Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

ПАНЧАК Олена Антонівна

УДК 517.9

РЕДУКЦІЯ ТА ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНИХ КОМПЛЕКСНИХ ХВИЛЬОВИХ РІВНЯНЬ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Науковий керівник
ЖДАНОВ
Ренат Зуфарович
доктор фіз.–мат. наук

Київ – 1998

Зміст

Вступ

Актуальність теми. Однією з центральних проблем сучасного теоретико-групового аналізу диференціальних рівнянь є розробка ефективних алгоритмів побудови широких класів точних розв'язків нелінійних багатовимірних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Оскільки переважна більшість диференціальних рівнянь, які зустрічаються в застосуваннях, мають нетривіальну симетрію, то базовим принципом при розробці таких алгоритмів є застосування ідеї редукції, тобто зведення досліджуваного диференціального рівняння з частинними похідними до диференціального рівняння з меншою кількістю незалежних змінних. Найбільш широко вживаним є метод симетрійної редукції [19, 21], який запропонував Софус Лі наприкінці минулого сторіччя (див., наприклад [82, 83]).

Основною ідеєю цього методу є редукція досліджуваного диференціального рівняння з частинними похідними до диференціальних рівнянь з частинними похідними від двох або однієї незалежних змінних за допомогою спеціальних підстановок (анзаців, інваріантних розв'язків). При заданій групі симетрій процедура побудови повної (в деякому сенсі) множини нееквівалентних анзаців зводиться до інтегрування інволютивних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку.

Сучасне викладення теорії Лі та її застосувань для дослідження диференціальних рівнянь подано в монографіях [14, 15, 19, 20, 21, 37, 45, 61].

Клас інваріантних розв'язків є досить широким. В багатьох випадках інваріантні розв'язки є єдиними відомими розв'язками даного рівняння, які побудовані в явному вигляді. В останні два десятиріччя інваріантні розв'язки були предметом багатьох досліджень [12, 15, 19, 21, 30, 61, 77, 78].

Можливість широкого застосування методу симетрійної редукції з'явилась після виконання класифікації основних неперервних груп сучасної математичної фізики, груп Пуанкаре і Галілея, та їх розширень і різних узагальнень в роботах Дж.Патери, П.Вінтернітца, Г.Цассенхауза, В.І.Фущича та його учнів [30, 86, 87, 88, 89, 90].

В.І. Фущич [27, 28] запропонував проводити редукцію нелінійних диференціальних рівнянь за допомогою лінійних анзаців. В рамках цього підходу вдалось побудувати багатопараметричні розв'язки рівнянь Шредінгера [6, 12, 38, 41, 51, 52, 73], теплопровідності [46, 48, 79, 98], Гамільтона-Якобі [1, 34, 39, 61, 60, 74], Нав'є-Стокса [16, 59, 91], Борна-Інфільда [56, 61] , Даламбера [2, 4, 5, 49, 60, 61, 63, 74, 104], Ліувілля [3, 49, 60, 61, 74], Буссінеска [61, 40, 50], Дірака [33, 61, 69], Янга-Міллса [102] та ін..

Проте, незважаючи на важливість цих результатів, вони, фактично, не можуть бути застосовані для розв'язання якихось загальних задач з початково-граничними умовами, оскільки відповідні інваріантні розв'язки, як правило, не містять довільних функцій. Єдиний випадок, для якого групові методи дозволяють одержувати розв'язки з функціональною довільністю, – це випадок диференціального рівняння з нескінченнопараметричною групою симетрій (див. [19, 21]).

На початку 90-х років стала очевидною обмеженість класичного підходу Лі, оскільки існували приклади редукцій диференціальних рівнянь, які не можна було одержати в рамках цього підходу. Крім того, методи теорії Лі не є досить ефективними для дослідження диференціальних рівнянь з невисокою симетрією. Ці та ряд інших проблем стимулювали пошук узагальнених підходів до побудови точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь.

Саме це стало поштовхом для дослідження некласичної або умовної симетрії багатовимірних диференціальних рівнянь з частинними похідними з метою отримання точних розв'язків, що містять довільні функції. Незважаючи на те, що некласичні (умовні) симетрії диференціальних рівнянь запроваджені досить давно [44, 53, 62, 66, 81, 84], задача побудови умовної симетрії багатовимірних нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними все ще залишається відкритою. Причина цього є досить очевидною, оскільки знаходження умовної симетрії диференціальних рівнянь в частинних похідних для функції u від n змінних вимагає розв'язання $n+1$-вимірної перевизначеної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними. Саме тому можливість одержання нетривіального результату при дослідженні умовної симетрії багатовимірних ($n > 2$) диференціальних рівнянь з частинними похідними в значній мірі залежить від існування ефективних методів для розв'язання (n+1)-вимірних ($n > 2$) перевизначених систем диференціальних рівнянь з частинними похідними.

В роботах [32, 66, 67, 68, 101] розроблена процедура інтегрування деяких чотиривимірних перевизначених пуанкаре-інваріантних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними. З використанням цих результатів побудовано широкі класи анзаців, що відповідають умовній симетрії нелінійного хвильового рівняння, та рівнянь Дірака і Янга-Міллса [69]. Основна ідея підходу, який застосовується в дисертаційній роботі, досить проста і базується на такому факті. Як виявляється, більшість інваріантних розв'язків (тобто розв'язків, отриманих за допомогою методу симетрійної редукції) вищезгаданих рівнянь є частинними випадками більш загальних розв'язків, які відповідають умовній симетрії досліджуваних рівнянь і можуть бути побудовані в явному виді. Ця ідея є ядром методу неліївської редукції дифференціальних рівнянь, розробленому в монографії [69]:

1) за допомогою методу Лі знаходимо максимальну (в сенсі Лі) групу інваріантності досліджуваного рівняння;

2) здійснюємо підгруповий аналіз інваріантних груп. Кожна підгрупа

приводить до деякого анзацу, що редукує досліджуване диференціальне рівняння з частинними похідними до рівняння з меншою вимірністю. Як правило, отриманий таким чином анзац має цілком визначену структуру, що визначається зображенням групи симетрій;

3) одержуємо загальний вигляд інваріантного анзацу. Цей анзац містить декілька скалярних функцій $\theta_1, \ldots, \theta_N$, що задовольняють деяку сумісну перевизначену систему нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними;

4) інтегруємо рівняння для $\theta_1, \ldots, \theta_N$.

Таким чином, узагальнено відомі інстантонні і меронні розв'язки нелінійних рівнянь Дірака, одержаних за допомогою анзаца Гайзенберга [76, 80]. А саме, побудувано класи точних розв'язків, які містять по три довільні функції, такі, що вибираючи їх рівними нулеві, одержимо вищезгадані розв'язки. Більше того, побудовано узагальнені інваріантні розв'язки хвильового рівняння з кубічною нелінійністю, що призводять до інстантонних та меронних розв'язків рівнянь Янга-Мілса, які були одержані за допомогою анзацу Тхуфта-Коррігана-Фееролі-Вілчека [24].

Роботи [70, 71, 104] обмежувались дослідженням некласичних редукцій диференціальних рівнянь з частинними похідними, або до звичайних диференціальних рівнянь, або до диференціальних рівнянь з двома незалежними змінними, одна з яких параметрична. Під параметричною змінною мається на увазі те, що відповідне рівняння не містить похідних відносно цієї змінної, хоча коефіцієнти рівняння можуть залежати від неї. Будь-який розв'язок такого редукованого рівняння, що містить довільні параметри (скажімо, константи інтегрування), автоматично буде залежати від довільних функцій. З урахуванням існуючого прогресу в інтегруванні двовимірних, або навіть тривимірних диференціальних рівнянь з частинними похідними за допомогою оберненої задачі розсіювання, було б дуже цікаво використати цей підхід для неліївської редукції рівнянь гіперболічного типу до диференціальних рівнянь від двох незалежних змінних з третьою параметричною змінною. Це може відкрити можливість застосування результатів теорії солітонів для одержання нових точних розв'язків, що містять довільні функції.

Мета і задачі дослідження. Метою даної роботи є застосування лі-ївського методу симетрійної редукції та методу умовних симетрій для знаходження класів точних розв'язків з довільними функціями нелінійних диференціальних рівнянь гіперболічного типу, що узагальнюють класичне дійсне та комплексне рівняння Даламбера в просторі чотирьох незалежних змінних.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота проводилась згідно з загальним планом досліджень відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України.

Дисертацію присвячено редукції та побудові точних розв'язків нелінійних комплексних диференціальних рівнянь гіперболічного типу з чотирма незалежними змінними, які узагальнюють класичні рівняння Даламбера та Клейна-Гордона. При цьому використовується метод, який є синтезом класичного ліївського підходу та методу умовних симетрій. Цей метод, зокрема, дозволяє будувати сім'ї точних розв'язків досліджуваних рівнянь, які включають декілька довільних функцій і, в принципі, не можуть бути одержані, якщо використовувати метод Лі в його класичній формі.

Дисертація складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

Розділ 1 містить результати симетрійної редукції нелінійних комплексних хвильових рівнянь, інваріантних відносно групи Пуанкаре $P(1,3)\oplus Q(1)$ та розширеної групи Пуанкаре $\widetilde{P}(1,3) \oplus Q(1)$, до звичайних диференціальних рівнянь.

В параграфі 1.1 досліджується багатовимірне комплексне нелінійне хвильове рівняння

$$\Box u = F(|u|)u, \tag{0.1}$$

де $\Box = \partial^2/\partial x_0^2 - \Delta$ – це оператор Даламбера, $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ – комплексна двічі неперервно-диференційовна функція, $F(|u|)$ – деяка неперервна функція. Виконано симетрійну редукцію цього рівняння за трипараметричними групами $P(1,3) \oplus Q(1)$, які неспряжені підгрупам групи Пуанкаре. Повний перелік відповідних тривимірних підалгебр містить 36 підалгебр: M_1–M_{36}. Зокрема, підалгери M_2, M_{13}, M_{17} мають такий вигляд:

$$M_2 = \langle P_0 + \gamma Q, P_1 + \sigma Q, P_2 + \tau Q \rangle,\ \sigma > 0, \gamma, \tau \in \mathbf{R} \text{ або } \sigma = 0, \gamma \neq 0;$$
$$M_{13} = \langle G_1 + \varepsilon Q, M, P_1 + \beta P_2 + \gamma Q \rangle,\ \varepsilon = 1, \gamma \in \mathbf{R} \text{ або } \varepsilon = 0, \gamma \neq 0;$$
$$M_{17} = \langle J_{12} + \gamma Q, J_{03} + \sigma Q, M \rangle, \quad \gamma > 0, \sigma \in \mathbf{R} \text{ або } \gamma = 0, \sigma > 0,$$

де $G_a = J_{0a} - J_{a3}$ $(a = 1, 2)$, $M = P_0 + P_3$, $T = \frac{1}{2}(P_0 - P_3)$, $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu$ – дійсні сталі, при цьому $\alpha, \beta > 0$. Встановлено, що загальний вигляд анзацу для функції $u = u(x)$, інваріантного відносно однієї із алгебр M_1 – M_{36}, є таким:

$$u(x) = \exp\{ia(x)\}\varphi(\omega(x)). \tag{0.2}$$

Явний вигляд дійсних функцій $a(x)$, $\omega(x)$ визначається однією з відповідних 36 формул. Так, наприклад, для підалгебр M_2, M_{13}, M_{17} функції $a(x)$, $\omega(x)$ мають вигляд:

$$(2)\ a(x) = \gamma x_0 - \sigma x_1 - \tau x_2, \quad \omega(x) = x_3;$$

$$(13)\ a(x) = \frac{\varepsilon(\beta x_1 - x_2)}{\beta(x_0 + x_3)} - \frac{\gamma x_2}{\beta}, \quad \omega(x) = x_0 + x_3;$$

$$(17)\ a(x) = \gamma \arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \sigma \ln(x_0 + x_3), \quad \omega(x) = x_1^2 + x_2^2.$$

Підставляючи знайдені анзаци для алгебр M_1 – M_{36} в рівняння (0.1), одержуємо набір редукованих звичайних диферецiальних рівнянь для знаходження $\varphi = \varphi(\omega)$ (ми наводимо рівняння, які відповідають алгебрам M_2, M_{13}, M_{17}):

$$(2) - \ddot{\varphi} + (\sigma^2 + \tau^2 - \gamma^2)\varphi = F(|\varphi|)\varphi,\ \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{d\omega^2};$$

$$(13)\ \left(\frac{\beta^2\varepsilon^2+1}{\beta^2\omega^2}+\frac{2\gamma}{\beta^2\omega}+\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)\varphi=F(|\varphi|)\varphi; \tag{0.3}$$

$$(17) -4\omega\ddot{\varphi}-4\dot{\varphi}+\frac{\gamma^2}{\omega}\varphi=F(|\varphi|)\varphi,\ \dot{\varphi}=\frac{d\varphi}{d\omega}.$$

Більшість редукованих рівнянь є звичайними диференціальними рівняннями другого порядку (наприклад, 2, 17 з (0.3)). Однак, для ряду випадків отримано диференціальні рівняння першого порядку і, навіть, суто алгебраїчні рівняння (наприклад, 13 з (0.3)). Таким чином, з використанням симетрійних властивостей нелінійного хвильового рівняння (0.1), ми звели задачу знаходження його частинних розв'язків до істотно легшої проблеми – інтегрування нелінійних звичайних диференціальних й, навіть, алгебраїчних рівнянь.

В параграфі 1.2 проведено симетрійну редукцію нелінійного хвильового рівняння

$$\Box u=\lambda|u|^k u,\ k\neq 0 \tag{0.4}$$

за трипараметричними підгрупами групи $\widetilde{P}(1,3)\oplus Q(1)$, які 1) неспряжені підгрупам розширеної групи Пуанкаре, 2) неспряжені підгрупам групи $P(1,3)\oplus Q(1)$. Повний перелік відповідних тривимірних підалгебр містить 24 підалгебри: $\widetilde{F}_1$–$\widetilde{F}_{24}$. Зокрема, підалгери $\widetilde{F}_8$, $\widetilde{F}_{19}$ мають такий вигляд:

$$\widetilde{F}_8=\langle J_{03}+D+2T+\gamma Q, P_1, P_2\rangle,\quad \gamma\neq 0;$$

$$\widetilde{F}_{19}=\langle J_{03}+\gamma Q, J_{12}+\mu Q, D+\upsilon Q\rangle,\ \gamma,\mu,\upsilon\in\mathbf{R}, |\gamma|+|\mu|+|\upsilon|\neq 0,$$

де $G_a=J_{0a}-J_{a3}$ $(a=1,2)$, $T=\dfrac{1}{2}(P_0-P_3)$, $\alpha,\beta,\gamma,\mu,\nu$ – дійсні сталі, при цьому $\alpha,\beta>0$. Загальна структура анзацу для функції $u=u(x)$, інваріантного відносно однієї із алгебр $\widetilde{F}_1$ – $\widetilde{F}_{24}$, є такою:

$$u(x)=\exp\{a(x)\}\varphi(\omega(x)).$$

Явний вигляд дійсних функцій $a(x)$, $\omega(x)$ визначається однією з відповідних 24 формул. Так, наприклад, для підалгебр $\widetilde{F}_8$, $\widetilde{F}_{19}$ функції $a(x)$, $\omega(x)$ мають вигляд:

$$(8)\ a(x) = (l + i\gamma)\ln(x_0 + x_3 + 1), \quad \omega(x) = x_0 - x_3;$$

$$(19)\ a(x) = \frac{l - i\gamma + iv}{2}\ln(x_0^2 - x_3^2) + i\mu\arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} +$$
$$+ i\gamma\ln(x_0 + x_3), \quad \omega(x) = \frac{x_0^2 - x_3^2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Підставляючи знайдені анзаци для алгебр $\widetilde{F}_1$ – $\widetilde{F}_{24}$ в рівняння (0.4), одержуємо набір редукованих звичайних диференціальних рівнянь для знаходження $\varphi = \varphi(\omega)$ (ми наводимо рівняння, які відповідають алгебрам $\widetilde{F}_8$, $\widetilde{F}_{19}$)

$$(8)\ (l + i\gamma)\dot{\varphi} = \lambda|\varphi|^k\varphi;$$

$$(19)\ 4(\omega^2 - \omega^3)\ddot{\varphi} + 4[3\omega^2 + \omega(1 + l + 2i\gamma - iv)]\dot{\varphi} - \tag{0.5}$$
$$-[4\omega(i\mu)^2 + 2i\gamma(l + i\gamma - iv)]\varphi = \lambda|\varphi|^k\varphi.$$

Переважна більшість одержаних звичайних диференціальних рівнянь є нелінійними рівняннями другого порядку із змінними коефіцієнтами (наприклад, 19 з (0.5)), які не вдається проінтегрувати відомими нам методами. У тих випадках, коли редуковані рівняння є звичайними диференціальними рівняннями першого порядку (наприклад, 8 з (0.5)) або алгебраїчними рівняннями, побудовано їх загальні розв'язки.

Таким чином, одержано повний розв'язок задачі симетрійної редукції нелінійного комплексного хвильового рівняння до звичайних диференціальних рівнянь.

Це дало змогу в параграфі 1.3 побудувати багатопараметричні сім'ї нових інваріантних розв'язків нелінійних хвильових рівнянь вигляду

$$\Box u = (\lambda_1 + \lambda_2|u|^k)u.$$

Шляхом інтегруваня отриманих редукованих рівнянь побудовано 43 відповідні інваріантні розв'язки вихідного рівняння (0.1). Згідно з структурою та методами розв'язання редуковані рівняння можна розбити на три основні групи. Зокрема, до першої групи належить рівняння – 2 з (0.3), до другої – 17 з (0.3) та до третьої – 13 з (0.3). Наведемо інваріанті розв'язки рівняння (0.1) (які подаємо в залежності від степеня нелінійності k), що отримані в результаті інтегрування редукованих рівняннь 2, 17 та 13 з (0.3). У всіх формулах, які наведено нижче, C_1, C_2, C_3, C_4 – довільні дійсні константи.

k – довільне дійсне число, $k \neq -2$

$$u_1(x) = \exp\{i(\gamma x_0 - \sigma x_1 - \tau x_2)\}\varphi(x_3),$$

де φ задається формулою

$$\varphi(\omega) = \rho(\omega) \exp\left\{ iC_1 \int^{\omega} \rho^{-2}(z)dz + iC_2 \right\}, \tag{0.6}$$

а ρ визначається з наступної формули:

$$\int^{\rho(\omega)} \left[(\sigma^2 + \tau^2 - \gamma^2 - \lambda_1)z^2 - \frac{2\lambda_2}{k+2} z^{k+2} - C_1^2 z^{-2} + C_3 \right]^{-\frac{1}{2}} dz = \omega + C_4;$$

$k = -2$

$$u_2(x) = \exp\{i(\gamma x_0 - \sigma x_1 - \tau x_2)\}\varphi(x_3),$$

де φ описується формулою (0.6), а $\rho(x_3)$ знаходиться таким чином:

$$\int^{\rho(\omega)} [(\sigma^2 + \tau^2 - \gamma^2 - \lambda_1)z^2 - 2\lambda_2 \ln z - C_1^2 z^{-2} + C_3]^{-\frac{1}{2}} dz = \omega + C_4;$$

k – довільне дійсне число

$$u_3(x) = \left[\frac{(k^2\gamma^2 - 4)}{\lambda k^2} \right]^{\frac{1}{k}} (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{k}} \exp\left\{ i\gamma \arcsin \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - iC_1 \right\};$$

k –довільне дійсне число

$$u_4(x) = \lambda_2^{-\frac{1}{k}} \exp\left\{ i\frac{\varepsilon(\beta x_1 - x_2)}{\beta(x_0+x_3)} - i\frac{\gamma x_2}{\beta} + i\Phi(x_0+x_3) \right\} \times$$
$$\times \left(\frac{\beta^2\varepsilon^2+1}{\beta^2(x_0+x_3)^2} + \frac{2\gamma}{\beta^2(x_0+x_3)} + \frac{\gamma^2}{\beta^2} - \lambda_1 \right)^{\frac{1}{k}}.$$

У параграфі 1.4 досліджується симетрія хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами $a_\mu(x)$, а саме:

$$\Box u + a_\mu(x)\frac{\partial u}{\partial x_\mu} = F(u), \qquad \mu = \overline{0,3}. \tag{0.7}$$

Проведена симетрійна класифікація рівняння (0.7) в залежності від функції $F(u)$ та показано, що рівняння (0.7) при $F(u) = 0$ є конформно-інваріантним. Зауважимо, що ні при яких фіксованих $a_\mu(x)$ це рівняння не є конформно-інваріантним.

Параграф 1.5 містить результати симетрійної класифікації рівняння типу Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

з додатковою умовою, яка має такий вигляд:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + f^1(u)\frac{\partial \psi}{\partial x} + f^2(u)\psi = 0.$$

Другий розділ дисертації є основним, він присвячений неліївській редукції та побудові точних розв'язків нелінійних хвильових рівнянь, інваріантних відносно груп $P(1,3)$, $\widetilde{P}(1,3)$.

В параграфі 2.1 розглядається багатовимірне нелінійне рівняння Даламбера

$$\Box u = F(u), \tag{0.8}$$

де $\Box = \partial^2/\partial x_0^2 - \Delta$ – оператор Даламбера, $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ – дійсна двічі неперервно-диференційовна функція, $F(u)$ – деяка неперервна функція. Використовуючи підхід до дослідження умовної симетрії рівняння (0.8), вперше запропонований Р.З. Ждановим та В.І. Фущичем і реалізований у повному обсязі в роботах В.І. Фущича, Р.З. Жданова, І.В. Ревенка, будуємо сім'ю умовно-інваріантних анзаців для функції $u = u(x)$.

Розв'язки рівняння (0.8) шукаємо у вигляді

$$u = \varphi(\omega_0, \omega_1, \omega_2), \tag{0.9}$$

де $\omega_\mu = \omega_\mu(x)$, $\mu = 0, 1, 2,$ – достатньо гладкі функції, які підбираються так, щоб підстановка (0.9) в (0.8) призводила до рівняння з коефіцієнтами, залежними тільки від "нових" змінних ω_0, ω_1, ω_2. Крім того, вимагаємо, щоб коефіцієнти при похідних за змінною ω_0 дорівнювали нулеві.

В результаті приходимо до перевизначеної системи дев'яти нелінійних диференціальних рівнянь для знаходження трьох невідомих функцій $\omega_0(x)$, $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$:

$$\begin{gathered}
\Box\omega_0 = 0, \qquad \omega_{0x_\mu}\omega_{0x^\mu} = 0, \\
\omega_{0x_\mu}\omega_{1x^\mu} = 0, \qquad \omega_{0x_\mu}\omega_{2x^\mu} = 0, \\
\begin{cases}
\omega_{1x_\mu}\omega_{1x^\mu} = F_1(\omega_0, \omega_1, \omega_2), \\
\omega_{1x_\mu}\omega_{2x^\mu} = F_2(\omega_0, \omega_1, \omega_2), \\
\omega_{2x_\mu}\omega_{2x^\mu} = F_3(\omega_0, \omega_1, \omega_2),
\end{cases} \\
\Box\omega_1 = G_1(\omega_0, \omega_1, \omega_2), \qquad \Box\omega_2 = G_2(\omega_0, \omega_1, \omega_2).
\end{gathered} \tag{0.10}$$

Тут і далі за індексами, що повторюються, передбачено сумування. Підняття та опускання індексу здійснюється за допомогою метричного тензора простору Мінковського $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$.

Зауважимо, що клас рівнянь (0.10) є інваріантним відносно довільного невиродженого перетворення залежних змінних

$$\omega_0{}' = \Omega_0(\omega_0), \qquad \omega_i{}' = \Omega_i(\omega_0, \omega_1, \omega_2), \quad i = 1, 2. \tag{0.11}$$

Справедливі такі твердження.

Теорема 2.1.1. *Система диференціальних рівнянь з частинними похідними (0.10) сумісна тоді і тільки тоді, коли з використанням перетворення (0.11) її праві частини можна звести до вигляду:*

$$\begin{aligned} &1. \quad F_1 = F_3 = -1, \quad F_2 = 0, \quad G_1 = G_2 = 0. \\ &2. \quad F_1 = F_3 = -1, \quad F_2 = 0, \quad G_1 = -2\omega_1^{-1}, \quad G_2 = 0. \end{aligned} \tag{0.12}$$

Теорема 2.1.2. *Загальний розв'язок системи (0.10), який визначається з точністю до відношення еквівалентності (0.11), за умови, що виконуються рівності (0.12), задається такими формулами:*

1. $\omega_0 = \theta_\mu x^\mu, \quad \omega_1 = b_\mu x^\mu, \quad \omega_2 = c_\mu x^\mu.$

2. $\omega_0 = \omega_0(x)$ *задано неявно* $A_\mu(\omega_0)x^\mu + B(\omega_0) = 0,$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \left(-\dot{A}_\mu(\omega_0)\dot{A}^\mu(\omega_0)\right)^{-1/2} \left(\dot{A}_\nu(\omega_0)x^\nu + \dot{B}(\omega_0)\right), \\ \omega_2 &= \left(-\dot{A}_\mu(\omega_0)\dot{A}^\mu(\omega_0)\right)^{-3/2} \left(\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A^\mu(\omega_0)\dot{A}^\nu(\omega_0)\ddot{A}^\alpha(\omega_0)x^\beta\right), \end{aligned}$$

де $A_\mu(\omega_0)$, $B(\omega_0)$ *– довільні функції, зв'язані співвідношенням*

$$A_\mu(\omega_0)A^\mu(\omega_0) = 0.$$

Тут θ_μ, b_μ, c_μ *– довільні дійсні сталі, які задовольняють умови*

$$\theta_\mu\theta^\mu = \theta_\mu b^\mu = \theta_\mu c^\mu = 0, \qquad b_\mu c^\mu = 0, \qquad b_\mu b^\mu = c_\mu c^\mu = -1,$$

крапка над символом означає похідну за ω_0, *символом* $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ *позначено антисиметричний тензор четвертого порядку, тобто*

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & (\mu,\nu,\alpha,\beta) = \text{цикл}\,(0,1,2,3), \\ -1, & (\mu,\nu,\alpha,\beta) = \text{цикл}\,(1,0,2,3), \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Таким чином, одержано вичерпний опис анзаців (0.9), що редукують досліджуване багатовимірне рівняння до диференціального рівняння з трьома незалежними змінними, одна з яких відіграє роль параметра.

Тобто, фактично, має місце редукція до двовимірних диференціальних рівнянь з частинними похідними. В результаті побудовано два класи анзаців для нелінійного хвильового рівняння, один з яких

$$u(x) = \varphi\left(\omega_0,\ \frac{\dot{A}_\mu x^\mu + \dot{B}}{\left(-\dot{A}_\nu \dot{A}^\nu\right)^{1/2}},\ \frac{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A^\mu \dot{A}^\nu \ddot{A}^\alpha x^\beta}{\left(-\dot{A}_\nu \dot{A}^\nu\right)^{3/2}}\right)$$

відповідає його умовній симетрії.

В цьому ж параграфі, використовуючи умовну симетрію рівняння (0.8), ми отримали такий клас точних розв'язків рівняння Даламбера:

$$u(x) = \frac{(-\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu)^{1/2}}{\dot{A}_\nu x^\nu + \dot{B}}\left[U\left(\omega_0, \frac{\dot{A}_\nu x^\nu + B}{(-\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu)^{1/2}} + i\frac{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A^\mu \dot{A}^\nu \ddot{A}^\alpha x^\beta}{(-\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu)^{3/2}}\right) + \right.$$

$$\left. + U\left(\omega_0, \frac{\dot{A}_\nu x^\nu + \dot{B}}{(-\dot{A}_\mu A^\mu)^{1/2}} - i\frac{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A^\mu \dot{A}^\nu \ddot{A}^\alpha x^\beta}{(-\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu)^{3/2}}\right)\right],$$

де U – довільна аналітична функція відносно змінної $z = \omega_1 + i\omega_2$. Також знайшли нові точні розв'язки нелінійного рівняння Даламбера із степеневою нелінійністю

$$\Box u = \lambda u^k,\ k \neq 0, 1,$$

один з яких ми наводимо нижче ($k = 3$):

$$u(x) = \left[-\frac{(\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A^\mu \dot{A}^\nu \ddot{A}^\alpha x^\beta)^2}{(\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu)^3} - \frac{(\dot{A}_\nu x^\nu + \dot{B})^2}{\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu}\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\varphi\left(\omega_0, \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{(\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A^\mu \dot{A}^\nu \ddot{A}^\alpha x^\beta)^2}{(\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu)^3} - \frac{(\dot{A}_\nu x^\nu + \dot{B})^2}{\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu}\right)\right). \tag{0.13}$$

Тут $\varphi(\omega_0, y)$ задається такою квадратурою:

$$\int^{\varphi(\omega_0,y)} \left(-\frac{\lambda}{2}t^4 + t^2 + f(\omega_0)\right)^{-\frac{1}{2}} dt = y + g(\omega_0),\ f, g \in C^2(\mathbf{R^1}, \mathbf{R^1}).$$

Зауважимо, що при $f = g = 0$ та при умові, що довільні функції фіксовані, а саме, $A_0(\omega_0) = 1$, $A_1(\omega_0) = \omega_0$, $A_2(\omega_0) = \sqrt{1-\omega_0^2}$, $A_3(\omega_0) = 0$, формула (0.13) дає два класи частинних точних розв'язків кубічного хвильового рівняння, які, в свою чергу, породжують відомі інстантонні і меронні розв'язки рівнянь Янга-Мілса, які були отримані за допомогою анзацу Тхуфта-Коррігана-Фееплі-Вілчека. Таким чином, побудовано широкий клас точних розв'язків рівнянь Янга-Мілса, який містить класичні меронні та інстантонні розв'язки, як дуже спеціальний частинний випадок.

В параграфі 2.2 проведено систематичне дослідження умовної симетрії нелінійного комплексного хвильового рівняння (0.1).

Аналіз отриманних анзаців (в параграфі 1.1) для комплексного скалярного поля $u(x)$ показує, що всі вони мають структуру (0.2).

Крім того, встановлено, що система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\omega_{x_\mu}\omega_{x^\mu} = f_1(\omega), \quad \Box\omega = f_2(\omega), \\ &a_{x_\mu}\omega_{x^\mu} = f_3(\omega), \quad a_{x_\mu}a_{x^\mu} = f_4(\omega), \quad \Box a = f_5(\omega) \end{aligned} \tag{0.14}$$

є необхідною і достатньою умовою для того, щоб анзац (0.2) зводив нелінійне хвильове рівняння (0.1) до звичайного диференціального рівняння. Причому, рівняння для функції $\varphi(\omega)$ має вигляд

$$f_1(\omega)\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + (f_2(\omega) - 2if_3(\omega))\frac{d\varphi}{d\omega} + (if_5(\omega) - f_4(\omega))\varphi = F(|\varphi|)\varphi. \tag{0.15}$$

Одним з центральних результатів параграфа (сформульованим в дисертації у вигляді **теореми 2.2.1**) є побудова дійсних розв'язків системи

$$\Box\omega = \varepsilon N\omega^{-1}, \quad \omega_{x_\mu}\omega_{x^\mu} = \varepsilon, \ \varepsilon = 0, \pm 1, \ \mu = \overline{0,3},$$

де $N = 0, 1, 2, 3$.

Ці розв'язки є узагальненням відомих функціонально-інваріантних розв'язків, одержаних Смірновим, Соболєвим та Єругіним. Також побудувано точні розв'язки системи (0.14) з різними правими частинами. Наведемо деякі з отриманих розв'язків системи (0.14), що відповідають умовній симетрії нелінійного хвильового рівняння.

Частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь (0.14) при $f_1 = -1,\ f_2 = 0,\ f_3 = 0,\ f_4 = -1,\ f_5 = 0$, має вигляд

$$\omega(x) = b_\mu x^\mu \cos g_1 + c_\mu x^\mu \sin g_1 + g_2,$$

$$a(x) = c_\mu x^\mu \cos g_1 - b_\mu x^\mu \sin g_1 + g_3,$$

де g_1, g_2, g_3 – довільні гладкі функції від $a_\mu x^\mu + d_\mu x^\mu$.

Частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь (0.14) при $f_1 = -1,\ f_2 = -2\omega^{-1},\ f_3 = 0,\ f_4 = -\lambda^2,\ f_5 = 0$, має вигляд

$$\begin{aligned} &\omega^2 = -\left(x_\mu + A_\mu(\tau)\right)\left(x^\mu + A^\mu(\tau)\right) - \left\{B_\mu(\tau)\left(x^\mu + A^\mu(\tau)\right)\right\}^2, \\ &a(x) = \lambda B_\mu(\tau) x^\mu + g(\tau), \end{aligned} \tag{0.16}$$

де $\lambda = \mathrm{const}$ і $\tau = \tau(x)$ визначається неявно

$$\left(x_\mu + A_\mu(\tau)\right)\dot{B}^\mu(\tau) = 0.$$

Тут $A_\mu(\tau), B_\mu(\tau), g(\tau)$ – довільні гладкі дійсні функції, що задовольняють умови

$$B_\mu(\tau)B^\mu(\tau) = -1,\ \dot{B}_\mu(\tau)\dot{B}^\mu(\tau) = 0,\ \dot{A}_\mu(\tau) = R(\tau)\dot{B}_\mu(\tau)$$

при довільній функції $R(\tau)$.

В цьому ж параграфі розглядається задача опису всіх можливих анзаців вигляду (0.2), які зводять рівняння (0.1) до алгебраїчного. Слід зауважити, що задача редукції диференціального рівняння до алгебраїчного розглядається вперше.

Повний розв'язок цієї задачі подано у вигляді наступної теореми.

Теорема 2.2.2. *Анзац (0.2) редукує рівняння (0.1) до алгебраїчного рівняння тоді і тільки тоді, коли:*

1) $A_\mu(\omega)x^\mu + B(\omega) = 0, \qquad A_\mu(\omega)A^\mu(\omega) = 0,$

$$a(x) = \frac{w_1(\omega)}{\left(-\dot{A}_\nu \dot{A}^\nu\right)} \dot{A}_\mu x^\mu + w_2(\omega),$$

де $\mu, \nu = 0,1,2,3$*;* $A_\mu(\omega)$*,* $B(\omega)$*,* w_1*,* w_2 *– довільні функції; крапка над символом означає похідну за* ω*;*

$$2)\quad \omega(x) = w_0(\theta_\mu x^\mu),$$
$$a(x) = w_1(\theta_\mu x^\mu)a_\nu x^\nu + w_2(\theta_\mu x^\mu)b_\nu x^\nu + w_3(\theta_\mu x^\mu),$$

де w_0, w_1, w_2, w_3 *– довільні функції своїх аргументів;* θ_μ, a_μ, b_μ *– довільні дійсні параметри, які задовольняють такі співвідношення:*

$$a_\mu a^\mu = b_\mu b^\mu = -1, \qquad a_\mu b^\mu = a_\mu \theta^\mu = b_\mu \theta^\mu = \theta_\mu \theta^\mu = 0.$$

Знайдено принципово новий неліївський клас розв'язків комплексного нелінійного рівняння Даламбера, який не може бути отриманим за допомогою методу симетрійної редукції.

Наприклад, для рівняння Даламбера з кубічною нелінійністю

$$\Box u = \lambda |u|^2 u$$

одержано такий клас точних розв'язків:

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} w_1(\omega)\exp\{iw_1(\omega)x_3 + iw_2(\omega)\}.$$

Підкреслимо, що при $\lambda \to 0$ цей розв'язок має сингулярність і тому не може бути отриманий методами теорії збурень за малим параметром λ.

Параграф 2.3 присвячений побудові точних розв'язків комплексних хвильових рівнянь вигляду (0.1), де F – степенева функція. Зокрема, якщо в (0.15) $f_1 = -1$, $f_2 = -2\omega^{-1}$, $f_3 = 0$, $f_4 = -\lambda^2$, $f_5 = 0$, $F = \lambda_1 + \lambda_2 |\varphi|^k$, тоді відповідний точний розв'язок рівняння (0.1) в залежності від значень k такий:

k – довільне дійсне число

$$u(x) = \left[\frac{2(k-2)}{\lambda_2 k^2}\right]^{\frac{1}{k}} \omega(x)^{-\frac{2}{k}} \exp\{i(a(x) + C_1)\},$$

де $C_1 = \mathrm{const}$, $a(x)$, $\omega(x)$ визначаються з формули (0.16).

$k = 4$

$$u(x) = \exp\{ia(x)\}\varphi(\omega(x)),$$

де $a(x)$, $\omega(x)$ визначаються з формули (0.16), а $\varphi(\omega)$ має такий вигляд:

$$\varphi(\omega) = \omega^{-\frac{1}{2}}\rho(\ln\omega)\exp\{iC_1\int^{\ln\omega}\rho^{-2}(z)dz + iC_2\},$$

ρ знаходиться з формули

$$\int^{\rho(\ln\omega)}\left[-\frac{\lambda_2}{3}z^6 + \frac{1}{4}z^2 - C_1^2 + C_3\right]^{-\frac{1}{2}}dz = \ln\omega + C_4.$$

Наводиться приклад, коли деякі ω, зокрема, $\omega(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, призводять до ліївських анзаців та будується відповідний точний розв'язок рівняння (0.1), який для наведеного $\omega(x)$ має такий вигляд:

k – довільне дійсне число

$$u(x) = \left[\frac{2(k-2)}{\lambda_2 k^2}\right]^{\frac{1}{k}}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^{-\frac{2}{k}}\exp\{i(D_1x_0 + D_2 + C_1)\},$$

де C_1, D_1, $D_2 = \mathrm{const}$.

Зазначимо, що при додатних $k \in \mathbf{R}$ цей розв'язок є локалізованим в околі точки $\vec{x} = \vec{0}$. При цьому в цій точці він має сингулярність.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, наступні:

1. Запропоновано метод побудови точних розв'язків нелінійного комплексного хвильового рівняння з довільними функціями, який базується на синтезі класичного підходу С.Лі та методу умовних симетрій диференціальних рівнянь.

2. Одержано повний розв'язок задачі симетрійної редукції комплекс них нелінійних хвильових рівнянь, інваріантних відносно групи Пуанкаре $P(1,3)$ та розширеної групи Пуанкаре $\widetilde{P}(1,3)$, до звичайних диференціальних рівнянь.

3. Побудовано багатопараметричні сім'ї нових інваріантних розв'язків досліджуваних рівнянь.

4. Побудовано широкі класи неліївських розв'язків з функціональною довільністю для нелінійного комплексного рівняння Даламбера.

5. Досліджено механізм неліївської редукції комплексних хвильових рівнянь до алгебраїчних.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути використані при розв'язуванні ряду конкретних задач теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними та нелінійної квантової теорії поля.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану діяльності та постановка задач належать науковому керівнику – Р.З. Жданову. Доведення всіх результатів дисертації проведене особисто автором.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України, на VI Міжнародній конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 1997), на II Міжнародній конференції "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Київ, 1997).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [8, 10, 11, 22, 85, 23, 103].

Автор щиросердечно вдячний своєму першому науковому керівнику члену-кореспонденту НАН України, професору, доктору фізико-математичних наук

Вільгельму Іллічу Фущичу.

Автор з глибокою вдячністю згадує співпрацю з ним.

Автор висловлює також сердечну вдячність своєму науковому керівнику доктору фізико – математичних наук

Ренату Зуфаровичу Жданову

за постановку задач, постійну увагу та допомогу в роботі.

Щиро вдячна також усім учасникам наукового семінару відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України за цінні зауваження, зроблені при обговоренні результатів.

Chapter 1.

Симетрійна редукція комплексного нелінійного хвильового рівняння

Даний розділ присвячений симетрійній редукції комплексних нелінійних хвильових рівнянь, інваріантних відносно групи Пуанкаре $P(1,3) \oplus Q(1)$ та розширеної групи Пуанкаре $\widetilde{P}(1,3) \oplus Q(1)$, до звичайних диференціальних рівнянь.

В параграфах 1.1 та 1.2 одержано повний розв'язок задачі симетрійної редукції нелінійних комплексних хвильових рівнянь до звичайних диференціальних рівнянь.

Це дало змогу в параграфі 1.3 побудувати багатопараметричні сім'ї нових інваріантних розв'язків досліджуваних рівнянь.

Наступний параграф 1.4 містить результати симетрійної класифікації хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами.

В параграфі 1.5 проведено симетрійну класифікацію рівняння типу Бюргерса з додатковою умовою.

1.1. Редукція за підгрупами групи $P(1,3) \oplus Q(1)$

У даному параграфі досліджується багатовимірне комплексне нелінійне хвильове рівняння

$$\Box u = F(|u|)u, \tag{1.1}$$

де $\Box = \partial^2/\partial x_0^2 - \Delta$ – оператор Даламбера, $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ – комплексна двічі неперервно-диференційовна функція, $F(|u|)$ – деяка неперервна функція.

Разом з відомими результатами редукції рівняння (1.1) за підгрупами групи Пуанкаре $P(1,3)$ [60, 63, 74, 75, 99], анзаци, які наведено нижче, дають повне розв'язання проблеми симетрійної редукції для нелінійного хвильового рівняння (1.1).

Добре відомо, що максимальною в сенсі Лі групою інваріантності рівняння (1.1) є група $P(1,3) \oplus Q(1)$, де $P(1,3)$ – група Пуанкаре з генераторами

$$P_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad J_{ab} = x_a \frac{\partial}{\partial x_b} - x_b \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{0a} = x_0 \frac{\partial}{\partial x_a} + x_a \frac{\partial}{\partial x_0}, \tag{1.2}$$

$a, b = 1, 2, 3$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, а $Q(1)$ – однопараметрична група калібровних перетворень з генератором

$$Q = iu\frac{\partial}{\partial u} - iu^* \frac{\partial}{\partial u^*} \ (u^* - \text{комплексна спряжена функція для } u). \tag{1.3}$$

Для того, щоб знайти розв'язки рівняння (1.1), редукуємо це рівняння до звичайних диференціальних рівнянь, використовуючи підалгебраїчну структуру алгебри Лі з базисними елементами (1.2), (1.3).

Оскільки задача симетрійної редукції диференціальних рівнянь з частинними похідними за підгрупами групи $P(1,3)$ вже розв'язана, розглянемо лише ті трипараметричні групи $P(1,3) \oplus Q(1)$, які неспряжені підгрупам групи Пуанкаре. Повний перелік відповідних тривимірних підалгебр подано нижче:

$$M_1 = \langle M + \varepsilon Q, P_1 + \gamma Q, P_2 + \sigma Q \rangle,$$
$$\varepsilon = \pm 1, \gamma, \sigma \in \mathbf{R} \text{ або } \varepsilon = 0, \gamma > 0, \sigma \in \mathbf{R};$$

$M_2 = \langle P_0 + \gamma Q, P_1 + \sigma Q, P_2 + \tau Q\rangle,$
$\quad \sigma > 0, \gamma, \tau \in \mathbf{R}$ або $\sigma = 0, \gamma \neq 0;$

$M_3 = \langle P_1 + \gamma Q, P_2 + \sigma Q, P_3 + \tau Q\rangle, \quad \gamma > 0, \sigma, \tau \in \mathbf{R};$

$M_4 = \langle J_{12} + \gamma Q, P_0 + \sigma Q, P_3 + \tau Q\rangle,$
$\quad \gamma, \sigma, \tau \in \mathbf{R}, |\gamma| + |\sigma| + |\tau| \neq 0;$

$M_5 = \langle J_{12} + \gamma Q, P_1, P_2\rangle, \quad \gamma \neq 0;$

$M_6 = \langle J_{03} + \gamma Q, P_0, P_3\rangle, \quad \gamma \neq 0;$

$M_7 = \langle J_{03} + \gamma Q, M, P_1 + \sigma Q\rangle, \quad \gamma \in \mathbf{R}, \sigma \geq 0, |\gamma| + \sigma \neq 0;$

$M_8 = \langle J_{03} + \gamma Q, P_1 + \sigma Q, P_2 + \tau Q\rangle,\ \gamma, \tau \in \mathbf{R}, \sigma \geq 0, |\gamma| + \sigma \neq 0;$

$M_9 = \langle J_{12} + \alpha J_{03} + \gamma Q, P_0, P_3\rangle, \quad \gamma \neq 0;$

$M_{10} = \langle J_{12} + \alpha J_{03} + \gamma Q, P_1, P_2\rangle, \quad \gamma \neq 0;$

$M_{11} = \langle G_1 + \varepsilon Q, M, P_1 + \gamma Q\rangle, \quad \varepsilon = 1, \gamma \in \mathbf{R}$ або $\varepsilon = 0, \gamma > 0;$

$M_{12} = \langle G_1 + \varepsilon Q, M + \gamma Q, P_2 + \sigma Q\rangle,$
$\varepsilon = 1, \gamma, \sigma \in \mathbf{R}$ або $\varepsilon = 0, \gamma = \pm 1, \sigma \geq 0$ або $\varepsilon = \gamma = 0, \sigma > 0;$

$M_{13} = \langle G_1 + \varepsilon Q, M, P_1 + \beta P_2 + \gamma Q\rangle,$
$\quad \varepsilon = 1, \gamma \in \mathbf{R}$ або $\varepsilon = 0, \gamma \neq 0;$

$M_{14} = \langle G_1 + \gamma Q, G_2 + \sigma Q, M + \tau Q\rangle,$
$\quad \gamma = 1, \sigma, \tau \in \mathbf{R}$ або $\gamma = \sigma = 0, \tau = \pm 1;$

$M_{15} = \langle G_1, J_{03} + \gamma Q, M\rangle, \quad \gamma \neq 0;$

$M_{16} = \langle G_1, J_{03} + \gamma Q, P_2 + \sigma Q\rangle, \quad \sigma > 0, \gamma \in \mathbf{R}$ або $\sigma = 0, \gamma \neq 0;$

$M_{17} = \langle J_{12} + \gamma Q, J_{03} + \sigma Q, M\rangle, \quad \gamma > 0, \sigma \in \mathbf{R}$ або $\gamma = 0, \sigma > 0;$

$M_{18} = \langle G_1, G_2, J_{03} + \gamma Q\rangle, \quad \gamma \neq 0;$

$M_{19} = \langle G_1, G_2, J_{12} + \gamma Q\rangle, \quad \gamma \neq 0;$

$$M_{20} = \langle G_1, G_2, J_{12} + \alpha J_{03} + \gamma Q\rangle, \quad \gamma \neq 0;$$

$$M_{21} = \langle J_{12} + \alpha P_0 + \gamma Q, P_1, P_2\rangle, \quad \gamma \neq 0;$$

$$M_{22} = \langle J_{12} + \alpha P_3 + \gamma Q, P_1, P_2\rangle, \quad \gamma \neq 0;$$

$$M_{23} = \langle J_{12} + 2T + \gamma Q, P_1, P_2\rangle, \quad \gamma \neq 0;$$

$$M_{24} = \langle J_{03} + \alpha P_1 + \gamma Q, P_0, P_3\rangle, \quad \gamma \neq 0;$$

$$M_{25} = \langle J_{03} + \alpha P_1 + \gamma Q, M, P_2 + \sigma Q\rangle, \quad \gamma, \sigma \in \mathbf{R}, |\gamma| + |\sigma| \neq 0;$$

$$M_{26} = \langle G_1 + 2T + \gamma Q, M, P_1 + \sigma Q\rangle, \quad \gamma, \sigma \in \mathbf{R}, |\gamma| + |\sigma| \neq 0;$$

$$M_{27} = \langle G_1 + 2T + \gamma Q, M + \sigma Q, P_2 + \tau Q\rangle,$$
$$\sigma = \pm 1, \gamma, \tau \in \mathbf{R} \text{ або } \sigma = 0, \gamma, \tau \in \mathbf{R}, |\gamma| + |\tau| \neq 0;$$

$$M_{28} = \langle G_1 + 2T + \gamma Q, M, P_1 + \beta P_2 + \sigma Q\rangle,$$
$$\gamma, \sigma \in \mathbf{R}, |\gamma| + |\sigma| \neq 0;$$

$$M_{29} = \langle G_1 + P_2 + \gamma Q, M, P_1 + \sigma Q\rangle, \quad \gamma, \sigma \in \mathbf{R}, |\gamma| + |\sigma| \neq 0;$$

$$M_{30} = \langle G_1 + \gamma Q, G_2 + P_2 + \sigma Q, M + \tau Q\rangle,$$
$$\gamma, \sigma, \tau \in \mathbf{R}, |\gamma| + |\sigma| + |\tau| \neq 0;$$

$$M_{31} = \langle G_1 + P_2 + \gamma Q, G_2 - P_1 + \sigma Q, M\rangle, \ \gamma, \sigma \in \mathbf{R}, |\gamma| + |\sigma| \neq 0;$$

$$M_{32} = \langle G_1 + P_2 + \gamma Q, G_2 - P_1 + \beta P_2 + \sigma Q, M\rangle,$$
$$\gamma, \sigma \in \mathbf{R}, |\gamma| + |\sigma| \neq 0;$$

$$M_{33} = \langle G_1, J_{03} + \alpha P_2 + \gamma Q, M\rangle, \quad \gamma \neq 0;$$

$$M_{34} = \langle G_1, J_{03} + \alpha P_1 + \gamma Q, M\rangle, \quad \gamma \neq 0;$$

$$M_{35} = \langle G_1, J_{03} + \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma Q, M\rangle, \quad \gamma \neq 0;$$

$$M_{36} = \langle G_1, G_2, J_{12} + M + \gamma Q, M\rangle, \quad \gamma \neq 0,$$

де $G_a = J_{0a} - J_{a3}$ $(a = 1, 2)$, $M = P_0 + P_3$, $T = \dfrac{1}{2}(P_0 - P_3)$, $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu$ – дійсні сталі, при цьому $\alpha, \beta > 0$.

Наведемо узагальнений алгоритм симетрійної редукції системи диференціальних рівняннь з частинними похідними згідно з [69]. Зауважимо, що цей алгоритм базується на умовній симетрії досліджуваних рівнянь, тому він є суттєвим узагальненням класичного підходу С. Лі.

Розглянемо перевизначену систему диференціальних рівнянь з частинними похідними вигляду

$$U_A(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}) = 0, \quad A = 1, \ldots, M, \tag{1.4}$$

$$\xi_{a\mu}(x, u) u^\alpha_{x_\mu} - \eta^\alpha_a(x, u) = 0, \quad a = 1, \ldots, N, \tag{1.5}$$

де $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad u = (u^0, u^1, \ldots, u^{m-1}),$

$$\underset{s}{u} = \{\partial^s u^\alpha / \partial x_{\mu_1} \ldots \partial x_{\mu_s}, 0 \leq \alpha \leq m-1, 0 \leq \mu_i \leq n-1\},$$

U_A, $\xi_{a\mu}$, η^α – достатньо гладкі функції, $N \leq n-1$. Припустимо також, що виконується умова

$$\operatorname{rank} \|\xi_{a\mu}(x, u)\|^{N\ n-1}_{a=1 \mu=0} = N. \tag{1.6}$$

Означення 1.1.1. *Множина диференціальних операторів першого порядку*

$$Q_a = \xi_{a\mu}(x, u)\partial_{x_\mu} + \eta^\alpha_a(x, u)\partial_{u^\alpha}, \tag{1.7}$$

де $\xi_{a\mu}$, η^α_a – гладкі функції, називається інволютивною, якщо існують такі гладкі функції $f^c_{ab}(x, u)$, що

$$[Q_a, Q_b] = f^c_{ab} Q_c, \quad a, b, c = 1, \ldots, N. \tag{1.8}$$

Найпростішим прикладом інволютивної множини операторів є набір диференціальних операторів першого порядку, що утворюють алгебру Лі. В цьому випадкуі $f^c_{ab} = \mathrm{const}$, $a, b, c = 1, \ldots, N$, і називаються структурними константами відповідної алгебри Лі.

Відомо, що умови (1.8) є достатніми для того, щоб система диференціальних рівнянь (1.5) була в інволюції (теорема Фробеніуса [93]). Загальний розв'язок цієї системи може бути зображений у вигляді

$$F^\alpha(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n+m-N}) = 0, \quad \alpha = 0, \ldots, m-1, \tag{1.9}$$

де $F^\alpha \in C^1(\mathbf{C^{n+m-N}}, \mathbf{C^1})$ – довільні функції, $\omega_i = \omega_i(x,u)$ – функціонально-незалежні перші інтеграли системи диференціальних рівнянь з частинними похідними (1.5).

Завдяки тому, що виконується умова (1.6), можна вибрати m перших інтегралів ω_{j_1}, …, ω_{j_m} так, щоб вони задовольняли умову

$$\det \|\partial\omega_{j_i}/\partial u^\alpha\|_{i=1\beta=0}^{m\ m-1} \neq 0,$$

оскільки в протилежному випадку інтеграли $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n+m-N}$ будуть функціонально-залежними.

Змінюючи, якщо необхідно, нумерацію, можна покласти $j_i = i$ і таким чином отримати m перших інтегралів $\omega_1, \ldots, \omega_m$ системи диференціальних рівнянь з частинними похідними (1.5), які задовольняють таку умову:

$$\det \|\partial\omega_i/\partial u^\alpha\|_{i=1\beta=0}^{m\ m-1} \neq 0. \tag{1.10}$$

Розв'язавши (1.9) відносно $\omega_1, \ldots, \omega_m$, отримаємо

$$\omega_i = \varphi_i(\omega_{m+1}, \ldots, \omega_{n+m-N}), \tag{1.11}$$

де $\varphi_i \in C^1(\mathbf{C}^{n-N}, \mathbf{C}^1),\ i = 1, \ldots, m,$ – довільні функції.

Означення 1.1.2. *Вираз (1.11) називається анзацем для поля $u^\alpha = u^\alpha(x)$, інваріантним відносно множини операторів (1.7), за умови, що виконується (1.10).*

Формула (1.11) набуває особливо простого вигляду, якщо

$$\xi_{a\mu} = \xi_{a\mu}(x), \quad \eta_a^\alpha = A_a^{\alpha\beta}(x)u^\beta,\ a = 1, \ldots, N,\ \alpha = 0, \ldots, m-1. \tag{1.12}$$

Врахувавши (1.12), перепишемо оператори (1.7) в неліївській формі:

$$Q_a = \xi_{a\mu}(x)\partial_{x_\mu} + \eta_a(x), \quad a = 1, \ldots, N, \tag{1.13}$$

де $\eta_a = \| - A_a^{\alpha\beta}(x)\|_{\alpha,\beta=0}^{m-1}$ –$(m \times m)$-матриці. Тоді система (1.6) набуде вигляду системи лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\xi_{a\mu}(x)u_{x_\mu} + \eta_a(x)u = 0, \quad a = 1, \ldots, N. \tag{1.14}$$

Тут $u = (u^0, \ldots, u^{m-1})^T$.

Справедливі такі твердження (їх доведення можна знайти в [69]).

Лема 1.1.1. *Нехай виконуються умови (1.6), (1.12). Тоді множина функціонально незалежних перших інтегралів системи диференціальних рівнянь з частинними похідними (1.5) може бути записана так:*

$$\omega_i = b_i^\alpha(x)u^\alpha, \ i = 1, \ldots, m, \quad \omega_{m+j} = \omega_{m+j}(x), \ j = 1, \ldots, n-1.$$

Окрім цього має місце умова $\det \|b_i^\alpha(x)\|_{i=1\alpha=0}^{m\ m-1} \neq 0$.

Означення 1.1.3. *Кажуть, що система диференціальних рівнянь (1.4) умовно-інваріантна відносно інволютивної множини (1.7), якщо система диференціальних рівнянь з частинними похідними*

$$\begin{cases} U_A(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}) = 0, \quad A = 1, \ldots, M, \\ \xi_{a\mu}(x,u)u^\alpha_{x_\mu} - \eta^\alpha_a(x,u) = 0, \quad a = 1, \ldots, N, \\ D\left(\xi_{a\mu}(x,u)u^\alpha_{x_\mu} - \eta^\alpha_a(x,u) = 0\right), \quad a = 1, \ldots, N, \\ \ldots \\ D^{r-1}\left(\xi_{a\mu}(x,u)u^\alpha_{x_\mu} - \eta^\alpha_a(x,u) = 0\right), \quad a = 1, \ldots, N, \end{cases} \tag{1.15}$$

де символом $D^s(L = 0)$ позначено множину всіх диференціальних наслідків рівняння $L = 0$ порядку s, є інваріантною в сенсі Лі відносно однопараметричних груп перетворень з генераторами $Q_a, a = 1, \ldots, N$.

Лема 1.1.2. *Припустимо, що оператори (1.7) утворюють інволютивну множину. Тоді множина диференціальних операторів*

$$Q'_a = \lambda_{ab}(x)Q_b, \quad \det \|\lambda_{ab}(x)\|_{a,b=1}^N \neq 0 \tag{1.16}$$

є також інволютивною.

Лема 1.1.3. *Нехай система диференціальних рівнянь з частинними похідними (1.4) є умовно-інваріантною відносно інволютивної множини диференціальних операторів (1.7). Тоді вона є умовно-інваріантною відносно інволютивної множини (1.15) з довільними гладкими функціями λ_{ab}.*

Теорема 1.1.1. *Нехай система диференціальних рівнянь з частинними похідними (1.4) є умовно-інаріантною відносно інволютивної множини диференціальних операторів (1.7), які задовольняють умову (1.6). Тоді анзац (1.11), інваріантний відносно інволютивної множини (1.7), редукує систему диференціальних рівнянь з частинними похідними (1.4) до системи диференціальних рівнянь з меншою кількістю змінних.*

Звідси випливає класичний результат про редукцію диференціальних рівнянь за інваріантно-груповими розв'язками. Враховуючи виключну важливість цього результату, наводимо його у вигляді теореми.

Теорема 1.1.2. *Нехай система диференціальних рівнянь з частинними похідними є інваріантною відносно алгебри Лі операторів (1.7), які задовольняють умову (1.6). Тоді анзац (1.11), інваріантний відносно цієї алгебри, редукує систему (1.4) до системи диференціальних рівнянь з меншою кількістю змінних.*

Застосуємо наведений алгоритм до рівняння (1.1). Оскільки (1.1) – це комплексне диференціальне рівняння з частинними похідними з чотирма незалежними змінними, то $M = 2$, $m = 2$, $n = 4$. Також, оскільки досліджується задача редукції рівняння (1.1) до звичайного диференціального рівняння, то $N = 3$.

Як приклад, розглянемо знаходження анзацу для поля $u = u(x)$, який інваріантний відносно алгебри M_{10}:

$$M_{10} = \langle J_{12} + \alpha J_{03} + \gamma Q, P_1, P_2 \rangle, \quad \gamma \neq 0.$$

У даному випадку система (1.4), (1.5) набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
&U(x_0, x_3, u, u^*) = 0, \quad U^*(x_0, x_3, u, u^*) = 0,\\
&\alpha x_0 \frac{\partial U}{\partial x_3} + \alpha x_3 \frac{\partial U}{\partial x_0} + i\gamma u \frac{\partial U}{\partial u} - i\gamma u^* \frac{\partial U}{\partial u^*} = 0,\\
&\alpha x_0 \frac{\partial U^*}{\partial x_3} + \alpha x_3 \frac{\partial U^*}{\partial x_0} + i\gamma u \frac{\partial U^*}{\partial u} - i\gamma u^* \frac{\partial U^*}{\partial u^*} = 0.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Загальний розв'язок системи (1.17) записується у вигляді

$$F(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=0,\quad F^*(\omega_1^*,\omega_2^*,\omega_3^*)=0, \tag{1.18}$$

де $F\in C^1(\mathbf{C}^3,\mathbf{C}^1)$ – довільна функція, ω_1, ω_2, ω_3 – функціонально-незалежні перші інтеграли системи диференціальних рівнянь з частинними похідними (1.17), які мають такий вигляд:

$$\omega_1=x_0^2-x_3^2,\qquad \omega_2=\ln u-i\gamma\alpha^{-1}\ln(x_0+x_3),$$

$$\omega_3=\ln u^*+i\gamma\alpha^{-1}\ln(x_0+x_3).$$

Розв'язавши співвідношення (1.18) відносно u та u^*, отримуємо, що

$$u=\varphi(x_0^2-x_3^2)\exp\{i\gamma\ln(x_0+x_3)\}, \tag{1.19}$$

$$u^*=\varphi^*(x_0^2-x_3^2)\exp\{-i\gamma\ln(x_0+x_3)\}, \tag{1.20}$$

де $\varphi\in C^1(\mathbf{C}^1,\mathbf{C}^1)$ – довільна функція.

Отже, шуканий анзац має вигляд (1.19).

