) описывало частицу с фиксированной массой m, гамильтониан H_s должен удовлетворять условию

$$H_s^2 = P^2 + m^2 . \tag{I.II}$$

Итак, задача о нахождении всех релятивистских уравнений вида (I.I) для частицы с произвольным спином S и массой m, инвариантных относительно P- и T-преобразований, сводится к отысканию операторов H_s, удовлетворяющих соотношениям (I.6), (I.10а–и) (I.II). Мы увидим ниже, что уравнения, удовлетворяющие перечисленным условиям, автоматически оказываются также C-инвариантными.

Проанализируем соотношения (I.6) и выделим те из них, которые являются независимыми. Покажем, что система (I.6) сводится к следующим условиям для H_s

$$[H_s, P_a] = 0; \tag{I.12а}$$

$$[H_s, I_{ob}] = 0; \tag{I.12б}$$

$$[\vec{x}, H_s] \times [\vec{x}, H_s] = -4i\vec{S}, \tag{I.12в}$$

где символ $\vec{a} \times \vec{b}$ означает векторное произведение.
Для доказательства рассмотрим последовательно все соотношения (I.6). Из явного вида (I.2) генераторов P_μ, $I_{\mu\nu}$ следует, что (I.6а), (I.6б) выполняются тождественно.

Покажем, что (I.6в) является следствием (I.12а). Подставив (I.2) в левую часть (I.6в), получаем

$$[P_a, I_{ob}] = [P_a, tP_b - \tfrac{1}{2}\{x_b, H_s\}] = \\ = i\delta_{ab} H_s - \tfrac{1}{2}\{x_b, [P_a, H_s]\}. \tag{I.13}$$

Из (I.13) видно, что если $[P_a, H_s] = 0$ (т.е. имеет место (I.12а)), то условие (I.6в) выполняется автоматически.

Соотношения (I.6г), (I.6д) совпадают с (I.12а), (I.12б), поэтому мы рассмотрим следующее за (I.6д) условие (I.6е). Используя (I.2в), получаем

$$[I_{ab}, I_{oc}] = [I_{ob}, tP_c - \tfrac{1}{2}\{x_c, H_s\}] = \\ = t[I_{ob}, P_c] - \tfrac{1}{2}\{[I_{ob}, x_c], H_c\} - \tfrac{1}{2}\{x_c, [I_{ob}, H_s]\} = \\ = i(\delta_{ac} I_{ob} - \delta_{bc} I_{oa}) - \tfrac{1}{2}\{x_c, [I_{ab}, H_s]\}. \tag{1.14}$$

Из (I.14) видно непосредственно, что (I.6е) обращается в тождество, если выполняется (I.12б).

Покажем теперь, что и (I.6ж) выполняется тождественно, если имеют место соотношения (I.12а), (I.11). Для этого снова используем определение (I.2в) генератора I_{oa} и получим после элементарных преобразований, что

$$[H_s, I_{oa}] = [H_s, tp_a - \tfrac{1}{2}(x_a H_s + H_s x_a)] =$$
$$= -\tfrac{1}{2}[H_s(x_a H_s + H_s x_a) - (x_a H_s + H_s x_a)H_s] =$$
$$= -\tfrac{1}{2}(H_s^2 x_a - x_a H_s^2) = -\tfrac{1}{2}[p^2 + m_g^2\, x_a] = ip_a, \quad \text{(I.15)}$$

что и требовалось.

Осталось рассмотреть последнее условие – (I.6з). Из (I.2в) получаем после ряда тождественных преобразований

$$[I_{oa}, I_{ob}] = [tp_a - \tfrac{1}{2}\{x_a, H_s\}, tp_b - \tfrac{1}{2}\{x_b, H_s\}] =$$
$$= \tfrac{1}{4}[(x_a H_s + H_s x_a), (x_b H_s + H_s x_b)] = \tfrac{1}{4}(x_a H_s x_b H_s +$$
$$+ x_a H_s^2 x_b + H_s x_a x_b H_s + H_s x_a H_s x_b - x_b H_s x_a H_s -$$
$$- x_b H_s^2 x_a - H_s x_b x_a H_s - H_s x_b H_s x_a) = \tfrac{1}{4}(x_a H_s^2 x_b +$$
$$+ x_a H_s [x_b, H_s] + x_a H_s^2 x_b + H_s x_a x_b H_s + H_s x_a [H_s, x_b]$$
$$- x_b H_s^2 x_a - x_b H_s [x_a, H_s] - x_b H_s^2 x_a - H_s x_b x_a H_s -$$
$$- H_s x_b [H_s, x_a] = \tfrac{1}{4}\{2(x_a H_s^2 x_b - x_b H_s^2 x_a) +$$
$$+ [[x_a, H_s], [x_b, H_s]] = \tfrac{1}{4}\{2(x_a x_b H_s^2 + x_a [H_s^2, x_b] -$$

$$- x_b x_a H_s^2 - x_b [H_s^2, x_a] + [[x_a, H_s], [x_b, H_s]]\} =$$

$$= \frac{1}{4}\{2(x_a[P^2+m^2, x_b] - x_b[P^2+m^2, x_a] +$$

$$+ [[x_a, H_s], [x_b, H_s]] =$$

$$= -i(x_a P_b - x_b P_a) + \frac{1}{4}[[x_a, H_s], [x_b, H_s]]. \qquad (I.16)$$

Подставляя (I.16) в (I.6з), приходим к уравнению

$$[[x_a, H_s], [x_b, H_s]] = -4i S_{ab}, \qquad (I.17)$$

которое совпадает с (I.12б), но записано в тензорных обозначениях.

Итак, мы убедились, что все условия (I.6) удовлетворяются, если имеют место соотношения (I.11), (I.12), при этом уравнение (I.1) инвариантно относительно преобразований из собственной группы Пуанкаре. По предположению, уравнение (I.1) инвариантно также относительно отражений пространственных и временной координат. Согласно (I.10б), (I.10е), (I.2а) это означает, что должно выполняться

$$P H_s = H_s P; \qquad (I.18a)$$

$$T H_s = -H_s T. \qquad (I.18б)$$

Таким образом, мы получаем окончательно, что задача о нахождении всех возможных гамильтонианов H_s, при которых уравнение (I.1) Пуанкаре- и P-, T-инвариантно, сводится к решению системы соотношений (I.11), (I.12), (I.18).

Соотношения (I.18) включают операторы P и T, которые определены в (I.9а,б). При этом матрицы r_1 и r_2 в (I.9а,б) должны быть такими, чтобы выполнялись соотношения (I.10а-и). Явный вид этих матриц определен в следующем параграфе.

§ 2. Операторы P- и T-преобразований

Для решения поставленной задачи необходимо найти явный вид матриц r_1 и r_2, входящих в определения (I.9а,б) преобразований пространственной инверсии P и обращения времени T. В этом параграфе мы определим все возможные (с точностью до унитарной эквивалентности) матрицы r_1 и r_2, удовлетворяющие коммутационным соотношениям (I.10а-и).

Покажем, что для выполнения (I.10а)-(I.10г) не умаляя общности можно положить

$$r_1 = I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad r_1 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2.1)$$

где I - $(2S+1)$ - мерная единичная матрица.
Действительно, из (I.9а), (I.10а) следуют такие условия для

$$r_1 S_{об} = S_{об} r_1 . \qquad (2.2)$$

Для анализа соотношения (2.2) представим r_1 в виде

$$r_1 = \begin{pmatrix} r_1^{11} & r_1^{12} \\ r_1^{21} & r_1^{22} \end{pmatrix}, \qquad (2.3)$$

где $r_1^{\alpha\beta}$ - неизвестные матрицы размерности $(2S+1)\times(2S+1)$. Подставив (2.3), (I.3) в (2.2), получаем

$$\begin{pmatrix} r_1^{11}\hat{S}_c & r_1^{12}\hat{S}_c \\ r_1^{21}\hat{S}_c & r_2^{22}\hat{S}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{S}_c r_1^{11} & \hat{S}_c r_1^{12} \\ \hat{S}_c r_1^{21} & \hat{S}_c r_1^{22} \end{pmatrix}, \qquad (2.4)$$

откуда видно, что $r_1^{\alpha\beta}$ должны удовлетворять условиям

$$r_1^{\alpha\beta}\hat{S}_c = \hat{S}_c r_1^{\alpha\beta}\ ; \alpha,\beta = 1,2. \tag{2.5}$$

Но $\hat{S}_c$ – это генераторы неприводимого представления $\mathcal{D}(s)$ группы $O(3)$. В силу леммы Шура из (2.5) следует, что $r_1^{\alpha\beta}$ кратные единичной матрице, т.е.

$$r_1^{\alpha\beta} = k^{\alpha\beta}\cdot I, \tag{2.6}$$

где $k^{\alpha\beta}$ – числа, а I – $(2S+1)$-мерная единичная матрица.

Согласно (2.3), (2.6) r_1 можно представить в виде

$$r_1 = \sum_{\mu=0}^{3} c_\mu \sigma_\mu, \tag{2.7}$$

где σ_μ – матрицы Паули,

$$\sigma_0 = I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},\ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = i\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

а c_μ – числа, которые связаны с $k^{\alpha\beta}$ такими очевидными соотношениями

$$k^{11} = c_0 + c_3,\quad k^{22} = c_0 - c_3; \tag{2.9}$$
$$k^{12} = c_1 - ic_2,\quad k^{21} = c_1 + ic_2.$$

Потребуем теперь, чтобы выполнялось (I.10г). Согласно (I.9а), (I.10г) это означает, что

$$(r_1)^2 = e^{i\varphi}. \tag{2.10}$$

Подставив (2.7) в (2.10) и используя антикоммутативность σ_a, получаем

$$(r_1)^2 = \left(\sum_{\mu=0}^{3} \sigma_\mu c_\mu\right)^2 = \sum_{\mu=0}^{3} c_\mu^2 + 2\sum_{a=1}^{3} c_0 c_a \sigma_a = e^{i\varphi}. \quad (2.11)$$

Ввиду линейной независимости σ_μ для выполнения (2.11) необходимо и достаточно, чтобы имело место одно из следующих соотношений

$$c_0 = 0\,, \quad \sum_{a=1}^{3} c_a^2 = e^{i\varphi};$$

или (2.12)

$$c_0^2 = e^{i\varphi}, \quad c_a = 0\,.$$

Величина фазового множителя $e^{i\varphi}$, конечно, не влияет на коммутационные соотношения (1.10), (1.12), поэтому, не умаляя общности, можно положить $e^{i\varphi} = 1$. Тогда из (2.7), (2.12) следует, что r_1 имеет вид

$$r_1 = I \quad \text{или} \quad r_1 = \sum_{a=1}^{3} c_a \sigma_a\,, \quad \sum_{a=1}^{3} c_a^2 = 1\,. \quad (2.13)$$

Покажем, что c_a – действительные числа. По определению, матрица r_1 унитарна, т.е.

$$r_1 \cdot r_2^{+} = I\,, \quad r_1^{+} = r_1^{-1}. \quad (2.14)$$

Но из (2.13) видно, что

$$r_1 \cdot r_1 = I\,, \quad r_1 = r_1^{-1}. \quad (2.15)$$

Из (2.14), (2.15) следует эрмитовость r_1, поэтому коэффициенты c_a разложения r_1 по линейно независимым эрмитовым матрицам должны быть действительны.

С помощью унитарного преобразования

$$r_1 \to U r_1 U^{+}, \quad U = (1 + c_1 - i\sigma_2 c_3 + i\sigma_3 c_2)\left(2(1+c_1)\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

формулы (2.13) сводятся к (2.1). Таким образом, мы доказали, что, с точностью до унитарной эквивалентности, общий вид матрицы r_1, обеспечивающей выполнение соотношений (1.10а), (1.10г), задается формулой (2.I). Что касается условий (I.10б), (I.10в), то (I.10б) мы будем рассматривать как уравнение для гамильтониана $H_s = P_0$, а (I.10в) выполняется тождественно, если имеет место (I.10б).

Определим теперь явный вид матрицы Γ_2, обеспечивающей выполнение соотношений (I.10д)-(I.10и). По аналогии с Γ_1 получаем, что из (I.10д) следует, что Γ_2 имеет такой общий вид

$$\Gamma_2 = \sum_{\mu=0}^{3} \sigma_\mu d_\mu , \tag{2.17}$$

где d_μ - неизвестные численные коэффициенты.
Соотношение (I.10и) означает, что должно выполняться

$$\Gamma_1 \Gamma_2 = \Gamma_2 \Gamma_1 e^{i\varphi} . \tag{2.18}$$

Но из (2.17), (2.8) нетрудно вычислить непосредственно, что

$$\Gamma_1 \Gamma_2 = \Gamma_2 \Gamma_1 , \quad \text{если} \quad \Gamma_1 = I ; \tag{2.19}$$

$$\Gamma_1 \Gamma_2 = \Gamma_1 \sum_{\mu=0}^{3} \sigma_\mu d_\mu = (I d_0 + \sigma_1 d_1 - \sigma_2 d_2 - \sigma_3 d_3)\Gamma_1 , \text{если} \quad \Gamma_1 = \sigma_1 .$$

Сравнивая (2.18) и (2.19) и используя линейную независимость σ_μ, получаем следующие результаты

если $\Gamma_1 = I$, то $e^{i\varphi'} = 1$, d_μ произвольны ; (2.20а)

если $\Gamma_1 = \sigma_1$, то либо $e^{i\varphi'} = 1$, $d_2 = d_3 = 0$, (2.20б)

либо $e^{i\varphi'} = -1$, $d_0 = d_1 = 0$. (2.20в)

Таким образом из соотношений (I.10д), (I.10и) следует, что матрица Γ_2 задается формулой (2.17), причем коэффициенты d_μ должны удовлетворять одному из условий (2.20).

Потребуем теперь, чтобы выполнялось (I.10з). Согласно (I.9б) это означает, что Γ_2 должна удовлетворять условию

$$(r_2)^2 = e^{i\varphi''}. \tag{2.21}$$

Подставляя (2.17) в (2.21) и повторяя выкладки (2.10)–(2.15), получаем, что для r_2 имеется две возможности

$$r_2 = I \text{ или } r_2 = \sum_{a=1}^{3} \sigma_a d_a, \sum_{a=1}^{3} d_a^2 = 1, \; d_a^* = d_a. \tag{2.22}$$

Соотношения (2.22) и (2.20) должны выполняться совместно. Рассмотрим последовательно все варианты, перечисленные в (2.20).

Пусть имеет место (2.20а). Тогда при помощи унитарного преобразования (которое, конечно, не может изменить $r_1 = I$)

$$r_2 \to U r_2 U^+, \; U = (1 + d_2 + i\sigma_1 d_3 - i\sigma_3 d_1)[2(1+d_2)]^{-1} \tag{2.23}$$

формула (2.22) приводится к виду

$$r_2 = I \qquad \text{или} \qquad r_2 = \sigma_2. \tag{2.24}$$

Рассмотрим случай (2.20б). Согласно (2.22) матрица r_2 при этом может иметь одну из следующих форм

$$r_2 = I \qquad \text{или} \qquad r_2 = \sigma_2. \tag{2.25}$$

Наконец, если имеет место (2.20б), то из (2.22) следует, что матрица r_2 задается формулой

$$r_2 = \sigma_2 d_2 + \sigma_3 d_3, \; d_2^2 + d_3^2 = 1. \tag{2.26}$$

Унитарное преобразование (коммутирующее с $r_1 = \sigma_1$)

$$r_2 \to U r_2 U^+, \; U = (1 + d_2 + i\sigma_1 d_3)[2(1+d_2)]^{-1} \tag{2.27}$$

приводит (2.26) к виду

$$\Gamma_2 = \sigma_2 . \tag{2.28}$$

Нам осталось рассмотреть условия (I.10е), (I.10ж). Однако эти соотношения не накладывают никаких дополнительных ограничений на вид Γ_2, поскольку (I.10е) мы будем рассматривать как уравнения для $H_s = P_0$, а (I.10ж) выполняется тождественно, если имеет место (I.10е).

Суммируя сказанное на страницах 20-25, выпишем все возможные (с точностью до эквивалентности) матрицы Γ_1, Γ_2, допускаемые соотношениями (I.10а), (I.10г), (I.10д), (I.10з), (I.10и). Согласно (2.I), (2.24), (2.25), (2.28) имеются следующие возможности

$$\Gamma_1 = I , \quad \Gamma_2 = I ; \tag{2.29а}$$

$$\Gamma_1 = I , \quad \Gamma_2 = \sigma_2 ; \tag{2.29б}$$

$$\Gamma_1 = \sigma_1 , \quad \Gamma_2 = I ; \tag{2.29в}$$

$$\Gamma_1 = \sigma_1 , \quad \Gamma_2 = \sigma_1 ; \tag{2.29г}$$

$$\Gamma_1 = \sigma_1 , \quad \Gamma_2 = \sigma_2 . \tag{2.29д}$$

Таким образом, мы показали, что из (I.10а-и) следует, что, с точностью до эквивалентности, матрицы Γ_1 и Γ_2 должны иметь вид, задаваемый одной из формул (2.29).

§ 3. Операторы проектирования

Для решения задачи, поставленной в § I, мы разложим искомые операторы H_s по полной системе операторов ортогонального проектирования. Это позволит свести соотношения (I.II), (I.12), (I.18) к системе функциональных уравнений. В настоящем параграфе дано определение полного набора ортопроекторов, используемых в дальнейшем при решении (I.II), (I.I2), (I.I8) и найдены их основные свойства.

Рассмотрим совокупность $2S+1$ операторов

$$\Lambda_{S_3} = \prod_{S_3' \neq S_3} \frac{\hat{S}_p - S_3'}{S_3 - S_3'} \tag{3.I}$$

$$\hat{S}_p = \frac{\hat{\vec{S}} \cdot \vec{p}}{p}, \quad S_3, S_3' = -S, -S+1, \ldots S-1, S,$$

где $\hat{S}_a$ – спиновые матрицы (I.4), а произведение берется по всем возможным собственным значениям S_3', $S_3' \neq S_3$ оператора спиральности $\hat{S}_p = \frac{\hat{\vec{S}} \cdot \vec{p}}{p}$.

Покажем, что операторы (3.I) удовлетворяют соотношениям ортогональности и полноты

$$\Lambda_{S_3} \Lambda_{S_3'} = \delta_{S_3 S_3'} \Lambda_{S_3'}; \tag{3.2a}$$

$$\sum_{S_3=-S}^{S} \Lambda_{S_3} = 1. \tag{3.2б}$$

Действительно, оператор $\hat{S}_p$ эрмитов в пространстве $(2S+1)$-компонентных функций $\tilde{\Psi}$ со скалярным произведением

$$(\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2) = \int d^3x \, \Psi_1^+(t, \vec{x}) \Psi_2(t, \vec{x}) \tag{3.3}$$

Произвольный вектор из такого пространства может быть представлен в виде

$$\tilde{\Psi} = \sum_{S_3=-S}^{S} a_{S_3} \tilde{\Psi}_{S_3}, \tag{3.4}$$

где a_{S_3} – чиселные коэффициенты, а $\tilde{\Psi}_{S_3}$ – собственные функции оператора спиральности

$$\frac{\hat{\vec{S}} \cdot \vec{p}}{p} \tilde{\Psi}_{S_3} = S_3 \tilde{\Psi}_{S_3}, \quad S_3 = -S, -S+1, \ldots S. \tag{3.5}$$

Существование разложения (3.4) следует из полноты и ортогональности системы собственных функций эрмитова оператора $\hat{S}_p$.

Из (2.1), (2.5) следует непосредственно, что

$$\Lambda_{s_3} \tilde{\psi}_{s_3'} = \delta_{s_3 s_3'} \tilde{\psi}_{s_3'} . \tag{3.6}$$

Используя (3.6), несложно определить действие оператора Λ_{s_3} на произвольный вектор $\tilde{\psi}$ (3.4)

$$\Lambda_{s_3} \tilde{\psi} = a_{s_3} \psi_{s_3} . \tag{3.7}$$

Суммируя (3.7) по s_3 и используя (3.4), получаем

$$\sum_{s_3} \Lambda_{s_3} \tilde{\psi} = \sum_{s_3} a_{s_3} \tilde{\psi}_{s_3} = \tilde{\psi} , \tag{3.8}$$

откуда ввиду произвольности $\tilde{\psi}$ следует (3.2б).

Для доказательства (3.2а) достаточно подействовать $\Lambda_{s_3'}$ на правую и левую часть (3.7) и учесть (3.6).

Итак, мы показали, что Λ_{s_3} удовлетворяют соотношениям (3.2). Это означает, что Λ_{s_3} представляют собой совокупность операторов проектирования на подпространства собственных функций оператора спиральности $\hat{S}_p$.

Из (3.4), (3.5), (3.7) следует соотношение

$$\hat{S}_p^k = \sum_{s_3=-s}^{s} s_3^k \Lambda_{s_3} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.9}$$

Доказательство (3.9) элементарно. Подействовав на (3.4) оператором $\hat{S}_p^k$ и использовав (3.5), приходим к тождеству

$$\hat{S}_p^k \tilde{\psi} = \hat{S}_p^k \sum_{s_3=-s}^{s} a_{s_3} \tilde{\psi}_{s_3} \equiv \sum_{s_3=-s}^{s} a_{s_3} s_3^k \tilde{\psi}_{s_3} . \tag{3.10}$$

Но, согласно (3.7), (3.4)

$$\sum_{s_3=-s}^{s} s_3^k \Lambda_{s_3} \tilde{\psi} \equiv \sum_{s_3=-s}^{s} s_3^k a_{s_3} \tilde{\psi}_{s_3} . \tag{3.11}$$

Сравнивая (3.10) и (3.11) и учитывая произвольность $\tilde{\psi}$, приходим к (3.9).

В заключение этого параграфа докажем, что имеют место следующие соотношения (которые будут в дальнейшем использованы при решении задачи, поставленной в § 1)

$$[\Lambda_{s_3}, \vec{x}] = \frac{\vec{p}\times\hat{\vec{S}}}{2p^2}\left(2\Lambda_{s_3} - \Lambda_{s_3+1} - \Lambda_{s_3-1}\right) + \frac{i}{2p}\left(\hat{\vec{S}} - \frac{\vec{p}}{p}\hat{S}_p\right)\left(\Lambda_{s_3+1} - \Lambda_{s_3-1}\right) \quad (3.12)$$

$$[\Lambda_{s_3}, \hat{\vec{S}}] = \frac{i}{2}\frac{\vec{p}\times\hat{\vec{S}}}{p}\left(\Lambda_{s_3+1} - \Lambda_{s_3-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\hat{\vec{S}} - \frac{\vec{p}}{p}\hat{S}_p\right)\left(2\Lambda_{s_3} - \Lambda_{s_3+1} - \Lambda_{s_3-1}\right). \quad (3.13)$$

Доказательство будет состоять из трех этапов.

1. Покажем, что коммутатор каждой степени $\hat{S}_p^{\,l}$ с $\vec{x}$ можно представить в виде

$$\left[\hat{S}_p^{\,l}, x_a\right] = \frac{i}{p}\left(\hat{S}_a - \frac{p_a}{p}\hat{S}_p\right)d_l + \frac{(\vec{p}\times\vec{S})_a}{p^2}e_l, \quad (3.14)$$

где d_l, e_l – полиномы от $\hat{S}_p$.

Для $l=1$ получаем непосредственно

$$[\hat{S}_p, x_a] = -i\frac{\partial}{\partial p_a}\frac{\hat{\vec{S}}\cdot\vec{p}}{p} = -\frac{i}{p}\left(\hat{S}_a - \frac{p_a}{p}\hat{S}_p\right), \quad (3.15)$$

т.е. (3.14) действительно выполняется, $d_1 = -1$, $e_1 = 0$.

Докажем по индукции, что (3.14) справедливо для любого l.

Пусть для $l = l_0$ имеет место (3.14)

$$\left[\hat{S}_p^{\,l_0}, x_a\right] = \frac{i}{p}\left(\hat{S}_a - \frac{p_a}{p}\hat{S}_p\right)d_{l_0} + \frac{(\vec{p}\times\vec{S})_a}{p^2}e_{l_0}. \quad (3.16)$$

Тогда, используя (3.14), (3.16), получаем для $l = l_0 + 1$

$$\left[\hat{S}_p^{l_0+1}, x_a\right] = \left[\hat{S}_p \cdot \hat{S}_p^{l_0}, x_a\right] = \left[\hat{S}_p, x_a\right] S_p^{l_0} +$$

$$+ \hat{S}_p\left[\hat{S}_p^{l}, x_a\right] = -\frac{i}{p}\left(\hat{S}_a - \frac{p_a}{p}\hat{S}_p\right) S_p^{l_0} +$$

$$+ \hat{S}_p\left\{\frac{i}{p}\left(\hat{S}_a - \frac{p_a}{p}\hat{S}_p\right) d_{l_0} + \frac{(\vec{p}\times\hat{\vec{s}})_a}{p^2} e_{l_0}\right\}. \qquad (3.17)$$

Принимая во внимание коммутационные соотношения (I.4a)

$$\left[\hat{S}_a, \hat{S}_b\right] = i\hat{S}_c, \; (a,b,c) \text{ — тройка чисел } (1,2,3) \qquad (3.18)$$

нетрудно получить следующие тождества

$$\hat{S}_p \cdot \hat{S}_a \equiv \hat{S}_a \cdot \hat{S}_p + [\hat{S}_p, \hat{S}_a] = \hat{S}_a \hat{S}_p - i\frac{(\vec{p}\times\hat{\vec{s}})_a}{p}; \qquad (3.19)$$

$$S_p \frac{(\vec{p}\times\hat{\vec{s}})_a}{p^2} \equiv \frac{(\vec{p}\times\vec{s})_a}{p^2}\hat{S}_p + \left[\hat{S}_p, \frac{(\vec{p}\times\hat{\vec{s}})_a}{p^2}\right] =$$

$$= \frac{(\vec{p}\times\vec{s})_a}{p^2}\hat{S}_p + \frac{i}{p}\left(\hat{S}_a - \frac{p_a}{p}\hat{S}_p\right). \qquad (3.19б)$$

Подставив (3.19) в (3.17) приходим к формуле

$$\left[\hat{S}_p^{l_0+1}, x_a\right] = \frac{i}{p}\left(\hat{S}_a - \frac{p_a}{p}\hat{S}_p\right) d_{l_0+1} + \frac{(\vec{p}\times\hat{\vec{s}})_a}{p^2} e_{l_0+1}; \qquad (3.20)$$

$$d_{l_0+1} = \hat{S}_p d_{l_0} + e_{l_0} - \hat{S}_p^{l_0}; \quad e_{l_0+1} = S_p e_{l_0} + d_{l_0}.$$

Таким образом мы показали, что если для $l = l_0$ имеет место (3.14), то такое же соотношение справедливо и для $l = l_0 + 1$. Поскольку при $l_0 = 1$ (3.14) выполняется (см. (3.15), то по индукции заключаем, что разложение (3.14) может быть записано для произвольного l.

Из (3.14) следует, что коммутатор оператора проектирования Λ_{s_3} (3.1) с $\vec{x}$ может быть записан в виде

$$\left[x_a, \Lambda_{s_3}\right] = \sum_{s_3'}\left\{\frac{i}{p}\left(\hat{S}_a - \frac{p_a}{p}\hat{S}_p\right) n_{s_3}^{s_3'} + \frac{(\vec{p}\times\vec{s})_a}{p^2} m_{s_3}^{s_3'}\right\}\Lambda_{s_3'} \quad (3.2$$

где $n_{s_3}^{s_3'}$, $m_{s_3}^{s_3'}$ — неизвестные коэффициенты. Действительно, согласно (3.I) Λ_{s_3} — это полином от $\hat{S}_p$. Поскольку для любой степени S_p^l справедливо (3.I4), то

$$\left[\Lambda_{s_3}, x_a\right] = \frac{i}{p}\left(\hat{S}_a - \frac{p_a}{p}\hat{S}_p\right) n_{s_3} + \frac{(\vec{p}\times\vec{S})_a}{p^2} m_{s_3}, \tag{3.22}$$

где n_{s_3}, m_{s_3} — снова полиномы от $\hat{S}_p$. Но, согласно (3.9), любой такой полином может быть представлен как линейная комбинация операторов проектирования Λ_{s_3}

$$n_{s_3} = \sum_{s_3'} n_{s_3}^{s_3'} \Lambda_{s_3'}; \quad m_{s_3} = \sum_{s_3'} m_{s_3}^{s_3'} \Lambda_{s_3'}. \tag{3.23}$$

Подставив (3.23) в (3.22), мы приходим к (3.2I).

2. Докажем теперь следующее утверждение: линейная комбинация

$$\vec{L}_{s_3} = \frac{1}{p}\left(a\,\hat{\vec{S}} + b\frac{\vec{p}}{p} + i\,\frac{\vec{p}\times\vec{S}}{p}\,c\right)\Lambda_{s_3}, \tag{3.24}$$

где a, b, c — не равные одновременно нулю числа, может равняться нулю тогда и только тогда, когда $S_3 = \pm S$. При других значениях S_3 все векторы, входящие в правую часть (3.24), линейно независимы.

Доказательство. Для того, чтобы вектор $\vec{L}_{s_3}$ был равен нулю, необходимо, чтобы выполнялось

$$\frac{\vec{p}}{p}\cdot\vec{L}_{s_3} = \hat{\vec{S}}\cdot\vec{L}_{s_3} = \frac{\vec{p}\times\hat{\vec{S}}}{p}\cdot\vec{L}_{s_3} = 0. \tag{3.25}$$

Умножим (3.24) на $\frac{\vec{p}}{p}$, $\hat{\vec{S}}$ и $\frac{\vec{p}\times\vec{S}}{p}$ скалярно и потребуем, чтобы имело место (3.25). Используя тождества

$$\vec{p}\cdot\vec{p}\times\hat{\vec{S}}=0;\ (\hat{\vec{S}})^2=s(s+1);\ \frac{\vec{p}\cdot\hat{\vec{S}}}{p}\Lambda_{s_3}=s_3\Lambda_{s_3};$$

$$\hat{\vec{S}}\cdot\frac{\vec{p}\times\hat{\vec{S}}}{p}\Lambda_{s_3}=-i\frac{\hat{\vec{S}}\cdot\vec{p}}{p}\Lambda_{s_3}=-iS_3\Lambda_{s_3};\ \left(\frac{\vec{p}\times\hat{\vec{S}}}{p}\right)^2\Lambda_{s_3}=\left[S(S+1)-S_3^2\right]\Lambda_{s_3} \tag{3.26}$$

и учитывая линейную независимость проекторов Λ_{s_3}, получаем систему уравнений для a, b, c

$$b=aS_3; \tag{3.27а}$$

$$a[s(s+1)+S_3^2]-cS_3=0; \tag{3.27б}$$

$$-aS_3+[s(s+1)-S_3^2]c=0. \tag{3.27в}$$

Система (3.27б), (3.27в) имеет нетривиальные решения только в том случае, когда

$$\Delta=\begin{vmatrix} s(s+1)+S_3^2 & -S_3 \\ -S_3 & s(s+1)-s_3^2 \end{vmatrix}=s^4+s^2-S_3^2-s_3^4=0, \tag{3.28}$$

т.е. при $S_3=\pm S$. При этом a, b, c равны

$$b=aS_3,\quad c=\pm a. \tag{3.29}$$

Таким образом, мы показали, что необходимым условием линейной зависимости векторов $\hat{\vec{S}}\Lambda_{s_3}$, $\frac{\vec{p}}{p}\Lambda_{s_3}$, $\frac{\vec{p}\times\vec{S}}{p}\Lambda_{s_3}$ является равенство $S_3=\pm S$. Достаточность этого условия будет доказана ниже.

Подставив (3.29) в (3.24) и приравняв $\vec{L}_{s_3}$ нулю, получаем для $S_3=\pm S$

$$\left[\frac{i}{p}(\hat{\vec{S}}-\frac{\vec{p}}{p}S_p)\pm i\frac{\vec{p}\times\hat{\vec{S}}}{p^2}\right]\Lambda_{s_3}=0,\quad S_3=\pm S. \tag{3.30}$$

3. Найдем значения коэффициентов $n_{s_3}^{s_3'}$, $m_{s_3}^{s_3'}$ разложения (3.21). С этой целью рассмотрим коммутатор

$$\left[\hat{S}_p \cdot \Lambda_{s_3}, x_a\right] \equiv \left[\hat{S}_p, x_a\right]\Lambda_{s_3} + \hat{S}_p\left[\Lambda_{s_3}, x_a\right] \equiv$$

$$\equiv \left[\hat{S}_p, x_a\right]\Lambda_{s_3} + \left[\Lambda_{s_3}, x_a\right]\hat{S}_p + \left[\left[\Lambda_{s_3}, x_a\right], S_p\right]. \quad (3.31)$$

Ввиду (2.9),(2.2а)

$$S_p \cdot \Lambda_{s_3} = \sum_{s_3'} s_3' \Lambda_{s_3'} \cdot \Lambda_{s_3} = \sum_{s_3'} s_3' \delta_{s_3' s_3} \cdot \Lambda_{s} = S_3 \Lambda_{s_3}. \quad (3.32)$$

Подставляя (3.15), (3.21), (3.32) в (3.31), приходим к уравнению

$$\sum_{s_3, s_3'} \left\{ \frac{i}{p}\left(\hat{\vec{S}} - \frac{\vec{p}}{p}\hat{S}_p\right)\left[(s_3' - s_3) n_{s_3}^{s_3'} - m_{s_3}^{s_3'} + \delta_{s_3 s_3'}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\vec{p} \times \hat{\vec{S}}}{p}\left[(s_3' - s_3) m_{s_3}^{s_3'} - n_{s_3}^{s_3'}\right]\right\}\Lambda_{s_3'} = 0, \quad (3.33)$$

откуда, ввиду линейной независимости проекторов Λ_{s_3}, и векторов $(\hat{\vec{S}} - \frac{\vec{p}}{p}\hat{S}_p)\Lambda_{s_3'}$, $\frac{\vec{p} \times \vec{S}}{p}\Lambda_{s_3'}$, получаем

$$\begin{cases} (s_3' - s_3) n_{s_3}^{s_3'} - m_{s_3}^{s_3'} = -\delta_{s_3' s_3} & |s_3'| \neq S \\ (s_3' - s_3) m_{s_3}^{s_3'} - n_{s_3}^{s_3'} = 0 \end{cases} \quad (3.34а)$$

$$(s_3' - s_3) m_{s_3}^{s_3'} \mp m_{s_3}^{s_3'} = -\delta_{s_3' s_3},\ n_{s_3}^{s_3'} = 0,\ s_3' = \pm S. \quad (3.34б)$$

Для $s_3' = s_3$ система (3.34а) имеет решения

$$n_{s_3}^{s_3} = 0, \quad m_{s_3}^{s_3} = 1. \quad (3.35)$$

В случае $s_3' \neq s_3$ система (3.34а) имеет нетривиальные решения, когда

$$\Delta' = \begin{vmatrix} s_3' - s_3 & -1 \\ -1 & s_3' - s_3 \end{vmatrix} = (s_3 - s_3')^2 - 1 = 0 \quad (3.36)$$

Это означает, что отличны от нуля только такие $n_{s_3}^{s_3'}$, $m_{s_3}^{s_3'}$, у которых

$$S_3' = S_3 \pm 1 \; ; \; S_3' \neq \pm S \; . \tag{3.37}$$

при этом

$$n_{s_3}^{s_3'} = \pm m_{s_3}^{s_3'}, \; S_3' = S_3 \pm 1, \; S_3' \neq S. \tag{3.38}$$

Для $|S_3'| = S$ получаем из (3.34б), что от нуля отличны только те $m_{s_3}^{s_3'}$, у которых

$$S_3' = S_3 \pm 1 \; ; \; S_3' \neq \pm S \, . \tag{3.39}$$

Чтобы окончательно определить значения коэффициентов разложения (3.21), воспользуемся тождеством (3.26)

$$1 \equiv \sum_{s_3} \Lambda_{s_3} \; . \tag{3.40}$$

Рассмотрим коммутатор

$$\begin{aligned} 0 &\equiv [1, \vec{x}] \equiv \Big[\sum_{s_3} \Lambda_{s_3}, \vec{x}\Big] \equiv \sum_{s_3} [\Lambda_{s_3}, \vec{x}] = \\ &= \sum_{s_3, s_3'} \Big[\frac{i}{p}\Big(\hat{\vec{S}} - \frac{\vec{p}}{p}\hat{S}_p\Big) n_{s_3}^{s_3'} + \frac{\vec{p} \times \hat{\vec{S}}}{p^2} m_{s_3}^{s_3'}\Big] \Lambda_{s_3'} \; . \end{aligned} \tag{3.41}$$

Фиксируем какое-нибудь $S_3' \neq \pm S$. Тогда, по доказанному, сумма по S_3 ограничится тремя слагаемыми. Используя (3.35), (3.38), получаем

$$\begin{aligned} 0 \equiv \sum_{s_3'} \Big[&\frac{i}{p}\Big(\hat{\vec{S}} - \frac{\vec{p}}{p}\hat{S}_p\Big)\Big(m_{s_3'+1}^{s_3'} + m_{s_3'-1}^{s_3'}\Big) + \\ &+ \frac{\vec{p} \times \vec{S}}{p^2}\Big(m_{s_3'+1}^{s_3'} - m_{s_3'-1}^{s_3'} + m_{s_3'}^{s_3'}\Big)\Big] , \end{aligned}$$

откуда, учитывая линейную независимость входящих в (3.42) векторов и проекторов, получаем

$$\begin{aligned} &m_{s_3'+1}^{s_3'} + m_{s_3'-1}^{s_3'} = 0 \; ; \\ &m_{s_3'+1}^{s_3'} - m_{s_3'-1}^{s_3'} - m_{s_3'}^{s_3'} = 0 . \end{aligned} \tag{3.43}$$

Учитывая (3.35), найдем решения системы (3.43)

$$m^{s_3'}_{s_3'+1} = -m^{s_3'}_{s_3'-1} = -\frac{1}{2};\ m^{s_3'}_{s_3'} = 1;\quad s_3' \neq \pm s. \tag{3.44}$$

Для $n^{s_3'}_{s_3}$ получаем из (3.35), (3.39)

$$n^{s_3'}_{s_3'+1} = n^{s_3'}_{s_3'-1} = -\frac{1}{2},\quad s_3' \neq \pm s. \tag{3.45}$$

Если же $s_3' = \pm s$, то, согласно (3.30) соотношение (3.41) можно записать в виде

$$0 \equiv \sum_{s_3} \frac{\vec{p}\times\vec{S}}{p^2}\left(m^{s_3'}_{s_3} + m^{s_3'}_{s_3'\mp 1}\right)\Lambda_{s_3'},\quad s_3 = \pm s, \tag{3.46}$$

откуда, ввиду (3.35)

$$m^{s_3'}_{s_3'} = 1,\ m^{s_3'}_{s_3'\mp 1} = -1,\quad s_3' = \pm s. \tag{3.47}$$

Формулы (3.45), (3.46), (3.47) задают все отличные от нуля коэффициенты разложения (3.21). Подставляя значения этих коэффициентов в (3.21) и учитывая (3.30), мы приходим к формуле (3.12).

Таким образом, соотношение (3.12) доказано. Покажем теперь, что (3.13) является следствием (3.12). Из определения (3.1) проектора Λ_{s_3} видно, что выполняется

$$\left[\Lambda_{s_3},\ \vec{x}\times\vec{p} + \hat{\vec{S}}\right] = 0, \tag{3.48}$$

откуда

$$\left[\Lambda_{s_3},\ \hat{\vec{S}}\right] = -\left[\Lambda_{s_3},\ \vec{x}\times\vec{p}\right] = \vec{p}\times\left[\Lambda_{s_3},\ \vec{x}\right]. \tag{3.49}$$

Умножая (3.12) векторно на $\vec{p}$ и принимая во внимание (3.49), получаем (3.13). Соотношения (3.12), (3.13) доказаны полностью. Покажем еще достаточность условия $S_3 = \pm S$ линейной зависимости векторов $\frac{\vec{p} \times \hat{\vec{S}}}{p} \Lambda_{s_3}$ и $(\hat{\vec{S}} - \frac{\vec{p}}{p} \hat{S}_p)\Lambda_{s_3}$ (необходимость была доказана в п. 2). Для этого используем тождество (3.40) и рассмотрим коммутатор

$$\sum_{s_3} [\Lambda_{s_3}, \vec{x}]\Lambda_s = [\sum_{s_3} \Lambda_{s_3}, \vec{x}]\Lambda_s = [1, \vec{x}]\Lambda_s \ . \qquad (3.50)$$

По доказанному, как в случае линейной зависимости, так и независимости упомянутых векторов, сумма в левой части (3.50) содержит только два слагаемых, соответствующих $s_3 = s$ и $S_3 = s - 1$ (см. (3.37), (3.39)), следовательно, (3.50) можно переписать в виде

$$[\Lambda_{s-1}, \vec{x}]\Lambda_s + [\Lambda_s, \vec{x}]\Lambda_s = 0 . \qquad (3.51)$$

Но, согласно (3.12), (3.2a)

$$[\Lambda_{s_3}, \vec{x}]\Lambda_{s_3} = \frac{\vec{p} \times \hat{\vec{S}}}{p^2} \Lambda_{s_3} ;$$

$$[\Lambda_{s_3 - 1}, \vec{x}]\Lambda_{s_3} = \frac{1}{2p}\left(\frac{\vec{p} \times \hat{\vec{S}}}{p} + i\hat{\vec{S}} - i\frac{\vec{p}}{p}\hat{S}_p\right)\Lambda_{s_3} .$$

Подставив (3.52) в (3.51), получаем

$$\left[-\frac{\vec{p} \times \hat{\vec{S}}}{p^2} + \frac{i}{p}\left(\hat{\vec{S}} - \frac{\vec{p}}{p}\hat{S}_p\right)\right]\Lambda_s = 0 , \qquad (3.53)$$

т.е. для $S_3 = S$ действительно имеет место (3.30), и векторы $\frac{\vec{p} \times \hat{\vec{S}}}{p}$ и $(\hat{\vec{S}} - \frac{\vec{p}}{p} \hat{S}_p)\Lambda_{s_3}$ линейно зависимы. Для $S_3 = -S$ доказательство аналогично.

§ 4. Определение явного вида гамильтонианов H_s

Приступим к решению системы операторных соотношений (I.II), (I.I2), (I.I8). По предположению гамильтониан H_s определен в пространстве $2(2s+1)$ компонентных функций $\Psi(t,\vec{x})$, следовательно, его можно представить в виде

$$H_s = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}, \tag{4.I}$$

где $H_{\alpha\beta}$ - матрицы размерности $(2s+1)\times(2s+1)$, $\alpha,\beta=1,2$.

Потребуем, чтобы оператор H_s удовлетворял соотношениям (I.I2а), (I.I2б). Подставляя (I.2а,б), (4.I) в (I.I2а), (I.I2б), получаем следующие уравнения для $H_{\alpha\beta}$

$$[H_{\alpha\beta}, p_a] = [H_{\alpha\beta}, -i\frac{\partial}{\partial x_a}] = 0; \tag{4.2а}$$

$$[H_{\alpha\beta}, x_a p_b - x_b p_a + \hat{S}_c] = 0. \tag{4.2б}$$

Самый общий вид $H_{\alpha\beta}$, удовлетворяющего соотношениям (4.2), задается формулой

$$H_{\alpha\beta} = \sum_{l=0}^{2s} a^{l}_{\alpha\beta} \left(\frac{\hat{\vec{S}}\cdot\vec{p}}{p}\right)^{l}, \tag{4.3}$$

где $a^{l}_{\alpha\beta}$ - произвольные функции от $p=|\vec{p}|$. Действительно, из (4.2) следует, что $H_{\alpha\beta}$ должны коммутировать со всеми генераторами P_a, I_{ab} группы E_3. Это означает, что $H_{\alpha\beta}$ являются функцией от операторов Казимира $\sum\limits_a (P_a)^2$ и $\sum\limits_{a,b,c} I_{ab}\cdot P_c = \vec{S}\cdot\vec{p}$ этой группы. Формула (4.3) и задает произвольную функцию от p^2 и $\vec{S}\cdot\vec{p}$, причем ряд (4.3) содержит конечное число членов ввиду соотношения

$$\prod_{s_3}\left(\frac{\vec{S}\cdot\vec{p}}{p} - s_3\right) \equiv 0, \tag{4.4}$$

где произведение берется по всем собственным значениям $S_3 = -S$, $-S+1, \dots S$ оператора $\frac{\vec{s}\cdot\vec{\rho}}{\rho}$.

