Національна академія наук України
Інститут математики

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

ПОПОВИЧ Дмитро Романович

УДК 512.812.4

Узагальнення контракцій Іньоню–Вігнера і ліївськи ортогональні оператори

01.01.06 — алгебра та теорія чисел
111 — математика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

________ Д.Р. Попович

Науковий керівник
доктор фіз.-мат. наук, професор
ПЕТРАВЧУК Анатолій Петрович

Київ — 2021

АНОТАЦІЯ

Попович Д.Р. Узагальнення контракцій Іньоню–Вігнера і лiївськи ортогональні оператори. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 “алгебра та теорія чисел” (111 — математика). — Інститут математики НАН України та Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2021.

Дисертацію присвячено вивченню властивостей контракцій скінченновимірних дійсних і комплексних алгебр Лі, спеціальних типів реалізації контракцій, як-то контракції Салетана, контракції з необмеженими матрицями, узагальнені контракції Іньоню–Вігнера, а також лiївськи ортогональних операторів на таких алгебрах.

Нехай V — n-вимірний векторний простір над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ або $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, де $n < \infty$. Через $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(\mathbb{F})$ позначимо множину всіх дужок Лі на просторі V. Для дужки Лі $\mu \in \mathcal{L}_n$ і функції $U \in \mathrm{C}\big((0,1], \mathrm{GL}(V)\big)$ визначимо сім'ю дужок Лі $\mu_\varepsilon \in \mathcal{L}_n$, $\varepsilon \in (0,1]$, згідно з $\mu_\varepsilon(x,y) := U_\varepsilon{}^{-1}\mu(U_\varepsilon x, U_\varepsilon y)$ $\forall\, x,y \in V$. Якщо для будь-яких $x,y \in V$ існує границя

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \mu_\varepsilon(x,y) =: \mu_0(x,y),$$

то $\mathfrak{g}_0 = (V,\mu_0)$ є добре визначеною алгеброю Лі, яку називають *(неперервною) контракцією* алгебри Лі $\mathfrak{g} = (V,\mu)$. Процедуру отримання алгебри $\mathfrak{g}_0$ з вихідної алгебри $\mathfrak{g}$ також називають *контракцією* $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$. У фіксованому базисі простору V відповідну матричнозначну функцію U називають *матрицею контракції* $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$. Замість неперервної контракції $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ можна розглядати еквівалентну *послідовну контракцію*, в якій функцію U замінено на послідовність матриць.

Загалом, структура множин підалгебр та ідеалів алгебр Лі змінюється при контракціях. У дисертаційній роботі знайдено деякі стабільні властивості підалгебр, ідеалів та підпросторів.

Теорема. *Припустимо, що алгебра Лі* $\mathfrak{g}_0$ *є (неперервною чи послідовною) контракцією алгебри Лі* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$, *і алгебра* $\mathfrak{g}$ *містить прапор підалгебр* $\{0\} = \mathfrak{s}^0 \subset \mathfrak{s}^1 \subset \cdots \subset \mathfrak{s}^m \subset \mathfrak{s}^{m+1} = \mathfrak{g}$. *Тоді алгебра* $\mathfrak{g}_0$ *містить прапор підалгебр* $\{0\} = \mathfrak{s}_0^0 \subset \mathfrak{s}_0^1 \subset \cdots \subset \mathfrak{s}_0^m \subset \mathfrak{s}_0^{m+1} = \mathfrak{g}_0$ *таких, що* $\dim \mathfrak{s}_0^a = \dim \mathfrak{s}^a$ *та* $\mathfrak{s}^a \to \mathfrak{s}_0^a$, $a = 1, \ldots, m$, *при* $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$. *Якщо* $\mathfrak{s}^a$ *є ідеалом у* $\mathfrak{s}^b$, $1 \leqslant a < b \leqslant m + 1$, *то* $\mathfrak{s}_0^a$ *можна вибрати ідеалом у* $\mathfrak{s}_0^b$, *причому* $\mathfrak{s}^b/\mathfrak{s}^a \to \mathfrak{s}_0^b/\mathfrak{s}_0^a$. *Загальніше, якщо* $[\mathfrak{s}^a, \mathfrak{s}^b] \subseteq \mathfrak{s}^c$ *для деяких* $a, b, c \in \{0, \ldots, m + 1\}$, *то також* $[\mathfrak{s}_0^a, \mathfrak{s}_0^b]_0 \subseteq \mathfrak{s}_0^c$, *причому* $\dim[\mathfrak{s}_0^a, \mathfrak{s}_0^b]_0 \leqslant \dim[\mathfrak{s}^a, \mathfrak{s}^b]$. *Аналогічні твердження справедливі для будь-якої композиції комутаторів на довільному розміщенні з повтореннями з підалгебр* $\mathfrak{s}^a$.

Властивості комутативності, нільпотентності, розв'язності та унімодулярності зберігаються при контракціях. Тому алгебра $\mathfrak{s}_0^a$ успадковує відповідні властивості алгебри $\mathfrak{s}^a$. Завдяки цьому деякі необхідні критерії контракцій можна отримати як прості наслідки наведеної теореми.

Ослаблену версію теореми доведено для прапорів підпросторів.

Наслідок. *Припустимо, що алгебра* $\mathfrak{g}_0$ *є контракцією алгебри Лі* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$, *і* $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}_0 = n < \infty$. *Тоді для будь-якого повного прапора підпросторів* $\{0\} = V^0 \subset V^1 \subset \cdots \subset V^n = V$ *базового простору* V *існує повний прапор підпросторів* $\{0\} = V_0^0 \subset V_0^1 \subset \cdots \subset V_0^n = V$ *у просторі* V *такий, що* $\dim[V_0^i, V_0^j]_0 \leqslant \dim[V^i, V^j]$ *для довільних* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. *Аналогічне твердження справджується для будь-якої композиції комутаторів на комбінації з повтореннями підпросторів* $V^1, \ldots, V^n$.

Теорему про поведінку прапорів підалгебр при контракціях та відому класифікацію контракцій п'ятивимірних нільпотентних алгебр Лі застосовано для доведення неіснування контракцій у багатьох парах шестивимірних нільпотентних дійсних алгебр Лі попри те, що між відповідними комплексифікаціями контракції існують. Відомі критерії неіснування контракцій не працюють у цій ситуації.

Розглянемо n-вимірні ($n \geqslant 5$) розв'язні дійсні алгебри Лі $\mathfrak{a} := \mathrm{A}_{5.38} \oplus (n-5)\mathrm{A}_1$ та $\mathfrak{a}_0 := \mathrm{A}_{2.1} \oplus \mathrm{A}_{2.1} \oplus (n-4)\mathrm{A}_1$, ненульові комутаційні співвідношення яких, з точністю до антисиметричності дужки Лі, вичерпуються такими:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{a}\colon \quad [e_1, e_3] = e_3, \quad [e_2, e_4] = e_4, \quad [e_1, e_2] = e_5, \\ &\mathfrak{a}_0\colon \quad [e_1, e_3] = e_3, \quad [e_2, e_4] = e_4. \end{aligned}$$

Теорема. *Евклідова норма будь-якої матриці контракції, що реалізує контракцію алгебри $\mathfrak{a}$ до алгебри $\mathfrak{a}_0$, прямує до нескінченності при граничному значенні параметра контракції. Це справедливо також для контракції між відповідними комплексними алгебрами.*

Реалізацію контракції лінійною відносно параметра контракції матричнозначною функцією називають *контракцією Салетана*, або *лінійною контракцією*.

Теорема. *З точністю до заміни алгебр $\mathfrak{g}$ та $\mathfrak{g}_0$ на ізоморфні, будь-яку контракцію Салетана $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ реалізує матриця канонічного вигляду $E^{n_0} \oplus J_\varepsilon^{n_1} \oplus \dots \oplus J_\varepsilon^{n_s}$, або, еквівалентно, $E^{n_0} \oplus J_0^{n_1} \oplus \dots \oplus J_0^{n_s} + \varepsilon E^n$, де $n_0 + \dots + n_s = n$. E^m — одинична $m \times m$-матриця, а J_λ^m — жордановий $m \times m$-блок з власним значенням λ.*

Тому довільну контракцію Салетана можна реалізувати матрицею вигляду $AS_\varepsilon B$, де A та B — сталі невироджені матриці, а матричнозначна функція S_ε має канонічний вигляд.

Означення. Набір $(n_0; n_1, \dots, n_s)$, в якому $n_1, \dots, n_s$ складають розбиття розмірності $n - n_0$ нульової компоненти Фіттінга відносно U_0, а $n_0 \in \{0, \dots, n\}$, називаємо *сигнатурою* цієї контракції Салетана.

У дисертації розглянуто контракції Салетана з сигнатурою $(0; n)$. Повністю прокласифіковано такі контракції в розмірності $n = 3$.

Контракцію $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ називають *узагальненою контракцією Іньоню–Вігнера* (або, скорочено, *узагальненою ІВ-контракцією*), якщо її матрицю U_ε можна представити у вигляді $U_\varepsilon = AW_\varepsilon P$, де матриці

A і P невироджені і сталі (тобто не залежать від параметра ε), а $W_\varepsilon = \operatorname{diag}(\varepsilon^{\alpha_1}, \dots, \varepsilon^{\alpha_n})$ для деяких $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Набір з n показників $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ називають *сигнатурою* узагальненої ІВ-контракції $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$. *Простою ІВ-контракцією* називають узагальнену ІВ-контракцію, сигнатуру якої складають нулі та одиниці.

Доведено твердження, яке тривалий час було лише припущенням.

Теорема. *Будь-яка узагальнена ІВ-контракція еквівалентна узагальненій ІВ-контракції з цілочисловою сигнатурою (і такими самими сталими матрицями).*

Запропоновано алгоритм знаходження узагальнених ІВ-контракцій або доведення їх неіснування для пари алгебр Лі. Використання цього алгоритму дало змогу поліпшити наявний у літературі опис узагальнених ІВ-контракцій три- та чотиривимірних алгебр Лі.

У теорії узагальнених ІВ-контракцій довго існувало припущення, що будь-яку контракцію алгебр Лі можна реалізувати узагальненою ІВ-контракцією. Це справедливо для контракцій між тривимірними дійсними або комплексними алгебрами Лі. Розглянемо чотиривимірні дійсні алгебри Лі, що визначені, з точністю до антисиметричності дужки Лі, такими ненульовими комутаційними співвідношеннями:

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{A}_{2.1}\colon &\quad [e_1, e_2] = e_1,\ [e_3, e_4] = e_3;\\
\mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_{3.2}\colon &\quad [e_2, e_4] = e_2,\ [e_3, e_4] = e_2 + e_3;\\
\mathrm{A}_{4.1}\colon &\quad [e_2, e_4] = e_1,\ [e_3, e_4] = e_2;\\
\mathrm{A}_{4.10}\colon &\quad [e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_2,\ [e_1, e_4] = -e_2,\ [e_2, e_4] = e_1.
\end{aligned}
$$

Тут і надалі використано нумерацію Г.М. Мубаракзянова для алгебр Лі низьких розмірностей, а $\mathfrak{g}_{\dots}$ позначає комплексифікацію алгебри $\mathrm{A}_{\dots}$. Усі контракції чотиривимірних дійсних алгебр Лі реалізовано узагальненими ІВ-контракціями, окрім двох: $2\mathrm{A}_{2.1} \to \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_{3.2}$ і $\mathrm{A}_{4.10} \to \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_{3.2}$. Оскільки комплексифікації алгебр $2\mathrm{A}_{2.1}$ та $\mathrm{A}_{4.10}$ ізоморфні, у комплексному випадку є лише одна така контракція — $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$.

Теорема. *(i) Існує рівно одна контракція між чотиривимірними комплексними алгебрами Лі,* $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$*, яку не можна реалізувати узагальненою IВ-контракцією.*

(ii) Рівно дві контракції між чотиривимірними дійсними алгебрами Лі, $2\mathrm{A}_{2.1} \to \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_{3.2}$ *та* $\mathrm{A}_{4.10} \to \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_{3.2}$*, не можна реалізувати узагальненими IВ-контракціями.*

Комбінуючи зазначені результати, отримано таке твердження.

Теорема. *Будь-яка узагальнена IВ-контракція між чотиривимірними комплексними (відповідно дійсними) алгебрами Лі еквівалентна контракції того самого типу з компонентами сигнатури з* $\{0, 1, 2, 3\}$*. Множина* $\{0, 1, 2\}$ *достатня для всіх контракцій, окрім* $2\mathrm{A}_{2.1} \to \mathrm{A}_{4.1}$*,* $\mathrm{A}_{4.10} \to \mathrm{A}_{4.1}$ *та* $\mathrm{so}(3) \oplus \mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_{4.1}$ *у дійсному випадку і* $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_{4.1}$ *у комплексному випадку, де мінімальною є сигнатура* $(3, 2, 1, 1)$*.*

Результати щодо реалізацій контракцій між чотиривимірними комплексними (або дійсними) алгебрами Лі підсумовує таке твердження.

Теорема. *Будь-яку контракцію між чотиривимірними комплексними (відповідно дійсними) алгебрами Лі можна реалізувати узагальненою IВ-контракцією або контракцією Салетана.*

Контракцію $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ називають *діагональною*, якщо її матрицю U_ε можна представити у вигляді $U_\varepsilon = AW_\varepsilon P$, де A і P — сталі невироджені матриці, а $W_\varepsilon = \mathrm{diag}(f_1(\varepsilon), \dots, f_n(\varepsilon))$ для деяких неперервних функцій $f_i\colon (0, 1] \to \mathbb{F}\backslash\{0\}$.

Теорема. *Довільна діагональна контракція еквівалентна узагальненій IВ-контракції з цілочисловою сигнатурою.*

Лінійний оператор J на алгебрі $\mathfrak{g}$ називають *ліївськи ортогональним*, якщо $[Jx, Jy] = [x, y]$ для довільних $x, y \in \mathfrak{g}$. У дисертації вивчено основні властивості ліївськи ортогональних операторів на скінченновимірних алгебрах Лі. Зокрема, введено відношення еквівалентності на таких операторах. Показано, що центр, радикал і елементи зростаючого центрального ряду є інваріантними відносно дії будь-якого ліївськи ортогонального оператора, а над алгебраїчно замкненим полем характеристики 0 лише розв'язні алгебри Лі степені розв'язності не більше двох допускають ліївськи ортогональні оператори, спектри яких не містять 1 і -1.

Досліджено ліївськи ортогональні автоморфізми. Так, доведено, що оператор J на скінченновимірній алгебрі $\mathfrak g$ з нульовим центром є таким автоморфізмом тоді і лише тоді, коли він допускає представлення у вигляді $J = \mathrm{id}_{\mathfrak g} + N$, де N — оператор на $\mathfrak g$ з $N^2 = 0$, $N\mathfrak g' = (N\mathfrak g)' = \{0\}$, що є $(0, 1, 1)$-диференціюванням на $\mathfrak g$. Більше того, множина всіх таких операторів N є асоціативною алгеброю відносно композиції операторів з тривіальним (тотожно нульовим) антикомутатором.

Вичерпно описано ліївськи ортогональні оператори на метричних алгебрах Лі.

Теорема. *Нехай $\mathfrak g$ — скінченновимірна метрична алгебра Лі, а J — ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak g$. Тоді існує розклад алгебри $\mathfrak g$ у пряму суму двох ідеалів $\mathfrak i_+$, $\mathfrak i_-$ ($\mathfrak g = \mathfrak i_+ \oplus \mathfrak i_-$) і оператор $J_{\mathfrak z}$ на $\mathfrak g$ з образом, що міститься в центрі $\mathfrak z$ алгебри $\mathfrak g$, такі, що $J = \mathrm{id}_{\mathfrak i_+} \oplus (-\mathrm{id}_{\mathfrak i_-}) + J_{\mathfrak z}$.*

З цього опису випливає, що ліївськи ортогональні оператори на простих алгебрах Лі вичерпуються тривіальними. Це дало змогу повністю описати ліївськи ортогональні оператори на напівпростих та редуктивних алгебрах, а також попередньо описати ліївськи ортогональні оператори на алгебрах Лі з нетривіальним розкладом Леві–Мальцева.

Прямим методом обчислено множини ліївськи ортогональних операторів на певних класах алгебр Лі (алгебрах Гейзенберга, майже абелевих алгебрах тощо). Зокрема, група класів еквівалентності ліївськи ортогональних операторів алгебри Гейзенберга виявилася ізоморфною стандартній симплектичній групі відповідної розмірності.

Ключові слова: алгебри Лі, контракції алгебр Лі, прапори підалгебр, контракції Іньоню–Вігнера, контракції Салетана, діагональні контракції, узагальнені контракції Іньоню–Вігнера, ліївськи ортогональні оператори.

ABSTRACT

Popovych D.R. Generalizations of Inönü–Wigner contractions and Lie-orthogonal operators. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.06 “Algebra and Number Theory” (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine and Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2021.

In the thesis, the main attention is paid to problems related to contractions between finite-dimensional real and complex Lie algebras, special kinds of contractions such as Saletan contractions, contractions with necessarily unbounded matrices and generalized Inönü–Wigner contractions. Also studied are Lie-orthogonal operators on such algebras.

Let V be an n-dimensional vector space over $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ or $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $n<\infty$, and let $\mathcal{L}_n=\mathcal{L}_n(\mathbb{F})$ denote the set of all possible Lie brackets on V. Given $\mu\in\mathcal{L}_n$ and $U\in \mathrm{C}\big((0,1],\mathrm{GL}(V)\big)$, define the family of $\mu_\varepsilon\in\mathcal{L}_n$, $\varepsilon\in(0,1]$, by $\mu_\varepsilon(x,y):={U_\varepsilon}^{-1}\mu(U_\varepsilon x,U_\varepsilon y)\ \forall\, x,y\in V$. If for any $x,y\in V$ there exists the limit

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\mu_\varepsilon(x,y)=:\mu_0(x,y),$$

then $\mathfrak{g}_0=(V,\mu_0)$ is a well-defined Lie algebra and is called a *(continuous) contraction* of the Lie algebra $\mathfrak{g}=(V,\mu)$. The procedure $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}_0$ providing $\mathfrak{g}_0$ from $\mathfrak{g}$ is also called a *contraction*. If a basis of V is fixed, the parameter matrix $U_\varepsilon=U(\varepsilon)$, $\varepsilon\in(0,1]$, is called the *contraction matrix* of the contraction $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}_0$. Instead of the continuous contraction $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}_0$, one can consider an equivalent sequential contraction, where the matrix-valued function U is replaced by a sequence of matrices.

It is still unclear which properties and structures are preserved in some sense under contractions. We find such properties of subalgebras, ideals and subspaces. More specifically, we prove a theorem that describes the

behavior of subalgebra flags of Lie algebras under contractions and can be used as a collection of new criteria for nonexistence of contractions.