Аналогічно одержуємо, що загальний вигляд анзацу для функції $u=u(x)$, інваріантного відносно однієї із алгебр M_1 – M_{36}, є таким:

$$u(x)=\exp\{ia(x)\}\varphi(\omega(x)).$$

Явний вигляд дійсних функцій $a(x)$, $\omega(x)$ визначається однією із таких формул:

(1) $a(x)=\varepsilon x_0-\gamma x_1-\sigma x_2,\quad \omega(x)=x_0+x_3;$

(2) $a(x)=\gamma x_0-\sigma x_1-\tau x_2,\quad \omega(x)=x_3;$

(3) $a(x)=-(\gamma x_1+\sigma x_2+\tau x_3),\quad \omega(x)=x_0;$

(4) $a(x)=\sigma x_0+\gamma\ \arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-\tau x_3,\quad \omega(x)=x_1^2+x_2^2;$

(7) $a(x)=\gamma\ln(x_0+x_3)-\sigma x_1,\quad \omega(x)=x_2;$

(8) $a(x)=\gamma\ln(x_0+x_3)-\tau x_2-\sigma x_1,\quad \omega(x)=x_0^2-x_3^2;$

$$(9)\ a(x) = -\gamma \arcsin \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \omega(x) = x_1^2 + x_2^2;$$

$$(10)\ a(x) = \frac{\gamma}{\alpha} \ln(x_0 + x_3), \quad \omega(x) = x_0^2 - x_3^2;$$

$$(12)\ a(x) = \gamma x_0 - \sigma x_2 + \frac{\varepsilon x_1}{x_0 + x_3} - \frac{\gamma x_1^2}{2(x_0 + x_3)}, \quad \omega(x) = x_0 + x_3;$$

$$(13)\ a(x) = \frac{\varepsilon(\beta x_1 - x_2)}{\beta(x_0 + x_3)} - \frac{\gamma x_2}{\beta}, \quad \omega(x) = x_0 + x_3;$$

$$(14)\ a(x) = \tau x_0 + \frac{\gamma x_1 + \sigma x_2}{x_0 + x_3} - \frac{\tau(x_1^2 + x_2^2)}{2(x_0 + x_3)}, \quad \omega(x) = x_0 + x_3;$$

$$(15)\ a(x) = \gamma \ln(x_0 + x_3), \quad \omega(x) = x_2;$$

$$(16)\ a(x) = \gamma \ln(x_0 + x_3) - \sigma x_2, \quad \omega(x) = -x_0^2 + x_1^2 + x_3^2;$$

$$(17)\ a(x) = \gamma \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \sigma \ln(x_0 + x_3), \quad \omega(x) = x_1^2 + x_2^2;$$

$$(18)\ a(x) = \gamma \ln(x_0 + x_3), \quad \omega(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2;$$

$$(20)\ a(x) = \frac{\gamma}{\alpha} \ln(x_0 + x_3), \quad \omega(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2;$$

$$(21)\ a(x) = \frac{\gamma}{\alpha} x_0, \quad \omega(x) = x_3;$$

$$(22)\ a(x) = -\frac{\gamma}{\alpha} x_3, \quad \omega(x) = x_0;$$

$$(23)\ a(x) = \gamma x_0, \quad \omega(x) = x_0 - x_3;$$

$$(24)\ a(x) = -\frac{\gamma}{\alpha} x_1, \quad \omega(x) = x_2;$$

$$(25)\ a(x) = \gamma \ln(x_0 + x_3) - \sigma x_2, \quad \omega(x) = \frac{1}{\alpha} x_1 + \ln(x_0 + x_3);$$

$$(26)\ a(x) = \gamma(x_0 + x_3) + \frac{\sigma}{2}(x_0 + x_3)^2 - 2\sigma x_1, \quad \omega(x) = x_2;$$

$$(27)\ a(x) = \frac{\sigma}{12}(x_0 + x_3)^3 - \frac{\sigma}{2} x_1 (x_0 + x_3) + \frac{\gamma}{2}(x_0 + x_3) +$$

$$+\sigma x_0 - \tau x_2, \quad \omega(x) = (x_0 + x_3)^2 - 4x_1;$$

(28) $a(x) = \frac{\sigma}{4}(x_0+x_3)^2 + \frac{\gamma}{2}(x_0+x_3) - \sigma x_1,$

$$\omega(x) = \frac{1}{4}(x_0+x_3)^2 - x_1 + \frac{1}{\beta}x_2;$$

(29) $a(x) = -(\sigma x_1 + \gamma x_2 + \sigma x_2(x_0+x_3)), \quad \omega(x) = x_0 + x_3;$

(30) $a(x) = \tau x_0 + \frac{2\gamma x_1 - \tau x_1^2}{2(x_0+x_3)} + \frac{2\sigma x_2 - \tau x_2^2}{2(x_0+x_3-1)}, \ \omega(x) = x_0+x_3;$

(31) $a(x) = \gamma\frac{x_1(x_0+x_3) - x_2}{1+(x_0+x_3)^2} + \sigma\frac{x_2(x_0+x_3)-x_1}{1+(x_0+x_3)^2},$

$$\omega(x) = x_0 + x_3;$$

(32) $a(x) = \gamma\frac{x_1(x_0+x_3-\beta) - x_2}{1+(x_0+x_3)^2 - \beta(x_0+x_3)} +$

$$+\sigma\frac{x_2(x_0+x_3)-x_1}{1+(x_0+x_3)^2-\beta(x_0+x_3)},$$

$$\omega(x) = x_0 + x_3;$$

(33) $a(x) = \gamma\ln(x_0+x_3), \quad \omega(x) = \frac{x_2}{\alpha} + \ln(x_0+x_3);$

(34) $a(x) = \gamma\ln(x_0+x_3), \quad \omega(x) = x_2;$

(35) $a(x) = \gamma\ln(x_0+x_3), \quad \omega(x) = \frac{x_2}{\beta} + \ln(x_0+x_3);$

(36) $a(x) = -\gamma\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{2(x_0+x_3)} - x_0\right), \quad \omega(x) = x_0 + x_3.$

Зауважимо, що алгебрам M_5, M_6, M_{11}, M_{19} відповідають частково-інваріантні розв'язки, які в даній роботі не розглядаються.

Розглянемо детально редукцію рівняння (1.1) до звичайного диференціального рівняння, взявши, наприклад, анзац (1.19), інваріантний відносно підалгебри M_{10}. Для цього потрібно знайти

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \quad \text{та} \quad F(|u|)u = F(\sqrt{uu^*})u. \qquad (1.21)$$

Підставляючи u та u^*, що мають відповідно вигляд (1.19), (1.20), в (1.21), одержимо, що

$$F(|u|)u = \exp\{i\gamma\alpha^{-1}\ln(x_0 + x_3)\}F(|\varphi|)\varphi. \tag{1.22}$$

У даному випадку $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$, тому

$$\begin{aligned}\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = \exp\{i\gamma\alpha^{-1}\ln(x_0 + x_3)\}\times\\ \times(4i\gamma\alpha^-1\dot{\varphi} + 4\dot{\varphi} + 4(x_0^2 - x_3^2)\ddot{\varphi}) =\\ = \exp\{i\gamma\alpha^{-1}\ln(x_0 + x_3)\}(4(i\gamma\alpha^{-1} + 1)\dot{\varphi} + 4\omega\ddot{\varphi}).\end{aligned} \tag{1.23}$$

Отже, підставивши (1.22), (1.23) в рівняння (1.1), приходимо до такого редукованого рівняння (тут і нижче крапка над символом означає похідну за ω):

$$4(1 + i\gamma\alpha^{-1})\dot{\varphi} + 4\omega\ddot{\varphi} = F(|\varphi|)\varphi.$$

Провівши аналогічні міркування, ми одержали такий набір редукованих звичайних диференціальних рівнянь для знаходження $\varphi = \varphi(\omega)$ відповідно знайденим анзацам для алгебр M_1 – M_{36}:

$$\begin{aligned}
&(1)\ 2i\varepsilon\dot{\varphi} + (\sigma^2 + \gamma^2 - \varepsilon^2)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;\\
&(2)\ -\ddot{\varphi} + (\sigma^2 + \tau^2 - \gamma^2)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;\\
&(3)\ \ddot{\varphi} + (\gamma^2 + \sigma^2 + \tau^2)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;\\
&(4)\ -4\omega\ddot{\varphi} - 4\dot{\varphi} - \left(\sigma^2 - \tau^2 - \frac{\gamma^2}{\omega}\right)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;\\
&(7)\ -\ddot{\varphi} + \sigma^2\varphi = F(|\varphi|)\varphi; \qquad (1.24)\\
&(8)\ 4\omega\ddot{\varphi} + 4(1 + i\gamma)\dot{\varphi} + (\sigma^2 + \tau^2)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;\\
&(9)\ -4\omega\ddot{\varphi} - 4\dot{\varphi} + \frac{\gamma^2}{\omega}\varphi = F(|\varphi|)\varphi;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(10)\ 4\omega\ddot{\varphi} + 4\left(1 + i\frac{\gamma}{\alpha}\right)\dot{\varphi} = F(|\varphi|)\varphi;\\
&(12)\ 2i\gamma\dot{\varphi} + \left(\sigma^2 - \gamma^2 + \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} + i\frac{\gamma}{\omega}\right)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;\\
&(13)\ \left(\frac{\beta^2\varepsilon^2 + 1}{\beta^2\omega^2} + \frac{2\gamma}{\beta^2\omega} + \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;\\
&(14)\ 2i\tau\dot{\varphi} + \left(\frac{2i\tau}{\omega} - \tau^2\right)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;\\
&(15)\ -\ddot{\varphi} = F(|\varphi|)\varphi;\\
&(16)\ -4\omega\ddot{\varphi} - 4(1 + i\gamma)\dot{\varphi} + \sigma\varphi = F(|\varphi|)\varphi;\\
&(17)\ -4\omega\ddot{\varphi} - 4\dot{\varphi} + \frac{\gamma^2}{\omega}\varphi = F(|\varphi|)\varphi;\\
&(18)\ -4\omega\ddot{\varphi} - 4(1 + i\gamma)\dot{\varphi} = F(|\varphi|)\varphi;\\
&(20)\ -4\omega\ddot{\varphi} - 4\left(1 + i\frac{\gamma}{\alpha}\right)\dot{\varphi} = F(|\varphi|)\varphi;\\
&(21)\ -\ddot{\varphi} - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\varphi = F(|\varphi|)\varphi; \qquad (1.25)\\
&(22)\ \ddot{\varphi} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\varphi = F(|\varphi|)\varphi;\\
&(23)\ 2i\gamma\dot{\varphi} - \gamma^2\varphi = F(|\varphi|)\varphi;\\
&(24)\ -\ddot{\varphi} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\varphi = F(|\varphi|)\varphi;\\
&(25)\ \frac{1}{\alpha^2}\ddot{\varphi} + \sigma^2\varphi = F(|\varphi|)\varphi;\\
&(26)\ -\ddot{\varphi} + 4\sigma^2\varphi = F(|\varphi|)\varphi;\\
&(27)\ -16\ddot{\varphi} - (\sigma^2 - \tau^2 + \gamma\sigma + \sigma^2\omega)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;\\
&(28)\ -\left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right)\ddot{\varphi} - 2i\sigma\dot{\varphi} + \sigma^2\varphi = F(|\varphi|)\varphi;
\end{aligned}
$$

(29) $(\sigma^2+\gamma^2+2\gamma\sigma\omega+\sigma\omega^2)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(30) $2i\tau\dot{\varphi}+\left(\gamma^2+\sigma^2-\tau^2+\dfrac{i\tau}{\omega}+\dfrac{i\tau}{\omega-1}\right)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(31) $-\dfrac{4\gamma\sigma\omega-\gamma^2-\sigma^2}{1+\omega^2}\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(32) $\left(\dfrac{\sigma^2(1+\omega^2)}{(1+\omega^2-\beta\omega)^2}+\dfrac{\gamma^2(1+\omega-\beta)}{(1+\omega^2-\beta\omega)^2}-\dfrac{2\gamma\sigma\beta}{1+\omega^2-\beta\omega}\right)\varphi =$
$= F(|\varphi|)\varphi;$

(33) $-\dfrac{1}{\alpha^2}\ddot{\varphi} = F(|\varphi|)\varphi;$ (1.26)

(34) $-\ddot{\varphi} = F(|\varphi|)\varphi;$

(35) $-\dfrac{1}{\beta^2}\ddot{\varphi} = F(|\varphi|)\varphi;$

(36) $\left(-2\gamma^2+2i\gamma\left(1+\dfrac{1}{\omega}\right)\right)\varphi = F(|\varphi|)\varphi.$

Більшість редукованих рівнянь є звичайними диференціальними рівняннями другого порядку. Однак, для ряду випадків отримано диференціальні рівняння першого порядку і, навіть, суто алгебраїчні рівняння. Таким чином, з використанням симетрійних властивостей нелінійного хвильового рівняння (1.1) задачу знаходження його частинних розв'язків зведено до істотно легшої проблеми – інтегрування нелінійних звичайних диференціальних й, навіть, алгебраїчних рівнянь.

1.2. Редукція за підгрупами групи $\widetilde{P}(1,3)\oplus Q(1)$

У цьому параграфі проведено симетрійну редукцію нелінійного хвильового рівняння

$$\Box u = \lambda|u|^k u,\ k\neq 0, \tag{1.27}$$

до звичайних диференціальних рівнянь. Для цього використано трипараметричні підгрупи групи $\widetilde{P}(1,3) \oplus Q(1)$. З огляду на результати попереднього параграфу, а також на результати робіт [60, 61], де здійснено редукцію рівняння (1.1) за підгрупами розширеної групи Пуанкаре, обмежимося лише тими підгрупами, які:

1) неспряжені підгрупам розширеної групи Пуанкаре,
2) неспряжені підгрупам групи $P(1,3) \oplus Q(1)$.

Тим самим буде одержано повний розв'язок задачі симетрійної редукції нелінійного комплексного хвильового рівняння до звичайних диференціальних рівнянь. Нагадаємо, що $\widetilde{P}(1,3)$ – розширена група Пуанкаре з базисними генераторами (1.2) та генератором дилатації вигляду

$$D = x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + lu\frac{\partial}{\partial u} + lu^* \frac{\partial}{\partial u^*}, \quad \text{де} \quad l = -\frac{k}{2}, \mu = \overline{0,3}.$$

$Q(1)$ – однопараметрична група калібровних перетворень (1.3). Повний перелік відповідних тривимірних підалгебр наводиться нижче:

$$\widetilde{F}_1 = \langle D + \gamma Q, P_0, P_3 \rangle, \qquad \gamma \neq 0;$$

$$\widetilde{F}_2 = \langle J_{12} + \alpha D + \gamma Q, P_0, P_3 \rangle, \qquad \alpha > 0, \gamma \neq 0;$$

$$\widetilde{F}_3 = \langle J_{12} + \gamma Q, D + \mu Q, P_0 \rangle, \quad \gamma > 0, \mu \in \mathbf{R} \text{ або } \gamma = 0, \mu \neq 0;$$

$$\widetilde{F}_4 = \langle J_{12} + \gamma Q, D + \mu Q, P_3 \rangle, \quad \gamma > 0, \mu \in \mathbf{R} \text{ або } \gamma = 0, \mu \neq 0;$$

$$\widetilde{F}_5 = \langle J_{03} + \alpha D + \gamma Q, P_0, P_3 \rangle, \quad \alpha > 0, \gamma \neq 0;$$

$$\widetilde{F}_6 = \langle J_{03} + \alpha D + \gamma Q, P_1, P_2 \rangle, \quad \alpha > 0, \gamma \neq 0;$$

$$\widetilde{F}_{7.1} = \langle J_{03} + \alpha D + \gamma Q, M, P_1 \rangle, \quad \alpha \neq 0, \gamma \neq 0;$$

$$\widetilde{F}_{7.2} = \langle J_{03} + D + \gamma Q, M + \mu Q, P_1 \rangle, \quad \mu = \pm 1, \gamma \in \mathbf{R};$$

$$\widetilde{F}_8 = \langle J_{03} + D + 2T + \gamma Q, P_1, P_2 \rangle, \quad \gamma \neq 0;$$

$$\widetilde{F}_9 = \langle J_{03} + D + 2T + \gamma Q, M, P_1 \rangle, \quad \gamma \neq 0;$$

$$\widetilde{F}_{10} = \langle J_{03} + \gamma Q, D + \mu Q, P_1 \rangle, \quad \gamma \neq 0, \mu \in \mathbf{R} \text{ або } \gamma = 0, \mu \neq 0;$$

$$\widetilde{F}_{11}=\langle J_{03}+\gamma Q, D+\mu Q, M\rangle,\quad \gamma\neq 0, \mu\in\mathbf{R} \text{ або } \ \gamma=0, \mu\neq 0;$$

$$\widetilde{F}_{12}=\langle J_{12}+\alpha J_{03}+\beta D+\gamma Q, P_0, P_3\rangle,\quad \alpha\neq 0, \beta>0, \gamma\neq 0;$$

$$\widetilde{F}_{13}=\langle J_{12}+\alpha J_{03}+\beta D+\gamma Q, P_1, P_2\rangle,\quad \alpha\neq 0, \beta>0, \gamma\neq 0;$$

$$\widetilde{F}_{14}=\langle J_{12}+\alpha(J_{03}+D+2T)+\gamma Q, P_1, P_2\rangle,\quad \alpha\neq 0, \gamma\neq 0;$$

$$\widetilde{F}_{15}=\langle J_{12}+\alpha J_{03}+\gamma Q, D+\mu Q, M\rangle,$$
$$\alpha\neq 0, \gamma\neq 0, \mu\in\mathbf{R} \text{ або } \ \gamma=0, \mu\neq 0;$$

$$\widetilde{F}_{16.1}=\langle J_{03}+\alpha D+\gamma Q, J_{12}+\beta D+\mu Q, M\rangle,$$
$$0\leq|\alpha|\leq 1, \beta\geq 0, |\alpha|+|\beta|\neq 0, \gamma\neq 0, \mu\in\mathbf{R} \text{ або } \gamma=0, \mu\neq 0;$$

$$\widetilde{F}_{16.2}=\langle J_{03}+D+\gamma Q, J_{12}+\mu Q, M+\varepsilon Q\rangle,\quad \varepsilon=\pm 1, \mu, \gamma\in\mathbf{R};$$

$$\widetilde{F}_{17}=\langle J_{03}-D+2T+\gamma Q, J_{12}+2\alpha T+\mu Q, M\rangle,$$
$$\gamma\neq 0, \alpha, \mu\in\mathbf{R} \text{ або } \gamma=0, \mu\neq 0;$$

$$\widetilde{F}_{18}=\langle J_{03}-D+\gamma Q, J_{12}+2T+\mu Q, M\rangle,$$
$$\gamma\neq 0, \mu\in\mathbf{R} \text{ або } \gamma=0, \mu\neq 0;$$

$$\widetilde{F}_{19}=\langle J_{03}+\gamma Q, J_{12}+\mu Q, D+\upsilon Q\rangle,\ \gamma, \mu, \upsilon\in\mathbf{R}, |\gamma|+|\mu|+|\upsilon|\neq 0;$$

$$\widetilde{F}_{20}=\langle G_1, J_{03}+\alpha D+\mu Q, P_2\rangle,\quad 0<|\alpha|\leq 1, \mu\neq 0;$$

$$\widetilde{F}_{21}=\langle J_{03}+D+\gamma Q, G_1+P_2, M\rangle,\quad \gamma\neq 0;$$

$$\widetilde{F}_{22}=\langle J_{03}-D+M+\gamma Q, G_1, P_2\rangle,\quad \gamma\neq 0;$$

$$\widetilde{F}_{23}=\langle J_{03}-2D+\gamma Q, G_1+2T, M\rangle,\quad \gamma\neq 0;$$

$$\widetilde{F}_{24}=\langle J_{03}-2D+\gamma Q, G_1+2T, P_2\rangle,\quad \gamma\neq 0,$$

де $G_a=J_{0a}-J_{a3}$ $(a=1,2)$, $M=P_0+P_3$, $T=\dfrac{1}{2}(P_0-P_3)$, $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu$ – дійсні сталі, при цьому $\alpha, \beta>0$.

Загальна структура анзацу для функції $u = u(x)$, інваріантного відносно однієї із алгебр $\widetilde{F}_1$ – $\widetilde{F}_{24}$, є такою:

$$u(x) = \exp\{a(x)\}\varphi(\omega(x)). \tag{1.28}$$

Явний вигляд дійсних функцій $a(x)$, $\omega(x)$ визначається однією із таких формул:

(1) $a(x) = (l + i\gamma)\ln x_1, \quad \omega(x) = \dfrac{x_1}{x_2};$

(2) $a(x) = (\alpha l + i\gamma)\operatorname{arctg}\dfrac{x_1}{x_2}, \quad \omega(x) = \alpha\operatorname{arctg}\dfrac{x_1}{x_2} - \ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2};$

(3) $a(x) = -(l + i\mu)\ln x_3 + i\gamma\arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \omega(x) = \dfrac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3};$

(4) $a(x) = -(l + i\mu)\ln x_0 + i\gamma\arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \omega(x) = \dfrac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_0};$

(5) $a(x) = \dfrac{\alpha l + i\gamma}{\alpha}\ln x_1, \quad \omega(x) = \dfrac{x_1}{x_2};$

(6) $a(x) = (\alpha + i\gamma)\ln\sqrt{\dfrac{x_0 + x_3}{x_0 - x_3}},$

$$\omega(x) = \alpha\ln\sqrt{\frac{x_0 + x_3}{x_0 - x_3}} - \ln\sqrt{x_0^2 - x_3^2};$$

(7.1) $a(x) = \dfrac{\alpha l + i\gamma}{\alpha}\ln x_2, \quad \omega(x) = \dfrac{x_2^\alpha}{(x_0 + x_3)^{1+\alpha}};$

(7.2) $a(x) = (l + i\gamma)\ln\sqrt{x_0 + x_3} + i\mu x_0 - \dfrac{i\mu}{2}(x_0 + x_3),$

$$\omega(x) = \frac{\sqrt{x_0 + x_3}}{x_2};$$

(8) $a(x) = (l + i\gamma)\ln(x_0 + x_3 + 1), \quad \omega(x) = x_0 - x_3;$

(9) $a(x) = (l + i\gamma)\ln x_2, \quad \omega(x) = \dfrac{\sqrt{2 + 2(x_0 + x_3)}}{x_2};$

(10) $a(x) = i\gamma \ln(x_0 + x_3) + (l - i\gamma + i\mu) \ln x_2, \quad \omega(x) = \dfrac{\sqrt{x_0^2 - x_3^2}}{x_2};$

(11) $a(x) = i\gamma \ln(x_0 + x_3) + (l + i\mu_i\gamma) \ln x_1, \quad \omega(x) = \dfrac{x_1}{x_2};$

(12) $a(x) = (\beta l + i\gamma) \operatorname{arctg} \dfrac{x_1}{x_2}, \quad \omega(x) = \beta \operatorname{arctg} \dfrac{x_1}{x_2} - \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2};$

(13) $a(x) = \dfrac{\beta l + i\gamma}{\alpha} \ln \sqrt{\dfrac{x_0 + x_3}{x_0 - x_3}},$

$$\omega(x) = \frac{\beta}{\alpha} \ln \sqrt{\frac{x_0 + x_3}{x_0 - x_3}} - \ln \sqrt{x_0^2 - x_3^2};$$

(14) $a(x) = \dfrac{\alpha l + i\gamma}{2\alpha} \ln(\alpha x_0 + \alpha x_3 + \alpha), \quad \omega(x) = x_0 - x_3;$

(15) $a(x) = \dfrac{i\gamma}{\alpha} \ln(x_0 + x_3) + \dfrac{\alpha l - i\gamma + i\mu}{\alpha} \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$

$$\omega(x) = \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \ln(x_0 + x_3) + \alpha \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}};$$

(16.1) $a(x) = \dfrac{(1+\alpha)(\beta l + i\mu) - \beta(\alpha l + i\gamma)}{\alpha} \operatorname{arctg} \dfrac{x_1}{x_2} -$

$$-\frac{(1+\alpha)(\beta l + i\mu) - \beta(\alpha l + i\gamma)}{\alpha\beta} \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2} +$$

$$+\frac{\beta l + i\mu}{\beta} \ln(x_0 + x_3),$$

$$\omega(x) = -\beta \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} + (1+\alpha) \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \alpha \ln(x_0 + x_3);$$

(16.2) $a(x) = \dfrac{l + i\gamma}{2} \ln(x_0 + x_3) - \dfrac{i\varepsilon}{2}(x_0 + x_3) +$

$$+i\mu \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + i\varepsilon x_0, \quad \omega(x) = \frac{x_0 + x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}};$$

$$(17)\ a(x) = \frac{i\mu}{2\alpha}(x_0 + x_3) + \left[\frac{i\mu}{2\alpha} - \frac{(l + i\gamma)}{2}\right] \ln(x_1^2 + x_2^2),$$

$$\omega(x) = \frac{1}{2}\ln(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}(x_0 + x_3) - \alpha \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}};$$

$$(18)\ a(x) = -\frac{(l + i\gamma)}{2}\ln(x_1^2 + x_2^2) - \frac{i\mu}{2}(x_0 + x_3),$$

$$\omega(x) = \frac{1}{2}(x_0 + x_3) - \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}};$$

$$(19)\ a(x) = \frac{l - i\gamma + i\upsilon}{2}\ln(x_0^2 - x_3^2) + i\mu \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} +$$

$$+ i\gamma \ln(x_0 + x_3), \quad \omega(x) = \frac{x_0^2 - x_3^2}{x_1^2 + x_2^2};$$

$$(20)\ a(x) = (i\mu + \alpha l)\ln(x_0 + x_3),\ \omega(x) = (x_0 + x_3)^{-2\alpha}(x_0^2 - x_1^2 - x_3^2);$$

$$(21)\ a(x) = (l - i\gamma)\ln(x_1 + x_2(x_0 + x_3)), \quad \omega(x) = x_0 + x_3;$$

$$(22)\ a(x) = -\frac{i\gamma - l}{2}\ln 2(x_1^2 + x_3^2 - x_0^2 + x_3 + x_0), \quad \omega(x) = x_0 + x_3;$$

$$(23)\ a(x) = \frac{2l - i\gamma}{2}\ln x_2, \quad \omega(x) = \frac{(x_0 + x_3)^2 - 4x_1}{x_2};$$

$$(24)\ a(x) = -\frac{(i\gamma - 2l)}{2}\ln[(x_0 + x_3)^2 - 4x_1],$$

$$\omega(x) = 3\ln[(x_0 + x_3)^2 - 4x_1] -$$

$$-2\ln[6(x_0 - x_3) + (x_0 + x_3)^3 - 6x_1(x_0 + x_1)].$$

Підставляючи знайдені анзаци в рівняння (1.27), одержуємо набір редукованих звичайних диференціальних рівнянь для знаходження функцій $\varphi = \varphi(\omega)$:

$$(1)\ \ -(\omega^2+\omega^4)\ddot{\varphi} - (2(l+i\gamma)\omega + 2\omega^3)\dot{\varphi} - [(l+i\gamma)^2 - (l+i\gamma)]\varphi =$$

$$= \lambda|\varphi|^k\varphi;$$

$$(2)\ \ -\exp^{-2\omega}[(\alpha^2+1)\ddot{\varphi} + 2\alpha(\alpha l+i\gamma)\dot{\varphi} + (\alpha l+i\gamma)^2\varphi] = \lambda|\varphi|^k\varphi;$$

$$(3)\ \ -(1+\omega^2)\ddot{\varphi} - (\omega^{-1} + (l+i\mu)\omega)\dot{\varphi} - [(\gamma^2\omega^{-2} + (l+i\mu)^2 -$$

$$-(l+i\mu)]\varphi = \lambda|\varphi|^k\varphi;$$

$$(4)\ (\omega^2-1)\ddot{\varphi} + (\omega(l+i\gamma) - \omega^{-1})\dot{\varphi} + [(\gamma^2\omega^{-2} + (l+i\mu)^2 -$$

$$-(l+i\mu)]\varphi = \lambda|\varphi|^k\varphi;$$

$$(5)\ \ -(\omega^2+\omega^4)\ddot{\varphi} - \left(\omega^3 + 2\omega\frac{\alpha l+i\gamma}{\alpha}\right)\dot{\varphi} -$$

$$-\left[\frac{(\alpha l+i\gamma)^2}{\alpha^2} - \frac{(\alpha l+i\gamma)}{\alpha}\right]\varphi = \lambda|\varphi|^k\varphi;$$

$$(6)\ \exp\{2\omega\}[(1-\alpha^2)\ddot{\varphi} + \alpha(\alpha l+i\gamma)\dot{\varphi} - (\alpha l+i\gamma)^2\varphi] = \lambda|\varphi|^k\varphi;$$

$$(7.1)\ \ -\omega^2\ddot{\varphi} - \omega[2(\alpha l+i\gamma) + \alpha(\alpha-1)]\dot{\varphi} -$$

$$-\left[\frac{(\alpha l+i\gamma)^2}{\alpha^2} - \frac{(\alpha l+i\gamma)}{\alpha}\right]\varphi = \lambda|\varphi|^k\varphi;$$

$$(7.2)\ \ -\omega^4\ddot{\varphi} + (i\mu\omega - 2\omega^3)\dot{\varphi} - \frac{i\mu(l+i\gamma)}{2}\varphi = \lambda|\varphi|^k\varphi;$$

$$(8)\ (l+i\gamma)\dot{\varphi} = \lambda|\varphi|^k\varphi;$$

$$(9)\ \omega^2\ddot{\varphi} = F(|\varphi|)\varphi;$$

$$(10)\ (1-\omega^2)\ddot{\varphi} + [(2i\gamma+1)\omega^{-1} - (2l+2i\mu-2i\gamma+1)\omega)]\dot{\varphi} -$$

$$-[(l+i\mu-i\gamma)^2 - (l+i\mu-i\gamma)]\varphi = \lambda|\varphi|^k\varphi;$$

(11) $-(\omega^2+\omega^4)\ddot{\varphi}-\omega(2l+2i\mu-2i\gamma)\dot{\varphi}-[(l+i\mu-i\gamma)^2-$

$-(l+i\mu-i\gamma)]\varphi=\lambda|\varphi|^k\varphi;$

(12) $-\exp\{2\omega\}[(\beta^2+1)\ddot{\varphi}+2\alpha\beta(\beta l+i\gamma)\dot{\varphi}+(\beta l+i\gamma)^2\varphi]=\lambda|\varphi|^k\varphi;$

(13) $\exp\{2\omega\}\left[\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right)\ddot{\varphi}+\frac{2\beta(\beta l+i\gamma)}{\alpha^2}\dot{\varphi}-\frac{(\beta l+i\gamma)}{\alpha^2}\varphi\right]=$

$=\lambda|\varphi|^k\varphi;$

(14) $(\alpha l+i\gamma)\dot{\varphi}=\lambda|\varphi|^k\varphi;$

(15) $-(\alpha^2+1)\ddot{\varphi}-\frac{2(\alpha l-i\gamma+i\mu)}{\alpha}\dot{\varphi}-\frac{(\alpha l-i\gamma+i\mu)^2}{\alpha^2}\varphi=\lambda|\varphi|^k\varphi;$

(16.1) $-[\beta^2+(1+\alpha)^2]\ddot{\varphi}-2\left[\frac{(\beta(1+\alpha)(\beta l+i\mu)-\beta^2(\alpha l+i\gamma)}{\alpha}+\right.$

$\left.+\frac{(1+\alpha)^2(\beta l+i\mu)-\beta(1+\alpha)(\alpha l+i\gamma)}{\alpha\beta}\right]\dot{\varphi}-$

$-\frac{(1+\beta^2)[(1+\alpha)(\beta l+i\mu)-\beta(\alpha l+i\gamma)]^2}{\alpha^2\beta^2}\varphi=\lambda|\varphi|^k\varphi;$

(16.2) $-4\omega^3\ddot{\varphi}+2i\varepsilon\dot{\varphi}+[i\varepsilon(l+i\gamma)-(i\mu)^2\omega]\varphi=\lambda|\varphi|^k\varphi;$

(17) $-(1+\alpha^2)\ddot{\varphi}-2\frac{(i\mu-l\alpha-i\gamma\alpha)}{\alpha}\dot{\varphi}-\frac{(i\mu-l\alpha-i\gamma\alpha)^2}{\alpha^2}\varphi=$

$=\lambda|\varphi|^k\varphi;$

(18) $-\ddot{\varphi}-(l+i\gamma)^2\varphi=\lambda|\varphi|^k\varphi;$

(19) $4(\omega^2-\omega^3)\ddot{\varphi}+4[3\omega^2+\omega(1+l+2i\gamma-i\upsilon)]\dot{\varphi}-$

$-[4\omega(i\mu)^2+2i\gamma(l+i\gamma-i\upsilon)]\varphi=\lambda|\varphi|^k\varphi;$

(20) $(4-8\alpha)\omega\ddot{\varphi}+(6-8\alpha)\dot{\varphi}=\lambda|\varphi|^k\varphi;$

(21) $(1+\omega^2)[(l-i\gamma)-(l-i\gamma)^2]\varphi = \lambda|\varphi|^k\varphi;$

(22) $2\omega(i\gamma-l)\dot{\varphi}+[(i\gamma-l)^2+(i\gamma-l)]\varphi = \lambda|\varphi|^k\varphi;$

(23) $$-(16+\omega^2)\ddot{\varphi}-(1-2l-i\gamma)\omega\dot{\varphi}+$$
$$+\left[\frac{(2l-i\gamma)^2}{4}-\frac{(2l-i\gamma)}{2}\right]\varphi = \lambda|\varphi|^k\varphi;$$

(24)$$144(\exp\{\omega\}-1)\ddot{\varphi}+24[2(i\gamma-2l+1)+3\exp\{\omega\}]\dot{\varphi}-$$
$$-4[(i\gamma-2l)^2+2(i\gamma-2l)]\varphi = \lambda|\varphi|^k\varphi.$$

Переважна більшість отриманих звичайних диференціальних рівнянь є нелінійними рівняннями другого порядку із змінними коефіцієнтами, які не вдається проінтегрувати відомими нам методами. У тих випадках, коли редуковані рівняння є звичайними диференціальними рівняннями першого порядку (8, 14, 22), одержано розв'язки нелінійного хвильового рівняння (1.27), які є частинними випадками умовно-інваріантних розв'язків. Систематичне вивчення таких розв'язків здійснюється у другому розділі дисертаційної роботи.