Для упрощения дальнейших вычислений мы разложим $H_{\alpha\beta}$ по полной системе ортогональных операторов проектирования Λ_{S_3} (3.I). Подставляя (3.9) в (4.3), получаем

$$H_{\alpha\beta} = \sum_{l=0}^{2s} \sum_{s_3=-s}^{s} a^{l}_{\alpha\beta}(S_3)\Lambda_{S_3} = \sum_{S_3} h^{S_3}_{\alpha\beta}\Lambda_{S_3}, \quad h^{S_3}_{\alpha\beta} = \sum_{l=0}^{2s} a^{l}_{\alpha\beta}(S_3). \quad (4.5)$$

С учетом (4.5) общее выражение (4.I) для оператора H_S запишется в виде

$$H_S = \sum_{S_3=-S}^{S} h_{S_3}\Lambda_{S_3}; \quad h_{S_3} = \begin{pmatrix} h^{S_3}_{11} & h^{S_3}_{12} \\ h^{S_3}_{21} & h^{S_3}_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Из соображений удобства h_{S_3} полезно записать в форме

$$h_{S_3} = \sum_{\mu=0}^{3} \sigma_\mu b^{\mu}_{S_3}, \quad (4.7)$$

где σ_μ – матрицы Паули (2.8), а $h^{S_3}_{\alpha\beta}$ и $b^{\mu}_{S_3}$ связаны соотношениями

$$h^{S_3}_{11} = b^{0}_{S_3} + b^{3}_{S_3}; \quad h^{S_3}_{22} = b^{0}_{S_3} - b^{3}_{S_3};$$
$$h^{S_3}_{12} = b^{1}_{S_3} - i b^{2}_{S_3}; \quad h^{S_3}_{21} = b^{1}_{S_3} + i b^{2}_{S_3}. \quad (4.8)$$

Таким образом, согласно (4.6), (4.7), общий вид гамильтониана H_S удовлетворяющего соотношениям (I.I2а), (I.I2б), задается формулой

$$H_S = \sum_{S_3=-S}^{S} h_{S_3}\Lambda_{S_3}, \quad h_{S_3} = \sum_{\mu=0}^{3} \sigma_\mu b^{\mu}_{S_3}, \quad (4.8)$$

где Λ_{S_3} – операторы проектирования (3.I), σ_μ – матрицы Паули

(2.8), а $b^{\mu}_{s_3}$ – произвольные функции от p.

Потребуем, чтобы оператор H_s удовлетворял соотношению (I.II). Подставляя (4.8) в (4.II) и используя (3.2а), получаем уравнение

$$H_s^2 = \sum_{s_3=-s}^{s} (h_{s_3})^2 \Lambda_{s_3} = m^2 + p^2. \qquad (4.9)$$

Умножив (4.9) на $\Lambda_{s_3'}$, используя (3.2а) и учитывая линейную независимость проекторов Λ_{s_3}, приходим к следующему уравнению для h_{s_3}

$$(h_{s_3})^2 = m^2 + p^2 = E^2. \qquad (4.10)$$

Подставим (4.7) в (4.10). Принимая во внимание антикоммутативность матриц σ_a, $a = 1,2,3$, получаем

$$(h_{s_3})^2 = \left(\sum_{\mu=0}^{3} \sigma_\mu b^{\mu}_{s_3}\right)^2 = \sum_{\mu=0}^{3} (b^{\mu}_{s_3})^2 + 2\sum_{a=1}^{3} b^{0}_{s_3} b^{a}_{s_3} \sigma_a = E^2. \qquad (4.11)$$

Ввиду линейной независимости матриц Паули, для выполнения (4.II) необходимо и достаточно, чтобы имело место одно из следующих соотношений

$$b^{0}_{s_3} = 0, \quad \sum_{a=1}^{3} (b^{a}_{s_3})^2 = E^2; \qquad (4.12а)$$

или

$$b^{a}_{s_3} = 0, \ a = 1,2,3; \quad (b^{0}_{s_3})^2 = (h_{s_3})^2 = E^2. \qquad (4.12б)$$

Иными словами, соотношение (I.II) эквивалентно требованию, чтобы коэффициенты $b^{\mu}_{s_3}$ разложения (4.8) удовлетворяли условию (4.12).

Рассмотрим теперь последнее условие Пуанкаре – инвариантности уравнения (I.I) – соотношение (I.12в)

$$\left[H_s, \vec{x}\right] \times \left[H_s, \vec{x}\right] = -4i\vec{S}. \tag{4.13}$$

Умножим (4.13) скалярно на $\vec{p}$. Используя тождество, справедливое для произвольных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}, \tag{4.14}$$

получаем

$$\vec{p} \times \left[H_s, \vec{x}\right] \cdot \left[H_s, \vec{x}\right] = -4i\vec{p} \cdot \vec{S}. \tag{4.15}$$

Соотношение (4.15) является, конечно, необходимым условием пуанкаре-инвариантности (1.1). В § 7 мы докажем его достаточность.

Потребуем, чтобы H_s удовлетворял соотношению (4.15). Приведем (4.15) к более удобному для решения виду. Для этого воспользуемся тождеством

$$\vec{x} \equiv \left[\vec{p}\,(\vec{p} \cdot \vec{x}) - \vec{p} \times (\vec{p} \times \vec{x})\right] p^{-2}. \tag{4.16}$$

Согласно (4.16), (1.12а)

$$\left[H_s, \vec{x}\right] \equiv \left\{\vec{p} \cdot \left[H_s, (\vec{p} \cdot \vec{x})\right] - \vec{p} \times \left[H_s, \vec{p} \times \vec{x}\right]\right\} p^{-2}. \tag{4.17}$$

Подставляя (4.17) в левую часть (4.15), получаем

$$\vec{p} \times \left[H_s, \vec{x}\right] \cdot \left[H_s, \vec{x}\right] = \vec{p} \times \left[H_s, \vec{x}\right] \cdot \left\{\vec{p} \cdot \left[H_s, (\vec{p} \cdot \vec{x})\right] - \vec{p} \times \left[H_s, \vec{p} \times \vec{x}\right]\right\} p^{-2}.$$

Первое слагаемое в правой части (4.18) в силу (4.14) тождественно равно нулю:

$$\vec{p} \times \left[H_s, \vec{x}\right] \cdot \vec{p} \cdot \left[H_s, (\vec{p} \cdot \vec{x})\right] \equiv -\left[H_s, \vec{x}\right] \times \vec{p} \cdot \vec{p}\left[H_s, (\vec{p} \cdot \vec{x})\right] \equiv$$

$$\equiv -\left[H_s, \vec{x}\right] \cdot \vec{p} \times \vec{p} \cdot \left[H_s, (\vec{p} \cdot \vec{x})\right] \equiv 0, \text{ поскольку } \vec{p} \times \vec{p} \equiv 0. \tag{4.19}$$

Учитывая (4.18), (4.19), (I.12а), запишем левую часть (4.15) в виде

$$\vec{p}\times[H_s,\vec{x}]\cdot[H_s,\vec{x}]=-[H_s,\vec{p}\times\vec{x}]\cdot\vec{p}\times[H_s,\vec{p}\times\vec{x}]p^{-2}. \quad (4.20)$$

Но согласно (I.12б), (I.2б)

$$[H_s,\vec{x}\times\vec{p}+\vec{S}]=0, \quad (4.21)$$

следовательно

$$[H_s,\vec{p}\times\vec{x}]=[H_s,\vec{S}]. \quad (4.22)$$

Подставляя (4.22), (4.20) в (4.15), приходим к уравнению

$$[H_s,\vec{p}\times\vec{S}]\cdot[H_s,\vec{S}]=-4i(\vec{p}\cdot\vec{S}). \quad (4.23)$$

Преобразуем коммутаторы в левой части (4.23), используя (I.II)

$$[H_s,\vec{p}\times\vec{S}]\cdot[H_s,\vec{S}]=(H_s\vec{p}\times\vec{S}-\vec{p}\times\vec{S}H_s)=H_s\vec{p}\times\vec{S}\cdot H_s\vec{S}\cdot$$
$$-\vec{p}\times\vec{S}\cdot H_s^2\cdot\vec{S}-H_s\vec{p}\times\vec{S}\cdot\vec{S}H_s+\vec{p}\times\vec{S}\cdot H_s\cdot\vec{S}\cdot H_s=H_s\cdot\vec{p}\times\vec{S}\cdot\vec{S}\cdot H_s+$$
$$+H_s\vec{p}\times\vec{S}[H_s,\vec{S}]-\vec{p}\times\vec{S}\cdot E^2\vec{S}-H_s\cdot\vec{p}\times\vec{S}\cdot\vec{S}\cdot H_s+\vec{p}\times\vec{S}\cdot\vec{S}E^2+$$
$$+\vec{p}\times\vec{S}\cdot[H_s,\vec{S}]H_s=\{H_s,\vec{p}\times\vec{S}\cdot[H_s,\vec{S}]\}. \quad (4.24)$$

Подставляя (4.24) в (4.23), получаем окончательно следующее уравнение для H_s

$$\{H_s,\vec{p}\times\vec{S}\cdot[H_s,\vec{S}]\}=-4i(\vec{p}\cdot\vec{S})\vec{p}^2. \quad (4.25)$$

Таким образом, мы привели уравнение (4.15) к виду (4.25), удобному для разрешения относительно H_s.

Приступим к решению уравнения (4.25). Подставляя в (4.25) общий вид H_s (4.8), получаем

$$\sum_{s_3, s_3'} \{h_{s_3}\Lambda_{s_3}, h_{s_3'}\vec{p}\times\vec{s}[\Lambda_{s_3'}, \vec{s}]\} = -4i(\vec{p}\cdot\vec{s})p^2 \qquad (4.26)$$

или, учитывая коммутативность Λ_{s_3} и $\vec{p}\times\vec{s}\cdot[\Lambda_{s_3'}, \vec{s}]$ *

$$\sum_{s_3, s_3'} \{h_{s_3}, h_{s_3'}\}\cdot\vec{p}\times\vec{s}[\Lambda_{s_3'}, \vec{s}]\Lambda_{s_3} = -4i(\vec{p}\cdot\vec{s})p^2. \qquad (4.27)$$

Коммутатор $[\Lambda_{s_3'}, \vec{s}]$ вычислен в предыдущем параграфе. Согласно (3.13), (3.2а)

$$\sum_{s_3'}[\Lambda_{s_3'}, \vec{s}]\Lambda_{s_3} = \frac{i}{2}\frac{\vec{p}\times\vec{s}}{p}(\delta_{s_3'+1\, s_3} - \delta_{s_3'-1\, s_3})\Lambda_{s_3} +$$

$$+ \frac{1}{2}(\vec{s} - \frac{\vec{p}}{p}s_p)(\delta_{s_3'-1\, s_3} + \delta_{s_3'+1\, s_3} - 2\delta_{s_3', s_3})\Lambda_{s_3}. \qquad (4.28)$$

Умножив (4.28) на $\frac{\vec{p}\times\vec{s}}{p}$ и используя (3.26), получаем

$$\frac{\vec{p}\times\vec{s}}{p}\cdot[\Lambda_{s_3'}, \vec{s}]\Lambda_{s_3} = \{-\frac{i}{2}[s(s+1) - s_3^2 - s_3]\delta_{s_3'-1\, s_3} +$$

$$+ \frac{i}{2}[s(s+1) - s_3^2 + s_3]\delta_{s_3'+1\, s_3} - i s_3\delta_{s_3' s_3}\}\Lambda_{s_3}. \qquad (4.29)$$

Подставив (4.29) в левую часть (4.27), а (3.9) – в правую, приходим к уравнению

$$\sum_{s_3, s_3'}\{h_{s_3}, h_{s_3'}\}\{\frac{i}{2}[s(s+1) - s_3^2 - s_3]\cdot\delta_{s_3'-1\, s_3} -$$

$$-\frac{i}{2}[s(s+1) - s_3^2 + s_3]\delta_{s_3'+1\, s_3} + i s_3\delta_{s_3' s_3}\}\Lambda_{s_3} = -4ip^2\sum_{s_3} s_3\Lambda_{s_3} \qquad (4.30)$$

---

* $\vec{p}\times\vec{s}\cdot[\Lambda_{s_3'}, \vec{s}]$, очевидно, скалярный оператор, коммутирующий с p_a. Мы показали, что любой такой скаляр можно представить в виде линейной комбинации операторов проектирования Λ_{s_3}.

откуда, приравнивая коэффициенты при линейно независимых проекторах Λ_{s_3}, получаем

$$\{h_{s_3}, h_{s_3-1}\}\frac{i}{2}(s^2+s-s_3^2+s_3)-\{h_{s_3}, h_{s_3+1}\}\frac{i}{2}(s^2+s-$$
$$-s_3^2-s_3)-2h_{s_3}^2\, i\, s_3=-4is_3p^2. \qquad (4.31)$$

Но, согласно (4.10)

$$h_{s_3}^2=m^2+p^2. \qquad (4.32)$$

Учитывая (4.32), перепишем (4.31) в виде

$$s_3\{h_{s_3}, h_{s_3-1}\}=2s_3(m^2-p^2)+(\{h_{s_3}, h_{s_3+1}\}-$$
$$-\{h_{s_3}, h_{s_3-1}\})(s^2+s-s_3^2-s_3). \qquad (4.33)$$

Покажем, что уравнение (4.33) может быть записано в следующем эквивалентном виде

$$\frac{1}{2}\{h_{s_3}, h_{s_3+1}\}=m^2-p^2,\; s_3\neq s. \qquad (4.34)$$

Действительно, если для какого-нибудь s_{3_0} справедливо (4.34), то из (4.33) следует, что

$$\{h_{s_{3_0}}, h_{s_{3_0}+1}\}=\{h_{s_{3_0}}, h_{s_{3_0}-1}\}=2(m^2-p^2), \qquad (4.35)$$

т.е. что соотношение (4.34) выполняется и для $s_3'=s_{3_0}+1$. Поскольку для $s_{3_0}=-s$ (4.33) сводится к (4.34), то из (4.35) по индукции следует справедливость (4.34) для произвольного s_3.

Итак, мы показали, что условие (4.15) сводится к антикоммуникационным соотношениям (4.34) для h_{s_3}.

Подставим в (4.34) общий вид h_{s_3} из (4.7), (4.12) и получим уравнения для коэффициентов $b_{s_3}^{\mu}$. Ограничиваясь случаем $m\neq 0$ (уравнения для $m=0$ будут рассмотрены в следующем параграфе), покажем, что условия (4.12б) и (4.34) несовместны, если $s \neq 0$. Действительно, если для s_{3_0} выполняется (4.12б), т.е.

$$h_{s_{3_0}} = \pm E, \tag{4.36}$$

то из (4.34) следует, что

$$h_{s_{3_0}-1} = h_{s_{3_0}+1} = \pm \frac{m^2 - p^2}{E^2}, \tag{4.37}$$

а это противоречит (4.12б). Следовательно, (4.12б) несовместно с (4.34), и все допустимые h_{s_3} задаются формулой (4.12а).

Подставляя (4.7), (4.12а) в (4.34) и учитывая антикоммутативность матриц Паули σ_a, приходим к следующим уравнениям для $b^a_{s_3}$

$$\sum_{a=1}^{3} b^a_{s_3} b^a_{s_3+1} = m^2 - p^2, \quad s_3 \neq s. \tag{4.38}$$

Мы рассмотрели все условия (I.II), (I.I2) пуанкаре-инвариантности уравнения (I.I) и получили в результате, что все возможные гамильтонианы H_s в представлении (I.2) определяются соотношениями (4.8), (4.12а), (4.38).

Нетрудно увидеть, что соотношения (4.12а) не позволяют однозначно определить значения коэффициентов $b^a_{s_3}$, поскольку для шести величин $b^a_{s_3}$, $b^a_{s_3+1}$ имеется только три уравнения. Однако, по предположению уравнение (I.I) инвариантно относительно преобразований P (I.9а) и T (I.9б), т.е. гамильтониан H_s должен дополнительно удовлетворять условиям (I.Iв). Эти условия совместно с (4.8), (4.12а), (4.38) окончательно определяют явный вид H_s, то есть точные значения коэффициентов $b^a_{s_3}$.

Потребуем, чтобы гамильтониан H_s удовлетворял (I.18а). Подставив (4.8) в (I.18а), получаем уравнение

$$P \sum_{a, s_3} \sigma_a b^a_{s_3} \Lambda_{s_3} = \sum_{a, s_3} \sigma_a b^a_{s_3} \Lambda_{s_3} P. \tag{4.39}$$

Но, согласно (2.2), (I.10б), (3.I), операторы проектирования Λ_{s_3} следующим образом коммутируют с

$$P\Lambda_{s_3} = \Lambda_{-s_3} P. \tag{4.40}$$

Что же касается матриц σ_μ, то, ввиду (I.9a), (2.29)

$$P\sigma_a = \sigma_a P \quad , \text{ если } \quad r_1 = I\ ; \tag{4.41a}$$

$$P\sigma_1 = \sigma_1 P;\ P\sigma_2 = -\sigma_2 P;\ P\sigma_3 = -\sigma_3 P \quad , \text{ если } \quad r_1 = \sigma_1. \tag{4.41б}$$

Используя (4.40), (4.41), убеждаемся, что для гамильтониана (4.8) имеют место тождества

$$P\sum_{a,s_3} \sigma_a b_{s_3}^a \Lambda_{s_3} \equiv \sum_{a,s_3} \sigma_a b_{s_3}^a \Lambda_{-s_3} P \quad , \text{если } r_1 = I; \tag{4.42a}$$

$$P\sum_{a,s_3} \sigma_a b_{s_3}^a \Lambda_{s_3} \equiv \sum_{s_3} (\sigma_1 b_{s_3}^1 - \sigma_2 b_{s_3}^2 - \sigma_3 b_{s_3}^3)\Lambda_{-s_3} P, \text{ если } r_1 = \sigma_1. \tag{4.42б}$$

Сравнивая (4.39) и (4.42) и учитывая линейную независимость проекторов Λ_{s_3} и матриц σ_a, получаем следующие условия для коэффициентов $b_{s_3}^a$

$$b_a^{s_3} = b_{-s_3}^a \ , \quad r_1 = I\ ; \tag{4.43a}$$

$$b_{s_3}^1 = b_{-s_3}^1\ ;\ b_{s_3}^2 = -b_{-s_3}^2\ ;\ b_{s_3}^3 = -b_{-s_3}^3\ ,\ r_1 = \sigma_1. \tag{4.43б}$$

Итак, мы видим, что требование P-инвариантности уравнения (I.I) означает, что на коэффициенты $b_{s_3}^a$ гамильтониана H_s (4.8) дополнительно накладываются условия (4.18).

Потребуем, чтобы уравнение (I.I) было инвариантно относительно преобразования обращения времени (I.9б). Согласно (I.18б) это означает, что гамильтониан (4.8) должен удовлетворять условию

$$T\sum_{a,s_3} \sigma_a b_{s_3}^a \Lambda_{s_3} = -\sum_{a,s_3} \sigma_a b_{s_3}^a \Lambda_{s_3} T. \tag{4.44}$$

Из (I.10д), (I.10ж), (I.9б), (2.29) следует, что

$$T\Lambda_{s_3} = \Lambda_{s_3} T \qquad (4.45а)$$

$$T\sigma_a = \sigma_a T \quad \text{, если } r_2 = I \qquad (4.45б)$$

$$T\sigma_1 = \sigma_1 T,\ T\sigma_a = -\sigma_a T,\ a = 2,3 \quad \text{, если } r_2 = \sigma_1 \qquad (4.45в)$$

$$T\sigma_1 = -\sigma_1 T,\ T\sigma_2 = \sigma_2 T,\ T\sigma_3 = -\sigma_3 T \quad \text{, если } r_2 = \sigma_2 . \qquad (4.45г)$$

Учитывая (4.45), получаем непосредственно такие тождества

$$T\sum_{a,s_3} \sigma_a b_{s_3}^{a} \Lambda_{s_3} \equiv \sum_{a,s_3} \sigma_a b_{s_3}^{a} \Lambda_{s_3} T \quad \text{, если } r_2 = I \qquad (4.46а)$$

$$T\sum_{a,s_3} \sigma_a b_{s_3}^{a} \Lambda_{s_3} \equiv \sum_{s_3} (\sigma_1 b_{s_3}^{1} - \sigma_2 b_{s_3}^{2} - \sigma_3 b_{s_3}^{3}) \Lambda_{s_3} T \quad \text{, если } r_2 = \sigma_1 \qquad (4.46б)$$

$$T\sum_{a,s_3} \sigma_a b_{s_3}^{a} \Lambda_{s_3} \equiv \sum_{s_3} (-\sigma_1 b_{s_3}^{1} + \sigma_2 b_{s_3}^{2} - \sigma_3 b_{s_3}^{3}) \Lambda_{s_3} T \quad \text{, если } r_2 = \sigma_2 . \qquad (4.46в)$$

Сравнивая (4.44) и (4.46) и принимая во внимание линейную независимость Λ_{s_3} и σ_a, приходим к следующим уравнениям для $b_{s_3}^{a}$

$$b_{s_3}^{a} = -b_{s_3}^{a} = 0 \quad \text{, если } r_2 = I \qquad (4.47а)$$

$$b_{s_3}^{1} = -b_{s_3}^{1} = 0 \quad \text{, если } r_2 = \sigma_1 \qquad (4.47б)$$

$$b_{s_3}^{2} = -b_{s_3}^{2} = 0 \quad \text{, если } r_2 = \sigma_2 . \qquad (4.47в)$$

Таким образом, требование T-инвариантности уравнения (I.I) сводится к условиям (4.47), которые следует наложить на коэффициенты $b_{s_3}^{a}$ гамильтониана (4.8).

Комбинируя (2.29), (4.43) и (4.47), находим условия P-, T-инвариантности уравнения (I.I)

$$b_{s_3}^{2} = 0,\ b_{s_3}^{1} = b_{-s_3}^{1},\ b_{s_3}^{3} = b_{-s_3}^{3} \quad \text{, если } r_1 = I,\ \sigma_2 = r_2 \qquad (4.48а)$$

$$b_{s_3}^{1} = 0,\ b_{s_3}^{2} = -b_{s_3}^{2},\ b_{s_3}^{3} = -b_{-s_3}^{3} \quad \text{, если } r_1 = r_2 = \sigma_1 \qquad (4.48б)$$

$$b_{s_3}^{2} = 0,\ b_{s_3}^{1} = b_{-s_3}^{1},\ b_{s_3}^{3} = -b_{-s_3}^{3} \quad \text{, если } r_1 = \sigma_1,\ r_2 = \sigma_2 \qquad (4.48в)$$

Согласно (4.47а), матрица r_2 не может быть выбрана в виде $r_2 = I$, поскольку это приводит к $H_s \equiv 0$

Нетрудно увидеть, что если масса частицы не равна нулю, то уравнения (4.48б) и (4.12а), (4.38) несовместны. Действительно, в случае целого спина из (4.48б) следует, что $b_0^2 = b_0^3 = 0$, а это противоречит (4.12а). Если же спин полуцелый, то из (4.48б) в частности следует, что

$$b^1_{-\frac{1}{2}} = b^1_{\frac{1}{2}} = 0, \; b^2_{\frac{1}{2}} = -b^2_{\frac{1}{2}}, \; b^3_{\frac{1}{2}} = -b^3_{-\frac{1}{2}}, \tag{4.49}$$

откуда

$$\sum_{a=1}^{3} b^a_{\frac{1}{2}} b^a_{-\frac{1}{2}} = -m^2 - p^2, \tag{4.50}$$

что несовместно с (4.38). Следовательно, (4.48б) не может иметь места (т.е. нельзя выбрать $r_1 = r_2 = \sigma_1$), поскольку в этом случае не выполняется (I.18).

Из изложенного выше следует, что требования P и T-инвариантности допускают существование гамильтонианов двух типов для частиц с произвольной (не равной нулю) массой и произвольным спином, соответствующих (4.48а) и (4.48б). Согласно (4.8), (4.12а), (4.38), (4.48), гамильтониан H_s имеет вид

$$H_s = \sum_{s_3} (\sigma_1 b^1_{s_3} + \sigma_3 b^3_{s_3}) \Lambda_{s_3}, \tag{4.51}$$

а коэффициенты $b^1_{s_3}$, $b^3_{s_3}$ удовлетворяют уравнениям

$$b^1_{s_3} b^1_{s_3+1} + b^3_{s_3} b^3_{s_3+1} = m^2 - p^2 \tag{4.52а}$$

$$(b^1_{s_3})^2 + (b^3_{s_3})^2 = E^2 = m^2 + p^2 \tag{4.52б}$$

и одному из условий (4.48а) или (4.48б).

Решим систему (4.52). Общее решение (4.52б) можно записать в виде

$$b^1_{s_3} = E\cos\varphi_{s_3}\ ,\quad b^2_{s_3} = E\sin\varphi_{s_3}\ . \tag{4.53}$$

Подставив (4.53) в (4.52а), получаем

$$E^2(\cos\varphi_{s_3}\cdot\cos\varphi_{s_3+1} + \sin\varphi_{s_3}\cdot\sin\varphi_{s_3+1}) \equiv \\ \equiv E^2\cos(\varphi_{s_3} - \varphi_{s_3+1}) = m^2 - \rho^2, \tag{4.54}$$

откуда

$$\varphi_{s_3+1} = \varphi_{s_3} \pm 2\theta,\quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{\rho}{m}\ . \tag{4.55}$$

Из (4.55) следует такое рекуррентное соотношение для φ_{s_3}

$$\varphi_{s_3+1} = \varphi_{s_3} \pm 2\theta,\quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{\rho}{m}\ . \tag{4.56}$$

Формула (4.56) позволяет определить все φ_{s_3} (а следовательно, и все коэффициенты $b^1_{s_3}$, $b^3_{s_3}$ гамильтониана (4.5I)), если задано какое-нибудь φ_{s_30}. Для нахождения начального φ_{s_30} воспользуемся (4.48а), (4.48в).

Потребуем, чтобы выполнялось (4.48а). Согласно (4.53) это приводит к таким условиям для φ_{s_3}

$$\varphi_{s_3} = \varphi_{-s_3} \pm 2\pi n\ ,\quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.57}$$

Исследуем совместность условий (4.57) и (4.56). Очевидно, сомнение в совместности этих уравнений может возникать только в том случае, когда (4.56) связывает φ_s и φ_{-s}, иначе (4.56) и (4.57) независимы. Такая ситуация возникает только при $s_3 = -\frac{1}{2}$, когда (4.56) имеет вид

$$\varphi_{\frac{1}{2}} = \varphi_{-\frac{1}{2}} \pm 2\theta\ . \tag{4.58}$$

Формулы (4.57) не противоречат друг другу только при $\rho = 0$. Следовательно, в случае полуцелого спина (т.е. именно тогда, когда s_3 принимает значение $-\frac{1}{2}$) соотношения (4.52) и (4.48а) несовместны. Это означает, что условие (4.48а) может иметь место только в случае целых s, а для s полуцелых нельзя положить в (1.9) $\Gamma_1 = I$, $\Gamma_2 = \sigma_2$.

Если же матрицы Γ_1, Γ_2 выбраны так, что имеет место (4.48в), то из (4.53), (4.48в) следует такое уравнение для φ_{s_3}

$$\varphi_{s_3} = -\varphi_{-s_3} \pm 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.59}$$

Формула (4.59) совместна с (4.56) при всех значениях s_3. Положив в (4.59) $s_3 = 0$, получаем

$$\varphi_0 = \pm 2\pi n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4.60}$$

Рассматривая уравнения (4.59), (4.56) для $s_3 = -\frac{1}{2}$, приходим к соотношению

$$\varphi_{\frac{1}{2}} = \theta \pm 2\pi n = \operatorname{arctg} \frac{p}{m} \pm 2\pi n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4.61}$$

Из (4.60), (4.61), (4.56) нетрудно найти φ_{s_3} для произвольного s_3.

Объединим полученные результаты в одну формулу. Используя обозначения

$$B_{s_3} = \Lambda_{s_3} + \Lambda_{-s_3}, \quad C_{s_3} = \Lambda_{s_3} - \Lambda_{-s_3} \tag{4.62}$$

и учитывая (4.53), (4.56), (4.59)–(4.61), запишем гамильтониан (4.51) в виде

$$H_s = E \sum_{s_3 \geq 0} \left(\sigma_1 \cos \varphi_{s_3} \cdot B_{s_3} + \sigma_3 \sin \varphi_{s_3} \, C_{s_3} \right); \tag{4.63а}$$

$$\varphi_{s_3+1} = \varphi_{s_3} \pm 2\theta, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{p}{m}; \tag{4.63б}$$

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_{\frac{1}{2}} = \theta. \tag{4.63в}$$

Кроме того, согласно (4.51), (4.53), (4.57) только для частиц с целым спином возможен еще гамильтониан вида

$$H_s = E \sum_{s_3 \geq 0} \left(\sigma_1 \cos \varphi_{s_3} + \sigma_1 \sin \varphi_{s_3} \right) B_{s_3}, \tag{4.64}$$

где φ_{s_3} снова задаются соотношениями (4.38б), а φ_0 – произвольная функция.

Формулы (4.38), (4.39) дают решение задачи, поставленной в § I, т.е. описывают все возможные (с точностью до эквивалентности) гамильтонианы H_s, при которых уравнение (I.I) инвариантно относительно преобразований из группы Пуанкаре и относительно P, T-преобразований.

Из (4.63б) видно, что число возможных гамильтонианов растет с увеличением спина. Так, например, для спина $\frac{3}{2}$ имеется два гамильтониана, для $\frac{5}{2}$ – четыре и т.д. Это обусловлено тем, что каждому значению φ_{s_3} соответствует два значения параметра φ_{s_3+1} (см. 4.63б)

$$\varphi_{s_3+1}=\varphi_{s_3}+2\theta \quad \text{или} \quad \varphi_{s_3+1}=\varphi_{s_3}-2\theta. \tag{4.65}$$

Следовательно, при переходе от φ_{s_3} к φ_{s_3+1} число различных наборов параметров φ_{s_3} удваивается. Максимальное значение s_3 равно спину s частицы. Поскольку любому набору φ_{s_3} соответствует гамильтониан (4.63а), то количество возможных операторов H_s удваивается при переходе от s к $s+1$. Для $s=0$ и $s=\frac{1}{2}$ формулы (4.63) определяют H_s однозначно, следовательно, число различных гамильтонианов (4.63а) для частицы с произвольным спином s равно

$$N_s=\begin{cases}2^{s}, & s \text{ целые};\\ 2^{s+\frac{1}{2}}, & s \text{ полуцелые}.\end{cases} \tag{4.66}$$

Общее решение рекуррентных соотношений (4.63б) может быть записано в виде

$$\varphi_{s_3}=\varphi_{s_3\,min}+n_{s_3}\cdot 2\theta, \tag{4.67}$$

где n_{s_3} принимает одно из следующих значений

$$n_{s_3}=\begin{cases} s_3,\ s_3-2,\ s_3-4,\ \dots,\ -s_3; & s \text{ — целые}\\ s_3-\frac{1}{2},\ s_3-\frac{5}{2},\ s_3-\frac{9}{2},\ \dots,\ -s_3+\frac{1}{2}, & s \text{ — полуцелые}\end{cases} \tag{4.68}$$

а $\varphi_{s_3\,min}$ заданы в (4.63в).

Докажем (4.67) для случая целых s (для s полуцелых доказательство аналогично). Чтобы определить φ_{s_3} для произвольного s_3 мы должны, исходя из $\varphi_0=0$ последовательно найти (используя (4.63б)) φ_1, φ_2, φ_3 и т.д. При этом каждый раз выбор знака в (4.63б) совершенно произволен. Пусть при переходе от φ_{s_3} к φ_{s_3+1} мы все время используем (4.63б) со знаком "+". Тогда, очевидно, получится

$$\varphi_{s_3}=\varphi^1_{s_3}=\varphi_0+s_3\cdot 2\theta . \tag{4.69}$$

Если же один раз при переходе от какого-нибудь $\varphi_{s'_3}$ к $\varphi_{s'_3+1}$, $s'_3<s_3$ воспользоваться формулой (4.63б) со знаком "–", то величина конечного φ_{s_3} уменьшится на 4θ, поскольку на каком-то этапе мы, вместо того, чтобы добавить, отняли 2θ. В результате получится

$$\varphi_{s_3}=\varphi^2_{s_3}=\varphi^1_{s_3}-4\theta=\varphi_0+(s_3-2)\cdot 2\theta . \tag{4.70}$$

Аналогично получаем, что если при определении φ_{s_3} два раза употреблялась формула (4.63б) со знаком "–", а во всех остальных случаях использовалась (4.63б) со знаком "+", то

$$\varphi_{s_3}=\varphi^3_{s_3}=\varphi^2_{s_3}-4\theta=\varphi_0+(s-4)2\theta . \tag{4.71}$$

Продолжая подобные рассуждения и учитывая, что использование (4.63б) только со знаком "–" приводит к

$$\varphi_{s_3}=\varphi_0-s_3\cdot 2\theta , \tag{4.72}$$

убеждаемся в справедливости (4.67), (4.68).

Выразим гамильтонианы (4.63) для $s\le\frac{5}{2}$ через оператор спиральности $S_p = \frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{p}$. Согласно (4.62), (3.1) получаем

$$s=\tfrac{1}{2} \quad H_{\frac{1}{2}} = \sigma_1 m + 2\sigma_3 (\vec{s}\cdot\vec{p}); \tag{4.73а}$$

$$s=1 \quad H_1 = \{\sigma_1[E^2 - 2(\vec{s}\cdot\vec{p})^2] \pm 2\sigma_3 m (\vec{s}\cdot\vec{p})\} E^{-1}; \tag{4.73б}$$

$$s=\tfrac{3}{2} \quad H^1_{\frac{3}{2}} = \{\sigma_1[2E^2 + p^2 + 2(\vec{s}\cdot\vec{p})^2] m + \sigma_3[(2E^2 + \tfrac{1}{12}p^2)(\vec{s}\cdot\vec{p}) - \tfrac{4}{3}(\vec{s}\cdot\vec{p})^3]\} E^{-2}; \tag{4.73в}$$

$$H^2_{\frac{3}{2}} = \sigma_1 m + \tfrac{1}{3}\sigma_3[7(\vec{s}\cdot\vec{p}) - 4(\vec{s}\cdot\vec{p})^3 p^{-2}]; \tag{4.73г}$$

$$s=2 \quad H^1_2 = \{\tfrac{1}{3}\sigma_1[3E^4 + 2(\vec{s}\cdot\vec{p})^4 - (\vec{s}\cdot\vec{p})^2(8p^2 + 6m^2)] \pm \tfrac{1}{3}\sigma_3[m\cdot 2(\vec{s}\cdot\vec{p})(5p^2 + 3m^2) - m(\vec{s}\cdot\vec{p})^3]\} E^{-3}; \tag{4.73д}$$

$$H^2_2 = \sigma_1\{E + \tfrac{2}{3}[4(\vec{s}\cdot\vec{p})^2 - (\vec{s}\cdot\vec{p})^4 p^{-2}] E^{-1}\} \pm \tfrac{1}{3}\sigma_3 m[(\vec{s}\cdot\vec{p})^3 p^{-2} - (\vec{s}\cdot\vec{p})] E^{-1}; \tag{4.73е}$$

$$s=\tfrac{5}{2} \quad H^1_5 = \{\sigma_1 m[\tfrac{2}{3}(\vec{s}\cdot\vec{p})^4 - (\vec{s}\cdot\vec{p})^2(\tfrac{11}{2}p^2 + 2m^2) + m^4 + \tfrac{15}{8}p^4 + \tfrac{5}{2}p^2m^2] + \sigma_3[\tfrac{4}{15}(\vec{s}\cdot\vec{p})^5 - \tfrac{1}{12}(E^2 - 18p^2)(\vec{s}\cdot\vec{p})^3 + (\tfrac{27}{80}p^4 + 2m^4 + \tfrac{19}{4}p^2m^2)(\vec{s}\cdot\vec{p})\} E^{-4}; \tag{4.73ж}$$

$$H^2_5 = \{\sigma_1 m[2m^2 + \tfrac{39}{32}p^2 + \tfrac{1}{2}(\vec{s}\cdot\vec{p})^4 p^{-2} - \tfrac{13}{4}(\vec{s}\cdot\vec{p})^2] + \sigma_3\cdot\tfrac{1}{6}[\tfrac{1}{5}(m^2 + 3p^2)(\vec{s}\cdot\vec{p})^5 + m^2p^2(\vec{s}\cdot\vec{p})^3 - p^4(\vec{s}\cdot\vec{p})^3 + \tfrac{1}{40}(571m^2 + 596p^2)p^4(\vec{s}\cdot\vec{p})]\} p^{-4} E^{-1}; \tag{4.73з}$$

$$H^3_{\frac{5}{2}} = \sigma_1 m + \sigma_3[\tfrac{4}{15}(\vec{s}\cdot\vec{p})^5 p^{-4} - 2(\vec{s}\cdot\vec{p})^3 p^{-2} + \tfrac{149}{60}(\vec{s}\cdot\vec{p})]. \tag{4.73и}$$

Различные гамильтонианы для одних и тех же значений s унитарно эквивалентны (например, $H^1_{\frac{3}{2}}$ эквивалентен $H^2_{\frac{3}{2}}$ и т.д.). Следует подчеркнуть, однако, что после замены $p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$ (т.е. при переходе от свободной теории к описанию взаимодействия частицы с внешним электромагнитным полем) такая эквивалентность уже не имеет места.

Приведем еще простейшие гамильтонианы H_s для произвольного спина S. Положив в (4.67) $n_{S_3} = S_3$ для целых S и $n_{S_3} = S_3 - \frac{1}{2}$ для S полуцелых, получаем из (4.67), (4.63а)

$$H_S = E \sum_{S_3 \geq 0} \left[\sigma_1 \cos(2 S_3 \theta) B_{S_3} + \sigma_3 \sin(2 S_3 \theta) C_{S_3} \right]. \quad (4.74)$$

Положив же в (4.67) $n_{S_3} = (-1)^{S_3}$ для S целых и $n_{S_3} = (-1)^{S_3 - \frac{1}{2}}$ для S полуцелых, получаем из (4.67), (4.63а), (4.64), (4.62)

$$H_S = \sigma_1 m + \sigma_3 p \sum_{S_3} (-1)^{S_3 - \frac{1}{2}} \Lambda_{S_3}, \; S \text{ полуцелые} \quad (4.75а)$$

$$H_S = \sigma_1 m + \sigma_3 p \sum_{S_3} (-1)^{S_3} \Lambda_{S_3}, \quad S \text{ целые} \quad (4.75б)$$

Выразим H_S (4.75б) через оператор спиральности $S_p = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{p}$ для $S \leq 2$. Согласно (3.I), (4.75б)

$$H_0 = \sigma_1 m + \sigma_3 p ; \quad (4.76а)$$

$$H_1 = H_0 - 2 \sigma_3 p S_p^2 ; \quad (4.76б)$$

$$H_2 = H_1 - \frac{2}{3} \sigma_3 p (S_p^2 - S_p^4). \quad (4.76в)$$

Из (4.76) видно, что гамильтониан для спина S выражается через гамильтониан для $S-1$. Таким образом, явный вид оператора H_S для произвольного спина полностью определяется видом H_S для $S=0$.

В заключение этого параграфа покажем, что уравнение (I.I) с гамильтонианами (4.63), (4.64) инвариантно относительно преобразования зарядового сопряжения (I.9в). Для доказательства достаточно указать такую матрицу r_3, что соотношения (I.I0к,л) обращаются в тождество. Эта матрица имеет вид

$$r_3 = i \begin{pmatrix} 0 & -\Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.77)$$

где $(2S+1)$ -мерная матрица Δ однозначно определяется соотношениями [11]

$$\Delta \hat{S}_{ab} = - \hat{S}^*_{ab} \Delta ; \quad \Delta^2 = (-1)^{2S}. \quad (4.78)$$

Действительно, при таком определении Γ_3 мы сразу получаем из (I.9в), (I.2а,б), (I.3)

$$C P_a = -P_a C, \quad C I_{ab} = -I_{ab} C. \tag{4.79}$$

Но из (4.79), (3.I) следует, что

$$C \Lambda_{s_3} = \Lambda_{s_4} C. \tag{4.80}$$

Учитывая (4.80) и тот факт, что Γ_3 (4.77) антикоммутирует с σ_1, σ_3, приходим к тождеству (см. (4.63), (4.64))

$$C H_s = -H_s C. \tag{4.81}$$

Наконец, из (I.2в), (4.79), (4.8I) следует непосредственно, что

$$C I_{0a} = -I_{0a} C. \tag{4.82}$$

Согласно (4.79), (4.8I), (4.82) при выборе матрицы Γ_3 в виде (4.77) выполняются соотношения (I.I0к). Из (I.9), (2.29), (4.77) видно, что при этом выполняются также условия (I.I0л). Следовательно, уравнение (I.I) с найденными гамильтонианами (4.63), (4.64) C-инвариантно.

Подведем итоги. Исходя из представления (I.2) генераторов группы Пуанкаре мы нашли все возможные гамильтонианы H_s такие, что уравнение (I.I) инвариантно относительно неоднородных преобразований Лоренца (I) и преобразований P (I.9а), T (I.9б). Эти гамильтонианы задаются формулами (4.63), (4.64). Уравнение (I.I) с полученными гамильтонианами оказывается также инвариантным относительно преобразования зарядового сопряжения (I.9в), следовательно, в используемом подходе C-инвариантность является следствием релятивистской инвариантности и P-, T-инвариантности.

§ 5. Уравнения для частиц с нулевой массой

Уравнения для частиц с массой $m=0$ могут быть получены путем предельного перехода $m \to 0$ из уравнений для частиц с произвольным спином, найденных в § 1-4. Такой переход вполне допустим и не приводит ни к каким трудностям, которые обычно имеют место в теории частиц с высшими спинами [46]. Действительно, все, что требуется для релятивистской инвариантности уравнения (1.1) – это выполнение соотношений (4.38) для коэффициентов $b^{a}_{s_3}$ разложения (4.8) гамильтониана H_s, а соотношения (4.38) определены и для $m=0$. Однако полученные нами уравнения инвариантны относительно пространственной инверсии, а в случае $m=0$ требование P-инвариантности физически не оправдано. Поэтому в этом параграфе мы несколько изменим формулировку задачи, поставленной в § 1.

Будем искать уравнения для безмассовых частиц в шредингеровой форме (1.1), используя представление (1.2) генераторов группы $P(1,3)$. Поставим задачу нахождения всех возможных гамильтонианов $\mathcal{H}_s$ таких, чтобы уравнение (1.1) было пуанкаре-инвариантно и описывало частицы с нулевой массой. Никаких требований инвариантности (1.1) относительно преобразований P, T, C мы *a priori* не накладываем.

Как показано в § 1, уравнение (1.1) пуанкаре-инвариантно, если имеют место соотношения (1.12)

$$[H_s, P_a] = [H_s, J_{ab}] = 0; \tag{5.1а}$$

$$[\vec{x}, H_s] \times [\vec{x}, H_s] = -4i\vec{S}. \tag{5.1б}$$

Для того, чтобы (1.1) описывало частицу с нулевой массой, должно выполняться

$$H_s^2 = E^2 = P^2. \qquad (5.2)$$

Таким образом, ставится задача определения всех возможных операторов H_s, удовлетворяющих соотношениям (5.I), (5.2).