Theorem. *Suppose that a Lie algebra* $\mathfrak{g}_0$ *is a contraction of the Lie algebra* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$, *and the algebra* $\mathfrak{g}$ *contains a subalgebra flag* $\{0\} = \mathfrak{s}^0 \subset \mathfrak{s}^1 \subset \cdots \subset \mathfrak{s}^m \subset \mathfrak{s}^{m+1} = \mathfrak{g}$. *Then the algebra* $\mathfrak{g}_0$ *contains a subalgebra flag* $\{0\} = \mathfrak{s}_0^0 \subset \mathfrak{s}_0^1 \subset \cdots \subset \mathfrak{s}_0^m \subset \mathfrak{s}_0^{m+1} = \mathfrak{g}_0$ *such that* $\dim \mathfrak{s}_0^a = \dim \mathfrak{s}^a$ *and* $\mathfrak{s}^a \to \mathfrak{s}_0^a$, $a = 1, \ldots, m$, *under* $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$. *If* $\mathfrak{s}^a$ *is an ideal in* $\mathfrak{s}^b$, $1 \leqslant a < b \leqslant m+1$, *then* $\mathfrak{s}_0^a$ *can be chosen to be an ideal in* $\mathfrak{s}_0^b$, *and* $\mathfrak{s}^b/\mathfrak{s}^a \to \mathfrak{s}_0^b/\mathfrak{s}_0^a$. *Moreover,* $\dim[\mathfrak{s}_0^a, \mathfrak{s}_0^b]_0 \leqslant \dim[\mathfrak{s}^a, \mathfrak{s}^b]$ *for any* $a, b \in \{1, \ldots, m\}$ *and, if* $[\mathfrak{s}^a, \mathfrak{s}^b] \subseteq \mathfrak{s}^c$ *for some* $a, b, c \in \{0, \ldots, m+1\}$, *then* $[\mathfrak{s}_0^a, \mathfrak{s}_0^b]_0 \subseteq \mathfrak{s}_0^c$. *Analogous assertions hold for any composition of commutators on any permutation with repetitions of subalgebras* $\mathfrak{s}^a$.

The properties of commutativity, nilpotency, solvability and unimodularity are stable under contractions. Hence $\mathfrak{s}_0^a$ inherits the respective properties of $\mathfrak{s}^a$. As a result, a number of necessary contraction criteria can be derived as simple consequences of the above theorem.

A weaker version of the above theorem is obtained for flags of subspaces.

Corollary. *Suppose that a Lie algebra* $\mathfrak{g}_0$ *is a contraction of a Lie algebra* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$, *and* $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}_0 = n < \infty$. *Then for any complete subspace flag* $\{0\} = V^0 \subset V^1 \subset \cdots \subset V^n = V$ *of the underlying space* V *there exists a complete subspace flag* $\{0\} = V_0^0 \subset V_0^1 \subset \cdots \subset V_0^n = V$ *in* V *such that* $\dim[V_0^i, V_0^j]_0 \leqslant \dim[V^i, V^j]$ *for any* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. *Analogous assertions hold for any composition of commutators on any permutation with repetitions of subspaces* V^1, …, V^n.

Using the known description of contractions of five-dimensional nilpotent Lie algebras, we apply the above theorem to prove nonexistence of contractions for a number of pairs of six-dimensional nilpotent real Lie algebras even though there exist contractions between respective complexifications. The previously known criteria do not work in this situation.

Consider the n-dimensional ($n \geqslant 5$) solvable real Lie algebras $\mathfrak{a} := \mathrm{A}_{5.38} \oplus (n-5)\mathrm{A}_1$ and $\mathfrak{a}_0 := \mathrm{A}_{2.1} \oplus \mathrm{A}_{2.1} \oplus (n-4)\mathrm{A}_1$ whose nonzero commutation relations are exhausted, up to antisymmetry of the Lie bracket, by the following:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{a}\colon && [e_1, e_3] = e_3, \quad [e_2, e_4] = e_4, \quad [e_1, e_2] = e_5,\\
&\mathfrak{a}_0\colon && [e_1, e_3] = e_3, \quad [e_2, e_4] = e_4.
\end{aligned}$$

Theorem. *The Euclidean norm of any contraction matrix that realizes the contraction of the algebra $\mathfrak{a}$ to the algebra $\mathfrak{a}_0$ approaches infinity at the limit point. The same is true for the complex counterpart of this contraction.*

A realization of a contraction with a matrix-function that is linear in the contraction parameter is called a *Saletan (linear) contraction.*

Theorem. *Up to replacing the algebras $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{g}_0$ with isomorphic ones, every Saletan contraction $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ is realized by a matrix of the canonical form*

$$E^{n_0} \oplus J_\varepsilon^{n_1} \oplus \cdots \oplus J_\varepsilon^{n_s} \quad \textit{or, equivalently,} \quad E^{n_0} \oplus J_0^{n_1} \oplus \cdots \oplus J_0^{n_s} + \varepsilon E^n,$$

where $n_0 + \cdots + n_s = n$, E^m is the $m \times m$ identity matrix, and J_λ^m denotes the $m \times m$ Jordan block with an eigenvalue λ.

Hence any Saletan contraction can be realized by a matrix of the form $AS_\varepsilon B$, where A and B are constant nonsingular matrices and the matrix-valued function S_ε is of the above canonical form.

Definition. The tuple $(n_0; n_1, \dots, n_s)$, where n_1, …, n_s constitute a partition of the dimension $n - n_0$ of the Fitting null component relative to U_0 and $n_0 \in \{0, \dots, n\}$, is called the *signature* of this Saletan contraction.

We study Saletan contractions with the signature $(0; n)$. All contractions of such kind in dimension $n = 3$ are completely classified.

The contraction $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ is called *a generalized Inönü–Wigner contraction* (or, briefly, a *generalized IW-contraction*) if its matrix U_ε can be represented in the form $U_\varepsilon = AW_\varepsilon P$, where the matrices A and P are nonsingular and constant (i.e., they do not depend on ε) and $W_\varepsilon = \operatorname{diag}(\varepsilon^{\alpha_1}, \dots, \varepsilon^{\alpha_n})$

for some $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. The n-tuple of exponents $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ is called the *signature* of the generalized IW-contraction $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$. A *simple IW-contraction* is a generalized IW-contraction with signature consisting of zeros and ones.

The following assertion, which stood as a conjecture for a long time, was proved in the thesis.

Theorem. *Any generalized IW-contraction is equivalent to a generalized IW-contraction with an integer signature (and the same associated constant matrices).*

An algorithm of finding generalized IW-contractions or proving their nonexistence for a certain pair of Lie algebras is suggested. Using this algorithm, we optimize the description of the generalized IW-contractions of three- and four-dimensional algebras that exist in the literature.

One of the long-standing conjectures on generalized IW-contractions was that any contraction of Lie algebras can be realized as a generalized IW-contraction. This is true for contractions between three-dimensional real or complex Lie algebras. Consider four-dimensional real Lie algebras defined, up to antisymmetry of the Lie bracket, by the following nonzero commutation relations:

$$\begin{aligned}
2\mathrm{A}_{2.1}\colon &\quad [e_1, e_2] = e_1,\ [e_3, e_4] = e_3;\\
\mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_{3.2}\colon &\quad [e_2, e_4] = e_2,\ [e_3, e_4] = e_2 + e_3;\\
\mathrm{A}_{4.1}\colon &\quad [e_2, e_4] = e_1,\ [e_3, e_4] = e_2;\\
\mathrm{A}_{4.10}\colon &\quad [e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_2,\ [e_1, e_4] = -e_2,\ [e_2, e_4] = e_1.
\end{aligned}$$

Here and in what follows we use the Mubarakzyanov's nomenclature for low-dimensional Lie algebras, and $\mathfrak{g}_{\dots}$ denotes the complexification of the algebra $\mathrm{A}_{\dots}$. All contractions of four-dimensional real Lie algebras were realized via generalized IW-contractions except two contractions, $2\mathrm{A}_{2.1} \to \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_{3.2}$ and $\mathrm{A}_{4.10} \to \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_{3.2}$. Since the complexifications $2\mathfrak{g}_{2.1}$ and $\mathfrak{g}_{4.10}$ of the algebras $2\mathrm{A}_{2.1}$ and $\mathrm{A}_{4.10}$ are isomorphic, there was only one exception for the complex case, $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$.

Theorem. *(i) There exists a unique contraction between four-dimensional complex Lie algebras,* $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$*, that is inequivalent to a generalized IW-contraction.*

(ii) Precisely two contractions between four-dimensional real Lie algebras, $2\mathrm{A}_{2.1} \to \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_{3.2}$ *and* $\mathrm{A}_{4.10} \to \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_{3.2}$*, cannot be realized as generalized IW-contractions.*

Combining the above results also yields the following assertion.

Theorem. *Any generalized IW-contraction between four-dimensional complex (resp. real) Lie algebras is equivalent to one with parameter exponents in* $\{0, 1, 2, 3\}$*. The exponents in* $\{0, 1, 2\}$ *suffice for all such contractions except* $2\mathrm{A}_{2.1} \to \mathrm{A}_{4.1}$*,* $\mathrm{A}_{4.10} \to \mathrm{A}_{4.1}$ *and* $\mathrm{so}(3) \oplus \mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_{4.1}$ *in the real case and* $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_{4.1}$ *in the complex case, where the minimal tuple of exponents is* $(3, 2, 1, 1)$*.*

Summing up the study of realization of contractions between four-dimensional complex (resp. real) Lie algebras, we formulate the following assertion.

Theorem. *Any contraction between four-dimensional complex (resp. real) Lie algebras can realized as a generalized IW-contraction or a Saletan contraction.*

The contraction $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ is called *diagonal* if its matrix U_ε can be represented in the form $U_\varepsilon = AW_\varepsilon P$, where A and P are constant nonsingular matrices and $W_\varepsilon = \mathrm{diag}(f_1(\varepsilon), \dots, f_n(\varepsilon))$ for some continuous functions $f_i\colon (0, 1] \to \mathbb{F}\backslash\{0\}$.

Theorem. *Any diagonal contraction is equivalent to a generalized IW-contraction with an integer signature.*

A linear operator J on $\mathfrak{g}$ is called *Lie-orthogonal* if $[Jx, Jy] = [x, y]$ for any $x, y \in \mathfrak{g}$. Basic properties of Lie-orthogonal operators on a finite-dimensional Lie algebra are studied. In particular, we introduce a natural equivalence relation on such operators. The center, the radical and the components of the ascending central series prove to be invariant with respect to any Lie-orthogonal operator. Over an algebraically closed field of characteristic 0, only solvable Lie algebras with solvability degree not greater than two admit Lie-orthogonal operators whose all eigenvalues differ from 1 and -1.

Lie-orthogonal automorphisms are studied. In particular, we prove that an operator J on a finite-dimensional Lie algebra $\mathfrak{g}$ with zero center is such an automorphism if and only if it can be represented as $J = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} + N$, where N is an operator on $\mathfrak{g}$ with $N^2 = 0$ and $N\mathfrak{g}' = (N\mathfrak{g})' = \{0\}$ that is a $(0,1,1)$-differentiation on $\mathfrak{g}$. Moreover, the set of all such operators N is an associative algebra with respect to the operator composition with trivial (identically zero) anticommutator.

We completely describe of Lie-orthogonal operators on metric Lie algebras.

Theorem. *Let* $\mathfrak{g}$ *be a finite-dimensional metric Lie algebra and* J *a Lie-orthogonal operators on* $\mathfrak{g}$. *Then there exist a decomposition* $\mathfrak{g}$ *as the direct sum of two ideals* $\mathfrak{i}_+$ *and* $\mathfrak{i}_-$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_+ \oplus \mathfrak{i}_-$, *and an operator* $J_{\mathfrak{z}}$ *on* $\mathfrak{g}$, *whose image is contained in the center* $\mathfrak{z}$ *of* $\mathfrak{g}$ *such that* $J = \mathrm{id}_{\mathfrak{i}_+} \oplus (-\mathrm{id}_{\mathfrak{i}_-}) + J_{\mathfrak{z}}$.

This description implies that Lie-orthogonal operators on a simple Lie algebra are exhausted by the trivial ones, which allows us to give the complete description of Lie-orthogonal operators for semi-simple and reductive algebras. We preliminarily describe Lie-orthogonal operators on Lie algebras with nontrivial Levi–Mal'tsev decomposition as well.

The sets of Lie-orthogonal operators of some classes of Lie algebras (Heisenberg algebras, almost Abelian algebras, etc.) are directly computed. In particular, the group formed by the equivalence classes of Lie-orthogonal operators on a Heisenberg algebra proves to be isomorphic to the standard symplectic group of the appropriate dimension.

Keywords: Lie algebras, contractions of Lie algebras, subalgebra flags, Inönü–Wigner contractions, Saletan contractions, diagonal contractions, generalized Inönü–Wigner contractions, Lie-orthogonal operators.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ

1. Попович Д.Р., Прапори підалгебр у контрактованих алгебрах Лі, *Допов. Нац. акад. наук Укр.* (2021), № 4, 9–17.

2. Popovych D.R., Canonical forms for matrices of Saletan contractions, *J. Phys.: Conf. Ser.* **621** (2015), 012012, 10 pp., arXiv:1507.00781.

3. Popovych D.R., Contractions with necessarily unbounded matrices, *Linear Algebra Appl.* **458** (2014), 689–698, arXiv:1401.5456.

4. Popovych D.R., Lie-orthogonal operators, *Linear Algebra Appl.* **438** (2013), 2090–2106, arXiv:1109.1548.

5. Popovych D.R. and Popovych R.O., Lowest dimensional example on non-universality of generalized Inönü–Wigner contractions, *J. Algebra* **324** (2010), 2742–2756, arXiv:0812.1705.

6. Popovych D.R. and Popovych R.O., Equivalence of diagonal contractions to generalized IW-contractions with integer exponents, *Linear Algebra Appl.* **431** (2009), 1096–1104, arXiv:0812.4667.

7. Попович Д.Р., Контракція між алгебрами Лі з обов'язково сингулярними компонентами матриці контракції, *Допов. Нац. акад. наук Укр.* (2014), № 7, 29–35.

8. Popovych D.R., Generalized IW-contractions of low-dimensional Lie algebras, *Proceedings of the Sixth International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Protaras, Cyprus, June 17–21, 2012)*, University of Cyprus, Nicosia, 2013, pp. 179–191.

9. Popovych D.R., Subalgebra and subspace flags in contracted Lie algebras, *Book of abstracts of the 13th International Algebraic Conference in Ukraine (2021, July 6–9, Kyiv, Ukraine)*, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2021, p. 62.

10. Popovych D.R., Chains of subalgebras in contracted Lie algebras, *Book of abstracts of the International Conference of Young Mathematicians*

(2021, June 3–5, Kyiv, Ukraine), Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2021, p. 36. https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2021/Abstracts_2021.pdf

11. Popovych D.R., IW contractions and their generalizations, *Book of abstracts of the International Conference "Algebraic and Geometric Methods of Analysis" dedicated to the memory of Yuriy Trokhymchuk (17.03.1928–18.12.2019) (2021, May 25–28, Odesa, Ukraine)*, pp. 116–117. https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2021/contents/agma2021-abstracts.pdf

12. Popovych D.R., Contractions with specific contraction matrices, *Book of abstracts of the Seventh International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (2014, June 15–19, Larnaca, Cyprus)*, p. 36.

13. Popovych D., Lowest dimensional example of contraction with necessarily singular matrix components, *International Workshop "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (2013, December 22–23, Kyiv, Ukraine)*. Abstract. http://www.imath.kiev.ua/appmath/~AbstractsWIF/PopovychD2013

14. Popovych D.R., Application of Voronoi theorem to diagonal contractions of Lie algebras, *Book of abstracts of the Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, (2013, September 16–20, Kyiv, Ukraine)*, pp. 26–27.

15. Попович Д.Р., Діагональні контракції алгебр Лі, *Тези третьої міжуніверситетської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики (25–27 квітня 2013 р., Київ, Україна)*, с. 132–133.

16. Popovych D., Non-universality of IW-contractions, *Book of abstracts of the Sixth International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (2012, June 17–21, Protaras, Cyprus)*, p. 35.

17. Popovych D., Lie-orthogonal operators, *International Workshop "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (2011, December 18–19, Kyiv, Ukraine)*. Abstract. http://www.imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/PopovychD

18. Popovych D.R., Generalized IW-contractions of Lie algebras, *International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (2009, June 21–27, Kyiv, Ukraine)*. Abstract. https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2009/PopovychD

Зміст

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

V	базовий (комплексний або дійсний) векторний простір розмірності n
$\mathfrak{g}$	алгебра Лі
$\mathfrak{g}'$	похідна алгебра алгебри $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}' := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$
$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$	група автоморфізмів алгебри $\mathfrak{g}$
$\mathfrak{g}_0$	контрактована алгебра Лі
$m\mathfrak{g}$	пряма сума m копій алгебри $\mathfrak{g}$
$\mathfrak{s}$	підалгебра алгебри $\mathfrak{g}$
$\mathfrak{i}$	ідеал алгебри $\mathfrak{g}$
$\mathrm{Iso}(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$	множина ізоморфізмів з алгебри $\mathfrak{g}$ в алгебру $\tilde{\mathfrak{g}}$
$\mathfrak{g} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$	пряма сума алгебр Лі $\mathfrak{g}$ та $\tilde{\mathfrak{g}}$
$\mathfrak{u} \dotplus \mathfrak{v}$	пряма сума векторних (під)просторів $\mathfrak{u}$ і $\mathfrak{v}$
$\langle \dots \rangle$	лінійна оболонка
J	ліівськи ортогональний оператор
id_{V_1}	тотожній оператор на підпросторі V_1
$\ker A$, $\mathrm{im}\, A$	ядро і образ оператора A
A_1	одновимірна дійсна алгебра Лі
$\mathrm{A}^{\dots}_{n.m}$	дійсна n–вимірна ($n = 2, 3, 4, 5$) алгебра Лі з порядковим номером m згідно з класифікацією Г.М. Мубаракзянова [7, 8] (і параметрами ...)
$\mathfrak{g}^{\dots}_{n.m}$	відповідна комплексна n–вимірна алгебра Лі
$\mathfrak{n}_{n.m}$	комплексна або дійсна n–вимірна ($n = 5, 6$) нільпотентна алгебра Лі з номером m згідно [54, 74]
E, E^m	одинична матриця, одинична $m \times m$-матриця

Якщо не оговорено інше, за повторюваними індексами йде підсумовування. Якщо не обумовлено інше, індекси i, j, k пробігають від 1 до n.

Вступ

Актуальність теми. Контракції алгебр Лі є різновидом граничного переходу між орбітами таких алгебр. Це поняття, вперше розглянуте І.Е. Сигалом [107] і строго визначене значно пізніше Ю.Дж. Салетаном [105], стало відомим після статей Е. Іньоню та Ю.П. Вігнера [60, 61]. Його узагальненням є поняття виродження алгебр Лі [36, 52, 54]. Контракції алгебр Лі зокрема утворюють симетрійне підґрунтя для двох найважливіших граничних переходів у фізиці — від релятивістської і квантової механік до класичної. Нещодавно [35, 63, 104, 112] контракції алгебр Лі було також використано в контексті граничних переходів між випадками розширення алгебр ліївської симетрії в класах диференціальних рівнянь [31, 32].