1.3. Інваріантні розв'язки нелінійного хвильового рівняння

Здійснимо побудову частинних або загальних (там, де це можливо) розв'язків редукованих рівнянь з (1.24), (1.25), (1.26), в яких функція F має вигляд: $F(|\varphi|) = \lambda_1+\lambda_2|\varphi|^k,\ \{\lambda_1,\ \lambda_2\}\subset \mathbf{R}$. Тобто, розглядатимемо задачу знаходження частинних розв'язків нелінійних хвильових рівнянь вигляду

$$\Box u = (\lambda_1+\lambda_2|u|^k)u. \qquad (1.29)$$

Ці рівняння знайшли широкі застосування в сучасній математичній та теоретичній фізиці (зокрема, в квантовій теорії поля [7, 24]). Наприклад, при $\lambda_1 = -m^2$, $\lambda_2 = 0$, приходимо до класичного рівняння Клейна-Гордона-Фока. Далі, якщо $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, то рівняння (1.29) – це нелінійне рівняння Даламбера, при цьому у разі $k = 3$ його максимальна група інваріантності збігається з конформною групою $C(1,3) \oplus Q(1)$, а при $k \neq 3$ – з розширеною групою Пуанкаре $\widetilde{P}(1,3) \oplus Q(1)$.

Проінтегрувавши редуковані рівняння, ми тим самим знайдемо відповідні інваріантні розв'язки вихідного рівняння (1.1). Згідно із структурою та методами розв'язування рівняння (1.24), (1.25), (1.26) належать до однієї із трьох основних груп. Детальні обчислення ми наводимо лише для одного представника з кожної групи. А саме, до першої групи належать рівняння – 1, 2, 3, 7, 12 з (1.24), 14, 15, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 30 з (1.25) та 33, 34, 35 з (1.26), до другої – 4, 8, 9, 10 з (1.24) та 16, 17, 18, 20 з (1.25), до третьої – 13 з (1.24), 29 з (1.25) та 31, 32, 36 з (1.26). В усіх інших випадках обмежуємося тим, що вказуємо остаточний результат – частинний або загальний розв'язок відповідних рівнянь, оскільки вони інтегруються аналогічно.

Спочатку розглянемо редуковане рівняння 2 із формул (1.24), де $F(|\varphi|) = \lambda_1 + \lambda_2|\varphi|^k$:

$$-\ddot{\varphi} + (\sigma^2 + \tau^2 - \gamma^2)\varphi = (\lambda_1 + \lambda_2|\varphi|^k)\varphi. \tag{1.30}$$

Загальний розв'язок цього рівняння можна подати у вигляді:

$$\varphi = \rho(\omega)\exp\{i\theta(\omega)\}. \tag{1.31}$$

Підстановка виразу (1.31) в рівняння (1.30) призводить до системи звичайних диференціальних рівнянь для функцій $\rho(\omega)$, $\theta(\omega)$(крапка над символом позначає похідну за ω)

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho(\dot{\theta})^2 - (\sigma^2 + \tau^2 - \gamma^2 - \lambda_1)\rho = -\lambda_2\rho^{k+1}, \\ 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = 0. \end{cases} \tag{1.32}$$

З другого рівняння системи (1.32) знаходимо, що

$$\dot{\theta} = C_1\rho^{-2}, \quad C_1 \in \mathbf{R}, \tag{1.33}$$

тобто

$$\theta = C_1 \int^{\omega} \rho^{-2}(z)dz + C_2, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Підставівши (1.33) у перше рівняння системи (1.32), одержуємо, що

$$\ddot{\rho} = -\lambda_2 \rho^{k+1} + C_1^2 \rho^{-3} + (\sigma^2 + \tau^2 - \gamma^2 - \lambda_1)\rho. \tag{1.34}$$

Домноживши (1.34) на $\dot{\rho}$ та проінтегрувавши обидві частини отриманої рівності, знаходимо, що $\rho(\omega)$ визначається неявно:
при $k \neq -2$

$$\int^{\rho(\omega)} \left[(\sigma^2 + \tau^2 - \gamma^2 - \lambda_1) z^2 - \frac{2\lambda_2}{k+2} z^{k+2} - C_1^2 z^{-2} + C_3 \right]^{-\frac{1}{2}} dz = \omega + C_4, \tag{1.35}$$

при $k = -2$

$$\int^{\rho(\omega)} [(\sigma^2 + \tau^2 - \gamma^2 - \lambda_1) z^2 - 2\lambda_2 \ln z - C_1^2 z^{-2} + C_3]^{-\frac{1}{2}} dz = \omega + C_4, \tag{1.36}$$

де C_3, C_4 – довільні дійсні константи. Отже, загальний розв'язок рівняння (1.30) має вигляд:

$$\varphi(\omega) = \rho(\omega) \exp \left\{ iC_1 \int^{\omega} \rho^{-2}(z)dz + iC_2 \right\}, \tag{1.37}$$

де ρ визначається з формул (1.35), (1.36). Відповідні інваріантні розв'язки рівняння (1.1) мають вигляд:

<u>*k – довільне дійсне число, $k \neq -2$*</u>

$$u_1(x) = \exp\{i(\gamma x_0 - \sigma x_1 - \tau x_2)\}\varphi(x_3),$$

де φ визначається формулою (1.37), а $\rho(x_3)$ знаходиться з (1.35);

<u>$k = -2$</u>

$$u_2(x) = \exp\{i(\gamma x_0 - \sigma x_1 - \tau x_2)\}\varphi(x_3),$$

де φ описується формулою (1.37), а $\rho(x_3)$ визначається з (1.36).

Розглянемо редуковане рівняння 9 з (1.24), поклавши $F(|\varphi|) = \lambda|\varphi|^k$:

$$-4\omega\ddot{\varphi} - 4\dot{\varphi} + \frac{\gamma^2}{\omega}\varphi = \lambda|\varphi|^k\varphi. \tag{1.38}$$

Здійснивши заміну змінних:

$$\varphi(\omega) = \omega^{-\frac{1}{k}}\Phi(\ln\omega),$$

зводимо звичайне диференціальне рівняння (1.38) до рівняння із сталими коефіцієнтами:

$$\left[\frac{(k^2\gamma^2 - 4)}{k^2}\right]\Phi + \frac{8}{k}\dot{\Phi} - 4\ddot{\Phi} = \lambda|\Phi|^k\Phi.$$

Звідси, якщо $\Phi = C = \mathrm{const}$, одержуємо

$$C = \left[\frac{k^2\gamma^2 - 4}{\lambda k^2}\right]^{\frac{1}{k}},$$

а $\varphi(\omega)$ набуде вигляду:

$$\varphi(\omega) = \left[\frac{(k^2\gamma^2 - 4)}{\lambda k^2}\right]^{\frac{1}{k}} \omega^{-\frac{1}{k}}\exp\{iC_1\}, \quad C_1 \in \mathbf{R}.$$

Отже, відповідний інваріантний розв'язок рівняння (1.1) має вигляд:

k – довільне дійсне число

$$u_3(x) = \left[\frac{(k^2\gamma^2 - 4)}{\lambda k^2}\right]^{\frac{1}{k}} (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{k}}\exp\left\{i\gamma\arcsin\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - iC_1\right\}.$$

Як зазначено в параграфі 1.1, серед одержаних редукованих рівнянь є не лише звичайні диференціальні рівняння, але й суто алгебраїчні.

Розглянемо редуковане рівняння 13 з (1.25), де $F(|\varphi|) = \lambda_1 + \lambda_2|\varphi|^k$:

$$\left(\frac{\beta^2\varepsilon^2 + 1}{\beta^2\omega^2} + \frac{2\gamma}{\beta^2\omega} + \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)\varphi = F(|\varphi|)\varphi$$

Поділивши обидві частини рівності на φ ($\varphi \neq 0$), знаходимо, що $|\varphi|$ задано неявним чином:

$$F(|\varphi|) = \frac{\beta^2\varepsilon^2 + 1}{\beta^2\omega^2} + \frac{2\gamma}{\beta^2\omega} + \frac{\gamma^2}{\beta^2}.$$

Тим самим ми отримали клас розв'язків рівняння (1.1), який містить одну довільну дійсну функцію $\Phi(\omega)$

$$\varphi = F^{-1}\left(\frac{\beta^2\varepsilon^2+1}{\beta^2\omega^2}+\frac{2\gamma}{\beta^2\omega}+\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)\exp\{i\Phi(\omega)\}.$$

Тут і надалі Φ – це довільна двічі неперервно – диференційовна функція, символом F^{-1} позначено функцію, обернену до F.

Оскільки $F(|\varphi|) = \lambda_1 + \lambda_2|\varphi|^k$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\lambda_2|\varphi|^k = F - \lambda_1$, то $|\varphi| = F^{-1} = \lambda_1^{-\frac{1}{k}}(F-\lambda_2)^{\frac{1}{k}}$. Тому

$$F^{-1}\left(\frac{\beta^2\varepsilon^2+1}{\beta^2\omega^2}+\frac{2\gamma}{\beta^2\omega}+\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right) = \lambda_2^{-\frac{1}{k}}\left(\frac{\beta^2\varepsilon^2+1}{\beta^2\omega^2}+\frac{2\gamma}{\beta^2\omega}+\frac{\gamma^2}{\beta^2}-\lambda_1\right)^{\frac{1}{k}}.$$

В результаті одержуємо

$$\varphi = \lambda_2^{-\frac{1}{k}}\left(\frac{\beta^2\varepsilon^2+1}{\beta^2\omega^2}+\frac{2\gamma}{\beta^2\omega}+\frac{\gamma^2}{\beta^2}-\lambda_1\right)^{\frac{1}{k}}\exp\{i\Phi(\omega)\}.$$

Відповідний інваріантний розв'язок рівняння (1.1) має вигляд:

k –довільне дійсне число

$$u_4(x) = \lambda_2^{-\frac{1}{k}}\exp\left\{i\frac{\varepsilon(\beta x_1 - x_2)}{\beta(x_0+x_3)} - i\frac{\gamma x_2}{\beta} + i\Phi(x_0+x_3)\right\}\times$$
$$\times\left(\frac{\beta^2\varepsilon^2+1}{\beta^2(x_0+x_3)^2}+\frac{2\gamma}{\beta^2(x_0+x_3)}+\frac{\gamma^2}{\beta^2}-\lambda_1\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Для інших редукованих рівнянь, перерахованих на початку цього параграфа, загальні (частинні) розв'язоки та відповідні їм інваріантні розв'язки рівняння (1.1) знаходяться аналогічно. Всі інваріанті розв'язки рівняння (1.1) подано в залежності від степеня нелінійності k. У всіх формулах, які наведено нижче в цьому параграфі, C_1, C_2, C_3, C_4 – довільні дійсні константи.

Розв'язавши рівняння 3, 7, 8 з (1.24), 14, 15, 21, 22, 24, 25, 26, 29 з (1.25) та 31, 32, 33, 35, 36 з (1.26), де $F(|\varphi|) = \lambda_1 + \lambda_2|\varphi|^k$ та рівняння 1, 4, 10, 12 з (1.24), 14, 17, 18, 20, 23, 30 з (1.25) , де $F(|\varphi|) = \lambda|\varphi|^k$, ми для рівняння (1.1) отримали такі інваріантні розв'язки:

<u>*k – довільне дійсне число*</u>

$$u_5(x) = C_1 \exp\left\{ i\frac{[(\sigma^2+\gamma^2-\varepsilon^2)(x_0+x_3)-\lambda C_1]}{2\varepsilon} + \right.$$
$$\left. + i(\varepsilon x_0 - \gamma x_1 - \sigma x_2) + iC_2 \right\}, \quad \varepsilon \neq 0;$$

$$u_6(x) = C_1 \exp\left\{ i\gamma x_0 - i\left(\frac{\lambda C_1}{2\gamma} + i\frac{\gamma}{2}\right)(x_0 - x_3) + iC_2 \right\}, \ \gamma \neq 0;$$

$$u_7(x) = \exp\{i(\gamma \ln(x_0+x_3) - \tau x_2 - \sigma x_1 + C_1)\} \left[\frac{4(1-ik\gamma)}{\lambda_2 k^2}\right]^{\frac{1}{k}} \times$$
$$\times (x_0^2 - x_3^2)^{-\frac{1}{k}}, \quad \text{де} \quad \lambda_1 = \sigma^2 + \tau^2;$$

$$u_8(x) = \exp\{i(\gamma \ln(x_0+x_3) - \sigma x_2 + C_1)\} \left[\frac{4(ik\gamma - 1)}{\lambda_2 k^2}\right]^{\frac{1}{k}} \times$$
$$\times (-x_0^2 + x_1^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{k}}, \quad \text{де} \quad \lambda_1 = \sigma;$$

$$u_9(x) = \exp\left\{ i\sigma x_0 + i\gamma \arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - i\tau x_3 + iC_1 \right\} \times$$
$$\times \left[\frac{(k^2\gamma^2 - 4)}{\lambda k^2}\right]^{\frac{1}{k}} (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{k}};$$

$$u_{10}(x) = \exp\left\{ i\frac{\gamma}{\alpha}\ln(x_0+x_3) + iC_1 \right\} \left[\frac{4(1 - ik\gamma\alpha^{-1})}{\lambda k^2}\right]^{\frac{1}{k}} (x_0^2 - x_3^2)^{-\frac{1}{k}};$$

$$u_{11}(x) = \exp\left\{ -i\gamma \arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + i\sigma \ln(x_0+x_3) + iC_1 \right\} \times$$
$$\times \left[\frac{k^2\gamma^2 - 4)}{\lambda k^2}\right]^{\frac{1}{k}} (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{k}};$$

$$u_{12}(x) = \exp\left\{ -i\gamma \ln(x_0+x_3) + iC_1 \right\} \left[\frac{4(ik\gamma - 1)}{\lambda_2 k^2}\right]^{\frac{1}{k}} \times$$
$$\times (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2)^{-\frac{1}{k}};$$

$$u_{13}(x) = \exp\left\{i\frac{\gamma}{\alpha}\ln(x_0+x_3)+iC_1\right\}\left[\frac{4(1-ik\gamma\alpha^{-1})}{\lambda k^2}\right]^{\frac{1}{k}}\times$$
$$\times(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2)^{-\frac{1}{k}};$$

$$u_{14}(x) = \lambda_2^{-\frac{1}{k}}\exp\{-i(\sigma x_1+\gamma x_2+\sigma x_2(x_0+x_3)+i\Phi(x_0+x_3)\}\times$$
$$\times(\sigma^2+\gamma^2+2\gamma\sigma(x_0+x_3)+\sigma(x_0+x_3)^2-\lambda_1)^{\frac{1}{k}};$$

$$u_{15}(x) = \lambda_2^{-\frac{1}{k}}\exp\left\{i(\gamma\frac{x_1(x_0+x_3)-x_2}{1+(x_0+x_3)^2}+\sigma\frac{x_2(x_0+x_3)-x_1}{1+(x_0+x_3)^2}+\right.$$
$$\left.+i\Phi(x_0+x_3))\right\}\left(-\frac{4\gamma\sigma(x_0+x_3)-\gamma^2-\sigma^2}{1+(x_0+x_3)^2}-\lambda_1\right)^{\frac{1}{k}};$$

$$u_{16}(x) = \lambda_2^{-\frac{1}{k}}\exp\left\{i\left(\gamma\frac{x_1(x_0+x_3-\beta)-x_2}{1+(x_0+x_3)^2-\beta(x_0+x_3)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sigma\frac{x_2(x_0+x_3)-x_1}{1+(x_0+x_3)^2-\beta(x_0+x_3)}\right)+i\Phi(x_0+x_3)\right\}\times$$
$$\times\left(\frac{\sigma^2(1+(x_0+x_3)^2)}{(1+(x_0+x_3)^2-\beta(x_0+x_3))^2}+\frac{\gamma^2(1+x_0+x_3-\beta)}{(1+(x_0+x_3)^2-\beta(x_0+x_3))^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{2\gamma\sigma\beta}{1+(x_0+x_3)^2-\beta(x_0+x_3)}-\lambda_1\right)^{\frac{1}{k}};$$

$$u_{17}(x) = \lambda_2^{-\frac{1}{k}}\exp\left\{-i\gamma\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{2(x_0+x_3)}-x_0\right)+i\Phi(x_0+x_3))\right\}\times$$
$$\times(-\lambda_1-2\gamma^2+2i\gamma(1+(x_0+x_3)^{-1}))^{\frac{1}{k}}.$$

<u>*k – довільне дійсне число, $k \neq 2$*</u>

$$u_{18}(x) = C_1(x_0+x_3)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ i \left(\gamma x_0 - \sigma x_2 + \frac{\varepsilon x_1}{x_0+x_3} - \frac{\gamma x_1^2}{2(x_0+x_3)} - \right.\right.$$

$$- \frac{\lambda C_1^k}{\gamma(2-k)}(x_0+x_3)^{\frac{2-k}{2}} + \left(\frac{\sigma^2}{2\gamma}\right)(x_0+x_3) -$$

$$\left.\left. - \frac{\varepsilon^2}{2\gamma(x_0+x_3)} + C_2 \right)\right\}, \ \gamma \neq 0;$$

$$u_{19}(x) = \exp\left\{ i \left(\tau x_0 + \frac{2\gamma x_1 - \tau x_1^2}{2(x_0+x_3)} + \frac{2\sigma x_2 - \tau x_2^2}{2(x_0+x_3-1)} \right)\right\} \varphi(\omega),$$

$$\text{де } \varphi(\omega) = \frac{C_1}{\sqrt{\omega^2-\omega}} \exp\left\{ i\omega \left(\frac{\gamma^2}{2\tau} - \frac{\sigma^2}{2\tau} - \frac{\tau}{2} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{i\lambda C_1^k}{2\tau} \int (\omega^2-\omega)^{-\frac{k}{2}} d\omega + iC_2 \right\}.$$

<u>*k – довільне дійсне число, $k \neq 1$*</u>

$$u_{20}(x) = C_1(x_0+x_3)^{-1} \exp\left\{ i \left(\tau x_0 + \frac{\gamma x_1 + \sigma x_2}{x_0+x_3} - \frac{\tau(x_1^2+x_2^2)}{2(x_0+x_3)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\lambda C_1^k}{\tau(2-k)}(x_0+x_3)^{1-k} - \frac{\tau}{2}(x_0+x_3) + C_2 \right)\right\}, \tau \neq 0.$$

<u>*k – довільне дійсне число, $k \neq -2$*</u>

$$u_{21}(x) = \exp\{i(-\gamma x_1 - \sigma x_2 - \tau x_3)\}\varphi(x_0),$$

де φ визначається формулою (1.37), а ρ задане співвідношенням:

$$\int^{\rho(\omega)} \left[(\gamma^2+\sigma^2+\tau^2-\lambda_1)z^2 + \frac{2\lambda_2}{k+2} z^{k+2} - C_1^2 z^{-2} + C_3 \right]^{-\frac{1}{2}} dz = \omega + C_4;$$

$$u_{22}(x) = \exp\{i(\gamma \ln(x_0+x_3) - \sigma x_1)\}\varphi(x_2),$$

де φ описується формулою (1.37), а ρ має вигляд:

$$\int^{\rho(\omega)} \left[(\sigma^2 - \lambda_1)z^2 - \frac{2\lambda_2}{k+2}z^{k+2} - C_1^2 z^{-2} + C_3\right]^{-\frac{1}{2}} dz = \omega + C_4;$$

$u_{23}(x) = \exp\{i\gamma \ln(x_0 + x_3)\}\varphi(x_2),$

де φ має вигляд (1.37), а ρ одержується із наступної формули:

$$\int^{\rho(\omega)} \left[-\lambda_1 z^2 - \frac{2\lambda_2}{k+2}z^{k+2} - C_1^2 z^{-2} + C_3\right]^{-\frac{1}{2}} dz = \omega + C_4;$$

$u_{24}(x) = \exp\{i(\gamma\alpha^{-1}x_0\}\varphi(x_3), \quad \alpha \neq 0,$

де φ визначається формулою (1.37), а ρ має таке задання:

$$\int^{\rho(\omega)} \left[(-\gamma^2\alpha^{-2} - \lambda_1)z^2 - \frac{2\lambda_2}{k+2}z^{k+2} - C_1^2 z^{-2} + C_3\right]^{-\frac{1}{2}} dz = \omega + C_4;$$

$u_{25}(x) = \exp\{i(-\gamma\alpha^{-1}x_3\}\varphi(x_0), \quad \alpha \neq 0,$

де φ описується формулою (1.37), а ρ знаходиться таким чином:

$$\int^{\rho(\omega)} \left[(\gamma^2\alpha^{-2} - \lambda_1)z^2 - \frac{2\lambda_2}{k+2}z^{k+2} - C_1^2 z^{-2} + C_3\right]^{-\frac{1}{2}} dz = \omega + C_4;$$

$u_{26}(x) = \exp\{i(-\gamma\alpha^{-1}x_1)\}\varphi(x_2), \quad \alpha \neq 0,$

де φ має вигляд (1.37), а ρ одержується із такої формули:

$$\int^{\rho(\omega)} \left[(\gamma^2\alpha^{-2} - \lambda_1)z^2 - \frac{2\lambda_2}{k+2}z^{k+2} - C_1^2 z^{-2} + C_3\right]^{-\frac{1}{2}} dz = \omega + C_4;$$

$u_{27}(x) = \exp\{i(\gamma \ln(x_0 + x_3) - \sigma x_2)\varphi(\alpha^{-1}x_1 + \ln(x_0 + x_3)\}, \alpha \neq 0,$

де φ задається формулою (1.37), а ρ визначається із фориули:

$$\int^{\rho(\omega)}\left[(-\alpha^2\sigma^2+\alpha^2\lambda_1)z^2+\frac{2\alpha^2\lambda_2}{k+2}z^{k+2}-C_1^2z^{-2}+C_3\right]^{-\frac{1}{2}}dz=\omega+C_4;$$

$$u_{28}(x)=\exp\left\{i(\gamma(x_0+x_3)+\frac{\sigma}{2}(x_0+x_3)^2-2\sigma x_2)\right\}\varphi(x_2),$$

де φ описується формулою (1.37), а ρ знаходиться таким чином:

$$\int^{\rho(\omega)}\left[(4\sigma^2-\lambda_1)z^2-\frac{2\lambda_2}{k+2}z^{k+2}-C_1^2z^{-2}+C_3\right]^{-\frac{1}{2}}dz=\omega+C_4;$$

$$u_{29}(x)=\exp\{i\gamma\ln(x_0+x_3)\}\varphi(x_2),$$

де φ має вигляд (1.37), а ρ одержується із такої формули:

$$\int^{\rho(\omega)}\left[(-\alpha^2\lambda_1)z^2-\frac{2\alpha^2\lambda_2}{k+2}z^{k+2}-C_1^2z^{-2}+C_3\right]^{-\frac{1}{2}}dz=\omega+C_4;$$

$$u_{30}(x)=\exp\{i\gamma\ln(x_0+x_3)\}\varphi(x_2),$$

де φ описується формулою (1.37), а ρ визначається із формули:

$$\int^{\rho(\omega)}\left[(-\beta^2\lambda_1)z^2-\frac{2\beta^2\lambda_2}{k+2}z^{k+2}-C_1^2z^{-2}+C_3\right]^{-\frac{1}{2}}dz=\omega+C_4.$$

$\underline{k=2}$

$$u_{31}(x)=C_1(x_0+x_3)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{i\left(\gamma x_0-\sigma x_2+\frac{\varepsilon x_1}{x_0+x_3}-\frac{\gamma x_1^2}{2(x_0+x_3)}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\lambda C_1^2}{2\gamma}\ln(x_0+x_3)+\left(\frac{\sigma^2}{2\gamma}\right)(x_0+x_3)-\frac{\varepsilon^2}{2\gamma(x_0+x_3)}+C_2\right)\right\},\gamma\neq 0;$$

$$u_{32}(x) = \frac{C_1}{\sqrt{(x_0+x_3)(x_0+x_3-1)}} \exp\left\{ i \left(\tau x_0 + \frac{2\gamma x_1 - \tau x_1^2}{2(x_0+x_3)} + \right.\right.$$

$$+ \frac{2\sigma x_2 - \tau x_2^2}{2(x_0+x_3-1)} + (x_0+x_3)\left(\frac{\gamma^2}{2\tau} - \frac{\sigma^2}{2\tau} - \frac{\tau}{2}\right) -$$

$$\left.\left. - \frac{\lambda C_1^2}{2\tau} \ln \frac{x_0+x_3-1}{x_0+x_3} + C_2 \right)\right\}, \ \tau \neq 0.$$

<u>$k=1$</u>

$$u_{33}(x) = C_1(x_0+x_3)^{-1} \exp\left\{ i \left(\tau x_0 + \frac{\gamma x_1 + \sigma x_2}{x_0+x_3} - \frac{\tau(x_1^2+x_2^2)}{2(x_0+x_3)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\lambda C_1}{2\tau} \ln(x_0+x_3) - \frac{\tau}{2}(x_0+x_3) + C_2 \right)\right\}, \ \tau \neq 0.$$

<u>$k=-2$</u>

$$u_{34}(x) = \exp\{i(-\gamma x_1 - \sigma x_2 - \tau x_3)\}\varphi(x_0),$$

де φ задається формулою (1.37), а ρ визначається із формули:

$$\int^{\rho(\omega)} [(\gamma^2+\sigma^2+\tau^2-\lambda_1)z^2 + 2\lambda_2 \ln z - C_1^2 z^{-2} + C_3]^{-\frac{1}{2}} dz = \omega + C_4;$$

$$u_{35}(x) = \exp\{i(\gamma \ln(x_0+x_3) - \sigma x_1)\}\varphi(x_2),$$

де φ описується формулою (1.37), а ρ знаходиться таким чином:

$$\int^{\rho(\omega)} [(\sigma^2-\lambda_1)z^2 - 2\lambda_2 \ln z - C_1^2 z^{-2} + C_3]^{-\frac{1}{2}} dz = \omega + C_4;$$

$$u_{36}(x) = \exp\{i\gamma \ln(x_0+x_3)\}\varphi(x_2),$$

де φ має вигляд (1.37), а ρ одержується із формули:

$$\int^{\rho(\omega)} [-\lambda_1 z^2 - 2\lambda_2 \ln z - C_1^2 z^{-2} + C_3]^{-\frac{1}{2}} dz = \omega + C_4;$$

$$u_{37}(x) = \exp\{i(\gamma\alpha^{-1}x_0\}\varphi(x_3), \quad \alpha \neq 0,$$

де φ задається формулою (1.37), а ρ визначається із формули:

$$\int^{\rho(\omega)} \left[(-\gamma^2\alpha^{-2} - \lambda_1)z^2 - 2\lambda_2 \ln z - C_1^2 z^{-2} + C_3\right]^{-\frac{1}{2}} dz = \omega + C_4;$$

$$u_{38}(x) = \exp\{i(-\gamma\alpha^{-1}x_3\}\varphi(x_0), \quad \alpha \neq 0,$$

де φ описується формулою (1.37), а ρ знаходиться таким чином:

$$\int^{\rho(\omega)} \left[(\gamma^2\alpha^{-2} - \lambda_1)z^2 - 2\lambda_2 \ln z - C_1^2 z^{-2} + C_3\right]^{-\frac{1}{2}} dz = \omega + C_4;$$

$$u_{39}(x) = \exp\{i(-\gamma\alpha^{-1}x_1)\}\varphi(x_2), \quad \alpha \neq 0,$$

де φ має вигляд (1.37), а ρ одержується із такої формули:

$$\int^{\rho(\omega)} \left[(\gamma^2\alpha^{-2} - \lambda_1)z^2 - 2\lambda_2 \ln z - C_1^2 z^{-2} + C_3\right]^{-\frac{1}{2}} dz = \omega + C_4;$$

$$u_{40}(x) = \exp\{i(\gamma \ln(x_0 + x_3) - \sigma x_2)\varphi(\alpha^{-1}x_1 + \ln(x_0 + x_3)\}, \alpha \neq 0,$$

де φ задається формулою (1.37), а ρ визначається із формули:

$$\int^{\rho(\omega)} [(-\alpha^2\sigma^2 + \alpha^2\lambda_1)z^2 + 2\alpha^2\lambda_2 \ln z - C_1^2 z^{-2} + C_3]^{-\frac{1}{2}} dz = \omega + C_4;$$

$$u_{41}(x) = \exp\left\{i(\gamma(x_0 + x_3) + \frac{\sigma}{2}(x_0 + x_3)^2 - 2\sigma x_2)\right\}\varphi(x_2),$$

де φ описується формулою (1.37), а ρ знаходиться таким чином:

$$\int^{\rho(\omega)} [(4\sigma^2 - \lambda_1)z^2 - 2\lambda_2 \ln z - C_1^2 z^{-2} + C_3]^{-\frac{1}{2}} dz = \omega + C_4;$$

$$u_{42}(x) = \exp\{i\gamma\ln(x_0+x_3)\}\varphi(x_2),$$

де φ має вигляд (1.37), а ρ одержується із такої формули:

$$\int^{\rho(\omega)} [(-\alpha^2\lambda_1)z^2 - 2\alpha^2\lambda_2\ln z - C_1^2z^{-2} + C_3]^{-\frac{1}{2}}dz = \omega + C_4;$$

$$u_{43}(x) = \exp\{i\gamma\ln(x_0+x_3)\}\varphi(x_2),$$

де φ задається формулою (1.37), а ρ визначається таким чином:

$$\int^{\rho(\omega)} [(-\beta^2\lambda_1)z^2 - 2\beta^2\lambda_2\ln z - C_1^2z^{-2} + C_3]^{-\frac{1}{2}}dz = \omega + C_4.$$

1.4. Симетрія хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами

Розглядається хвильове рівняння

$$\Box u + a_\mu(x)\frac{\partial u}{\partial x_\mu} = F(u), \qquad \mu = \overline{0,3}, \tag{1.39}$$

де $\Box = \dfrac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – оператор Даламбера у 4-вимірному псевдоевклідовому просторі $R(1,3)$; $u = u(x)$ – деяка дійсна функція, $x = (x_0,x_1,x_2,x_3)$. Тут і далі за індексами, що повторюються, передбачено сумування. Підняття та опускання індексу здійснюється за допомогою метричного тензора простору Мінковського $g_{\mu\nu} =$ $= \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)$. Наприклад,

$$u_{x^\mu} = g_{\mu\nu}u_{x_\nu} = \begin{cases} u_{x_0}, & \mu = 0, \\ -u_{x_a}, & \mu = a = 1,2,3. \end{cases}$$

Симетрія рівняння (1.39) при фіксованих значеннях $a_\mu(x)$ вивчена в [29, 57, 58, 61] .

У даному параграфі досліджується симетрія рівняння (1.39), коли $a_\mu(x)$ не є фіксованими функціями. Для цього застосовуємо модифікований метод Софуса Лі, вважаючи функції $a_\mu(x)$ новими залежними змінними [29, 57, 58]. В рамках такого підходу вдається суттєво розширити симетрію рівняння (1.39). Зауважимо, що ні при яких фіксованих $a_\mu(x)$ це рівняння не є конформно-інваріантним.