Соотношения (5.I), (5.2) совпадают с (I.II), (I.I2), если в последних положить $m=0$. При решении (I.II), (I.I2) мы вплоть до формулы (4.36) не ограничивали себя случаем $m\neq 0$, следовательно, все выводы, полученные в § 4 до (4.36), могут быть использованы в настоящем параграфе. Согласно (4.8), (4.I2) общий вид H_s, удовлетворяющий (5.I), (5.2), задается формулами

$$H_s = \sum_{s_3=-s}^{s} h_{s_3} \Lambda_{s_3}, \qquad (5.3а)$$

$$h_{s_3} = \sum_{a=1}^{3} \sigma_a b^a_{s_3}, \quad h^2_{s_3} = \sum_{a=1}^{3} (b^a_{s_3})^2 = P^2; \qquad (5.3б)$$

или

$$h_{s_3} = b^0_{s_3}, \qquad h^2_{s_3} = (b^0_{s_3})^2 = P^2, \qquad (5.3в)$$

причем h_{s_3}, согласно (4.34), должны удовлетворять единственному (кроме 5.3б,в) условию

$$\frac{1}{2}\{h_{s_3}, h_{s_3+1}\} = -P^2. \qquad (5.4)$$

Для упрощения анализа соотношения (5.4) воспользуемся тем фактом, что оператор

$$\frac{I_{12}P_3 + I_{23}P_1 + I_{31}P_2}{P} \equiv \frac{\vec{S}\cdot\vec{P}}{P} = S_P \qquad (5.5)$$

является оператором Казимира для представлений <u>II</u> класса (когда $P_\mu P^\mu = 0$) группы $P(1,3)$ [79]. Это означает, что, если генераторы (2.I) удовлетворяют алгебре $P(1,3)$ (что является необходимым условием ковариантности уравнения (I.I) и $P_\mu P^\mu \equiv H_s^2 - P^2 = 0$, то оператор (5.5) коммутирует со всеми P_μ, $I_{\mu\nu}$ из (2.I), т.е. имеют место соотношения

$$[P_a, S_p] = [H_s, S_p] = [I_{ob}, S_p] = 0; \qquad (5.6а)$$

$$[I_{oa}, S_p] = 0. \qquad (5.6б)$$

Выполнение условий (5.6а) является необходимым для ковариантности (1.1). Из (2.1), (5.3) видно, что (5.6а) выполняется тождественно. Потребуем, чтобы удовлетворялось (5.6б). Используя (3.15), получаем из (2.1), (5.6б)

$$0 = \left[tP_a - \frac{1}{2}\{x_a, H_s\}, S_p\right] = -\frac{1}{2}\left\{[x_a, S_p], H_s\right\} \equiv -\frac{1}{2}\left\{S_a - \frac{P_a}{P} S_p, H_s\right\}, \qquad (5.7)$$

или

$$[H_s, S_a] = 2\left(S_a - \frac{P_a}{P} S_p\right) H_s. \qquad (5.8)$$

Учитывая общий вид H_s (5.3а) перепишем (5.8) таким образом

$$\sum_{s_3} h_{s_3} [\Lambda_{s_3}, \vec{S}] = 2\left(\vec{S} - \frac{\vec{P}}{P} S_p\right) \sum_{s_3} h_{s_3} \Lambda_{s_3}, \qquad (5.9)$$

или, используя формулу (3.13) для коммутатора $[\Lambda_{s_3}, \vec{S}]$

$$\sum_{s_3} \Big\{ i \frac{\vec{P} \times \vec{S}}{2P} (h_{s_3 - 1} - h_{s_3 + 1}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{P}}{P} S_p - \vec{S}\right)(2h_{s_3} - h_{s_3+1} -$$

$$- h_{s_3+1}) \Big\} \Lambda_{s_3} = 2\left(\vec{S} - \frac{\vec{P}}{P} S_p\right) \sum_{s_3} h_{s_3} \Lambda_{s_3}. \qquad (5.10)$$

Из (5.10), ввиду линейной независимости проекторов Λ_{s_3} и векторов $\frac{\vec{P} \times \vec{S}}{P} \Lambda_{s_3}$, $\left(\vec{S} - \frac{\vec{P}}{P} S_p\right)\Lambda_{s_3}$, следует такое уравнение для h_{s_3}

$$h_{s_3+1} = -h_{s_3}. \qquad (5.11)$$

Итак, условие (5.6б) эквивалентно требованию (5.11), налагаемому на коэффициенты гамильтониана. Подставив (5.11) в (5.4), убеждаемся, что последнее уравнение обращается в тождество, если выполняется (5.3б) или (5.3в). Следовательно, в случае $m=0$ уравнения (5.11), (5.3б,в) являются единственными условиями, которые нужно наложить на коэффициенты гамильтониана (5.3а), чтобы уравнение (I.I) было пуанкаре-инвариантным.

Нетрудно убедиться, что, с точностью до унитарной эквивалентности, общее решение соотношений (5.3б,в) и (5.II) можно записать в виде

$$h_{s_3} = \pm(-1)^{\mu_{s_3}} \rho \cdot \sigma_3, \quad \mu_{s_3} = \begin{cases} s_3, & s\text{-целые} \\ s_3 + \frac{1}{2}, & s\text{-полуцелые} \end{cases} \tag{5.12а}$$

или

$$h_{s_3} = \pm(-1)^{\mu_{s_3}} \cdot \rho. \tag{5.12б}$$

Действительно, согласно (5.II), все h_{s_3} однозначно определяются, если задать какое-нибудь $h_{s_{3 0}}$, скажем, h_s. Но для определения h_s имеется единственное условие (см. (5.3б), (5.3в))

$$h_s^2 = \rho^2, \tag{5.13}$$

где $h_{s_3} = b^0_{s_3}$ или $h_s = \sum_{a=1}^{3} b^a_s \sigma$ (5.14)

b^μ_s – это неизвестные действительные функции от ρ (действительность $b^\mu_{s_3}$ – необходимое условие эрмитовости гамильтониана H_s).

С помощью унитарного преобразования

$$h_s \to U h_s U^+,$$

$$U = (\rho + b^3_s + i\sigma_2 b^1_s - i\sigma_1 b^2_s)[2\rho(\rho + b^3_s)]^{-\frac{1}{2}}$$

формулы (5.13), (5.14) сводятся к виду

$$h_s = b^0_s \quad \text{или} \quad h_s = \sigma_3 b^3_s;$$
$$b^0_s = \pm\rho \qquad\qquad b^3_s = \pm\rho. \tag{5.16}$$

Из (5.16), (5.II) следуют соотношения (5.12) для произвольного s_3.

Подставляя (5.16) в (5.3а), приходим к следующим выражениям для H_s

$$H_s^1 = \pm p \sum_{s_3=-s}^{s} (-1)^{\mu_{s_3}} \Lambda_{s_3} ; \tag{5.17a}$$

$$H_s^2 = \sigma_3 p \sum_{s_3=-s}^{s} (-1)^{\mu_{s_3}} \Lambda_{s_3} . \tag{5.17б}$$

Таким образом, мы показали, что, с точностью до эквивалентности, все возможные гамильтонианы H_s , приводящие к ковариантному уравнению (I.I) для частиц с нулевой массой, задаются формулами (5.17).

Приведем явный вид H_s для $s \le 3$. Подставляя (3.I) в (5.17), получаем

$$\begin{aligned}
H_0^2 &= \sigma_3 p ; \\
H_{\frac{1}{2}}^2 &= 2\sigma_3 (\vec{s}\cdot\vec{p}) ; \\
H_1^2 &= \sigma_3 p [1 - 2(\vec{s}\cdot\vec{p})^2 p^{-2}] ; \\
H_{\frac{3}{2}}^2 &= \sigma_3 (\vec{s}\cdot\vec{p}) [\tfrac{7}{3} - \tfrac{4}{3}(\vec{s}\cdot\vec{p})^2 p^{-2}] ; \\
H_2^2 &= \sigma_3 [p - \tfrac{8}{3}(\vec{s}\cdot\vec{p})^2 p^{-1} + \tfrac{2}{3}(\vec{s}\cdot\vec{p})^4 p^{-3}] ; \\
H_{\frac{5}{2}}^2 &= \sigma_3 (\vec{s}\cdot\vec{p}) \cdot \tfrac{1}{4} [\tfrac{149}{10} - 12(\vec{s}\cdot\vec{p})^2 p^{-2} + \tfrac{8}{5}(\vec{s}\cdot\vec{p})^4 p^{-4}] ; \\
H_3^2 &= \sigma_3 [p - \tfrac{136}{45}(\vec{s}\cdot\vec{p})^2 p^{-1} + \tfrac{10}{9}(\vec{s}\cdot\vec{p})^4 p^{-3} - \tfrac{4}{45}(\vec{s}\cdot\vec{p})^6 p^{-5}] .
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Мы выписали только гамильтонианы H_s^2, поскольку, согласно (5.17), операторы H_s^1 могут быть получены из (5.18) посредством замены $\sigma_3 \to \pm 1$. Следовательно, H_s^1 эквивалентны H_s^2, если на решения (I.I) наложить условие $(1 + \epsilon\sigma_3)\Psi = 0$; $\epsilon = \pm 1$

Уравнение (I.I) с найденными гамильтонианами H_s содержит $2(2s+1)$ компонент и описывает целый набор частиц со спиральностями S_3, $-S \leq S_3 \leq S$. Для того, чтобы описать одну частицу с $S_3 = \pm S$, на волновую функцию необходимо наложить пуанкаре-инвариантные дополнительные условия, "обрезающие" лишние компоненты. Из (5.6) следует, что эти условия можно записать в виде

$$\Lambda_{S_3} \Psi(t, \vec{x}) = 0, \quad -S < S_3 < S. \tag{5.19}$$

Действительно, ввиду (3.1), (5.6) условия (5.19) пуанкаре-инвариантны. Кроме того, согласно (3.1), (3.5), (3.6), собственные значения оператора спиральности (5.5) на множестве функций $\Psi(t, \vec{x})$ удовлетворяющих (5.19), могут равняться только $\pm S$, что и требуется.

Помимо (5.19), на $\Psi(t, \vec{x})$ можно наложить дополнительно одно из следующих релятивистски инвариантных условий

$$(1 + \epsilon \tilde{S}_p + \epsilon' \sigma_3 + \epsilon \epsilon' \sigma_3 \tilde{S}_p) \Psi(t, \vec{x}) = 0; \tag{5.20а}$$

$$(1 + \epsilon \sigma_3) \Psi(t, \vec{x}) = 0; \tag{5.20б}$$

$$(1 + \epsilon \tilde{S}_p) \Psi(t, \vec{x}) = 0; \tag{5.20в}$$

$$(1 + \epsilon \sigma_3 \tilde{S}_p) \Psi(t, \vec{x}) = 0; \tag{5.20г}$$

$$(-3 + \epsilon \tilde{S}_p + \epsilon' \sigma_3 + \epsilon \epsilon' \sigma_3 \tilde{S}_p) \Psi(t, \vec{x}) = 0; \tag{5.20д}$$

где $\epsilon, \epsilon' = \pm 1$, $\tilde{S}_p = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{s \cdot p} = \frac{1}{s} S_p$.

Пуанкаре-инвариантность уравнений (5.20) очевидна, поскольку все входящие в них операторы коммутируют с генераторами (1.2).

Покажем, что соотношения (5.20) исчерпывают все возможные (с точностью до унитарной эквивалентности ковариантные дополнительные условия, которые существуют для волновых функций Ψ, удовлетворяющих уравнениям (1.1), (5.19). Для доказательства можно было бы построить самый общий вид оператора, коммутирующего с алгеброй (2.1) (это должен быть полином от операторов Казимира S_P и $\frac{H_s}{E}$) и показать, что он всегда сводится к (5.20). Мы, однако, изберем иной путь.

Известно [79] , что неприводимые представления II класса $(P_\mu P^\mu = 0)$ группы $P(1,3)$ характеризуются двумя числами – ϵ и S_3, где ϵ – собственное значение оператора $\frac{P_0}{|P_0|} = \frac{H_s}{E}$, а S_3 – оператора спиральности (5.5). Собственные функции указанных операторов и образуют пространство неприводимого представления $D^\epsilon(s)$. Нетрудно убедиться, что решения уравнения (1.1) с гамильтонианом (5.17б), удовлетворяющие дополнительным условиям (5.19), образуют пространство представления

$$D^+(s) \oplus D^-(s) + D^+(-s) \oplus D^-(-s) . \qquad (5.21)$$

Может быть доказано следующее утверждение: функции $\Psi(t,\vec{x})$, удовлетворяющие уравнению (1.1) с гамильтонианом (5.17б), условию (5.19) и одному из соотношений (5.20), образуют пространства представлений

$$D^\epsilon(\epsilon' s) \oplus D^\epsilon(-\epsilon' s) \oplus D^{-\epsilon}(\epsilon' s); \qquad (5.22а)$$

$$D^{-\epsilon}(s) \oplus D^{-\epsilon}(-s); \qquad (5.22б)$$

$$D^+(-\epsilon' s) \oplus D^-(-\epsilon' s); \qquad (5.22в)$$

$$D^{-\epsilon}(s) \oplus D^\epsilon(-s); \qquad (5.22г)$$

$$D^\epsilon(\epsilon' s), \qquad (5.22д)$$

если имеет место (5.20а), (5.20б), (5.20в), (5.20г), (5.20д) соответственно.

Для доказательства рассмотрим два оператора

$$P_1^{\epsilon} = \frac{1}{2}\left(1+\epsilon\,\frac{H_s^2}{P}\right); \quad P_2^{\epsilon'} = \frac{1}{2}\left(1+\epsilon'\tilde{S}_p\right). \tag{5.23}$$

На множестве функций ψ, удовлетворяющих соотношениям (5.19), P_1^{ϵ} и $P_2^{\epsilon'}$ являются операторами проектирования на подпространства собственных функций операторов $\frac{H_s^2}{P}$ и $\tilde{S}_p$ с собственными значениями ϵ и ϵ' соответственно. Поскольку P_1^{ϵ}, $P_2^{\epsilon'}$ коммутируют с генераторами (1.2), то пространство представления $D^{\epsilon}(\epsilon' s)$ можно определить как множество $2(2s+1)$ -компонентных функций ψ со скалярным произведением (1.3), которые удовлетворяют уравнению (1.1) с гамильтонианом (5.17б), условию (5.19) и

$$P_1^{\epsilon} P_2^{\epsilon'} \psi = \psi \Rightarrow \psi \subset D^{\epsilon}(\epsilon' s). \tag{5.24}$$

Для доказательства утверждения (5.22) достаточно теперь переписать (5.20) в виде

$$P_1^{\epsilon} P_2^{\epsilon'} \psi(t,\vec{x}) = 0; \tag{5.25а}$$

$$\left(P_1^{\epsilon} P_2^{\epsilon'} + P_1^{\epsilon} P_2^{-\epsilon'}\right)\psi(t,\vec{x}) \equiv P_1^{\epsilon}\psi(t,\vec{x}) = 0; \tag{5.25б}$$

$$\left(P_1^{\epsilon} P_2^{\epsilon'} + P_1^{-\epsilon} P_2^{\epsilon'}\right)\psi(t,\vec{x}) \equiv P_2^{\epsilon'}\psi(t,\vec{x}) = 0; \tag{5.25в}$$

$$\left(P_1^{\epsilon} P_2^{\epsilon'} + P_1^{-\epsilon} P_2^{-\epsilon'}\right)\psi = 0; \tag{5.25г}$$

$$\left(P_1^{-\epsilon} P_2^{-\epsilon'} + P_1^{-\epsilon} P_2^{\epsilon'} + P_1^{\epsilon} P_2^{-\epsilon'}\right)\psi(t,\vec{x}) = 0. \tag{5.25д}$$

Но теперь понятно, что (5.20) исчерпывают все возможные неэквивалентные релятивистские дополнительные условия, которые можно наложить на $\psi(t,\vec{x})$. Действительно, каждое нетривиальное дополнительное условие уменьшает число независимых компонент ψ. Если это сделано релятивистски инвариантным образом, то такое уменьшение числа компонент эквивалентно выделению подпространства представления группы $P(1,3)$. Поскольку в (5.22) содержатся все возможные подпространства представления (5.21), поскольку (5.20) исчерпывают все неэквивалентные инвариантные дополнительные условия.

Исследуем свойства (5.20) относительно преобразований P, T, C из (1.9). Согласно (1.10), имеют место соотношения

$$P\hat{S}_p=-\tilde{S}_p P;\ P\hat{\mathcal{E}}=-\hat{\mathcal{E}}P;\ T\hat{S}_p=\hat{S}_p T;$$
$$T\hat{\mathcal{E}}=-\hat{\mathcal{E}}T;\ C\hat{S}_p=\hat{S}_p C;\ C\hat{\mathcal{E}}=-\hat{\mathcal{E}}C;\ \hat{\mathcal{E}}=\frac{H_s^2}{p}\sim\sigma_3 \qquad (5.26)$$

Из (5.26) видно, что

Условия (5.20а), (5.20д) $C\cdot T$ -инвариантны, но P, C, T — неинвариантны

Условия (5.20б) CP, CT, PT -инвариантны, но P, C, T — неинвариантны

Условия (5.20в) C, CT -инвариантны, но P, T -неинвариантны

Условия (5.20г) CT, P -инвариантны, но C, T -неинвариантны.

Таким образом, мы нашли все неэквивалентные уравнения для частиц с нулевой массой и произвольной спиральностью и исследовали их C, P, T - свойства. Интересно отметить, что уравнение (1.1) с дополнительными условиями (5.20а), (5.20г), (5.20д) CPT - неинвариантно как в случае, если T - отражение времени по Паули, так и в случае $T=T^{W}=CT^{P}$, когда используется оператор обращения времени по Вигнеру. Этот результат не противоречит CPT-теореме Паули-Людерса, поскольку последняя справедлива только для явноковариантных уравнений.

Уравнение (1.1) с гамильтонианом $H^2_{\frac{1}{2}}$ из (5.18) и дополнительным условием (5.20б) эквивалентно уравнению Вейля для нейтрино [66], а уравнение (1.1) с H_1^2 (5.18) и дополнительным условием (5.19) эквивалентно уравнениям Максвелла для электромагнитного поля в вакууме [73].

Полученные уравнения с различными C-, P-, T-свойствами могут быть полезными при описании процессов, в которых не сохраняется тот или иной вид симметрии относительно дискретных преобразований. Вопрос о возможных нарушениях P-, CP-, T- и даже CPT-инвариантности в настоящее время интенсивно исследуется экспериментаторами [81].

§ 6. Постановка задачи в случае частиц с переменными спином и массой

Обобщим уравнения, полученные в § I–4, на случай, когда спин s и масса m_s могут принимать различные дискретные значения. С точки зрения физики такое обобщение означает переход от описания единственной частицы к описанию мультиплетов, которые можно рассматривать как различные состояния некоторой релятивистской системы.

Уравнения, описывающие частицу с переменным спином, будем искать в виде (I.I)

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\vec{x})=H_{j\tau}\Psi(t,\vec{x}), \qquad (6.\mathrm{I})$$

где $H_{j\tau}$ – неизвестная операторная функция (гамильтониан частицы), зависящая от импульса и спиновых матриц, Ψ – волновая функция, преобразующаяся при 4-вращениях и сдвигах по приводимому представлению группы $P(1,3)$ и имеющая $2(2j+1)(2\tau+1)$ компонент. В § I–4 для описания всех (с точностью до эквивалентности) пуанкаре-инвариантных уравнений вида (I.I) для частиц с массой m и фиксированным спином s, мы накладывали на решения уравнения (I.I) условия(ж)

(ж) Условие (6.2а) записано в эквивалентной форме (I.II). Соотношение (6.2б) явно не выписывалось, но оно следует непосредственно из явного вида генераторов (I.2).

$$P_\mu P^\mu \Psi(t,\vec{x}) = m^2 \Psi(t,\vec{x}) , \quad (6.2а)$$

$$W_\mu W^\mu \Psi(t,x) = m^2 s(s+1) \Psi(t,\vec{x}) . \quad (6.2б)$$

где P_μ – оператор энергии-импульса, лежащий на массовой оболочке, а W_μ – вектор Паули-Любанского. Если же спин и масса частицы не фиксированы, то от условий (6.2а), (6.2б) следует отказаться.

Задачу об отыскании пуанкаре-инвариантных уравнений вида (6.I) мы решим в двух, вообще говоря, неэквивалентных подходах. Это связано с тем, что уравнения, полученные в первом подходе, оказываются удобными с точки зрения квантовой механики, а уравнения во втором подходе – с точки зрения теории поля.

В первом подходе (I) (который является непосредственным обобщением §§ I-4) задача сводится к следующему: найти все (с точностью до унитарной эквивалентности) гамильтонианы $H^I_{j\tau}$, такие, чтобы операторы

$$P_0^I = H^I_{j\tau} ; \; J^I_{ab} = x_a P_b - x_b P_a + S_{ab} ;$$
$$P_a^I = p_a = i\frac{\partial}{\partial x_a} ; \; J^I_{0a} = t p_a - \frac{1}{2}\{x_a, P_0^I\} \quad (6.3)$$

удовлетворяли алгебре Пуанкаре. Матрицы S_{ab} имеют следующую структуру

$$S_{ab} = j_c + \tau_c , \; j_c = \begin{pmatrix} \hat{j}_c & 0 \\ 0 & \hat{j}_c \end{pmatrix} , \; \tau_c = \begin{pmatrix} \hat{\tau}_c & 0 \\ 0 & \hat{\tau}_c \end{pmatrix} , \quad (6.4)$$

где j_c и τ_c – $(2j+1)(2\tau+1)$ –мерные матрицы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям алгебры $o(4)$

$$[j_a, j_b] = i j_c , \; [\tau_a, \tau_b] = i\tau_c , \; [j_a, \tau_b] = 0$$

(a,b,c) – цикл (I,2,3),

$$\sum_{a=1}^{3} j_a^2 = j(j+1), \quad \sum_{a=1}^{3} \tau_a^2 = \tau(\tau+1). \tag{6.5}$$

Во втором подходе (П) задача (*) формулируется так: найти все такие гамильтонианы $H_{j\tau}^{II}$, чтобы операторы

$$P_0^{II} = H_{j\tau}^{II}, \quad I_{ab}^{II} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}$$
$$P_a^{II} = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad I_{0a}^{II} = t p_a - x_a P_0^{II} + i\sigma_3 S_{4a} \tag{6.6}$$

удовлетворяли алгебре Пуанкаре. Здесь

$$S_{4a} = j_a + \lambda_a, \quad \lambda_a = \pm \tau_a. \tag{6.7}$$

Задача второго подхода для частного случая $\tau \equiv 0$ решена в [17], [18], [19]. Мы обобщаем эти результаты на случай частиц с переменным спином.

Представления (6.3) и (6.6) совпадают при $j=0$, $\tau=\frac{1}{2}$ (или $j=\frac{1}{2}$, $\tau=0$), так как

$$H^{I}_{0\frac{1}{2}} = H^{II}_{0\frac{1}{2}} = \sigma_1 m + 2\sigma_3(\vec{\tau}\cdot\vec{p}); \quad H^{I}_{\frac{1}{2}0} = H^{II}_{\frac{1}{2}0} = \sigma_1 m + 2\sigma_3(\vec{j}\cdot\vec{p});$$
$$-xH_{0\frac{1}{2}} + i\sigma_3 S_{4a} \equiv -\frac{1}{2}\{x, H_{0\frac{1}{2}}\}; \quad -xH_{\frac{1}{2}0} + i\sigma_3 S_{4a} = -\frac{1}{2}\{x, H_{\frac{1}{2}0}\} \tag{6.7}$$

При других значениях чисел j и τ, как будет показано ниже, генераторы (6.3) и (6.6) не совпадают и приводят к совершенно различным уравнениям. Одно из основных отличий представлений (6.3) от (6.6) состоит в том, что операторы (6.3) эрмитовы относительно обычного скалярного произведения (I.4), в то время как операторы (6.6) относительно (I.4) неэрмитовы (за исключением случаев $j=0$, $\tau=\frac{1}{2}$ или $\tau=0$, $j=\frac{1}{2}$). Однако генераторы (6.6) эрмитовы относительно такого скалярного произведения

(*) Операторы с индексами I и П, относятся к задачам I и П соответственно. Если эти индексы опущены, то соответствующие соотношения относятся как к задаче I, так и к задаче П.

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\, \Psi_1^{\dagger}(t,\vec{x}) \hat{M}(\vec{j},\vec{\tau},\vec{p}) \Psi_2(t,\vec{x}), \tag{6.8}$$

где $\hat{M}(\vec{j},\vec{\tau},\vec{p})$ – некоторый метрический оператор, явный вид которого будет найден ниже.

Если генераторы (6.3) или (6.6) удовлетворяют алгебре Пуанкаре, то уравнение (6.I) пуанкаре-инвариантно. Доказательство этого утверждения совершенно аналогично приведенному в § I на стр. 13-14 поэтому мы его не воспроизводим.

Из явного вида генераторов J_{ab} (6.3), (6.6) следует, что уравнение (I.I) с гамильтонианами $H^{I}_{j\tau}$, $H^{II}_{j\tau}$ описывает "частицу", спин s которой может принимать одно из следующих значений

$$|j-\tau| \leq s \leq j+\tau . \tag{6.9}$$

Строгое доказательство этого факта приведено в главе Ш. Масса описываемой частицы может быть либо фиксированной, либо зависящей от спина. Мы увидим, что представления (6.3), (6.6) позволяют постулировать физически наблюдаемый спектр масс

$$m_s = a_1 + b_1 s(s+1)$$

или (6.I0)

$$m_s^2 = a_2^2 + b_2^2\, s(s+1),$$

где a_α, b_α – постоянные числа.

На множестве $\{\Psi\}$ решений уравнения (6.I) определим, согласно (I.9), операторы дискретных преобразований. Матрицы r_1, r_2, r_3 выберем в виде

$$\begin{aligned} &r_1^{I} = \sigma_1 \quad \text{или} \quad r_1^{I} = I, \quad r_1^{II} = \sigma_1 \\ &r_2^{I} = r_2^{II} = \sigma_2 \\ &r_3^{I} = r_3^{II} = \sigma_2 \cdot \bar{\Delta}, \quad \bar{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta' & 0 \\ 0 & \Delta' \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6.II}$$

где I, σ_1, σ_2 – матрицы Паули вида (2.8), имеющие размерность $2(2j+1)(2\tau+1) \times 2(2j+1)(2\tau+1)$, а Δ' – $(2j+1)(2\tau+1)$ – мерная матрица, удовлетворяющая соотношениям

$$\Delta' \gamma_a = -\gamma_a^{*} \Delta', \quad \Delta' \tau_a = -\tau_a^{*} \Delta'. \tag{6.12}$$

Существование такой матрицы следует из (4.78), (6.5).

Выбор матриц Γ_1, Γ_2 в виде (6.11) единственен с точностью до унитарной эквивалентности, что нетрудно показать, используя результаты § 2.

Потребуем, чтобы уравнение (6.1) было инвариантно относительно преобразований P (1.9а) и T (1.9б). Это требование (наряду с условием пуанкаре-инвариантности) однозначно определяет все возможные (с точностью до эквивалентности) гамильтонианы $H_{j\tau}$.

Таким образом, ставятся задачи отыскания операторов $H^{I}_{j\tau}$ и $H^{II}_{j\tau}$, удовлетворяющих соотношениям (1.6), (1.10б), (1.10е), если генераторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ имеют вид (6.3) и (6.6) соответственно.

§ 7. Явный вид операторов $H^{I}_{j\tau}$

В этом параграфе решена задача I, т.е. найдены операторы $H^{I}_{j\tau}$, которые удовлетворяют системе соотношений (1.6), (1.10б), ((1.10е) в том случае, когда представление алгебры Пуанкаре имеет структуру (6.3).

Оператор квадрата массы для представления (6.3), вообще говоря, не кратный единичному, имеет вид

$$M^2 = P_\mu P^\mu = (H^{I}_{j\tau})^2 - P^2. \tag{7.1}$$

Покажем, что общее выражение для M^2 задается формулой

$$M^2 = a_0 + a_1 (\vec{S})^2 + a_2 (\vec{S})^4 + \cdots, \tag{7.2}$$

где a_n – числа. Действительно, оператор Казимира (7.1) должен коммутировать с P_μ, $J_{\mu\nu}$ (6.3) и P, T (1.9). Ввиду (6.3), (1.9), (6.11), (1.6ж), (1.15) M^2 коммутирует с P_μ, $J_{\mu\nu}$, P, T в том и только том случае, если выполняются соотношения

$$[P_a, M^2] = [x_a, M^2] = [S_a, M^2] = 0; \tag{7.3а}$$

$$[P, M^2] = [T, M^2] = 0; \tag{7.3б}$$

$$[H^I_{j\tau}, M^2] = 0. \tag{7.3в}$$

Но общее решение системы (7.3а), (7.3б) имеет вид (7.2), поскольку из (7.3б), (I.9), (6.II) следует, что M^2 не зависит от матриц Паули τ_a, а из (7.3а) – что M^2 не зависит от x_a и P_a и коммутирует со всеми генераторами S_a представления группы $O(3)$. Это означает, что M^2 должно быть функцией от оператора Казимира $(\vec{S})^2$ группы $O(3)$. Самый общий вид такой функции задается формулой (7.2), причем сумма в (7.2) содержит конечное число членов ввиду соотношения

$$\prod_s [(\vec{S})^2 - s(s+1)] \equiv 0, \quad |j-\tau| \le S \le j+\tau, \tag{7.4}$$

которое вытекает непосредственно из теоремы Клебша-Гордона. Как будет показано в главе III, при соответствующем подборе коэффициентов a_n можно получить массовую формулу (6.10).

Соотношение (7.3в) мы будем рассматривать как дополнительное уравнение для $H^I_{j\tau}$.

Для отыскания явной структуры операторов $H^I_{j\tau}$ разложим искомый гамильтониан по полной системе ортопроекторов

$$H^I_{j\tau} = \sum_{\mu, j_3, \tau_3} \sigma_\mu b^\mu_{j_3\tau_3} \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}, \tag{7.5}$$

где

$$\Lambda_{j_3} = \prod_{j_3' \ne j_3} \frac{j_p - j_3'}{j_3 - j_3'}; \quad \Lambda_{\tau_3} = \prod_{\tau_3' \ne \tau_3} \frac{\tau_p - \tau_3'}{\tau_3 - \tau_3'};$$

$$j_p = \frac{\vec{j}\cdot\vec{p}}{p}; \quad \tau_p = \frac{\vec{\tau}\cdot\vec{p}}{p}; \quad j_3 = -j, -j+1, \dots j; \quad \tau_3 = -\tau, -\tau+1, \dots \tau, \tag{7.6}$$

σ_μ - матрицы Паули (2.8) размерности $2(2j+1)(2\tau+1)\times 2(2j+1)(2\tau+1)$, а $b^\mu_{j_3\tau_3}$ - неизвестные функции от P и M.

Сравнивая (7.6), (6.5) и (3.1), (1.3) приходим к выводу, что все заключения, полученные в § 3 для проекторов Λ_{s_3}, справедливы и для операторов (7.6). В частности, согласно (3.12), (3.13'), (3.2), Λ_{j_3} и Λ_{τ_3} удовлетворяют соотношениям

$$\Lambda_{j_3}\Lambda_{j_3'}=\delta_{j_3 j_3'}\Lambda_{j_3'}; \quad \sum_{j_3=-j}^{j}\Lambda_{j_3}=1; \tag{7.7а}$$

$$\Lambda_{\tau_3}\Lambda_{\tau_3'}=\delta_{\tau_3\tau_3'}\Lambda_{\tau_3'}; \quad \sum_{\tau_3=-\tau}^{\tau}\Lambda_{\tau_3}=1; \tag{7.7б}$$

$$[\Lambda_{j_3},\vec{x}]=\frac{\vec{P}\times\vec{j}}{2P^2}\left(2\Lambda_{j_3}-\Lambda_{j_3+1}-\Lambda_{j_3-1}\right)+\frac{i}{2P}\left(\vec{j}-\frac{\vec{P}}{P}j_P\right)\left(\Lambda_{j_3+1}-\Lambda_{j_3-1}\right); \tag{7.7в}$$

$$[\Lambda_{\tau_3},\vec{x}]=\frac{\vec{P}\times\vec{\tau}}{2P^2}\left(2\Lambda_{\tau_3}-\Lambda_{\tau_3+1}-\Lambda_{\tau_3-1}\right)+\frac{i}{2P}\left(\vec{\tau}-\frac{\vec{P}}{P}\tau_P\right)\left(\Lambda_{\tau_3+1}-\Lambda_{\tau_3-1}\right); \tag{7.7г}$$

$$[\Lambda_{j_3},\vec{j}]=i\frac{\vec{P}\times\vec{j}}{2P}\left(\Lambda_{j_3+1}-\Lambda_{j_3-1}\right)-\frac{1}{2}\left(\vec{j}-\frac{\vec{P}}{P}j_P\right)\left(2\Lambda_{j_3}-\Lambda_{j_3+1}-\Lambda_{j_3-1}\right); \tag{7.7д}$$

$$[\Lambda_{\tau_3},\vec{\tau}]=i\frac{\vec{P}\times\vec{\tau}}{2P}\left(\Lambda_{\tau_3+1}-\Lambda_{\tau_3-1}\right)-\frac{1}{2}\left(\vec{\tau}-\frac{\vec{P}}{P}\tau_P\right)\left(2\Lambda_{\tau_3}-\Lambda_{\tau_3+1}-\Lambda_{\tau_3-1}\right). \tag{7.7е}$$

Покажем, что $H^I_{\mu j\tau}$ удовлетворяет условиям (1.6), (7.1), если коэффициенты $b_{j_3\tau_3}$ равны

$$b^0_{j_3\tau_3}=b^2_{j_3\tau_3}=0 \tag{7.8а}$$

$$b^1_{j_3\tau_3}=E\cos\varphi_{j_3\tau_3}, \quad b^3_{j_3\tau_3}=E\sin\varphi_{j_3\tau_3}, \quad E=(P^2+M^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{7.8б}$$

где $\varphi_{j_3\tau_3}$ - функции, удовлетворяющие рекуррентным соотношениям

$$\varphi_{j_3+1\,\tau_3}=\varphi_{j_3\tau_3}\pm 2\theta, \quad \varphi_{j_3\tau_3+1}=\varphi_{j_3\tau_3}\pm 2\theta;$$
$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{P}{M}. \tag{7.9}$$

Для доказательства рассмотрим следующее представление алгебры Пуанкаре

$$P^\kappa_0=\sigma_1 E, \quad P^\kappa_a=P_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a}; \tag{7.10а}$$

$$I^{K}_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab} \, , \tag{7.10б}$$

$$I^{K}_{oa} = t p_a - \frac{1}{2}\{x_a , P^{K}_o\} + \sigma_1 \frac{S_{ab} p_b}{E+M} \, , \tag{7.10в}$$

где матрицы S_{ob} задаются формулой (6.4).

Операторы (7.10), очевидно, удовлетворяют алгебре $P(1,3)$(I.6), поскольку они формально совпадают с генераторами в каноническом представлении Фолди-Широкова [11], [79].

Покажем, что если $H^{I}_{j\tau}$ имеет вид (7.5), (7.8), то генераторы (6.3) и (7.10) унитарно эквивалентны, т.е. что

$$H^{I}_{j\tau} = U^{+}_{j\tau} P^{K}_o U_{j\tau} = U^{+}_{j\tau} \sigma_1 E U_{j\tau} \, , \tag{7.11а}$$

$$P^{K}_o = U_{j\tau} P_o U^{+}_{j\tau} \, ; \; I^{K}_{ab} = U_{j\tau} I_{ab} U^{+}_{j\tau} \, , \tag{7.11б}$$

$$I^{K}_{oa} = U_{j\tau} I_{oa} U^{+}_{j\tau} \, , \tag{7.11в}$$

где $U_{j\tau}$ - некоторый унитарный оператор

$$U_{j\tau} \cdot U^{+}_{j\tau} = I \tag{7.12}$$

Тем самым мы докажем, что $H^{I}_{j\tau}$ удовлетворяют системе соотношений (I.6).

Оператор $U_{j\tau}$ представим в виде

$$U_{j\tau} = \sum_{j_3 \tau_3} (a_{j_3 \tau_3} + i\sigma_2 d_{j_3 \tau_3}) \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3} \tag{7.13}$$

и покажем, что можно так подобрать действительные коэффициенты $a_{j_3\tau_3}$, $d_{j_3\tau_3}$, чтобы выполнялось (7.11), (7.12).

Из условия унитарности (7.12) ввиду (7.7а), (7.7б) следует

$$U_{j\tau} U^{+}_{j\tau} = \sum_{j_3 \tau_3} \sum_{j'_3 \tau'_3} (a_{j_3 \tau_3} + i\sigma_2 d_{j_3 \tau_3})(a_{j'_3 \tau'_3} - i\sigma_2 d_{j'_3 \tau'_3}) \Lambda_{j_3} \Lambda_{j'_3} \Lambda_{\tau_3} \Lambda_{\tau'_3} =$$

$$= \sum_{j_3 \tau_3} (a^{2}_{j_3 \tau_3} + d^{2}_{j_3 \tau_3}) \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3} = I \, . \tag{7.14}$$

Ввиду линейной независимости проекторов Λ_{j_3}, Λ_{τ_3} для выполнения (7.14) (а значит, и (7.12)) необходимо и достаточно, чтобы $a_{j_3\tau_3}$, $d_{j_3\tau_3}$ удовлетворяли условию

$$a^2_{j_3\tau_3} + d^2_{j_3\tau_3} = 1 . \tag{7.15}$$

Соотношения (7.11б) для оператора (7.13) выполняются тождественно, если $a_{j_3\tau_3}$, $d_{j_3\tau_3}$ зависят только от ρ^2, M.

Потребуем, чтобы выполнялось (7.11а). Из (7.13), (7.5), (7.8) получаем

$$\begin{aligned} U^+\sigma_1 E U = (U^+)\sigma_1 E = \sum_{j_3\tau_3} (a^2_{j_3\tau_3} - d^2_{j_3\tau_3} - \\ - 2i\sigma_2 a_{j_3\tau_3} d_{j_3\tau_3})\sigma_1 E \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3} = \\ = E\sum_{j_3\tau_3} [\sigma_1(a^2_{j_3\tau_3} - d^2_{j_3\tau_3}) - 2\sigma_3 a_{j_3\tau_3} d_{j_3\tau_3}]\Lambda_{j_3}\Lambda_{\tau_3} = \\ = E\sum_{j_3\tau_3} [\sigma_1 \cos\varphi_{j_3\tau_3} + \sigma_3 \sin\varphi_{j_3\tau_3}]\Lambda_{j_3}\Lambda_{\tau_3} , \end{aligned} \tag{7.16}$$

откуда, ввиду линейной независимости матриц Паули и проекторов Λ_{j_3}, Λ_{τ_3}, следуют такие соотношения для $a_{j_3\tau_3}$, $d_{j_3\tau_3}$,

$$\begin{aligned} a^2_{j_3\tau_3} - d^2_{j_3\tau_3} &= \cos\varphi_{j_3\tau_3} , \\ 2a_{j_3\tau_3} d_{j_3\tau_3} &= -\sin\varphi_{j_3\tau_3} . \end{aligned} \tag{7.17}$$

Из (7.15), (7.17) нетрудно найти $a_{j_3\tau_3}$, $d_{j_3\tau_3}$

$$a_{j_3\tau_3} = \cos\left(\frac{\varphi_{j_3\tau_3}}{2}\right); \quad d_{j_3\tau_3} = -\sin\left(\frac{\varphi_{j_3\tau_3}}{2}\right). \tag{7.18}$$

Итак, соотношения (7.11а), (7.11б), (7.12) удовлетворяются, если $U_{j_3\tau_3}$ имеет вид (7.13), где коэффициенты $a_{j_3\tau_3}$, $d_{j_3\tau_3}$ задаются формулой (7.18); при этом в (7.18) входят те же самые параметры $\varphi_{j_3\tau_3}$, что и в (7.8б).

Покажем, что оператор $U_{j\tau}$, заданный формулами (7.13), (7.18) удовлетворяет соотношению (7.11в). Подставляя (1.2в) в правую часть (7.11в) и учитывая, что, согласно (7.11а),

$$U_{j\tau} H_{j\tau} U^{+}_{j\tau} = \sigma_1 E , \tag{7.19}$$

получаем уравнение

$$t p_a - \frac{1}{2}\{x_a, \sigma_1 E\} - \frac{1}{2}\{[U_{j\tau}, x_a] U^{+}_{j\tau}, \sigma_1 E\} = I^{\kappa}_{oa} , \tag{7.20}$$

которое, ввиду (7.10в), эквивалентно соотношению

$$\{[U_{j\tau}, x_a] U^{+}_{j\tau}, \sigma_1 E\} = 2\sigma_1 \frac{S_{ab} P_b}{E + M} . \tag{7.21}$$

Таким образом, условие (7.11в) сводится к (7.21). Покажем, что (7.21) обращается в тождество, если $U_{j\tau}$ имеет вид (7.13), (7.18). Для этого подставим (7.13) в (7.21). Используя (7.15), (7.7а), (7.7б) и принимая во внимание антикоммутативность матриц σ_1 и σ_2, получаем

$$\{[U_{j\tau}, x_a] U^{+}_{j\tau}, \sigma_1 E\} = \sum_{j_3, \tau_3, j'_3, \tau'_3} \{[(a_{j'_3 \tau'_3} + i\sigma_2 d_{j'_3 \tau'_3}) \Lambda_{j'_3} \Lambda_{\tau'_3}, x_a] \cdot (a_{j_3 \tau_3} - i\sigma_2 d_{j_3 \tau_3}) \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}, \sigma_1 E\} =$$

$$= 2\sigma_1 E \sum_{j_3 \tau_3 j'_3 \tau'_3} \{(a_{j_3 \tau_3} a_{j'_3 \tau_3} + d_{j_3 \tau_3} d_{j'_3 \tau_3})[\Lambda_{j'_3}, x_a] +$$

$$+ (a_{j_3 \tau_3} a_{j_3 \tau'_3} + d_{j_3 \tau_3} d_{j_3 \tau'_3})[\Lambda_{\tau'_3}, x_a]\} \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3} . \tag{7.22}$$

В (7.22) мы воспользовались тождеством (которое следует из (7.15), (7.7а), (7.7б))

$$\sum_{\substack{j_3 \tau_3 \\ j'_3 \tau'_3}} \{[(a_{j'_3 \tau'_3} + i\sigma_2 d_{j'_3 \tau'_3}), x_a] \Lambda_{j'_3} \Lambda_{\tau'_3} \cdot (a_{j_3 \tau_3} - i\sigma_2 d_{j_3 \tau_3}) \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}, \sigma_1 E\} =$$

$$=2\sigma_1 E\sum_{j_3\tau_3}\left(-i\frac{\partial a_{j_3\tau_3}}{\partial p_a}a_{j_3\tau_3}-i\frac{\partial d_{j_3\tau_3}}{\partial p_a}d_{j_3\tau_3}\right)\Lambda_{j_3}\Lambda_{\tau_3}=$$

$$=-2i\sigma_1 E\sum_{j_3\tau_3}\left[\frac{\partial}{\partial p_a}\frac{1}{2}\left(a^2_{j_3\tau_3}+d^2_{j_3\tau_3}\right)\right]\Lambda_{j_3}\Lambda_{\tau_3}=0. \tag{7.23}$$

Подставляя в (7.22) значения коммутаторов (7.7в), (7.7г), приходим к следующему уравнению

$$\sum_{j_3\tau_3}\Big\{-\big(a_{j_3\tau_3}a_{j_3+1\tau_3}+d_{j_3\tau_3}d_{j_3+1\tau_3}+a_{j_3\tau_3}a_{j_3-1\tau_3}+d_{j_3\tau_3}d_{j_3-1\tau_3}-$$

$$-2a^2_{j_3\tau_3}-2d^2_{j_3\tau_3}\big)\frac{\vec{p}\times\vec{j}}{2p^2}-\big(a_{j_3\tau_3}a_{j_3\tau_3+1}+d_{j_3\tau_3}d_{j_3\tau_3+1}+$$

$$+a_{j_3\tau_3}a_{j_3\tau_3-1}+d_{j_3\tau_3}d_{j_3\tau_3-1}-2a^2_{j_3\tau_3}-2d^2_{j_3\tau_3}\big)\frac{\vec{p}\times\vec{\tau}}{2p^2}-$$

$$-\frac{i}{2p}\big(a_{j_3\tau_3}a_{j_3+1\tau_3}+d_{j_3\tau_3}d_{j_3+1\tau_3}-a_{j_3\tau_3}a_{j_3-1\tau_3}-d_{j_3\tau_3}d_{j_3-1\tau_3}\big)\left(\vec{j}-\frac{\vec{p}}{p}j_p\right)-$$

$$-\frac{i}{2p}\big(a_{j_3\tau_3}a_{j_3\tau_3+1}+d_{j_3\tau_3}d_{j_3\tau_3+1}-a_{j_3\tau_3}a_{j_3\tau_3-1}-d_{j_3\tau_3}d_{j_3\tau_3-1}\big)\left(\vec{\tau}-\frac{\vec{p}}{p}\tau_p\right)\Big\}\Lambda_{j_3}\Lambda_{\tau_3}=\frac{\vec{p}\times\vec{j}+\vec{p}\times\vec{\tau}}{E(E+m)}. \tag{7.24}$$

Для того, чтобы (7.24) обратилось в тождество, достаточно потребовать выполнения соотношений

$$a_{j_3\tau_3}a_{j_3+1\tau_3}+d_{j_3\tau_3}d_{j_3+1\tau_3}-d_{j_3\tau_3}d_{j_3-1\tau_3}-a_{j_3\tau_3}a_{j_3-1\tau_3}=0; \tag{7.25а}$$

$$a_{j_3\tau_3}a_{j_3\tau_3+1}+d_{j_3\tau_3}d_{j_3\tau_3+1}-a_{j_3\tau_3}a_{j_3\tau_3-1}-d_{j_3\tau_3}d_{j_3\tau_3-1}=0; \tag{7.25б}$$

$$\frac{1}{2}\big(a_{j_3\tau_3}a_{j_3\tau_3+1}+d_{j_3\tau_3}d_{j_3+1\tau_3}+a_{j_3\tau_3}a_{j_3-1\tau_3}+d_{j_3\tau_3}d_{j_3-1\tau_3}\big)=\frac{a^2_{j_3\tau_3}+d^2_{j_3\tau_3}}{p^2}-\frac{1}{E(E+m)}; \tag{7.25в}$$

$$\frac{1}{2}\big(a_{j_3\tau_3}a_{j_3+1\tau_3}+d_{j_3\tau_3}d_{j_3\tau_3+1}+a_{j_3\tau_3}a_{j_3\tau_3-1}+d_{j_3\tau_3}d_{j_3\tau_3-1}\big)=\frac{a^2_{j_3\tau_3}+d^2_{j_3\tau_3}}{p^2}-\frac{1}{E(E+m)}, \tag{7.25г}$$

которые, ввиду (7.15), эквивалентны условиям

$$a_{j_3\tau_3}a_{j_3+1\tau_3}+d_{j_3\tau_3}d_{j_3+1\tau_3}=\frac{M}{E},\ j_3<j; \tag{7.26}$$

$$a_{j_3\tau_3}a_{j_3\tau_3+1}+d_{j_3\tau_3}d_{j_3\tau_3+1}=\frac{M}{E},\ \tau_3<\tau.$$

Но (7.26) заведомо выполняется, если $a_{j_3\tau_3}$, $d_{j_3\tau_3}$ имеют вид (7.18). Действительно, подставив (7.18) в (7.26), получаем

$$a_{j_3\tau_3} a_{j_3+1\,\tau_3} + d_{j_3\tau_3} d_{j_3+1\,\tau_3} = \cos\left(\frac{\varphi_{j_3\tau_3}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\varphi_{j_3+1\,\tau_3}}{2}\right) +$$

$$+ \sin\left(\frac{\varphi_{j_3\tau_3}}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_{j_3+1\,\tau_3}}{2}\right) = \cos\left[\frac{1}{2}\left(\varphi_{j_3\tau_3} - \varphi_{j_3+1\,\tau_3}\right)\right] = \frac{M}{E};$$

$$a_{j_3\tau_3} a_{j_3\tau_3+1} + d_{j_3\tau_3} d_{j_3\tau_3+1} = \cos\left[\frac{1}{2}\left(\varphi_{j_3\tau_3} - \varphi_{j_3\tau_3+1}\right)\right] = \frac{M}{E}, \tag{7.27}$$

или

$$\frac{1}{2}\left(\varphi_{j_3\tau_3} - \varphi_{j_3+1\,\tau_3}\right) = \pm\arccos\frac{M}{E} = \pm\,\mathrm{arctg}\,\frac{P}{M};$$

$$\frac{1}{2}\left(\varphi_{j_3\tau_3} - \varphi_{j_3\tau_3+1}\right) = \pm\arccos\frac{M}{E} = \pm\,\mathrm{arctg}\,\frac{P}{M}, \tag{7.28}$$

что совпадает с определением (7.9) коэффициентов $\varphi_{j_3\tau_3}$. Следовательно, соотношение (7.11) действительно выполняется, если $U_{j\tau}$ имеет вид (7.13), (7.18).