Техніку класифікації контракцій у класах алгебр Лі на основі наборів неперервних і напівнеперервних величин розроблено в [36, 39, 54, 106] і в [80] для комплексного і дійсного випадків відповідно. З використанням цієї техніки було прокласифіковано контракції п'ятивимірних [54] та шестивимірних [106] комплексних нільпотентних алгебр Лі, комплексних чотиривимірних алгебр Лі [39] і дійсних алгебр Лі до розмірності чотири включно [80], а також вивчено контракції у вужчих класах алгебр Лі більшої розмірності [22, 23, 36, 37]. Техніку класифікації контракцій алгебр Лі було поширено на інші типи алгебр, див. [29, 62, 67, 68, 76] та посилання в цих статтях. Втім навіть класифікації контракцій три- та чотиривимірних алгебр не були повністю впорядкованими, а наявних неперервних і напівнеперервних величин не вистачало для класифікації контракцій шестивимірних дійсних нільпотентних алгебр Лі.

На початку 1950-х рр. Е. Іньоню та Ю.П. Вігнер [60, 61] вивчили спеціальні типи контракцій алгебр Лі під час ширшого дослідження груп Лі та їх зображень. З того часу висунуто багато припущень щодо різних способів реалізації контракцій алгебр Лі. Контракції Іньоню–Вігнера є частинним випадком контракцій, реалізовних за допомогою афінних за параметром контракції матриць, які було вивчено Ю.Дж. Салетаном [105] на початку 1960-х рр. і які тепер називають контракціями Салетана. Водночас, до останнього часу не було відомо, чи можна привести матриці контракцій Салетана до певного канонічного вигляду, що перешкоджало розробці ефективного алгоритму обчислення контракцій Салетана та їх класифікації. На сьогодні такої класифікації не існує навіть для чотиривимірних комплексних алгебр Лі.

Так звані узагальнені контракції Іньоню–Вігнера (або виродження за однопараметричними підгрупами в алгебраїчній термінології [54]) запропоновано Х.Д. Дьобнером та О. Мельсхаймером [47] у 1967 р. Спроба доведення в [115] припущення з [114], що будь-яка контракція еквівалентна узагальненій ІВ-контракції, не була успішною [80]. Очевидними контрприкладами [82] до цього припущення є контракції до характеристично нільпотентних алгебр Лі, низку яких побудовано Д. Бурде в [36, 37] для всіх розмірностей не менше семи, в яких і існують характеристично нільпотентні алгебри Лі. Тому подібних прикладів немає в нижчих розмірностях. Доведення неіснування узагальнених ІВ-контракцій до алгебр Лі, які не є характеристично нільпотентними, є суттєво складнішим, оскільки такі контрактовані алгебри допускають власні градуювання, а зазначене неіснування пов'язане з несумісністю фільтрацій початкової алгебри та градуювань контрактованої алгебри. Питання про найменшу розмірність, у якій узагальнені ІВ-контракції не універсальні, залишалося без відповіді.

Поняття ліївськи ортогональних операторів на алгебрах Лі введено в статтях А.П. Петравчука та його учнів [12, 30] як узагальнення абелевих комплексних структур на дійсних алгебрах Лі. В цих роботах вивчено деякі властивості таких операторів, як правило, коли центр алгебри нульовий. Водночас, було незрозуміло, чи завжди умова тривіальності центру є суттєвою в отриманих результатах. Також не існувало вичерпних описів ліївськи ортогональних операторів навіть для спеціальних класів алгебр Лі, хоча для певних класів алгебр Лі такий опис можна отримати в простий і елегантний спосіб.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі математичної фізики Інституту математики НАН України в рамках науково-дослідних тем "Симетрія та інтегровність рівнянь сучасної математичної фізики" (номер державної реєстрації 0120U100173) та "Аналітичні та групові методи дослідження математичних моделей сучасного природознавства" (номер державної реєстрації 0117U002119), а також відповідно до плану наукових досліджень кафедри алгебри і комп'ютерної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка в рамках науково-дослідної теми № 11БФ038-03 "Застосування алгебро-геометричних методів в теоріях груп, напівгруп, кілець, зображень до задач прикладної алгебри та захисту інформації" (номер державної реєстрації 0111U005264).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є дослідження властивостей алгебр Лі, пов'язаних з їхніми контракціями, вивчення реалізацій таких контракцій матричнозначними функціями певних типів, розробка нових методів обчислення контракцій Салетана і узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера, оптимізація класифікацій контракцій алгебр Лі низької розмірності та опис ліївськи ортогональних операторів на алгебрах Лі.

Об'єктом дослідження є контракції алгебр Лі та ліївськи ортогональні оператори на таких алгебрах.

Предметом дослідження є поведінка прапорів підалгебр і підпросторів у алгебрах Лі при контракціях алгебр Лі, реалізації контракцій алгебр Лі різних типів, як-то контракції за допомогою обмежених матричнозначних функцій, контракції Салетана, узагальнені контракції

Іньоню–Вігнера і діагональні контракції, контракції три- та чотиривимірних алгебр Лі, інваріантні відносно ліївськи ортогональних операторів підпростори, ліївськи ортогональні автоморфізми алгебр Лі, ліївськи ортогональні оператори на метричних алгебрах Лі та на алгебрах Лі низької розмірності.

Методи дослідження. Разом із загальними методами лінійної алгебри, теорії алгебр Лі та аналізу застосовано спеціальні методи факторизації, вибору канонічних базисів і побудови канонічних форм, комплексифікацію, оригінальний алгоритм обчислення узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера або доведення їх неіснування шляхом зведення цієї задачі до розв'язання систем квадратичних рівнянь, встановлення відповідності між властивостями об'єктів різних типів, інваріантні білінійні форми. Для перевірки результатів щодо алгебр Лі низьких розмірностей використано систему символьних обчислень `Maple`.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1. Описано поведінку прапорів підалгебр, ідеалів та підпросторів при контракціях алгебр Лі, що дає нові критерії неіснування контракцій.
2. Для кожної розмірності не менше п'яти побудовано приклад контракції, реалізовної лише матричнозначними функціями з нескінченними границями евклідових норм при граничному значенні аргументу.
3. Для матриць контракцій Салетана запропоновано нову канонічну форму і введено поняття сигнатури.
4. Розроблено алгоритм побудови узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера або доведення їх неіснування для фіксованої пари алгебр Лі. За його допомогою оптимізовано відомий опис узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера три- та чотиривимірних дійсних і комплексних алгебр Лі.

5. Доведено, що будь-яка діагональна контракція еквівалентна узагальненій контракції Іньоню–Вігнера з цілими степенями параметра контракції.
6. Знайдено найнижчу розмірність алгебр Лі, для якої узагальнені контракції Іньоню–Вігнера не є універсальними.
7. Введено поняття еквівалентності ліївськи ортогональних операторів на алгебрах Лі. Показано інваріантність низки ідеалів відносно таких операторів.
8. Знайдено зображення для ліївськи ортогональних автоморфізмів.
9. Вичерпно описано ліївськи ортогональні оператори на метричних алгебрах Лі.
10. Для низки класів алгебр Лі відповідні множини ліївськи ортогональних операторів обчислено прямим методом.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати і розвинуті методи можуть бути використані для подальших досліджень у теорії алгебр Лі, теоретичній та математичній фізиці.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, одержано здобувачем самостійно. У роботах [101, 102], опублікованих у співавторстві, співавтору належать постановка задач та перевірка отриманих результатів, інтерпретацію яких виконано спільно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися на таких конференціях і симпозіумах:

- Міжнародна конференція “Algebraic and Geometric Methods of Analysis”, присвячена пам’яті Юрія Трохимчука (17.03.1928–18.12.2019) (Одеса, 25–28 травня 2021 р.),
- Міжнародна конференція “The 13th International Algebraic Conference in Ukraine” (Київ, 6–9 липня 2021 р.),

- Міжнародна конференція "The International Conference of Young Mathematicians" (Київ, 3–5 червня 2021 р.),
- Сьомий міжнародний симпозіум "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (GADEIS)" (Ларнака, Кіпр, 15–19 червня 2014 р.),
- Міжнародний симпозіум "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (Київ, 22–23 грудня 2013 р.),
- Міжнародна конференція "The Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations" (Київ, 16–20 серпня 2013 р.),
- Третья міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 25–27 квітня 2013 р.),
- Міжнародна конференція "Lie Algebras and Applications" (Упсала, Швеція, 6–8 вересня 2012 р.)
- Шостий міжнародний симпозіум "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (GADEIS)" (Протарас, Кіпр, 17–21 червня 2012 р.),
- Міжнародний симпозіум "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (Київ, 18–19 грудня 2011 р.),
- Дев'ята міжнародна конференція "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Київ, 21–27 червня 2009 р.)

Результати дисертації також неодноразово доповідались і обговорювались на засіданнях наукових семінарів

- відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін),
- кафедри алгебри і комп'ютерної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, (керівник семінару — професор А.П. Петравчук).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в статтях [16, 17, 91, 92, 95, 97, 101, 102] і тезах конференцій [15, 88, 89, 90, 93, 94, 96, 99, 100, 98]. Статті [17, 92, 95, 97, 101, 102] відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук. Статті [16, 17, 92, 92, 95, 97] опубліковано без співавторів. Статті [92, 95, 97, 101, 102] проіндексовано в міжнародних наукометричних базах даних Web of Science і Scopus, статті [16, 91, 92, 95, 101, 102] прореферовано в міжнародних реферативних базах MathSciNet і Zentralblatt MATH. Статті [92, 102] опубліковано у виданнях, що віднесено до квартиля Q1, а [95, 101] — Q2 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотацій українською і англійською мовами, списку публікацій, змісту, переліку умовних означень, вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 115 найменувань, і додатка. Повний обсяг дисертації становить 175 сторінок, з них список використаних джерел займає 11 сторінок, а додаток — 4 сторінки.

Короткий зміст основної частини роботи. Основну частину роботи складають три розділи. На початку кожного розділу подано стислий опис результатів, що містяться в ньому, в контексті відомих результатів, а наприкінці — висновки й обговорення нерозв'язаних проблем.

У **першому** розділі досліджено поведінку прапорів підалгебр і підпросторів при контракціях алгебр Лі, а також реалізовність контракцій алгебр Лі обмеженими матричнозначними функціями або послідовностями і матричнозначними функціями, афінними за параметром контракції.

У підрозділі 1.1 зібрано необхідну для подальшого розгляду загальну інформацію щодо контракцій.

Головним результатом підрозділу 1.2 є теорема 1.6, що описує поведінку прапорів підалгебр при контракціях алгебр Лі, а її наслідок 1.7 є її ослабленим аналогом для прапорів підпросторів. Багато вже відомих необхідних критеріїв існування контракцій напряму випливають з теореми 1.6. Водночас, обидва твердження можна безпосередньо використати як набори нових таких критеріїв. Ефективність основної частини теореми 1.6 як такого критерію показано її застосуванням у доведенні неіснування контракцій для низки пар шестивимірних нільпотентних дійсних алгебрі Лі, для яких не працює жоден з раніше відомих критеріїв. Допоміжними результатами для цього є опис контракції п'ятивимірних нільпотентних алгебр Лі з [54] і аналіз множини п'ятивимірних підалгебр для кожної з розглянутих шестивимірних нільпотентних дійсних алгебр Лі.

Через побудову серії прикладів контракцій між розв'язними алгебрами Лі в підрозділі 1.3 показано, що для кожної розмірності не менше п'яти існує контракція, реалізовна лише за допомогою матриць, евклідові норми яких обов'язково прямують до нескінченності при граничному значенні параметра контракції. Добре відомо, що в розмірностях не більше чотирьох це не так. Інакше кажучи, це дає вичерпну і залежну від розмірності відповідь про можливість реалізації контракцій за допомогою обмежених матричнозначних функцій.

Канонічну форму контракцій Салетана знайдено в підрозділі 1.4. А саме, показано, що з точністю до фіксованих замін базисів початкової та кінцевої алгебр Лі будь-яку контракцію Салетана можна реалізувати матричнозначною функцією спеціальної жорданової форми, цілком визначеної розмірністю одиничної компоненти Фіттінга й розбиттям розмірності нульової компоненти Фіттінга її значення при граничному значенні параметра контракції. Цей результат обґрунтовує визначення для кожної контракції Салетана набору всіх цих чисел як її сигнатури. Досліджено контракції Салетана, в яких зазначені одиничні компоненти Фіттінга нульвимірні, й вичерпно прокласифіковано такі контракції між алгебрами Лі розмірності три.

Другий розділ цілковито присвячено узагальненим контракціям Іньоню–Вігнера.

Означення та основні властивості таких контракцій наведено в підрозділі 2.1. Там же доведено, що будь-яка узагальнена ІВ-контракція (слабо) еквівалентна узагальненій ІВ-контракції з цілочисловою сигнатурою (і такими самими сталими матрицями). Сукупність цих результатів утворює теоретичне підґрунтя для запропонованого в підрозділі 2.2 алгоритму побудови узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера або доведення їх неіснування для фіксованої пари алгебр Лі. Цей алгоритм використано відповідно у прикладі 2.5 та в підрозділі 2.3 для оптимізації відомих описів узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера три- та чотиривимірних дійсних і комплексних алгебр Лі, тобто зменшення сигнатур і спрощення сталих матричних компонент для матриць таких контракцій порівняно з відомими, а також для доведення неможливості реалізації контракцій певних чотиривимірних алгебр Лі як узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера.

Зокрема, одна з отриманих теорем — теорема 2.11 — стверджує, що будь-яка узагальнена контракція Іньоню–Вігнера між чотиривимірними комплексними або дійсними алгебрами Лі еквівалентна контракції того самого типу з сигнатурою, чиї компоненти належать множині $\{0, 1, 2, 3\}$, причому ця множина є мінімальною. З точністю до перестановки компонент перелік мінімальних сигнатур узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера між чотиривимірними комплексними або дійсними алгебрами Лі вичерпують сигнатури $(3, 2, 1, 0)$, $(2, 1, 1, 0)$, $(2, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$.

Згідно теореми 2.7 існує єдина контракція між комплексними чотиривимірними алгебрами Лі, не еквівалентна узагальненій контракції Іньоню–Вігнера. Над полем дійсних чисел їй відповідають дві контракції з однаковою контрактованою алгеброю, див. наслідок 2.9. Важливість цих тверджень полягає в тому, що вони встановлюють нижню межу розмірностей алгебр Лі, для яких узагальнені контракції Іньоню–Вігнера не є універсальними. Також зазначені контракції дають перші приклади контракцій, нереалізовних як узагальнені контракції Іньоню–Вігнера, у випадку, коли контрактована алгебра не є характеристично нільпотентною і допускає нетривіальні діагональні диференціювання.

Результати підрозділів 1.4 і 2.3 підсумовано в теоремі 2.10. Вона стверджує, що узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера та контракцій Салетана разом достатньо, щоб реалізувати всі контракції між чотиривимірними комплексними або дійсними алгебрами Лі.

У підрозділі 2.4 доведено, що будь-яка діагональна контракція еквівалентна узагальненій контракції Іньоню–Вігнера з цілими степенями параметра контракції.

У **третьому** розділі вивчено ліївськи ортогональні оператори на скінченновимірних алгебрах Лі.

У підрозділі 3.1 дано означення ліївськи ортогональних операторів, введено поняття їх еквівалентності, розглянуто їхні найпростіші властивості та елементарні алгебраїчні структури на їх множинах, а також обговорено базисний підхід при дослідженні таких операторів.

Підрозділ 3.2 присвячено ідеалам, інваріантним відносно ліївськи ортогональних операторів. Так, показано інваріантність центру, радикала та членів зростаючого центрального ряду відносно дії довільного ліївськи ортогонального оператора. З властивостей кореневих підпросторів ліївськи ортогональних операторів виведено, що над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль лише розв'язні алгебри Лі степеня розв'язності не більше ніж два допускають ліївськи ортогональні оператори, усі власні числа яких відмінні від 1 та -1.

Підрозділ 3.3 присвячено вивченню ліївськи ортогональних автоморфізмів алгебр Лі. Знайдено зображення для таких автоморфізмів, яке конкретизовано для алгебр Лі з нульовим центром. На основі цього зображення в теоремі 3.40 для кожної з таких алгебр встановлено взаємнооднозначну відповідність між її групою ліївськи ортогональних автоморфізмів і певною асоціативною алгеброю нільпотентних операторів степеня нільпотентності два з тривіальним (тотожно нульовим) антикомутатором відносно композиції операторів.

У підрозділі 3.4 вичерпно описано ліївськи ортогональні оператори на метричних алгебрах Лі. З цього опису зокрема випливає, що на простих алгебрах Лі можливі лише тривіальні ліївськи ортогональні оператори. Це дало змогу отримати повний опис ліївськи ортогональних операторів на напівпростих і редуктивних алгебрах Лі, а також попередній опис ліївськи ортогональних операторів з нетривіальним розкладом Леві–Мальцева.

Для деяких класів алгебр Лі (алгебри Гейзенберга, майже абелеві алгебри, алгебри низьких розмірностей тощо) у підрозділі 3.5 відповідні множини ліївськи ортогональних операторів обчислено прямим методом на основі базисного підходу. Так, група, утворена класами еквівалентності ліївськи ортогональних операторів алгебри Гейзенберга, ізоморфна стандартній симплектичній групі відповідної розмірності.

Подяки. Автор висловлює щиру вдячність науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору Анатолію Петровичу Петравчуку за постійну увагу і допомогу в роботі, а також члену-кореспонденту НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору Анатолію Глібовичу Нікітіну, доктору фізико-математичних наук, професору Роману Омеляновичу Поповичу, докторам фізико-математичних наук Вячеславу Миколайовичу Бойку та Олені Олександрівні Ванеєвій та іншим співробітникам відділу математичної фізики Інституту математики НАН України за підтримку.

Розділ 1

Контракції алгебр Лі та їх властивості

Контракції є різновидом граничних переходів, що формально описують зв'язки між алгебраїчними структурами, зокрема тими, що лежать в основі фізичних теорій. Контракції розглядають для алгебр над дійсним або комплексним полем. Для більш загального випадку довільних алгебраїчно замкнених полів існує поняття вироджень алгебр Лі [36, 52, 54]. Незважаючи на інтенсивні дослідження, повного розуміння, які властивості алгебр Лі зберігаються при їх контракціях і які обмеження можна накласти на матричнозначні функції при реалізації контракцій у певних класах алгебр Лі, дотепер немає.

У цьому розділі досліджено поведінку прапорів підалгебр і підпросторів при контракціях алгебр Лі, а також реалізовність контракцій алгебр Лі обмеженими матричнозначними функціями або послідовностями і матричнозначними функціями, афінними за параметром контракції.