Теорема 1.4.1. *Максимальною алгеброю інваріантності (MAI) рівняння (1.39) з довільною функцією $F(u)$ є алгебра Пуанкаре $AP(1,3)$ з базисними операторами:*

$$P_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad J_{\mu\nu} = x^\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - x^\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + a^\mu \frac{\partial}{\partial a_\nu} - a^\nu \frac{\partial}{\partial a_\mu}, \ \mu, \nu = \overline{0,3}. \tag{1.40}$$

Теорема 1.4.2. *Всі рівняння типу (1.39), які допускають більш широку алгебру інваріантності, ніж алгебра Пуанкаре $AP(1,3)$, локально еквівалентні таким диференціальним рівнянням:*

$$1. \quad \Box u + a_\mu(x) \frac{\partial u}{\partial x_\mu} = \lambda u^k, \qquad k \neq 1, \lambda \neq 0; \tag{1.41}$$

$MAI: \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(1)} \rangle,$

$$D^{(1)} = x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - a_\mu \frac{\partial}{\partial a_\mu} + \frac{2}{1-k} u \frac{\partial}{\partial u}.$$

$$2. \quad \Box u + a_\mu(x) \frac{\partial u}{\partial x_\mu} = \lambda \exp(u), \qquad \lambda \neq 0; \tag{1.42}$$

$MAI: \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(2)} \rangle,$

$$D^{(2)} = x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - a_\mu \frac{\partial}{\partial a_\mu} - 2 \frac{\partial}{\partial u}.$$

$$3. \quad \Box u + a_\mu(x) \frac{\partial u}{\partial x_\mu} = \lambda u, \qquad \lambda \neq 0; \tag{1.43}$$

$MAI: \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, I \rangle,$

$$I = u \frac{\partial}{\partial u}.$$

$$4. \quad \Box u + a_\mu(x)\frac{\partial u}{\partial x_\mu} = 0, \tag{1.44}$$

$$\begin{aligned}
&MAI : \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D, Q, K_\mu \rangle, \\
&D = x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - a_\mu \frac{\partial}{\partial a_\mu}, \quad Q = \frac{\partial}{\partial u}, \\
&K_\mu = 2x_\mu D - x^2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} - x_\nu \left(x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - a_\nu \frac{\partial}{\partial a_\mu} \right) + 4\frac{\partial}{\partial a^\mu}, \ \mu, \nu = \overline{0,3},
\end{aligned}$$

де λ та k – довільні сталі.

Доведення теорем 1.4.1, 1.4.2 базується на методі Софуса Лі [21, 61], який модифікуємо так: функції $a_\mu(x)$ вважаємо додатковими залежними змінними, а тому симетрія рівняння (1.39) вивчається в класі операторів вигляду:

$$X = \xi^\mu(x,u,a)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta(x,u,a)\frac{\partial}{\partial u} + \kappa^\mu(x,u,a)\frac{\partial}{\partial a^\mu}, \ \mu = \overline{0,3}, \tag{1.45}$$

де функції ξ^μ, η, κ^μ визначаються з критерію інваріантності

$$\underset{2}{X}\left(\Box u + a_\mu(x)\frac{\partial u}{\partial x^\mu} - F(u) \right) |_{[\Sigma]} = 0,$$

де $[\Sigma]$ – диференціальний многовид рівняння, тобто

$$[\Sigma] = \left[\Box u + a_\mu(x)\frac{\partial u}{\partial x^\mu} = F(u) \right].$$

Знайшовши друге продовження оператора (1.45) за відповідними формулами (див., напр., [21]), подаємо критерій інваріантності у вигляді:

$$\begin{aligned}
&[D_\mu D^\mu(\eta) - u_\nu D_\mu D^\mu(\xi^\nu) - 2u_{\mu\nu}D^\mu(\xi^\nu) + \\
&+ a_\mu(x)(D_\mu(\eta) - u_\nu D_\mu(\xi^\nu)) + \kappa^\mu u_\mu - \eta F']_{[\Sigma]} = 0.
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Тут і далі, $D^\mu = g^{\mu\nu}D_\nu$, де D_ν – оператор повного диференціювання, який має такий вигляд:

$$D_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} + u_\nu \frac{\partial}{\partial u} + u_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial u_\mu} + \ldots, \text{ де } u_\nu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, \ u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \text{ і т.д..}$$

Розщеплюючи умову (1.46) за старшими похідними $u_{\mu\nu}(\mu \neq \nu)$, $u_{aa}(a = 1, 2, 3)$, встановлюємо, що функції ξ^{μ} мають задовольняти систему рівнянь Кіллінга

$$\xi_0^i = \xi_i^0, \quad \xi_j^i = -\xi_i^j, \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{1,3}; \quad \xi_0^0 = \xi_1^1 = \xi_2^2 = \xi_3^3 \tag{1.47}$$

та рівняння

$$\xi_u^{\mu} = 0, \qquad \xi_{a^{\nu}}^{\mu} = 0, \quad \mu, \nu = \overline{1,3}, \tag{1.48}$$

де

$$\xi_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}}, \quad \xi_u^{\mu} = \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial u}, \quad \xi_{a_{\nu}}^{\mu} = \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial a_{\nu}}.$$

З урахуванням цього перепишемо вираз (1.45) у вигляді

$$\begin{aligned} &[D_{\mu}D^{\mu}(\eta) - 2u_{\nu}\xi_{00}^{\nu} - 2\Box u\xi_0^0 + \kappa^{\mu} + \\ &a_{\mu}(x)(D_{\mu}(\eta) - u_{\nu}(2\xi_0^0 - \xi_{\mu}^{\nu}) - \eta F'(u)]_{[\Sigma]} = 0. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Подальше розщеплення виразу в лівій частині (1.49) призводить до таких рівнянь:

$$\eta_{uu} = 0, \quad \eta_{a^{\nu}} = 0, \quad \text{де} \quad \eta_{a^{\nu}} = \frac{\partial \eta}{\partial a^{\nu}}; \tag{1.50}$$

$$\kappa^{\nu} = a^{\mu}\xi_{\mu}^{\nu} - 2a^{\nu}\xi_0^0 + \Box\xi^{\nu} - 2\eta_u^{\nu}, \quad \mu, \nu = \overline{0,3}; \tag{1.51}$$

$$\Box\eta + \eta_u F(u) + a_{\mu}\eta_{\mu} - \eta F'(u) - 2\xi_0^0 = 0. \tag{1.52}$$

Загальний розв'язок системи (1.47),(1.48),(1.50) має вигляд:

$$\xi^{\nu} = 2x^{\nu}x_{\mu}c^{\mu} - x_{\mu}x^{\mu}c^{\nu} + b^{\nu\mu}x_{\mu} + dx^{\nu} + e^{\nu}, \tag{1.53}$$

$$\eta = H_1(x)u + H_2(x), \tag{1.54}$$

де c^{μ}, $b^{\nu\mu} = -b^{\mu\nu}$, d, e^{ν} - довільні константи, $H_1(x)$, $H_2(x)$ – довільні гладкі функції. Підставляючи вираз (1.54) у рівняння (1.52) і розщеплюючи за a_{μ}, знаходимо, що $H_1(x) = h_1$, $H_2(x) = h_2$, де h_1, h_2 – довільні константи. Звідси випливає, що

$$\eta = h_1 u + h_2. \tag{1.55}$$

Підстановка виразів (1.53), (1.55) в класифікуючі рівняння (1.51), (1.52) показує, що

$$\begin{cases} \kappa^{\nu} = a^{\mu}(2x^{\nu}c_{\mu} - 2x_{\mu}c^{\nu} + b^{\nu}_{\mu} + d) - 2a^{\nu}(2c^{\mu}x_{\mu} + d) + \Box\xi^{\nu}, \\ F(u)\,(h_1 - 2(2c^{\mu}x_{\mu} + d)) - (h_1 u + h_2)F'(u) = 0. \end{cases} \tag{1.56}$$

Звідси випливає, що якщо $F(u)$ – довільна функція, то $c^{\mu} = d = h_1 = h_2 = 0$. А отже, рівняння (1.39) інваріантне відносно оператора

$$X = b^{\nu}_{\mu}\left(x^{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} + a^{\mu}\frac{\partial}{\partial a^{\nu}}\right) + e^{\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}.$$

Тим самим завершено доведення теореми 1.4.1.

Якщо $F(u) = 0$, то рівняння (1.39) інваріантне відносно оператора (1.45), де ξ^{μ}, η, κ^{μ} відповідно мають вигляд (1.53), (1.55), (1.56). При цьому $h_1 = 0$, що і стверджується в пункті 4 теореми 1.4.2.

Якщо $F(u) = \lambda u$, то з (1.57) випливає, що $c^{\mu} = d = h_2 = 0$ (пункт 3 із формулювання теореми 1.4.2).

Диференціюючи рівняння (1.52) за x_{μ}, одержуємо, що $\xi^0_{0\mu} = 0$, а отже $c_{\mu} = 0, \xi^0_0 = d$. Умова (1.56) набула вигляду

$$\begin{cases} \kappa^{\nu} = a^{\mu}(b^{\nu\mu} + d) - 2a^{\nu}d, \\ F(u)h_1 - 2d - (h_1 u + h_2)\,F'(u) = 0. \end{cases} \tag{1.57}$$

Аналіз системи (1.57) показує, що її загальний розв'язок має вигляд:

$$\begin{array}{l|l} F(u) = \lambda u^k & h_1 = \frac{2d}{1-k},\ k \neq 1, \\ F(u) = \lambda \exp(u) & h_2 = -2d. \end{array}$$

Отже, у цьому випадку мають місце твердження пунктів 1, 2 із формулювання теореми 1.4.2. Доведення теореми 1.4.2 завершене.

З доведених теорем випливає, що рівняння типу (1.39) інваріантне відносно розширеної групи Пуанкаре $A\widetilde{P}(1,3)$ тоді і тільки тоді, коли воно еквівалентне одному із рівнянь (1.41), (1.42), (1.43).

Наступний результат є наслідком теореми 1.4.2, але, враховуючи його важливість, сформулюємо його як окреме твердження.

Теорема 1.4.3. *Рівняння (1.39) допускає конформну алгебру тоді і тільки тоді, коли воно еквівалентне рівнянню (1.44).*

Рівняння (1.39) у даному підході є рівнянням з п'ятьма залежними змінними $u(x)$ та $a_\mu(x)$, $\mu = \overline{0,3}$. Тому, природно довизначити його деякими додатковими умовами на $a_\mu(x)$ і розглянути, наприклад, таку систему:

$$\begin{cases} \Box u + a_\mu(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_\mu} = F(u), \qquad \mu = \overline{0,3}, \\ \Box a^\mu = R(u)\dfrac{\partial u}{\partial x_\mu}. \end{cases} \tag{1.58}$$

Вичерпний симетрійний аналіз системи диференціальних рівнянь з частинними похідними (1.58) в класі операторів (1.45) наведено в теоремах 1.4.4, 1.4.5, доведення яких проводиться аналогічно доведенню теорем 1.4.1, 1.4.2.

Теорема 1.4.4. *Максимальною алгеброю інваріантності системи (1.58) з довільними функціями $F(u)$ та $R(u)$ є алгебра Пуанкаре $AP(1,3)$ з базисними операторами (1.40).*

Теорема 1.4.5. *Система диференціальних рівнянь з частинними похідними (1.58) допускає алгебру симетрії більш широку, ніж $AP(1,3)$, тоді і тільки тоді, коли вона еквівалентна одній з таких чотирьох систем:*

1. $$\begin{cases} \Box u + a_\mu(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_\mu} = \lambda u^k, \\ \Box a^\mu = \lambda u^{k-2}\dfrac{\partial u}{\partial x_\mu}, \qquad \lambda \neq 0,\ k \neq 1, \end{cases} \qquad MAI: \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(1)} \rangle.$$

2. $$\begin{cases} \Box u + a_\mu(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_\mu} = \lambda u, \\ \Box a^\mu = \dfrac{\lambda}{u}\dfrac{\partial u}{\partial x_\mu}, \qquad \lambda \neq 0, \end{cases} \qquad MAI: \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, I \rangle.$$

3. $$\begin{cases} \Box u + a_\mu(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_\mu} = \lambda\exp(u), \\ \Box a^\mu = \lambda\exp(u)\dfrac{\partial u}{\partial x_\mu}, \qquad \lambda \neq 0, \end{cases} \qquad MAI: \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(2)}\rangle.$$

4. $$\begin{cases} \Box u + a_\mu(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_\mu} = 0, \\ \Box a^\mu = 0, \end{cases} \qquad MAI: \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D, Q\rangle.$$

Зауважимо, що серед систем вигляду (1.58) немає конформно-інваріантних рівнянь ні для яких $F(u)$, $R(u)$.

1.5. Симетрія рівнянь типу Бюргерса з додатковою умовою

Розглянемо нелінійні одновимірні рівняння вигляду

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = F\left(u_{(2)}, u_{(3)}, \ldots, u_{(n)}\right), \tag{1.59}$$

де $u = u(t,x)$; $u_{(0)} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$; $u_{(n)} = \dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}$, $F\left(u_{(2)}, u_{(3)}, \ldots, u_{(n)}\right)$ – довільна гладка функція, $F \neq const$.

До класу рівнянь (1.59) належать відомі рівняння гідродинаміки, а саме, рівняння простої хвилі, Бюргерса, Кортевега-де-Фріза, Кортевега-де-Фріза-Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{1.60}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1.61}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{1.62}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{1.63}$$

Рівняння (1.60) – (1.63) широко використовуються для опису реальних хвильових процесів в гідродинаміці, зокрема, в теорії мілкої води та акустиці [17, 25, 26, 92]. Дослідженню рівнянь такого типу, включаючи вивчення їх симетрійних властивостей, присвячено ряд публікацій (див., напр., [19, 20, 35, 61, 94, 95]).

Як відомо [26], рівняння (1.61) нелокальною заміною Коула-Хопфа

$$u = 2\lambda \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{1.64}$$

зводиться до лінійного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0. \tag{1.65}$$

Зауважимо, що симетрія рівняння теплопровідності (1.65) значно ширша за симетрію рівняння Бюргерса (1.61) [61].

В роботі [31] здійснено симетрійну класифікацію узагальненого рівняння типу Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right). \tag{1.66}$$

Рівняння (1.66) з довільною функцією $F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ інваріантне відносно алгебри Галілея $AG(1,1)$. Воно має більш широку симетрію тільки в таких випадках [31]:

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^k, \tag{1.67}$$

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \ln \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.68}$$

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.69}$$

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^{1/3}, \tag{1.70}$$

де k, λ – довільні константи.

У даному параграфі проведено симетрійну класифікацію рівняння (1.66), де $F\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ визначається співвідношеннями (1.67) – (1.70), з додатковою умовою, яка є узагальненням умови (1.64) і має такий вигляд:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+f^1(u)\frac{\partial\psi}{\partial x}+f^2(u)\psi=0.$$

Розглянемо систему

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+f^1(u)\dfrac{\partial\psi}{\partial x}+f^2(u)\psi=0.\end{cases} \tag{1.71}$$

Теорема 1.5.1. *Максимальною алгеброю інваріантності системи (1.71), в залежності від значення функцій $f^1(u)$ та $f^2(u)$, є одна із таких алгебр Лі:*

1) $\langle P_0, P_1, X_1\rangle$, якщо $f^1(u)$, $f^2(u)$ – довільні функції, тут і далі

$$P_0=\frac{\partial}{\partial t},\qquad P_1=\frac{\partial}{\partial x},\qquad X_1=b(t)\psi\frac{\partial}{\partial\psi},$$

$b(t)$ – довільна функція;

2) $\langle P_0, P_1, X_1, X_2\rangle$, якщо $f^1(u)$ – довільна функція, $f^2=0$,(a, b, d – довільні константи), де додатковий оператор симетрії має вигляд

$$X_2=h(t)\frac{\partial}{\partial\psi},$$

$h(t)$ – довільна функція;

3) $\langle P_0, P_1, X_1, X_3, X_4, X_5\rangle$, якщо $f^1(u)=au+b$, $f^2(u)=\frac{1}{4}a^2u^2+\frac{1}{2}abu+d$ (a, b, d – довільні константи), де додаткові оператори симетрії мають вигляд

$$X_3=t\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}-\frac{1}{2}ax\psi\frac{\partial}{\partial\psi},\quad X_4=2t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}-u\frac{\partial}{\partial u}-\frac{1}{2}bx\psi\frac{\partial}{\partial\psi},$$
$$X_5=t^2\frac{\partial}{\partial t}+tx\frac{\partial}{\partial x}+(x-tu)\frac{\partial}{\partial u}-\frac{1}{4}(2btx+ax^2)\psi\frac{\partial}{\partial\psi},$$

4) $\langle P_0, P_1, X_1, X_3, X_4, X_5, R_1, R_2\rangle$, *якщо* $f^1 = b$, $f^2 = d$ *(*b, d *– довільні константи), де нові додаткові оператори симетрії мають вигляд*

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= C_1(t)\exp\left(-\frac{1}{2}(b+\sqrt{b^2-4d})x\right),\\ R_2 &= C_2(t)\exp\left(-\frac{1}{2}(b-\sqrt{b^2-4d})x\right), \end{aligned}\right. \quad \text{якщо}\ \ b^2-4d>0,$$

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= C_1(t)\exp\left(-\frac{b}{2}x\right),\\ R_2 &= xC_2(t)\exp\left(-\frac{b}{2}x\right), \end{aligned}\right. \quad \text{якщо}\ \ b^2-4d=0,$$

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= C_1(t)\exp\left(-\frac{b}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{4d-b^2}}{2}x,\\ R_2 &= C_2(t)\exp\left(-\frac{b}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{4d-b^2}}{2}x, \end{aligned}\right. \quad \text{якщо}\ \ b^2-4d<0.$$

Тут $C_1(t)$, $C_2(t)$ – довільні функції.

Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \ln\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + f^1(u)\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + f^2(u)\psi = 0. \end{cases} \tag{1.72}$$

Теорема 1.5.2. *Максимальною алгеброю інваріантності системи (1.72), в залежності від значення функцій* $f^1(u)$ *та* $f^2(u)$*, є такі алгебри Лі:*
1) $\langle P_0, P_1, X_1\rangle$, *якщо* $f^1(u)$, $f^2(u)$ *– довільні функції;*
2) $\langle P_0, P_1, X_1, X_2\rangle$, *якщо* $f^1(u)$ *– довільна функція,* $f^2 = 0$*;*
3) $\langle P_0, P_1, X_1, Q\rangle$, *якщо* $f^1(u) = au + b$, $f^2(u) = \dfrac{1}{4}a^2u^2 + \dfrac{1}{2}abu + d$ *(*a, b, d *– довільні константи), де*

$$Q = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2}ax\psi\frac{\partial}{\partial\psi};$$

4) $\langle P_0, P_1, X_1, X_3, X_4, X_5, R_1, R_2\rangle$, *якщо* $f^1 = b$, $f^2 = d$ *(*b, d *– довільні константи).*

Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \lambda\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^{1/3} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + f^1(u)\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + f^2(u)\psi = 0. \end{cases} \tag{1.73}$$

Теорема 1.5.3. *Максимальною алгеброю інваріантності системи (1.73), в залежності від значення функцій $f^1(u)$ та $f^2(u)$, є такі алгебри Лі:*
1) $\langle P_0, P_1, X_1, Y_1\rangle$, якщо $f^1(u)$, $f^2(u)$ – довільні функції, де

$$Y_1 = u\partial_x;$$

2) $\langle P_0, P_1, X_1, X_2, Y_1\rangle$, якщо $f^1(u)$ – довільні функції, $f^2 = 0$;
3) $\langle P_0, P_1, X_1, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\rangle$, якщо $f^1(u) = au+b$, $f^2(u) = \dfrac{1}{4}a^2u^2+\dfrac{1}{2}abu+d$ (a, b, d – довільні константи), де

$$\begin{aligned} &Y_2 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2}ax\psi\frac{\partial}{\partial \psi}, \\ &Y_3 = (t^2u - tx)\frac{\partial}{\partial x} + (tu - x)\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2}btx\psi\frac{\partial}{\partial \psi}, \\ &Y_4 = \frac{8}{15}t\frac{\partial}{\partial t} + (x - \frac{2}{3}u)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{5}u\frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2}bx\psi\frac{\partial}{\partial \psi}; \end{aligned}$$

4) $\langle P_0, P_1, X_1, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, R_1, R_2\rangle$, якщо $f^1 = b$, $f^2 = d$ (b, d – довільні константи).

Доведення теореми 1.5.3. Симетрійну класифікацію системи (1.73) проводимо в класі диференціальних операторів першого порядку

$$\begin{aligned} X = {} & \xi^0(t,x,u,\psi)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^1(t,x,u,\psi)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u,\psi)\frac{\partial}{\partial u} + \\ & +\beta(t,x,u,\psi)\tfrac{\partial}{\partial \psi}. \end{aligned} \tag{1.74}$$

Знайшовши друге продовження оператора (1.74), запишемо умову інваріантності для системи (1.73) у вигляді

$$\underset{2}{X} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^{1/3}\right)|_{[L_1]}= 0, \tag{1.75}$$

$$\underset{2}{X} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + f^1(u) \frac{\partial \psi}{\partial x} + f^2(u) \psi \right) |_{[L_2]} = 0, \tag{1.76}$$

де диференціальний многовид $[L_1]$ має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^{1/3},$$

диференціальний многовид $[L_2]$ має вигляд

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -f^1(u) \frac{\partial \psi}{\partial x} - f^2(u) \psi,$$

а

$$\underset{2}{X} = X + (D_i(\eta) - u_j D_i(\xi^j)) \partial_{u_i} + [D_i(\beta) - \psi D_i(\xi^j)] \partial_{\psi_i} +$$
$$+ [D_\alpha(D_i(\eta) - u_j D_i(\xi^j)) - u_{ij} D_\alpha(\xi^j)] \partial_{u_{\alpha i}} +$$
$$+ [D_\alpha(D_i(\beta) - \psi_j D_i(\xi^j)) - \psi_{ij} D_\alpha(\xi^j)] \partial_{\psi_{\alpha i}}, \quad \alpha, i, j = 0, 1.$$

Розщепивши рівності (1.75), (1.76) за похідними u_{01}, u_{11}, u_0, ψ_0, ψ_1, F (де нижні індекси означають диференціювання за відповідною змінною, тобто $u_0 = \dfrac{\partial u}{\partial t}$,$u_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}$), приходимо до умов

$$\begin{aligned} &\xi^0_1 = 0, \qquad \xi^0_u = \xi^0_\psi = 0, \qquad \xi^1_\psi = 0, \qquad \xi^1_{uu} = 0, \\ &\eta_\psi = 0, \qquad \eta_{11} = 0, \qquad \eta_{uu} = 2\xi^1_{1u}, \qquad 2\eta_{1u} = \xi^1_{11}, \end{aligned} \tag{1.77}$$

$$\beta_u = 0, \qquad \beta_{\psi\psi} = 0, \tag{1.78}$$

$$\eta + u\xi^0_0 - u\xi^1_1 - \xi^1_0 = 0, \tag{1.79}$$

$$-2\eta_u + 3\xi^0_0 - 2\xi^1_1 = 0, \tag{1.80}$$

$$\eta_0 + u\eta_1 = 0, \tag{1.81}$$

$$2\beta_{1\psi} + \xi^1_1 f^1 + \eta f^1_u = 0, \tag{1.82}$$

$$\beta_{11} + f^2 \beta + f^1 \beta_1 - f^2 \psi (\beta_\psi - 2\xi^1_1) + \eta \psi f^2_u = 0. \tag{1.83}$$

Загальний розв'язок рівнянь (1.77), (1.78) має вигляд

$$\xi^0 = P(t), \quad \xi^1 = A(t,x)u + B(t,x),$$
$$\eta = C(t,x)u + E(t,x), \tag{1.84}$$

$$\beta = M(t,x)\psi + H(t,x), \tag{1.85}$$

де $P(t)$, $A(t,x)$, $B(t,x)$, $E(t,x)$, $M(t,x)$, $H(t,x)$ – гладкі функції, які підлягають визначенню. Підставивши (1.85) до класифікуючого рівняння (1.79), знаходимо, що

$$A(t,x) = A(t),$$
$$\eta = \left[\frac{\partial B(t,x)}{\partial x} + \frac{\partial A(t)}{\partial t} - \xi^0_0\right] u + \frac{B(t,x)}{\partial t}. \tag{1.86}$$

Підставивши (1.84), (1.86) в рівняння (1.80), одержуємо, що

$$\xi^0_0 = \frac{4}{5}\frac{\partial B(t,x)}{\partial x)} + \frac{2}{5}\frac{\partial A(t)}{\partial t}, \tag{1.87}$$

а отже η набула вигляду

$$\eta = \left[\frac{1}{5}\frac{\partial B(t,x)}{\partial x} + \frac{3}{5}\frac{\partial A(t)}{\partial t}\right] u + \frac{\partial B(t,x)}{\partial t}. \tag{1.88}$$

Підставивши (1.88) в рівняння (1.81), отримали систему

$$\frac{\partial^2 B(t,x)}{\partial t^2} = 0, \frac{\partial^2 B(t,x)}{\partial x^2} = 0, 2\frac{\partial B(t,x)}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 A(t)}{\partial t^2} = 0.$$

Звідси випливає, що

$$A(t) = -\lambda_1 t^2 + \lambda_5 t + \lambda_6,$$

$$B(t,x) = (\lambda_1 t + \lambda_2)x + (\lambda_3 t + \lambda_4).$$

Отже,

$$\xi^0 = \tfrac{4}{5}\lambda t + \tfrac{2}{5}\lambda_5 t + \lambda_7,$$
$$\xi^1 = -\lambda_1 t^2 u + \lambda_5 tu + \lambda_6 u + (\lambda_1 t + \lambda_2)x + (\lambda_3 t + \lambda_4), \tag{1.89}$$
$$\eta = -\lambda_1 tu + \frac{1}{5}\lambda_2 u + \frac{3}{5}\lambda_5 u + \lambda_1 x + \lambda_3,$$

де $\lambda_1, ..., \lambda_7$ – довільні константи. Підставивши (1.85), (1.89) в рівняння (1.81) і розщепивши за ψ, одержуємо

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 M(t,x)}{\partial x^2} + f^1 \frac{\partial M(t,x)}{\partial x} + \eta f_u^2 + 2f^2\lambda_1 t + 2\lambda_2 f^2 = 0,\\ &\frac{\partial^2 H(t,x)}{\partial x^2} + f^1 \frac{\partial H(t,x)}{\partial x} + f^2 H(t,x) = 0.\end{aligned} \tag{1.90}$$

Далі, підстановка (1.85) в (1.80) після диференціювання за x, показує, що

$$2\frac{\partial^2 M(t,x)}{\partial x^2} + \lambda_1 f_u^1 = 0.$$

Можливі такі випадки:

Випадок 1.

$$\lambda_1 = 0, \qquad \frac{\partial^2 M(t,x)}{\partial x^2} = 0, \text{ а } f^1 \text{ – довільна функція.}$$

Врахувавши попереднє, підставляємо відповідні для цього випадку ξ_1, η, β в рівняння (1.80) і одержуємо після розщеплення за f^1, f_u^1

$$\xi_0 = \lambda_7, \quad \xi_1 = \lambda_6 u + \lambda_4, \quad M(t,x) = b(t), \tag{1.91}$$

тобто $\beta = b(t) + H(t,x)$.

Підставивши (1.91) в (1.90) і розщепивши за f_1, маємо:

$$H(t,x) = 0, \qquad \text{тобто} \quad \beta = b(t)\psi,$$

якщо f_1, f_2 –довільні функції;

$$H(t,x) = h(t), \qquad \text{тобто} \quad \beta = b(t)\psi + h(t),$$

якщо f^1 – довільна функція, $f^2 = 0$. Підставивши отримані значення ξ_0, ξ_1, η, β в оператор (1.74), переконуємося в справедливості пунктів 1, 2 із формулювання теореми 1.5.3.

Випадок 2.

$$f^1 = au + b, \quad \text{де} \quad a, b - \text{ довільні константи.} \tag{1.92}$$

Підставивши (1.91), (1.92) в класифікуюче рівняння (1.82) і провівши розщеплення за x, t, u, одержуємо, що

$$M(t,x) = -\frac{1}{2}(b\lambda_1 t + b\lambda_2 + a\lambda_1 x + a\lambda 3)x,$$
$$2\lambda_2 = -3\lambda_5, \qquad f^2(u) = \frac{1}{4}a^2u^2 + \frac{1}{2}abu + d,$$

де a, b, d – довільні константи. Врахувавши це, робимо висновок, що ξ^0, ξ^1, η, β мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = \frac{8}{15}\lambda_2 t + \lambda_7,\\
&\xi^1 = -\lambda_1 t^2 u - \frac{2}{3}\lambda_2 tu + \lambda_6 u + (\lambda_1 t + \lambda_2)x + \lambda_3 t + \lambda_4,\\
&\eta = -\lambda_1 tu - \frac{1}{5}\lambda_2 u + \lambda_1 x + \lambda_3,\\
&\beta = -\frac{1}{2}(b\lambda_1 t + b\lambda_2 + \frac{1}{2}a\lambda_1 x + a\lambda_3)x\psi + \lambda_8.
\end{aligned} \tag{1.93}$$

Підставивши (1.93) в оператор (1.74), приходимо до пункту 3 із формулювання теореми 1.5.3.

Якщо $f^1 = b, f^2 = d$, де b, d – довільні константи, то підстановка цих значень f^1, f^2 у вираз (1.90) і розгляд усіх можливих випадків приводить до пункту 4 із формулювання розглядуваної теореми.

Теорему 1.5.3 доведено.

Теореми 1.5.1, 1.5.2 доводяться аналогічно.

Chapter 2.

Умовна симетрія і редукція нелінійних хвильових рівнянь

Даний розділ дисертації є основним, він присвячений неліївській редукції та побудові точних розв'язків нелінійних хвильових рівнянь, інваріантних відносно груп $P(1,3)$, $\widetilde{P}(1,3)$.

В параграфі 2.1 виконано неліївську редукцію багатовимірного нелінійного рівняння Даламбера до двовимірних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Побудовано клас умовно-інваріантних анзаців для цього рівняння, який містить декілька довільних функцій. Це означає, зокрема, що нелінійне хвильове рівняння має нескінченну умовну симетрію.

В параграфі 2.2 проведено систематичне дослідження умовної симетрії багатовимірного нелінійного комплексного хвильового рівняння. В цьому ж параграфі розглядається задача редукції диференціального рівняння до алгебраїчного.

Параграф 2.3 присвячений побудові точних розв'язків комплексних хвильових рівнянь.

2.1. Про неліївську редукцію нелінійного рівняння Даламбера до двовимірних рівнянь

В даному параграфі одержано широкий клас умовних симетрій багатовимірного нелінійного рівняння Даламбера

$$\Box u = F(u), \tag{2.1}$$

де $\Box = \partial^2/\partial x_0^2 - \Delta$ – оператор Даламбера, $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ – дійсна двічі неперервно-диференційовна функція, $F(u)$ – деяка неперервна функція.

Добре відомо, що максимальною в сенсі Лі групою інваріантності рівняння (2.1) з довільною функцією $F(u)$ є група Пуанкаре $P(1,3)$. З використанням підгрупової структури групи $P(1,3)$ було отримано повний опис ліївських анзаців, які редукують чотиривимірне диференціальне рівняння з частинними похідними (1) до рівнянь з трьома, двома та однією змінною [74].

Однак, як було зазначено в [65, 72], клас анзаців, що зводять (2.1) до рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних, значно ширший за клас ліївських анзаців. Це розширення досягається за рахунок нескінченної умовної симетрії нелінійного хвильового рівняння (2.1) [69, 100].

Використовуючи для дослідження умовної симетрії рівняння (2.1) підхід, вперше запропонований в [9] і реалізований у повному обсязі в роботах [71, 106], здійснимо побудову сім'ї умовно-інваріантних анзаців для поля $u = u(x)$. Ці анзаци редукуватимуть рівняння (2.1) до рівнянь з трьома незалежними змінними, при цьому одна із змінних буде входити в редуковане рівняння як параметр, тобто за нею не буде диференціювання.

Згідно з [104] шукаємо розв'язки рівняння (2.1) у вигляді

$$u = \varphi(\omega_0, \omega_1, \omega_2), \tag{2.2}$$

де $\omega_\mu = \omega_\mu(x)$, $\mu = 0, 1, 2,$ – достатньо гладкі функції, які вибираються так, щоб підстановка (2.2) в (2.1) призводила до рівняння з коефіцієнтами, залежними тільки від "нових" змінних ω_0, ω_1, ω_2. Окрім цього, вимагаємо, щоб коефіцієнти при похідних за змінною ω_0 дорівнювали нулю.