Таким образом, для каждого $H^{I}_{j\tau}$, задаваемого формулами (7.5), (7.8) мы указали оператор $U_{j\tau}$ (7.13), (7.18), связывающий преобразованием эквивалентности (7.11) представления (6.3) и (7.1). Тем самым мы доказали, что все гамильтонианы (7.5), (7.8) удовлетворяют соотношениям ковариантности (1.6).

<u>Следствие.</u> Поскольку при $j=0$ представления (6.3) и (1.2), а также гамильтонианы (4.51), (4.53), (4.56) и (7.5), (7.8) совпадают, то, по доказанному, все гамильтонианы, полученные в § 4, удовлетворяют условиям (1.6). Но операторы H_s (4.51), (4.53), (4.56) являются общими решениями системы соотношений (1.11), (1.12а), (1.12б), (1.8), (4.15). Следовательно, упомянутая система определяет не только необходимые, но и достаточные условия пуанкаре-инвариантности уравнения (1.1).

Повторяя почти дословно рассуждения, приведенные в § 4 (см. (4.39)–(4.50), (4.77)–(4.82)) можно показать, что уравнение (6.1) с гамильтонианами (7.5), (7.8) инвариантно относительно преобразований P-, T-, C-(I.5), (6.II), если функции $\varphi_{j_3\tau_3}$ удовлетворяют условиям

$$\varphi_{j_3\tau_3} = -\varphi_{-j_3-\tau_3} \quad \text{для} \quad r_1^I = \sigma_1 ;$$
$$\varphi_{j_3\tau_3} = \varphi_{-j_3-\tau_3} \quad \text{для} \quad r_1^I = I . \tag{7.29}$$

Приведем простейшие решения системы соотношений (7.9), (7.29) (подробное решение уравнений такого типа приведено в § 4, см. (4.56)–(4.72))

$$\varphi_{j_3\tau_3} = (-1)^{j_3+\tau_3+\frac{1}{2}}\theta, \ (j+\tau) \text{ – полуцелые} ;$$
$$\varphi_{j_3\tau_3} = (-1)^{j_3+\tau_3}\theta, \ (j+\tau) \text{ – целые} ; \tag{7.30}$$
$$\varphi_{j_3\tau_3} = 2(j_3+\lambda_3)\theta, \ \lambda_3 = \pm\tau_3, \ (j+\tau) \text{ – произвольные числа} ;$$
$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{p}{M} .$$

Подставляя (7.30), (7.8) в (7.5), получаем гамильтонианы

$$H_{j\tau}^I = \sigma_1 M + \sigma_3 \sum_{j_3\tau_3} p(-1)^{j_3\tau_3+\frac{1}{2}} \Lambda_{j_3}\Lambda_{\tau_3}, \ (j+\tau) \text{ – полуцелые},$$
$$H_{j\tau}^I = \sigma_1 M + \sigma_3 \sum_{j_3\tau_3} p(-1)^{j_3+\tau_3} \Lambda_{j_3}\Lambda_{\tau_3}, \ (j+\tau) \text{ – целые}, \tag{7.31a}$$

$$H_{j\tau}^I = E\{\sigma_1\cos[2(j_3+\lambda_3)\theta] + \sigma_3\sin[2(j_3+\lambda_3)\theta]\}\Lambda_{j_3}\Lambda_{\tau_3}, \quad (j+\tau) \text{ – произвольные числа} \tag{7.31б}$$

Выбирая другие решения системы (7.9), (7.29), мы придем к гамильтонианам, которые унитарно эквивалентны (7.31), но отличаются от них по форме.

Выпишем явные выражения операторов (7.31) в терминах $(\vec{j}\cdot\vec{p})$, $(\vec{\tau}\cdot\vec{p})$ для j, $\tau \le \frac{3}{2}$. Используя (7.31a), (7.6), находим

$$H_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^I = \sigma_1 M + 4\sigma_3(\vec{\tau}\cdot\vec{p})(\vec{j}\cdot\vec{p})p^{-1} ;$$
$$H_{\frac{1}{2}1}^I = H_{01}^I - 4\sigma_3(\vec{j}\cdot\vec{p})(\vec{\tau}\cdot\vec{p})^2 p^{-2} ;$$
$$H_{11}^I = H_{01}^I - 2\sigma_3(\vec{\tau}\cdot\vec{p})^2[p^2-(\vec{j}\cdot\vec{p})^2]p^{-3} ; \tag{7.32}$$

$$H^{I}_{\frac{1}{2}\frac{3}{2}} = \sigma_1 M + \sigma_3 \cdot \frac{2}{3}(\vec{j}\cdot\vec{p})[7(\vec{\tau}\cdot\vec{p})p^2 - 4(\vec{\tau}\cdot\vec{p})^3]\,p^{-3};$$

$$H^{I}_{1\frac{3}{2}} = H^{I}_{0\frac{3}{2}} - \sigma_3 \frac{2}{3}(\vec{j}\cdot\vec{p})^2[7(\vec{\tau}\cdot\vec{p})p^2 - 4(\vec{\tau}\cdot\vec{p})^3]\,p^{-4}; \qquad (7.32)$$

$$H^{I}_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}} = \sigma_1 M + \sigma_3 \frac{1}{9}[7(\vec{j}\cdot\vec{p})\cdot p^2 - 4(\vec{j}\cdot\vec{p})^3][7(\vec{\tau}\cdot\vec{p})p^2 - 4(\vec{\tau}\cdot\vec{p})^3]\,p^{-5},$$

где

$$H^{I}_{\frac{1}{2}0} = \sigma_1 M + 2\sigma_3\,(\vec{j}\cdot\vec{p});$$

$$H^{I}_{01} = H^{I}_{00} - 2\sigma_3\,(\vec{\tau}\cdot\vec{p})^2 p^{-1},\; H^{I}_{00} = \sigma_1 M + \sigma_3 p, \qquad (7.33)$$

$$H^{I}_{0\frac{3}{2}} = \sigma_1 M + \sigma_3 \frac{1}{3}[7(\vec{j}\cdot\vec{p}) - 4(\vec{j}\cdot\vec{p})p^{-2}]$$

– гамильтонианы частиц с фиксированным спином, найденные в § 4.

Что касается операторов (7.31б), то их можно представить в виде

$$H^{I}_{j\tau} = H^{I}_{j0}\,\sigma_1\,H^{I}_{0\tau}\,E^{-1}, \qquad (7.34)$$

где

$$H^{I}_{j0} = \sum_{j_3} E[\sigma_1 \cos(2j_3\theta) + \sigma_3 \sin(2j_3\theta)]\,\Lambda_{j_3}; \qquad (7.35а)$$

$$H^{I}_{0\tau} = \sum_{\tau_3} E[\sigma_1 \cos(2\lambda_3\theta) + \sigma_3 \sin(2\lambda_3\theta)]\,\Lambda_{\tau_3}. \qquad (7.35б)$$

Явные выражения для операторов H^{I}_{j0} и $H^{I}_{0\tau}$ для $j,\ \tau \le \frac{3}{2}$ приведены в (4.73а), (4.73б), (4.73г) в обозначениях $\vec{j} = \vec{S}$ и $\vec{\tau} = \vec{S}$ соответственно.

Можно показать, что если в (4.31б) $\lambda_{s_3} = +\tau_3$, то оператор квадрата массы (7.1) имеет в общем случае вид (7.2), где a_n – произвольные числа, а если $\lambda_{s_3} = -\tau_3$, то для выполнения (7.3в) необходимо положить $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 0$. Более подробно вопрос о виде массового оператора рассмотрен в главе III.

§ 8. Явный вид гамильтонианов $H^{II}_{j\tau}$

В этом параграфе мы решим задачу II, то есть определим все операторы $H^{II}_{j\tau}$, удовлетворяющие соотношениям (I.6), (I.10б), (I.10е), когда представление алгебры Пуанкаре имеет вид (6.6).

Исходя из представления (2.7) для того частного случая, когда $j=0$, τ – произвольное число, впервые Вивером, Хаммером и Гудом [14], а затем в более общей постановке задачи Метьюзом [17] были найдены уравнения вида (6.I) для частицы с фиксированными спином и массой. Результаты, приведенные ниже, являются обобщением [14] – [18] на случай частиц с переменными спином и массой.

Покажем, что система (I.6) для генераторов (6.6) сводится к следующим уравнениям для

$$\left[H^{II}_{j\tau}, P_a\right] = \left[H^{II}_{j\tau}, I_{ob}\right] = 0; \tag{8.Ia}$$

$$\left[H^{II}_{j\tau}, I_{oa}\right] = i P_a. \tag{8.Iб}$$

Для доказательства рассмотрим последовательно все соотношения (I.6).

Из (6.6а), (6.6б) видно, что соотношения (I.6а), (I.6б) выполняются тождественно. Условие (I.6б) обращается в тождество, если имеет место (I.6г).

Покажем, что (I.6е) является следствием (I.6а), (I.6г). Подставив (6.6а), (6.6в) в (I.6е), получаем

$$[I_{ob}, I_{oc}] = [I_{ob}, tP_c - x_c H^{II}_{j\tau} + i\sigma_3 S_{4c}] = t[I_{ob}, P_c] - [I_{ob}, x_c] H^{II}_{j\tau} +$$
$$+ i\sigma_3 [I_{ob}, S_{4c}] = it(\delta_{ac} P_b - \delta_{bc} P_a) - i(\delta_{ac} x_b - \delta_{bc} x_a) H^{II}_{j\tau} +$$
$$+ i\sigma_3 i(\delta_{ac} S_{4b} - \delta_{bc} S_{4a}) \equiv i(\delta_{ac} I_{ob} - \delta_{bc} I_{oa}),$$

что и требовалось.

Наконец, покажем, что (I.6з) выполняется, если имеет место (I.6ж). Согласно (6.6в) получаем из (I.6з) после ряда тождественных преобразований

$$[I^{II}_{0a}, I^{II}_{0b}] = [tP_a - x_a H^{II}_{j\tau} + i\sigma_3 S_{4a}, tP_b - x_b H^{II}_{j\tau} + i\sigma_3 S_{4b}] \equiv$$

$$\equiv [x_a H^{II}_{j\tau}, x_b H^{II}_{j\tau}] - [i\sigma_3 S_{4a}, x_b H^{II}_{j\tau}] - [x_a H^{II}_{j\tau}, i\sigma_3 S_{4b}] +$$

$$+ [i\sigma_3 S_{4a}, i\sigma_3 S_{4b}]. \qquad (8.3)$$

Но, согласно (I.6ж), (6.6в)

$$[i\sigma_3 S_{4a}, x_b H^{II}_{j\tau}] = x_b [i\sigma_3 S_{4a}, H^{II}_{j\tau}] = x_b (iP_a - [H^{II}_{j\tau}, x_a H^{II}_{j\tau}]); \qquad (8.4)$$

$$[x_a H^{II}_{j\tau}, i\sigma_3 S_{4b}] = x_a [H^{II}_{j\tau}, i\sigma_3 S_{4b}] = x_a (iP_b + [H^{II}_{j\tau}, x_b H^{II}_{j\tau}]),$$

а ввиду (6.7), (6.5), (6.4)

$$[i\sigma_3 S_{4a}, i\sigma_3 S_{4b}] = -iS_{0b}. \qquad (8.5)$$

Подставив (8.4), (8.5) в (8.3), получаем соотношение (I.6з).

Таким образом, мы показали, что все соотношения (I.6) для генераторов (6.6) обращаются в тождества, если выполняются (I.6г), (I.6д), (I.6ж), которые выписаны в (8.I). Согласно (I.10б), (I.10е), гамильтонианы $H^{II}_{j\tau}$ должны также удовлетворять соотношениям

$$[H^{II}_{j\tau}, P] = 0; \qquad (8.6а)$$

$$\{H^{II}_{j\tau}, T\} = 0. \qquad (8.6б)$$

Задача II свелась к решению системы соотношений (8.I), (8.6). Приступим к решению этой системы.

По аналогии с предыдущим параграфом $H^{II}_{j\tau}$ ищем в виде

$$H^{\overline{\overline{II}}}_{j\tau}=\sum_{j_3\tau_3}(\sigma_1 g^{1}_{j_3\tau_3}+\sigma_3 g^{3}_{j_3\tau_3})\Lambda_{j_3}\Lambda_{\tau_3}=\sum_{j_3\tau_3\bar{\alpha}}\sigma_{\bar{\alpha}} g^{\bar{\alpha}}_{j_3\tau_3}\Lambda_{j_3}\Lambda_{\tau_3}, \quad (8.7)$$

где неизвестные функции $g^{1}_{j_3\tau_3}$, $g^{3}_{j_3\tau_3}$, зависящие только от ρ, M, обладают такими свойствами

$$g^{1}_{j_3\tau_3}=g^{1}_{-j_3-\tau_3},\; g^{3}_{j_3\tau_3}=-g^{3}_{-j_3-\tau_3}, \quad \text{если } r^{\overline{\overline{II}}}_1=\sigma_1 \quad (8.8а)$$

$$g^{1}_{j_3\tau_3}=-g^{1}_{-j_3-\tau_3},\; g^{3}_{j_3\tau_3}=-g^{3}_{-j_3-\tau_3}, \quad \text{если } r^{\overline{\overline{II}}}_1=I \quad (8.8б)$$

$$(g^{1}_{j_3\tau_3})^2+(g^{3}_{j_3\tau_3})^2=\rho^2+M^2=E^2. \quad (8.8в)$$

Так же, как и в § 7, соотношения (8.8а), (8.8б) гарантируют инвариантность (6.I) относительно преобразований P (I.6а), и T (I.6б) (т.е. выполнение соотношений (8.6)), а (8.8в) является следствием (7.I) (ср. (I.II), (4.52б)).

Нетрудно видеть, что гамильтониан (8.7) удовлетворяет условиям (8.Iа). Действительно, все сомножители и слагаемые в (8.7) являются скалярами относительно трехмерных вращений, не зависящими от x_a (см. (7.6)), а значит, коммутирующими с P_a и I_{ab} в (6.6).

Потребуем, чтобы выполнялось (8.Iб). Подставляя (6.6в) в (8.Iб) и учитывая (6.7), приходим к уравнению

$$-[H^{\overline{\overline{II}}}_{j\tau}, x_a]H^{\overline{\overline{II}}}_{j\tau}+i(j_a+\lambda_a)[H^{\overline{\overline{II}}}_{j\tau},\sigma_3]+i[H^{\overline{\overline{II}}}_{j\tau}, j_a+\lambda_a]\sigma_3=iP_a. \quad (8.9)$$

Подставляя в (8.9) $H^{\overline{\overline{II}}}_{j\tau}$ из (8.7), используя полноту и ортогональность системы проекторов Λ_{j_3}, Λ_{τ_3} (7.7а), (7.7б), свойства матриц Паули [67]

$$\sigma_a\cdot\sigma_b=\delta_{ab}+i\epsilon_{abc}\sigma_c \quad (8.10)$$

и явный вид (7.7в)–(7.7е) коммутаторов Λ_{j_3}, Λ_{τ_3} с x_a, j_a, τ_a, получаем

$$-[H^{II}_{j\tau}, x_a]H^{II}_{j\tau} + i(j_a+\lambda_a)[H^{II}_{j\tau}, \sigma_3] + i[H^{II}_{j\tau}, j_a+\lambda_a]\sigma_3 =$$

$$= \sum_{\substack{a,b,j_3',\\ \tau_3', j_3, \tau_3}} [\sigma_a g^{a}_{j_3'\tau_3'} \Lambda_{j_3'} \Lambda_{\tau_3'}, x_a] \sigma_b g^{b}_{j_3\tau_3} \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3} + i \sum_{\substack{a,b,j_3',\\ j_3, \tau_3, \tau_3'}} [\sigma_a g^{a}_{j_3'\tau_3'} \Lambda_{j_3'} \Lambda_{\tau_3'}, (j_a +$$

$$+ \lambda_a)]\sigma_3 \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3} + i(j_a+\lambda_a) \sum_{\bar a, j_3, \tau_3} [\sigma_a g^{\bar a}_{j_3\tau_3} \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}, \sigma_3] =$$

$$= \sum_{a,b,j_3\tau_3} (\delta_{\bar a \bar b} + i\epsilon_{\bar a \bar b c}\sigma_c) \Big[i\frac{p_a}{p}\frac{\partial g^{\bar a}_{j_3\tau_3}}{\partial p} + \frac{\vec p \times \vec j}{2p^2}\big(g^{\bar a}_{j_3+1\,\tau_3} + g^{\bar a}_{j_3-1\,\tau_3} - 2g^{\bar a}_{j_3\tau_3}\big) +$$

$$+ \frac{i}{2p}\big(j_a - \frac{p_a}{p} j_p\big)\big(g^{\bar a}_{j_3-1\,\tau_3} - g^{\bar a}_{j_3+1\,\tau_3}\big) + \frac{(\vec p \times \vec \tau)_a}{2p^2}\big(g^{\bar a}_{j_3\,\tau_3+1} + g^{\bar a}_{j_3\,\tau_3-1} - 2g^{\bar a}_{j_3\tau_3}\big) +$$

$$+ \frac{i}{2p}\big(\tau_a - \frac{p_a}{p}\tau_p\big)\big(g^{\bar a}_{j_3\,\tau_3-1} - g^{\bar a}_{j_3\,\tau_3+1}\big)\Big] g^{a}_{a\tau_3} \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3} + \frac{i}{2}\sum_{\bar a, j_3, \tau_3} (\delta_{\bar a 3} + i\epsilon_{\bar a 3 c}\sigma_c) \times$$

$$\times \Big[i\frac{(\vec p \times \vec \lambda)_a}{p}\big(g^{\bar a}_{j_3-1\,\tau_3} - g^{\bar a}_{j_3+1\,\tau_3}\big) - \big(j_a - \frac{p_a}{p} j_p\big)\big(g^{\bar a}_{j_3+1\,\tau_3} + g^{\bar a}_{j_3-1\,\tau_3} - 2g^{\bar a}_{j_3\tau_3}\big) +$$

$$+ \frac{i(\vec p \times \vec \lambda)_a}{p}\big(g^{\bar a}_{j_3\,\tau_3-1} - g^{\bar a}_{j_3\,\tau_3+1}\big) - \big(\tau_a - \frac{p_a}{p}\tau_p\big)\big(g^{\bar a}_{j_3\,\tau_3+1} + g^{\bar a}_{j_3\,\tau_3-1} - 2g^{\bar a}_{j_3\tau_3}\big)\Big] \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}$$

$$+ 2i(j_a + \lambda_a) \sum_{\bar a, j_3, \tau_3} i\epsilon_{\bar a 3 c} g^{\bar a}_{j_3\tau_3} \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_c} = i\frac{p_a}{p} \cdot p \sum_{j_3\tau_3} \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}, \tag{8.11}$$

где, согласно (8.7), индексы $\bar a, \bar b$ принимают значения 1, 3.

Приравнивая коэффициенты при матрицах Паули, при линейно независимых векторах p_a, j_a, τ_a, $(\vec p \times \vec j)_a$, $(\vec p \times \vec \tau)_a$ и при операторах проектирования, приходим к системе уравнений

$$g^{1}_{j_3\tau_3} g^{1}_{j_3+1\,\tau_3} + g^{3}_{j_3\tau_3} g^{3}_{j_3+1\,\tau_3} = E^2 + p\big(g^{3}_{j_3+1\,\tau_3} - g^{3}_{j_3\tau_3}\big); \tag{8.12a}$$

$$g^{1}_{j_3\tau_3}\, g^{1}_{j_3\tau_3+1} + g^{3}_{j_3\tau_3}\, g^{3}_{j_3\tau_3+1} = E^{2} + p\left(g^{3}_{j_3+1\tau_3} - g^{3}_{j_3\tau_3}\right); \tag{8.12б}$$

$$g^{1}_{j_3\tau_3}\left(g^{3}_{j_3+1\tau_3} + p\right) = g^{1}_{j_3+1\,\tau_3}\left(g^{3}_{j_3\tau_3} - p\right); \tag{8.12в}$$

$$g^{1}_{j_3\tau_3}\left(g^{3}_{j_3\tau_{3+1}} + \epsilon p\right) = g^{1}_{j_3\tau_{3+1}}\left(g^{3}_{j_3\tau_3} - \epsilon p\right),\ \epsilon = \frac{\lambda_3}{\tau_3} = \pm 1; \tag{8.12г}$$

$$g^{1}_{j_3\tau_3}\frac{\partial g^{1}_{j_3\tau_3}}{\partial p} - g^{3}_{j_3\tau_3}\frac{\partial g^{3}_{j_3\tau_3}}{\partial p} = 2p\,(j_3 + \lambda_3). \tag{8.12д}$$

Таким образом, условие (8.16) выполняется, если коэффициенты $g^{a}_{j_3\tau_3}$ гамильтониана (8.7) удовлетворяют уравнениям (8.12).

Найдем решения системы (8.12). Умножив (8.12в) на $g^{1}_{j_3\tau_3}$ и выразив из полученного уравнения $g^{1}_{j_3\tau_3}\cdot g^{1}_{j_3+1\tau_3}$ через $g^{3}_{j_3\tau_3}$, $g^{3}_{j_3+1\,\tau_3}$, учитывая при этом (8.8в), получаем

$$g^{1}_{j_3+1\,\tau_3}\, g^{1}_{j_3\tau_3} = \frac{\left(g^{3}_{j_3+1\tau_3} + p\right)\left[E^{2} - \left(g^{3}_{j_3\tau_3}\right)^{2}\right]}{g^{3}_{j_3\tau_3} - p}. \tag{8.13}$$

Подставив (8.13) в (8.12а), получаем

$$g^{3}_{j_3+1\tau_3} = \frac{(E^{2}+p^{2})\,g^{3}_{j_3\tau_3} - 2E^{2}p}{E^{2}+p^{2} - 2p\,g^{3}_{j_3\tau_3}}. \tag{8.14}$$

Введем обозначения

$$\bar{g}^{3}_{j_3+1\tau_3} = \frac{\bar{g}^{3}_{j_3\tau_3}}{E};\quad th(2\varkappa) = \frac{2Ep}{E^{2}+p^{2}}. \tag{8.15}$$

Используя (8.15), перепишем (8.14) в виде

$$\bar{g}^{3}_{j_3+1\tau_3} = \frac{\bar{g}^{3}_{j_3\tau_3} - th\,(2\varkappa)}{1 - \bar{g}^{3}_{j_3\tau_3}\, th\,(2\varkappa)}, \tag{8.16}$$

где, согласно (8.15)

$$\varkappa = arcth\ \frac{p}{E}. \tag{8.17}$$

Совершенно аналогично из (8.12г), (8.12б) следует

$$\bar{g}^{3}_{j_3\tau_3+1} = \frac{\bar{g}^{3}_{j_3\tau_3} - \epsilon\, th\,(2\varkappa)}{1 - \epsilon\, th\,(2\varkappa)\,\bar{g}^{3}_{j_3\tau_3}} . \tag{8.18}$$

Формулы (8.16), (8.18), (8.15) однозначно определяют $g^{3}_{j_3\tau_3}$, если известно какое-либо $\bar{g}^{3}_{j_{3_0}\tau_{3_0}} \neq cth\,(2\varkappa)$. Это $\bar{g}^{3}_{j_{3_0}\tau_{3_0}}$ мы найдем, используя (8.8), (8.12).

Рассмотрим (8.12а) для $j_3 = -\frac{1}{2}$, $\tau_3 = 0$

$$g^{1}_{-\frac{1}{2}0}\, g^{1}_{\frac{1}{2}0} + g^{3}_{-\frac{1}{2}0}\, g^{3}_{\frac{1}{2}0} = E^2 + P\left(g^{3}_{\frac{1}{2}0} - g^{3}_{-\frac{1}{2}0}\right). \tag{8.19}$$

Если имеет место (8.8а), то (8.19) записывается в виде

$$\left(g^{1}_{\frac{1}{2}0}\right)^2 - \left(g^{3}_{\frac{1}{2}0}\right)^2 = E^2 + 2P\, g^{3}_{\frac{1}{2}0} , \tag{8.20}$$

или, учитывая (8.8б)

$$-2\left(g^{3}_{\frac{1}{2}0}\right)^2 = 2p\, g^{3}_{\frac{1}{2}0} . \tag{8.21}$$

Из (8.21) следует, что либо

$$g^{3}_{\frac{1}{2}0} = -p = -E\, th\,\varkappa , \tag{8.22а}$$

либо

$$g^{3}_{\frac{1}{2}0} = 0. \tag{8.22б}$$

Решение (8.22б) ввиду (8.8а) несовместно с (8.16), поэтому $g^{3}_{\frac{1}{2}0}$ может задаваться только формулой (8.22).

Если же имеет место (8.8б), то (8.19) принимает форму

$$-\left(g^{1}_{\frac{1}{2}0}\right)^2 - \left(g^{3}_{\frac{1}{2}0}\right)^2 = E^2 + 2p\, g^{3}_{\frac{1}{2}0} . \tag{8.23}$$

Из (8.23), (8.8в) получаем

$$g^{3}_{\frac{1}{2}0} = -\frac{E^2}{p} = -E\, cth\,\varkappa . \tag{8.24}$$

Аналогичным образом рассматривая уравнения (8.12а), (8.12б), (8.8) для $j_3=0$, $\tau_3=\frac{1}{2}$; $j_3=\tau_3=0$; j_3, $\tau_3=\pm 1$, получаем

$$g^{3}_{0\frac{1}{2}}=-\epsilon\rho=-\epsilon\, th\, \varkappa\cdot E,\ g^{3}_{00}=g^{3}_{\epsilon\frac{1}{2},\frac{1}{2}}=0, \text{ если } r_1^{II}=\sigma_1 \qquad (8.25а)$$

$$g^{3}_{0\frac{1}{2}}=-\epsilon\frac{E^2}{\rho}=-\epsilon E\, ch\, \varkappa \qquad , \text{ если } r_1^{II}=I \qquad (8.25б)$$

Для j_3, τ_3 одновременно целых или полуцелых условия (8.8б) и (8.12) несовместимы. Действительно, из (8.8б) следует, что

$$g^{3}_{00}=g^{1}_{00}=0, \qquad (8.26)$$

а из (8.8б), (8.16), (8.18) –

$$\begin{aligned} &g^{3}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=g^{1}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=0, \quad \epsilon=-1;\\ &g^{3}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=g^{1}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=0, \quad \epsilon=+1, \end{aligned} \qquad (8.27)$$

а (8.26), (8.27) противоречат (8.8в). Следовательно, для одновременно целых или полуцелых j_3, τ нельзя выбрать r_1^{II} в виде $r_1^{II}=I$. Это заключение справедливо, конечно, и для $\tau=0$. Между тем в работах Метьюза с сотрудниками [17] – [19], где рассматривалось представление (6.6) для частного случая $\tau=0$, для целых j как раз и предлагаются уравнения, полученные в предположении, что $r_1^{II}=I$. В силу изложенного выше такие уравнения просто нековариантны, так как условия ковариантности (1.6), (1.10) приводят в случае $r_1^{II}=I$ к несовместимым уравнениям.

Из (8.16), (8.18) следует, что если $\bar{g}_3^{j_3\tau_3}$ имеет вид

$$\bar{g}_3^{j_3\tau_3}=th\, a_{j_3\tau_3}, \qquad (8.28)$$

то

$$\bar{g}^{3}_{j_3+1\,\tau_3}=\frac{th\, a_{j_3\tau_3}-th\,(2\varkappa)}{1-th\, a_{j_3\tau_3}\, th\,(2\varkappa)}=th\,(a_{j_3\tau_3}-2\varkappa)=th\,(a_{j_3+1\,\tau_3}); \qquad (8.29а)$$

$$\bar{g}^{3}_{j_3\,\tau_3+1}=\frac{th\, a_{j_3\tau_3}-\epsilon\, th(2\varkappa)}{1-\epsilon\, th\, a_{j_3\tau_3}\, th(2\varkappa)}=th(a_{j_3\tau_3}-\epsilon 2\varkappa)=th(a_{j_3\tau_3+1}) \qquad (8.29б)$$

т.е. что (8.28) справедливо и для $\bar{g}^{3}_{j_3+1\,\tau_3}$, $\bar{g}^{3}_{j_3\,\tau_3+1}$. Поскольку, согласно (8.22а), (8.25а) в случае $r_1^{II}=\sigma_1$ соотношение (8.28) выполняется для $j_3, \tau_3 = 0, \pm\frac{1}{2}$, то отсюда по индукции заключаем, что (8.28) имеет место для произвольных положительных (а согласно (8.8а), и для отрицательных) значений j_3, τ_3.

Согласно (8.29), (8.28), (8.22а), (8.25а)

$$a_{j_3+1\,\tau_3}=a_{j_3\tau_3}-2\varkappa\,;\quad a_{j_3\,\tau_3+1}=a_{j_3\tau_3}-\epsilon\, 2\varkappa\,; \tag{8.30а}$$

$$a_{\frac{1}{2}0}=-\varkappa;\quad a_{0\frac{1}{2}}=-\epsilon\varkappa;\quad a_{00}=a_{\epsilon\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=0. \tag{8.30б}$$

Из (8.30) следует, что

$$a_{j_3\tau_3}=-2\,(j_3+\epsilon\,\tau_3). \tag{8.31}$$

Таким образом, если $r_1^{II}=\sigma_1$, то, согласно (8.15), (8.28), (8.31)

$$g^{3}_{j_3\tau_3}=-E\,\mathrm{th}\left[2(j_3+\epsilon\,\tau_3)\right],\quad r_1^{II}=\sigma_1. \tag{8.32}$$

Если же $r_1^{II}=I$, то из (8.16), (8.18), (8.24), (8.25б) получаем аналогично

$$g^{3}_{j_3\tau_3}=-E\,\mathrm{cth}\left[2(j_3+\epsilon\,\tau_3)\right],\quad r_1^{II}=I. \tag{8.33}$$

Определим теперь $g^{1}_{j_3\tau_3}$. Из (8.8в) нетрудно получить, что

$$g^{1}_{j_3\tau_3}=\pm\sqrt{E^2-(g^{3}_{j_3\tau_3})^2}=\begin{cases}\pm E\,\mathrm{sech}[\mp 2(j_3+\lambda_3)\varkappa] & \text{если } r_1^{II}=\sigma_1\\ \pm iE\,\mathrm{cosech}[\mp 2(j_3+\lambda_3)\varkappa] & \text{если } r_1^{II}=I.\end{cases}$$

Подставляя (8.32)–(8.34) в (8.12в,г), убеждаемся, что последние условия обращаются в тождество, если в (8.34) выбрать знак "+", следовательно

$$\begin{aligned} g^{1}_{j_3\tau_3}&=E\,\mathrm{sech}\left[2(j_3+\lambda_3)\varkappa\right] \quad &\text{для } r_1^{II}=\sigma_1\\ g^{3}_{j_3\tau_3}&=-iE\,\mathrm{cosech}\left[2(j_3+\lambda_3)\varkappa\right] \quad &\text{для } r_1^{II}=I.\end{aligned} \tag{8.35}$$

Дифференцируя (8.32), (8.33), (8.35) по ρ и учитывая (8.17), можно убедиться непосредственно, что найденные $g^{\bar a}_{j_3\tau_3}$ удовлетворяют также условию (8.12д).

Мы показали, что, согласно (8.7), (8.32), (8.33), система соотношений (8.1), (8.6) (которая эквивалентна условиям ковариантности (1.6), (1.10)) имеет следующие решения

$$(H^{\overline{II}}_{j\tau})_1 = E\sum_{j_3\tau_3}\{\sigma_1 \operatorname{sech}[2(j_3+\lambda_3)\varkappa] + \sigma_3 \operatorname{th}[2(j_3+\lambda_3)\varkappa]\}\Lambda_{j_3}\Lambda_{\tau_3}; \quad (8.36а)$$

$$(H^{\overline{II}}_{j\tau})_2 = E\sum_{j_3\tau_3}\{-i\sigma_1 \operatorname{cosech}[2(j_3+\lambda_3)\varkappa] + \sigma_3 \operatorname{cth}[2(j_3+\lambda_3)\varkappa]\}\Lambda_{j_3}\Lambda_{\tau_3}, \quad (8.36б)$$

где $(H^{\overline{II}}_{j\tau})_1$ соответствует $r^{\overline{II}}_1 = \sigma_1$, а $(H^{\overline{II}}_{j\tau})_2 - r^{\overline{II}}_1 = I$. Тем самым мы полностью решили задачу II, § 6.

Гамильтониан $(H^{\overline{II}}_{j\tau})_1$ удовлетворяет условиям ковариантности (7.1), (8.1) при любых значениях j и τ, в то время как $(H^{\overline{II}}_{j\tau})_2$ имеет смысл только тогда, когда $(j+\tau)$ — целое число.

Выразим $H^{\overline{II}}_{j\tau}$ для $j, \tau = 0, \frac{1}{2}, 1$ через операторы $(\vec{j}\cdot\vec{\rho}), \vec{\tau}\cdot\vec{\rho}$. Согласно формулам (8.36), (8.17), (7.6) имеем

$$(H^{\overline{II}}_{\frac{1}{2}0})_1 = \sigma_1 M + 2\sigma_3(\vec{j}\cdot\vec{\rho}); \quad (8.37а)$$

$$(H^{\overline{II}}_{\frac{1}{2}0})_2 = -2E(\vec{j}\cdot\vec{\rho})(i\sigma_1 M + \sigma_3 E)\,\rho^{-2}; \quad (8.37б)$$

$$(H^{\overline{II}}_{10})_1 = \sigma_1 E + 2E(\vec{j}\cdot\vec{\rho})[\sigma_1(\vec{j}\cdot\vec{\rho}) - \sigma_3 E](E^2+\rho^2)^{-1}; \quad (8.37в)$$

$$(H^{\overline{II}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})_1 = \{\sigma_1[E^2+\epsilon 4(\vec{j}\cdot\vec{\rho})(\vec{\tau}\cdot\vec{\rho})] + 2\sigma_3 E[(\vec{j}\cdot\vec{\rho}) + \epsilon(\vec{\tau}\cdot\vec{\rho})]\}(E^2+\rho^2)^{-1}; \quad (8.37г)$$

$$(H^{\overline{II}}_{1\frac{1}{2}})_1 = (H^{\overline{II}}_{\frac{1}{2}0})_1 + 2(\vec{j}\cdot\vec{\rho})\{\sigma_1 m[2\epsilon(\vec{\tau}\cdot\vec{\rho}) + (\vec{j}\cdot\vec{\rho})] + \sigma_3[\rho^2+E^2-4\epsilon(\vec{j}\cdot\vec{\rho})(\vec{\tau}\cdot\vec{\rho})]\}(3E^2+\rho^2)^{-1}; \quad (8.37д)$$

$$(H^{\overline{II}}_{1\frac{1}{2}})_2 = (H^{\overline{II}}_{0\frac{1}{2}})_2 - 2\epsilon E(\vec{j}\cdot\vec{\rho})\{2[i\sigma_1 M(2E^2+\rho^2) + 2\sigma_3 E^3]\cdot(\vec{j}\cdot\vec{\rho})(\vec{\tau}\cdot\vec{\rho}) + E[i\sigma_1 EM + \sigma_3(E^2+\rho^2)]\}[\rho^2(\rho^2+3E^2)]^{-1}. \quad (8.37е)$$

Гамильтонианы с $j < \Sigma$ получаются из (8.37) по формуле

$$H_{ke}\,(\vec{j}\cdot\vec{p}),(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}) = H_{ek}\ \epsilon(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}),\epsilon(\vec{j}\cdot\vec{p}) \qquad (8.38)$$

Оператор (8.37а) – это гамильтониан Дирака, а операторы (8.37б,в) совпадают с гамильтонианами, полученными в [14].

§ 9. Уравнение для заряженной частицы с произвольным спином во внешнем электромагнитном поле

Обобщение уравнений (I.I), (6.I) на случай заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле является трудной задачей из-за сложной зависимости гамильтонианов H_s, $H_{j\Sigma}$ от импульсов. В этом параграфе задача решается в предположении, что импульсы частиц малы по сравнению с их массами, которые считаются фиксированными. С помощью серии последовательных унитарных преобразований мы найдем квазирелятивистское уравнение для положительно частотных состояний частиц произвольного (в общем случае, переменного) спина и фиксированной массы, подобно тому, как это было сделано Фолди и Вуйтхайзеном [98] для частиц со спином $s=\frac{1}{2}$. Таким образом мы получим обобщенное уравнение Паули для произвольного спина, учитывающее дипольное, квадрупольное, спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействие частицы с полем.

Рассмотрим уравнение (6.I) с гамильтонианами $H^{I}_{j\Sigma}$ (7.3Iб) и $H^{II}_{j\Sigma}$ (8.36а). Выбор гамильтонианов $H_{j\Sigma}$ в форме (7.3Iб) и (8.36а) обусловлен соображениями удобства (упомянутые $H_{j\Sigma}$ определены для произвольных значений j и Σ, в то время как (8.36б) – только для некоторых Σ, j).

Для $p \ll m$ операторы $H_{j\Sigma}$ могут быть представлены в виде ряда по степеням $\frac{1}{m}$ (комптоновской длины волны). Ограничиваясь членами порядка $\frac{1}{m}$ и используя соотношения

$$E\cos[2(j_3+\lambda_3)\theta] \simeq m + \frac{p^2}{2m}[1-4(j_3+\lambda_3)^2], \theta = \operatorname{arctg}\frac{p}{m}; \quad (9.1а)$$

$$E\sin[2(j_3+\lambda_3)\theta] \simeq 2(j_3+\lambda_3)p + \frac{1}{3}[1-4(j_3+\lambda_3)^2](j_3+\lambda_3)\frac{p^3}{m^2}; \quad (9.1б)$$

$$E\,\mathrm{sech}[2(j_3+\lambda_3)\varkappa] \simeq m + \frac{p^2}{2m}[1-4(j_3+\lambda_3)^2], \varkappa = \operatorname{arcth}\frac{p}{E}; \quad (9.1в)$$

$$E\,\mathrm{th}[2(j_3+\lambda_3)\varkappa] \simeq 2(j_3+\lambda_3)p + \frac{2}{3}[1-4(j_3+\lambda_3)^2](j_3+\lambda_3)\frac{p^3}{m^2}; \quad (9.1г)$$

$$\sum_{j_3\tau_3}(j_3+\epsilon\tau_3)^\ell \Lambda_{j_3}\Lambda_{\tau_3} \equiv \sum_a\left(\frac{S_{4a}p_a}{p}\right)^\ell, S_{4a} = j_a + \epsilon\tau_a, \quad (9.1д)$$

запишем гамильтонианы (7.31б), (8.36а) в виде (по „а" сумма от 1 до 3)

$$H^{I}_{j\tau} = \sigma_3\left[2S_{4a}p_a + \frac{p^2}{3m^2}S_{4a}p_a\right] + \sigma_1\left[m + \frac{1}{2m}\left(p^2 - 4(S_{4a}p_a)^2\right)\right] + O\left(\frac{1}{m^3}\right) \quad (9.2а)$$

$$H^{II}_{j\tau} = \sigma_3\left[2S_{4a}p_a + \frac{2}{3m^2}S_{4a}p_a\right] + \sigma_1\left[m + \frac{1}{2m}\left(p^2 - 4(S_{4a}p_a)^2\right)\right] + O\left(\frac{1}{m^3}\right). \quad (9.2б)$$

Согласно (9.2), гамильтонианы $H^{I}_{j\tau}$ и $H^{II}_{j\tau}$ в случае $p \ll m$ совпадают с точностью до членов порядка и являются полиномами от p_a. Используя обозначения

$$\alpha = I, II, \quad b_a = 2S_{4a}, \quad d_{ab} = \frac{1}{4}\delta_{ab} - S_{4a}S_{4b};$$
$$h^{I}(p_a) = \frac{1}{2}h^{II}(p_a) = \frac{1}{3}\sum_{a,b,c} S_{4a}d_{bc}p_ap_bp_c, \quad (9.3)$$

объединим (9.2) в одну формулу

$$H^{\alpha}_{j\tau}(p_a) = \sigma_1\left[m + \frac{1}{m}\sum_{a,b} d_{ab}(p_ap_b + p_bp_a)\right] + \sigma_3\left[\sum_a b_ap_a + \frac{1}{m^2}h^{\alpha}(p_a)\right] + O\left(\frac{1}{m^3}\right). \quad (9.4)$$

Уравнение (6.1) с гамильтонианами (9.4) описывает движение свободной частицы с произвольным спином. Для того, чтобы описать движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, сделаем в (6.1), (9.4) обычную замену $p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$, где A_μ — вектор-потенциал. В результате приходим к следующему уравнению

$$H^{\alpha}_{j\tau}(\pi_a)\Psi(t,\vec{x}) = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\vec{x}); \qquad (9.5а)$$

$$H^{\alpha}_{j\tau}(\pi_a) = \sigma_1\Big[m + \frac{\pi^2}{2m} - 2\sum_a \frac{(S_{4a}\pi_a)^2}{m} - e\,\frac{\vec{S}\cdot\vec{H}}{m}\Big] + eA_0 +$$

$$+\sigma_1\Big[2\sum_a S_{4a}\pi_a + \frac{1}{m^2}h^{\alpha}(\pi_a)\Big] + o\Big(\frac{1}{m^3}\Big),\ S_a = j_a + \tau_a,\ H_c = -i[\pi_a, \pi_b]. \quad (9.5б)$$

Можно убедиться непосредственно, что гамильтониан (9.5б) имеет как положительные, так и отрицательные собственные значения (это будет очевидно из дальнейшего). Мы получим из (9.5) уравнение для состояний с положительной энергией. Это достигается с помощью серии приближенных унитарных преобразований, приводящих гамильтониан (9.5б) к виду, не содержащему "нечетных" (не коммутирующих с σ_1) членов.