Для зручності наведемо нижче деякі означення і результати щодо алгебр Лі, які використано в різних частинах дисертації.

Лінійний простір над полем $\mathbb{F}$ з операцією $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, яку позначають $(x,y)\mapsto[x,y]$ і називають дужкою Лі або комутатором елементів x та y, називають *алгеброю Лі* над полем $\mathbb{F}$, якщо ця операція має такі властивості: (L1) вона є білінійною; (L2) $[x,x]=0$ для будь-якого $x\in\mathfrak{g}$; (L3) $[x,[y,z]]+[y,[x,z]+[z,[x,y]]=0$ для будь-яких $x,y,z\in\mathfrak{g}$ (тотожність Якобі). Підпростори $\mathfrak{s}$ та $\mathfrak{i}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ називають відповідно *підалгеброю* та *ідеалом* цієї алгебри, якщо $[x,y]\in\mathfrak{s}$ для будь-яких $x,y\in\mathfrak{s}$ і $[x,y]\in\mathfrak{i}$ для будь-яких $x\in\mathfrak{i}$ та $y\in\mathfrak{g}$.

Похідним рядом алгебри Лі $\mathfrak{g}$ називають послідовність її вкладених ідеалів $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(i)} = [\mathfrak{g}^{(i-1)}, \mathfrak{g}^{(i-1)}]$, $i \in \mathbb{N}$. *Спадним центральним рядом* алгебри Лі $\mathfrak{g}$ називають послідовність вкладених ідеалів $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i]$, $i \in \mathbb{N}$. Алгебру Лі $\mathfrak{g}$ називають *розв'язною* (*нільпотентною*), якщо $\mathfrak{g}^{(n)} = \{0\}$ ($\mathfrak{g}^n = \{0\}$) для деякого n. Алгебру Лі, що не містить власних ідеалів, називають *простою.* Якщо ж алгебра Лі не містить власних розв'язних ідеалів, її називають *напівпростою. Центр* алгебри Лі $\mathfrak{g}$ — це множина $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_\mathfrak{g} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\}$. *Зростаючим центральним рядом* алгебри Лі $\mathfrak{g}$ називають зростаючу послідовність ідеалів алгебри $\mathfrak{g}$, визначену рекурентно таким чином: $\mathfrak{g}_{[0]} = \{0\}$, $\mathfrak{g}_{[n+1]}$ є прообразом центру алгебри $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{[n]}$ при канонічному відображенні $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{[n]}$.

Приєднаним зображенням елемента x алгебри Лі $\mathfrak{g}$ на цій алгебрі називають лінійний оператор $\mathrm{ad}_x \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, визначений рівністю $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$ для довільного $y \in \mathfrak{g}$. Для довільних $x, y \in \mathfrak{g}$ покладемо $K(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y)$. Тоді K — симетрична білінійна форма на $\mathfrak{g}$, яку називають *формою Кіллінга.* Форма Кіллінга *асоціативна* відносно дужки Лі в тому сенсі, що $K([x, y], z) = K(x, [y, z])$ для будь-яких x, y, z з $\mathfrak{g}$ [18, с. 36]. (Такі форми також називають інваріантними [1, с. 45–47].) Форма Кіллінга K на напівпростій алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ є невиродженою, тобто $\forall x \in \mathfrak{g}\ \exists y \in \mathfrak{g}\colon K(x, y) \neq 0$. Алгебра Лі є напівпростою тоді і лише тоді, коли вона розкладається в пряму суму простих ідеалів.

Радикалом $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_\mathfrak{g}$ алгебри Лі називають її максимальний розв'язний ідеал. *Підалгеброю (фактором) Леві* алгебри Лі називають будь-яку підалгебру, що доповнює радикал. Підалгебра Леві завжди існує та є напівпростою. Теорема Леві–Мальцева стверджує, що будь-яка алгебра Лі $\mathfrak{g}$ має підалгебру Леві S. Довільну підалгебру Леві алгебри $\mathfrak{g}$ можна перевести в S спеціальним автоморфізмом цієї алгебри.

Структура цього розділу є такою. В підрозділі 1.1 наведено означення понять контракції алгебр Лі та їх еквівалентності згідно з [80, 105], а також необхідні прості твердження щодо контракцій. Властивості прапорів підалгебр і підпросторів щодо контракцій вивчено в підрозділі 1.2 і використано для доведення неіснування контракцій у низці пар шестивимірних дійсних нільпотентних алгебр, для яких не працюють відомі критерії. У підрозділі 1.3 через побудову серії прикладів показано, що для кожної розмірності не менше п'яти існують пари як комплексних, так і дійсних алгебр Лі, які пов'язано контракціями, реалізовними лише необмеженими матричнозначними функціями. Підрозділ 1.3 присвячено контракціям Салетана. Отримано канонічну форму матриць таких контракцій з точністю до їх сильної еквівалентності і замін базисів у вихідних і контрактованих алгебрах, що створило основу для введення поняття сигнатури контракції Салетана. Вивчено контракції Салетана з нульвимірними одиничними компонентами Фіттінга значень їхніх матриць при граничному значенні параметра контракції.

Результати цього розділу опубліковано у статтях [16, 17, 95, 97] і тезах конференцій [15, 93, 96, 99, 100, 98].

1.1. Означення контракцій алгебр Лі

Розглянемо n-вимірний ($n < \infty$) векторний простір V над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ або $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ та визначену на V бінарну операцію $\mu = [\cdot, \cdot]\colon V \times V \to V$. Якщо ця операція є білінійною, кососиметричною та задовольняє тотожність Якобі, то простір з нею називають алгеброю Лі $\mathfrak{g} = (V, \mu)$. У фіксованому базисі $(e_1, \dots, e_n)$ простору V алгебру $\mathfrak{g}$ можна визначити через дужку Лі базисних елементів:

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k,$$

де c_{ij}^k називають структурними сталими алгебри $\mathfrak{g}$ у базисі $(e_1, \dots, e_n)$. Тут і надалі індекси i, j, k пробігають значення від 1 до n, за повтореними індексами йде підсумовування. Многовид тензорів структурних сталих алгебр Лі на просторі V — це множина

$$\mathcal{C}_n = \{(c_{ij}^k) \in \mathbb{F}^{n^3} \mid c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0,\ c_{ij}^{i'} c_{i'k}^{k'} + c_{ki}^{i'} c_{i'j}^{k'} + c_{jk}^{i'} c_{i'i}^{k'} = 0\}.$$

Для матричнозначної функції $U\colon (0,1] \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$, $\varepsilon \mapsto U_\varepsilon$, і кожного $\varepsilon \in (0,1]$ визначимо перетворену дужку Лі $\mu_\varepsilon = \mu{\cdot}U_\varepsilon = [\cdot,\cdot]_\varepsilon \colon V\times V \to V$ згідно з $\mu_\varepsilon(x,y) := U_\varepsilon{}^{-1}\mu(U_\varepsilon x, U_\varepsilon y)$, $x,y \in V$. Якщо для довільних $x,y \in V$ існує границя $\lim_{\varepsilon\to+0}\mu(x,y)_\varepsilon =: \mu_0(x,y)$, то $\mu_0 =: [\cdot,\cdot]_0$ є добре визначеною дужкою Лі. Алгебру Лі $\mathfrak{g}_0 = (V,\mu_0)$ називають *неперервною контракцією* (або просто *контракцією*) алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Процедуру $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$, за допомогою якої алгебру Лі $\mathfrak{g}_0$ отримують з алгебри $\mathfrak{g}$, також називають *контракцією.* Параметр ε і матричнозначну функцію U_ε називають відповідно *параметром контракції* та *матрицею контракції.* У фіксованому базисі простору V оператор U_ε задають матрицею, а означення контракції можна переписати в термінах структурних сталих. А саме, воно означає, що для всіх значень i', j', k' існує границя $\lim_{\varepsilon\to+0} c^k_{\varepsilon,ij} =: c^{k'}_{0,i'j'}$, де $c^k_{\varepsilon,ij} := (U_\varepsilon)^i_{i'}(U_\varepsilon)^j_{j'}(U_\varepsilon{}^{-1})^{k'}_k c^k_{ij}$, а тому $c^{k'}_{0,i'j'}$ складають добре визначений тензор структурних сталих алгебри $\mathfrak{g}_0$.

Аналогічно до неперервних контракцій можна визначити послідовні контракції, використовуючи послідовності матриць $\{U_p,\, p \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{GL}(V)$ замість матричнозначних функцій. Для кожної дужки Лі з послідовності $\{\mu_p = \mu{\cdot}U_p = [\cdot,\cdot]_p,\, p\in\mathbb{N}\}$ алгебра Лі $\mathfrak{g}_p = (V,\mu_p)$ ізоморфна алгебрі $\mathfrak{g} = (V,\mu)$. Якщо границя

$$\lim_{p\to\infty}\mu_p(x,y) = \lim_{p\to\infty} U_p{}^{-1}\mu(U_p x, U_p y) =: \mu_0(x,y)$$

існує для довільних $x,y \in V$, то μ_0 є добре визначеною дужкою Лі на просторі V. Алгебру Лі $\mathfrak{g}_0 = (V,\mu_0)$ називають *послідовною контракцією* алгебри Лі $\mathfrak{g}$. У фіксованому базисі кожній алгебрі $\mathfrak{g}_p$ відповідає тензор структурних сталих $C_p := C \cdot U_p$ з компонентами $c^k_{p,ij} = (U_p)^{i'}_i(U_p)^{j'}_j(U_p{}^{-1})^k_{k'}c^{k'}_{i'j'}$. Існування поточкової границі послідовності дужок Лі $\{\mu_p, p\in\mathbb{N}\}$ еквівалентне існуванню границі $\lim_{p\to\infty} c^k_{p,ij} =: c^k_{0,ij}$ для всіх значень i, j, k, де $c^k_{0,ij}$ є компонентами тензора структурних сталих C_0 алгебри Лі $\mathfrak{g}_0$. Існування неперервної контракції $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ для пари алгебр $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0)$ еквівалентне існуванню послідовної контракції для цієї пари.

Контракцію $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ називають *невласною*, якщо алгебра $\mathfrak{g}_0$ ізоморфна алгебрі $\mathfrak{g}$, і *тривіальною*, якщо алгебра $\mathfrak{g}_0$ абелева. Якщо ізоморфні алгебри $\mathfrak{g}$ і $\tilde{\mathfrak{g}}$ контрактують відповідно до ізоморфних алгебр $\mathfrak{g}_0$ і $\tilde{\mathfrak{g}}_0$, то контракції $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ і $\tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}}_0$ називають *слабко еквівалентними.*

При дослідженні контракцій часто застосовують дві такі леми.

Лема 1.1. *Якщо матрицю U_ε контракції $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ представлено у вигляді $U_\varepsilon = \hat{U}_\varepsilon \check{U}_\varepsilon$, де $\hat{U}$, $\check{U}$ — неперервні функції з $(0, 1]$ у $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$, причому функція $\check{U}$ має границю $\check{U}_0 \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ при $\varepsilon \to +0$, то $\hat{U}_\varepsilon \check{U}_0$ також є матрицею контракції $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$.*

Зауваження 1.2. З леми 1.1 випливає, що $\hat{U}_\varepsilon$ є матрицею еквівалентної контракції $\mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}_0$, де $\tilde{\mathfrak{g}}_0 = (V, \mu_0 \cdot \check{U}_0^{-1})$ — алгебра, ізоморфна до $\mathfrak{g}_0$ через оператор U_0^{-1}.

Лема 1.3. *Алгебра Лі $\mathfrak{g}$ допускає послідовну контракцію до алгебри Лі $\mathfrak{g}_0$ тоді і лише тоді, коли в базисі $(e_1, \ldots, e_n)$ базового простору V існують послідовність невироджених нижньотрикутних (або верхньотрикутних) $n \times n$-матриць $\{L_p,\ p \in \mathbb{N}\}$ і ортогональна (відповідно унітарна) $n \times n$-матриця Q у дійсному (відповідно комплексному) випадку такі, що $C \cdot L_p \to C_0 \cdot Q$ при $p \to \infty$.*

Зауваження 1.4. Послідовність трикутних матриць $\{L_p,\ p \in \mathbb{N}\}$ та ортогональна матриця Q визначені в лемі 1.3 з точністю до перетворення

$$\tilde{L}_p = M_p L_p D_p, \quad \tilde{Q} = K Q D_0,$$

де K — матриця ортогонального автоморфізму алгебри $\mathfrak{g}_0$, D_0 — діагональна ортогональна (відповідно унітарна) матриця в дійсному (відповідно комплексному) випадку, M_p для кожного $p \in \mathbb{N}$ — матриця автоморфізму алгебри $\mathfrak{g}$, а послідовність трикутних матриць $\{D_p,\ p \in \mathbb{N}\}$ прямує до матриці D_0.

Модифікуємо поняття сильної еквівалентності контракцій з [80].

Означення 1.5. Нехай матричнозначні функції $U, \tilde{U}\colon (0,\delta] \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ відповідно контрактують ізоморфні алгебри $\mathfrak{g}$ і $\tilde{\mathfrak{g}}$ до ізоморфних алгебр $\mathfrak{g}_0$ і $\tilde{\mathfrak{g}}_0$. Ці контракції назвемо *сильно еквівалентними*, якщо існують $\delta \in (0,1]$, неперервні функції $\hat{U}\colon (0,\delta] \to \mathrm{Iso}(\mathfrak{g},\tilde{\mathfrak{g}})$, $\check{U}\colon (0,\delta] \to \mathrm{Iso}(\mathfrak{g}_0,\tilde{\mathfrak{g}}_0)$, $\bar{U}\colon (0,\delta] \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ з $\lim_{\varepsilon\to+0} \bar{U}(\varepsilon) = E$, де E — одинична $n\times n$-матриця, і неперервна монотонна функція $\varphi\colon (0,\delta] \to (0,1]$ з $\lim_{\varepsilon\to+0} \varphi(\varepsilon) = 0$ такі, що

$$\tilde{U}_\varepsilon = \hat{U}_\varepsilon^{-1} U_{\varphi(\varepsilon)} \bar{U}_\varepsilon \check{U}_\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0,\delta].$$

1.2. Прапори підалгебр у контрактованих алгебрах Лі

1.2.1. Поведінка прапорів при контракціях. Структура множин підалгебр та ідеалів алгебр Лі змінюється при контракціях. Водночас, деякі їх властивості є стабільними. Вивчимо поведінку прапорів підалгебр і підпросторів при контракціях алгебр Лі.

Теорема 1.6. *Припустимо, що алгебра Лі $\mathfrak{g}_0$ є (неперервною чи послідовною) контракцією алгебри Лі $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$, і алгебра $\mathfrak{g}$ містить прапор підалгебр*

$$\{0\} = \mathfrak{s}^0 \subset \mathfrak{s}^1 \subset \mathfrak{s}^2 \subset \dots \subset \mathfrak{s}^m \subset \mathfrak{s}^{m+1} = \mathfrak{g}.$$

Тоді алгебра $\mathfrak{g}_0$ містить прапор підалгебр

$$\{0\} = \mathfrak{s}_0^0 \subset \mathfrak{s}_0^1 \subset \mathfrak{s}_0^2 \subset \dots \subset \mathfrak{s}_0^m \subset \mathfrak{s}_0^{m+1} = \mathfrak{g}_0$$

таких, що

$$\dim \mathfrak{s}_0^a = \dim \mathfrak{s}^a \quad \textit{та} \quad \mathfrak{s}^a \to \mathfrak{s}_0^a, \quad a = 1,\dots,m.$$

Якщо $\mathfrak{s}^a$ є ідеалом у $\mathfrak{s}^b$, $1 \leqslant a < b \leqslant m+1$, то $\mathfrak{s}_0^a$ можна обрати ідеалом у $\mathfrak{s}_0^b$, причому $\mathfrak{s}^b/\mathfrak{s}^a \to \mathfrak{s}_0^b/\mathfrak{s}_0^a$.

Загальніше, якщо $[\mathfrak{s}^a, \mathfrak{s}^b] \subseteq \mathfrak{s}^c$ *для деяких* $a, b, c \in \{0, \ldots, m+1\}$, *то також* $[\mathfrak{s}^a_0, \mathfrak{s}^b_0]_0 \subseteq \mathfrak{s}^c_0$. *Крім того,* $\dim[\mathfrak{s}^a_0, \mathfrak{s}^b_0]_0 \leqslant \dim[\mathfrak{s}^a, \mathfrak{s}^b]$ *для будь-яких* $a, b \in \{1, \ldots, m\}$. *Аналогічні твердження справедливі для будь-якої композиції комутаторів на довільному розміщенні з повтореннями з підалгебр* $\mathfrak{s}^a$.

Доведення. Достатньо розглянути випадок послідовних контракцій. Виберемо узгоджений з прапором підалгебр в алгебрі $\mathfrak{g} = (V, \mu)$ базис $(e_1, \ldots, e_n)$ простору V, тобто $\mathfrak{s}^a = \langle e_1, \ldots, e_{n_a} \rangle$, $a = 1, \ldots, m$, де $n_a := \dim \mathfrak{s}^a$. У цьому базисі комутаційні сталі алгебри $\mathfrak{g}$ задовольняють умову

$$c^k_{ij} = 0, \quad \text{якщо} \quad i, j \leqslant n_a \quad \text{та} \quad k > n_a.$$

Оскільки алгебра $\mathfrak{g}_0 = (V, \mu_0)$ є контракцією алгебри $\mathfrak{g}$, то згідно з лемою 1.3 існують послідовність $\{L_p,\, p \in \mathbb{N}\}$ невироджених верхньотрикутних $n \times n$-матриць і ортогональна (відповідно, унітарна) $n \times n$-матриця Q у дійсному (відповідно, комплексному) випадку такі, що $\mu_p := \mu \cdot L_p \to \mu_0 \cdot Q$ при $p \to \infty$. У кожній алгебрі з послідовності $\{\mathfrak{g}_p := (V, \mu_p),\, p \in \mathbb{N}\}$ маємо прапор

$$\{0\} = \mathfrak{s}^0_p \subset \mathfrak{s}^1_p \subset \mathfrak{s}^2_p \subset \cdots \subset \mathfrak{s}^m_p \subset \mathfrak{s}^{m+1}_p = \mathfrak{g}_p := (V, \mu_p),$$

де $\mathfrak{s}^a_p := L_p \mathfrak{s}^a = \langle e_1, \ldots, e_{n_a} \rangle$, $a = 1, \ldots, m+1$, а тому $\dim \mathfrak{s}^a_p = \dim \mathfrak{s}^a$ і $\mathfrak{s}^a_p \simeq \mathfrak{s}^a$. Інакше кажучи, комутаційні сталі алгебр $\mathfrak{g}_p$ задовольняють умови

$$c^k_{p,ij} = 0, \quad \text{якщо} \quad i, j \leqslant n_a \quad \text{та} \quad k > n_a.$$

У границі при $p \to \infty$ маємо $c^k_{p,ij} \to c^k_{0,ij}$, звідки $c^k_{0,ij} = 0$, якщо $i, j \leqslant n_a$ та $k > n_a$. Це означає, що $\mathfrak{s}^a_0 = \langle e_1, \ldots, e_{n_a} \rangle$, $a = 1, \ldots, m$, — підалгебри алгебри $\mathfrak{g}_0$, які утворюють прапор

$$\{0\} = \mathfrak{s}^0_0 \subset \mathfrak{s}^1_0 \subset \mathfrak{s}^2_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{s}^m_0 \subset \mathfrak{s}^{m+1}_0 = \mathfrak{g}_0,$$

де $\dim \mathfrak{s}^a_0 = \dim \mathfrak{s}^a = n_a$. Крім того, обмеження $(c^k_{ij})_{i,j,k=1,\dots,n_a}$ тензора структурних сталих алгебри $\mathfrak{g}$ є тензором структурних сталих підалгебри $\mathfrak{s}^a$, лінійна оболонка $\langle e_1,\dots,e_{n_a}\rangle$ інваріантна під дією оператора L_p, а тому обмеження $(c^k_{p,ij})_{i,j,k=1,\dots,n_a}$ тензора структурних сталих алгебри $\mathfrak{g}_p$ є тензором структурних сталих підалгебри $\mathfrak{s}^a_p$. З існування границь $c^k_{p,ij}\to c^k_{0,ij}$, $i,j,k=1,\dots,n_a$, при $p\to\infty$ випливає, що $\mathfrak{s}^a\to\mathfrak{s}^a_0$.