В результаті одержуємо перевизначену систему дев'яти нелінійних диференціальних рівнянь для трьох невідомих функцій $\omega_0(x)$, $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$

$$\Box\omega_0 = 0, \qquad \omega_{0x_\mu}\omega_{0x^\mu} = 0, \tag{2.3}$$

$$\omega_{0x_\mu}\omega_{1x^\mu} = 0, \qquad \omega_{0x_\mu}\omega_{2x^\mu} = 0, \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} \omega_{1x_\mu}\omega_{1x^\mu} = F_1(\omega_0, \omega_1, \omega_2), \\ \omega_{1x_\mu}\omega_{2x^\mu} = F_2(\omega_0, \omega_1, \omega_2), \\ \omega_{2x_\mu}\omega_{2x^\mu} = F_3(\omega_0, \omega_1, \omega_2), \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\Box\omega_1 = G_1(\omega_0, \omega_1, \omega_2), \qquad \Box\omega_2 = G_2(\omega_0, \omega_1, \omega_2). \tag{2.6}$$

Тут і далі за індексами, що повторюються, передбачено сумування. Підняття та опускання індексу здійснюється за допомогою метричного тензора простору Мінковського $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\ (1, -1, -1, -1)$. При цьому рівняння для функції $\varphi(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ має вигляд

$$F_1\varphi_{\omega_1\omega_1} + 2F_2\varphi_{\omega_1\omega_2} + F_3\varphi_{\omega_2\omega_2} + G_1\varphi_{\omega_1} + G_2\varphi_{\omega_2} = F(\varphi), \tag{2.7}$$

тобто змінна ω_0 входить в рівняння як параметр.

Незважаючи на дуже складну структуру системи (2.3)–(2.6), нам вдалося побудувати її загальний розв'язок. Перш ніж сформулювати отриманий результат, зробимо важливе зауваження. Як неважко переконатися, клас рівнянь (2.3)–(2.6) є інваріантним відносно довільного невиродженого перетворення залежних змінних

$$\omega_0{}' = \Omega_0(\omega_0), \qquad \omega_i{}' = \Omega_i(\omega_0, \omega_1, \omega_2), \quad i = 1, 2. \tag{2.8}$$

Цей факт використовується для спрощення підсистеми (2.5), де, в залежності від знаку величини $\Delta = F_2^2 - F_1F_3$, можна покласти

(a) $F_1 = \pm 1, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = \mp 1$ при $\Delta > 0$,

(b) $F_1 = \pm 1, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = \pm 1$ при $\Delta < 0$,

(c) $F_1 = \pm 1, \quad F_2 = F_3 = 0$ при $\Delta = 0$.

Справедливі такі твердження.

Теорема 2.1.1. *Система диференціальних рівнянь з частинними похідними (2.3)–(2.6) сумісна тоді і тільки тоді, коли з використанням перетворення (2.8) її праві частини можна звести до вигляду:*

$$\begin{aligned} &1.\quad F_1 = F_3 = -1, \quad F_2 = 0, \quad G_1 = G_2 = 0. \\ &2.\quad F_1 = F_3 = -1, \quad F_2 = 0, \quad G_1 = -2\omega_1^{-1}, \quad G_2 = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Теорема 2.1.2. *Загальний розв'язок системи (2.3)–(2.6), який визначається з точністю до відношення еквівалентності (2.8), за умови, що виконуються рівності (2.9), задається такими формулами:*

1. $\omega_0 = \theta_\mu x^\mu, \quad \omega_1 = b_\mu x^\mu, \quad \omega_2 = c_\mu x^\mu.$

2. $\omega_0 = \omega_0(x)$ *задано неявно* $A_\mu(\omega_0)x^\mu + B(\omega_0) = 0,$

$$\omega_1 = \left(-\dot{A}_\mu(\omega_0)\dot{A}^\mu(\omega_0)\right)^{-1/2}\left(\dot{A}_\nu(\omega_0)x^\nu + \dot{B}(\omega_0)\right),$$
$$\omega_2 = \left(-\dot{A}_\mu(\omega_0)\dot{A}^\mu(\omega_0)\right)^{-3/2}\left(\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A^\mu(\omega_0)\dot{A}^\nu(\omega_0)\ddot{A}^\alpha(\omega_0)x^\beta\right),$$

де $A_\mu(\omega_0)$, $B(\omega_0)$ *– довільні функції, зв'язані співвідношенням*

$$A_\mu(\omega_0)A^\mu(\omega_0) = 0.$$

Тут θ_μ, b_μ, c_μ *– довільні дійсні сталі, які задовольняють умови*

$$\theta_\mu\theta^\mu = \theta_\mu b^\mu = \theta_\mu c^\mu = 0, \qquad b_\mu c^\mu = 0, \qquad b_\mu b^\mu = c_\mu c^\mu = -1,$$

крапка над символом означає похідну за ω_0, *символом* $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ *позначено антисиметричний тензор четвертого порядку, тобто*

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & (\mu,\nu,\alpha,\beta) = \text{цикл}\,(0,1,2,3), \\ -1, & (\mu,\nu,\alpha,\beta) = \text{цикл}\,(1,0,2,3), \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Доведення. Проведемо доведення обох теорем одночасно. Спочатку вкажемо на одну геометричну властивість простору Мінковського. А саме, нехай деякий дійсний чотиривектор $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ є ортогональним до дійсного ізотропного чотиривектора $b = (b_0, b_1, b_2, b_3)$, тобто до вектора, який задовольняє умову $b_\mu b^\mu = 0$. Тоді виконується нерівність $a_\mu a^\mu \leq 0$, при цьому рівність досягається лише у випадку, коли вектори a, b колінеарні (див., наприклад, [104]). Звідси випливає, що необхідною умовою сумісності (2.3) – (2.6) є виконання співвідношень $F_1 < 0$, $F_2 < 0$.

Використовуючи заміну змінних

$$u = \Phi(\omega_0, \omega_1, \omega_2), \quad v^1 = \omega_1, \quad v^2 = \omega_2$$

при відповідному виборі функції $\Phi(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$, зводимо систему (2.3)–(2.6) до вигляду

$$\Box u = 0, \qquad u_{x_\mu} u_{x^\mu} = 0, \tag{2.10}$$

$$u_{x_\mu} v^1_{x^\mu} = 0, \qquad u_{x_\mu} v^2_{x^\mu} = 0, \tag{2.11}$$

$$v^1_{x_\mu} v^1_{x^\mu} = -1, \quad v^2_{x_\mu} v^2_{x^\mu} = -1, \quad v^1_{x_\mu} v^2_{x^\mu} = 0, \tag{2.12}$$

$$\Box v^1 = F_1(u, v^1, v^2), \qquad \Box v^2 = F_5(u, v^1, v^2), \tag{2.13}$$

$$\operatorname{rank} \left\| \begin{matrix} u_{x_0} & u_{x_1} & u_{x_2} & u_{x_3} \\ v^1_{x_0} & v^1_{x_1} & v^1_{x_2} & v^1_{x_3} \\ v^2_{x_0} & v^2_{x_1} & v^2_{x_2} & v^2_{x_3} \end{matrix} \right\| = 3. \tag{2.14}$$

Внаслідок рівняння (2.14) $u \neq \text{const}$. Тому, використовуючи перетворення із групи $P(1,3)$, отримуємо $u_{x_0} \neq 0$. Тоді до рівнянь (2.10)–(2.13), (2.14) можна застосувати перетворення годографа

$$z_0 = u(x), \qquad z_a = x_a, \quad a = \overline{1,3}, \qquad w(z) = x_0,$$
$$v^1 = v^1(z_0, z_a), \qquad v^2 = v^2(z_0, z_a).$$

Як результат, системи (2.10)–(2.13) набувають вигляду

$$\sum_{a=1}^{3} w_{z_a z_a} = 0, \qquad \sum_{a=1}^{3} w^2_{z_a} = 1, \tag{2.15}$$

$$\sum_{a=1}^{3} w_{z_a} v^1_{z_a} = 0, \qquad \sum_{a=1}^{3} w_{z_a} v^2_{z_a} = 0, \tag{2.16}$$

$$\sum_{a=1}^{3} (v^1_{z_a})^2 = 1, \qquad \sum_{a=1}^{3} (v^2_{z_a})^2 = 1, \qquad \sum_{a=1}^{3} v^1_{z_a} v^2_{z_a} = 0, \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{a=1}^{3} (v^1_{z_a z_a} + 2w^{-1}_{z_0} v^1_{z_a} w_{z_0 z_a}) = -G_1(z_0, v^1, v^2), \\ &\sum_{a=1}^{3} (v^2_{z_a z_a} + 2w^{-1}_{z_0} v^2_{z_a} w_{z_0 z_a}) = -G_2(z_0, v^1, v^2). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Згідно з [104] (с.7112), загальний розв'язок системи (2.15) у класі дійсних функцій $w(z)$ визначається формулою

$$w(z) = \sum_{a=1}^{3} \alpha_a(z_0) z_a + \alpha(z_0), \tag{2.19}$$

де $\alpha_a, \alpha \in C^2(\mathbf{R^1}, \mathbf{R^1})$ – довільні функції, такі що

$$\sum_{a=1}^{3} \alpha_a^2(z_0) = 1. \tag{2.20}$$

Розрізняємо такі випадки.

Випадок 1. $\qquad \alpha_a \neq \mathrm{const}, a = \overline{1,3}.$

Підставивши (2.19) у (2.16), одержуємо лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку

$$\sum_{a=1}^{3} \alpha_a(z_0) v^1_{z_a} = 0, \qquad \sum_{a=1}^{3} \alpha_a(z_0) v^2_{z_a} = 0, \tag{2.21}$$

загальний розв'язок яких подається у вигляді

$$v^1 = v^1(z_0, \rho_1, \rho_2), \qquad v^2 = v^2(z_0, \rho_1, \rho_2). \tag{2.22}$$

Тут z_0 та

$$\rho_1 = \left(\sum_{a=1}^{3} \dot{\alpha}_a^2\right)^{-1/2} \left(\sum_{a=1}^{3} \dot{\alpha}_a z_a + \dot{\alpha}\right),$$
$$\rho_2 = \left(\sum_{a=1}^{3} \dot{\alpha}_a^2\right)^{-3/2} \sum_{a,b,c=1}^{3} \varepsilon_{abc} z_a \alpha_b \dot{\alpha}_c$$

– перші інтеграли рівнянь (2.22) й, окрім цього, $\sum\limits_{a=1}^{3} \dot{\alpha}_a^2 \neq 0$, ε_{abc} – антисиметричний тензор третього порядку, $\varepsilon_{123} = 1$.

Підставляючи вирази (2.22) в (2.17) та (2.18), одержуємо систему п'яти нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними для функцій $v^1 = v^1(z_0, \rho_1, \rho_2)$, $v^2 = v^2(z_0, \rho_1, \rho_2)$

$$(v^1_{\rho_1})^2 + (v^1_{\rho_2})^2 = 1, \ (v^2_{\rho_1})^2 + (v^2_{\rho_2})^2 = 1, \ v^1_{\rho_1} v^2_{\rho_1} + v^1_{\rho_2} v^2_{\rho_2} = 0, \qquad (2.23)$$

$$\begin{cases} v^1_{\rho_1\rho_1} + v^1_{\rho_2\rho_2} + 2\rho_1^{-1} v^1_{\rho_1} = -G_1(z_0, v^1, v^2), \\ v^2_{\rho_1\rho_1} + v^2_{\rho_2\rho_2} + 2\rho_1^{-1} v^2_{\rho_1} = -G_2(z_0, v^1, v^2). \end{cases} \qquad (2.24)$$

Ввівши в (2.23) позначення $\vec{A} = (v^1_{\rho_1}, v^1_{\rho_2})$, $\vec{B} = (v^2_{\rho_1}, v^2_{\rho_2})$, маємо

$$\vec{A}^2 = (v^1_{\rho})^2 + (v^1_{\rho_2})^2 = 1, \quad \vec{B}^2 = (v^2_{\rho_1})^2 + (v^2_{\rho_2})^2 = 1,$$
$$\vec{A}\vec{B} = v^1_{\rho_1} v^2_{\rho_1} + v^1_{\rho_2} v^2_{\rho_2} = 0.$$

Тобто $\vec{A}$, $\vec{B}$ – два взаємно ортогональних одиничних вектори на площині. Як відомо з курсу аналітичної геометрії, найбільш загальна форма таких векторів має вигляд $\vec{A} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\vec{B} = (\sin\varphi, \cos\varphi)$, де φ – деяка невідома функція. Враховуючи структуру векторів $\vec{A}$, $\vec{B}$, маємо дві умови сумісності для функції φ:

$$(\cos\varphi)'_{\rho_2} = (\sin\varphi)'_{\rho_1}, \qquad (\sin\varphi)'_{\rho_2} = -(\cos\varphi)'_{\rho_1},$$

тобто

$$\varphi_{\rho_2} \sin\varphi + \varphi_{\rho_1} \cos\varphi = 0, \quad \varphi_{\rho_2} \cos\varphi - \varphi_{\rho_1} \sin\varphi = 0. \qquad (2.25)$$

Визначник цієї системи не дорівнює нулеві, отже система (2.25) має єдиний розв'язок $\varphi_{\rho_1} = 0, \varphi_{\rho_2} = 0$. Звідси випливає, що $\varphi = \varphi(z_0)$. Отже v^1, v^2 мають вигляд

$$v^1 = \rho_1 \cos\varphi + \rho_2 \sin\varphi + C_1(z_0),$$

$$v^2 = \rho_1 \sin\varphi - \rho_2 \cos\varphi + C_2(z_0).$$

Перетворенням еквівалентності

$$\tilde{v}^1 = (v^1 - C_1(z_0))\cos\varphi + (v^2 - C_2(z_0))\sin\varphi,$$

$$\tilde{v}^2 = (v^1 - C_1(z_0))\sin\varphi - (v^2 - C_2(z_0))\cos\varphi,$$

можна досягти того, щоб виконувалися рівності $C_1 = C_2 = \varphi = 0$. Тому

$$v^1 = \rho_1, \qquad v^2 = \rho_2. \tag{2.26}$$

Підставивши (2.26) в рівняння (2.24), отримуємо

$$2\rho_1^{-1} v^1_{\rho_1} = -G_1(z_0, v^1, v^2), \quad 2\rho_1^{-1} v^2_{\rho_1} = -G_2(z_0, v^1, v^2).$$

Звідси

$$G_1(z_0, v^1, v^2) = -2\rho_1^{-1} = -2\omega_1^{-1}, \quad G_2(z_0, v^1, v^2) = 0.$$

Запишемо v^1 в явній коваріантній формі. Здійснивши в формулі

$$v^1 = \rho_1 = \left(\sum_{a=1}^{3} \dot{\alpha}_a^2(\omega_0)\right)^{-1/2} \left(\sum_{a=1}^{3} x_a \dot{\alpha}_a(\omega_0) + \dot{\alpha}(\omega_0)\right), \tag{2.27}$$

де функція $\omega_0 = \omega_0(x)$ визначається співвідношеннями

$$\sum_{a=1}^{3} \alpha_a(\omega_0) x_a + \alpha(\omega_0) = x_0, \quad \sum_{a=1}^{3} \alpha_a^2(\omega_0) = 1, \tag{2.28}$$

підстановку $\alpha_a = A_a(\omega_0) A_0^{-1}(\omega_0), \quad \alpha = -B(\omega_0) A_0^{-1}(\omega_0)$, отримуємо ланцюжки рівностей

$$A_\mu(\omega_0) x^\mu + B(\omega_0) = 0, \qquad A_\mu(\omega_0) A^\mu(\omega_0) = 0,$$

$$v^1 = \left(\sum_{a=1}^{3}(\dot{A}_a A_0^{-1} - A_a \dot{A}_0 A_0^{-2})^2\right)^{-1/2} \left(\sum_{a=1}^{3} x_a(\dot{A}_a A_0^{-1} A_a \dot{A}_0 A_0^{-2}) - \dot{B} A_0^{-1}\right.$$

$$\left. + B\dot{A}_0 A_0^{-2}\right) = \left(\sum_{a=1}^{3}(\dot{A}_a^2 A_0^{-2} + A_a^2 \dot{A}_0^2 A_0^{-4} - 2\dot{A}_a A_a \dot{A}_0 A_0^{-3})^{-1/2}\right) \times$$

$$\times \left(\sum_{a=1}^{3} x_a(\dot{A}_a A_0^{-1} - A_a \dot{A}_0 A_0^{-2}) + B\dot{A}_0 A_0^{-2} - \dot{B} A_0\right) =$$

$$= (-\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu A_0^{-2} - A_\mu A^\mu \dot{A}_0^2 A_0^{-4} + 2\dot{A}_\mu A^\mu \dot{A}_0 A_0^{-3})^{-1/2} \times$$

$$\times(-A_0^{-1}(x_\mu \dot{A}^\mu + \dot{B}) + A_0^{-2}\dot{A}_0(x_\mu A^\mu + B)) =$$

$$= -(-\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu)^{-1/2}(x_\mu \dot{A}^\mu + B).$$

Аналогічно обчислюємо $v^2 = \rho_2 = \omega_2$:

$$v^2 = (-\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu)^{-3/2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} A^\mu \dot{A}^\nu \ddot{A}^\alpha x^\beta.$$

Отже, пункт 2 теореми (2.1.2) доведено.

Випадок 2. $\alpha_a = \mathrm{const}, a = \overline{1,3}.$

Загальний розв'язок системи (2.15) у цьому випадку набуває вигляду

$$w(z) = \sum_{a=1}^{3} \alpha_a z_a + \alpha,\ a = \overline{1,3}. \tag{2.29}$$

Окрім цього, має місце рівність

$$\sum_{a=1}^{3} \alpha_a^2 = 1.$$

Враховуючи те, що у даному випадку $G_1 = G_2 = 0$, одержуємо з (2.16) – (2.18)

$$\omega_0 = \theta_\mu x^\mu,\ \omega_1 = v^1 = b_\mu x^\mu,\ \ \omega_2 = v^2 = c_\mu x^\mu,$$

де θ_μ, b_μ, c_μ – довільні дійсні сталі, які задовольняють умови

$$\theta_\mu \theta^\mu = \theta_\mu b^\mu = \theta_\mu c^\mu = 0, \qquad b_\mu c^\mu = 0, \qquad b_\mu b^\mu = c_\mu c^\mu = -1.$$

Прийшли до пункту 1 із формулювання теореми 2.1.2. Теореми доведено.

Таким чином, одержано вичерпний опис анзаців (2.2), що редукують досліджуване багатовимірне рівняння до диференціальних рівняннь з трьома незалежними змінними, одна з яких відіграє роль параметра. Тобто, фактично, має місце редукція до двовимірних диференціальних рівнянь з частинними похідними. В результаті побудовано два класи анзаців для нелінійного хвильового рівняння, які наводяться нижче:

$$u(x) = \varphi(\theta_\mu x^\mu, b_\mu x^\mu, c_\mu x^\mu), \tag{2.30}$$

$$u(x) = \varphi\left(\omega_0,\ \frac{\dot{A}_\mu x^\mu + \dot{B}}{\left(-\dot{A}_\nu \dot{A}^\nu\right)^{1/2}},\ \frac{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} A^\mu \dot{A}^\nu \ddot{A}^\alpha x^\beta}{\left(-\dot{A}_\nu \dot{A}^\nu\right)^{3/2}}\right). \tag{2.31}$$

Далі здійснимо симетрійний аналіз анзаців (2.30), (2.31). Анзац (2.30) є інваріантним відносно групи перетворень, яка має генератор

$$Q_1 = \theta_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}.$$

Оскільки оператор Q_1 належить до алгебри Лі інваріантності досліджуваного рівняння, то анзац (2.30) може бути отриманий за допомогою методу симетрійної редукції. Анзац (2.31) є принципово новим. Він відповідає такій умовній симетрії нелінійного хвильового рівняння:

$$Q_2 = A_\mu(\omega_0)\frac{\partial}{\partial x_\mu}.$$

Цей результат одержується за допомогою безпосередніх обчислень. Використовуючи стандартні формули продовження (див. [21]), знаходимо друге продовження оператора Q_2

$$\tilde{Q}_2 = Q_2 + (\dot{A}_\kappa x^\kappa + \dot{B})^{-1}\dot{A}_\mu u_\mu A_\nu \frac{\partial}{\partial u_\nu} + 2(\dot{A}_\kappa x^\kappa + \dot{B})^{-1}\dot{A}_\nu A_\mu u_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial u_{\mu\mu}}.$$

Діючи другим продовженням $\tilde{Q}_2$ на рівняння (2.1), отримуємо

$$\tilde{Q}_2(\Box u - F(u)) = 2(\dot{A}_\kappa x^\kappa + \dot{B})^{-1}\dot{A}_\nu A_\mu u_{\mu\nu} =$$

$$= 2(\dot{A}_\kappa x^\kappa + \dot{B})^{-1}\dot{A}_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu}(Q_2 u),\ \kappa,\mu,\nu = \overline{0,3}.$$

Звідси випливає, що система диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\Box u = F(u), \quad Q_2 u = 0$$

є інваріантною відносно однопараметричної групи перетворень Лі, яка має генератор Q_2.

Точні розв'язки

Підстановка анзацу (2.31) в рівняння (2.1) приводить до такого диференціального рівняння з частинними похідними для невідомої функції $\varphi(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$:

$$\varphi_{\omega_1\omega_1} + \varphi_{\omega_2\omega_2} + \frac{2}{\omega_1}\varphi_{\omega_1} = -F(\varphi). \tag{2.32}$$

Зазначимо, що якщо вихідне рівняння є лінійним рівнянням Клейна-Гордона-Фока, тобто, якщо $F(u) = -m^2 u,\ m = \mathrm{const}$, то наведене вище рівняння зводиться до рівняння Гельмгольца

$$\Phi_{\omega_1\omega_1} + \Phi_{\omega_2\omega_2} = m^2\Phi$$

за допомогою заміни залежної змінної

$$\varphi(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = \omega_1^{-1}\Phi(\omega_0, \omega_1, \omega_2).$$

Рівняння Гельмгольца можна проінтегувати за допомогою методу відокремлення змінних [18]. Зокрема, якщо $m = 0$ (це означає, що (2.1) є рівнянням Даламбера), воно зводиться до рівняння Лапласа, загальний розв'язок якого має вигляд

$$\Phi = U(\omega_0, z) + U(\omega_0, z^*).$$

Тут U – довільна аналітична функція відносно змінної $z = \omega_1 + i\omega_2$, z^* – комплексне спряжене z. Використавши цей результат, отримуємо такий клас точних розв'язків рівняння Даламбера:

$$u(x) = \frac{(-\dot A_\mu \dot A^\mu)^{1/2}}{\dot A_\nu x^\nu + \dot B}\left[U\left(\omega_0, \frac{\dot A_\nu x^\nu + B}{(-\dot A_\mu \dot A^\mu)^{1/2}} + i\frac{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A^\mu \dot A^\nu \ddot A^\alpha x^\beta}{(-\dot A_\mu \dot A^\mu)^{3/2}}\right) + \right.$$

$$\left. +U\left(\omega_0, \frac{\dot A_\nu x^\nu + \dot B}{(-\dot A_\mu A^\mu)^{1/2}} - i\frac{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A^\mu \dot A^\nu \ddot A^\alpha x^\beta}{(-\dot A_\mu \dot A^\mu)^{3/2}}\right)\right].$$

Неважко переконатися в тому, що нелінійне рівняння (2.32) є умовно-інваріантним відносно однопараметричної групи симетрії з генератором $Q = \dfrac{\partial}{\partial \omega_1}$. Підставляючи анзац $\varphi = \varphi(\omega_0, \omega_2)$, інваріантний відносно цієї групи, в рівняння (2.32), одержуємо двовимірне диференціальне рівняння з частинними похідними

$$\varphi_{\omega_2\omega_2} = -F(\varphi),$$

яке містить змінну ω_0 як параметр. Тому наведене рівняння можна розглядати як звичайне диференціальне рівняння відносно ω_2. Його загальний розв'язок після підстановки в формулу (2.31) дає такий клас розв'язків нелінійного хвильового рівняння (2.1):

$$u(x) = \varphi\left(\omega_0,\ \frac{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A^{\mu}\dot{A}^{\nu}\ddot{A}^{\alpha}x^{\beta}}{\left(-\dot{A}_{\nu}\dot{A}^{\nu}\right)^{3/2}}\right), \tag{2.33}$$

де функція $\varphi = \varphi(\omega_0, \omega_2)$ визначається квадратурою

$$\int^{\varphi(\omega_0,\omega_2)}\left[f(\omega_0) - 2\int^{t}F(\tau)d\tau\right]^{-1/2}dt = \omega_2 + g(\omega_0),$$

а $f(\omega_0)$, $g(\omega_0)$ – довільні гладкі функції (сталі інтегрування). Таким самим чином, використовуючи класичну й умовну симетрії диференціального рівняння з частинними похідними, одержуємо нові точні розв'язки нелінійного рівняння Даламбера із степеневою нелінійністю

$$\Box u = \lambda u^{k},\ k \neq 0, 1, \tag{2.34}$$

які наведено нижче.

1. k – довільне дійсне число

$$u(x) = \left[\frac{4(k-2)}{\lambda(k-1)^2}\right]^{\frac{1}{1-k}}\left(-\frac{(\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A^{\mu}\dot{A}^{\nu}\ddot{A}^{\alpha}x^{\beta})^2}{(\dot{A}_{\mu}\dot{A}^{\mu})^3} - \right.$$
$$\left. -\frac{(\dot{A}_{\nu}x^{\nu} + \dot{B})^2}{\dot{A}_{\mu}\dot{A}^{\mu}}\right)^{\frac{1}{1-k}},\ k \neq 2; \tag{2.35}$$

$$u(x) = \left[\frac{2(k-3)}{\lambda(k-1)^2}\right]^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{\dot{A}_\nu x^\nu + \dot{B}}{(-\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{1-k}}, \ k \neq 3. \tag{2.36}$$

2. $k = 3$

$$\begin{aligned} u(x) = &\left[-\frac{(\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} A^\mu \dot{A}^\nu \ddot{A}^\alpha x^\beta)^2}{(\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu)^3} - \frac{(\dot{A}_\nu x^\nu + \dot{B})^2}{\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu}\right]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \varphi\left(\omega_0, \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{(\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} A^\mu \dot{A}^\nu \ddot{A}^\alpha x^\beta)^2}{(\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu)^3} - \frac{(\dot{A}_\nu x^\nu + \dot{B})^2}{\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu}\right)\right), \end{aligned} \tag{2.37}$$

де $\varphi(\omega_0, y)$ визначається наступною квадратурою:

$$\int^{\varphi(\omega_0,y)} \left(-\frac{\lambda}{2}t^4 + t^2 + f(\omega_0)\right)^{-\frac{1}{2}} dt = y + g(\omega_0).$$

3. $k = 5$

$$u(x) = -\frac{\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu}{\dot{A}_\nu x^\nu + \dot{B}} \varphi\left(\omega_0, \ln\left(\frac{\dot{A}_\nu x^\nu + \dot{B}}{(-\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu)}^{\frac{1}{2}}\right)\right), \tag{2.38}$$

де $\varphi(\omega_0, y)$ визначається наступною квадратурою:

$$\int^{\varphi(\omega_0,y)} \left(-\frac{\lambda}{3}t^4 + \frac{1}{4}t^2 + f(\omega_0)\right)^{-\frac{1}{2}} dt = y + g(\omega_0).$$

У формулах (2.33), (2.37), (2.38) функція $\omega_0 = \omega_0(x)$ визначається неявно $A_\mu(\omega_0)x_\mu + B(\omega_0) = 0$, $A_\mu(\omega_0)$, $B(\omega_0)$ є довільні достатньо гладкі функції, що задовольняють рівняння $A_\mu A^\mu = 0$. Окрім цього, f, g є довільними достатньо гладкими функціями від ω_0.

За умови, що довільні функції фіксовані, а саме,

$$A_0(\omega_0) = 1, \ A_1(\omega_0) = \omega_0, \ A_2(\omega_0) = \sqrt{1 - \omega_0^2}, \ A_3(\omega_0) = 0, \tag{2.39}$$

$f = \text{const}$, $g = \text{const}$, наведені вище розв'язки зводяться до вже відомих.

Знайдемо вигляд змінних ω_0, ω_1, ω_2, якого вони набувають при такому виборі функцій $A_\mu(\omega_0)$. Для цього використовуємо формули з теореми (2.1.2). Підставляючи (2.39) в формулу $A_\mu(\omega_0)x^\mu + B(\omega_0) = 0$, отримуємо

$$\sqrt{1-\omega_0^2} = \frac{x_0 - \omega_0 x_1}{x_2}. \tag{2.40}$$

Піднесення до квадрату обох частин цієї рівності приводить до квадратичного рівняння $\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) - 2x_0x_1\omega_0 + x_0^2 - x_2^2 = 0$. Розв'язавши його, знаходимо

$$\omega_0 = \frac{x_0x_1 + x_2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_0^2}}{x_1^2 + x_2^2}. \tag{2.41}$$

Тепер знайдемо ω_1, підставивши значення функцій $A_\mu(\omega_0)$ (2.39) у формулу $\omega_1 = \left(-\dot{A}_\mu\dot{A}^\mu\right)^{-1/2}\left(\dot{A}_\nu x^\nu + \dot{B}\right)$. Обчислимо спочатку $-\dot{A}_\mu\dot{A}^\mu$:

$$-\dot{A}_\mu\dot{A}^\mu = -\left(-1 - \frac{\omega_0^2}{1-\omega_0^2}\right) = \frac{1}{1-\omega_0^2}.$$

Звідси маємо

$$\omega_1 = \left(\frac{1}{1-\omega_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[-x_1 + \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\omega_0^2}}x_2\right] = \omega_0x_2 - x_1\sqrt{1-\omega_0^2}. \tag{2.42}$$

Підставивши (2.40), (2.41) в (2.42), одержуємо

$$\omega_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_0^2}.$$

Аналогічно шукаємо ω_2. З формули (2.39) та формули

$$\omega_2 = \left(-\dot{A}_\mu\dot{A}^\mu\right)^{-3/2}\left(\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A^\mu\dot{A}^\nu\ddot{A}^\alpha x^\beta\right)$$

випливає, що для даного випадку $\mu = 0, \nu = 1, \alpha = 2, \beta = 3, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = 1$. Отже,

$$\omega_2 = (\sqrt{1-\omega_0^2})^3(\sqrt{1-\omega_0^2})^{-3}x_3 = x_3.$$

Формули (2.33), (2.35), (2.36) з ω_μ, $\mu = 0, 1, 2$, вигляду (2.39) визначають точні розв'язки рівняння (2.34), які побудовані методом симетрійної редукції В.І. Фущичем та М.І. Сєровим в [60]. Наведемо їх

$$u(x) = \varphi\left(\frac{x_0x_1 + x_2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_0^2}}{x_1^2 + x_2^2}, x_3\right);$$

$$u(x) = \left[\frac{4(k-2)}{\lambda(k-1)^2}\right]^{\frac{1}{1-k}}\left(x_3^2 + \frac{(x_1^2 + x_2^2)^3 - (x_0x_1^2 + x_0x_2^2)^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\right)^{\frac{1}{1-k}},$$

k – довільне дійсне число, $k \neq 2$;

$$u(x) = \left[\frac{2(k-3)}{\lambda(k-1)^2}\right]^{\frac{1}{k-1}}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_0^2}\right)^{\frac{2}{1-k}},$$

k – довільне дійсне число, $k \neq 3$.