Рассмотрим унитарное преобразование

$$\Psi \to \Psi' = U\Psi,\quad H^{\alpha}_{j\tau}(\pi_a) \to H'^{\alpha}_{j\tau}(\pi_a) = UH^{\alpha}_{j\tau}(\pi_a)U^{+} \qquad (9.6)$$

Используя оператор

$$U_1 = \exp\Big(i\sigma_2\frac{S_{4a}\pi_a}{m}\Big) \approx 1 + i\sigma_2\frac{S_{4a}\pi_a}{m} - \frac{(S_{4a}\pi_a)^2}{2m^2} - i\sigma_2\frac{(S_{4a}\pi_a)^3}{6m^3}, \qquad (9.7)$$

где под "a" подразумевается суммирование, получаем

$$H'^{\alpha}_{j\tau}(\pi_a) = U_1H^{\alpha}_{j\tau}(\pi_a)U_1^{+} = H^{\alpha}_{j\tau}(\pi_a) + \Big[i\sigma_2\frac{S_{4a}\pi_a}{m}, H^{\alpha}_{j\tau}(\pi_a)\Big] - \Big\{\frac{(S_{4a}\pi_a)^2}{2m^2}, H^{\alpha}_{j\tau}(\pi_a)\Big\} -$$

$$-\Big[i\sigma_2\frac{(S_{4a}\pi_a)^3}{6m^3}, H^{\alpha}_{j\tau}(\pi_a)\Big] + \sigma_2\frac{S_{4a}\pi_a}{m}H^{\alpha}_{j\tau}(\pi_a)\frac{S_{4a}\pi_a}{m} - i\sigma_2\frac{S_{4a}\pi_a}{m}\times$$

$$\times H^{\alpha}_{j\tau}(\pi_a)\frac{(S_{4a}\pi_a)^2}{2m^2} + \frac{(S_{4a}\pi_a)^2}{2m^2}H^{\alpha}_{j\tau}(\pi_a)\,i\sigma_2\frac{S_{4a}\pi_a}{m} + o\Big(\frac{1}{m^3}\Big) =$$

$$= \sigma_1\Big(m + \frac{\pi^2}{2m} - e\frac{\vec{S}\cdot\vec{H}}{m} + eA_0 + \frac{e}{2m^2}[S_{4a}E_a, S_{4b}\pi_b] + \frac{1}{m^2}\sigma_3 h'^{\alpha}(\pi_a) +$$

$$+\sigma_2\frac{S_{4a}E_a}{m} + o\Big(\frac{1}{m^3}\Big);\ h'^{\alpha}(\pi_a) = h^{\alpha}(\pi_a) + \frac{4}{3}(S_{4a}\pi_a)^3 - \Big\{\frac{\pi^2}{2} - \qquad (9.8а)$$

$$-\vec{S}\cdot\vec{H},\ S_{4a}\pi_a\Big\}.$$

$$E_a = -i[\pi_0, \pi_a] = -\frac{\partial A_a}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x_a} . \qquad (9.8б)$$

Гамильтониан (9.8) является четным (т.е. коммутирующим с σ_1) с точностью до членов порядка $\frac{1}{m^0}$. В свою очередь унитарный оператор

$$U_2 = exp(i\sigma_1 e \frac{S_{4a} E_a}{2m^2}) \approx 1 + i\sigma_3 \frac{e S_{4a} E_a}{2m^2} \qquad (9.9)$$

приводит $H'^{\alpha}_{j\Sigma}$ (9.8) к следующему виду ("четному" с точностью до $\frac{1}{m}$)

$$H''^{\alpha}_{j\Sigma}(\pi_a) = U_2 H'^{\alpha}_{j\Sigma}(\pi_a) U_2^+ = H'^{\alpha}_{j\Sigma}(\pi_a) + [i\sigma_3 \frac{e S_{4a} E_a}{2m^2}, H'^{\alpha}_{j\Sigma}(\pi_a)] =$$

$$= \sigma_1 [m + \frac{\pi^2}{2m} - e\frac{(\vec{S}\cdot\vec{H})}{m}] + eA_0 + \frac{e}{2m^2}[S_{4a} E_a, S_{4b} \pi_b] + \sigma_3 \frac{h'^{\alpha}(\pi_a)}{m^2} . \qquad (9.10)$$

Наконец, с помощью оператора

$$U_3 = exp(i\sigma_2 \frac{h'^{\alpha}(\pi_a)}{2m^3}) \approx 1 + i\sigma_2 \frac{h'^{\alpha}(\pi_a)}{2m^3} \qquad (9.11)$$

получаем из (9.10) гамильтониан

$$H'''_{j\Sigma}(\pi_a) = U_3 H''^{\alpha}_{j\Sigma}(\pi_a) U_3^+ = \sigma_1 [m + \frac{\pi^2}{2m} - e\frac{(\vec{S}\cdot\vec{H})}{m}] + \\ + eA_0 + \frac{e}{2m^2}[S_{4a} E_a , S_{4b}\pi_b] + o(\frac{1}{m^3}) \qquad (9.12)$$

"четный" с точностью до $\frac{1}{m^2}$.

Таким образом, три последовательных преобразования вида (9.6), осуществляемые операторами (9.7), (9.9), (9.11), приводят уравнение (9.5) к виду

$$H'''_{j\Sigma}(\pi_a)\Phi = i\frac{\partial}{\partial t}\Phi , \quad \Phi = U_3 U_2 U_1 \Psi . \qquad (9.13)$$

Оператор $H'''_{j\Sigma}(\pi_a)$ в приближении $\frac{1}{m^2}$ коммутирует с σ_1. В случае $\pi < m$ на множестве функций Φ_+, удовлетворяющих условию

$$\sigma_1 \Phi_+ = \Phi_+ \qquad (9.14)$$

гамильтониан (9.12) положительно определен и равен

$$H^{'''}_{j\tau}(\pi_a)\Phi_+ = \left\{m + \frac{\pi^2}{2m} - e\frac{(\vec{S}\cdot\vec{H})}{m} + eA_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{e}{2m^2}\left[S_{4a}E_a, S_{4b}\pi_b\right]\right\}\Phi_+ = i\frac{\partial}{\partial t}\Phi_+ . \qquad (9.15)$$

Формула (9.15) представляет собой обобщение уравнения Паули для $s=\frac{1}{2}$ на случай частицы с произвольным (в общем случае переменным) спином.

Для того, чтобы выяснить физический смысл слагаемых, входящих в $H^{'''}_{j\tau}(\pi_a)$, рассмотрим подробно частный случай уравнения (9.15), когда $\tau=0$, $S_{4a}=S_a=j_a$. Согласно (6.9), это соответствует частице с фиксированным спином $s=j$. Используя тождество

$$\frac{e}{2m^2}\left[S_{4a}E_a, S_{4b}\pi_b\right] = -\frac{i}{6}Q^{ab}_{j\tau}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} - e\frac{S^2_{4a}\,\mathrm{div}\,\vec{E}}{6m^2} -$$

$$-\frac{e}{4m^2}\vec{S}\cdot(\vec{E}\times\vec{p} - \vec{p}\times\vec{E});\ Q^{ab}_{j\tau} = 3\{S_{4a}, S_{4b}\} - 2\delta_{ab}S^2_{4c}, \qquad (9.16)$$

запишем уравнение (9.15) для $\tau=0$ в виде

$$H^{'''}_{j\tau}(\pi_a)\Phi_+ = \left[m + \frac{\pi^2}{2m} + eA_0 - e\frac{\vec{S}\cdot\vec{H}}{m} - e\frac{s(s+1)}{6m^2}\mathrm{div}\,\vec{E} - \right.$$

$$\left. - \frac{i}{6}Q^{ab}_{j0}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} + \frac{e}{4m^2}\vec{S}\cdot(\vec{E}\times\vec{p} - \vec{p}\times\vec{E})\right]\Phi_+ = i\frac{\partial}{\partial t}\Phi_+ ; \qquad (9.17а)$$

$$Q^{ab}_{j0} = 3\{S_a, S_b\} - 2\delta_{ab}\,s(s+1). \qquad (9.17б)$$

Уравнение (9.17а) описывает в квазирелятивистском приближении движение заряженной частицы с произвольным фиксированным спином во внешнем электромагнитном поле. Согласно используемым в [81] определениям, гамильтониан $H^{'''}_{j0}(\pi_0)$ содержит слагаемые, соответствующие дипольному $\left(-\frac{e}{m}(\vec{S}\cdot\vec{H})\right)$, квадрупольному $\left(-\frac{1}{6}Q^{ab}_{j0}\cdot\frac{\partial E_a}{\partial x_b}\right)$, спин-орбитальному $\left(-\frac{e}{4m^2}\vec{S}\cdot(\vec{p}\times\vec{E} - \vec{E}\times\vec{p})\right)$ и дарвиновскому $\left(-\frac{1}{6m^2}s(s+1)\,\mathrm{div}\,\vec{E}\right)$ взаимодействию. Оператор (9.17б) называется в [40] тензором квадрупольного взаимодействия. Подставив (9.16) в (9.15), получаем аналогичные члены и для гамильтониана

$H^{'''}_{j\Sigma}(\bar{\pi}_0)$ частицы с переменным спином, где $Q^{ab}_{j\Sigma}$ (9.16) – обобщенный тензор квадрупольного взаимодействия.

Таким образом, используя найденные в §§ 7,8 уравнения для свободных частиц с произвольным спином, мы нашли квазирелятивистские уравнения (9.15)–(9.17) для заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле. При этом было установлено, что в приближении $\frac{1}{m^2}$ оба используемых гамильтониана, $H^{I}_{j\Sigma}$ и $H^{II}_{j\Sigma}$ формально эквивалентны (9.12). Однако оператор $H^{II}_{j\Sigma}$ определен в гильбертовом пространстве, где скалярное произведение имеет сложную структуру (6.8), поэтому для описания движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле предпочтительнее использовать гамильтониан $H^{I}_{j\Sigma}$. В случае $j = s = \frac{1}{2}$ (9.17а) совпадает с уравнением, полученным Фолди и Вуйтхайзеном [78]. Если $j = s = 1$, то (9.17а) имеет такую же структуру, как и уравнение, полученное в [82], но дополнительно учитывает квадрупольное взаимодействие частицы с полем.

ГЛАВА II

ДИРАКОПОДОБНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО СПИНА

В настоящей главе для описания частицы с произвольным спином и массой предлагается система линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Эти уравнения явноковариантны, имеют простую форму (которая не усложняется при переходе от s к $s+1$) и допускают непротиворечивое обобщение на случай заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле. При выводе и анализе уравнений использованы методы, развитые в главе I.

§ I. Генераторы представления группы $P(1,3)$

При постановке задач в §§ I,6 главы I мы ограничились случаем, когда матрицы S_{ke} , входящие в определения (I.2), (6.3), (6.6) генераторов группы $P(1,3)$, образуют неприводимое представление $D(j,\tau)$ или прямую сумму $\sum\limits_{s=|j-\tau|}^{j+\tau} \oplus D(0,s)$ неприводимых представлений группы $O(4)$. Это позволило нам определить все возможные (с точностью до эквивалентности) релятивистские уравнения без лишних компонент для "частиц" с переменным спином и переменной массой.

Использование других (приводимых) представлений группы $O(4)$ приводит в общем случае к появлению лишних компонент, но зато позволяет получить качественно новые уравнения, которые могут быть более удобны для решения конкретных задач, чем полученные в главе I. В настоящей главе мы выберем матрицы S_{ke} таким образом, чтобы уравнение (I.I гл.I) для произвольного спина S формально совпадало с уравнением Дирака для $s=\frac{1}{2}$. При этом и уравнение (I.I гл.I), и дополнительное условие, которое необходимо наложить на волновую функцию $\Psi(t,\vec{x})$ для устранения лишних компонент, оказываются явноковариантными.

Рассмотрим представление алгебры Пуанкаре следующего вида

$$P_0 = H; \quad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a};$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}; \tag{1.1}$$

$$J_{0a} = x_0 p_a - x_a p_0 + i S_{4a},$$

где матрицы S_{kl} имеют такую структуру

$$S_{ab} = j_{ab} + \tau_{ab} = j_c + \tau_c; \quad iS_{4a} = S_{0a} = j_{0a} + \tau_{0a} = i\sigma_3 j_a + i\tau_a, \tag{1.2}$$

а j_c, τ_c генераторы неприводимых представлений $D(j)$ и $D(\tau)$ группы $O(3)$ (см. (6.4), (6.5) гл.I). Представление (I.I) можно рассматривать как обобщение (6.6, гл.I). Действительно, (I.I) отличается от (6.6, гл.I) только более сложной структурой матриц S_{4a}, $S_{4a} \subset D(j,\tau) \oplus \sum\limits_{s=|j-\tau|}^{j+\tau} D(0,s)$.

Рассмотрим частный случай представления (I.I), когда $j = \frac{1}{2}$, и поставим вопрос об определении возможных гамильтонианов H, при которых генераторы (I.I) удовлетворяют алгебре $P(1,3)$. Не задаваясь целью найти все возможные H, укажем, что для любого значения τ можно положить

$$H = \sigma_1 m + 2\sigma_3(\vec{j}\cdot\vec{p}). \tag{1.3}$$

Доказательство этого факта мы отложим до § 2.

Таким образом, произвольному представлению вида (I.I) можно сопоставить релятивистское уравнение (I.I, гл.I), где H-гамильтониан Дирака (I.3):

$$H\Psi(t,\vec{x}) = [\sigma_1 m + 2\sigma_3(\vec{j}\cdot\vec{p})]\Psi(t,\vec{x}) = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\vec{x}). \tag{1.4}$$

Как видно из структуры (I.2) спиновых матриц, уравнение (I.4) имеет $2(2j+1)(2\tau+1) = 4(2\tau+1)$ компонент.

Используя обозначения

$$\sigma_1=\gamma_0,\ i\sigma_2\cdot 2j_a=-\gamma_a,\ \sigma_3=-i\gamma_4=-i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \qquad (I.5)$$

уравнение (I.4) можно записать в явноковариантной форме

$$(\gamma_\mu P^\mu-m)\Psi(t,\vec{x})=0;\ \gamma_\mu P^\mu=\gamma_0\bar{P}_0-\gamma_a P_a,\ \bar{P}_0=i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad (I.6)$$

причем матрицы γ_μ удовлетворяют обычной алгебре Клиффорда

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2g_{\mu\nu};\ g_{\mu\nu}=\begin{cases}0, & \mu\neq\nu\\ 1, & \mu=\nu=0\\ -1, & \mu=\nu\neq 0\end{cases} \qquad (I.7)$$

Соотношения (I.7) непосредственно следуют из определения (I.5),[2,80] поскольку матрицы j_a как генераторы представления $D(\frac{1}{2})$ группы $O(3)$ имеют свойства [ ]

$$j_a^2=\frac{1}{4};\ j_a j_b=-j_b j_a=\frac{i}{2}j_c, \quad (a,b,c) \text{ – цикл } (1,2,3) \qquad (I.8)$$

Из явного вида (I.Iб) генератора I_{ob} следует, что уравнение (I.6) в общем случае описывает несколько спинов. Для того чтобы описать частицу с фиксированным спином, на решения $\Psi(t,\vec{x})$ уравнения (I.6) нужно наложить релятивистски инвариантные дополнительные условия, устраняющие лишние компоненты.

Технически решение вопроса о том, какие значения спина могут быть у системы, описываемой уравнением (I.6), а также определение явного вида дополнительных условий для выделения фиксированного спина проще всего осуществить в каноническом представлении алгебры $P(1,3)$ типа (7.10, гл.I). Поэтому мы преобразуем (I.I) к каноническому виду, найдем условия, устраняющие лишние компоненты, а затем, посредством обратного преобразования, определим эти условия в представлении (I.I). Попутно мы определим инвариантное скалярное произведение для решений уравнения (I.6). Это составит содержание следующего параграфа.

§ 2. Инвариантные дополнительные условия

Покажем, что представление (I.I) может быть приведено к следующей эквивалентной форме

$$P_0^{\kappa} = \sigma_1 E ; \tag{2.Iа}$$

$$P_a^{\kappa} = P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a} ; \quad I_{ab}^{\kappa} = x_a P_b - x_b P_a + S_{ab} ; \tag{2.Iб}$$

$$I_{0a}^{\kappa} = x_0 P_a - \frac{1}{2}\sigma_1 \{x_a , E\} - \sigma_1 \frac{S_{ab} P_b}{E+m} , \tag{2.Iв}$$

где матрицы S_{ab} те же самые, что в (I.I).

Для доказательства подействуем на (2.I) следующим оператором

$$W = U^{+} \cdot V ;$$

$$U^{+} = \frac{E+m+i\sigma_2 2(\vec{s}\cdot\vec{p})}{\sqrt{2E(E+m)}} ; \quad V = \exp\left(\sigma_1 \frac{\vec{\tau}\cdot\vec{p}}{p} \operatorname{arcth}\frac{p}{E}\right) \tag{2.2}$$

и покажем, что имеют место тождества

$$W P_0^{\kappa} W^{-1} = H ; \tag{2.3а}$$

$$W P_a^{\kappa} W^{-1} = P_a = p_a , \quad W I_{ab}^{\kappa} W^{-1} = I_{ab} , \tag{2.3б}$$

$$W I_{0a}^{\kappa} W^{-1} = I_{0a} . \tag{2.3в}$$

Из (2.2) видно, что W коммутирует с генераторами (2.Iб), следовательно, (2.3б) очевидно выполняется.

Докажем, что выполняется (2.3а). Подставив (2.Iа), (2.2) в левую часть (2.3а) и учитывая коммутативность V и $\sigma_1 E$ получаем

$$W P_0^{\kappa} W^{-1} = U^{+} V \sigma_1 E V^{-1} U = U^{+} \sigma_1 E U =$$

$$= \frac{E+m+i\sigma_2 \cdot 2(\vec{s}\cdot\vec{p})}{\sqrt{2E(E+m)}} \sigma_1 E \frac{E+m-i\sigma_2 2(\vec{s}\cdot\vec{p})}{\sqrt{2E(E+m)}} = \frac{[E+m+2i\sigma_2(\vec{s}\cdot\vec{p})]^2}{2E(E+m)} \sigma_1 E$$

$$= \frac{(E+m)^2 - p^2 + 2i\sigma_2(s\cdot p)}{2(E+m)} \sigma_1 \equiv \sigma_1 m + 2\sigma_3(\vec{s}\cdot\vec{p}) = H , \tag{2.4}$$

что и требовалось.

Докажем теперь, что имеет место (2.3в). Для этого мы сначала подействуем на $\overset{\kappa}{I}_{0a}$ (2.1в) оператором V из (2.2) и покажем, что выполняется

$$V\overset{\kappa}{I}_{0a}V^{-1} = V\left(\underline{x_0 p_a} - \frac{1}{2}\sigma_1\{x_a, E\} - \sigma_1 \underset{\sim\sim\sim}{\frac{j_{0\ell} p_\ell}{E+m}} - \sigma_1 \frac{\tau_{0\ell} p_\ell}{E+m}\right)V^{-1} =$$

$$= \underline{x_0 p_a} - \frac{1}{2}\sigma_1\{x_a, E\} - \sigma_1 \underset{\sim\sim\sim}{\frac{j_{0\ell} p_\ell}{E+m}} + i\tau_a . \qquad (2.5)$$

Поскольку оператор V коммутирует с $x_0 p_a$ и $\sigma_1 \frac{j_{0\ell} p_\ell}{E+m}$, достаточно показать, что выполняется

$$V\left(-\frac{1}{2}\sigma_1\{x_a, E\} - \sigma_1 \frac{\tau_{0\ell} p_\ell}{E+m}\right)V^{-1} = -\frac{1}{2}\sigma_1\{x_a, E\} + i\tau_a$$

или, что то же

$$-\frac{1}{2}\left\{[V, x_a]V^{-1}, E\right\}\sigma_1 - \left[V, \frac{\tau_{0\ell} p_\ell}{E+m}\right]V^{-1}\sigma_1 = i\tau_a + \sigma_1 \frac{\tau_{0\ell} p_\ell}{E+m} . \qquad (2.6)$$

Покажем, что (2.6) – это тождество.

Используя операторы проектирования (7.9, гл.I), запишем оператор V (2.2) в виде

$$V = exp\left(\sigma_1 \frac{\vec{\tau}\cdot\vec{p}}{p} æ\right) = exp\left(\sigma_1 \sum_{\tau_3} \tau_3 \Lambda_{\tau_3} æ\right) =$$
$$= \sum_{\tau_3}\left[ch(\tau_3 æ) + \sigma_1 sh(\tau_3 æ)\right]\Lambda_{\tau_3} ; \; æ = arcth\frac{p}{E} . \qquad (2.7)$$

Используя выражения (7.7, гл.I) для коммутаторов проекторов Λ_{τ_3} с x_a и τ_a и принимая во внимание тождества

$$[ch(\tau_3 æ) + \sigma_1 sh(\tau_3 æ), x_a] = -i\frac{\partial}{\partial p_a}\{ch(\tau_3 æ) + \sigma_1 sh(\tau_3 æ)\} =$$

$$= -i\sigma_1\tau_3 \frac{p_a}{E_p}\{ch(\tau_3 æ) + \sigma_1 sh(\tau_3 æ)\} ; \qquad (2.8a)$$

$$= \frac{-p^2}{E+m}\sum_{\tau_3,\tau_3'}\{ch[(\tau_3-\tau_3')\varkappa]-\sigma_1 sh[(\tau_3-\tau_3')\varkappa]\}\Big[\frac{(\vec p\times\vec\tau)_a}{2p^2}(2\delta_{\tau_3\tau_3'}-$$

$$-\delta_{\tau_3\tau_3'+1}-\delta_{\tau_3\tau_3'-1})+\frac{i}{2p}(\tau_a-\frac{p_a}{p}\tau_3)(\delta_{\tau_3\tau_3'+1}-\delta_{\tau_3\tau_3'-1})\Big]\Lambda_{\tau_3}=$$

$$=\frac{-p^2}{E+m}\sum_{\tau_3}\Big[\frac{-(\vec p\times\vec\tau)_a}{2p^2}\cdot 2(ch\,0-ch\,\varkappa)-\sigma_1\frac{i}{2p}(\tau_a-\frac{p_a}{p}\tau_3)2\,sh\,\varkappa\Big]\Lambda_{\tau_3}=$$

$$=\frac{-p^2}{E+m}\Big[\frac{(\vec p\times\vec\tau)_a}{p^2}\cdot\frac{(m-E)}{m}-i\,\sigma_1\frac{1}{m}(\tau_a-\frac{p_a}{p}\cdot\frac{\vec\tau\cdot\vec p}{p})\Big]. \quad (2.10)$$

Подставляя (2.9), (2.10) в (2.6), получаем

$$-i[V,x_a]V^{-1}\cdot\sigma_1 E-\sigma_1[V,\frac{\tau_{ab}p_b}{E+m}]V^{-1}=i\,p_a(\vec\tau\cdot\vec p)\frac{(m-E)\cdot E}{Ep^2m}+$$

$$+i\,\tau_a\frac{E}{m}-\sigma_1\frac{(\vec p\times\vec\tau)_a}{p^2m}\cdot E(m-E)+\sigma_1\frac{(\vec p\times\vec\tau)_a}{E+m}\cdot\frac{m-E}{m}-i\,\frac{p^2}{m(m+E)}\tau_a+$$

$$+i\,p_a\frac{\vec\tau\cdot\vec p}{m(m+E)}=i\,p_a\cdot\frac{\vec\tau\cdot\vec p}{m}\Big(\frac{m-E}{p^2}+\frac{1}{m+E}\Big)+i\,\tau_a\frac{1}{m}\Big(E-\frac{p^2}{m+E}\Big)-$$

$$-\sigma_1\frac{(\vec p\times\vec\tau)_a}{m}\Big[\frac{E(m-E)}{p^2}-\frac{m-E}{E+m}\Big]=i\,p_a\frac{\vec\tau\cdot\vec p}{m}\Big(\frac{-1}{m+E}+\frac{1}{m+E}\Big)+$$

$$+i\,\tau_a\frac{1}{m}(E-E+m)-\sigma_1\frac{(\vec p\times\vec\tau)_a}{m}\Big(-\frac{E}{E+m}-\frac{m-E}{E+m}\Big)\equiv$$

$$\equiv\sigma_1\frac{\tau_{ab}p_b}{E+m}+i\,\tau_a;\quad \tau_{ab}p_b\equiv(\vec p\times\vec\tau)_a. \quad (2.11)$$

Согласно (2.11), соотношение (2.6) (а значит, и (2.5)) выполняется тождественно.

Подействуем теперь на I'_{oa} из (2.5) оператором U^+ (2.2)

$$U^+I'_{oa}U=U^+(x_0p_a-\tfrac{1}{2}\sigma_1\{x_a,E\}-\sigma_1\frac{\jmath_{ab}p_b}{E+m}+i\,\tau_a)U\equiv$$

$$\equiv U^+(x_0p_a-\tfrac{1}{2}\sigma_1\{x_a,E\}-\sigma_1\frac{\jmath_{ab}p_b}{E+m})U+i\,\tau_a. \quad (2.12)$$

Но согласно (7.11б гл.I) для $\tau=0$, $j=\frac{1}{2}$ и (7.10б гл.I), (6.3 гл.I)

$$U^{+}\left(x_0 p_0 - \frac{1}{2}\sigma_1\{x_a, E\} - \sigma_1 \frac{i\varepsilon_{ab}p_b}{E+m}\right)U = x_0 p_a - \tag{2.13а}$$

$$-\frac{1}{2}\{x_a, H^{2}_{\frac{1}{2}0}\} = x_0 p_a - x_a p_0 + i\sigma_3 j_a ;$$

где $\qquad H^{1}_{\frac{1}{2}0} = H = \sigma_1 m + 2\sigma_3(\vec{j}\cdot\vec{p}) = p_0 .$ (2.13б)

Подставив (2.13) в (2.12), приходим к формуле (2.3в)

$$U^{+}V I^{*}_{0a} V^{-1} U = x_0 p_a - x_a p_0 + i\tau_a + i\sigma_3 j_a \equiv I_{0a} . \tag{2.14}$$

Соотношения (2.3) доказаны полностью, представления (I.I) и (2.I) эквивалентны.

Согласно (2.4), (I.4), представление (2.I) реализуется на множестве решений уравнения

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi = \sigma_1 E\Phi , \quad \Phi = W^{-1}\Psi . \tag{2.15}$$

Генераторы (2.I) эрмитовы относительно обычного скалярного произведения

$$(\Phi_1 , \Phi_2) = \int d^3x\, \Phi_1^{+}(t,\vec{x})\,\Phi_2\,(t,\vec{x}) \tag{2.16}$$

и, очевидно, удовлетворяют алгебре $P(1,3)$. Следовательно, мы одновременно доказали, что генераторы (I.I) с гамильтонианом H (I.3) тоже образуют представление алгебры $P(1,3)$, т.е. удовлетворяют коммутационным соотношениям (I.6, гл.I).

Из (2.I) видно, что на решениях уравнения (2.15) реализуется приводимое представление группы $P(1,3)$. Действительно, оператор квадрата спина для (2.I) имеет вид [79]

$$\hat{S}^{2} = -\frac{W_\mu W^\mu}{m^2} = (\vec{S})^2 = (\vec{j}+\vec{\tau})^2 . \tag{2.17}$$

Согласно теореме Клебша-Гордона, собственные значения оператора (2.17) равны $s'(s'+1)$, причем

$$|j-\tau| \leq s' \leq j+\tau, \qquad (2.18)$$

или, учитывая, что $j=\frac{1}{2}$

$$s'=\tau+\frac{1}{2} \quad или \quad s'=\tau-\frac{1}{2}. \qquad (2.19)$$

Таким образом, уравнение (2.15), а значит, и (1.4) описывает частицы с двумя значениями спина – $s=\tau+\frac{1}{2}$ и $\tilde{s}=s-1$.

Релятивистское дополнительное условие, выделяющее спин s, очевидно может быть записано в виде

$$-\frac{W_\mu W^\mu}{m^2}\phi=(\vec{s})^2\phi=s(s+1)\phi. \qquad (2.20)$$

Эквивалентной формой записи (2.20) служит выражение

$$P_s\phi=\phi, \qquad (2.21)$$

где P_s – оператор проектирования на подпространство, соответствующее спину s

$$P_s=\frac{(\vec{s})^2-\tilde{s}(\tilde{s}+1)}{s(s+1)-\tilde{s}(\tilde{s}+1)}\equiv\frac{(\vec{s})^2-s(s-1)}{2s};\; P_s^2\equiv P_s. \qquad (2.22)$$

Тот факт, что так определенный оператор P_s является проектором, следует из полноты и ортогональности системы собственных функций эрмитова оператора $(\vec{s})^2$. Запишем P_s в виде

$$P_s=\frac{1}{2}(1+g),\quad g=2P_s-1=\frac{(\vec{s})^2-s^2}{s}. \qquad (2.23)$$

Так определенная матрица g удовлетворяет соотношению

$$g^2=1, \qquad (2.24)$$

которое непосредственно следует из (2.22), (2.23). Таким образом, согласно (2.21), (2.23), дополнительное условие, выделяющее подпространство состояний, соответствующих спину s, в представлении (2.1) имеет вид

$$P_s\phi=\frac{1}{2}(1+g)\phi=\phi,\quad g=\frac{(\vec{s})^2-s^2}{s}. \qquad (2.25)$$

Определим теперь вид дополнительного условия (2.25) в явноковариантном представлении (I.I). Для этого подействуем на (2.25) оператором W. В результате получим

$$W\frac{1}{2}(1+g)\Phi \equiv W\frac{1}{2}(1+g)W^{-1}W\Phi=\frac{1}{2}(1+W_g W^{-1})\psi=\psi. \quad (2.26)$$

Докажем, что имеет место тождество

$$W g W^{-1}=g+[W,g]W^{-1}=g+(-\sigma_1+i\sigma_2)\frac{[g,\vec{j}\cdot\vec{p}]}{m}; \quad (2.27)$$

или, что то же

$$[W,g]W^{-1}=(-\sigma_1+i\sigma_2)\frac{[g,\vec{j}\cdot\vec{p}]}{m}. \quad (2.28)$$

Для доказательства (2.28) выразим сначала матрицу g через матрицы $\vec{j}$ и $\vec{\tau}$. Согласно (2.23), (2.I7)

$$g=\frac{(\vec{s})^2-s^2}{s}=\frac{(\vec{j}+\vec{\tau})^2-s^2}{s}=\frac{j(j+1)+\tau(\tau+1)+2(\vec{j}\cdot\vec{\tau})-s^2}{s}$$

или, учитывая, что $j=\frac{1}{2}$, $\tau=s-\frac{1}{2}$

$$g=\frac{1+4(\vec{j}\cdot\vec{\tau})}{2s}. \quad (2.29)$$

Соотношение (2.28) будем доказывать по индукции.

Рассмотрим сначала случай $\tau=\frac{1}{2}$, когда оператор V из (2.2) имеет вид

$$V=exp\left(\sigma_1\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{p}}{p}\,arcth\frac{p}{E}\right)=\frac{E+m+2\sigma_1\,\vec{\tau}\cdot\vec{p}}{\sqrt{2m(E+m)}}. \quad (2.30)$$

Формула (2.30) следует непосредственно из (2.7) и из соотношений

$$\tau_3=\pm\frac{1}{2};\ \Lambda_{\frac{1}{2}}+\Lambda_{-\frac{1}{2}}=1;\ \Lambda_{\frac{1}{2}}-\Lambda_{-\frac{1}{2}}=\frac{2\vec{\tau}\cdot\vec{p}}{p}. \quad (2.3I)$$

Подставив (2.30) в (2.2) находим явный вид оператора W для $\tau = \frac{1}{2}$

$$W = U^{+}V = \frac{E+m+2i\sigma_2\,\vec{j}\cdot\vec{p}}{\sqrt{2E(E+m)}}\cdot\frac{E+m+2\sigma_1\,\vec{\tau}\cdot\vec{p}}{\sqrt{2m(E+m)}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{Em}}\left[E+m+2i\sigma_2\,\vec{j}\cdot\vec{p}+2\sigma_1\,\vec{\tau}\cdot\vec{p}+4(E-m)\sigma_3\frac{(\vec{j}\cdot\vec{p})(\vec{\tau}\cdot\vec{p})}{p^2}\right]; \quad (2.32)$$

$$W^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{Em}}\left[E+m-2i\sigma_2\,\vec{j}\cdot\vec{p}-2\sigma_1\,\vec{\tau}\cdot\vec{p}-4(E-m)\sigma_3\frac{(\vec{j}\cdot\vec{p})(\vec{\tau}\cdot\vec{p})}{p^2}\right]$$

Найдем коммутатор $\vec{j}\cdot\vec{\tau}$ с W. Используя (2.32), получаем

$$[W, \vec{j}\cdot\vec{\tau}] = \frac{1}{\sqrt{Em}}(i\sigma_2-\sigma_1)[(\vec{j}\cdot\vec{p}),(\vec{j}\cdot\vec{\tau})] \quad (2.33)$$

(использовано тождество $[(\vec{j}\cdot\vec{p}+\vec{\tau}\cdot\vec{p})^{e}, \vec{j}\cdot\vec{\tau}] = 0$).

Умножив (2.33) справа на W^{-1}, приходим к формуле

$$[W, \vec{j}\cdot\vec{\tau}]W^{-1} = \frac{1}{\sqrt{Em}}(i\sigma_2-\sigma_1)[\vec{j}\cdot\vec{p}, \vec{j}\cdot\vec{\tau}]\cdot\frac{1}{2\sqrt{Em}}\Big[E+m-$$

$$-2i\sigma_2\,\vec{j}\cdot\vec{p}-2\sigma_1\,\vec{\tau}\cdot\vec{p}-4(E-m)\sigma_3\frac{(\vec{j}\cdot\vec{p})(\vec{\tau}\cdot\vec{p})}{p^2}, \quad (2.34)$$

откуда, используя свойства матриц Паули

$$(i\sigma_2-\sigma_1)i\sigma_2 = (i\sigma_2-\sigma_1)\sigma_1 = \sigma_3 - 1;$$
$$(i\sigma_2-\sigma_1)\sigma_3 = i\sigma_2-\sigma_1, \quad (2.35)$$

получаем

$$[W, \vec{j}\cdot\vec{\tau}]W^{-1} = \frac{1}{2Em}[(\vec{j}\cdot\vec{p}),(\vec{j}\cdot\vec{\tau})]\Big[(i\sigma_2-\sigma_1)\Big(E+m-$$

$$-4(E-m)\frac{(\vec{j}\cdot\vec{p})(\vec{\tau}\cdot\vec{p})}{p^2}+2(1-\sigma_3)(\vec{j}\cdot\vec{p}+\vec{\tau}\cdot\vec{p}). \quad (2.36)$$

Покажем, что имеют место следующие тождества

$$[\vec{j}\cdot\vec{\rho}, \vec{j}\cdot\vec{\tau}]\cdot(\vec{j}\cdot\vec{\rho}+\vec{\tau}\cdot\vec{\rho}) \equiv 0 \tag{2.37а}$$

$$[\vec{j}\cdot\vec{\rho}, \vec{j}\cdot\vec{\tau}]\cdot 4(\vec{j}\cdot\vec{\rho})(\vec{\tau}\cdot\vec{\rho})\rho^{-2} = -[\vec{j}\cdot\vec{\rho}, \vec{j}\cdot\vec{\tau}]. \tag{2.37б}$$

Для доказательства (2.37) воспользуемся тем обстоятельством, что коммутирующие друг с другом матрицы j_a и τ_a являются генераторами представлений $\mathcal{D}(\frac{1}{2})$ группы $O(3)$, и, следовательно, обладают такими свойствами [67]

$$[\vec{j}\cdot\vec{a}, \vec{j}\cdot\vec{b}] = 2(\vec{j}\cdot\vec{a})(\vec{j}\cdot\vec{b}) - \tfrac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}; \quad (\vec{j}\cdot\vec{a})^2 = \frac{a^2}{4}; \tag{2.38}$$

$$[\vec{\tau}\cdot\vec{c}, \vec{\tau}\cdot\vec{d}] = 2(\vec{\tau}\cdot\vec{c})(\vec{\tau}\cdot\vec{d}) - \tfrac{1}{2}\vec{c}\cdot\vec{d}; \quad (\vec{\tau}\cdot\vec{c})^2 = \frac{c^2}{4},$$

где $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ – произвольные векторы, удовлетворяющие соотношениям

$$[j_a, a_b] = [j_a, b_c] = [a_b, b_c] = 0; \tag{2.39}$$

$$[\tau_a, d_b] = [\tau_a, c_b] = [d_a, c_b] = 0.$$

Полагая $\vec{a}=\vec{\tau}$, $\vec{b}=\vec{\rho}$, $\vec{c}=\vec{j}$, $\vec{d}=\vec{\rho}$, получаем, используя (2.38) и учитывая, что $[\vec{j}\cdot\vec{\rho}+\vec{\tau}\cdot\vec{\rho}, \vec{j}\cdot\vec{\tau}] \equiv 0$

$$[\vec{j}\cdot\vec{\rho}, \vec{j}\cdot\vec{\tau}] \equiv \tfrac{1}{2}[(\vec{j}\cdot\vec{\rho})-(\vec{\tau}\cdot\vec{\rho}), \vec{j}\cdot\vec{\tau}] = (\vec{j}\cdot\vec{\tau}-\tfrac{1}{4})(\vec{j}\cdot\vec{\rho}-\vec{\tau}\cdot\vec{\rho}). \tag{2.40}$$

Но ввиду (2.40) соотношения (2.37) становятся почти очевидными. Действительно, подставляя (2.40) в (2.37), получаем, учитывая (2.38)

$$[\vec{j}\cdot\vec{\rho}, \vec{j}\cdot\vec{\tau}](\vec{j}\cdot\vec{\rho}+\vec{\tau}\cdot\vec{\rho}) = (\vec{j}\cdot\vec{\tau}-\tfrac{1}{4})(\vec{j}\cdot\vec{\rho}-\vec{\tau}\cdot\vec{\rho})(\vec{j}\cdot\vec{\rho}+\vec{\tau}\cdot\vec{\rho}) =$$

$$= (\vec{j}\cdot\vec{\tau}-\tfrac{1}{4})[(\vec{j}\cdot\vec{\rho})^2-(\vec{\tau}\cdot\vec{\rho})^2] = \tfrac{1}{4}(\vec{j}\cdot\vec{\tau}-\tfrac{1}{4})(\rho^2-\rho^2) = 0;$$

$$[j\cdot\rho, j\cdot\tau]\cdot 4\frac{(\vec{j}\cdot\vec{\rho})(\vec{\tau}\cdot\vec{\rho})}{\rho^2} = (\vec{j}\cdot\vec{\tau}-\tfrac{1}{4})(\vec{j}\cdot\vec{\rho}-\vec{\tau}\cdot\vec{\rho})\cdot 4\frac{(j\cdot\rho)(\tau\cdot\rho)}{\rho^2} =$$

$$= (\vec{j}\cdot\vec{\tau} - \tfrac{1}{4})[4(\vec{j}\cdot\vec{p})^2 \tau\cdot p - 4(\tau\cdot p)^2(j\cdot p)]\,p^{-2} =$$

$$= (\vec{j}\cdot\vec{\tau} - \tfrac{1}{4})(\tau\cdot p - j\cdot p) \equiv -[\vec{j}\cdot\vec{\tau}, \vec{\tau}\cdot\vec{p}].$$

Тождества (2.37) доказаны. Подставив (2.37) в (2.36), приходим к соотношению (2.28)

$$[W, \vec{j}\cdot\vec{\tau}]\,W^{-1} = (i\sigma_2 - \sigma_1)\frac{[\vec{j}\cdot\vec{p}, \vec{j}\cdot\vec{\tau}]}{m}. \tag{2.41}$$

Мы доказали (2.41) для частного случая $\tau = \frac{1}{2}$.
Докажем теперь, что (2.41) имеет место для произвольного . Для этого рассмотрим вспомогательный оператор

$$(\vec{j}\cdot\vec{\tau})_b = (\vec{j}\cdot\vec{\tau}_1) + (\vec{j}\cdot\vec{\tau}_2), \tag{2.42}$$

где τ_1 – генераторы неприводимого представления $D(\frac{1}{2})$, τ_2 – произвольного представления $D(\tau_2)$ группы $O(3)$, удовлетворяющие соотношениям

$$[(\tau_1)_a, (\tau_2)_b] = [(\tau_1)_a, j_b] = [(\tau_2)_a, j_b] = 0 \tag{2.43}$$

Согласно теореме Клебша-Гордона, для матриц $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$ существует такое представление (например, в базисе Гельфанда $_{[63]}$), что

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \begin{pmatrix} \vec{\tau}' & 0 \\ 0 & \vec{\tau}'' \end{pmatrix}, \tag{2.44}$$

где τ_a' и τ_a'' – генераторы неприводимых представлений $D(\tau_2 + \frac{1}{2})$ и $D(\tau_2 - \frac{1}{2})$ соответственно.
Введем вспомогательный оператор преобразования

$$W_b = U^{+} V_1 V_2 \tag{2.45}$$

где U задан в (2.2), а V_1, V_2 имеют вид

$$V_1 = exp\left(\sigma_3 \; \frac{\vec{\tau}_1\cdot\vec{p}}{p} \, arcth \, \frac{p}{E}\right);$$

$$V_2 = exp\left(\sigma_3 \; \frac{\tau_2\cdot p}{p} \; arcth \; \frac{p}{E}\right). \tag{2.46}$$

Подействуем оператором (2.45) на (2.42). Учитывая (2.43), получаем

$$W_b (\vec{j}\cdot\vec{\tau})_b W_b^{-1} = U^{+} V_1 V_2 (\vec{j}\cdot\tau_1 + \vec{j}\cdot\vec{\tau}_2) V_2^{-1} V_1^{-1} U =$$

$$= U^{+} V_1 (\vec{j}\cdot\vec{\tau}_1) V_1^{-1} U + U^{+} V_2 (\vec{j}\cdot\vec{\tau}_2) V_2^{-1} U. \tag{2.47}$$

Для первого слагаемого в правой части (2.47) мы можем применить соотношение (2.41) и записать

$$U^{+} V (\vec{j}\cdot\vec{\tau}_1) V_1^{-1} U = W_1 (\vec{j}\cdot\vec{\tau}_1) W_1^{-1} = (\vec{j}\cdot\vec{\tau}_1) + [W_1, \vec{j}\cdot\vec{\tau}_1] W_1^{-1} =$$

$$= \vec{j}\cdot\vec{\tau}_1 + (i\sigma_2 - \sigma_1) \frac{[\vec{j}\cdot\vec{p}, \vec{j}\cdot\vec{\tau}_1]}{m}; \quad W_1 = U^{+} V_1 . \tag{2.48}$$

Предположим, что и для второго слагаемого (2.47) имеет место аналогичное тождество

$$U^{+} V_2 (\vec{j}\cdot\vec{\tau}_2) V_2^{-1} U = W_2 (\vec{j}\cdot\vec{\tau}_2) W_2^{-1} = \vec{j}\cdot\vec{\tau}_2 + [W_2, \vec{j}\cdot\vec{\tau}_2] W_2^{-1} =$$

$$= \vec{j}\cdot\vec{\tau}_2 + (i\sigma_2 - \sigma_1) \frac{[\vec{j}\cdot\vec{p}, \vec{j}\cdot\vec{\tau}_2]}{m}; W_2 = U^{+} V_2 . \tag{2.49}$$

Подставив (2.48), (2.49) в (2.47), приходим к соотношению

$$W_b (\vec{j}\cdot\vec{\tau})_b W_b^{-1} = \vec{j}\cdot\vec{\tau}_1 + \vec{j}\cdot\vec{\tau}_2 + (i\sigma_2 - \sigma_1) \frac{[\vec{j}\cdot\vec{p}, \vec{j}\cdot\vec{\tau}]}{m} +$$

$$+ (i\sigma_2 - \sigma_1) \frac{[\vec{j}\cdot\vec{p}, \vec{j}\cdot\vec{\tau}_2]}{m} = \vec{j}(\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2) +$$

$$+ (i\sigma_2 + \sigma_1) \frac{[\vec{j}\cdot\vec{p}, \vec{j}(\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2)]}{m}, \tag{2.50}$$

которое, учитывая "ящичную" форму всех операторов (2.42), (2.44), (2.45) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} W'\vec{j}\cdot\vec{\tau}'(W')^{-1} & 0 \\ 0 & W''\vec{j}\cdot\vec{\tau}''(W'')^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{j}\cdot\vec{\tau}' & 0 \\ 0 & \vec{j}\cdot\vec{\tau}'' \end{pmatrix} +$$

$$+(i\sigma_2-\sigma_1)\frac{1}{m}\begin{pmatrix} [\vec{j}\cdot\vec{p},\vec{j}\cdot\vec{\tau}'] & 0 \\ 0 & [\vec{j}\cdot\vec{p},\vec{j}\cdot\vec{\tau}''] \end{pmatrix}, \tag{2.51}$$

где $W' = U^+V'$; $W'' = U^+V''$;

$$V' = exp\left(\sigma_1\frac{\vec{\tau}'\cdot\vec{p}}{p}\,arcth\frac{p}{E}\right); V'' = exp\left(\sigma_1\frac{\vec{\tau}''\cdot\vec{p}}{p}\,arcth\frac{p}{E}\right). \tag{2.52}$$

Из (2.51), (2.52) следует, что имеет место тождество

$$W'\vec{j}\cdot\vec{\tau}'(W')^{-1} = \vec{j}\cdot\vec{\tau}' + (i\sigma_2-\sigma_1)\frac{[\vec{j}\cdot\vec{p},\vec{j}\cdot\vec{\tau}]}{m}. \tag{2.53}$$

Таким образом, предположив, что для произвольного τ_2 выполняется соотношение (2.49), мы получили, что точно такое же соотношение, (2.53), имеет место для $\tau_2' = \tau_2 + \frac{1}{2}$. Поскольку для $\tau_2 = \tau_1 = \frac{1}{2}$ мы доказали (2.49) непосредственно (см. (2.41)), то отсюда по индукции следует справедливость (2.53) (или, что то же, (2.41)) для произвольного значения τ.