Нехай для деяких $a,b\in\{1,\dots,m+1\}$ підалгебра $\mathfrak{s}^a$ є ідеалом підалгебри $\mathfrak{s}^b$. Аналогічними використаним вище міркуваннями отримаємо, що підалгебра $\mathfrak{s}^a_p$ є ідеалом підалгебри $\mathfrak{s}^b_p$. У термінах структурних сталих зазначене еквівалентне умові

$$c^k_{ij}=c^k_{p,ij}=0 \quad \text{при} \quad i,j\leqslant n_b, \quad k>n_a \quad \text{та} \quad (i\leqslant n_a \ \text{ або } \ j\leqslant n_a).$$

Перехід до границі дає таку саму умову для структурних сталих $c^k_{0,ij}$, тобто підалгебра $\mathfrak{s}^a_0$ — ідеал підалгебри $\mathfrak{s}^b_0$. Для кожного $p\in\mathbb{N}$ фактор-алгебра $\mathfrak{s}^b_p/\mathfrak{s}^a_p$ ізоморфна фактор-алгебрі $\mathfrak{s}^b/\mathfrak{s}^a$. Структурні сталі $c^k_{p,ij}$, $i,j,k=n_a+1,\dots,n_b$, алгебри $\mathfrak{g}_p$ утворюють повну множину структурних сталих алгебри $\mathfrak{s}^b_p/\mathfrak{s}^a_p$. Аналогічно, підмножина структурних сталих $\{c^k_{0,ij},\ i,j,k=n_a{+}1,\dots,n_b\}$ алгебри $\mathfrak{g}_0$ є повною множиною структурних сталих фактор-алгебри $\mathfrak{s}^b_0/\mathfrak{s}^a_0$. Обмеження умови $c^k_{p,ij}\to c^k_{0,ij}$, $p\to\infty$, що виконується для всіх $i,j,k=1,\dots,n$, на значення $i,j,k=n_a+1,\dots,n_b$ вказує на існування контракції $\mathfrak{s}^b/\mathfrak{s}^a\to\mathfrak{s}^b_0/\mathfrak{s}^a_0$ між фактор-алгебрами.

Доведемо твердження щодо комутаторів підалгебр.

З умови $[\mathfrak{s}^a,\mathfrak{s}^b]\subseteq\mathfrak{s}^c$ випливає, що $[\mathfrak{s}^a_p,\mathfrak{s}^b_p]_p\subseteq\mathfrak{s}^c_p$ для кожного $p\in\mathbb{N}$. У термінах структурних сталих це означає умову

$$\begin{aligned}&c^k_{ij}=c^k_{p,ij}=0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1.1)\\ &\text{при} \quad (i\leqslant n_a,\ j\leqslant n_b \ \text{ або } \ i\leqslant n_b,\ j\leqslant n_a) \quad \text{та} \quad k>n_c,\end{aligned}$$

що в границі дає таку саму умову для структурних сталих $c^k_{0,ij}$, звідки $[\mathfrak{s}^a_0,\mathfrak{s}^b_0]_0\subseteq\mathfrak{s}^c_0$.

Зафіксуємо ранжування пар $(i,j)\in\{1,\dots,n_a\}\times\{1,\dots,n_b\}$. Розмірності комутаторів $[\mathfrak{s}^a,\mathfrak{s}^b]$ і $[\mathfrak{s}^a_p,\mathfrak{s}^b_p]_p$ збігаються між собою, а також з рангами допоміжних матриць A й A_p, складених відповідно зі стовпчиків $(c_{ij}^k)_{k=1,\dots,n}$ і $(c_{p,ij}^k)_{k=1,\dots,n}$, які занумеровані парами (i,j) у зафіксованому ранжуванні. Аналогічно, розмірність комутатора $[\mathfrak{s}_0^a,\mathfrak{s}_0^b]_0$ збігається з рангом допоміжної матриці A_0, складеної зі стовпчиків $(c_{0,ij}^k)_{k=1,\dots,n}$ з такою самою нумерацією, як вище. Очевидно, що $A_p \to A_0$ при $p\to\infty$. Ранг матриць не збільшується при граничному переході. Отже, $\dim[\mathfrak{s}_0^a,\mathfrak{s}_0^b]_0 \leqslant \dim[\mathfrak{s}^a,\mathfrak{s}^b]$.

Для доведення більш загального твердження щодо композицій комутаторів на довільних розміщеннях з повтореннями з підалгебр $\mathfrak{s}^a$, для кожного такого розміщення побудуємо аналоги умови (1.1) і матриць A, A_p, A_0. Для цього структурні сталі потрібно замінити на їх поліноміальні комбінації та врахувати обмеження на індекси, що нумерують базисні елементи залучених підалгебр. Стовпчики у відповідних допоміжних матрицях нумеруємо наборами індексів $(i_1,\dots,i_N)$ у деякому фіксованому ранжуванні, де N — це кількість підалгебр у розміщенні. □

Наслідок 1.7. *Припустимо, що алгебра Лі $\mathfrak{g}_0$ є (неперервною чи послідовною) контракцією алгебри Лі $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}_0$. Тоді для будь-якого повного прапора підпросторів*

$$\{0\}=V^0\subset V^1\subset V^2\subset\dots\subset V^n=V$$

базового простору V існує такий повний прапор підпросторів

$$\{0\}=V_0^0\subset V_0^1\subset V_0^2\subset\dots\subset V_0^n=V$$

цього ж простору, що виконуються нерівності

$$\dim[V_0^i,V_0^j]_0\leqslant\dim[V^i,V^j]$$

для будь-яких $i,j\in\{1,\dots,n\}$, а також аналогічні нерівності для будь-якої композиції комутаторів на довільному розміщенні з повтореннями з підпросторів V^1, …, V^n.

Доведення. Замкненість підпросторів відносно дужки Лі не є суттєвою у двох останніх абзацах доведення теореми 1.6. □

Простий приклад контракцій до абелевої алгебри показує, що теорему 1.6 не можна поширити на характеристичні ідеали та мегаідеали. Дійсно, при контракції до абелевої алгебри центр збільшується до всієї алгебри, але похідна алгебра стискується до нуля. Більш того, в абелевій алгебрі немає власних характеристичних ідеалів та мегаідеалів.

Низку необхідних критеріїв існування контракцій можна отримати як прості наслідки теореми 1.6. Так, властивості комутативності, нільпотентності, розв'язності та унімодулярності зберігаються при контракціях, а тому алгебра $\mathfrak{s}_0^a$ успадковує відповідні властивості алгебри $\mathfrak{s}^a$. Зі збереження перших трьох властивостей прямо випливає таке твердження.

Наслідок 1.8. *При контракціях алгебр Лі не зменшують свої розмірності такі структури:*

- *максимальні абелеві підалгебри,*
- *максимальні нільпотентні підалгебри,*
- *максимальні розв'язні підалгебри,*
- *максимальні абелеві ідеали,*
- *максимальні нільпотентні ідеали (нільрадикали),*
- *максимальні розв'язні ідеали (радикали).*

Наслідок 1.9. *При контракціях алгебр Лі розмірності похідних алгебр і степенів алгебр не збільшуються.*

Зауваження 1.10. Наведене доведення теореми 1.6 та доведення подібних тверджень є достатньо елементарними. Їх можна переписати з використанням розкладу Івасави, з якого випливає таке твердження: будь-яку контракцію між алгебрами Лі можна реалізувати трикутними матрицями; див., наприклад, [54].

Зауваження 1.11. Теорему 1.6 і наслідок 1.7 можна легко узагальнити на довільні скінченновимірні алгебри.

1.2.2. Приклад застосування властивостей прапорів. Отримані властивості можна використати як нові критерії неіснування контракцій у парах алгебр. Цю можливість продемонстровано доведенням неіснування контракцій для низки пар шестивимірних нільпотентних дійсних алгебрі Лі, для яких не працюють відомі в літературі критерії, оскільки у парах відповідних комплексифікацій контракції існують.

Покажемо, що безпосередньо саму теорему 1.6 можна ефективно застосовувати для перевірки неіснування контракції у парі фіксованих алгебр у випадках, коли інші критерії такого неіснування не працюють. Для цього необхідно навести класифікації п'яти- і шестивимірних нільпотентних алгебр Лі.

Неізоморфні п'ятивимірні нільпотентні алгебри Лі над $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ або $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ вичерпують такі алгебри:

$$
\begin{array}{ll}
\mathfrak{n}_{5.6}\colon & [e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_3]=e_4,\ [e_1,e_4]=e_5,\ [e_2,e_3]=e_5;\\
\mathfrak{n}_{5.5}\colon & [e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_3]=e_4,\ [e_1,e_4]=e_5;\\
\mathfrak{n}_{5.4}\colon & [e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_3]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_5;\\
\mathfrak{n}_{5.3}\colon & [e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_4]=e_5,\ [e_2,e_3]=e_5;\\
\mathfrak{n}_{5.2}\colon & [e_1,e_2]=e_4,\ [e_1,e_3]=e_5;\\
\mathfrak{n}_{5.1}\colon & [e_1,e_2]=e_5,\ [e_3,e_4]=e_5;\\
\mathfrak{n}_4\oplus\mathfrak{n}_1\colon & [e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_3]=e_4;\\
\mathfrak{n}_3\oplus 2\mathfrak{n}_1\colon & [e_1,e_2]=e_3;\\
5\mathfrak{n}_1. &
\end{array}
$$

У цьому переліку кожну алгебру представлено її ненульовими комутаційними співвідношеннями з точністю до антисиметричності дужки Лі в базисі (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5). Алгебри $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_3$, $\mathfrak{n}_4$ є відповідно одновимірною (абелевою) алгеброю, тривимірною (єдиною з точністю до ізоморфізмів нерозкладною нільпотентною) алгеброю Гейзенберга та єдиною з точністю до ізоморфізмів чотиривимірною нерозкладною нільпотентною алгеброю, а $m\mathfrak{n}_1$ позначає пряму суму m копій алгебри $\mathfrak{n}_1$.

У [54] доведено, що є такі й лише такі власні контракції між п'ятивимірними нільпотентними алгебрами Лі:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{n}_{5.6} \to \mathfrak{n}_{5.5}, \quad \mathfrak{n}_{5.6} \to \mathfrak{n}_{5.4}, \quad \mathfrak{n}_{5.6} \to \mathfrak{n}_{5.3}, \quad \mathfrak{n}_{5.6} \to \mathfrak{n}_{5.2}, \quad \mathfrak{n}_{5.6} \to \mathfrak{n}_{5.1},\\
&\mathfrak{n}_{5.6} \to \mathfrak{n}_4 \oplus \mathfrak{n}_1, \quad \mathfrak{n}_{5.6} \to \mathfrak{n}_3 \oplus 2\mathfrak{n}_1,\\
&\mathfrak{n}_{5.5} \to \mathfrak{n}_{5.2}, \quad \mathfrak{n}_{5.5} \to \mathfrak{n}_4 \oplus \mathfrak{n}_1, \quad \mathfrak{n}_{5.5} \to \mathfrak{n}_3 \oplus 2\mathfrak{n}_1,\\
&\mathfrak{n}_{5.4} \to \mathfrak{n}_{5.2}, \quad \mathfrak{n}_{5.4} \to \mathfrak{n}_4 \oplus \mathfrak{n}_1, \quad \mathfrak{n}_{5.4} \to \mathfrak{n}_3 \oplus 2\mathfrak{n}_1,\\
&\mathfrak{n}_{5.3} \to \mathfrak{n}_{5.2}, \quad \mathfrak{n}_{5.3} \to \mathfrak{n}_{5.1}, \quad \mathfrak{n}_{5.3} \to \mathfrak{n}_4 \oplus \mathfrak{n}_1, \quad \mathfrak{n}_{5.3} \to \mathfrak{n}_3 \oplus 2\mathfrak{n}_1,\\
&\mathfrak{n}_{5.2} \to \mathfrak{n}_3 \oplus 2\mathfrak{n}_1, \quad \mathfrak{n}_{5.1} \to \mathfrak{n}_3 \oplus 2\mathfrak{n}_1,\\
&\mathfrak{n}_4 \oplus \mathfrak{n}_1 \to \mathfrak{n}_{5.2}, \quad \mathfrak{n}_4 \oplus \mathfrak{n}_1 \to \mathfrak{n}_3 \oplus 2\mathfrak{n}_1, \quad * \to 5\mathfrak{n}_1,
\end{aligned}$$

де остання формула позначає сукупність тривіальних контракцій п'ятивимірних нільпотентних алгебр Лі до п'ятивимірної абелевої алгебри $5\mathfrak{n}_1$.

У літературі існує багато класифікацій шестивимірних нільпотентних алгебр Лі над різними полями. Зокрема, шестивимірні нільпотентні алгебри Лі над $\mathbb{C}$ вперше прокласифікував ще К.А. Умлауф [111], а над довільним полем характеристики 0 — В.В. Морозов [6]. Далі використаємо пізнішу класифікацію Л. Магніним [74] шестивимірних нільпотентних алгебр над $\mathbb{C}$ з незначною модифікацією комутаційних співвідношень алгебри $\mathfrak{n}_{5.3} \oplus \mathfrak{n}_1$. Отже, неізоморфні шестивимірні комплексні нільпотентні алгебри Лі вичерпують такі алгебри:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n}_{6.20}\colon \quad & [e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_2, e_3] = e_5,\\
& [e_2, e_5] = e_6,\ [e_3, e_4] = -e_6;\\
\mathfrak{n}_{6.19}\colon \quad & [e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_1, e_5] = e_6,\\
& [e_2, e_3] = e_5,\ [e_2, e_4] = e_6;\\
\mathfrak{n}_{6.18}\colon \quad & [e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_2, e_5] = e_6,\\
& [e_3, e_4] = -e_6;\\
\mathfrak{n}_{6.17}\colon \quad & [e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_1, e_5] = e_6,\\
& [e_2, e_3] = e_6;\\
\mathfrak{n}_{6.16}\colon \quad & [e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_1, e_5] = e_6;
\end{aligned}$$

$\mathfrak{n}_{6.15}$: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_5] = e_6,\ [e_2, e_3] = e_5,$
$[e_2, e_4] = e_6;$

$\mathfrak{n}_{6.14}$: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_2, e_3] = e_6;$

$\mathfrak{n}_{6.13}$: $[e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_1, e_5] = e_6,\ [e_2, e_3] = e_5,$
$[e_3, e_4] = -e_6;$

$\mathfrak{n}_{6.12}$: $[e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_1, e_5] = e_6,\ [e_2, e_3] = e_6,$
$[e_2, e_4] = e_6;$

$\mathfrak{n}_{6.11}$: $[e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_1, e_5] = e_6,\ [e_2, e_3] = e_6;$

$\mathfrak{n}_{6.10}$: $[e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_3] = e_5,\ [e_1, e_4] = e_6,\ [e_3, e_5] = e_6;$

$\mathfrak{n}_{6.9}$: $[e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_3] = e_5,\ [e_2, e_5] = e_6,\ [e_3, e_4] = e_6;$

$\mathfrak{n}_{6.8}$: $[e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_2, e_3] = e_5,\ [e_2, e_4] = e_6;$

$\mathfrak{n}_{6.7}$: $[e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_3] = e_5,\ [e_1, e_4] = e_6,\ [e_2, e_3] = -e_6;$

$\mathfrak{n}_{6.6}$: $[e_1, e_2] = e_4,\ [e_2, e_3] = e_6,\ [e_2, e_4] = e_5;$

$\mathfrak{n}_{6.5}$: $[e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_2, e_3] = e_6,\ [e_2, e_4] = e_6;$

$\mathfrak{n}_{6.4}$: $[e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_3] = e_6,\ [e_2, e_4] = e_5;$

$\mathfrak{n}_{6.3}$: $[e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_3] = e_5,\ [e_2, e_3] = e_6;$

$\mathfrak{n}_{6.2}$: $[e_1, e_2] = e_5,\ [e_1, e_5] = e_6,\ [e_3, e_4] = e_6;$

$\mathfrak{n}_{6.1}$: $[e_1, e_2] = e_5,\ [e_1, e_4] = e_6,\ [e_2, e_3] = e_6;$

$\mathfrak{n}_{5.6} \oplus \mathfrak{n}_1$: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_2, e_3] = e_5;$

$\mathfrak{n}_{5.5} \oplus \mathfrak{n}_1$: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5;$

$\mathfrak{n}_{5.4} \oplus \mathfrak{n}_1$: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_2, e_3] = e_5;$

$\mathfrak{n}_{5.3} \oplus \mathfrak{n}_1$: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_2, e_3] = e_5;$

$\mathfrak{n}_{5.2} \oplus \mathfrak{n}_1$: $[e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_3] = e_5;$

$\mathfrak{n}_{5.1} \oplus \mathfrak{n}_1$: $[e_1, e_2] = e_5,\ [e_3, e_4] = e_5;$

$\mathfrak{n}_4 \oplus 2\mathfrak{n}_1$: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4;$

$\mathfrak{n}_3 \oplus \mathfrak{n}_3$: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_4, e_5] = e_6;$

$\mathfrak{n}_3 \oplus 3\mathfrak{n}_1$: $[e_1, e_2] = e_3;$

$6\mathfrak{n}_1$.