Формули (2.37), (2.15), де $f = \text{const}$, $g = \text{const}$ визначають розв'язки рівняння (2.34), побудовані методом симетрійної редукції П. Вінтерніцем, А. Грюндлендом та Дж. Тузінським в [99]:

$k = 3$

$$u(x) = \left[x_3^2 + \frac{(x_1^2 + x_2^2)^3 - (x_0x_1^2 + x_0x_2^2)^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\varphi\left(\frac{x_0x_1 + x_2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_0^2}}{x_1^2 + x_2^2},\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\ln\left(x_3^2 + \frac{(x_1^2 + x_2^2)^3 - (x_0x_1^2 + x_0x_2^2)^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\right)\right),$$

де $\varphi(\omega_0, y)$ знаходиться із співвідношення

$$\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\arcsin\frac{\lambda\varphi^2(\omega_0, y) - 1}{\sqrt{1 + 2\lambda f}} + C_1 = y + g, \; C_1 = \text{const}.$$

$k=5$

$$u(x)=\left[\frac{x_2(x_1^2+x_2^2)}{x_0x_1^2\sqrt{x_1^2+x_2^2-x_0^2}-x_1x_2(x_1^2+x_2^2-x_0^2)}\right]\times$$

$$\times\varphi\left(\frac{x_0x_1+x_2\sqrt{x_1^2+x_2^2-x_0^2}}{x_1^2+x_2^2},\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2-x_0^2}\right),$$

де $\varphi(\omega_0,y)$ визначається із співвідношення

$$\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\arcsin\frac{\frac{2}{3}\lambda\varphi^2(\omega_0,y)-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{4\lambda f}{3}}}+C_2=y+g,\ C_2=\mathrm{const}.$$

Зауважимо, що за умови $f=g=0$ і при виконанні співвідношень (2.39), формула (2.37) дає два класи частинних точних розв'язків кубічного хвильового рівняння, яке, у свою чергу, породжує відомі інстантонні і меронні розв'язки рівнянь Янга-Мілса, що були отримані за допомогою анзацу Тхуфта-Коррігана-Феерлі-Вілчека [24]. Таким чином, побудовано широкий клас точних розв'язків рівнянь Янга-Мілса, який містить класичні меронні та інстантонні розв'язки, як дуже спеціальний частинний випадок.

2.2. Неліївська редукція нелінійного комплексного хвильового рівняння до звичайних диференціальних рівнянь

Поняття некласичної симетрії було запроваджене Блюменом і Коулом ще у 1969 році [44]. Проте, нетривіальні приклади некласичних симетрій для нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними з'явились значно пізніше в роботах П. Олвера, П. Розено [84], В.І. Фущича, І.М. Цифри [62]. Ці праці, разом з роботами В.І. Фущича, Р.З. Жданова [66], П. Кларксона, М. Крускала [53], Д. Леві, П. Вінтернітца [81] започаткували дослідження некласичних симетрій широкого спектру нелінійних диференціальних рівнянь. За пропозицією В.І. Фущича [36], цей тип неліївської симетрії називають умовною симетрією.

Переважна більшість праць в цій області присвячена побудові умовної симетрії нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними лише з двома незалежними змінними. Це пояснюється тим фактом, що визначальні рівняння для умовної симетрії є нелінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними і мають розмірність, що дорівнює сумі кількості залежних і незалежних змінних у досліджуваних диференціальних рівняннях. Ось чому поки що не існує регулярних методів систематичного і повного дослідження умовної симетрії багатовимірних диференціальних рівнянь з частинними похідними. У статтях [32, 64, 67, 68, 72, 100, 101, 102], які присвячені вивченню умовної симетрії багатовимірних нелінійних рівнянь квантової теорії поля (хвильового, Дірака, Леві-Леблонда і SU(2) Янга-Міллса), розроблено ефективний підхід, який грунтується на виборі анзацу спеціальної структури для знаходження умовно-інваріантного розв'язку. Ідея щодо вибору такого анзацу полягає у використанні ліївської симетрії досліджуваного рівняння.

Основною метою даного параграфа є застосування згаданої ідеї для систематичного дослідження умовної симетрії одного з основних рівнянь квантової теорії поля, а саме, комплексного нелінійного (1+3) – вимірного хвильового рівняння

$$\Box u = F(|u|)u, \tag{2.43}$$

де $\Box = \partial^2/\partial x_0^2 - \Delta$ – це оператор Даламбера, $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ – комплексна двічі неперервно-диференційовна функція, $F(|u|)$ – деяка неперервна функція.

Сформулюємо коротко алгоритм побудови умовно-інваріантних розв'язків для рівняння (2.43) [69]. Проаналізувавши структуру розв'язків, інваріантних відносно трипараметричних підгруп максимальної групи інваріантності досліджуваного рівняння, будуємо найбільш загальну форму інваріантного розв'язку. В результаті отримуємо деякий анзац, що містить декілька довільних елементів (функцій). Явний вигляд цих функцій знаходимо із умови редукції рівняння (2.43) до звичайного диференціального рівняння. Зауважимо, що всі інваріантні розв'язки нелінійного хвильового рівняння, побудовані в [61, 74, 75] та в першій главі дисертаційної роботи, отримуються таким чином. Окрім цього, одержується широкий клас принципово нових (неліївських, некласичних) редукцій, при яких побудовані точні розв'язки містять по декілька довільних функцій.

Однією із проміжних задач, яка виникає при дослідженні умовної симетрії рівняння (2.43) в рамках даного підходу, є інтегрування так званої системи Даламбера-ейконала

$$\omega_{x_\mu}\omega_{x^\mu} = f_1(\omega), \quad \Box\omega = f_2(\omega), \ \mu = \overline{0,3}. \tag{2.44}$$

Перший нетривіальний результат з інтегрування системи (2.44) належить Якобі, який побудував її загальний розв'язок у випадку, коли кількість змінних дорівнює трьом й, окрім цього, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ [43]. Пізніше цей результат було перевідкрито В.І. Смірновим та С.Л. Соболєвим в роботах [96, 97]. Узагальнення відповідних формул на випадок чотиривимірної системи (2.44) з нульовими правими частинами було одержано Г. Бейтменом [42], Е. Картаном [47], Н.П. Єругіним [55].

Порівняно недавно, К. Коллінз [54] вивів необхідні і достатні умови сумісності системи (2.44) у випадку, коли u є комплексною функцією трьох комплексних змінних, використавши методи диференціальної геометрії. У всіх випадках, коли ця система сумісна, він побудував її загальний розв'язок. Дещо пізніше, В.І. Фущич, Р.З. Жданов та І.В. Ревенко повністю проінтегрували систему Даламбера-ейконала для випадку, коли u – комплексна функція чотирьох комплексних змінних [34, 70].

Одним із результатів дисертаційної роботи є те, що з класу комплексних розв'язків, отриманих В.І. Фущичем, Р.З. Ждановим та І.В. Ревенком, виділено клас дійсних розв'язків системи Даламбера-ейконала.

Цей результат відіграє провідну роль при побудові умовно-інваріантних анзаців для комплексного нелінійного хвильового рівняння (2.43).

Умовно-інваріантні анзаци.

Як відомо, максимально допустимою в сенсі Лі групою симетрій рівняння (2.43) з довільною F є пряма сума 10-параметричної групи Пуанкаре $P(1,3)$ і групи калібровних перетворень $Q(1)$.

Симетрійну редукцію рівняння (2.43) за підгрупами групи Пуанкаре здійснено в роботах [60, 63, 74, 75, 99]. У першому параграфі першого розділу проведено симетрійну редукцію рівняння (2.43) за трипараметричними групами групи $Q = P(1,3) \oplus Q(1)$, які неспряжені підгрупам групи Пуанкаре.

Аналіз отриманних анзаців для комплексного скалярного поля $u(x)$ показує, що всі вони мають таку структуру:

$$u(x) = \exp\{ia(x)\}\varphi(\omega(x)). \tag{2.45}$$

Вигляд дійсних функцій $a(x)$ і $\omega(x)$ визначається вибором конкретної підгрупи групи Q.

Отже, першим кроком алгоритму є вибір форми анзацу для розв'язків рівняння (2.43) у вигляді (2.45). Але ми не накладаємо апріорних обмежень на вибір невідомих функцій $a(x), \omega(x)$. Єдина вимога, яка має виконуватись, полягає в тому, що підстановка виразу (2.45) в рівняння (2.43) повинна призвести до звичайного диференціального рівняння для функції $\varphi(\omega)$. В результаті приходимо до сумісної перевизначеної системи нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними для функцій $a(x), \omega(x)$. Будь-який розв'язок цієї системи після підстановки у формулу (2.45) дає анзац для комплексного скалярного поля $u(x)$, що редукує рівняння з частинними похідними (2.43) до звичайного диференціального рівняння.

Підставляючи вираз (2.45) в нелінійне хвильове рівняння (2.43) з подальшим діленням на $\exp\{ia(x)\}$, отримуємо

$$(\omega_{x_\mu}\omega_{x^\mu})\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + (\Box\omega + 2ia_{x_\mu}\omega_{x^\mu})\frac{d\varphi}{d\omega} + (i\Box a - a_{x_\mu}a_{x^\mu})\varphi = F(|\varphi|)\varphi. \tag{2.46}$$

Оскільки наведене рівняння повинно бути еквівалентним звичайному диференціальному рівнянню для функції $\varphi(\omega)$, коефіцієнти при $\dfrac{d^2\varphi}{d\omega^2}$, $\dfrac{d\varphi}{d\omega}$, φ мають бути деякими функціями від ω. Звідси випливає існування таких комплексних функцій $\Omega_1(\omega), \Omega_2(\omega), \Omega_3(\omega)$, що

$$\omega_{x_\mu}\omega_{x^\mu} = \Omega_1(\omega), \quad \Box\omega + 2ia_{x_\mu}\omega_{x^\mu} = \Omega_2(\omega), \quad i\Box a - a_{x_\mu}a_{x^\mu} = \Omega_3(\omega).$$

Враховуючи, що функції $a(x), \omega(x)$ дійсні, робимо висновок, що три наведені вище рівняння є еквівалентними таким п'яти дійсним диференціальним рівнянням з частинними похідними:

$$\begin{aligned} &\omega_{x_\mu}\omega_{x^\mu} = f_1(\omega), \quad \Box\omega = f_2(\omega), \\ &a_{x_\mu}\omega_{x^\mu} = f_3(\omega), \quad a_{x_\mu}a_{x^\mu} = f_4(\omega), \quad \Box a = f_5(\omega). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Система нелінійних диференціальних рівнянь (2.47) є необхідною і достатньою умовою для того, щоб анзац (2.45) зводив нелінійне хвильове рівняння (2.43) до звичайного диференціального рівняння. Більше цього, рівняння для функції $\varphi(\omega)$ має вигляд

$$f_1(\omega)\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + (f_2(\omega) + 2if_3(\omega))\frac{d\varphi}{d\omega} + (if_5(\omega) - f_4(\omega))\varphi = F(|\varphi|)\varphi. \tag{2.48}$$

Підсумовуючи, приходимо до висновку, що будь-який розв'язок перевизначеної системи нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними (2.47) приводить до анзацу для поля $u(x)$, що редукує рівняння (2.43) до звичайного диференціального рівняння вигляду (2.48). Зокрема, будь-який анзац, який відповідає симетрії Лі нелінійного хвильового рівняння (2.43), може бути отриманий саме так. Як приклад, розглянемо анзац для підалгебри M_{10} з першого параграфа першого розділу роботи. Тут

$$u(x) = \exp\{i\gamma\alpha^{-1}\ln(x_0 + x_3)\}\varphi(x_0^2 - x_3^2), \tag{2.49}$$

тобто $\omega(x) = x_0^2 - x_3^2$, $a(x) = \gamma\alpha^{-1}\ln(x_0 + x_3)$. Для таких $\omega(x)$, $a(x)$ праві частини системи (2.7) мають вигляд

$$\begin{aligned} &f_1(\omega) = \omega_{x_\mu}\omega_{x^\mu} = 4(x_0^2 - x_3^2) = 4\omega, \ f_2(\omega) = \Box\omega = 4, \\ &f_3(\omega) = a_{x_\mu}\omega_{x^\mu} = 2\gamma\alpha^{-1}, \ f_4(\omega) = a_{x_\mu}a_{x^\mu} = 0, \ f_5(\omega) = \Box a = 0. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Ці умови є необхідними і достатніми для того, щоб анзац (2.49) зводив нелінійне хвильове рівняння (2.43) до звичайного диференціального рівняння. Рівняння (2.48) для функції $\varphi(\omega)$ збігається з рівнянням

$$4\omega\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + (4 + 4i\gamma\alpha^{-1})\frac{d\varphi}{d\omega} = F(|\varphi|)\varphi. \tag{2.51}$$

Проте класичні анзаци Лі не вичерпують множину всіх можливих підстановок вигляду (2.45), які редукують рівняння (2.43) до звичайних диференціальних рівнянь. Причиною цього є наявність широкого класу анзаців (2.45), які відповідають умовній симетрії нелінійного хвильового рівняння і, в принципі, не можуть бути отримані в рамках симетрійного підходу Лі.

Випадок 1. $a(x) = 0$.

Широкий клас умовно-інваріантних анзаців можна отримати, якщо в (2.45) вибрати $a(x) = 0$. Цей вибір анзацу (2.45) диктується пуанкаре-інваріантністю нелінійного хвильового рівняння в тому сенсі, що будь-який пуанкаре-інваріантний анзац для поля $u(x)$ можна подати у вигляді (2.45), де $a(x) = 0$. Як наслідок, система (2.47) зводиться до системи Даламбера-ейконала (2.44). Згідно з [69] система диференціальних рівнянь з частинними похідними (2.44) для дійсної функції $\omega(x)$ є сумісною, якщо вона локально еквівалентна системі

$$\Box\omega = \varepsilon N\omega^{-1}, \quad (\partial_\mu\omega)(\partial^\mu\omega) = \varepsilon,\ \varepsilon = 0, \pm1,\ \mu = \overline{0,3}, \tag{2.52}$$

де $N = 0, 1, 2, 3$.

Використовуючи загальний розв'язок системи (2.52) у класі комплексних функцій від чотирьох комплексних змінних (побудований в [69, 72]), ми отримали розв'язки цієї системи. Для цього було виділено підмножину розв'язків, які є дійсними функціями за умови, що залежні змінні x_0, x_1, x_2, x_3 дійсні. Результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 2.2.1. *Система (2.52) має такі дійсні розв'язки:*

I. $\varepsilon = -1$

1) $N = 0$

$$\omega = A_\mu(\tau)x^\mu + R_1(\tau), \tag{2.53}$$

де $\tau = \tau(x)$ *визначається неявно*

$$B_\mu(\tau)x^\mu + R_2(\tau) = 0$$

і $A_\mu(\tau)$, $B_\mu(\tau)$, $R_1(\tau)$, $R_2(\tau)$ *– довільні гладкі дійсні функції, що задовольняють умови*

$$A_\mu(\tau)A^\mu(\tau) = -1,\ \ A_\mu(\tau)B^\mu(\tau) = 0,\ \ \dot{A}_\mu(\tau)B^\mu(\tau) = 0,$$

$$B_\mu(\tau)B^\mu(\tau) = 0;$$

2) $\quad N = 1$

$$\omega^2 \ = \ (d_\mu x^\mu + g_2)^2 - (a_\mu x^\mu + g_1)^2, \tag{2.54}$$

$$\omega^2 \ = \ (b_\mu x^\mu + C_1)^2 + (c_\mu x^\mu + C_2)^2, \tag{2.55}$$

де $g_i = g_i(a_\mu x^\mu + d_\mu x^\mu) \in C^2(\mathbf{R^1}, \mathbf{R^1})$ *– довільні функції;*

3) $\quad N = 2$

a)

$$\omega^2 = -\left(x_\mu + A_\mu(\tau)\right)\left(x^\mu + A^\mu(\tau)\right) - \left\{B_\mu\left(\tau\right)(x^\mu + A^\mu(\tau))\right\}^2, \tag{2.56}$$

де $\tau = \tau(x)$ *визначається неявно*

$$\left(x_\mu + A_\mu(\tau)\right)\dot{B}^\mu(\tau) = 0,$$

$A_\mu(\tau)$,$B_\mu(\tau)$ *– довільні гладкі дійсні функції, що задовольняють умови*

$$B_\mu(\tau)B^\mu(\tau) = -1,\quad \dot{B}_\mu(\tau)\dot{B}^\mu(\tau) = 0,\ \ \dot{A}_\mu(\tau) = R(\tau)B^\mu(\tau)$$

з довільною $R(\tau) \in C^1(\mathbf{R^1}, \mathbf{R^1})$*;*

b)

$$\omega^2 = -\left(x_\mu + A_\mu(\tau)\right)\left(x^\mu + A^\mu(\tau)\right) - \left\{b_\mu\left(\tau\right)(x^\mu + A^\mu(\tau))\right\}^2, \tag{2.57}$$

де $\tau = \tau(x)$ *визначається неявно*

$$\left(x_\mu + A_\mu(\tau)\right)\left(\dot{A}^\mu(\tau) + b^\mu b_\nu \dot{A}^\nu(\tau)\right) = 0,$$

$A_\mu(\tau))$ – *довільні гладкі дійсні функції, що задовольняють умови*

$$\dot{A}_\mu(\tau)\dot{A}^\mu(\tau) + (b_\mu \dot{A}^\mu(\tau))^2 = 0;$$

$c)$ $$\omega^2 = (b_\mu x^\mu + C_1)^2 + (c_\mu x^\mu + C_2)^2 + (d_\mu x^\mu + C_3)^2; \qquad (2.58)$$

4) $N = 3$

$$\omega^2 = -\left(x_\mu + A_\mu(\tau)\right)\left(x^\mu + A^\mu(\tau)\right), \qquad (2.59)$$

де $\tau = \tau(x)$ *визначається неявно*

$$\left(x_\mu + A_\mu(\tau)\right) B^\mu(\tau) = 0,$$

$A_\mu(\tau)$,$B_\mu(\tau)$ – *довільні гладкі дійсні функції, що задовольняють умови*

$$\dot{A}_\mu(\tau)B^\mu(\tau) = 0, \quad B_\mu(\tau)B^\mu(\tau) = 0.$$

$II.$ $\varepsilon = 1$

1) $N = 0$

$$\omega = a_\mu x^\mu + C_1; \qquad (2.60)$$

2) $N = 1$

$$\omega^2 = (a_\mu x^\mu + C_1)^2 - (d_\mu x^\mu + C_2)^2; \qquad (2.61)$$

3) $N = 2$

$$\omega^2 = (a_\mu x^\mu + C_1)^2 - (c_\mu x^\mu + C_2)^2 - (d_\mu x^\mu + C_3)^2; \qquad (2.62)$$

4) $N = 3$

$$\omega^2 = (x_\mu + C_\mu)(x^\mu + C^\mu). \qquad (2.63)$$

У наведених вище формулах C_0, C_2, C_3 – довільні дійсні константи, a_μ, b_μ, c_μ, d_μ – дійсні константи, які задовольняють умови

$$a_\mu a^\mu = -b_\mu b^\mu = -c_\mu c^\mu = -d_\mu d^\mu = 1,$$

$$a_\mu b^\mu = a_\mu c^\mu = a_\mu d^\mu = b_\mu c^\mu = b_\mu d^\mu = c_\mu d^\mu = 0.$$

Доведення. Той факт, що функції, які визначаються формулами (2.53) – (2.63), є розв'язками системи (2.52) при відповідних ε, N, перевіряється безпосередньо. Це, фактично, було зроблено в [69]. Тому достатньо довести, що класи дійсних функцій, визначених формулами (2.53) – (2.63), є непорожніми. Доведення цього факту випливає з того, що кожен з цих класів містить інваріант трипараметричної групи Пуанкаре $P(1,3)$, який є дійсною функцією. Теорему доведено.

Необхідно наголосити, що всі функції $\omega(x)$, які визначені формулами (2.53), (2.54), (2.55),(2.56), (2.57), (2.59), породжують умовно-інваріантні анзаци для поля $u(x)$ вигляду

$$u(x) = \varphi(\omega(x)). \tag{2.64}$$

Поклавши в (2.53), (2.54), (2.56), (2.57), (2.59) довільні функції рівні сталим, одержимо добре відомі пуанкаре-інваріантні анзаци для комплексного скалярного поля $u(x)$, які були отримані у [74] в рамках симетрійного підходу.

Підставляючи (2.64), де $\omega(x)$ задається однією з формул (2.53) – (2.63), в (2.43) отримуємо такі звичайні диференціальні рівняння для $\varphi(\omega)$:

$$\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + \frac{N}{\omega}\frac{d\varphi}{d\omega} = \varepsilon F(|\varphi|)\varphi. \tag{2.65}$$

Повернемося до випадку, коли в (2.47) $a(x) \neq 0$.

Випадок 2. $a(x) \neq 0$.

Підвипадок 2.1 $f_3 = f_4 = f_5 = 0$.

У цьому підвипадку вдається побудувати загальний розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь (2.47), використовуючи результати роботи [106], де було проінтегровано більш загальну систему. Відповідно до [106], система диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\begin{gathered}\omega_{x_\mu}\omega_{x^\mu} = f_1(\omega), \quad \Box\omega = f_2(\omega),\\ a_{x_\mu}\omega_{x^\mu} = 0, \quad a_{x_\mu}a_{x^\mu} = 0, \quad \Box a = 0\end{gathered} \tag{2.66}$$

є сумісною, якщо

$$f_1(\omega) = -1, \quad f_2(\omega) = -N\omega^{-1}, \quad N = 0, 1, 2, 3.$$

Більше того, її загальний розв'язок визначається нижче наведеними формулами (при відповідних N).

1) $N = 0$

$$a)\ \omega = (-\dot{A}_\nu \dot{A}^\nu)^{-3/2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\mu \dot{A}_\nu \ddot{A}_\alpha x_\beta + C,\ A_\mu x^\mu + B = 0, \quad (2.67)$$

$$b)\ \omega = b_\mu x^\mu \cos g_1 + c_\mu x^\mu \sin g_1 + g_2, \quad a = g_3,$$

де $A_\mu = A_\mu(a)$, $B = B(a)$, $C = C(a)$ – довільні гладкі функції, що задовольняють умови $A_\mu A^\mu = 0$, $\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu \neq 0$ і g_1, g_2, g_3 – довільні гладкі функції від $a_\mu x^\mu + d_\mu x^\mu$;

2) $N = 1$

$$\omega^2 = (b_\mu x_\mu + g_1)^2 + (c_\mu x^\mu + g_2)^2, \quad a = g_3, \quad (2.68)$$

де g_1, g_2, g_3 – довільні гладкі функції від $a_\mu x^\mu + d_\mu x^\mu$;

3) $N = 2$

$$\omega^2 = (-\dot{A}_\nu \dot{A}^\nu)^{-1} (\dot{A}_\mu x^\mu + \dot{B})^2, \quad A_\mu x^\mu + B = 0, \quad (2.69)$$

де $A_\mu = A_\mu(a)$, $B = B(a)$ – довільні гладкі функції, що задовольняють умови $A_\mu A^\mu = 0$, $\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu \neq 0$;

4) $N = 3$

$$\omega^2 = (-\dot{A}_\nu \dot{A}^\nu)^{-1} (\dot{A}_\mu x^\mu + \dot{B})^2 + \\ + (-\dot{A}_\nu \dot{A}^\nu)^{-3} (\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\mu \dot{A}_\nu \ddot{A}_\alpha x_\beta + C)^2, \quad (2.70)$$

$$A_\mu x^\mu + B = 0,$$

де $A_\mu = A_\mu(a)$, $B = B(a)$, $C = C(a)$ – довільні гладкі функції, що задовольняють співвідношення $A_\mu A^\mu = 0$, $\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu \neq 0$.

Враховуючи теорему 2.2.1, можна сформулювати такий алгоритм інтегрування системи (2.47). На першому етапі, використовуючи розв'язки

(2.53) – (2.63) системи Даламбера-ейконала, яка є підсистемою системи рівнянь (2.47), підставляємо відповідні вирази для $\omega(x)$ в третє рівняння із (2.47). В результаті отримуємо диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами. На другому етапі інтегруємо це рівняння (що є можливим у всіх випадках). Підставляючи отриманий результат в останні два рівняння, приходимо до системи типу Даламбера-ейконала з трьома незалежними змінними.

Проте повністю реалізувати наведений алгоритм вдається не завжди. Перша проблема полягає в тому, що найбільш цікаві та нові розв'язки системи Даламбера-ейконала мають неявний вигляд (єдиним винятком є розв'язок (2.54)). І саме ці розв'язки призводять до умовно-інваріантних анзаців для комплексного хвильового рівняння (2.43). Окрім цього, деякі функції $\omega(x)$ призводять до ліївських роз'вязків. Наприклад, це стосується розв'язку системи (2.47) при $\omega(x) = \sqrt{x_0^2 - x_3^2}$. Праві частини системи (2.47) набувають вигляду

$$f_1 = 1,\ f_2 = \omega^{-1},\ f_3 = 0,\ f_4 = C_1\omega^{-2} + C_2,\ f_5 = 0,$$

а найбільш загальний вигляд функції $a(x)$ є таким:

$$a(x) = C\ln\left(\frac{x_0 + x_3}{x_0 - x_3}\right) + D_1x_1 + D_2x_2 + D,$$

де $C,\ C_1,\ C_2,\ D,\ D_1,\ D_2 = \mathrm{const}$. Підставляючи знайдені $\omega(x)$, $a(x)$ у формулу (2.45), одержуємо ліївський розв'язок.

Друга проблема полягає в тому, що згадана вище тривимірна система Даламбера-ейконала є системою нелінійних диференціальних рів нянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами. Не в усіх випадках вдається побудувати її загальний розв'язок.

Використовуючи техніку інтегрування перевизначеної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними, яка розвинута в [34, 70, 106], здійснимо побудову точних розв'язків системи (2.47) з такими правими частинами (наводимо лише ті розв'язки системи (2.47), які відповідають умовній симетрії нелінійного хвильового рівняння).

Підвипадок 2.2.

$$f_1 = -1,\ f_2 = 0,\ f_3 = 0,\ f_4 = -1,\ f_5 = 0. \tag{2.71}$$

Частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь (2.47), (2.71) має вигляд

$$\begin{aligned} \omega(x) &= b_\mu x^\mu \cos g_1 + c_\mu x^\mu \sin g_1 + g_2, \\ a(x) &= c_\mu x^\mu \cos g_1 - b_\mu x^\mu \sin g_1 + g_3, \end{aligned} \tag{2.72}$$

де g_1, g_2, g_3 – довільні гладкі функції від $a_\mu x^\mu + d_\mu x^\mu$.

Підвипадок 2.3.

$$f_1 = -1,\ f_2 = -\omega^{-1},\ f_3 = 0,\ f_4 = -\lambda^2,\ f_5 = 0; \tag{2.73}$$

де λ – довільний дійсний параметр. Частинні розв'язки системи диференціальних рівнянь з частинними похідними (2.47), (2.73) мають вигляд

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \{(b_\mu x^\mu + g_1)^2 + (c_\mu x^\mu + g_2)^2\}^{\frac{1}{2}}, \\ a(x) &= \lambda \ \mathrm{arctan} \frac{b_\mu x^\mu + g_1}{c_\mu x^\mu + g_2} + g_3, \end{aligned} \tag{2.74}$$

де g_1, g_2, g_3 – довільні гладкі функції від $a_\mu x^\mu + d_\mu x^\mu$.

Підвипадок 2.4.

$$f_1 = -1,\ f_2 = -2\omega^{-1},\ f_3 = 0,\ f_4 = -\lambda^2,\ f_5 = 0; \tag{2.75}$$

Частинні розв'язки системи диференціальних рівнянь з частинними похідними (2.47), (2.75) мають вигляд

$$\begin{aligned} 1)\ \omega^2 &= -\left(x_\mu + A_\mu(\tau)\right)\left(x^\mu + A^\mu(\tau)\right) - \left\{B_\mu(\tau)\left(x^\mu + A^\mu(\tau)\right)\right\}^2, \\ a(x) &= \lambda B_\mu(\tau) x^\mu + g(\tau), \end{aligned} \tag{2.76}$$

де $\lambda = \mathrm{const}$ і $\tau = \tau(x)$ визначається неявно

$$\left(x_\mu + A_\mu(\tau)\right) \dot{B}^\mu(\tau) = 0.$$

Тут $A_\mu(\tau), B_\mu(\tau), g(\tau)$ – довільні гладкі дійсні функції, що задовольняють умови

$$B_\mu(\tau)B^\mu(\tau) = -1, \ \dot{B}_\mu(\tau)\dot{B}^\mu(\tau) = 0, \ \dot{A}_\mu(\tau) = R(\tau)\dot{B}_\mu(\tau)$$

при довільній функції $R(\tau)$;

$$2) \quad \omega^2 = -\left(x_\mu + A_\mu(\tau)\right)\left(x^\mu + A^\mu(\tau)\right) - \left\{b_\mu\left(x^\mu + A^\mu(\tau)\right)\right\}^2, \qquad (2.77)$$

$$a(x) = \lambda b_\mu x^\mu + g(\tau),$$

де $\lambda = \mathrm{const}$ і $\tau = \tau(x)$ визначається неявно

$$\left(x_\mu + A_\mu(\tau)\right)\left(\dot{A}^\mu(\tau) + b^\mu b_\nu \dot{A}^\nu(\tau)\right) = 0.$$

Тут $A_\mu(\tau), B_\mu(\tau), g(\tau)$ – довільні гладкі дійсні функції, що задовольняють умову

$$\dot{A}_\mu(\tau)\dot{A}^\mu(\tau) + \left(b_\mu \dot{A}^\mu(\tau)\right)^2 = 0.$$

Підкреслимо, що підстановка цих розв'язків у початковий анзац дає неліївські анзаци, які відповідають умовній симетрії хвильового рівняння. Вони не можуть бути отримані за допомогою методу симетрійної редукції. Окрім цього, так побудовані анзаци містять довільні функції.

У параграфі 1.1 було здійснено симетрійну редукцію комплексного нелінійного рівняння (2.43) до звичайних диференціальних рівнянь. Як вже згадувалось у параграфі 1.3, серед отриманих редукованих рівнянь є не лише звичайні диференціальні рівняння, але й суто алгебраїчні (це рівняння 13 з (1.24), 29 з (1.25) та 31, 32, 36 з (1.26)). Це означає, що задача знаходження частинних розв'язків нелінійного диференціального рівняння з частинними похідними зводиться до чисто алгебраїчної. Тому природно поставити задачу опису всіх можливих анзаців вигляду

$$u(x) = \exp\{ia(x)\}\varphi(\omega(x)), \qquad (2.78)$$

які зводять рівняння(2.43) до алгебраїчого. Зауважимо, що задача редукції диференціального рівняння до алгебраїчного розглядається вперше.

Повний розв'язок цієї задачі подано нижче у вигляді теореми.

Теорема 2.2.2. *Анзац (2.78) редукує рівняння (2.43) до алгебраїчного рівняння тоді і тільки тоді, коли:*

$$\begin{aligned}1)\quad & A_\mu(\omega)x^\mu + B(\omega) = 0, \qquad A_\mu(\omega)A^\mu(\omega) = 0,\\ & a(x) = \frac{w_1(\omega)}{\left(-\dot{A}_\nu \dot{A}^\nu\right)}\dot{A}_\mu x^\mu + w_2(\omega),\end{aligned} \tag{2.79}$$

де $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$*;* $A_\mu(\omega)$*,* $B(\omega)$*,* w_1*,* w_2 *– довільні функції; крапка над символом означає похідну за* ω*;*

$$\begin{aligned}2)\quad & \omega(x) = w_0(\theta_\mu x^\mu),\\ & a(x) = w_1(\theta_\mu x^\mu)a_\nu x^\nu + w_2(\theta_\mu x^\mu)b_\nu x^\nu + w_3(\theta_\mu x^\mu),\end{aligned}$$

де w_0, w_1, w_2, w_3 *– довільні функції своїх аргументів;* θ_μ, a_μ, b_μ *– довільні дійсні параметри, які задовольняють такі співвідношення:*

$$a_\mu a^\mu = b_\mu b^\mu = -1, \qquad a_\mu b^\mu = a_\mu \theta^\mu = b_\mu \theta^\mu = \theta_\mu \theta^\mu = 0.$$

Доведення. Підставивши анзац (2.78) в рівняння (2.43) з подальшим діленням на $\exp\{ia(x)\}$, приходимо до такого рівняння:

$$(\omega_{x_\mu}\omega_{x^\mu})\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + (\Box\omega + 2ia_{x_\mu}\omega_{x^\mu})\frac{d\varphi}{d\omega} + (i\Box a - a_{x_\mu}a_{x^\mu})\varphi = F(|\varphi|)\varphi.$$

Для того, щоб анзац (2.78) зводив нелінійне хвильове рівняння (2.43) до алгебраїчного, необхідно, щоб у наведеному вище рівнянні коефіцієнти при $\dfrac{d^2\varphi}{d\omega^2}$, $\dfrac{d\varphi}{d\omega}$, φ дорівнювали нулеві. Звідси випливає, що

$$\begin{aligned}& \omega_{x_\mu}\omega_{x^\mu} = 0, \quad \Box\omega = 0, \quad a_{x_\mu}\omega_{x^\mu} = 0,\\ & a_{x_\mu}a_{x^\mu} = f_1(\omega), \quad \Box a = f_2(\omega).\end{aligned} \tag{2.80}$$

Використовуючи заміну змінних

$$a = G(v, u), \quad u = \omega,$$

зводимо систему (2.80) до вигляду

$$\begin{aligned}& \Box u = 0, \quad u_{x_\mu}u_{x^\mu} = 0, \quad u_{x_\mu}v_{x^\mu} = 0,\\ & v_{x_\mu}v_{x^\mu} = -1, \quad \Box v = 0,\end{aligned}$$

а також знаходимо, що $a = w_1(u)v$, де w_1–довільна функція. Отже, отримано частинний випадок системи (2.66). Використовуючи результати інтегрування останньої, приходимо до пунктів 1, 2 теореми 2.2.2. Теорему доведено.