Используя (2.29), (2.41), получаем непосредственно

$$[W,g]W^{-1} = \left[W, \frac{1+4\vec{j}\cdot\vec{\tau}}{2s}\right]W^{-1} = \left[W, \frac{2\vec{j}\cdot\vec{\tau}}{s}\right]W^{-1} =$$

$$= \frac{2}{s}(i\sigma_2-\sigma_1)\frac{[\vec{j}\cdot\vec{p},\vec{j}\cdot\vec{\tau}]}{m} \equiv (i\sigma_2-\sigma_1)\frac{[\vec{j}\cdot\vec{p},g]}{m}, \tag{2.54}$$

чем и завершается доказательство тождества (2.27).

Подставив (2.27) в (2.26), получаем дополнительное условие, выделяющее из решений уравнения (I.6) подпространство, соответствующее фиксированному спину S, в форме

$$\hat{P}_s \Psi \equiv \left\{ \frac{1}{2}(1+g) + (i\sigma_2 - \sigma_1) \frac{[\vec{J}\vec{P}, g]}{2m} \right\} \Psi = \Psi. \qquad (2.55)$$

Итак, в представлении (I.I) свободная релятивистская частица со спином s и массой m описывается уравнением (I.6) с дополнительным условием (2.55):

$$(\gamma_\mu P^\mu - m)\Psi(t, \vec{x}) = 0; \qquad (2.56а)$$

$$\hat{P}_s \Psi = \Psi; \quad \hat{P}_s = \frac{1}{2}(1+g) + (i\sigma_2 - \sigma_1)\frac{[\vec{J}\cdot\vec{P}, g]}{2m}. \qquad (2.56б)$$

Система уравнений (2.56) имеет определенное преимущество перед всеми известными до сих пор уравнениями для высших спинов. Это преимущество состоит в следующем:

I) уравнения (2.56) имеют достаточно простой вид, который не усложняется при переходе от S к $S+\frac{1}{2}$;

2) при любом значении спина S матрицы γ_μ, входящие в уравнение (2.56), удовлетворяют алгебре Клиффорда (I.7), которая, безусловно, проще, чем алгебры матриц, входящих в обычные уравнения для высших спинов [76];

3) дополнительное условие, выделяющее спин S задается в виде оператора проектирования, действующего на множество решений (2.56а); мы увидим, что и после введения взаимодействия $\hat{P}_S$ остается проектором, т.е. взаимодействие не перемешивает спины;

4) уравнение (2.56а) может быть записано в Шредингеровой форме;

5) система уравнений (2.56) допускает непротиворечивое обобщение на случай заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. При этом не возникает парадоксов, описанных в [25], [26], которые присущи всем известным явноковариантным уравнениям для $S > \frac{1}{2}$.

Вопросы обобщения (2.56) на случай взаимодействующих частиц будут рассмотрены ниже. А в заключение этого параграфа мы покажем, что дополнительное условие (2.56б) может быть записано в явноковариантной форме.

Введем обозначение

$$\lambda^{\pm} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sigma_3\right) = \frac{1}{2}\left(1 \mp i\,\gamma_4\right). \qquad (2.57)$$

Используя (2.57), перепишем проектор (2.56б) в виде

$$\hat{P}_s = \frac{1}{2}(1+g) + (i\sigma_2 - \sigma_1)\,\frac{[\vec{\gamma}\cdot\vec{P}, g]}{2m} = \frac{1}{2}(1+g) + \frac{1-\sigma_3}{2}\cdot\frac{[2i\sigma_2\vec{\gamma}\cdot\vec{P}, g]}{2m} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}(1+g) + \frac{\lambda^-}{2m}\left[2i\sigma_2\vec{\gamma}\cdot\vec{P}, g\right] + \frac{\lambda^-}{2m}\left[\sigma_1 i\frac{\partial}{\partial t} - m, g\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}(1+g) + \frac{\lambda^-}{2m}\left[2i\sigma_2\vec{\gamma}\cdot\vec{P} + \sigma_1 i\frac{\partial}{\partial t} - m, g\right]. \qquad (2.58)$$

Во второй строчке мы добавили к $\hat{P}_s$ тождественно равное нулю слагаемое $\lambda^-\left[\sigma_1 i\frac{\partial}{\partial t} - m, g\right]\frac{1}{2m}$. Используя обозначения (I.5), проделаем над $\hat{P}_s$ (2.58) несложные тождественные преобразования

$$\hat{P}_s = \frac{1}{2}(1+g) + \frac{\lambda^-}{2m}(\gamma_\mu P^\mu - m)g - \frac{\lambda^-}{2m}g\,(\gamma_\mu P^\mu - m) =$$

$$= \frac{1}{2} + (m + \gamma_\mu P^\mu)\,g\,\frac{\lambda^+}{2m} - \frac{\lambda^-}{2m}g\,(\gamma_\mu P^\mu - m). \qquad (2.59)$$

В (2.59) использованы тождества (см. (I.5), (2.57))

$$\lambda^-\gamma_\mu = \gamma_\mu\lambda^+, \quad \frac{1}{2}g - \frac{\lambda^- g m}{2m} = \frac{1}{2}g(1-\lambda^-) = \frac{g\lambda^+}{2}. \qquad (2.60)$$

На решениях уравнения (2.56а) последнее слагаемое (2.59) равно нулю, следовательно

$$\hat{\underset{s}{P}}\Psi \equiv \frac{1}{2}\left(1+\frac{m+\gamma_\mu P^\mu}{m}g\lambda^+\right)\Psi. \qquad (2.61)$$

Чтобы придать (2.61) явноковариантную форму, воспользуемся соотношением (которое непосредственно следует из определения (1.2) спиновых матриц и из определения (2.23) оператора g)

$$g\lambda^+ = \frac{(\vec{S})^2 - s^2}{s}\cdot\frac{1}{2}(1+\sigma_3) \equiv \frac{\frac{1}{2}[(\vec{S})^2-(S_{0a})^2]-s^2}{s}\lambda^+ \qquad (2.62)$$

или, используя обозначения (2.57) и

$$g\lambda^+ = \frac{1}{4s}[(\vec{S})^2-(S_{0a})^2-2s^2](1-i\gamma_4). \qquad (2.63)$$

Подставив (2.61), (2.63) в (2.56), получаем дополнительное условие, выделяющее спин s, в виде

$$\left\{(m+\gamma_\mu P^\mu)[(S_{ab})^2-(S_{0a})^2-2s^2](1-i\gamma_4)-4ms\right]\Psi=0, \qquad (2.64)$$

явная ковариантность которого очевидна.

§ 3. Обобщение на случай заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле

Обобщение уравнений (2.56) на случай частицы во внешнем электромагнитном поле может быть произведено при помощи стандартной замены $P_\mu \to \pi_\mu = P_\mu - eA_\mu$, где A_μ – четырехвектор-потенциал. Такая замена обычно приводит к противоречиям, если используются явноковариантные уравнения для частиц со спином $s>1$ [4],[38]. Мы увидим, что уравнения, полученные в §§ 1, 2 настоящей главы, допускают непротиворечивое описание частицы с произвольным спином во внешнем электромагнитном поле.

Система (2.56) может быть записана в виде одного уравнения

$$\left\{\hat{P}_s\left(i\frac{\partial}{\partial t}-H\right)\hat{P}_s+\eta(1-\hat{P}_s)\right\}\Psi(t,\vec{x})=0, \qquad (3.1)$$

где H -гамильтониан, заданный в (1.3), η - произвольное (не равное 0) число. Действительно, $\hat{P}_s$, очевидно, коммутирует с H, поскольку коммутируют эквивалентные операторы P_s и $H_\kappa=\sigma_1\circ E$, см. (2.1а) и (2.22). Умножив (3.1) на P_s и $(1-\hat{P}_s)$ и учитывая, что $\hat{P}_s^2=\hat{P}_s$, из (3.1) всегда можно получить систему (2.56). Таким образом, уравнение (3.1) описывает движение свободной частицы с произвольным спином S. Чтобы получить описание движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, сделаем в (3.1) замену $p_\mu\to\pi_\mu$. В результате приходим к уравнению

$$\left\{\hat{P}_s(\vec{\pi})[\pi_0-H(\vec{\pi})]\hat{P}_s(\vec{\pi})+\eta(1-\hat{P}_s(\vec{\pi}))\right\}\Psi(t,\vec{x})=0, \qquad (3.2)$$

где, согласно (2.56)

$$\hat{P}_s(\vec{\pi})=\left\{\frac{1}{2}(1+g)+(i\sigma_2-\sigma_1)\frac{[\vec{j}\cdot\vec{\pi},\,g]}{2m}\right\}; \qquad (3.3а)$$

$$H(\vec{\pi})=\sigma_1 m+2\sigma_3\,\vec{j}\cdot\vec{\pi}. \qquad (3.3б)$$

Покажем, что уравнение (3.2) может быть записано в виде системы явноковариантных уравнений

$$\left\{\gamma_\mu\pi^\mu-(1-i\gamma_4)\left(j_{\mu\nu}-\frac{S_{\mu\nu}}{2S}\right)\frac{F_{\mu\nu}}{m}-m\right\}\Psi(t,\vec{x})=0; \qquad (3.4а)$$

$$(3.4)$$

$$\left\{(\gamma_\mu\pi^\mu+m)\left[(S_{0b})^2-(S_{0a})^2-2S^2\right](1-i\gamma_4)-4mS\right\}\Psi=0, \qquad (3.4б)$$

где $F_{\mu\nu}$- тензор электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu}=-i[\pi_\mu,\pi_\nu], \qquad (3.5)$$

матрицы $S_{\mu\nu}$, $j_{\mu\nu}$ определены в (I.2) и по μ, ν подразумевается суммирование от 0 до 3.

Уравнения (3.4) описывают движение заряженной частицы с произвольным спином S и массой m во внешнем электромагнитном поле. Помимо исключительной простоты, достоинством этих уравнений является то, что они не приводят к известным парадоксам [26], [27], которые присущи всем остальным найденным до сих пор уравнениям для частиц с высшими спинами. Эти вопросы обсуждаются в § 4.

Доказательство эквивалентности (3.2) и (3.4) несложно, но требует довольно длинных выкладок. Первым делом убедимся, что оператор $\hat{P}_S(\vec{\pi})$ (3.3а), также как $\hat{P}_S$ (2.56б), является проектором, т.е. что выполняется

$$\left[\hat{P}_S(\vec{\pi})\right]^2 = \hat{P}_S(\vec{\pi}). \tag{3.6}$$

Из (2.56б) получаем непосредственным вычислением

$$\left[P_S(\vec{\pi})\right]^2 = \left\{\frac{1}{2}(1+g) + (i\sigma_2 - \sigma_1)\frac{[\vec{j}\cdot\vec{\pi}, g]}{2m}\right\}^2 = \left[\frac{1}{2}(1+g)\right]^2 + \left\{(i\sigma_2 - \sigma_1)\frac{[\vec{j}\cdot\vec{\pi}, g]}{2m}\right\}^2 + (i\sigma_2 - \sigma_1)\frac{[\vec{j}\cdot\vec{\pi}, g]}{2m} + \frac{1}{2}(i\sigma_2 - \sigma_1)\times$$

$$\times\frac{\{g, [\vec{j}\cdot\vec{\pi}, g]\}}{2m} = \frac{1}{2}(1+g) + (i\sigma_2 - \sigma_1)\frac{[\vec{j}\cdot\vec{\pi}, g]}{2m}. \tag{3.7}$$

В промежуточных выкладках (3.7) учтены тождества

$$(\sigma_1 - i\sigma_2)^2 = 0;\ \{g, [g, \vec{j}\cdot\vec{\pi}]\} = 0;\ \left[\frac{1}{2}(1+g)\right]^2 = \frac{1}{2}(1+g), \tag{3.8}$$

первое из которых вытекает из определения (2.8 гл. I) σ-матриц, а остальные являются следствием (2.24).

Умножим (3.2) на $\hat{P}_s(\vec{\pi})$ и $(1-\hat{P}_s(\vec{\pi}))$ и используем (3.6). Это приведет нас к системе уравнений

$$\hat{P}_s(\vec{\pi})\Psi = \Psi ; \tag{3.9а}$$

$$\hat{P}_s(\vec{\pi})[\pi_0 - H(\vec{\pi})]\hat{P}_s(\vec{\pi})\Psi = 0, \tag{3.9б}$$

которая, конечно, полностью эквивалентна (3.2), поскольку для получения (3.2) достаточно умножить (3.9а) на η и сложить с (3.9б). Уравнение (3.9б) перепишем в виде

$$\hat{P}_s(\vec{\pi})[\pi_0 - H(\vec{\pi})]\hat{P}_s(\vec{\pi})\Psi \equiv [\pi_0 - H(\vec{\pi})]\hat{P}_s(\vec{\pi})\Psi +$$

$$+[\hat{P}_s(\vec{\pi}), \{\pi_0 - H(\vec{\pi})\}]\hat{P}_s(\vec{\pi})\Psi = 0, \tag{3.10}$$

и вычислим входящий в (3.10) коммутатор

$$[\hat{P}_s(\vec{\pi}), \pi_0 - H(\vec{\pi})] = [\{\tfrac{1}{2}(1+g) + (i\sigma_2 - \sigma_1)\frac{[\vec{j}\cdot\vec{\pi}, g]}{2m}\}, \{\pi_0 -$$

$$-\sigma_1 m - 2\sigma_3 \vec{j}\cdot\vec{\pi}\}] = -\sigma_3[g, \vec{j}\cdot\vec{\pi}] + (i\sigma_2 - \sigma_1)\frac{[[\vec{j}\cdot\vec{\pi}, \pi_0], g_0]}{2m} -$$

$$-\sigma_3[\vec{j}\cdot\vec{\pi}, g] - (i\sigma_2 - \sigma_1)\{[\vec{j}\cdot\vec{\pi}, g], \vec{j}\cdot\vec{\pi}\}\cdot\frac{1}{m} =$$

$$= (i\sigma_2 - \sigma_1)\{[[\vec{j}\cdot\vec{\pi}, \pi_0], g] - 2\{[\vec{j}\cdot\vec{\pi}, g], \vec{j}\cdot\vec{\pi}\}\frac{1}{2m}. \tag{3.11}$$

В (3.11) мы использовали тождества (вытекающие из определений (2.8, гл.1) матриц σ_a)

$$[\sigma_2 ; \sigma_1] = -2i\sigma_3 ; (\sigma_1 - i\sigma_2)\sigma_3 = -\sigma_3(\sigma_1 - i\sigma_2) = \sigma_1 - i\sigma_2 \tag{3.12}$$

Раскрывая входящий в (3.11) антикоммутатор, получаем

$$\{[\vec{j}\cdot\vec{\pi}, g], \vec{j}\cdot\vec{\pi}\} = [g, (\vec{j}\cdot\vec{\pi})^2] \equiv [g, \frac{\pi^2}{4} - \frac{\vec{j}\cdot\vec{H}}{2}] = -\frac{1}{2}[g, \vec{j}\cdot\vec{H}],$$

где

$$\vec{H} = i\,\vec{\pi}\times\vec{\pi} = \mathrm{rot}\,\vec{A} - \tag{3.13}$$

— напряженность магнитного поля. При выводе (3.13) мы приняли во внимание известное свойство генераторов представления группы $O(3)$ [64] (см. (1.8)).

$$(\vec{j}\cdot\vec{a})(\vec{j}\cdot\vec{b})=\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{i}{2}\,\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{j}. \tag{3.14}$$

Подставив (3.13) в (3.11), и учитывая, что

$$[\vec{\pi},\pi_0]=i\vec{E},\quad E_a=-\frac{\partial A_0}{\partial x_a}-\frac{\partial A_a}{\partial t} \tag{3.15}$$

— напряженность электрического поля, приходим к соотношению

$$[\hat{P}_s(\vec{\pi}),\pi_0-H(\vec{\pi})]\hat{P}_s(\vec{\pi})=(i\sigma_2-\sigma_1)[\vec{j}\cdot(i\vec{E}-\vec{H}),g]\cdot\frac{1}{2m}. \tag{3.16}$$

Умножим теперь (3.16) справа на $\hat{P}_s(\vec{\pi})$ (3.3а)

$$[\hat{P}_s(\vec{\pi}),\pi_0-H(\vec{\pi})]\hat{P}_s(\vec{\pi})=(i\sigma_2-\sigma_1)[\vec{j}(i\vec{E}-\vec{H}),g]\cdot\frac{1}{4m}\Big\{1+g+$$

$$+(i\sigma_2-\sigma_1)\frac{[\vec{j}\cdot\vec{\pi},g]}{m}\Big\}=\frac{i\sigma_2-\sigma_1}{2m}[\vec{j}(i\vec{E}-\vec{H}),g]\frac{1}{2}(1+g). \tag{3.17}$$

В (3.17) мы учли первое из тождеств (3.8).

Для упрощения формулы (3.17) воспользуемся соотношением

$$g\cdot j_a=-j_a g+\frac{S_a}{S}, \tag{3.18}$$

которое нетрудно доказать, учитывая явный вид (2.29) матрицы g. Действительно, принимая во внимание известные свойства (1.8) генераторов представления $D(\frac{1}{2})$ группы $O(3)$

$$j_a j_b+j_b j_a=\frac{1}{2}\delta_{ab} \tag{3.19}$$

получаем из (2.29)

$$g j_a+j_a g=\Big\{\frac{1+4\vec{j}\cdot\vec{\tau}}{2S},j_a\Big\}=\frac{j_a}{S}+\frac{2}{S}\sum_{b=1}^{3}\{j_b\tau_b,j_a\}=\frac{j_a}{S}+\frac{\tau_a}{S}=\frac{S_a}{S}.$$

что и доказывает (3.18).

Раскрывая коммутатор в (3.17) и используя (3.18), получаем, учитывая (2.24)

$$[\hat{P}_s(\vec{\pi}), \pi_0 - H(\vec{\pi})]\hat{P}_s(\vec{\pi}) = \frac{(i\sigma_2 - \sigma_1)}{2m}[\vec{j}(i\vec{E}-\vec{H})g -$$

$$-gj(i\vec{E}-\vec{H})\cdot\frac{1}{2}(1+g) = \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2m}\Big[\Big(\frac{\vec{S}}{S}-2j\Big)\cdot(i\vec{E}-\vec{H})\Big]\cdot\frac{1}{2}(1+g). \quad (3.20)$$

Соотношение (3.20) можно записать также в виде

$$[\hat{P}_s(\vec{\pi}), \pi_0 - H(\vec{\pi})]\hat{P}_s(\vec{\pi}) = \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2m}\Big[\Big(\frac{\vec{S}}{S}-2\vec{j}\Big)(i\vec{E}-\vec{H})\Big]\cdot\hat{P}_s(\vec{\pi}). \quad (3.21)$$

Согласно (3.3а), соотношение (3.21) отличается от (3.20) только дополнительным слагаемым

$$\frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2m}\Big[\Big(\frac{\vec{S}}{S}-2\vec{j}\Big)(i\vec{E}-\vec{H})\ \frac{i\sigma_2-\sigma_1}{2m}[\vec{j}\cdot\vec{\pi}, g] \equiv 0. \quad (3.22)$$

Тождество (3.22) следует из первого соотношения (3.8).

Подставив (3.21) в (3.10), приходим к уравнению

$$\Big\{\pi_0 - H(\vec{\pi}) + \frac{i\sigma_2 - \sigma_1}{2m}\Big[\Big(\frac{\vec{S}}{S}-2\vec{j}\Big)(\vec{H}-i\vec{E})\Big]\Big\}\hat{P}_s(\vec{\pi})\Psi(t,\vec{x}) = 0. \quad (3.23)$$

Умножив (3.23) на , учитывая (3.3б) и (3.9а), получаем

$$\Big\{\sigma_1\pi_0 - m - 2i\sigma_2\vec{j}\cdot\vec{\pi} - \frac{1+\sigma_3}{2m}\Big[\Big(\frac{\vec{S}}{S}-2\vec{j}\Big)(\vec{H}-i\vec{E})\Big]\Big\}\Psi(t,\vec{x}) = 0 \quad (3.24)$$

Уравнение (3.24) совпадает с (3.4а) с точностью до обозначений (1.2), (1.5), поскольку, согласно (3.16), (3.18), (3.5) (см. также [97])

$$F_{0a} = iE_a, \quad F_{0b} = H_c, \ (a,b,c) - \text{цикл } (1,2,3) \quad (3.25)$$

Покажем теперь, что (3.9а) является эквивалентной формой записи уравнения (3.4б). Повторяя дословно преобразования (2.57)-(2.59), запишем $\hat{P}_s(\vec{\pi})$ в виде (см. (2.59))

$$\hat{P}_s(\vec{\pi}) \equiv \frac{1}{2} + \frac{m+\gamma_\mu\pi^\mu}{2m}g\lambda^+ - \frac{\lambda^-}{2m}g(\gamma_\mu\pi^\mu - m), \quad (3.26a)$$

где, согласно (I.5), (2.57)

$$\lambda^{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \sigma_3) = \frac{1}{2}(1 \mp i\gamma_4), \quad \lambda^{+}\lambda^{-} \equiv 0. \tag{3.26б}$$

Подставим (3.26а) в (3.9а). Учитывая, что, ввиду (3.4а), (3.26б)

$$\frac{\lambda^{-}}{2m} g(\gamma_\mu \pi^\mu - m)\Psi \equiv \frac{\lambda^{-}}{2m} g[\gamma_\mu \pi^\mu - m - \lambda^{+}(2j_{\mu\nu} - \\ - \frac{S_{\mu\nu}}{s})F_{\mu\nu}]\Psi \equiv 0, \tag{3.27}$$

получаем

$$\hat{P}_s(\pi)\Psi = \frac{1}{2}(1 + \frac{m + \gamma_\mu \pi^\mu}{m} g\lambda^{+})\Psi = \Psi, \tag{3.28}$$

или, учитывая (2.63)

$$\frac{1}{2}\{1 + \frac{m + \gamma_\mu \pi^\mu}{4ms}[(S_{ob})^2 - (S_{oa})^2 - 2s^2](1 - i\gamma_4)\}\Psi = \Psi, \tag{3.29}$$

откуда перенеся все слагаемые влево и умножая все на $8ms$, получаем (3.4б). Эквивалентность (3.3) и (3.4) доказана полностью.

Таким образом, исходя из представления (I.I) мы получили уравнение (3.I) для свободной частицы произвольного спина. Стандартная замена $p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$ после нескольких тождественных преобразований привела нас к системе (3.4), которая описывает движение заряженной частицы со спином s в электромагнитном поле.

Установим связь между уравнениями (3.4) и уравнением Фейнмана-Гелл-Мана, для произвольного спина, которое, как известно , имеет вид

$$(\pi_\mu \pi^\mu - m^2 - \frac{1}{s}\hat{S}_{\mu\nu} F_{\mu\nu})\Phi = 0, \tag{3.30}$$

где

$$\hat{S}_{ab} = \hat{S}_c, \quad \hat{S}_{oa} = i\hat{S}_a, \quad (a,b,c) - \text{цикл}(1,2,3), \tag{3.31}$$

а $\hat{S}_c$ – генераторы неприводимого представления $\mathcal{D}(s)$ группы $O(3)$.

Покажем, что (3.30) является следствием (3.4). Для доказательства сделаем в (3.4) замену

$$\Psi(t,\vec{x}) = V\Phi(t,\vec{x}), \tag{3.32}$$

где V – обратимый оператор

$$V = \left(1 + \frac{\lambda^-}{m}\gamma_\mu \pi^\mu\right);\ V^{-1} = \left(1 - \frac{\lambda^-}{m}\gamma_\mu \pi^\mu\right). \tag{3.33}$$

Подставив (3.32), (3.33) в (3.4а), получаем

$$\left[\gamma_\mu \pi^\mu - \lambda^+\left(2 j_{\mu\nu} - \frac{S_{\mu\nu}}{s}\right)\frac{F_{\mu\nu}}{m} - m\right]\left(1 + \frac{\lambda^-}{m}\gamma_\mu \pi^\mu\right)\Phi = 0. \tag{3.34}$$

Используя соотношения (3.26б), (2.60), [77]

$$\begin{gathered}\lambda^+\lambda^- = 0;\ \lambda^+ + \lambda^- = 1;\ \lambda^+\gamma_\mu = \gamma_\mu\lambda^-;\ \lambda^+ j_{\mu\nu} = j_{\mu\nu}\lambda^+ \\ \lambda^+ S_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}\lambda^+;\ (\gamma_\mu \pi^\mu)^2 = \pi_\mu \pi^\mu + 2 j_{\mu\nu} F_{\mu\nu},\end{gathered} \tag{3.35}$$

перемножим операторы, входящие в (3.34)

$$\left[\gamma_\mu \pi^\mu - \lambda^+\left(2 j_{\mu\nu} - \frac{S_{\mu\nu}}{s}\right)\frac{F_{\mu\nu}}{m} - m\right]\left(1 + \frac{\lambda^-}{m}\gamma_\mu \pi^\mu\right) =$$

$$= \gamma_\mu \pi^\mu - \lambda^+\left(2 j_{\mu\nu} - \frac{S_{\mu\nu}}{s}\right)\frac{F_{\mu\nu}}{m} - m + \frac{\lambda^+}{m}(\gamma_\mu \pi^\mu)^2 - \lambda^-\gamma_\mu \pi^\mu =$$

$$= \lambda^+\left(\gamma_\mu \pi^\mu + \frac{S_{\mu\nu}F_{\mu\nu}}{sm} + \pi_\mu \pi^\mu \frac{1}{m}\right) - m = F_1. \tag{3.36}$$

Учитывая (3.36), запишем (3.34) в виде

$$F_1\Phi \equiv \left[\lambda^+\left(\gamma_\mu \pi^\mu + \frac{S_{\mu\nu}F_{\mu\nu}}{sm} + \frac{\pi_\mu \pi^\mu}{m}\right) - m\right]\Phi = 0. \tag{3.37}$$

Умножим (3.36) слева на оператор

$$F_2 = m + \left(\gamma_\mu \pi^\mu - \frac{S_{\mu\nu}F_{\mu\nu}}{sm} - \frac{\pi_\mu \pi^\mu}{m}\right)\lambda^- \tag{3.38}$$

и получим новое уравнение

$$F_2 \cdot F_1 \Phi = 0, \tag{3.39}$$

которое, конечно, является непосредственным следствием (3.4а).

Найдем явный вид оператора $F_2 \cdot F_1$. Используя (3.35), получаем

$$F_2 \cdot F_1 = \left[m + \left(\gamma_\mu \pi^\mu - \frac{S_{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{sm} - \pi_\mu \pi^\mu\right)\lambda^-\right] \cdot \left[\lambda^+ \left(\gamma_\mu \pi^\mu + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{S_{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{sm} + \pi_\mu \pi^\mu\right) - m\right] = \pi_\mu \pi^\mu - m^2 + \frac{1}{s} S_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{3.40}$$

Подставив (3.40) в (3.39), приходим к уравнению

$$\left(\pi_\mu \pi^\mu - m^2 + \frac{1}{s} S_{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right) \Phi(t, \vec{x}) = 0, \tag{3.41}$$

которое отличается от (3.30) только тем, что матрицы $S_{\mu\nu}$ (1.2) реализуют приводимое представление $D(s) \oplus D(s-1)$ группы $O(3)$.

Найдем теперь явный вид уравнения (3.4б) в Φ-представлении. Умножив (3.9а) (которое, как мы показали, эквивалентно (3.4б)) слева на V^{-1} из (3.33) и учитывая (3.32), получаем

$$V^{-1} \hat{P}_s(\vec{\pi}) \Psi \equiv V^{-1} \hat{P}_s(\vec{\pi}) V V^{-1} \Psi \equiv V^{-1} \hat{P}_s(\vec{\pi}) V \Phi = \Phi. \tag{3.42}$$

Вычислим $V^{-1} \hat{P}_s(\vec{\pi}) V$. Записывая $\hat{P}_s(\vec{\pi})$ в виде (3.25) и используя (3.33), (3.35), приходим в результате несложных преобразований к следующему соотношению

$$V^{-1} \hat{P}_s(\vec{\pi}) V = \left(1 - \frac{\lambda^-}{m} \gamma_\mu \pi^\mu\right) \left[\frac{1}{2} + \frac{m + \gamma_\mu \pi^\mu}{2m} g \lambda^+ - \frac{\lambda^-}{m} g (\gamma_\mu \pi^\mu - \right.$$

$$\left. - m)\right] \cdot \left(1 + \frac{\lambda^-}{m} \gamma_\mu \pi^\mu\right) = \left(1 - \frac{\lambda^-}{m} \gamma_\mu \pi^\mu\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{m + \gamma_\mu \pi^\mu}{2m} g \lambda^+ - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda^-}{2m} g (\gamma_\mu \pi^\mu - m) + \frac{\lambda^-}{2m} \gamma_\mu \pi^\mu + \frac{\lambda^-}{2m} g \gamma_\mu \pi^\mu\right) = \left(1 - \frac{\lambda^-}{m} \gamma_\mu \pi^\mu\right) \left[\frac{1}{2} + \right.$$

$$+\frac{m+\gamma_\mu\pi^\mu}{2m}g\lambda^+ + \frac{\lambda^-}{2m}(\gamma_\mu\pi^\mu+gm)\Big] = \frac{1}{2} + \frac{m+\gamma_\mu\pi^\mu}{2m}g\lambda^+ + \frac{\lambda^-}{2m}(\gamma_\mu\pi^\mu +$$

$$+gm) - \frac{\lambda^-}{2m}\gamma_\mu\pi^\mu - \frac{\lambda^-\gamma_\mu\pi^\mu g}{2m} = \frac{1}{2} + g\frac{\lambda^+}{2} + g\frac{\lambda^-}{2} = \frac{1}{2}(1+g). \tag{3.43}$$

Подставляя (3.43) в (3.42), получаем следующий эквивалент (3.4б) для ϕ-представления

$$\frac{1}{2}(1+g)\phi = \phi. \tag{3.44}$$

Уравнение (3.44) совпадает с (2.25). Но условие (2.25) означает, что ϕ образуют подпространство, на котором реализуется неприводимое представление $\mathcal{D}(s)$ группы вращений $O(3)$. Следовательно, уравнение (3.41) с дополнительным условием (3.44) сводится к уравнению Гелл-Мана-Фейнмана (3.30).

Таким образом, исходя из уравнений (3.4), мы получили после ряда алгебраических преобразований (3.32)-(3.44) уравнение второго порядка по $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ (3.30), которое является следствием (3.4). Обратное заключение, конечно, неверно, т.е. систему (3.4) нельзя рассматривать как следствие уравнения Фейнмана-Гелл-Мана. Однако, исходя из (3.30), можно получить "уравнение Дирака для произвольного спина" (3.4) путем факторизации оператора $\left(\pi_\mu\pi^\mu - m^2 + \frac{S_{\mu\nu}F_{\mu\nu}}{S}\right)$, т.е. точно так, как это делал Дирак при получении своего знаменитого уравнения для $s=\frac{1}{2}$. Для этого достаточно заметить, что, согласно (3.40), оператор $(\pi_\mu\pi^\mu - m^2 + \frac{1}{S}S_{\mu\nu}F_{\mu\nu})$ можно представить в виде произведения $F_2 \cdot F_1$, а оператор F_1 приводит, согласно (3.36), (3.37) к уравнению (3.4а).

§ 4. ЗАРЯЖЕННАЯ ЧАСТИЦА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В этом параграфе, используя найденные уравнения (3.4), мы определим спектр энергий частицы с произвольным спином в однородном магнитном поле. Как показано в [26]-[27], обычные явно ковариантные уравнения неожиданно приводят к комплексным значениям энергии, если спин частицы $s > \frac{1}{2}$. Мы увидим, что уравнения (3.4) не приводят к такому парадоксу.

Рассмотрим систему (3.4) для случая однородного внешнего магнитного поля. Не умаляя общности, можно считать, что это поле параллельно P_3. Последнее означает, что компоненты тензора электромагнитного поля (3.5) равны

$$F_{0a} = E_a = 0;\ F_{23} = H_1 = 0;\ F_{31} = H_2 = 0;\ F_{12} = H_1 = H. \qquad (4.1)$$

Из (4.1),(3.5) следует, что π_μ можно выбрать в виде

$$\pi_1 = P_1 - eHx_2\ ;\ \pi_2 = P_2\ ;\ \pi_3 = P_3\ ;\ \pi_0 = -i\frac{\partial}{\partial t}. \qquad (4.2)$$

Запишем уравнение (3.4а) в шредингеровой форме. Умножив (3.4а) на γ_0, используя (1.7), (3.26) и (4.2), приходим к формуле

$$H\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \qquad (4.3а)$$

$$H = \gamma_0\gamma_a\pi_a + \gamma_0 m + \gamma_0(1 - i\gamma_4)(\vec{j} - \frac{\vec{s}}{2s})\cdot\vec{H}. \qquad (4.3б)$$

Операторы, входящие в гамильтониан (4.3б), не коммутируют друг с другом, поэтому непосредственно определить собственные значения энергии непросто. Преобразуем H к такому виду, чтобы он содержал только коммутирующие величины. Это позволит нам не решая уравнения (4.3а), определить спектр собственных значений гамильтониана (4.3б).

Подвергнем гамильтониан H и волновую функцию Ψ преобразованию

$$H \to H' = VHV^{-1} - i\frac{\partial V}{\partial t}\cdot V^{-1}; \quad \Psi \to \Psi' = V\Psi, \tag{4.4}$$

где

$$V = \lambda^{+} + \frac{1}{\mathcal{E}}\lambda^{-}\gamma_0 H; \quad V^{-1} = (\lambda^{-}\mathcal{E} + H\gamma_0\lambda^{+})\frac{1}{m}; \tag{4.5a}$$

$$\mathcal{E} = \sqrt{\pi^2 - \frac{\vec{S}\cdot\vec{H}}{S} + m^2}; \quad \lambda^{\pm} = \frac{1}{2}(1 \mp i\gamma_4). \tag{4.5б}$$

Найдем преобразованный гамильтониан. Подставляя (4.5) в (4.4) получаем

$$H' = VHV^{-1} = [\lambda^{+} + \frac{1}{\mathcal{E}}\lambda^{-}\gamma_0 H]H[\lambda^{-}\mathcal{E} + H\gamma_0\lambda^{+}]\cdot\frac{1}{m} = (\lambda^{+}H\lambda^{-}\mathcal{E} +$$
$$+ \lambda^{+}H^2\gamma_0\lambda^{+} + \frac{1}{\mathcal{E}}\lambda^{-}\gamma_0 H^2\lambda^{-}\mathcal{E} + \frac{1}{\mathcal{E}}\lambda^{-}\gamma_0 H^3\gamma_0\lambda^{+})\cdot\frac{1}{m}. \tag{4.6}$$

Используя тождества (3.35)

$$\lambda^{+}\gamma_\mu = \gamma_\mu\lambda^{-}; \quad \lambda^{+}\lambda^{-} = 0; \quad \lambda^{\pm}\cdot\lambda^{\pm} = \lambda^{\pm} \tag{4.7}$$

и явный вид (4.3б) гамильтониана H, получаем последовательно

$$\lambda^{+}H\lambda^{-} = \lambda^{+}[\gamma_0\gamma_a\pi_a + \gamma_0 m + \gamma_0\frac{\lambda}{m}(2\vec{j} - \frac{\vec{S}}{S})\cdot\vec{H}]\lambda^{-} = \lambda^{+}\gamma_0 m; \tag{4.8}$$

$$H^2 = [\gamma_0\gamma_a\pi_a + \gamma_0 m + \gamma_0\frac{\lambda^{+}}{m}(2\vec{j} - \frac{\vec{S}}{S})\cdot\vec{H}]^2 =$$
$$= \pi^2 + m^2 - \frac{\vec{S}\cdot\vec{H}}{S} + \{\gamma_0\gamma_a\pi_a, \gamma_0\lambda^{+}(2\vec{j} - \frac{\vec{S}}{S})\cdot\vec{H}\}m^{-1}; \tag{4.9}$$

$$\lambda^{+}H^2\gamma_0\lambda^{+} \equiv \lambda^{+}H^2\lambda^{-}\gamma_0 \equiv \lambda^{+}[\pi^2 + m^2 - \frac{\vec{S}\cdot\vec{H}}{S} +$$
$$+ \frac{i}{m}\{\gamma_0\gamma_a\pi_a, \gamma_0\lambda^{+}(2\vec{j} - \frac{\vec{S}}{S})\cdot\vec{H}\}\lambda^{-}\gamma_0 = 0; \tag{4.10}$$

$$\lambda^{-}\gamma_0 H^2\lambda^{-} \equiv \gamma_0\lambda^{+}H^2\lambda^{-} \equiv \gamma_0\lambda^{+}H^2\gamma_0\lambda^{+}\gamma_0 \equiv 0; \tag{4.11}$$

$$\lambda^{-}\gamma_0 H^3\gamma_0\lambda^{+} \equiv \gamma_0\lambda^{+}H^3\lambda^{-}\gamma_0 \equiv \gamma_0\lambda^{+}H^2(\lambda^{+} + \lambda^{-})H\lambda^{-}\gamma_0 \equiv$$
$$\equiv \gamma_0\lambda^{+}H^2\lambda^{+}H\lambda^{-}\gamma_0 \equiv \gamma_0\lambda^{+}H^2\lambda^{+}\gamma_0\gamma_0 m = \gamma_0\lambda^{+}H^2\lambda^{+}m \equiv$$
$$\equiv \gamma_0\lambda^{+}[\pi^2 + m^2 - \frac{\vec{S}\cdot\vec{H}}{S} + \{\gamma_0\gamma_a\pi_a, \gamma_0\frac{\lambda^{+}}{m}(2\vec{j} - \frac{\vec{S}}{S})\cdot\vec{H}\}]\lambda^{+}m =$$
$$\equiv \gamma_0\lambda^{+}(\pi^2 + m^2 - \frac{1}{S}\vec{S}\cdot\vec{H})\lambda^{+}m = \gamma_0\lambda^{+}\mathcal{E}^2 m = \lambda^{-}\gamma_0\mathcal{E}^2 m. \tag{4.12}$$

Подставив (4.8), (4.10), (4.12) в (4.6) приходим к гамильтониану

$$H' = \overset{+}{\lambda}\gamma_0 E + \overset{-}{\lambda}\gamma_0 E = \gamma_0 E = \gamma_0\sqrt{\pi^2 + m^2 - \frac{1}{s}\vec{S}\cdot\vec{H}} \qquad (4.13)$$

Таким образом, преобразование (4.4), (4.5) приводит гамильтониан (4.3б) к виду (4.13). Уравнение (4.3а) при этом принимает форму

$$H'\Psi' = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi'. \qquad (4.14)$$

Определим теперь, как преобразуется при переходе (4.4) от Ψ к Ψ' дополнительное условие (3.4б). Покажем, что это условие имеет вид

$$\frac{1}{2}(1+g)\Psi' = \Psi' \qquad (4.15)$$

Для доказательства умножим (4.15) на V^{-1} и используем (4.4). В результате получаем

$$V^{-1}\cdot\frac{1}{2}(1+g)\Psi' \equiv V^{-1}\cdot\frac{1}{2}(1+g)VV^{-1}\Psi' \equiv \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}V^{-1}gV\Psi\right] = \Psi. \qquad (4.16)$$

Найдем явный вид $V^{-1}gV$. Учитывая (4.5), получаем

$$V^{-1}gV = (\overset{-}{\lambda}E + H\gamma_0\overset{+}{\lambda})\frac{1}{m}g(\overset{+}{\lambda} + \frac{1}{E}\overset{-}{\lambda}\gamma_0 H) = \frac{1}{m}(H\gamma_0 g\overset{+}{\lambda} + \overset{-}{\lambda}g\gamma_0 H). \qquad (4.17)$$

Подставляя (4.3б) в (4.17), приходим к формуле

$$V^{-1}gV = [\gamma_0\gamma_a\pi_a + \gamma_0 m + \gamma_0\frac{\overset{+}{\lambda}}{m}(2\vec{\jmath} - \frac{\vec{S}}{s})\cdot\vec{H}]\gamma_0 g\overset{+}{\lambda}\frac{1}{m} +$$

$$+ \overset{-}{\lambda}g\gamma_0[\gamma_0\gamma_a\pi_a + \gamma_0 m + \gamma_0\frac{\overset{+}{\lambda}}{m}(2\vec{\jmath} - \frac{\vec{S}}{s})\cdot\vec{H}]\frac{1}{m} = -\gamma_a\pi_a g\frac{\overset{+}{\lambda}}{m} +$$

$$+ g\overset{+}{\lambda} + \overset{-}{\lambda}g\gamma_a\pi_a\frac{1}{m} + \overset{-}{\lambda}g = \frac{\overset{-}{\lambda}}{m}[g, \gamma_a, \pi_a] + g. \qquad (4.18)$$

В промежуточных выкладках (4.18) учтены соотношения (4.7).