Згідно з [6], над дійсним полем на додаток до наведених вище існують ще чотири неізоморфні структури:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{n}^{\mathbb{R}}_{6.15}\colon\quad & [e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_3]=e_4,\ [e_1,e_4]=e_6,\ [e_2,e_3]=e_5,\\
& [e_2,e_5]=e_6;\\
\mathfrak{n}^{\mathbb{R}}_{6.9}\colon\quad & [e_1,e_3]=e_4,\ [e_1,e_4]=e_6,\ [e_2,e_3]=e_5,\ [e_2,e_5]=e_6;\\
\mathfrak{n}^{\mathbb{R}}_{6.5}\colon\quad & [e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_6,\ [e_2,e_4]=e_5,\\
& [e_2,e_3]=-e_6;\\
(2\mathfrak{n}_3)^{\mathbb{R}}\colon\quad & [e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_6,\ [e_2,e_4]=e_5,\ [e_2,e_3]=-e_6.
\end{aligned}
$$

Тут позначення $\mathfrak{a}^{\mathbb{R}}$ вказує, що комплексифікація дійсної алгебри Лі $\mathfrak{a}^{\mathbb{R}}$ ізоморфна комплексифікації дійсної алгебри Лі $\mathfrak{a}$, хоча самі алгебри $\mathfrak{a}^{\mathbb{R}}$ й $\mathfrak{a}$ неізоморфні.

Лема 1.12. *(i) Не існує контракцій дійсних алгебр* $\mathfrak{n}_{6.2}$, $\mathfrak{n}_{6.4}$, $\mathfrak{n}_{6.5}$, $\mathfrak{n}_{6.9}$, $\mathfrak{n}^{\mathbb{R}}_{6.9}$, $\mathfrak{n}_{6.10}$, $\mathfrak{n}_{6.11}$, $\mathfrak{n}_{6.12}$, $\mathfrak{n}_{6.14}$, $\mathfrak{n}_{6.17}$, $\mathfrak{n}_{6.18}$ *до алгебри* $(2\mathfrak{n}_3)^{\mathbb{R}}$.

(ii) Не існує контракцій дійсних алгебр $\mathfrak{n}_{6.12}$, $\mathfrak{n}_{6.14}$, $\mathfrak{n}_{6.17}$, $\mathfrak{n}_{6.18}$ *до алгебри* $\mathfrak{n}^{\mathbb{R}}_{6.5}$.

Доведення. Складність доведення цього твердження полягає в тому, що між відповідними комплексифікаціями наведених алгебр контракції існують. Оскільки стандартні критерії неіснування контракції, зокрема наведені в наслідках 1.8 і 1.9, використовують характеристики, які однакові для дійсних алгебр та їх комплексифікацій, вони не працюють у цій ситуації.

Щоб застосувати теорему 1.6, розглянемо п'ятивимірні підалгебри всіх зазначених алгебр.

Нехай $V = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\rangle$ — шестивимірний базовий простір, на якому визначено всі ці алгебри. П'ятивимірні підпростори простору V можна розбити на такі сім'ї:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}_1 = \big\{\langle e_2,\, e_3,\, e_4,\, e_5,\, e_6\rangle\big\},\\
&\mathcal{F}_2 = \big\{\langle e_1+\alpha e_2,\, e_3,\, e_4,\, e_5,\, e_6\rangle \mid \alpha\in\mathbb{R}\big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_3 &= \bigl\{\langle e_1+\alpha e_3,\, e_2+\beta e_3,\, e_4,\, e_5,\, e_6\rangle \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\bigr\},\\
\mathcal{F}_4 &= \bigl\{\langle e_1+\alpha e_4,\, e_2+\beta e_4,\, e_3+\gamma e_4,\, e_5,\, e_6\rangle \mid \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\bigr\},\\
\mathcal{F}_5 &= \bigl\{\langle e_1+\alpha e_5,\, e_2+\beta e_5,\, e_3+\gamma e_5,\, e_4+\delta e_5,\, e_6\rangle \mid \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}\bigr\},\\
\mathcal{F}_6 &= \bigl\{\langle e_1+\alpha e_6,\, e_2+\beta e_6,\, e_3+\gamma e_6,\, e_4+\delta e_6,\, e_5+\varepsilon e_6\rangle\\
&\qquad\qquad \mid \alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\in\mathbb{R}\bigr\}.
\end{aligned}
$$

Доведемо, що всі п'ятивимірні підалгебри алгебри $(2\mathfrak{n}_3)^{\mathbb{R}}$ ізоморфні алгебрі $\mathfrak{n}_{5.2}$. З наведеної класифікації п'ятивимірних нільпотентних алгебр Лі легко бачити, що характеристичними властивостями алгебри $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{5.2}$ є дві рівності: $\dim\mathfrak{n}^2 = 2$ і $\dim\mathfrak{n}^3 = 0$, де $\mathfrak{n}^k$ позначає k-й степінь алгебри $\mathfrak{n}$. Друга рівність виконується для будь-якої підалгебри алгебри $\mathfrak{n}_{5.2}$, бо вона виконується для самої алгебри. Оскільки $[e_2+\beta e_5, e_4+\gamma e_5] = e_5$ і $[e_1+\alpha e_6, e_4+\gamma e_6] = e_6$, то підпростори з сімей $\mathcal{F}_5$ і $\mathcal{F}_6$ не замкнені відносно дужки Лі, а тому не є підалгебрами. Підпростори, що містять похідну алгебру $\bigl((2\mathfrak{n}_3)^{\mathbb{R}}\bigr)'$, тобто всі підпростори з сімей $\mathcal{F}_1$–$\mathcal{F}_4$, є підалгебрами (навіть ідеалами) в $(2\mathfrak{n}_3)^{\mathbb{R}}$. Прокомутувавши базисні елементи кожної з цих підалгебр, отримаємо, що їх похідні збігаються з $\langle e_5, e_6\rangle$, тобто вони ізоморфні алгебрі $\mathfrak{n}_{5.2}$.

Аналогічно покажемо, що всі п'ятивимірні підалгебри алгебри $\mathfrak{n}_{6.5}^{\mathbb{R}}$ ізоморфні або алгебрі $\mathfrak{n}_{5.2}$, або алгебрі $\mathfrak{n}_{5.4}$. Підпростори з сімей $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_5$, $\mathcal{F}_6$ та з сім'ї $\mathcal{F}_4$ з $\gamma\neq 0$ не замкнені відносно дужки Лі, оскільки $[e_1+\alpha e_3, e_2+\beta e_3] = e_3+\beta e_5+\alpha e_6$, $[e_1+\alpha e_5, e_3+\gamma e_5] = e_5$, $[e_1+\alpha e_6, e_4+\delta e_6] = e_6$, $[e_1+\alpha e_4, e_2+\beta e_4] = e_3+\beta e_6-\alpha e_5$. Усі інші підпростори є підалгебрами і, більш того, ідеалами в $\mathfrak{n}_{6.5}^{\mathbb{R}}$, причому підпростори з сімей $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_4$ знову ізоморфні алгебрі $\mathfrak{n}_{5.2}$, а підпростори з сім'ї $\mathcal{F}_4$ з $\gamma = 0$ ізоморфні алгебрі $\mathfrak{n}_{5.4}$. Стандартні комутаційні співвідношення алгебри $\mathfrak{n}_{5.4}$ отримаємо в базисі $\tilde e_1 = e_1+\alpha e_4$, $\tilde e_2 = e_2+\beta e_4$, $\tilde e_3 = e_3-\alpha e_5+\beta e_6$, $\tilde e_4 = e_5$, $\tilde e_5 = -e_6$.

Щоб довести відсутність контракцій у зазначених у лемі парах алгебр, достатньо вказати в кожній з початкових алгебр підалгебру, що не контрактує до алгебри $\mathfrak{n}_{5.2}$, а отже, і до алгебри $\mathfrak{n}_{5.4}$. Така підалгебра має бути ізоморфною одній з алгебр $\mathfrak{n}_{5.1}$, $\mathfrak{n}_3\oplus 2\mathfrak{n}_1$, $5\mathfrak{n}_1$. Лінійні оболонки

$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\rangle$ і $\langle e_1, e_3, e_4, e_5, e_6\rangle$ відповідно в кожній з алгебр $\mathfrak{n}_{6.17}$, $\mathfrak{n}_{6.11}$, $\mathfrak{n}_{6.14}$, $\mathfrak{n}_{6.12}$, $\mathfrak{n}_{6.10}$, $\mathfrak{n}_{6.4}$, $\mathfrak{n}_{6.2}$ і в алгебрі $\mathfrak{n}_{6.5}$ є підалгебрами, ізоморфними алгебрі $\mathfrak{n}_3 \oplus 2\mathfrak{n}_1$, а лінійні оболонки $\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\rangle$ і $\langle e_1, e_2, e_4, e_5, e_6\rangle$ відповідно в кожній з алгебр $\mathfrak{n}_{6.9}$, $\mathfrak{n}_{6.18}$ і в алгебрі $\mathfrak{n}^{\mathbb{R}}_{6.9}$ є підалгебрами, ізоморфними алгебрі $\mathfrak{n}_{5.1}$, що завершує доведення леми. □

Зауваження 1.13. З доведення леми 1.12 очевидно, що не існує також контракцій алгебр $\mathfrak{n}_{6.2}$, $\mathfrak{n}_{6.4}$, $\mathfrak{n}_{6.5}$, $\mathfrak{n}_{6.9}$, $\mathfrak{n}^{\mathbb{R}}_{6.9}$, $\mathfrak{n}_{6.10}$, $\mathfrak{n}_{6.11}$, $\mathfrak{n}_{6.12}$, $\mathfrak{n}_{6.14}$ до алгебри $\mathfrak{n}^{\mathbb{R}}_{6.5}$. Водночас, ці алгебри відрізняються від наведених у пункті (ii) леми 1.12 тим, що контракцій не існує і між відповідними комплексифікаціями, а їх відсутність можна довести з використанням стандартних критеріїв, які однаково працюють у дійсному і комплексному випадках, як-то розмірності алгебри диференціювань, похідної алгебри чи центру [80].

Зауваження 1.14. Як випливає з розгляду в [106], а також неопублікованих результатів М.О. Нестеренко та Р.О. Поповича, алгебра $\mathfrak{n}_{6.18}$ контрактує до алгебр $\mathfrak{n}_{6.2}$, $\mathfrak{n}_{6.4}$, $\mathfrak{n}_{6.5}$, $\mathfrak{n}_{6.9}$, $\mathfrak{n}^{\mathbb{R}}_{6.9}$, $\mathfrak{n}_{6.10}$, $\mathfrak{n}_{6.11}$, $\mathfrak{n}_{6.12}$, $\mathfrak{n}_{6.14}$. Тому в лемі 1.12 достатньо довести відсутність контракцій $\mathfrak{n}_{6.18}$ до $\mathfrak{n}^{\mathbb{R}}_{6.5}$ і $(2\mathfrak{n}_3)^{\mathbb{R}}$.

1.3. Контракції з необхідно необмеженими матрицями

При вивченні можливостей для реалізації контракцій природно виникає проблема існування матриць контракцій, які мають добре визначені (скінченні) границі при граничному значенні параметра контракції [115]. Аналіз результатів щодо контракцій дійсних і комплексних алгебр Лі розмірностей до чотирьох включно [41, 80, 102] показує, що всі ці контракції можна реалізувати за допомогою таких матриць. Чи справедливе те саме для алгебр Лі вищої розмірності? Перше дослідження цієї проблеми проведено в [115] для контракції між двома спеціально підібраними п'ятивимірними алгебрами Лі.

Розглянемо n-вимірні ($n \geqslant 5$) розв'язні дійсні алгебри Лі $\mathfrak{a}$ й $\mathfrak{a}_0$, визначені такими ненульовими комутаційними співвідношеннями:

$$\mathfrak{a}\colon\quad [e_1,e_3]=e_3,\quad [e_2,e_4]=e_4,\quad [e_1,e_2]=e_5,$$
$$\mathfrak{a}_0\colon\quad [e_1,e_3]=e_3,\quad [e_2,e_4]=e_4.$$

Згідно з класифікацією Мубаракзянова алгебр Лі низької розмірності [8], позначимо ці алгебри $\mathrm{A}_{5.38}\oplus(n-5)\mathrm{A}_1$ та $\mathrm{A}_{2.1}\oplus\mathrm{A}_{2.1}\oplus(n-4)\mathrm{A}_1$. Зазначимо, що кожна п'ятивимірна розв'язна алгебра Лі з одновимірним центром і тривимірним нільрадикалом ізоморфна або алгебрі $\mathrm{A}_{5.38}$, або алгебрі $\mathrm{A}_{2.1}\oplus\mathrm{A}_{2.1}\oplus\mathrm{A}_1$, а мінімальна розмірність нільрадикалів п'ятивимірних розв'язних алгебр дорівнює трьом. Легко бачити, що контракцію $\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}_0$ реалізує діагональна матриця $U_\varepsilon=\mathrm{diag}(1,1,1,1,\varepsilon^{-1},1,\dots,1)$, $\varepsilon\in(0,1]$, п'ятий діагональний елемент якої прямує до нескінченності при $\varepsilon\to+0$. Це ж справедливо і для контракції $\bar{\mathfrak{a}}\to\bar{\mathfrak{a}}_0$ між комплексифікаціями $\bar{\mathfrak{a}}$ та $\bar{\mathfrak{a}}_0$ алгебр $\mathfrak{a}$ та $\mathfrak{a}_0$. У статті [115] показано, що для $n=5$ будь-яка реалізація контракції $\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}_0$ узагальненою контракцією Іньоню–Вігнера обов'язково містить від'ємний степінь параметра контракції, а тому деякі елементи відповідної матриці контракції прямують в нулі до нескінченності. Доведемо таке більш сильне і загальне твердження:

Теорема 1.15. *Евклідова норма будь-якої матриці контракції, що реалізує контракцію алгебри* $\mathfrak{a}$ *до алгебри* $\mathfrak{a}_0$*, прямує до нескінченності при граничному значенні параметра контракції. Це справедливо також для контракції між відповідними комплексними алгебрами.*

Інакше кажучи, для будь-якої розмірності $n\geqslant 5$ теорема 1.15 дає ствердну відповідь на питання про існування контракцій між n-вимірними алгебрами Лі з $n\geqslant 5$, які можна реалізувати лише необмеженими матричнозначними функціями, причому розмірність п'ять є найменшою розмірністю, в якій існують подібні контракції.

У процесі доведення теореми 1.15 також покажемо, що з точністю до автоморфізмів алгебри $\mathfrak{a}$, евклідова норма набору з $(5,5)$-го, …, $(5,n)$-го елементів будь-якої матриці контракції в зафіксованих базисах алгебр $\mathfrak{a}$

та $\mathfrak{a}_0$ прямує до нескінченності при граничному значенні параметра контракції. Зокрема, у випадку $n = 5$ до нескінченності прямує $(5, 5)$-й елемент матриці контракції. Це твердження, як і теорема 1.15, справедливе й у комплексному випадку.

Доведення. Доведемо теорему 1.15 для дійсного випадку. У комплексному випадку ортогональні матриці треба замінити на унітарні, а інші відмінності опишемо явно.

Розглянемо довільну послідовну реалізацію контракції $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_0$ послідовністю матриць $\{U_p,\ p \in \mathbb{N}\}$. Якщо припустити, що евклідова норма U_p не прямує до нескінченності, то послідовність $\{U_p\}$ містить обмежену підпослідовність $\{U_{p_s},\ s \in \mathbb{N}\}$. Дотримуючись доведення леми 1.3, розкладемо кожну матрицю U_{p_s} на нижньотрикутну та ортогональну частини, виберемо підпослідовність матриць з $\{U_{p_s}\}$ зі збіжними ортогональними частинами й використаємо властивості границь щодо алгебраїчних операцій. У результаті побудуємо обмежену послідовність нижньотрикутних матриць та ортогональну матрицю Q, що задовольняють лему 1.3 для алгебр $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}$ та $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}_0$. Водночас, як показано нижче, послідовність евклідових норм таких трикутних матриць неодмінно прямує до нескінченності. Отримана суперечність означатиме, що евклідова норма U_p прямує до нескінченності.

Припустимо, що існує неперервна реалізація контракції $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_0$ неперервною функцією $U\colon (0, 1] \to \mathrm{GL}(V)$, евклідова норма значень U_ε якої не прямує до нескінченності при $\varepsilon \to +0$. Тоді можна вибрати послідовність $\{\varepsilon_p,\ p \in \mathbb{N}\} \subset (0, 1]$ таку, що її границя дорівнює нулю, а послідовність матриць $\{U_{\varepsilon_p},\ p \in \mathbb{N}\}$ обмежена. Оскільки остання послідовність реалізує послідовну контракцію $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_0$, також отримаємо суперечність.

Виходячи з цього, достатньо довести, що для будь-якої послідовності $\{L_p = (l^i_{p,j}),\ p \in \mathbb{N}\}$ нижньотрикутних матриць (і ортогональної матриці $Q = (q^i_j)$), що задовольняють лему 1.3 для алгебр $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}$ та $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}_0$, відповідна послідовність евклідових норм прямує до нескінченності.

Розглянемо обмеження, накладені на матрицю Q. Позначимо тензори структурних сталих алгебр $\mathfrak{a}$ та $\mathfrak{a}_0$ у вибраному базисі $(e_1,\dots,e_n)$ базового векторного простору через $C=(c_{ij}^k)$ і $C_0=(c_{0,ij}^k)$ відповідно. Тоді $C_p=C\cdot L_p$ і $\tilde{C}_0=C_0\cdot Q$ — тензори структурних сталих алгебр $\mathfrak{a}_p$ та $\tilde{\mathfrak{a}}_0$, ізоморфних відповідно алгебрам $\mathfrak{a}$ та $\mathfrak{a}_0$. За побудовою, $\lim_{p\to\infty} c_{p,ij}^k=\tilde{c}_{0,ij}^k$. Для довільних i, j, k та $j^*\in\{5,\dots,n\}$ виконується умова $c_{ij^*}^k=c_{ij}^1=c_{ij}^2=0$, а для довільних p — умова $l_{p,i}^j=0$ при $i<j$, звідки $c_{p,ij^*}^k=c_{p,ij}^1=c_{p,ij}^2=0$ для довільних i, j, k і p. Отже, подібні умови виконуються й для елементів тензора $\tilde{C}_0$: $\tilde{c}_{0,ij^*}^k=\tilde{c}_{0,ij}^1=\tilde{c}_{0,ij}^2=0$. Відповідні компоненти тензора C_0 також є нульовими за означенням алгебри $\mathfrak{a}_0$. Геометрично це означає, що $Q\langle e_5,\dots,e_n\rangle=\langle e_5,\dots,e_n\rangle$ і $Q\langle e_3,e_4\rangle\subset\langle e_3,\dots,e_n\rangle$. Оскільки матриця Q ортогональна, вона має блочно-діагональний вигляд

$$Q=\begin{pmatrix} q_1^1 & q_2^1\\ q_1^2 & q_2^2\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} q_3^3 & q_4^3\\ q_3^4 & q_4^4\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} q_{j^*}^{i^*}\end{pmatrix},\quad \text{де}\quad i^*,j^*=5,\dots,n. \tag{1.2}$$

Для ще трьох значень трійки (i,j,k), а саме $(1,4,3)$, $(2,4,3)$ і $(2,3,3)$, структурні сталі c_{ij}^k, $c_{p,ij}^k$ (для всіх значень p), а тому й для $\tilde{c}_{ij}^k$, є нульовими. Інакше кажучи, отримаємо рівняння

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_{14}^3&=q_1^1q_3^3q_4^3+q_1^2q_3^4q_4^4=0, &&(q_1^1\bar{q}_3^3q_4^3+q_1^2\bar{q}_3^4q_4^4=0),\\
\tilde{c}_{24}^3&=q_2^1q_3^3q_4^3+q_2^2q_3^4q_4^4=0, &&(q_2^1\bar{q}_3^3q_4^3+q_2^2\bar{q}_3^4q_4^4=0),\\
\tilde{c}_{23}^3&=q_2^1(q_3^3)^2+q_2^2(q_3^4)^2=0, &&(q_2^1\bar{q}_3^3q_3^3+q_2^2\bar{q}_3^4q_3^4=0).
\end{aligned}$$

У дужках наведено відповідні рівняння для комплексного випадку, а риска зверху позначає комплексне спряження. Оскільки $q_1^1q_2^2-q_2^1q_1^2\neq0$, з перших двох рівнянь випливає $q_3^3q_4^3=q_3^4q_4^4=0$. Комбінування ортогональності матриці Q з наведеними вище рівняннями призводить до двох можливостей:

1. $q_3^3=q_4^4=0$. Тоді $q_4^3q_3^4\neq0$, $q_1^1=q_2^2=0$ та $q_2^1q_1^2\neq0$.