Результатом підстановки анзацу (2.78) (де $a(x)$, $\omega(x)$ визначаються формулами (2.79)) в рівняння (2.43) буде таке алгебраїчне рівняння:

$$w_1^2(\omega)\varphi = F(|\varphi|)\varphi.$$

Звідси отримуємо клас розв'язків комплексного нелінійного рівняння Даламбера (2.43)

$$u(x) = \rho(\omega)\exp\{ia(x)\},$$

де $a(x)$, $\omega(x)$ задано формулами (2.79), а функція $\rho(\omega) > 0$ визначена неявно:

$$F(\rho(\omega)) = w_1^2(\omega).$$

Слід зазначити, що одержаний клас розв'язків є принципово неліївським і не може бути отриманим за допомогою методу симетрійної редукції.

Розглянемо приклад, в якому вдалося побудувати точний розв'язок рівняння Даламбера з кубічною нелінійністю

$$\Box u = \lambda|u|^2 u \tag{2.81}$$

в явному вигляді. Поклавши в (2.79)

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \omega, \quad A_2 = \sqrt{1-\omega^2}, \quad A_3 = B = 0$$

одержуємо, що

$$\omega = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{-1}\left(x_0x_1 \pm x_2\sqrt{x_1^2+x_2^2-x_0^2}\right).$$

Звідси знаходимо

$$a(x) = iw_1(\omega)x_3 + iw_2(\omega).$$

Тим самим, одержано такий клас розв'язків

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} w_1(\omega) \exp\{iw_1(\omega)x_3 + iw_2(\omega)\}$$

рівняння (2.81).

Підкреслимо, що при $\lambda \to 0$ цей розв'язок має сингулярність і тому не може бути отриманий методами теорії збурень за малим параметром λ.

2.3. Точні розв'язки комплексних хвильових рівнянь

Тут ми здійснюємо побудову точних розв'язків редукованих рівнянь для кожного підвипадку 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 параграфа 2.2, де функція F степенева. Ці розв'язки після підстановки до анзацу (2.45) дають точні роз'язки рівняння (2.43), які наводимо нижче.

Для підвипадку 2.1 редуковане рівняння (2.48) має вигляд

$$-\ddot{\varphi} - \frac{N}{\omega}\dot{\varphi} = F(|\varphi|)\varphi, \;\; N = 0, 1, 2, 3.$$

Далі розглянемо випадки $N = 0, 1, 2, 3$ окремо.

1) $N = 0$

$$-\ddot{\varphi} = F(|\varphi|)\varphi, \text{ де } F(|\varphi|) = \lambda_1 + \lambda_2|\varphi|^k$$

Відповідний точний розв'язок рівняння (2.43) в цьому випадку є таким:

$$u(x) = \exp\{ia(x)\}\varphi(\omega(x)),$$

де $a(x)$, $\omega(x)$ визначаються з формул (2.67), $\varphi(\omega)$ має такий вигляд:

$$\varphi(\omega) = \rho(\omega) \exp\left\{ iC_1 \int^{\omega} \rho^{-2}(z)dz + iC_2 \right\},$$

а ρ визначається із рівностей:

<u>*k – довільне дійсне число, $k \neq -2$*</u>

$$\int^{\rho(\omega)} \left[-\lambda_1 z^2 - \frac{2\lambda_2}{k+2} z^{k+2} - C_1^2 z^{-2} + C_3\right]^{-\frac{1}{2}} dz = \omega + C_4;$$

<u>$k = -2$</u>

$$\int^{\rho(\omega)} [-\lambda_1 z^2 - 2\lambda_2 \ln z - C_1^2 z^{-2} + C_3]^{-\frac{1}{2}} dz = \omega + C_4.$$

2) $N = 1$

$$-(\ddot{\varphi} + \frac{1}{\omega}\dot{\varphi}) = F(|\varphi|)\varphi, \text{ де } F(|\varphi|) = \lambda|\varphi|^k.$$

Точний розв'язок рівняння (2.43) для довільного $k \neq 0$ має вигляд

$$u(x) = -\left[\frac{4}{\lambda k^2}\right]^{\frac{1}{k}} \exp\{i(a(x) + C_1)\}\omega^{-\frac{2}{k}},$$

де $a(x)$, $\omega(x)$ визначаються з формул (2.68).

3) $N = 2$

$$-(\ddot{\varphi} + \frac{2}{\omega}\dot{\varphi}) = F(|\varphi|)\varphi, \text{ де } F(|\varphi|) = \lambda|\varphi|^k.$$

Точний розв'язок в залежності від значень k збігається з однією із функцій, які наведено нижче.

<u>*k – довільне дійсне число*</u>

$$u(x) = \left[\frac{2(2-k)}{\lambda k^2}\right]^{\frac{1}{k}} \exp\{i(a(x) + C_1)\}\omega(x)^{-\frac{2}{k}},$$

де $a(x)$, $\omega(x)$ мають вигляд (2.69).

<u>$k = 4$</u>

$$u(x) = \exp\{ia(x)\}\varphi(\omega(x)),$$

де $a(x)$, $\omega(x)$ визначаються з формул (2.69), $\varphi(\omega)$ має такий вигляд:

$$\varphi(\omega) = -\omega^{-\frac{1}{2}}\rho(\ln\omega)\exp\left\{iC_1\int^{\ln\omega}\rho^{-2}(z)dz + iC_2\right\},$$

а ρ визначається з формули

$$\int^{\rho(\ln\omega)}\left[\frac{\lambda}{3}z^6 + \frac{1}{4}z^2 - C_1^2z^{-2} + C_3\right]^{-\frac{1}{2}}dz = \ln\omega + C_4.$$

4) $N = 3$

$$-(\ddot{\varphi} + \frac{3}{\omega}\dot{\varphi}) = F(|\varphi|)\varphi,\ \text{де}\ F(|\varphi|) = \lambda|\varphi|^k.$$

Точні розв'язки рівняння (2.43) такі:

k – довільне дійсне число

$$u(x) = -\left[\frac{4(1-k)}{\lambda k^2}\right]^{\frac{1}{k}}\exp\{i(a(x) + C_1)\}\omega(x)^{-\frac{2}{k}},$$

де $a(x)$, $\omega(x)$ мають вигляд (2.70).

$k = 2$

$$u(x) = \exp\{ia(x)\}\varphi(\omega(x)),$$

де $a(x)$, $\omega(x)$ визначаються з формул (2.70), а $\varphi(\omega)$ має такий вигляд:

$$\varphi(\omega) = -\omega^{-1}\rho(\ln\omega)\exp\left\{iC_1\int^{\ln\omega}\rho^{-2}(z)dz + iC_2\right\},$$

де ρ визначається з формули

$$\int^{\rho(\ln\omega)}\left[\frac{\lambda}{2}z^4 + z^2 - C_1^2z^{-2} + C_3\right]^{-\frac{1}{2}}dz = \ln\omega + C_4.$$

Для підвипадку 2.2 редуковане рівняння (2.48) набуває вигляду

$$-\ddot{\varphi} + \varphi = F(|\varphi|)\varphi,\ \text{де}\ F(|\varphi|) = \lambda_1 + \lambda_2|\varphi|^k.$$

Відповідний точний розв'язок рівняння (2.43) в цьому підвипадку є таким:

$$u = \exp\{i(c_\mu x^\mu \cos g_1 - b_\mu x^\mu \sin g_1 + g_3)\}\times$$

$$\times\varphi(b_\mu x^\mu \cos g_1 + c_\mu x^\mu \sin g_1 + g_2),$$

де g_1, g_2, g_3 – довільні гладкі функції від $a_\mu x^\mu + d_\mu x^\mu$, $C_1, C_2 = \mathrm{const}$, φ задається формулою

$$\varphi(\omega) = \rho(\omega)\exp\left\{iC_1\int^{\omega}\rho^{-2}(z)dz + iC_2\right\},$$

а $\rho = \rho(b_\mu x^\mu \cos g_1 + c_\mu x^\mu \sin g_1 + g_2)$ знаходиться із таких рівностей:

k – довільне дійсне число, $k \neq -2$

$$\int^{\rho(\omega)}\left[(1-\lambda_1)z^2 - \frac{2\lambda_2}{k+2}z^{k+2} - C_1^2 z^{-2} + C_3\right]^{-\frac{1}{2}}dz = \omega + C_4;$$

$k = -2$

$$\int^{\rho(\omega)}[(1-\lambda_1)z^2 - 2\lambda_2 \ln z - C_1^2 z^{-2} + C_3]^{-\frac{1}{2}}dz = \omega + C_4.$$

Редуковане рівняння (2.48) для підвипадку 2.3 має вигляд

$$-\ddot{\varphi} - \frac{1}{\omega}\dot{\varphi} + \lambda^2\varphi = F(|\varphi|)\varphi, \text{ де } F(|\varphi|) = \lambda_1 + \lambda_2|\varphi|^k. \tag{2.82}$$

Звідки $\lambda_1 = \lambda^2$, тобто рівняння (2.82) набуває вигляду

$$-\ddot{\varphi} - \frac{1}{\omega}\dot{\varphi} = \lambda_2|\varphi|^k.$$

Точний розв'язок рівняння (2.43) має вигляд

$$u = -\left[\frac{4}{\lambda_2 k^2}\right]^{\frac{1}{k}}\exp\left\{i\left[\arctan\frac{b_\mu x^\mu + g_1}{c_\mu x^\mu + g_2} + g_3 + C_1\right]\right\}\times$$

$$\times\{(b_\mu x^\mu + g_1)^2 + (c_\mu x^\mu + g_2)^2\}^{-\frac{2}{k}}.$$

Для підвипадку 2.4 редуковане рівняння (2.48) набуває вигляду

$$-\ddot{\varphi} - \frac{2}{\omega}\dot{\varphi} + \lambda^2\varphi = F(|\varphi|)\varphi, \text{ де } F(|\varphi|) = \lambda_1 + \lambda_2|\varphi|^k, \tag{2.83}$$

звідси $\lambda_1 = \lambda^2$, тобто рівняння (2.83) буде мати такий вигляд:

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{\omega}\dot{\varphi} = -\lambda_2|\varphi|^k\varphi.$$

Точний розв'язок рівняння (2.43) в залежності від значень k такий:

k – довільне дійсне число

$$u(x) = \left[\frac{2(k-2)}{\lambda_2 k^2}\right]^{\frac{1}{k}} \omega(x)^{-\frac{2}{k}} \exp\{i(a(x) + C_1)\},$$

де $C_1 = \text{const}$, $a(x)$, $\omega(x)$ визначаються з формул (2.76) та (2.77).

$k = 4$

$$u(x) = \exp\{ia(x)\}\varphi(\omega(x)),$$

де $a(x)$, $\omega(x)$ визначаються з формул (2.76) та (2.77), $\varphi(\omega)$ має такий вигляд:

$$\varphi(\omega) = \omega^{-\frac{1}{2}}\rho(\ln\omega)\exp\{iC_1 \int^{\ln\omega} \rho^{-2}(z)dz + iC_2\},$$

а ρ визначається з формули

$$\int^{\rho(\ln\omega)} \left[-\frac{\lambda_2}{3}z^6 + \frac{1}{4}z^2 - C_1^2 + C_3\right]^{-\frac{1}{2}} dz = \ln\omega + C_4.$$

Зупинимося на прикладі, коли деякі ω приводять до ліївських анзаців та побудуємо відповідний точний розв'язок рівняння (2.43). Для $\omega(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ праві частини системи (2.47) набувають вигляду

$$f_1 = -1, \ f_2 = -2\omega^{-1}, \ f_3 = 0, \ f_4 = -\lambda^2, \ f_5 = 0,$$

а найбільш загальний вигляд функції $a(x)$ є таким:

$$a(x) = D_1 x_0 + D_2,$$

де $D_1,\ D_2 = \mathrm{const}$. Отже, для даного прикладу редуковане рівняння (2.48) набуває вигляду

$$-\ddot{\varphi} - \frac{2}{\omega}\dot{\varphi} + \lambda^2\varphi = F(|\varphi|)\varphi, \text{ де } F(|\varphi|) = \lambda_1 + \lambda_2|\varphi|^k, \qquad (2.84)$$

звідси $\lambda_1 = \lambda^2$, тобто рівняння (2.84) має такий вигляд:

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{\omega}\dot{\varphi} = \lambda_2|\varphi|^k.$$

Точний розв'язок рівняння (2.43) визначає функція

k – довільне дійсне число

$$u(x) = \left[\frac{2(k-2)}{\lambda_2 k^2}\right]^{\frac{1}{k}} \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^{-\frac{2}{k}} \exp\{i(D_1 x_0 + D_2 + C_1)\}$$

де $C_1,\ D_1,\ D_2 = \mathrm{const}$.

Зазначимомо, що при додатних $k \in \mathbf{R}$ цей розв'язок є локалізованим в околі точки $\vec{x} = \vec{0}$. При цьому в цій точці він має сингулярність.

Висновки

Основні результати дисертації можна підсумувати таким чином.

1. Запропоновано метод побудови точних розв'язків нелінійного комплексного хвильового рівняння з довільними функціями, який базується на синтезі класичного підходу С.Лі та методу умовних симетрій диференціальних рівнянь.

2. Одержано повний розв'язок задачі симетрійної редукції нелінійних комплексних хвильових рівнянь, інваріантних відносно групи Пуанкаре $P(1,3)$ та розширеної групи Пуанкаре $\widetilde{P}(1,3)$, до звичайних диференціальних рівнянь.

3. Побудовано багатопараметричні сім'ї нових інваріантних розв'язків досліджуваних рівнянь.

4. Побудовано широкі класи неліївських розв'язків з функціональною довільністю для нелінійного комплексного рівняння Даламбера.

5. Досліджено механізм неліївської редукції комплексних хвильових рівнянь до алгебраїчних.

Bibliography

[1] Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Фущич В.И. Редукция и точные решения уравнения эйконала // *Укр. мат. журн.* — 1991. — **43**, ь4. — С. 461–474.

[2] Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Фущич В.И. Связные подгруппы конформной группы $C(1,4)$ // *Укр. мат. журн.* — 1991. — **43**, ь7–8. — С. 870–884.

[3] Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Фущич В.И. Редукция многомерного пуанкаре-инвариантного нелинейного уравнения к двумерным уравнениям // *Укр. мат. журн.* — 1991. — **43**, ь10. — С. 1311–1323.

[4] Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фущич В.И. Подалгебры алгебры Пуанкаре $AP(2,3)$ и симметрийная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера. I // *Укр. мат. журн.* — 1988. — **40**, ь4. — С. 411–416.

[5] Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фущич В.И. Подалгебры алгебры Пуанкаре $AP(2,3)$ и симметрийная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера. II // *Укр. мат. журн.* — 1989. — **41**, ь5. — С. 579–584.

[6] Баранник А.Ф., Марченко В.А., Фущич В.И. О редукции и точных решениях нелинейных многомерных уравнений Шредингера // *Теорет. и мат. физика.* — 1991. — **87**, ь2. — С. 220–234.

[7] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантовых полей. — М.:Наука, 1984. — 600с.

[8] Бордаш О.А.(дівоче — тепер Панчак О.А.) Симетрійний аналіз нелінійних хвильових рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Матеріали VI Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, Київ, 15–17 трав. 1997 р. — Київ, 1997. — С. 48.

[9] Жданов Р.З., Лагно В.И. О точных решениях нелинейного уравнения Даламбера, содержащих произвольные функции // Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики АН України. 1990. — С. 30–33.

[10] Жданов Р.З., Панчак О.А. Про умовну симетрію нелінійного хвильового рівняння // *Доп. НАН України.* — 1998. — ь 8. — С. 33–36.

[11] Жданов Р.З., Панчак О.А. Про один клас неліївських розв'язків нелінійного рівняння Даламбера // *Вісн. Київ. ун-ту.* Сер. фіз.-мат. науки — 1998. — Вип.ь1. — С. 42–44.

[12] Ибрагимов Н.Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1967. — 59 с.

[13] Ибрагимов Н.Х. Об инвариантности уравнений Дирака // *Докл. АН СССР.* — 1969. — **185**, ь 6. — С. 1226–1228.

[14] Ибрагимов Н.Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1972. — 200 с.

[15] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.

[16] Капитанский Л.В. Групповой анализ уравнений Навье–Стокса и Эйлера при наличии вращательной симметрии и новые точные решения этих уравнений // *Докл. АН СССР.* — 1978. — **243**, ь4. — С. 901–904.

[17] Красильников В.А., Крылов В.А. Введение в физическую акустику. — М.: Наука, 1984. — 400 с.

[18] Миллер У. Симметрия и разделение переменных. — М.:Мир, 1981. — 340 с.

[19] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с. — English translation: Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. — New York: Academic Press, 1982. — 400 p.

[20] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. — М.: Наука, 1981. — 386 с.

[21] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 639 с. — Пер. с англ.: Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. — New York: Springer–Verlag, 1986. — 497 p.

[22] Панчак О.А. Симетрія хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами // *Доп. НАН України.* — 1998. — ь 4. — С. 45–47.

[23] Панчак О.А. Симетрійна редукція нелінійного хвильового рівняння для комплексного поля // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці / *Праці Інституту математики НАН України. Т.19.* —1998. — С.166 – 173.

[24] Раджараман Р. Солитони и листантоны в квантовой теории поля. — М.: Мир, 1985. — 416 с.

[25] Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. — 320 с.

[26] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. — 624 с.

[27] Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. — С. 6–28.

[28] Фущич В.И. О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений // *Укр. мат. журн.* — 1987. — **39**, ь1. — С. 116–123.

[29] Фущич В.И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. — С. 4–16.

[30] Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1991. — 304 с.

[31] Фущич В.І., Бойко В.М. Галілей-інваріантні рівняння типу Бюргерса та Кортега-Де-Фріза високого порядку // *Укр. мат. журн.* — 1996. — **48**, ь 12. — P. 1589–1601.

[32] Фущич В.И., Жданов Р.З. Нелиевские анзацы и точные решения нелинейного спинорного уравнения // *Укр. мат. журн.* — 1990. — **42**, ь 7. — P. 958–962.

[33] Фущич В.И., Жданов Р.З. Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 288 с.

[34] Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В. Общие решения нелинейного волнового уравнения и уравнения эйконала // *Укр. мат. журн.* — 1991. — **43**, ь 11. — С. 1471–1487.

[35] Фущич В.І., Миронюк П.Й. Умовна симетрія і точні розв'язки рівняння нелінійної акустики // *Доп. АН УРСР.* — 1991. — ь 6. — С. 23–29.

[36] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. — Киев: Наук. думка, 1983. — 200 с. — English translation: Fushchich W.I., Nikitin A.G. Symmetries of Maxwell's equations. — Dordrecht: D. Reidel, 1987. — 220 p.

[37] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики . — М.: Наука, 1990. — 400 с.

[38] Фущич В.И., Чернига Р.М. Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения. I // *Укр. мат. журн.* — 1989. — **41**, ь10. — С. 1349–1357.

[39] Фущич В.I., Черніга Р.М. Галілей-інваріантні системи нелінійних рівнянь типу Гамільтона–Якобі та реакції–дифузії // *Докл. АН Украины.* — 1994. — ь3. — С. 31–38.

[40] Barannik L.F. and Lahno H.O. Symmetry reduction for the Boussinesq equation to ordinary differential equations // *Repts Math. Phys.* — 1996. — **38**, ь1. — P. 1–9.

[41] Basarab–Horwath P., Barannyk L.L., Fushchych W.I. Some exact solutions of a conformally invariant nonlinear Schrödinger equation. — Linköping, 1997. — 12 p. — (Prepr. / Linköping University; LiTH-MAT-R-97-11).

[42] Bateman H. Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave-Motion. — New York, Dover, 1955. — 234 p.

[43] Bateman H. Partial Differential Equations of Mathematical Physics. — Cambridge: Univ. Press, 1992. — 386 p.

[44] Bluman G., Cole J.D.,The general similarity solution of the heat equation // *J. Math. Mech.* — 1969. — **18**, ь 11. — P. 1025–1042.

[45] Bluman G., Cole J.D. Similarity methods for differenyial equations. — Berlin: Springer, 1974. — 332 p.

[46] Boyer C.P. On some solutions of a nonlinear diffusion equation // *J. Math. Phys.* — 1961. — **40**, ь1. — P. 42–46.

[47] Cartan E., in: *Oeuvres completes*, Gauthier-Villars, Paris, Part 3, 1955. — **2**. — P. 1431–1445.

[48] Cherniha R.M. Galilean-invariant nonlinear PDEs and their exact solutions // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1995. — **2**, ь3–4. — P. 374–383.

[49] Cieciura G., Grundland A. A certain class of solutions of the nonlinear wave equations // *J. Math. Phys.* — 1984. — **25**, ь12. — P. 3460–3469.

[50] Clarkson P.A. New exact solutions of the Boussinesq equation // *Eur. J. Appl. Math.* — 1990. — **1**. — P. 279–300.

[51] Clarkson P.A. Dimensional reduction and exact solutions of a generalized nonlinear Schrödinger equation // *Nonlinearity.* — 1992. — **5**. — P. 453–472.

[52] Clarkson P.A. and Hood S. Symmetry reductions of a generalized, cylindrical nonlinear Schrödinger equation // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1993. — **26**, ь1. — P. 133–150.

[53] Clarkson P., Kruskal M.D., New similarity solutions of the Boussinesq equation // *J. Math. Phys.* — 1989. — **30**, ь 10. — P. 2201–2213.

[54] Collins C.B. Complex potential equations. I. A technique for solution // Proc. Cambr. Phyl. Soc. — 1976. — **80**, ь 1. — P. 165–171.

[55] Erugin N.P. On functionally-invariant solutions // Proc. Acad. of Sci. USSR. — 1944. — **5**. — P. 385–386.

[56] Fedorchuk V. Symmetry reduction and exact solutions of the Euler–Lagrange–Born–Infeld, multidimensional Monge–Ampere and eikonal equations // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1995. — **2**, 3–4. — P. 329–333.

[57] Fushchych W.I. New nonlinear equations for electromagnetic field having velocity different from c // *Докл. АН Украины.* — 1992. — ь 4. — С. 24–27.

[58] Fushchych W. Anzatz' 95 // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1995. — **2**, ь 3–4. — P. 216–235.

[59] Fushchych W.I., Popovych R.O. Symmetry reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations. I, II // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1994. — **1**, ь1,2. — P. 75–113; 158–188.

[60] Fushchych W.I., Serov N.I. The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1983. — **16**, ь 15. — P. 3645–3656.

[61] Fushchych W.I., Shtelen V.M. and Serov N.I. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.—436 p.

[62] Fushchych W.I., Tsyfra I.M., On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1987. — **20**, ь 2. — P. L45–L48

[63] Fushchych W.I., Yegorchenko I.A. The symmetry and exact solutions of the non-linear d'Alembert equations for complex fields // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1989. — **22**. — P. 2643–2652.

[64] Fushchych W.I. and Zhdanov R.Z. Symmetry and exact solutions of the nonlinear Dirac equation // *Fizika Elementar. Chastits i Atom. Yadra* — 1988. — **19**, ь 5. — P. 1154–1196.

[65] Fushchych W.I. and Zhdanov R.Z. On some new exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations. — Minneapolis: 1988. — 8 p. — (Preprint, Inst. for Math. and Appl., ь 468).

[66] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. Symmetry and exact solutions of nonlinear spinor equations // *Phys. Reports* — 1989. — **172**, ь 4. — P. 123–174.

[67] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. On some new exact solutions of the nonlinear d'Alembert-Hamilton system // *Phys. Lett.* — 1989. — **141A**, ь 3-4. — P. 113–115.

[68] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. On non-Lie reduction of the nonlinear Dirac equation // *J. Math. Phys.* — 1991. — **32**, ь 12. — P. 3488–3490.

[69] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. Symmetries and exact solutions of nonlinear Dirac equations. — Kyiv: Naukova Ukraina Publishing, 1997. — 386 p.

[70] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Revenko I.V. Compatibility and solutions of the nonlinear d'Alembert and Hamilton equations. — Kyiv: 1990. — 90p. — (Preprint, Inst. of Math. Acad. of Sci. Ukraine, ь 90-39).

[71] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Revenko I.V., On the general solution of the d'Alembert equation with nonlinear eikonal constraint // Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics. – Kiev: Institute of Mathematics, 1992. – P. 35–40.

[72] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Yehorchenko I.A. On the reduction of the nonlinear multi-dimensional wave equations and compatibility of the d'Alembert-Hamilton system // *J. Math. Anal. Appl.* — 1991. — **161**, ь 2. — P. 352–360.

[73] Gagnon L., Winternitz P. Lie symmetries of a generalised non-linear Schrödinger equation: I. The symmetry group and its subgroups // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1988. — **21**, ь7. — P. 1493–1511.

[74] Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P. Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations // *J. Math. Phys.* — 1984. — **25**, ь 4. — P. 791–806.

[75] Grundland A.M., Tuszyǹsky J.A. Symmetry breaking and bifurcation solution s in the classical complex Φ^6 field theory // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1987. — **20**, ь 19. — P. 6243–6258.

[76] Heisenberg W., On quantization of nonlinear equations // *Nachr. Acad. Wiss. Göttingen* — 1953. — **8A**. — P. 111–127.

[77] Ibragimov N.H. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. V.1. Symmetries, exact solutions, and conservation law. — Boca Raton, Florida : CRC Press, 1994.

[78] Ibragimov N.H. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. V.2. Applications in engineering and physical sciences. — Boca Raton, Florida : CRC Press, 1994.

[79] King J.R. Exact results for the nonlinear diffusion equations $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u^{-4/3}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ and $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u^{-2/3}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1991. — **24**, ь24. — P. 5721–5745.

[80] Kortel F., On some solutions of Gürsey's conformal invariant spinor wave equation // *Nuovo Cim.* — 1956. — **4**, ь 2. — P. 211–215.

[81] Levi D., Winternitz P., Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1989. — **22**, ь 15. — P. 2915–2924.

[82] Lie S., Über Differentialinvarianten // Math. Ann. — 1984. — **24**, ь 1. — P. 52–89.

[83] Lie S., Engel F., Theorie der Transformationsgruppen // Bd.1–3. — Leipzig:Teubner. — 1888, 1890, 1893. — 623s., 554s., 830s.

[84] Olver P.J., Rosenau P., The construction of special solutions to partial differential equations // *Phys. Lett.* — 1986. — **114A**, ь 3. — P. 107–112.

[85] Panchak O.A. Symmetry of Burgers - type equations with an Additional Condition // Proc. of the Second Intern. Conf. "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". — Kyiv, 1997. — **2**. — P. 467–469.

[86] Patera J., Sharp R.T., Winternitz P. and Zassenhaus H., Subgroups of the Poincaré group and their invariants // *J. Math. Phys.* — 1976. — **17**, ь 6. — P. 977–985.

[87] Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups // *J. Math. Phys.* — 1977. — **18**, ь12. — P. 2259–2288.

[88] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group // *J. Math. Phys.* — 1975. — **16**, ь 8. — P. 1597–1612.

[89] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. The maximal solvable subgroups of the $SU(p,q)$ groups and all subgroups of $SU(2,1)$ // *J. Math. Phys.* — 1974. — **15**, ь8. — P. 1378–1393.

[90] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group // *J. Math. Phys.* — 1975. — **16**, ь 8. — P. 1613–1624.

[91] Popovych R.O. On Lie reduction of the Navier-Stokes equations. // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1995. — **2**, ь 3-4. — P. 301–311.

[92] Sachdev P.L. Nonlinear diffusive waves. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. — 246 p.

[93] Schutz B. Geometrical Methods of Mathematical Physics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982. — 72 p.

[94] Serov N.I., Tulupova L.A. Symmetry properties of generalized Korteweg-de Vries and Burgers equations // *Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy (Reports of the Academy of Sciences of Ukraine)* — 1994. — ь 12.— P.42–44.

[95] Sionoid P.N., Cates A.T. The generalized Burgers and Zabolotskaya–Khokhlov equations: transformations, exact solutions and qualitative properties // Proc. the Royal Society, Math. and Ph. — 1994. — **447**, ь 1930. — P. 253–270.

[96] Smirnov V.I., Sobolev S.L., New method of solution of the problem of elastic plane vibrations // Proc. of Seimsmological Inst. Acad. Sci. USSR — 1932. — **20**. — P. 37–40.

[97] Smirnov V.I., Sobolev S.L., On application of the new method to study of elastic vibrations in the space with axial symmetry // Proc. of Seimsmological Inst. Acad. Sci. USSR — 1933. — **29**. — P. 43–51.

[98] Wiltshire R.J. The use of Lie transformation groups in the solution of the coupled diffusion equation // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1994. — **27**, ь 23. — P. 7821–7829.

[99] Winternitz P., Grundland A., Tuszyǹski J.A. Exact solutions of the multidimensional classical Φ^6 field equations obtained by symmetry reduction // *J. Math. Phys.* — 1987. — **28**, ь 9. — P. 2194–2212.

[100] Zhdanov R.Z. On conditional symmetries of multidimensional nonlinear equations of quantum field theory // Proc. of the Second Intern. Conf. "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", —Kyiv, 1997. — **1**. — P. 53–61.

[101] Zhdanov R.Z., Fushchych W.I. Conditional symmetry and new classical solutions of the Yang-Mills equations // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1995. — **28**, ь21. — P. 6253–6263.

[102] Zhdanov R.Z. and Fushchych W.I. On non-Lie ansatzes and new exact solutions of the classical Yang-Mills equations // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1995. — **2**, ь 2. — P. 172–181.

[103] Zhdanov R., Panchak O., New conditional symmetries and exact solutions of the nonlinear wave equation // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1998. — **31**, ь 43. — P. 8727–8734.

[104] Zhdanov R.Z., Revenko I.V., Fushchych W.I., On the general solution of the d'Alembert equation with a nonlinear eikonal constraint and its applications //*J. Math. Phys.* — 1995. — **36**, ь 12. — P. 7109–7127.

[105] Zhdanov R.Z., Revenko I.V., Fushchych W.I. On the new approach to variable separation in the time-dependent Schrödinger equation with two space dimensions // *J. Math. Phys.* — 1995. — **36**, ь 10. — P. 5506–5521.

[106] Zhdanov R.Z., Revenko I.V., Fushchych W.I. On the general solution of the d'Alembert equation with a nonlinear eikonal constraint and its applications // *J. Math. Phys.* —- 1995. — **36**, ь 12. — P. 7109–7127.