Из (4.17), (4.9) следует, что

$$V^{-1}\cdot\frac{1}{2}(1+g)V\Psi = \left\{\frac{1}{2}(1+g) + \frac{\overset{-}{\lambda}}{2m}[g, \gamma_a, \pi_a]\right\}\Psi = \Psi. \qquad (4.19)$$

Используя обозначения (1.5), (3.3а), запишем (4.19) в виде

$$V^{-1}\cdot\frac{1}{2}(1+g)V\Psi = \left\{\frac{1}{2}(1+g) + \frac{(i\sigma_2 - \sigma_1)}{m}[\vec{\gamma}\cdot\vec{\pi}, g]\right\}\Psi = \Psi. \qquad (4.20)$$

Таким образом, исходя из (4.15) мы пришли с помощью преобразования, обратного (4.4), к дополнительному условию (3.9а), которое является эквивалентной формой записи уравнения (3.4б). Следовательно, прямое преобразование (4.4) приводит (3.4б) к (4.16). Тем самым соотношение (4.15) доказано

Определим собственные значения гамильтониана (4.13). Собственные значения операторов, входящих в определение H' (4.13) имеют вид

$$\gamma_0 \Psi' = \pm 1 \cdot \Psi'; \quad \vec{S} \cdot \vec{H} \cdot \Psi' = S_3 H \Psi' = S_3 H \Psi'; \qquad (4.21а)$$

$$\pi^2 \Psi' = \left[(2n+1)H + P_3^2\right] \Psi'; \qquad (4.22в)$$

$$n = 0, 1, 2 \ldots; \quad S_3 = -S, -S+1, \ldots S. \qquad (4.21в)$$

Соотношения (4.21а) очевидным образом следуют из (1.7), (4.1), (1.2) и того факта, что, согласно (2.21), на подпространстве функций, удовлетворяющих (4.1§), операторы S_a действуют как генераторы неприводимого представления $D(S)$ группы $O(3)$. Что же касается соотношения (4.21б), то доказательство его имеется в монографии [74].

Поскольку все операторы (4.21) коммутируют друг с другом и с H' то гамильтониан (4.13) и эти операторы имеют общую систему собственных функций. Следовательно, согласно (4.13), (4.21), возможные значения энергии частицы с произвольным спином в однородном магнитном поле равны

$$E_{n S_3 P_3} = \pm \sqrt{m^2 + (2n+1-\frac{S_3}{S})H + P_3^2}. \qquad (4.22)$$

Соотношение (4.23) обобщает известную формулу [77] для уровней энергии электрона в магнитном поле на случай произвольного спина. Как видно из (4.22), значения энергии частицы в рассматриваемой задаче действительны при любых S. Следовательно, уравнения (3.4) не приводят к описанным в [26]-[27] парадоксам, которые имеют место в других явно ковариантных уравнениях для частиц со спином $S > \frac{1}{2}$.

Используя явный вид оператора скорости

$$\hat{\dot{x}}_a = i\,[x_a, H'], \tag{4.23}$$

можно показать, что скорость частицы, описываемой уравнениями (4.14), (4.15) или эквивалентной системой (3.4) не превышает скорости света. Следовательно, по крайней мере для случая однородного внешнего магнитного поля, система уравнений (3.4) свободна от недостатков, свойственных уравнениям Рариты-Швингера и некоторым другим явноковариантным уравнениям [25], [28].

§ 5. ЧЕТЫРЁХКОМПОНЕНТНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ БЕССПИНОВЫХ ЧАСТИЦ

В [51] было показано, что для описания свободных частиц с нулевым спином можно использовать обычное четырёхкомпонентное уравнение Дирака, если на его решения наложить дополнительные пуанкаре-инвариантные условия, устраняющие две „лишние" компоненты волновой функции $\psi(t,\vec{x})$. Был предложен явный вид таких дополнительных условий и найдено представление, в котором уравнение Дирака пуанкаре-инвариантным образом расщепляется на два независимых двухкомпонентных уравнения, каждое из которых описывает частицу и античастицу со спином $s=0$. При этом вопрос о введении взаимодействия в полученные уравнения в [51] не рассматривался.

В настоящем параграфе результаты [51] обобщаются на случай заряженной бесспиновой частицы во внешнем электромагнитном поле. Для описания такой частицы предлагается четырёхкомпонентное линейное уравнение первого порядка по $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$, которое имеет вид уравнения Дирака с дополнительным явно ковариантным членом. На решения этого уравнения налагаются дополнительные инвариантные условия для отбора двух независимых компонент.

1. Определим сначала уравнение для свободной бесспиновой частицы. Это проще всего сделать в каноническом представлении Фолди-Широкова, когда генераторы группы Пуанкаре имеют вид

$$P_0 = \gamma_0 E; \quad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}; \tag{5.1а}$$

$$I_{ab} = x_a p_b - x_b p_a; \tag{5.1б}$$

$$I_{0a} = t p_a - \frac{1}{2}\{x_a, P_0\}, \tag{5.1в}$$

где γ_0 - четырехкомпонентная матрица Дирака, удовлетворяющая совместно с γ_a, $a=1,2,3$, алгебре Клиффорда (1.7).

Генераторы 5.1 реализуют прямую сумму четырёх неприводимых представлений алгебры $P(1,3)$, соответствующих спину $s=0$ [11]. Релятивистские уравнения для частицы и античастицы с нулевым спином в представлении (5.1) можно записать в виде

$$\gamma_0 E \varphi = i\frac{\partial}{\partial t}\varphi, \tag{5.2а}$$

$$\hat{P}_0 \varphi = 0; \quad \hat{P}_0 = \frac{1}{2}\Big(1 + \sum_{a,b,c} i\gamma_a\gamma_b n_c\Big); \quad a,b,c - \text{цикл}\,(1,2,3), \tag{5.2б}$$

где n_a - произвольный единичный вектор, не зависящий от x_b и p_b. Пуанкаре- инвариантность уравнений (5.2) следует из того факта, что операторы $\hat{P}_0$ и $(\gamma_0 E - i\frac{\partial}{\partial t})$ коммутируют со всеми генераторами (5.1) $\varphi(t,\vec{x})$ Уравнение (5.2б) представляет собой дополнительное условие, устраняющее две лишние компоненты четырёхкомпонентной волновой функции $\varphi(t,\vec{x})$. Это утверждение делается очевидным, если положить $n_1 = n_2 = 0$, $n_3 = 1$ и выбрать γ -матрицы в виде (1.5), когда

$$i\gamma_1\gamma_2 = 2j_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \tag{5.3а}$$

$$P_0' = H = \gamma_0\gamma_a p_a + \gamma_0 m;\quad P_a' = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a};$$ (5.7а)

$$I_{ab}' = x_a p_b - x_b p_a + \frac{i}{m}(\gamma_a p_b - \gamma_b p_a)\lambda^+;$$ (5.7б)

$$I_{ca}' = t p_a - \frac{1}{2}\{\hat{x}_a, H\} + \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_4\gamma_a + \frac{i}{m}\gamma_0\gamma_a\gamma_b p_b\lambda^+;$$ (5.7в)

$$\hat{x}_a = x_a + i\frac{p_a}{2E^2};$$ (5.7г)

$$(\gamma_0\gamma_a p_b + \gamma_0 m)\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi;$$ (5.7д)

$$\hat{P}_0'\Psi = 0;\quad \hat{P}_0' = \frac{1}{2}\Big[1 + \sum_{a,b,c} i\gamma_a\gamma_b n_c + \frac{i}{m}\sum_{a,b,c}\gamma_a p_b n_c\lambda^+\Big]$$ (5.7е)

Для доказательства (5.7) найдём последовательно P_μ', $I_{\mu\nu}'$, $(i\gamma_a\gamma_b)'$. Используя тождества следующие непосредственно из определений (1.7), (5.6в)

$$\lambda^+\lambda^- = \lambda^-\lambda^+ = 0;\quad (\lambda^\pm)^2 = \lambda^\pm;\quad \gamma_\mu\lambda^\pm = \lambda^\mp\gamma_\mu;$$

$$H\gamma_0 H = -E^2 + 2mH;\quad H\gamma_0\gamma_4 = -\gamma_0\gamma_4 H;\quad H^2 = E^2,$$ (5.8)

получаем после несложных преобразований

$$P_0' = V\gamma_0 E V^{-1} = \frac{1}{E}[H\gamma_0\lambda^+ + E\lambda^-]\cdot\gamma_0 E\cdot\frac{1}{m}[\lambda^-\gamma_0 H + E\lambda^+] =$$
$$= \frac{1}{m}[H\gamma_0\lambda^+ + E\lambda^-][\lambda^+ H + E\lambda^-\gamma_0] = \frac{1}{m}[H\gamma_0\lambda^+ H + E^2\lambda^-\gamma_0] =$$
$$= \frac{1}{m}\Big[\frac{1}{2}H\gamma_0 H - \frac{i}{2}H\gamma_0\gamma_4 H + E^2\lambda^-\gamma_0\Big] = \frac{1}{m}\Big[-\frac{1}{2}E^2\gamma_0 + mH +$$
$$+ \frac{i}{2}E^2\gamma_0\gamma_4 + E^2\cdot\frac{1}{2}(1+i\gamma_4)\gamma_0 = \frac{1}{m}\cdot mH = H;$$

(5.9)

$$P_a' = V p_a V^{-1} = p_a + [V, p_a]V^{-1} = p_a;$$

$$x_b' = V x_b V^{-1} = x_b + V[x_b, V^{-1}] = x_b + V\Big(i\frac{\partial}{\partial p}\cdot V^{-1}\Big) =$$ (5.10)
$$= x_b + \frac{1}{E}[H\gamma_0\lambda^+ + E\lambda^-]\cdot i\frac{\partial}{\partial p}\Big[\frac{1}{m}(\lambda^+\gamma_0 H + E\lambda^+)\Big] =$$

$$= x_b + \frac{i}{mE}(H\gamma_0\lambda^+ + E\lambda^-)(\lambda^-\gamma_b + \lambda^+\frac{P_b}{E}) = x_b + \frac{i}{mE}(H\gamma_0\frac{P_b}{E} + E\gamma_b)\lambda^+ . \quad (5.11)$$

Используя (5.9) - (5.11), находим $I'_{\mu\nu}$

$$I'_{ab} = V(x_a P_b - x_b P_a)V^{-1} = x'_a P_b - x'_b P_a =$$
$$= x_a P_b - x_b P_a + \frac{i}{m}(\gamma_a P_b - \gamma_b P_a)\lambda^+ ; \quad (5.12)$$

$$I'_{ca} = V(tP_a - \frac{1}{2}\{x_a, P_0\})V^{-1} = tP_a - \frac{1}{2}\{x'_a, H\} =$$
$$= tP_a - \frac{1}{2}\{x_a . H\} - \frac{i}{2mE^2}\{H, H\gamma_0 P_b\lambda^+\} - \frac{i}{2m}\{H, \gamma_a . \lambda^+\} =$$
$$= tP_a - \frac{1}{2}\{x''_a, H\} + \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_4\gamma_a + \frac{i}{m}\gamma_0\gamma_a\gamma_b\lambda^+ . \quad (5.13)$$

В (5.13) мы учли, что, согласно (5.6б), (5.8)

$$\{H. H\gamma_0 P_a\lambda^+\} = HP_a\{H.\gamma_0\lambda^+\} = \frac{1}{2}HP_a\{H.\gamma_0\} = m\, HP_a ; \quad (5.14)$$

$$\{H, \gamma_a\lambda^+\} = \{H, \lambda^-\gamma_a\} = \lambda^-\{H, \gamma_a\} + [H, \lambda^-]\cdot\gamma_a =$$
$$= \lambda^-\{\gamma_0\gamma_b P_b + \gamma_0 m, \gamma_a\} + [\gamma_0\gamma_b P_b + \gamma_0 m, \frac{1}{2}(1 + i\gamma_4)]\gamma_a =$$
$$= -2\lambda^-\gamma_0\gamma_a\gamma_b P_b + i\gamma_0\gamma_4\gamma_a m . \quad (5.15)$$

В (5.9) - (5.13) показано, что соотношения (5.7а-г) действительно имеют место. А для доказательства (5.7д) достаточно подействовать на левую и правую части уравнения (5.2а) оператором (5.6б) и использовать (5.5), (5.9).

Докажем теперь последнее оставшееся соотношение (5.7е). Для этого найдём оператор $i\gamma_a\gamma_b n_c$ в новом представлении

$$(i\gamma_a\gamma_b n_c)' = V(i\gamma_a\gamma_b n_c)V^{-1} = i\gamma_a\gamma_b n_c + V[i\gamma_a\gamma_b n_c, V^{-1}] = i\gamma_a\gamma_b n_c +$$
$$+ \frac{1}{mE}(H\gamma_0\lambda^+ + E\lambda^-)(\lambda^-\gamma_0[i\gamma_a\gamma_b n_c, H]) = i\gamma_a\gamma_b n_c + \frac{1}{m}\lambda^-\gamma_0[i\gamma_a\gamma_b n_c,$$
$$\gamma_0\gamma_d P_d + \gamma_0 m] = i\gamma_a\gamma_b n_c + \frac{i}{m}\lambda^-(\gamma_a P_b n_c) . \quad (5.16)$$

Подействовав на (5.2б) слева оператором V (5.6б), приходим, учитывая (5.5), (5.16), к формуле (5.7е). Соотношения (5.7) доказаны.

Таким образом, мы показали, что уравнение Дирака (5.7д) с дополнительным условием (5.7е) описывает свободную релятивистскую частицу со спином $s=0$. Условие (5.7е) ковариантно, поскольку оператор $\hat{P}_0'$ коммутирует со всеми генераторами (5.7а-в) группы $P(1,3)$.

Систему уравнений (5.7д), (5.7е) можно записать в виде одного матричного уравнения (ср. (3.1))

$$\left\{\hat{P}_0'\left(i\frac{\partial}{\partial t}-H\right)\hat{P}_0'+\eta\left(1-\hat{P}_0'\right)\right\}\Psi(t,\vec{x})=0, \qquad (5.17)$$

где гамильтониан H и проектор $\hat{P}_0'$ заданы в (5.7а) и (5.7е) соответственно, η - произвольное не равное нулю число. Доказательство эквивалентности (5.17) и (5.7д), (5.7е) совершенно аналогично доказательству эквивалентности (3.1) и (2.56) (см. стр. 109). Уравнение (5.17) описывает движение свободной бесспиновой частицы.

2. Для того, чтобы перейти к описанию заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, сделаем в (5.17) обычную замену $p_\mu \to \pi_\mu$. Повторяя почти буквально рассуждения, приведенные в § 3, можно показать, что в результате такой замены уравнение (5.17) становится эквивалентным следующей системе

$$\left\{\gamma_\mu \pi^\mu+(1-i\gamma_4)\,i\gamma_\mu\gamma_\nu F_{\mu\nu}\frac{1}{m}-m\right\}\Psi=0; \qquad (5.18а)$$

$$\hat{P}_0'(\vec{\pi})\Psi=\Psi, \quad \hat{P}_0'(\vec{\pi})=\frac{1}{2}\left[1+i\sum\gamma_a\gamma_b n_c+\frac{i}{m}\sum\gamma_a\pi_b n_c\right], \qquad (5.18б)$$

где $F_{\mu\nu}$ - тензор электромагнитного поля (3.5)

Уравнение (5.18а) - это обычное четырёхкомпонентное уравнение Дирака для частицы во внешнем поле, содержащее, однако, явно ковариантный дополнительный член $\frac{i}{m}(1-i\gamma_4)\gamma_\mu\gamma_\nu F_{\mu\nu}$. Это уравнение совместно с дополнительным условием (5.18б) описывает движение заряженной частицы и античастицы со спином 0 в электромагнитном поле.

Чтобы не повторять выкладок § 3, мы получим (5.18) другим путём. Рассмотрим уравнение Клейна-Гордона для бесспиновой частицы во внешнем электромагнитном поле

$$(\pi_\mu^2 + m^2)\Phi = 0; \quad \pi_\mu^2 = P^2 - P_0^2. \tag{5.19}$$

Обобщая приём Дирака [69], представим оператор в круглых скобках в виде

$$(\pi_\mu^2 + m^2) \equiv F_1 \cdot F_2, \tag{5.20}$$

где

$$F_1 = m - \lambda^+ \gamma_\mu \pi^\mu + \frac{\lambda^-}{m}\pi_\mu^2; \quad F_2 = m + \lambda^+ \gamma_\mu \pi^\mu + \frac{\lambda^+}{m}\pi_\mu^2; \tag{5.21a}$$

$$\gamma_\mu \pi^\mu = \gamma_0 \pi_0 - \gamma_a \pi_a; \quad \lambda^\pm = \frac{1}{2}(1 \mp i\gamma_4). \tag{5.21б}$$

Покажем, что тождество (5.20) действительно имеет место. По определению (5.21a)

$$F_1 \cdot F_2 = \left(m - \lambda^+ \gamma_\mu \pi^\mu + \frac{\lambda^-}{m}\pi_\mu^2\right)\left(m + \lambda^+ \gamma_\mu \pi^\mu + \frac{\lambda^+}{m}\pi_\mu^2\right) =$$

$$= m^2 + m\lambda^+ \gamma_\mu \pi^\mu + \lambda^+ \pi_\mu^2 - m\lambda^+ \gamma_\mu \pi^\mu - \underline{\lambda^+ \gamma_\mu \pi^\mu \lambda^+ \gamma_\mu \pi^\mu} -$$

$$- \underline{\lambda^+ \gamma_\mu \pi^\mu \frac{\lambda^+}{m}\pi_\mu^2} + \lambda^- \pi_\mu^2 + \underline{\frac{\lambda^-}{m}\lambda^+ \pi_\mu^2 \gamma_\mu \pi^\mu} + \underline{\frac{\lambda^-}{m}\frac{\lambda^+}{m}\pi_\mu^2 \cdot \pi_\mu^2} =$$

$$= m^2 + (\lambda^+ + \lambda^-)\pi_\mu^2 = m^2 + \pi_\mu^2. \tag{5.22}$$

Подчёркнутые в (5.22) слагаемые равны нулю ввиду соотношений (3.35).

Таким образом, уравнение (5.19) можно представить как результат действия оператора F_1 на некоторое другое уравнение, а именно

$$F_2\Phi = \left(m + \lambda^+ \gamma_\mu \pi^\mu + \frac{\lambda^+}{m}\pi_\mu^2\right)\Phi = 0. \tag{5.23}$$

Подействовав на (5.25) слева оператором F_1, мы получим, согласно (5.21), уравнение (5.20).

Оператор F_2 в свою очередь можно представить в виде произведения

$$F_2 = F_1 \cdot V; \tag{5.24a}$$

$$F_2 = m + \gamma_\mu \pi^\mu + \frac{\lambda^+}{m} i \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu} \; ; \; V = 1 - \frac{\lambda^-}{m} \gamma_\mu \pi^\mu . \tag{5.24б}$$

Действительно, используя тождества (3.35), несложно вычислить непосредственно, что

$$F_2 \cdot V = \left(m + \gamma_\mu \pi^\mu + \frac{\lambda^+}{m} i \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu}\right)\left(1 - \frac{\lambda^-}{m}\gamma_\mu \pi^\mu\right) =$$

$$= m + \gamma_\mu \pi^\mu + \frac{\lambda^+}{m} i \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu} - \lambda^- \gamma_\mu \pi^\mu - \frac{\lambda^+}{m}(\gamma_\mu \pi^\mu)^2 =$$

$$= m + \frac{\lambda^+}{m}\gamma_\mu \pi^\mu + \frac{\lambda^+}{m}\pi_\mu^2 = F_2 . \tag{5.25}$$

Обозначив

$$V\Phi = \Psi \; ; \; \Phi = V^{-1}\Psi , \tag{5.26}$$

получаем из (5.23), (5.24а), (5.26) такое уравнение для Ψ

$$F_2 \Phi = F_2 V \Phi = \left(m + \gamma_\mu \pi^\mu + \frac{\lambda^+}{m} i \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu}\right). \tag{5.27}$$

Таким образом, функция Ψ (5.27) удовлетворяет уравнению (5.18а). Покажем, что Ψ удовлетворяет также условию (5.18б). Для этого предположим, что на четырёхкомпонентную функцию $\Phi(t, \vec{x})$, удовлетворяющую уравнению (5.19), наложено инвариантное дополнительное условие

$$\frac{1}{2}\left(1 + i \sum_{a,b,c} \gamma_a \gamma_b n_c\right)\Phi = 0 , \tag{5.28}$$

которое, согласно (5.3), (5.4), устраняет две лишние компоненты. Подействовав на (5.28) оператором V (5.24б) и учитывая (5.26), получаем

$$V\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sum_{a,b,c}\gamma_a \gamma_b n_c\right)\Phi \equiv V\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sum_{a,b,c}\gamma_a\gamma_b n_c\right)V^{-1} V \Phi = \frac{1}{2}\Big\{1 +$$

$$+ i \sum_{a,b,c}\left(1 - \frac{\lambda^-}{m}\gamma_\mu \pi^\mu\right)\gamma_a \gamma_b n_c \left(1 + \frac{\lambda^-}{m}\gamma_\mu \pi^\mu\right)\Big\}\Psi =$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{1 + \sum_{a,b,c}\left(\gamma_a \gamma_b n_c + \frac{i}{m}\gamma_a \pi_b n_c \lambda^-\right)\Big\}\Psi = 0 , \tag{5.29}$$

т.е. (5.18б) действительно имеет место

Уравнения (5.18) не приводят к противоречиям, описанным в [25], [26] [28]. Доказательство этого утверждения аналогично приведенному в § 3, поэтому мы его опускаем.

ГЛАВА III

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ РЕЛЯТИВИСТСКИХ УРАВНЕНИЙ

Под теоретико-групповым анализом релятивистского уравнения мы понимаем следующее:

1) определение явного вида генераторов представления группы Пуанкаре, по которому преобразуются решения данного уравнения;

2) приведение уравнения и соответствующих генераторов группы $P(1,3)$ к канонической форме Фолди-Широкова [11], [79]. При этом представление группы $P(1,3)$, которое реализуется на решениях рассматриваемого уравнения, расрадается в прямую сумму неприводимых представлений;

3) построение операторов динамических переменных — координаты, скорости, спина, энергии;

4) нахождение положительно определённого скалярного произведения для решений этого уравнения.

В настоящей главе произведен описанный выше анализ для уравнений, полученных в диссертации, а также для уравнений Рариты-Швингера.

§ 1. ОПЕРАТОРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ЧАСТИЦ, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ БЕЗ ЛИШНИХ КОМПОНЕНТ

В §§ 6, 7 гл. I для каждого из полученных гамильтонианов $H^{\pm}_{j\varepsilon}$, а значит, и для каждого уравнения (6.1), мы нашли явный вид (6.3) генераторов группы $P(1,3)$, а также оператора $U_{j\varepsilon}$ (7.13), (7.18), связывающего представление типа Фолди-Широкова (7.10). Инвариантное скалярное произведение для решений уравнения (6.1) имеет вид (1.4, гл I). Таким образом, програмыа, намеченная в п.п. 1 –4 на странице 130 фактически почти выполнена в гл. I, не найдены только операторы координаты, скорости и спина.

Известно, что даже в простейшем случае $j=0$, $\tau=\frac{1}{2}$, когда уравнение (6.1, гл.I) совпадает с уравнением Дирака, величины x_a и S_{ab}, входящие в определение (6.3, гл.I) генераторов группы $P(1,3)$, не могут служить операторами соответствующих динамических переменных, поскольку S_{ab} не коммутирует с гамильтонианом хотя спин свободной частицы - сохраняющаяся величина, а опратор скорости $\dot{x}_a=i[H,x_a]$ не имеет разумного спектра [78]. Зато в каноническом представлении (7.10 гл.I операторы x_a и S_{ab} имеют чёткий физический смысл [78]. Следовательно, операторы координаты X_a и спина $\hat{S}_{ab}$ для частиц, описываемых уравнением (6.1, глI) можно определить следующим образом

$$X_a=U_{j\tau}\,x_a\,U^{+}_{j\tau}\ ;\quad \hat{S}_{ab}=U_{j\tau}\,S_{ab}\,U^{+}_{j\tau}\,. \tag{1.1}$$

где $U_{j\tau}$ - оператор перехода от (6.3, гл.I) к (7.10, гл.I) - задан формулами (7.13), (7.18) из I главы. Так определённые X_a и S_{ab} являются непосредственным обобщением операторов ""средней координаты" и среднего спина для электрона на случай частиц с произвольным спином.

Выпишем для удобства явные выражения для операторов $U_{j\tau}$. Подставляя (7.30, гл.I), (7.18, гл.I) в (7.13, гл.I), получаем

$$U_{j\tau}=\frac{E+\sigma_1 H_{j\tau}}{\sqrt{2E(E+M)}}\ ;\quad H_{j\tau}=\sigma_1 M+\sigma_3\,p\sum_{j_3\tau_3}(-1)^{N_{j_3\tau_3}}\Lambda_{j_3}\Lambda_{\tau_3}\,; \tag{1.2а}$$

$$U_{j\tau}=\exp\left(i\sigma_2\frac{S_{4a}p_a}{p}\,\mathrm{arctg}\frac{p}{M}\right);\quad N_{j_3\tau_3}=\begin{cases} j_3+\tau_3, & j+\tau=2n\ ;\\ j_3+\tau_3+\frac{1}{2}, & j+\tau=2n+\frac{1}{2}\,. \end{cases} \tag{1.2б}$$

Оператор (1.2а) соответствует гамильтонианам (7.31а,б, гл.I), а (1.2б) - (7.31в, гл.I). Формулы (1.2) задают обобщённые операторы Фолди-Вуйткайзена для частиц с произвольным (в общем случае - переменным) спином.

Используя (1.2), нетрудно найти явный вид операторов (1.1) Подставляя (1.2а) в (1.1), получаем

$$X_a = U_{j\tau}\, x_a\, U^+_{j\tau} = x_a + [U_{j\tau}, x_a]U^+_{j\tau} = x_a - \left(i\frac{\partial}{\partial p_a}U_{j\tau}\right)U^+_{j\tau} =$$

$$= x_a - i\left[-\frac{p_a(2E+M)}{E^2(E+M)}U + \frac{p_a + \sigma_1 E\,\frac{\partial H^I_{j\tau}}{\partial p_a}}{E\sqrt{2E(E+M)}}\right]U^+ =$$

$$= x_a + i p_a \frac{2E+M}{E^2(E+M)} - i\,\frac{p_a + \sigma_1\frac{\partial}{\partial p_a}H^I_{j\tau}}{2E^2(E+M)}\left(E + H^I_{j\tau}\sigma_1\right). \qquad (1.3)$$

Вычислим $\frac{\partial H^I_{j\tau}}{\partial p_a}$. Учитывая (7.31а,б, гл.I) и (7.7в,г, гл.I), находим

$$\frac{\partial H_{j\tau}}{\partial p_a} = \frac{\partial}{\partial p_a}\left[\sigma_1 M + \sigma_3\sum_{j_3\tau_3} p(-1)^{N_{j_3\tau_3}}\Lambda_{j_3}\Lambda_{\tau_3}\right] = \sigma_3\frac{p_a}{p}\sum_{j_3\tau_3}(-1)^{N_{j_3\tau_3}}\Lambda_{j_3}\Lambda_{\tau_3} +$$

$$+ \sigma_3 p\sum_{j_3\tau_3}(-1)^{N_{j_3\tau_3}} i\left[\Lambda_{j_3}\Lambda_{\tau_3}, x_a\right] = \sigma_3\frac{p_a}{p}\sum_{j_3\tau_3}(-1)^{N_{j_3\tau_3}}\cdot\Lambda_{j_3}\Lambda_{\tau_3} +$$

$$+ \sigma_3 p\sum_{j_3\tau_3}(-1)^{N_{j_3\tau_3}} i\left[\frac{(\vec p\times\vec j)_a}{2p^2}\left(2\Lambda_{j_3} - \Lambda_{j_3+1} - \Lambda_{j_3-1}\right)\Lambda_{\tau_3} + \frac{(\vec p\times\vec\tau)_a}{2p^2}\left(2\Lambda_{\tau_3} -\right.\right.$$

$$\left. - \Lambda_{\tau_3+1} - \Lambda_{\tau_3-1}\right)\Lambda_{j_3} + \frac{i}{2p}\left(j_a - \frac{p_a}{p}j_p\right)\left(\Lambda_{j_3+1} - \Lambda_{j_3-1}\right)\Lambda_{\tau_3} + \frac{i}{2p}\left(\tau_a -\right.$$

$$\left.\left. - \frac{p_a}{p}\tau_p\right)\left(\Lambda_{\tau_3+1} - \Lambda_{\tau_3-1}\right)\Lambda_{j_3}\right] = \sigma_3\frac{p_a}{p}\sum_{j_3\tau_3}(-1)^{N_{j_3\tau_3}}\Lambda_{j_3}\Lambda_{\tau_3} + \sigma_3 p\sum_{j_3\tau_3}(-1)^{N_{j_3\tau_3}}\times$$

$$\times i\frac{(\vec p\times\vec j)_a + (\vec p\times\vec\tau)_a}{2p^2}\cdot 4\Lambda_{j_3}\Lambda_{\tau_3} = \left[\frac{p_a}{p} + 2i\,\frac{S_{ab}p_b}{p^2}\right]\left(H^I_{j\tau} - \sigma_1 M\right);\quad S_{ab} = j_c + \tau_c \qquad (1.4)$$

В предпоследней строке (1.4) использованы тождества

$$\sum_{j_3}(-1)^{N_{j_3\tau_3}}\Lambda_{j_3\pm1} \equiv -\sum_{j_3}(-1)^{N_{j_3\tau_3}}\Lambda_{j_3}; \qquad (1.5а)$$

$$\sum_{\tau_3}(-1)^{N_{j_3\tau_3}}\Lambda_{\tau_3\pm1} = -\sum_{\tau_3}(-1)^{N_{j_3\tau_3}}\Lambda_{\tau_3}, \qquad (1.5б)$$

которые становятся очевидными, если принять во внимание определение (1.2б) числа $N_{j_3\tau_3}$.

Подставляя (1.4) в (1.3), приходим к соотношению

$$X_a = x_a + S_{ab}p_b\cdot\frac{E - \sigma_1 H^I_{j\tau}}{p^2 E} + i p_a\,\frac{M(\sigma_1 H^I_{j\tau} - M)}{p^2E^2}. \qquad (1.6)$$

Формула (1.6) задаёт оператор координаты в представлении (6.3, гл.I), если гамильтониан $H^I_{j\tau}$ имеет вид (7.31а,б, гл.I).

Найдём теперь явный вид оператора спина (1.1)

$$\hat{S}_{ab} = U_{j\tau} S_{ab} U^{+}_{j\tau} = S_{ab} + [U_{j\tau}, S_{ab}] U^{+}_{j\tau} . \qquad (1.7)$$

Для вычисления входящего в (1.7) коммутатора воспользуемся тем обстоятельством, что оператор $U_{j\tau}$ (1.2а) коммутирует с I_{ab} из (6.3, гл.I)

$$[U_{j\tau}, x_a P_b - x_b P_a + S_{ab}] = 0 . \qquad (1.8)$$

Из (1.8) следует, что

$$[U_{j\tau}, S_{ab}] = [U_{j\tau}, x_b P_a - x_a P_b] . \qquad (1.9)$$

Подставляя (1.9) в (1.7) и используя (1.6), получаем

$$\hat{S}_{ab} = S_{ab} + [U_{j\tau}, x_b P_a - x_a P_b] U^{+}_{j\tau} = S_{ab} + P_a (X_b - x_b) -$$
$$- P_b (X_a - x_a) = S_{ab} \cdot \sigma_1 \frac{H^I_{j\tau}}{E} + P_c \cdot \frac{\vec{S} \cdot \vec{P}}{P^2} \left(1 - \sigma_1 \frac{H^I_{j\tau}}{E}\right) . \qquad (1.10)$$

Аналогичным образом, используя (1.2б), можно найти операторы X_a и S_{ab} для того случая, когда гамильтонианы $H^I_{j\tau}$ имеют вид (7.31в). Опуская довольно громоздкие выкладки, приведём явный вид этих операторов

$$X_a = x_a + \sigma_2 \frac{S_{bc}}{E} + \frac{S_{ab} P_b \cdot E - i \bar{P}_a (\vec{P} \cdot \vec{S}) \cdot \sigma_2}{E^2 (E + M)} , \qquad (1.11а)$$

$$\hat{S}_{ab} = S_{ab} + \sigma_2 \frac{S_{cd} P_d}{E} + \frac{P_c (\vec{P} \cdot \vec{S}) - P^2 S_{ab}}{E (E + M)} ; (a, b, c) - \text{ цикл } (1, 2, 3) \qquad (1.11б)$$

Как видно из (1.11), операторы спина и координаты в представлении (6.3, гл.I) имеют достаточно простой вид, совпадая с точностью до используемых спиновых матриц S_{ab} с операторами среднего спина и средней координаты для электрона, предложенными в [78].

Определим оператор скорости

$$\dot{X}_a = i\left[H^I_{j\tau},\ x_a\right]. \qquad (1.12)$$

В представлении (7.10, гл.I) соответствующий оператор имеет вид

$$\dot{x}_a = i\left[P^K_0,\ x_a\right] = i\left[\sigma_1 E,\ x_a\right] = \sigma_1 \cdot \frac{P_a}{E}. \qquad (1.13)$$

Используя (1.13), (1.2), (7.11а, гл.I), нетрудно определить явный вид $\dot{X}_i$

$$\dot{X}_a = U_{j\tau}\,\dot{x}_a\,U^+_{j\tau} = U_{j\tau}\cdot\sigma_1\frac{P_a}{E}\cdot U^+_{j\tau} = \frac{H_{j\tau}}{E}\cdot\frac{P_a}{E}. \qquad (1.14)$$

оператор (1.14) имеет разумный спектр: скорость свободной частицы может принимать любые значения, не превышающие скорости света, которая в используемой нами системе единиц равна 1.

Итак, операторы динамических переменных в представлении (6.3, гл.I), задаются формулами (1.6), (1.10), (1.11), (1.14).

Рассмотрим теперь вопрос о том, какие значения могут принимать спин и масса частицы, описываемой уравнением (6.1, гл.I). с гамильтонианами (7.31, гл.I). На решениях этого уравнения генераторы группы $P(1,3)$ имеют вид (6.3, гл.I). Но представление (6.3, глI) унитарно эквивалентно (7.10, гл.I). В представлении (7.10, гл.I) оператор квадрата спина имеет вид [99] (ср. (2.1., гл.I))

$$\hat{S}^2 = -\frac{W_\mu W^\mu}{M^2} = (S_{ab})^2 = (j_c + \tau_c)^2. \qquad (1.15)$$

Согласно определения (6.5, гл.I) и по теореме Клебша-Гордона, собственные значения оператора 1.15 равны $s(s+1)$, где

$$|j-\tau| \leq s \leq j+\tau. \qquad (1.16)$$

Здесь j и τ – целые или полуцелые числа, определённые в (6.5, гл.I). Таким образом, спин частицы, описываемой уравнением (6.1, гл.I), может принимать дискретный ряд значений, описываемых формулой (1.16)

Для того, чтобы выделить состояние с фиксированным спином S, на волновую функцию Φ из пространства представления (7.10, гл. I) следует наложить пуанкаре-инвариантное условие

$$-\frac{W_\mu W^\mu}{M^2}\Phi = (S_{ob})^2\Phi = s(s+1)\Phi. \qquad (1.17)$$

В представлении (6.3, гл. I) это условие запишется в виде

$$U_{j\tau}(S_{ob})^2 U^+_{j\tau}\Psi = (\hat{S}_{ob})^2\Psi = s(s+1)\Psi. \qquad (1.18)$$

Покажем теперь, что для релятивистской системы, описываемой уравнением (6.1, гл. I), можно постулировать спектр масс (6.10, гл. I). Оператор квадрата массы такой системы имеет вид (7.2, гл. I). В представлении (7.11m) этот оператор, очевидно, задаётся формулой

$$M^2_\kappa = U^+_{j\tau} M^2 U_{j\tau} = M^2 + U^+_{j\tau}\left[M^2, U_{j\tau}\right], \qquad (1.19)$$

где $U_{j\tau}$ заданы в (1.2). В случае $\lambda_a = +\tau_a$ последнее слагаемое (1.19) равно нулю, поскольку операторы $U_{j\tau}$ (1.2) и M^2 (7.2, гл. I) коммутируют друг с другом. Согласно (1.19), (7.2, гл. I), это означает, что

$$M^2_\kappa = a_0 + a_1(S_{ob})^2 + a_2(S_{ob})^4 + \ldots \qquad (1.20)$$

На множестве функций Φ_s, удовлетворяющих (1.23), этот оператор равен

$$M^2_\kappa\Phi_s = \{a_0 + a_1 s(s+1) + a_2[s(s+1)]^2 + \ldots\}\Phi_s = m^2_s\Phi_s \qquad (1.21)$$

Положив в (1.21)

$$a_0 = \bar{a}_2,\ a_1 = \bar{b}_2;\ a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = 0, \qquad (1.22)$$

получаем

$$m^2_s = \bar{a}_2 + \bar{b}_2\ s(s+1). \qquad (1.23)$$

Если же положить

$$a_0 = \bar{a}^2_1,\ a_1 = 2\bar{a}_1\bar{b}_1,\ a_2 = \bar{b}^2_2,\ a_3 = a_4 = \ldots = 0, \qquad (1.24)$$

то из (1.21) следует массовая формула

$$m_s = \bar{a}_1 + \bar{b}_1 \, s(s+1). \tag{1.25}$$

Ввиду унитарной эквивалентности представлений 6.3,гл,I и 7.10,гл.I формулы (1.23), (1.25) справедливы и для частиц, описываемых уравнением (6.1,гл.I).

В заключение этого параграфа приведём без доказательства явный вид изометрического оператора, связывающего представления (6.6,гл.I) и (7.10,гл.I) и метрического оператора M , входящего в определение (6.8,гл.I) скалярного произведения для представления (6.6,гл.I)

$$V_{j\tau} = \sqrt{\frac{M}{E}} \sum_{j_3 \tau_3} \left\{ ch[(j_3+\lambda_3)\varkappa] + i\sigma_2 \, sh[(j_3+\lambda_3)\varkappa] \right\} \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}; \tag{1.26}$$

$$V_{j\tau}^{-1} = \sqrt{\frac{E}{M}} \sum_{j_3 \tau_3} \left\{ ch[(j_3+\lambda_3)\varkappa] - i\sigma_2 \, sh[(j_3+\lambda_3)\varkappa] \right\} \times$$

$$\times \, sech[(j_3+\lambda_3)\varkappa] \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}; \quad \varkappa = arcth \frac{P}{E}; \tag{1.27}$$

$$M = V_{j\tau}^{-1} (V_{j\tau}^{-1})^{+} = \frac{E}{M} \sum_{j_3 \tau_3} sech[2(j_3+\lambda_3)\varkappa] \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}. \tag{1.28}$$

§ 2. ОПЕРАТОРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ЧАСТИЦ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИРАКОПОДОБНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

В этом параграфе производится теоретико-групповой анализ уравнений, найденных в главе II. Мы нашли эти уравнения как в каноническом представлении (2.1,гл.II), так и в локально ковариантном представлении (1.1,гл.II) (см. (2.15,гл.II), (2.25,гл.II) и (2.56,гл.II) соответственно) и указали преобразование эквивалентности (2.2,гл.II), (2.3,гл.II) связывающее эти представления. Таким образом, элементы теоретико-группового анализа, перечисленные в п.п. 1) и 2) на странице 130 , нами уже проделаны. В настоящем параграфе найдены операторы динамических переменных и инвариантное скалярное произведение для решений уравнений (2.56,гл.II).

По аналогии с предыдущим параграфом операторы координаты и спина в представлении (1.1, гл.II) определим следующим образом

$$X_a = W x_a W^{-1}, \quad \hat{S}_{ab} = W s_{ab} W^{-1}, \qquad (2.1)$$

где W - оператор (2.2, гл.II), связывающий, согласно (2.3, гл.II), представление (1.1, гл.II) с каноническим.

Вычислим явный вид операторов X_a и S_{ab}. Используя определения (2.1), (2.2, гл.II), получаем

$$X_a = W x_a W^{-1} = UV x_a V^{-1} U^{-1} = U(x_a + [V, x_a] V^{-1}) U^{-1}. \qquad (2.2)$$

Согласно (2.9, гл.II), (7.7, гл.I)

$$[V, x_a] V^{-1} = -i \frac{p_a (\vec{\tau} \cdot \vec{p})}{E p^2 m} (m - E) \sigma_1 - i \sigma_1 \frac{\tau_a}{m} + \frac{(\vec{p} \times \vec{\tau})_a}{p^2 m} (m - E); \qquad (2.3)$$

Используя (2.3), (2.3а, гл.II), нетрудно найти явный вид последнего слагаемого в (2.2)

$$U[V, x_a] V^{-1} U^{-1} = -i \left[\frac{p_a (\vec{\tau} \cdot \vec{p})}{E p^2 m} (m - E) + \frac{\tau_a}{m} \right] \frac{H}{E} + \frac{(\vec{p} \times \vec{\tau})_a \cdot (m - E)}{p^2 m}. \qquad (2.4)$$

Первое слагаемое (2.2) было найдено в предыдущем параграфе (см. (2.6) при $\tau = 0$, $j = \frac{1}{2}$, когда $H^{I}_{j\tau}$ совпадает с гамильтонианом (1.3, гл.II))

$$U x_a U^{-1} = x_a + S_{ab} p_b \frac{E - \sigma_1 H^{I}_{\frac{1}{2}0}}{p^2 E} + i p_a \frac{M(\sigma_1 H^{I}_{\frac{1}{2}0} - M)}{p^2 E} \equiv$$

$$\equiv x_a + \sigma_2 \frac{j_a}{E} + \frac{(\vec{p} \times \vec{j})_a E - i \sigma_2 p_a (\vec{p} \cdot \vec{j})}{E^2 (E + M)}, \quad m = M. \qquad (2.5)$$

Подставляя (2.4), (2.5) в (2.2), приходим к формуле

$$X_a = x_a - i \frac{H}{E} \frac{\tau_a}{M} + \sigma_2 j_a \frac{1}{E} + \frac{(\vec{p} \times \vec{j})_a E - i \sigma_2 p_a (\vec{p} \cdot \vec{j})}{E^2 (E + M)} + \frac{E (\vec{p} \times \vec{\tau})_a - i p_a (\vec{\tau} \cdot \vec{p})}{E M (M + E)} \qquad (2.6)$$

Найдём теперь оператор спина (2.1)

$$\hat{S}_{ab} = W s_{ab} W^{-1} = S_{ab} + [W, s_{ab}] W^{-1}. \qquad (2.7)$$

Поскольку W (2.2, гл.II) коммутирует с I_{ab} из (1.1, гл.II), то (ср. (1.14), (1.15))

$$[W, S_{ab}] = [W, x_a P_b - x_b P_a]. \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в (2.7) и используя (2.6), получаем

$$\hat{S}_{ab} = S_{ab} + [x_a P_b - x_b P_a, W] W^{-1} = S_{ab} + P_b (X_a - x_a) - P_a (X_b - x_b) =$$

$$= S_{ab} - \frac{iH(\vec{P}\times\vec{\tau})_c}{E\cdot M} + \frac{\sigma_2 (\vec{P}\times\vec{j})_c}{E} + \frac{P_c(\vec{j}\vec{P}) - j_c P^2}{E(E+M)} + \frac{P_c(\vec{\tau}\vec{P}) - \tau_c P^2}{M(E+M)}; \quad (a,b,c) - (1,2,3). \tag{2.9}$$

Оператор скорости проще всего определить в представлении (2.1, гл.II)

$$\dot{x}_a = i[P_0^k, x_a] = i[\sigma_1 E, x_a] = \sigma_1 \frac{P_a}{E}. \tag{2.10}$$

Используя (2.10), найдём оператор скорости в представлении (2.1, гл.II)

$$\dot{X}_a = i[H, X_a] = W \dot{x}_a W^{-1} = \frac{H}{E}\,\frac{P_a}{E}. \tag{2.11}$$

Таким образом, мы нашли операторы динамических переменных (2.6), (2.9), (2.11) для частиц, описываемых уравнениями (2.56, гл.II).