2. $q_3^3q_4^4\neq0$. Тоді $q_4^3=q_3^4=0$, $q_2^1=q_1^2=0$ та $q_1^1q_2^2\neq0$.

Відповідними виглядами матриці Q є

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_2^1 \\ q_1^2 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & q_4^3 \\ q_3^4 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} q_{j^*}^{i^*} \end{pmatrix}$$

та

$$Q = \begin{pmatrix} q_1^1 & 0 \\ 0 & q_2^2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} q_3^3 & 0 \\ 0 & q_4^4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} q_{j^*}^{i^*} \end{pmatrix}.$$

Згадаємо, що матриця Q визначена з точністю до множення на матрицю ортогонального автоморфізму алгебри $\mathfrak{a}_0$ зліва і на ортогональну діагональну матрицю справа, див. зауваження 1.4. Заміна базису $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4, \tilde{e}_5, \dots, \tilde{e}_n) = (e_2, e_1, e_4, e_3, e_5, \dots, e_n)$, що є ортогональним автоморфізмом алгебри $\mathfrak{a}_0$, зводить перший випадок до другого. У другому випадку матрицю Q можна зробити діагональною за допомогою ортогонального автоморфізму

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4) = (e_1, e_2, e_3, e_4), \quad \tilde{e}_{j^*} = e_{i^*} q_{j^*}^{i^*}$$

алгебри $\mathfrak{a}_0$. Отже, достатньо розглянути лише випадок, коли Q є одиничною матрицею, тобто $\tilde{C}_0 = C_0$.

Для дотепер невикористаних значень трійки (i, j, k) з $i, j, k = 1, \dots, 5$ запишемо умови $\lim_{p\to\infty} c_{p,ij}^k = c_{0,ij}^k$ у вигляді

$$c_{p,ij}^k := l_{p,i}^{i'} l_{p,j}^{j'} \hat{l}_{p,k'}^k c_{i'j'}^{k'} = c_{0,ij}^k + o_{p,ij}^k,$$

де $\hat{L}_p = (\hat{l}_{p,j}^i) = L_p^{-1}$ позначає обернену до L_p матрицю й $\lim_{p\to\infty} o_{p,ij}^k = 0$. Алгебра $\mathfrak{a}$ є сумою ідеалу, породженого п'ятьма першими елементами цієї алгебри, й абелевого ідеалу, породженого іншими базисними елементами. Матриця L_p є нижньотрикутною. Тому вирази для структурних сталих $c_{p,ij}^k$ з $i, j, k = 1, \dots, 5$ не містять елементів $l_{p,j}^i$ матриці L_p з $i > 5$ або $j > 5$. У результаті отримаємо систему рівнянь на $l_{p,j}^i$ та $o_{p,ij}^k$ з $i, j, k = 1, \dots, 5$ (для стислості нижній індекс p надалі не пишемо):

$$l_1^1 = 1 + o_{13}^3, \quad l_2^2 = 1 + o_{24}^4, \quad l_1^2 = o_{14}^4,$$

$$
\begin{aligned}
&l_1^1\frac{l_2^3}{l_3^3}=o_{12}^3,\quad l_2^2\frac{l_3^4}{l_4^4}=o_{23}^4,\quad -l_2^2\frac{l_4^5}{l_5^5}=o_{24}^5,\\
&-l_2^2\frac{l_1^4}{l_4^4}+l_1^2\frac{l_2^4}{l_4^4}-l_1^1\frac{l_2^3}{l_3^3}\frac{l_3^4}{l_4^4}=o_{12}^4,\quad -l_1^1\frac{l_3^5}{l_5^5}+(l_1^1-l_1^2)\frac{l_3^4}{l_4^4}\frac{l_4^5}{l_5^5}=o_{13}^5,\\
&-l_1^2\frac{l_4^5}{l_5^5}=o_{14}^5,\quad -l_2^2\frac{l_3^4}{l_4^4}\frac{l_4^5}{l_5^5}=o_{23}^5,\quad -(l_1^1-l_1^2)\frac{l_3^4}{l_4^4}=o_{13}^4,\\
&\frac{l_1^1l_2^2}{l_5^5}-l_1^1\frac{l_2^3}{l_3^3}\frac{l_3^5}{l_5^5}-\left(-l_2^2\frac{l_1^4}{l_4^4}+l_1^2\frac{l_2^4}{l_4^4}-l_1^1\frac{l_2^3}{l_3^3}\frac{l_3^4}{l_4^4}\right)\frac{l_4^5}{l_5^5}=o_{12}^5.
\end{aligned}
$$

Рівняння в другому і третьому рядках розв'язуємо відносно l_2^3, l_3^4, l_4^5, l_1^4 та l_3^5, а отримані вирази підставляємо в останнє рівняння, що дає

$$
\frac{l_1^1l_2^2}{l_5^5}=o_{12}^5-\frac{o_{24}^5}{l_2^2}o_{12}^4-\left(o_{13}^5+\frac{l_1^1-l_1^2}{(l_2^2)^2}o_{23}^4o_{24}^5\right)\frac{o_{12}^3}{l_1^1}.
$$

З останньої рівності випливає $l_{p,1}^1l_{p,2}^2/l_{p,5}^5\to 0$, тобто $|l_{p,5}^5|\to\infty$ при $p\to\infty$. Отже, послідовність евклідових норм матриць L_p, $p\in\mathbb{N}$, також прямує до нескінченності. Зазначимо, що рівняння в четвертому рядку системи не накладають додаткових обмежень на елементи L_p, а з шостого і восьмого рівнянь випливає, що $l_{p,4}^5/l_{p,5}^5\to 0$ і $l_{p,3}^5/l_{p,5}^5\to 0$ при $p\to\infty$.

Тепер покажемо, що з точністю до автоморфізму алгебри $\mathfrak{a}$, евклідова норма набору з $(5,5)$-го, …, $(5,n)$-го елементів будь-якої матриці контракції у вибраних базисах алгебр $\mathfrak{a}$ та $\mathfrak{a}_0$ прямує до нескінченності при граничному значенні параметра контракції.

Нехай послідовність матриць $\{U_p,\, p\in\mathbb{N}\}$ реалізує послідовну контракцію $\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}_0$. Розкладемо кожну матрицю U_p на нижньотрикутну та ортогональну частини L_p і Q_p, $U_p=L_pQ_p$. Оскільки границя будь-якої збіжної підпослідовності послідовності $\{Q_p,\, p\in\mathbb{N}\}$ має вигляд (1.2), для кожної такої підпослідовності, а отже і для всієї послідовності $\{Q_p,\, p\in\mathbb{N}\}$, маємо $q_{p,j}^i\to 0$ при $p\to\infty$, якщо $i=1,\dots,4$ і $j=5,\dots,n$ чи якщо $i=5,\dots,n$ і $j=1,\dots,4$. Відповідні підпослідовності послідовності $\{L_p,\, p\in\mathbb{N}\}$ задовольняють умови $|l_{p,5}^5|\to\infty$, $l_{p,4}^5/l_{p,5}^5\to 0$ і $l_{p,3}^5/l_{p,5}^5\to 0$ при $p\to\infty$. Тому ці граничні умови можна поширити на всю послідовність $\{L_p,\, p \in \mathbb{N}\}$ (інакше отримаємо суперечність). Використовуючи зауваження 1.4, для кожного p домножимо матрицю L_p зліва на матрицю

$$M_p = E - \frac{1}{l_{p,1}^1}\left(l_{p,1}^5 - \frac{l_{p,2}^5}{l_{p,2}^2} l_{p,1}^2\right) E_1^5 - \frac{l_{p,2}^5}{l_{p,2}^2} E_2^5,$$

що відповідає автоморфізму алгебри $\mathfrak{a}$. Тут E позначає одиничну $n \times n$-матрицю, E_j^i позначає $n \times n$-матрицю з одиницею на перетині i-го рядку та j-го стовпчика й нулями на всіх інших позиціях. Елементи $\tilde{l}_{p,1}^5$ та $\tilde{l}_{p,2}^5$ матриці $\tilde{L}_p = M_p L_p$ дорівнюють нулю. Тоді для $(5, j)$-х елементів матриці $\tilde{U}_p = \tilde{L}_p Q_p = M_p U_p$ з $j \geqslant 5$ маємо

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty} \sum_{j=5}^{n} \left((\tilde{U}_p)_j^5\right)^2 &= \lim_{p\to\infty} \sum_{j=5}^{n} \left(\tilde{l}_{p,3}^5 q_{p,j}^3 + \tilde{l}_{p,4}^5 q_{p,j}^4 + \tilde{l}_{p,5}^5 q_{p,j}^5\right)^2 \\
&= \lim_{p\to\infty} (\tilde{l}_{p,5}^5)^2 \sum_{j=5}^{n} \left(\frac{\tilde{l}_{p,3}^5}{\tilde{l}_{p,5}^5} q_{p,j}^3 + \frac{\tilde{l}_{p,4}^5}{\tilde{l}_{p,5}^5} q_{p,j}^4 + q_{p,j}^5\right)^2 \\
&= \lim_{p\to\infty} (\tilde{l}_{p,5}^5)^2 \sum_{j=5}^{n} \left(q_{p,j}^5\right)^2 = \lim_{p\to\infty} (\tilde{l}_{p,5}^5)^2 = \infty.
\end{aligned}$$

Для цих рівнянь також використано умови $\sum_{j=1}^{n} q_{p,j}^5 q_{p,j}^5 = 1$ і $q_{p,j}^5 \to 0$ при $p \to \infty$, якщо $j < 5$.

Доведення для випадку неперервних контракцій аналогічне. Єдиною відмінністю є неперервність відносно параметра контракції ε. Процес Грама–Шмідта, застосований до матриці контракції U_ε, призводить до розкладу, в якому і нижньотрикутна, і ортогональна частини L_ε і Q_ε є неперервними матричнозначними функціями параметра ε. Тоді відповідний автоморфізм M_ε алгебри $\mathfrak{a}$, що зануляє $(5,1)$-й і $(5,2)$-й елементи матриці L_ε, також неперервний відносно параметра ε, що означає неперервність матричнозначної функції $\tilde{U}_\varepsilon = M_\varepsilon U_\varepsilon$. □

Таким чином, для кожної розмірності вище за чотири, побудовано приклад пари розв'язних алгебр Лі $\mathfrak{a}$ та $\mathfrak{a}_0$, для яких контракцію $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_0$ не можна реалізувати обмеженою матричнозначною функцією. Більше того, показано, що з точністю до автоморфізмів алгебри $\mathfrak{a}$ евклідова норма набору з $(5,5)$-го, …, $(5,n)$-го елементів будь-якої матриці контракції у вибраному базисі алгебр $\mathfrak{a}$ та $\mathfrak{a}_0$ обов'язково прямує до нескінченності при граничному значенні параметра контракції.

Доведення теореми 1.15 використовує декілька технік. Першим кроком при роботі з матрицею контракції є розклад на нижньотрикутну та ортогональну частини й застосування леми 1.3 для винесення ортогональної частини з-під граничного переходу і включення її до контрактованих структурних сталих. Завдяки спеціальній структурі розглянутих алгебр Лі можна довести, що ортогональна частина є діагональною матрицею з точністю до автоморфізмів контрактованої алгебри $\mathfrak{a}_0$, а тому її можна покласти рівною одиничній матриці. Для кожної трійки (i,j,k) розглядаємо різницю між відповідними перетвореними і контрактованими структурними сталими як невідому величину, що прямує до нуля. Це зводить граничні співвідношення між структурними сталими до системи алгебраїчних рівнянь на елементи нижньотрикутної частини і нові щезаючі величини, заіндексовані так само, як і тензор структурних сталих. Щоб завершити доведення, достатньо показати, що отримані алгебраїчні рівняння для $i,j,k=1,\dots,5$ використовують лише елементи нижньотрикутної частини і нові щезаючі величини з індексами з цього ж діапазону. Алгебраїзація граничних співвідношень між структурними сталими й розгляд підсистем алгебраїчних рівнянь, що не залежать від розмірності n, дозволяють перевірити всі обчислення на комп'ютері.

1.4. Контракції Салетана

Після того як І.Е. Сігал у [107] ввів загальне поняття контракцій, першим широко вивченим типом контракцій алгебр Лі був клас салетанівських (лінійних) контракцій. Контракції алгебр Лі стали інструментом теоретичної фізики після відомих статей Е. Іньоню та Ю.П. Вігнера [60, 61] про важливий спеціальний підклас лінійних контракцій. Зауважимо, що

Е. Іньоню та Ю.П. Вігнер планували розглянути весь клас лінійних контракцій, але вони помилково стверджували в [60], що будь-яку лінійну контракцію можна діагоналізувати. Незважаючи на те, що вони виправили свої міркування в наступній роботі [61], вони продовжили вивчення виключно діагоналізованих лінійних контракцій, які завдяки їхньому внеску тепер називають *контракціями Іньоню–Вігнера*, див. розділ 2. Ефективність таких контракцій у застосуваннях забезпечує їх тісний зв'язок із підалгебрами початкових алгебр. Точніше у сучасних термінах основний результат з [60], а саме теорему 1 цієї статті, можна переформулювати таким чином: будь-яка контракція Іньоню–Вігнера алгебри Лі $\mathfrak{g}$ до алгебри Лі $\mathfrak{g}_0$ пов'язана з деякою підалгеброю алгебри $\mathfrak{g}$, скажімо $\mathfrak{s}$, і за довільною підалгеброю алгебри $\mathfrak{g}$ можна побудувати контракцію Іньоню–Вігнера цієї алгебри. У контрактованій алгебрі $\mathfrak{g}_0$ існує абелів ідеал $\mathfrak{i}$ такий, що фактор-алгебра $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{i}$ ізоморфна $\mathfrak{s}$.

Докладне дослідження загальних лінійних контракцій проведено Ю.Дж. Салетаном під час підготовки докторської дисертації та опубліковано в [105]. Зокрема, він знайшов спрощений вигляд для матриць лінійних контракцій з точністю до репараметризації та зміни базису, вивів критерій, коли лінійна матрична функція є матрицею контракції, та отримав вираз для дужки Лі контрактованої алгебри Лі. Він також вивчав ітеровані лінійні контракції, пов'язав характеристики матриці контракції з підалгебраїчною структурою початкової алгебри, а також обговорив лінійні контракції представлень алгебр Лі.

Подальші дослідження інших авторів розширили, але не поглибили результати Ю.Дж. Салетана. Так, завдяки тому, що підалгебраїчна структура три- та чотиривимірних алгебр Лі була вже відома [86], прокласифіковано контракції Іньоню–Вігнера таких алгебр [44, 57]. Контракції, які можна реалізувати матричними функціями узагальненого вигляду $A\varepsilon + B\varepsilon^p$, де A, B — сталі матриці, а ε — параметр скорочення, розглянуто в [69, 73, 79] по аналогії з контракціями Салетана. Лінійні контракції загальних алгебраїчних структур вивчалися в [42].

На відміну від зазначених досліджень, у цьому підрозділі посилено оригінальні результати Ю.Дж. Салетана. Знайдено канонічний вигляд матриць контракцій Салетана, що створює основу для введення поняття сигнатури контракції Салетана, для розробки алгоритму обчислення контракцій Салетана та для постановки нових проблем щодо таких контракцій.

Означення 1.16. Реалізацію контракції афінною відносно параметра контракції матричнозначною функцією називають *контракцією Салетана*, або *лінійною контракцією* [105].

Цей клас контракцій включає контракції Іньоню–Вігнера [60, 61, 105].

Матриця будь-якої лінійної контракції має добре визначену (правосторонню) границю в точці $\varepsilon = 0$. Тому, на відміну від загального означення контракцій, у випадку лінійної контракції можна вважати, що її матричнозначна функція U_ε визначена на замкненому інтервалі $[0,1]$. Тоді матрицю U_ε зручно представити у вигляді

$$U_\varepsilon = (1-\varepsilon)U_0 + \varepsilon U_1,$$

де U_0 і U_1 — значення U_ε відповідно при $\varepsilon = 0$ і $\varepsilon = 1$ [105]. За означенням матриці контракції матриця U_1 (як і всі матриці U_ε, $\varepsilon \in (0,1]$) невироджена і — для власних контракцій — матриця U_0 завжди вироджена.

Існують спеціальні репараметризації, що зберігають клас контракцій Салетана [105]. Нехай $U_\varepsilon = B + \varepsilon A$ — матриця контракції Салетана. Зафіксуємо $\lambda > -1$ і розглянемо матричнозначну функцію U_ε на інтервалі $[0,(1+\lambda)^{-1}]$ замість $[0,1]$. Тоді

$$B + \varepsilon A = (1-\lambda\varepsilon)B + \varepsilon(A+\lambda B) = (1-\lambda\varepsilon)\left(B + \frac{\varepsilon}{1-\lambda\varepsilon}(A+\lambda B)\right).$$

Множник $(1-\lambda\varepsilon)$ не є суттєвим, оскільки його границя в точці $\varepsilon = 0$ дорівнює 1. Прибравши цей множник і позначивши $\varepsilon/(1-\lambda\varepsilon)$ через $\tilde\varepsilon$, отримаємо добре визначену матричнозначну функцію

$$\tilde U_{\tilde\varepsilon} = B + \tilde\varepsilon(A+\lambda B), \quad \tilde\varepsilon \in [0,1],$$

що реалізує ту саму контракцію Салетана, що й U_ε.

1.4.1. Канонічні вигляди матриць контракцій Салетана. Нехай E^m — одинична $m \times m$-матриця, а J_λ^m — жордановий $m \times m$-блок з власним значенням λ.