Укажем теперь инвариантное скалярное прозведение для множества решений уравнений (2.56, гл.II). В представлении (2.1, гл.II) скалярное произведение задаётся формулой (2.16, гл.II), где функции Φ связаны с решением Ψ уравнений (2.56, гл.II) соотношениями (2.15, гл.II)

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \int d^3x\, \Phi_1^+(t,\vec{x})\, \Phi_2(t,\vec{x}); \tag{2.12а}$$

$$\Phi = W^{-1}\Psi. \tag{2.12б}$$

Подставив (2.12б) в (2.12а), получим

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\, \Psi_1^+(t,\vec{x})\, \hat{M}\, \Psi_2(t,\vec{x}), \tag{2.13}$$

где метрический оператор $\hat{M}$ задаётся формулой

$$\hat{M} = (W^{-1})^+ (W^{-1}). \tag{2.14}$$

Используя определение (2.2, гл.II) оператора W, представим M в виде

$$\hat{M}=(W^{-1})^{+}W^{-1}=(U^{-1})^{+}(V^{-1})^{+}V^{-1}U^{-1}=U(V^{-1})^{+}V^{-1}U^{-1}=U(V^{-1})^{2}U^{-1}=$$

$$=U\left[\exp\left(-2\sigma_1\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{p}}{p}\varkappa\right)\right]U^{-1}=\exp\left[-2\frac{H}{E}\cdot\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{p}}{p}\varkappa\right],\ \varkappa=\operatorname{arcth}\frac{p}{E}. \tag{2.15}$$

По аналогии с (2.7, гл. II) экспоненту, входящую в определение (2.15) метрического оператора, можно разложить в ряд:

$$\hat{M}=\exp\left(-2\frac{H}{E}\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{p}}{p}\cdot\varkappa\right)=\exp\left(-2\frac{H}{E}\sum_{\tau_3}\tau_3\Lambda_{\tau_3}\cdot\varkappa\right)=$$

$$=\sum_{\tau_3}\left[\operatorname{ch}(2\tau_3\varkappa)-\frac{H}{E}\operatorname{sh}(2\tau_3\varkappa)\right]\Lambda_{\tau_3};\quad \varkappa=\operatorname{arcth}\frac{p}{E}. \tag{2.16}$$

Выпишем явные выражения для $\hat{M}$ при $\tau\leq\frac{3}{2}$. Согласно (2.19, гл. II) это соответствует значениям спина $S\leq 2$.

$$\tau=0,\quad \hat{M}=I;$$

$$\tau=\frac{1}{2},\quad \hat{M}=\frac{E-2\frac{H}{E}(\vec{\tau}\cdot\vec{p})}{m};$$

$$\tau=1,\quad \hat{M}=\frac{E^{2}-2H\vec{\tau}\cdot\vec{p}+2(\vec{\tau}\cdot\vec{p})^{2}}{m^{2}}; \tag{2.17}$$

$$\tau=\frac{3}{2},\quad \hat{M}=\frac{2E(\vec{\tau}\cdot\vec{p})^{2}-E(2m^{2}-p^{2})-H(\vec{\tau}\cdot\vec{p})\left[\frac{4}{3}(\vec{\tau}\cdot\vec{p})^{2}+6m^{2}-\frac{p^{2}}{2}\right]E^{-1}}{m^{3}}.$$

Таким образом, скалярное произведение для множества решений уравнения (2.56, гл. II) имеет вид (2.13), где метрический оператор $\hat{M}$ задаётся формулами (2.15), (2.17).

§ 3. УРАВНЕНИЯ РАРИТЫ-ШВИНГЕРА

Уравнения Рариты-Швингера для свободной частицы со спином могут быть записаны в виде [32], [4]

$$(\gamma_\mu p^{\mu}+m)\psi^{\nu}=0; \tag{3.1a}$$

$$\gamma_\nu \Psi_\nu = 0; \qquad (3.1б)$$

$$P_\nu \Psi_\nu = 0, \qquad (3.1в)$$

где $\Psi^\nu = \Psi^\nu_k$ – шестнадцатикомпонентная функция, имеющая спинорный индекс k, $k=1,2,3,4$ и векторный индекс ν, $\nu=0,1,2,3$, γ_μ – матрицы Дирака соответствующей размерности, действующие только на спинорный индекс k волновой функции.

Ввиду трудностей, к которым приводит уравнение Рариты-Швингера при описании заряженных частиц во внешнем поле [25], естественный интерес представляет теоретико-групповой анализ этого уравнения. Такой анализ и осуществляется в настоящем параграфе.

Генераторы группы Пуанкаре на решениях уравнений (3.1) имеют вид

$$P_0 = H = \gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 m; \quad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a} = P_a; \qquad (3.2а)$$

$$I_{ab} = x_a P_b - x_b P_a + S_{ab}; \qquad (3.2б)$$

$$I_{0a} = x_0 P_a - x_0 P_0 + S_{0a}. \qquad (3.2в)$$

где спиновые матрицы $S_{\mu\nu}$ реализуют представление $D(\frac{1}{2}\frac{1}{2})\otimes[D(\frac{1}{2}0)\oplus D(0\frac{1}{2})]$ и, следовательно, могут быть представлены в виде

$$S_{\mu\nu} = j_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}, \quad [j_{\mu\nu}, \tau_{k\rho}] = 0, \qquad (3.3а)$$

$$\tau_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu; \; j_{ab} = j^1_c + j^2_c; \; j_{0a} = -i(j^1_c - j^2_c), \qquad (3.3б)$$

где j^α_c – генераторы представлений $D(\frac{1}{2})$ группы $O(3)$, удовлетворяющие соотношениям

$$[j^\alpha_a, j^\alpha_b] = i j^\alpha_c; \; [j^1_a, j^2_b] = 0; \; \sum_a (j^\alpha_a)^2 = j^\alpha(j^\alpha+1) = \frac{3}{4}. \qquad (3.4)$$

Из (3.3) видно что представление (3.2) приводимо по спину но относительно обычного скалярного произведения (1.5, гл. I).

Преобразуем генераторы (3.2) и уравнения (3.1) к каноническому виду, предложенному Фолди [11]. При этом представление (3.2) распадётся в прямую сумму неприводимых представлений, унитарных относительно (1.5, гл I), а уравнение (3.1б) примет вид дополнительного условия, очевидным образом выделяющего подпространство, соответствующее спину $S=\frac{3}{2}$

Покажем, что оператор

$$W=V_1 V_2 U\ ;\ U=\frac{E+\sigma_1 H}{\sqrt{2E(E+m)}}\ ;$$

$$V_1=\exp\left(\sigma_1\frac{\vec{\delta}^1\vec{p}}{p}\varkappa\right);\ V_2=\exp\left(-\sigma_1\frac{\vec{\delta}^2\vec{p}}{p}\varkappa\right);\ \varkappa=\operatorname{arcth}\frac{p}{E}. \quad (3.5)$$

преобразует генераторы (3.2) к каноническому виду типа Фолди-Широкова, т.е. что имеют место соотношения

$$WHW^{-1}=P_0^{\kappa}=\sigma_1 E;\ WP_aW^{-1}=P_a^{\kappa}=P_a, \quad (3.6а)$$

$$WI_{ob}W^{-1}=I_{ob}^{\kappa}=x_0P_b-x_bP_0+S_{ob}, \quad (3.6б)$$

$$WI_{oa}W^{-1}=I_{oa}^{\kappa}=x_0P_a-\frac{1}{2}\sigma_1\{x_a,E\}-\sigma_1\frac{S_{ob}P_b}{E+m}. \quad (3.6в)$$

При этом уравнения (3.1) принимают форму

$$\gamma_0 E\,\Phi(t,\vec{x})=\sigma_1 E\,\Phi(t,\vec{x})=i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\vec{x}), \quad (3.7а)$$

$$(S_{ob})^2\Phi(t,\vec{x})=\frac{15}{4}\Phi(t,\vec{x});\ \Phi=W\Psi. \quad (3.7б)$$

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим последовательно все соотношения (3.6), (3.7) Используя определение (3.5), получаем прямым вычислением

$$WHW^{-1}=V_1V_2UHU^{-1}V_2^{-1}V_1^{-1}=V_1V_2\sigma_1EV_2^{-1}V_1^{-1}\equiv\sigma_1E, \quad (3.8)$$

т.е. первое из соотношений (3.6а) действительно выполняется. В (3.8) мы воспользовались тождеством (см. (7.19, гл. I), (1.2а), (1.5, гл II))

$$UHU^{-1}=\frac{E+\sigma_1 H}{\sqrt{2E(E+m)}}\cdot H\cdot\frac{E+H\sigma_1}{\sqrt{2E(E+m)}}=\sigma_1 E \tag{3.9}$$

и учли коммутативность V_1, V_2 с $\sigma_1 E$.

Из (3.5) видно непосредственно, что W коммутирует с P_a и $I_{o\ell}$, следовательно, соотношение (3.6б) и второе из соотношений (3.6а) выполняются тождественно.

Докажем теперь, что имеет место (3.6в). Для этого рассмотрим обратное соотношение

$$W^{-1}I^{\kappa}_{oa}W=I_{oa}, \tag{3.10}$$

которое, конечно, эквивалентно (3.6в). Подставляя (3.3), (3.4а), (3.5) в левую часть (3.10), получаем

$$W^{-1}I^{\kappa}_{oa}W=U^{-1}V_2^{-1}V_1^{-1}\Big[x_0P_a-\frac{1}{2}\sigma_1\{x_a,E\}+\sigma_1\frac{(\vec{J}'\times\vec{P})_a}{E+m}+$$

$$+\sigma_1\frac{(\vec{J}'\times\vec{P})_a}{E+m}+\sigma_1\frac{(\vec{\tau}\times\vec{P})_a}{E+m}\Big]\cdot V_1\cdot V_2U. \tag{3.11}$$

Но согласно (2.5,глII) (ср. (2.2, гл. II) и (3.5))

$$V_1^{-1}V_2^{-1}\Big[x_0P_a-\frac{1}{2}\sigma_1\{x_a,E\}-\sigma_1\frac{(\vec{P}\times\vec{J}^{2})_a}{E+m}-\sigma_1\frac{(\vec{P}\times\vec{\tau})_a}{E+m}\Big]V_2^{-1}V_2^{-1}=V_1^{-1}\Big[x_0P_a-$$

$$-\frac{1}{2}(x_aE+Ex_a)-\sigma_1\frac{(\vec{P}\times\vec{\tau})_a}{E+m}+iJ_a^{2}\Big]V_1;\ V_1V_2=V_2V_1. \tag{3.12}$$

Подставляя (3.12) в (3.11) и учитывая коммутативность V_2 из (3.5) с $\sigma_1\frac{(P\times\vec{J}')_a}{E+m}$, приходим к соотношению

$$W^{-1}I^{\kappa}_{oa}W=UV_1\Big(x_0P_a-\frac{1}{2}\sigma_1\{x_a,E\}-\sigma_1\frac{(\vec{P}\times\vec{J}^{2})_a}{E+m}-\underline{\sigma_1\frac{(\vec{P}\times\vec{\tau})_a}{E+m}+iJ_a^{2}}\Big)V_1^{-1}U^{-1} \tag{3.13}$$

Оператор V_2 (3.5) коммутирует с подчёркнутыми в (3.13) слагаемыми. Сравнивая V_2 из (3.5) с V (2.2,гл.II), убеждаемся, что можно снова воспользоваться соотношением (2.5,гл.II) согласно которому

$$V_1\Big[x_0P_a-\frac{1}{2}\sigma_1\{x_a,E\}-\sigma_1\frac{(\vec{P}\times\vec{\tau})_a}{E+m}-\sigma_1\frac{(\vec{P}\times\vec{J}^{2})_a}{E+m}\Big]V_1^{-1}=$$

$$= x_0 p_a - \frac{1}{2}\sigma_1\{x_a, E\} - \sigma_1 \frac{(\vec{p}\times\vec{\Sigma})_a}{E+m} - i\, j_a^{1} \cdot \qquad (3.14)$$

Знак „–" перед $i j_a^{1}$ соответствует знаку перед $\vec{j}^{1}$ в определении (3.5) оператора V_1^{-1}. Подставив (3.14) в (3.13), получаем

$$W^{-1} I_{0a}^{\kappa} W = U[x_0 p_a - \tfrac{1}{2}\sigma_1\{x_a, E\} - \sigma_1 \frac{(\vec{p}\times\vec{\Sigma})_a}{E+m} - i(j_a^{1} - j_a^{2})]U^{-1}. \qquad (3.15)$$

Как показано в (2.13, гл. II)

$$U[-\tfrac{1}{2}\sigma_1\{x_a, E\} - \sigma_1 \frac{(\vec{p}\times\vec{\Sigma})_a}{E+m}]U^{-1} = -x_0 H + i\sigma_3 \Sigma_a \cdot \qquad (3.16)$$

Используя (3.16), перепишем (3.15) в виде

$$W^{-1} I_{0a}^{\kappa} W = x_0 p_a - x_a H + i\sigma_3 \Sigma_a - i(j_a^{1} - j_a^{2}) x_0 p_a - x_a p_0 + S_{0a} \cdot \qquad (3.17)$$

Соотношение (3.10) а значит, и (3.6в) доказано.

Покажем теперь, что уравнения (3.1) в представлении (3.6) принимают вид (3.7). Умножив (3.1а) на γ_0 и учитывая (1.7, гл. II) получаем

$$H\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \quad H = \gamma_0\gamma_a p_a + \gamma_0 m. \qquad (3.18)$$

Подействовав на (3.18) слева оператором W и принимая во внимание (3.9), приходим к уравнению (3.7а):

$$WH\Psi = WHW^{-1}W\Psi = \sigma_1 E\,\Phi, \quad \Phi = W\Psi. \qquad (3.19)$$

Несколько сложнее доказать эквивалентность уравнений (3.1б) и (3.7б). Для упрощения вычислений мы конкретизируем вид матриц $S_{\mu\nu}$ (3.3), положив

$$j_1 = j_{23} = i\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&-I\\ 0&0&I&0\end{pmatrix}; \quad j_2 = j_{31} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&I\\ 0&0&0&0\\ 0&-I&0&0\end{pmatrix} i; \quad j_3 = j_{12} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&-I&0\\ 0&I&0&0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix} i;$$

$$j_{01} = i\begin{pmatrix} 0&I&0&0\\ I&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}; \quad j_{02} = i\begin{pmatrix} 0&0&I&0\\ 0&0&0&0\\ I&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}; \quad j_{03} = \begin{pmatrix} 0&0&0&I\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ I&0&0&0\end{pmatrix}; \quad \gamma_\mu = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_\mu&0&0&0\\ 0&\hat{\gamma}_\mu&0&0\\ 0&0&\hat{\gamma}_\mu&0\\ 0&0&0&\hat{\gamma}_\mu\end{pmatrix}. \qquad (3.20)$$

где I и O - четырехрядные единичная и нулевая матрицы соответственно. Такую же размерность имеют и матрицы $\hat{\gamma}_\mu$. Определение (3.20), конечно, согласуется с (3.4).

Используя (3.20), запишем (3.7б) в виде

$$(S_{o\theta})^2\cdot\Phi=(j_c+\tau_c)^2\Phi=(\tau_c^2+j_c^2+2j_c\tau_c)\Phi=\frac{15}{4}\Phi\ ; \tag{3.21}$$

$$(j_c)^2=\left(\frac{i}{2}\gamma_a\gamma_b\right)^2=\frac{3}{4}\begin{pmatrix}I&O&O&O\\O&I&O&O\\O&O&I&O\\O&O&O&I\end{pmatrix};(j_c)^2=2\begin{pmatrix}O&O&O&O\\O&I&O&O\\O&O&I&O\\O&O&O&I\end{pmatrix};j_c\cdot\tau_c=\begin{pmatrix}O&O&O&O\\O&O&-i\tau_3&\tau_2\\O&\tau_3&O&-\tau_1\\O&-\tau_2&\tau_1&O\end{pmatrix}i. \tag{3.22}$$

Из (3.22) видно, что уравнение (3.21) может быть записано в следующей эквивалентной форме

$$j_c\cdot\tau_c\,\Phi=\frac{1}{2}\Phi. \tag{3.23}$$

Покажем, что в представлении (3.2) это уравнение имеет вид (3.1б). Подействуем на (3.23) слева оператором, обратным (3.5) и получим

$$W^{-1}\cdot(j_c\tau_c)\Phi=W^{-1}(j_c\cdot\tau_c)WW^{-1}\Phi\equiv U^{-1}V_1^{-1}V_2^{-1}(j_c^1\tau_c+$$

$$+j_c^2\tau_c)V_2V_1U\Psi=[U^{-1}V_1^{-1}(j_c^1\tau_c)V_1U+U^{-1}V_2^{-1}(j_c^2\tau_c)V_2U]\Psi=\frac{1}{2}\Psi. \tag{3.24}$$

Но, согласно (2.41, глII) (ср. (2.2, гл. II) и (3.5))

$$U^{-1}V_1^{-1}(j_c^1\tau_c)V_1U=j_c^1\tau_c+(i\sigma_2+\sigma_1)\frac{[\tau\cdot P,\ j^1\cdot\tau]}{m}, \tag{3.25}$$

$$U^{-1}V_2^{-1}(j_c^2\cdot\tau_c)V_2U=j_c^2\tau_c+(i\sigma_2-\sigma_1)\frac{[\vec{\tau}\vec{P},\ \vec{j}^2\cdot\vec{\tau}]}{m}. \tag{3.26}$$

Знак перед σ_1 в (3.25), (3.26) соответствует знаку перед σ_1 в (3.5).

Подставляя (3.25), (3.26) в (3.24) и используя тождество

$$[\vec{\tau}\cdot\vec{P},\ \vec{j}^\alpha\cdot\vec{\tau}]\equiv i\,\vec{\tau}\times\vec{P}\cdot\vec{j}^\alpha,\quad \alpha=1,2, \tag{3.27}$$

которое следует непосредственно из (3.3в), получаем уравнение

$$\left[\vec{j}\cdot\vec{\tau}+\sigma_2\,\frac{\vec{\tau}\times\vec{p}\cdot\vec{j}}{m}+i\sigma_1\,\frac{(\vec{\tau}\times\vec{p})_a\, j_{0a}}{m}\right]\psi=\frac{1}{2}\psi,\quad \psi=\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}. \qquad (3.28)$$

Покажем, что (3.28) является эквивалентной формой записи условий (3.1б) (3.1в). В обозначениях (3.20) уравнение (3.28) принимает вид

$$\frac{1}{m}\begin{pmatrix} 0, & -i\sigma_1(\vec{\tau}\times\vec{p})_1; & -i\sigma_1(\vec{\tau}\times\vec{p})_2; & -i\sigma_1(\vec{\tau}\times\vec{p})_3\\ -i\sigma_1(\vec{\tau}\times\vec{p})_1; & 0; & m\tau_3+\sigma_2(\vec{\tau}\times\vec{p})_3; & -m\tau_2-\sigma_2(\vec{\tau}\times\vec{p})_2\\ -i\sigma_1(\vec{\tau}\times\vec{p})_2; & -m\tau_3-\sigma_3(\vec{\tau}\times\vec{p})_3; & 0; & m\tau_1+\sigma_2(\vec{\tau}\times\vec{p})_1\\ -i\sigma_1(\vec{\tau}\times\vec{p})_3; & m\tau_2+\sigma_2(\vec{\tau}\times\vec{p})_2; & -m\tau_1-\sigma_2(\vec{\tau}\times\vec{p})_1; & 0 \end{pmatrix}\psi=\frac{1}{2}\psi \qquad (3.29)$$

Производя в (3.28) умножение матриц, получаем систему уравнений

$$i\sigma_1\,\vec{\tau}\times\vec{p}\cdot\vec{\psi}=\frac{m}{2}\psi_0;\quad \vec{\psi}=(\psi_1,\psi_2,\psi_3) \qquad (3.30а)$$

$$i\sigma_1\vec{\tau}\times\vec{p}\cdot\psi_0-(m\vec{\tau}+\sigma_2\vec{\tau}\times\vec{p})\times\vec{\psi}=\frac{m}{2}\vec{\psi}. \qquad (3.30б)$$

Для упрощения системы (3.30) умножим (3.30б) векторно и скалярно на $\vec{p}$. В результате получаем два уравнения, эквивалентных (3.30б)

$$i\sigma_1\vec{p}\times(\vec{\tau}\times\vec{p})\psi_0-m\vec{p}\times(\vec{\tau}\times\vec{\psi})-\sigma_2\vec{p}\times[(\vec{\tau}\times\vec{p})\times\psi]=\frac{m}{2}\vec{p}\times\vec{\psi}; \qquad (3.31а)$$

$$i\sigma_1\vec{p}\cdot\vec{\tau}\times\vec{p}\cdot\psi_0-m\vec{p}\cdot\vec{\tau}\times\vec{\psi}-\sigma_2\vec{p}\cdot(\vec{\tau}\times\vec{p})\times\vec{\psi}=\frac{m}{2}\vec{p}\cdot\vec{\psi}. \qquad (3.31б)$$

Раскрывая в (3.31а) двойные векторные произведения по правилу

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} \qquad (3.32)$$

и используя тождество (см. (1.8, гл. II))

$$i\,\vec{\tau}\times\vec{p}=2\,(\vec{\tau}\cdot\vec{p})\,\vec{\tau}-\frac{1}{2}\vec{p}, \qquad (3.33)$$

получаем

$$[2i\sigma_2 m(\vec{\tau}\cdot\vec{p})-p^2](\vec{\tau}\cdot\vec{\psi})+(\vec{p}\cdot\vec{\tau})(\vec{p}\cdot\vec{\psi})=0 \qquad (3.34)$$

Умножая (3.34) на $4i\sigma_2(\tau p)p^{-2}$ (этот оператор обратим) и принимая во внимание тождество (см. (1.8, гл. II))

$$(\vec{\tau}\cdot\vec{p})^2 = \frac{1}{4}p^2 \tag{3.35}$$

приходим к уравнению

$$-[m + \frac{i}{4}\sigma_2(\vec{\tau}\cdot\vec{p})](\vec{\tau}\cdot\vec{\psi}) + i\sigma_2(\vec{p}\cdot\vec{\psi}) = 0, \tag{3.36}$$

которое, ввиду (3.33), может быть переписано в такой форме

$$-i\sigma_2(\vec{\tau}\cdot\vec{\psi}) + i\,\frac{\vec{\Sigma}\times\vec{p}\cdot\vec{\psi}}{m} = 0. \tag{3.37}$$

Подставляя (3.30а) в (3.37), получаем

$$-2i\sigma_2\,\vec{\tau}\cdot\vec{\psi} + \sigma_1\psi_0 = 0 \tag{3.38}$$

Уравнение (3.38) с точностью до обозначений (1.5, гл. II) совпадает с (3.1б). Что же касается уравнения (3.1в), то оно, как известно [72], является следствием (3.1а), (3.1б).

Таким образом, мы доказали, что (3.1б), (3.1в) с необходимостью следуют из (3.28). Покажем теперь, что если имеют место уравнения (3.1) то (3.28) обращается в тождество. Тем самым мы завершим доказательство эквивалентности (3.27) и (3.1б), (3.1в).

По доказанному, уравнение (3.27) может быть записано в эквивалентном виде (3.31), (3.30). Покажем, что (3.30а) – следствие (3.1а), (3.1б). Используя (3.32), перепишем (3.30а) в форме

$$-\sigma_1\cdot 2(\vec{\tau}\cdot\vec{p})(\vec{\tau}\cdot\vec{\psi}) + \frac{1}{2}\sigma_1(\vec{p}\cdot\vec{\psi}) = \frac{1}{2}\psi_0\,. \tag{3.39}$$

Но, согласно (3.1б), (3.1в), (1.5, гл. II)

$$\sigma_1(\vec{p}\cdot\vec{\psi}) = \sigma_1 H\psi_0 = \sigma_1(\sigma_1 m + 2\sigma_3\,\vec{\tau}\cdot\vec{p})\psi_0\,; \tag{3.40а}$$

$$\sigma_1(\vec{\tau}\cdot\vec{\psi}) \equiv \sigma_3(i\sigma_2\cdot\vec{\tau}\cdot\vec{\psi}) = \sigma_3\cdot\sigma_1\psi_0\,. \tag{3.40б}$$

Подстановка (3.40) в (3.39) обращает последнее уравнение в тождество.

В (3.32) – (3.38) показано, что (3.31а) заведомо выполняется, если имеют место соотношения (3.30а), (3.1б), (3.1в).

Рассмотрим теперь уравнение (3.30б). Раскрывая смешанные произведения по правилу (4.14, гл.I), а двойные векторные – согласно (3.31), преобразуем (3.30б) к следующему виду

$$-m\vec{p}\times\vec{\tau}\cdot\vec{\psi}-\sigma_2\rho^2(\vec{\tau}\cdot\vec{\psi})+\sigma_2(\vec{\tau}\cdot\vec{p})(\vec{p}\cdot\vec{\psi})=\frac{m}{2}\vec{p}\cdot\vec{\psi}. \quad (3.41)$$

Но, согласно (3.32), (3.34)

$$\vec{p}\times\vec{\tau}\cdot\vec{\psi}\equiv-\frac{i}{2}\vec{p}\cdot\vec{\psi}+2i(\vec{\tau}\cdot\vec{p})(\vec{\tau}\cdot\vec{\psi});$$

$$\vec{\tau}\cdot\vec{\psi}=-\sigma_3\psi_0;\quad \vec{p}\cdot\vec{\psi}=\{\sigma_1 m+2\sigma_3\vec{\tau}\vec{p}\}\psi_0. \quad (3.42)$$

Подстановка (3.42) в (3.41) обращает последнее уравнение в тождество. Эквивалентность представлений (3.2) и (3.6) и уравнений (3.1) и (3.7) доказана полностью.

Операторы координаты и спина для частиц, описываемых уравнением Рариты-Швингера (3.1), определим, по аналогии с (1.1), следующим образом

$$X_a=W^{-1}x_aW;\quad \hat{S}_{ab}=W^{-1}S_{ab}W. \quad (3.43)$$

Подставляя в (3.37) явный вид W из (3.5), получаем

$$X_a=W^{-1}x_aW=U^{-1}V_1^{-1}V_2^{-1}x_aV_2V_1U\equiv U^{-1}V_1^{-1}(x_a+$$

$$+[V_2^{-1},x_a]V_2)V_1U=U^{-1}V_1^{-1}x_aV_1U+U^{-1}[V_2^{-1},x_a]V_2U. \quad (3.44)$$

Явный вид всех входящих в (3.44) слагаемых фактически найден в предыдущем параграфе. Согласно (2.2), (2.6) (ср. (2.2, гл.II) и (3.5))

$$U^{-1}V_1^{-1}x_aV_1U=x_a+i\frac{H}{Em}j_a^1+\sigma_2\frac{\tau_a}{m}+\frac{E(p\times\tau)_a-i\sigma_2P_a(p\tau)}{E^2(E+m)}+\frac{iP_a(\vec{j}^1\vec{p})-E(\vec{p}\times\vec{j}^1)_a}{Em(E+m)}; \quad (3.45а)$$

$$U^{-1}[V_2^{-1},x_a]U=U^{-1}(V_2^{-1}x_aV_2-x_a)U=x_a-i\frac{H}{Em}j_a^2-\frac{iP_a(\vec{j}^2\cdot\vec{p})-E(\vec{p}\times\vec{j}^2)_a}{Em(E+m)} \quad (3.45б)$$

Подставив (3.45) в (3.44), приходим к формуле

$$X_a=x_a-\frac{H}{Em}j_{0a}+\sigma_2\frac{\tau_a}{m}+\frac{E\cdot(p\times\tau)_a-i\sigma_2P_a(\vec{p}\cdot\vec{\tau})}{E^2(E+m)}-$$

$$-\frac{P_aj_{0b}P_b-E(j_{0b}P_c-I_{0c}P_b)}{Em(E+m)},\ (a,b,c)\text{-цикл }(1,2,3) \quad (3.46)$$

Для оператора спина (3.37) получаем по аналогии с (2.9)

$$\hat{S}_{ab}=S_{ab}+(X_0-x_a)P_b-(X_b-x_b)P_a=S_{ab}-\frac{H}{Em}(j_{0a}P_b-$$

$$-j_{0b}P_a)+\sigma_2\frac{1}{m}(\tau_a P_b-\tau_b P_a)+\frac{P_c(\vec{P}\cdot\vec{\tau})-P^2\tau_c}{E(E+m)}+\frac{P_c(P_d j_{0d})-P^2 j_{0c}}{m(E+m)}. \quad (3.47)$$

Определим ещё инвариантное скалярное произведение для решений уравнений (3.1). Генераторы (3.6) эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\Phi_1,\Phi_2)=\int d^3x\,\Phi_1^+(t,\vec{x})\Phi_2(t,\vec{x}) \quad (3.48а)$$

$$\Phi=W^{-1}\Psi. \quad (3.48б)$$

Подставляя (3.48б) в (3.48а), получаем скалярное произведение для представления (3.2) в виде

$$(\Psi_1\Psi_2)=\int d^3x\,\Psi_1^+(t,\vec{x})\hat{M}\Psi_2(t,\vec{x}); \quad (3.49а)$$

$$\hat{M}=(W^{-1})^+W^{-1}. \quad (3.49б)$$

Используя определение (3.5), вычислим явный вид метрического оператора (3.49б)

$$\hat{M}=(U^{-1}V_1^{-1}V_2^{-1})^+(U^{-1}V_1^{-1}V_2^{-1})=U(V_1^{-1}V_2^{-1})^2U^{-1}=U(\exp(2\sigma_1\frac{\vec{j}_2\cdot\vec{P}-\vec{j}'\cdot\vec{P}}{P}\varkappa)\times$$

$$\times U^{-1}\exp(2i\frac{H}{E}\frac{j_{0a}P_a}{P}\varkappa)=\frac{m^2+iH2 j_{0a}P_a-2(j_{0a}P_a)^2}{m^2};\ \varkappa=\operatorname{arcth}\frac{P}{E}. \quad (3.50)$$

В обозначениях (3.20) оператор $\hat{M}$ (3.50) принимает форму

$$\hat{M}=\frac{2}{m^2}\begin{pmatrix} E^2-P^2 & -HP_1 & -HP_2 & -HP_3\\ -HP_1^2 & P_1^2+\frac{m^2}{2} & P_1P_2 & P_1P_3\\ -HP_2 & P_2P_1^2 & P_2^2+\frac{m^2}{2} & P_2P_3\\ -HP_3 & P_3P_1 & P_3P_2 & P_3^2+\frac{m^2}{2}\end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Подействовав оператором (3.51) на произвольное решение $\Psi=\begin{pmatrix}\Psi_0\\ \vec{\Psi}\end{pmatrix}$ уравнений (3.1), получаем

$$\hat{M}\Psi=\begin{pmatrix}E^2\Psi_0-2H(\vec{P}\cdot\vec{\Psi})+P^2\Psi_0\\ \vec{P}(-2H\Psi_0+2\vec{P}\cdot\vec{\Psi})+m^2\vec{\Psi}\end{pmatrix}\frac{1}{m^2}=\begin{pmatrix}-\Psi_0\\ \vec{\Psi}\end{pmatrix}=\tilde{g}\Psi;\ \tilde{g}=\begin{pmatrix}\bar{I}&0&0&0\\0&I&0&0\\0&0&I&0\\0&0&0&I\end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Подставив (3.52) в (3.49), приходим к формуле

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\, \Psi_1^+(t,\vec{x})\, g\, \Psi_2(t,\vec{x}) = \int d^3x\, (\Psi_1^+)_\mu\, \Psi_2^\mu . \qquad (3.53)$$

На множестве решений уравнений (3.1) скалярное произведение (3.53) положительно определено, несмотря на положительную неопределённость формы $(\Psi_1^+)_\mu \cdot \Psi_2^\mu$.

Таким образом, мы произвели полный теоретико-групповой анализ уравнения Рариты-Швингера. Найденные операторы координаты (3.46), и спина (3.41), а также скалярное произведение (3.50) и дополнительное условие для отбора решений соответствующих спину $\frac{3}{2}$ (3.27) могут быть использованы для объяснения (а, может быть, и устранения) тех трудностей к которым приводят уравнения Рариты-Швингера при решении задачи о движении заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле [25]. Мы ограничились случаем $S=\frac{3}{2}$, однако полученные результаты нетрудно обобщить на случай произвольного спина.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сделаем несколько замечаний относительно результатов, полученных в диссертации.

Для частиц с произвольным спином найдено два типа уравнений –(1.1, гл.I) и (3.4,гл.II).

Уравнения (3.4,гл.II)явно ковариантны и имеют одинаково простую форму при всех значениях спина. Основным достоинством этих уравнений по сравнению с общепринятыми является то, что они не приводят к известным противоречиям [25], [26] , которые, казалось бы, присущи всем явно ковариантным уравнениям для частиц со спином $s > \frac{1}{2}$.

Уравнения (3.4,гл.II) нетрудно обобщить на случай частиц с переменным спином и массой. Для этого следует рассмотреть представление вида (1.1,гл.II), где матрицы $\tau_{\mu\nu}$ –генераторы произвольного неприводимого представления $D(\tau_1,\tau_2)$ группы $O(1,3)$ в гл.II мы ограничились случаем $\tau_1 = 0$. Такое представление алгебры $P(1,3)$ имеет дополнительный инвариант $(\Sigma_{0\epsilon})^2$ с собственными значениями $\tau(\tau+1), |\tau_1-\tau_2| < \tau < \tau_1+\tau_2$. По аналогии с §§6-8 гл.I, каждому можно сопоставить состояние с определённым значением массы и спина. Исходя из (3.1,гл.II) нетрудно провести вторичное квантование уравнений полученных в главе II, если воспользоваться методом Умезавы-Такахаши [24].

Уравнения (1.1) с гамильтонианами (4.51), (4.67) из гл.I не содержат лишних компонент и в то же время не имеют тех недостатков, которые свойственны другим уравнениям такого типа. (см. стр 5). Эти уравнения год спустя после выхода нашего препринта[87] были переоткрыты Колерудом[84] Результаты, приведенные в гл.I, послужили основой работ [85], [86], в которых уравнения (1.1,гл.I),(4.51,гл.I),(4.67,гл.I) обобщены на случай, когда пространство решений может иметь индефинитную метрику.

ЛИТЕРАТУРА

1. P.A.M. Dirac. Proc. Roy. Soc. A117, 610, 1928.
2. P. Roman. Theory of Elementary Particles. North-Holland, Amsterdam, 1964.
3. J.V. Pruira. Int. Jorn. Theor. Phys. 5, 447, 1972.
4. Ю.В.Новожилов. Введение в теорию элементарных частиц. Наука, М., 1972, гл. 5.
5. Harich-Chandra. Phys. Rev. 71, 793, 1947; Proc. Roy. Soc. (London) 192A, 195, 1947.
6. И.М.Гельфанд, А.М.Яглом. ЖЭТФ 18, 703, 1948.
7. А.А.Боргардт. Алгебраические методы в теории частиц целого спина. Докторская диссертация. Минск, 1964; ДАН СССР 8, №6, 1951; ЖЭТФ 30, №2, 1956.
8. D.L. Pursey. Ann. Phys. 32, 157, 1965.
9. A. Aurilia and H. Umezawa. Phys. Rev. 182, 1682, 1969. T. Gyuk and H. Umezawa. Phys. Rev. D3, 898, 1971.
10. Ю.М.Широков. ДАН СССР 94, 857, 1954; ДАН СССР, 99, 737, 1954.
11. L.L. Foldy. Phys. Rev. 122, N1, 1961.
12. Sakata and Taketani. Proc. Math.-Phys. Soc. (Jap.) 22, 757, 194
13. T.F. Jordan and N. Mukunda. Phys. Rev. 132, 1842, 1963.
14. D.L. Weaver, C.L. Hammer and R.H. Good. Phys. Rev. 135, B18, 196
15. T.J. Nelson, R.H. Good. Rev. Mod. Phys. 40, 508, 1968.
16. D.L. Weaver. Nuov. Cim. 53, N3, 1968.
17. P.M. Mathews. Phys. Rev. 143, 978, 1966. Seetharaman, J. Jayaraman and P.M. Mathews. Jorn. Math. Phys.
18. P.M. Mathews and S. Ramankrishnan. Nuov. Cim. 50, N2, 1967.
19. P.M. Mathews. Phys. Rev. 155, 1415, 1967.
20. P.M. Mathews. Phys. Rev. 143, 985, 1966.
21. C.R. Hagen. U.R-378, preprint, Rochester University, 1973.
22. J.S. Dowker. Proc. Roy. Soc. A293, 351, 1967; Proc. Phys.

Soc. 89, 353, 1966.

23. S. Tani. Phys. Rev. D2, 980, 1970.

24. Y. Takahashi. An Introduction to Field Quantization. Pergamon Press, 1969, ch. III.

25. G. Velo and D. Zwanziger. Phys. Rev. 188, N5, 1969; 186, 1218, 1969.

26. W. Tsai and A. Yildis. Phys. Rev. D4, 3643, 1971; F. Goldman and W. Tsai. Phys. Rev. D4, 3648, 1971; W. Tsai. Phys. Rev. D4, 3652, 1971.

27. W. Tsai. Phys. Rev. D7, 1945, 1971.

28. G. Velo. Nucl. Phys. B43, 389, 1972.

29. B. Schroer, R. Seiler and J. A. Swieca. Phys. Rev. D2, N12, 197[illegible]

30. K. Jonson and E. C. G. Sudarshan. Ann. Phys. 13, 126, 1961.

31. C. R. Hagen. Phys. Rev. D4, 2204, 1971.

32. H. L. Baisya. Nucl. Phys. B23, 633, 1970.

33. H. Joos. Fortschr. Phys. 10, 65, 1962.

34. S. Weinberg. Phys. Rev. 133, 5B, 1964.

35. L. Minger. Phys. Rev. 130, 80, 1963. P. Federbush. Nuov. Cim. 19, 572, 1961.

36. L. M. Nath, B. Etemadi and J. D. Kimel. Phys. Rev. D3, N9, 1971.

37. L. P. S. Singh and R. H. Hagen. Preprints UR-455; UR-464, Rochester University, 1973.

38. A. K. Nagpal. Lett. Nuov. Cim. 8, 353, 1973.
И.Б.Хриплович. Ядерная физика, 16, 823, 1972.

39. H. Fesbach and F. Villars. Revs. Mod. Phys. 30, 24, 1958.

40.

41. Ю.А.Яппа. ДАН СССР 94, 817, 1954.

42. E. Schrödinger. Proc. Roy. Soc. A232, 435, 1955.

43. K. M. Case. Phys. Rev. 99, 1572, 1955.

44. D. Shay. Nuov. Cim. 57A, N2, 1968.

45. S. A. Williams, J. P. Driver and T. A. Weber. Phys. Rev. 152, N4, 1966

46. M. Seetharaman, M. T. Simon and P. M. Mathews. Nuov. Cim. 12A, 788, 1972.

47. А.Г.Никитин. Релятивистская теория частиц с произвольным спином. Дипломная работа, КГУ, 1969.

48. А.Л.Грищенко. Пуанкаре-инвариантные уравнения движения в релятивистской квантовой механике. Кандидатская диссертация, Киев, 1972

49. J. S. Lomont. Phys. Rev. 111, 1710, 1958.
H. E. Moses. Nuovo Cim. Suppl. 7, 1, 1958.

50. В. И. Фущич. ТМФ 9, 91, 1971; V. I. Fushchich and A. L. Grishchenko. Nuov. Cim. Lett. 4, 927, 1970; V. I. Fushchich and A. L. Grishchenko. Preprint ITP-70-29, Kiev, 1970.

51. V. I. Fushchich. Nucl. Phys. B21, 321, 1970.

52. M. T. Simon. Nuov. Cim. Lett. 2, 616, 1971.

53. T. J. Nelson and R. H. Good. Phys. Rev. 179, 1445, 1969; C. M. Bender and B. M. McCoy. Phys. Rev. 148, 1375, 1966; R. Shaw. Nuovo Cim. 37, 1086, 1965.

54. T. S. Santhanam and A. R. Tekumalla. Nuov. Cim. Lett. 3, 190, 1972.

55. A. R. Tekumalla and T. S. Santhanam. Nuov. Cim. Lett. 6, 99, 1973.

56. T. S. Lomont and H. E. Moses. Phys. Rev. 118, 337, 1960.

57. A. D. Bryden. Nucl. Phys. 53, 165, 1964; Nuov. Cim. 38, 1420, 1965; D. L. Pursey. Nucl. Phys. 53, 174, 1964.

58. E. Majorana. Nuovo Cim. 9, 335, 1932.

59. В.Л.Гинзбург и И.Е.Тамм. ЖЭТФ 17, 273, 1947.

60. Д.И.Блохинцев. ЖЭТФ 17, 545, 1947.

61. Ю.М.Широков. ЖЭТФ 21, 748, 1951.

62. В.И.Фущич. ТМФ 4, 360, 1970. V. I. Fushchich and I. Yu. Krivsky. Nucl. Phys. B7, 79, 1968; B14, 754, 1969.

63. И.М.Гельфанд, Р.А.Минлос и З.Я.Шапиро. Представления группы вращений и группы Лоренца. Ф - М., М., 1958.
64. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лившиц, А.П.Питаевский. Релятивистская квантовая теория, ч.I, Наука, М., 1968, стр. 145.
65. С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. И. - Л. М., 1963, стр. 54.
66. Там же, стр. 114.
67. Там же, стр. 34.
68. Там же, стр. 107.
69. Там же, стр. 74.
70. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Наука, М., 1973.
71. С.Газиорович. Физика элементарных частиц. Наука, м., 1969.
72. Х.Умэдзава. Квантовая теория поля. И.- Л., М., 1958.
73. А.И.Ахиезер и В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика. Наука, М., 1969, §1.
74. Л.Д.Ландау, Е.М.Лившиц. Квантовая механика. Наука, М., 1963, §111.
75. См., например,[73], стр. 174.
76. См. [73], стр. 143.
77. См. [65], стр. 106.
78. L.L. Foldy and S.A. Wouthuysen. Phys. Rev. 78, 29, 1971.
79. Ю.М.Широков. ЖЭТФ 33, 861, 1957, 33, 1196, 1957, 33, 1208, 1957, 34, 717, 1958, 36, 879, 1959.
80. E. de Vries. Fortsr. Phys. 18, 149, 1970.
81.
82. L.M. Carrido and L. Oliver. Nuovo Cim. 52A, N2, 1967.
83. K.R. James. Pros. Phys. Soc. 3, 334, 1968.
84. M. Kolsrud. Physica Norvegica 5, 169, 1971.
85. R.F. Guertin. Relativistic Hamiltonian Equations for any Spin. Preprint, Rice University, Houston,

Texac, 1974

86. R. F. Guertin.

87. В.И.Фущич, А.Л.Грищенко, А.Г.Никитин. ТМФ 8, 192, 1971. Preprint ИТФ -70-89Е, Киев, 1970.

88. А.Г.Никитин. УФЖ 18, 1605, 1973.

89. V. I. Fushchich and A. G. Nikitin. Nuov. Cim. Lett. 7, 439, 1973.

90. V. I. Fushchich, A. G. Nikitin. The Non-Lagrangian Equations for Particles with Variable Spin and Mass. Preprint ITP-121E, Kiev, 1973.

91. А.Г.Никитин. УФЖ 19, №6, 1702, 1974.

92. А.Г.Никитин и А.Г.Грищенко. УФЖ 19, №10, , 1974.