Теорема 1.17. *З точністю до заміни алгебр* $\mathfrak{g}$ *та* $\mathfrak{g}_0$ *на ізоморфні, будь-яку контракцію Салетана* $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ *реалізує матриця канонічного вигляду*

$$E^{n_0} \oplus J_\varepsilon^{n_1} \oplus \cdots \oplus J_\varepsilon^{n_s}, \tag{1.3}$$

або, еквівалентно,

$$E^{n_0} \oplus J_0^{n_1} \oplus \cdots \oplus J_0^{n_s} + \varepsilon E^n,$$

де $n_0 + \cdots + n_s = n$.

Доведення. Початок доведення наслідує [105]. Оскільки матриця контракції U_ε лінійна по ε, вона допускає представлення у вигляді

$$U_\varepsilon = (1 - \varepsilon)U_0 + \varepsilon U_1,$$

де U_0 та U_1 є значеннями U_ε при $\varepsilon = 0$ та $\varepsilon = 1$ відповідно. Взявши алгебру $\mathfrak{g}_1 = (V, \mu_1)$ замість алгебри $\mathfrak{g}$ в якості початкової алгебри контракції, отримаємо нову матрицю $U_1 = E^n$. Обмежимо інтервал для параметра ε до $[0, 1/2]$ і виокремимо множник $1 - \varepsilon$, який можна прибрати завдяки лемі 1.1, оскільки його границя в точці $\varepsilon = 0$ дорівнює 1. Репараметризуємо матрицю контракції, увівши новий параметр $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/(1 - \varepsilon)$, який пробігає інтервал $[0, 1]$, а тильду над ε надалі опускаємо. Отже, матриця контракції набуває вигляду $U_0 + \varepsilon E^n$, який отримано в [105].

Використаємо розклад Фіттінга простору V відносно оператора U_0. Більш детально, розкладемо простір V у пряму суму підпросторів V_0 і V_1, тобто $V = V_1 \oplus V_0$, таким чином, щоб обмеження W_0 оператора U_0 на нульову компоненту Фіттінга V_0 було нільпотентним, а його обмеження W_1 на одиничну компоненту Фіттінга V_1 — невиродженим. Розклад простору V породжує розклад нового оператора U_ε

$$U_\varepsilon = U_0 + \varepsilon E^n = (W_1 + \varepsilon E^{n_0}) \oplus (W_0 + \varepsilon E^{n-n_0}),$$

де $n_0 = \dim V_1$ — розмірність одиничної компоненти Фіттінга відносно оператора U_0.

Розглянемо матриці

$$\hat{U}_\varepsilon = E^{n_0} \oplus (W_0 + \varepsilon E^{n-n_0}) \quad \text{і} \quad \check{U}_\varepsilon = (W_1 + \varepsilon E^{n_0}) \oplus E^{n-n_0}.$$

Зображення $U_\varepsilon = \hat{U}_\varepsilon \check{U}_\varepsilon$ задовольняє умови леми 1.1. Отже, згідно з зауваженням 1.2 матриця $\hat{U}_\varepsilon$ є матрицею еквівалентної контракції $\mathfrak{g}_1 \to \tilde{\mathfrak{g}}_0$, де оператор $\check{U}_0^{-1}$ встановлює ізоморфізм між алгебрами $\tilde{\mathfrak{g}}_0 = (V, \mu_0 \cdot \check{U}_0^{-1})$ та $\mathfrak{g}_0$.

Заміною базису підпростору V_0 приведемо матрицю W_0 до її жорданової форми вигляду $J_0^{n_1} \oplus \cdots \oplus J_0^{n_s}$ для деяких $n_1, \ldots, n_s$ таких, що $n_1 + \cdots + n_s = \dim V_0 = n - n_0$. Тоді матриця $W_0 + \varepsilon E^{n-n_0}$ приймає свою жорданову форму $J_\varepsilon^{n_1} \oplus \cdots \oplus J_\varepsilon^{n_s}$, що еквівалентно приведенню матриці контракції $\hat{U}_\varepsilon$ до першого канонічного вигляду.

З огляду на лему 1.1 замість матриці $\hat{U}_\varepsilon$ можемо розглядати матрицю $E^{n_0} \oplus W_0 + \varepsilon E^n$, яка відрізняється від $\hat{U}_\varepsilon$ множенням справа на $(1+\varepsilon)E^{n_0} \oplus E^{n-n_0}$ з одиничною матрицею E^n в якості значення в граничній точці $\varepsilon = 0$. Тоді зазначена заміна базису V_0 приводить матрицю лінійної контракції U_ε до другого канонічного вигляду. $\square$

Означення 1.18. Теорема 1.17 означає, що будь-яку контракцію Салетана можна реалізувати матрицею вигляду $AS_\varepsilon B$, де A і B — сталі невироджені матриці, а лінійна матричнозначна функція S_ε записана в канонічному вигляді (1.3). Тоді набір $(n_0; n_1, \ldots, n_s)$, в якому $n_1, \ldots, n_s$ складають розбиття розмірності $n - n_0$ нульової компоненти Фіттінга відносно U_0, а $n_0 \in \{0, \ldots, n\}$, назвемо *сигнатурою* цієї контракції Салетана.

Сигнатура контракції Салетана містить розбиття $n - n_0$, а тому її визначено з точністю до перестановок усіх її елементів, окрім першого. Контракція Салетана з сигнатурою (n) є невласною, тобто контрактована алгебра ізоморфна вихідній, а тому для власної контракції Салетана завжди виконується умова $n_0 < n$. Сигнатура Салетана $(0; 1, \ldots, 1)$ відповідає тривіальній контракції до абелевої алгебри. Для кожної алгебри Лі множину всіх її контракцій Салетана можна розбити на підмножини, що відповідають різним сигнатурам Салетана. Це дає змогу поставити задачу опису контракцій Салетана з фіксованою сигнатурою. Широко відомі контракції Іньоню–Вігнера утворюють підклас контракцій Салетана з сигнатурами вигляду $(n_0; 1, \ldots, 1)$. Тому дослідження контракцій Салетана включає як найпростіший випадок дослідження контракцій Іньоню–Вігнера. Контракції Іньоню–Вігнера для три- та чотиривимірних алгебр Лі вичерпно прокласифіковано в [44] та [57] відповідно. Контракції Салетана з іншими сигнатурами не мають настільки прямого зв'язку з алгебраїчною структурою початкової та контрактованої алгебр, як контракції Іньоню–Вігнера. Тому опис загальних контракцій Салетана є значно складнішою задачею.

Необхідною та достатньою умовою контракції алгебри $\mathfrak{g}$ афінною матричнозначною функцією U_ε є умова [105]

$$U_0^2[x,y]^0 - U_0[U_0x,y]^0 - U_0[x,U_0y]^0 + [U_0x,U_0y]^0 = 0 \qquad \forall x,y \in V. \tag{1.4}$$

Тут і надалі $[\cdot,\cdot]^0$ і $[\cdot,\cdot]^1$ позначають проекції дужки Лі $[\cdot,\cdot]$ на підпростори V_0 і V_1 відповідно, що в загальному випадку не є дужками Лі. Тоді контрактовану дужку Лі визначено згідно з

$$[x,y]_0 = W_1^{-1}[U_0x,U_0y]^1 - W_0[x,y]^0 + [U_0x,y]^0 + [x,U_0y]^0 \qquad \forall x,y \in V. \tag{1.5}$$

Використання канонічного вигляду матриці U_ε спрощує аналіз як необхідних, так і достатніх умов і властивостей контрактованої дужки Лі. Зокрема, у канонічному вигляді $W_1^{-1} = E^{n-n_0}$. Наголосимо, що заміна базису базового простору без використання леми 1.1 може спростити матрицю W_1 лише до її жорданової форми.

Зауваження 1.19. Нехай U_0 — значення матриці добре визначеної контракції Салетана алгебри Лі $\mathfrak{g}$ при $\varepsilon = 0$. Тоді довільний степінь матриці U_0 є значенням матриці іншої добре визначеної контракції Салетана алгебри $\mathfrak{g}$ при $\varepsilon = 0$. Образ $\operatorname{im} U_0$ матриці U_0 є підалгеброю алгебри $\mathfrak{g}$. Об'єднавши попередні два твердження, отримаємо, що для кожного $m = 0, 1, 2, \ldots$ образ $\mathfrak{s}_m := \operatorname{im} U_0^m$ матриці U_0^m також є підалгеброю алгебри $\mathfrak{g}$, і $\mathfrak{s}_m = V_1$, якщо $m \geqslant m_0 := \max(n_1, \ldots, n_s)$ [105]. Інакше кажучи, матриця будь-якої контракції Салетана асоціюється з прапором підалгебр

$$\mathfrak{s}_0 := \mathfrak{g} \supset \mathfrak{s}_1 \supset \mathfrak{s}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{s}_{m_0} = V_1.$$

Розмірності цих підалгебр повністю визначає сигнатура контракції:

$$\dim \mathfrak{s}_m = n - l_1 - \cdots - l_m, \quad m = 0, \ldots, m_0,$$

де

$$l_m := |\{n_i \mid n_i \geqslant m,\ i = 1, \ldots, s\}|.$$

Зокрема, $\dim \mathfrak{s}_{m_0} = n_0$. Наведене співвідношення встановлює необхідні умови узгодженості алгебри Лі та сигнатури будь-якої її контракції Салетана.

Приклад 1.20. Розглянемо дійсну тривимірну ортогональну алгебру $\mathrm{so}(3)$ з канонічними комутаційними співвідношеннями $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = e_2$. Алгебра $\mathrm{so}(3)$ не має двовимірних підалгебр. Отже, єдиною можливою сигнатурою власної контракції Салетана алгебри $\mathrm{so}(3)$ є $(1; 1, 1)$. Перший канонічній вигляд матриці контракції з цією сигнатурою має вигляд $E^1 \oplus J^1_\varepsilon \oplus J^1_\varepsilon$ і реалізує єдину контракцію Іньоню–Вігнера алгебри $\mathrm{so}(3)$, що дає евклідову алгебру $\mathrm{e}(2)$ з ненульовими комутаційними співвідношеннями $[e_1, e_3] = -e_2$, $[e_2, e_3] = e_1$. Це означає, що іншу власну контракцію алгебри $\mathrm{so}(3)$, яка дає алгебру Гейзенберга $\mathrm{h}(1)$ з ненульовими комутаційними співвідношеннями $[e_2, e_3] = e_1$, не можна реалізувати контракцією Салетана, див. [105].

Приклад 1.21. На відміну від тривимірних алгебр Лі (див. приклад 2.5), існують дві контракції чотиривимірних дійсних алгебр Лі, що не є еквівалентними узагальненій контракції Іньоню–Вігнера (див. підрозділ 2.3.4):

$$2\mathrm{A}_{2.1} \xrightarrow{S_1} \mathrm{A}_{3.2} \oplus \mathrm{A}_1, \quad \mathrm{A}_{4.10} \xrightarrow{S_2} \mathrm{A}_{3.2} \oplus \mathrm{A}_1.$$

Їх задають такі “недіагоналізовні” матриці [80, Remark 10]:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Тут матрицю S_1 додатково оптимізовано порівняно з [80, Remark 10].) Матриці S_1 та S_2 містять лише нульовий та перший степені параметра контракції. Отже, відповідні контракції є контракціями Салетана. Сигнатура обох цих контракцій — $(1; 1, 2)$.

Для заданої алгебри Лі можна поставити задачу про знаходження наборів невід’ємних цілих чисел, які можуть бути сигнатурами контракцій Салетана цієї алгебри. Як показано в зауваженні 1.19, степеням граничного значення матриці Салетана відповідає прапор підалгебр початкової алгебри, а компоненти сигнатури можна виразити через розмірності цих підалгебр. Це дає зв’язок між сигнатурами та структурою підалгебр початкової алгебри. Водночас, наявність прапора підалгебр не означає існування відповідної йому контракції Салетана. Також треба врахувати додаткові обмеження, що не мають явної алгебраїчної інтерпретації. Більше того, навіть якщо відповідна контракція існує, не відомо процедур побудови цієї контракції за прапором підалгебр. Це суттєво відрізняється від ситуації з контракціями Іньоню–Вігнера, оскільки існує алгоритм побудови добре визначеної контракції Іньоню–Вігнера за будь-якою підалгеброю початкової алгебри. Дослідження сигнатур контракцій Салетана подібне до дослідження сигнатур узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера [4, 47, 55, 101, 102], див. також наступний розділ. Нагадаємо, що компоненти сигнатури узагальненої контракції Іньоню–Вігнера є діагональними елементами діагонального диференціювання початкової алгебри, але обернене твердження не вірне.

1.4.2. Контракції Салетана з сигнатурою $(0; n)$. Є два різні підходи до вивчення контракцій Салетана. Для фіксованої пари алгебр Лі можна перевірити, чи існує контракція Салетана між цими алгебрами, а потім спробувати описати всі можливі контракції Салетана між ними. Інший підхід полягає в описі всіх можливих контракцій, які можна реалізувати матрицями з певною сигнатурою. Недолік другого підходу — необхідність класифікації алгебр Лі, що задовольняють специфічні обмеження.

У цьому підрозділі розглянемо контракції з сигнатурою $(0; n)$. Вибір цієї сигнатури накладає найсильніші обмеження на структуру початкової алгебри Лі $\mathfrak{g}$ порівняно до інших сигнатур Салетана, див. рівняння (1.4). Зокрема, алгебра $\mathfrak{g}$ має містити прапор з n ненульових підалгебр, і в загальному випадку ця умова на $\mathfrak{g}$ не є достатньою.[1.1]

Для сигнатури $(0; n)$ маємо $V_0 = V$, тому можемо покласти $U_0 = J_0^n$. Тоді $[\cdot,\cdot]^0 = [\cdot,\cdot]$ й умова існування контракції Салетана (1.4) набуває вигляду

$$[U_0x, U_0y] - U_0[U_0x, y] = U_0([x, U_0y] - U_0[x, y]) \quad \forall x, y \in V$$

або еквівалентного вигляду

$$[\![\mathrm{ad}_{U_0x}, U_0]\!] = U_0[\![\mathrm{ad}_x, U_0]\!] \quad \forall x \in V.$$

[1.1] Ситуація зовсім інакша для контракцій Іньоню–Вігнера, при яких існує взаємнооднозначна відповідність з власними підалгебрами алгебри $\mathfrak{g}$.

Тут і надалі $[\![A, B]\!]$ позначає комутатор операторів A і B,

$$[\![A, B]\!] := AB - BA.$$

Записуючи цю умову для елементів базису, у якому $U_0 = J_0^n$, отримаємо

$$[\![\mathrm{ad}_{e_i}, U_0]\!] = U_0[\![\mathrm{ad}_{e_{i+1}}, U_0]\!] = \dots = U_0^{n-i}[\![\mathrm{ad}_{e_n}, U_0]\!],$$

тобто

$$[\![\mathrm{ad}_{e_i}, U_0]\!] = U_0^{n-i}[\![A, U_0]\!], \tag{1.6}$$

де $A = (a_{ij}) := \mathrm{ad}_{e_n}$. Для кожного i, рівняння (1.6) можна розглядати як неоднорідне лінійне матричне рівняння відносно матриці ad_{e_i}. Частковим розв'язком цього рівняння є матриця $U_0^{n-i}A$, оскільки

$$[\![U_0^k A, U_0]\!] = U_0^k A U_0 - U_0^{k+1}A = U_0^k[\![A, U_0]\!].$$

Простір розв'язків відповідного однорідного рівняння $[\![\mathrm{ad}_{e_i}, U_0]\!] = 0$ збігається з простором матриць, що комутують з U_0. Цей простір породжують степені матриці U_0, оскільки вона складається з одного жорданового блока. Отже, загальним розв'язком системи (1.6) є

$$\mathrm{ad}_{e_i} = U_0^{n-i}A + b_{ij}U_0^{n-j}$$

з параметрами b_{ij}, де $b_{nj} = 0$, оскільки $\mathrm{ad}_{e_n} = A$ за означенням, і $a_{in} = 0$, оскільки $Ae_n = [e_n, e_n] = 0$. Нагадаємо, що за повтореними індексами відбувається підсумовування. Дужка Лі є кососиметричною, а тому

$$[e_i, e_n] + [e_n, e_i] = \mathrm{ad}_{e_i}e_n + \mathrm{ad}_{e_n}e_i = b_{ij}e_j + a_{ji}e_j = 0,$$

тобто $b_{ij} + a_{ji} = 0$. Інакше кажучи, комутаційні співвідношення алгебри $\mathfrak{g}$ мають вигляд

$$\begin{aligned}[e_i, e_j] &= \mathrm{ad}_{e_i}e_j = U_0^{n-i}Ae_j - a_{ki}U_0^{n-k}e_j = a_{kj}e_{k+i-n} - a_{ki}e_{k+j-n} \\ &= (a_{p+n-i,j} - a_{p+n-j,i})e_p.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Тут і надалі, об'єкти з індексом поза інтервалом $\{1, \dots, n\}$ вважаємо рівними нулю, а індекси p, q як і i, j, k пробігають значення від 1 до n.

Отже, згідно з (1.4.2) властивість кососиметричності дужки Лі очевидно виконується для довільної пари елементів алгебри $\mathfrak{g}$. Зазначимо, що кількість необхідних параметрів у комутаційних співвідношеннях (1.4.2) не перевищує $n(n-1)$. Тотожність Якобі додає обмеження у вигляді системи квадратичних рівнянь відносно елементів матриці A:

$$\begin{aligned}(a_{p+n-i,j} - a_{p+n-j,i})&(a_{q+n-k,p} - a_{q+n-p,k})\\ &+ (a_{p+n-j,k} - a_{p+n-k,j})(a_{q+n-i,p} - a_{q+n-p,i})\\ &+ (a_{p+n-k,i} - a_{p+n-i,k})(a_{q+n-j,p} - a_{q+n-p,j}) = 0.\end{aligned}$$

Нажаль, цю систему не вдалося розв'язати для довільної розмірності базового простору.

Контрактовану дужку Лі визначає умова

$$[x,y]_0 = [U_0x, y] + [x, U_0y] - U_0[x,y] \quad \forall x, y \in V.$$

Отже, комутаційні співвідношення контрактованої алгебри $\mathfrak{g}_0$ мають вигляд

$$\begin{aligned}[e_i, e_j]_0 &= [e_{i-1}, e_j] + [e_i, e_{j-1}] - U_0[e_i, e_j]\\ &= (a_{p+n-i+1,j} - a_{p+n-j,i-1})e_p + (a_{p+n-i,j-1} - a_{p+n-j+1,i})e_p\\ &\quad - (a_{p+n-i,j} - a_{p+n-j,i})e_{p-1}\\ &= (a_{p+n-i,j-1} - a_{p+n-j,i-1})e_p.\end{aligned}$$

Зокрема,

$$[e_n, e_j]_0 = (a_{p,j-1} - a_{p+n-j,n-1})e_p.$$

Розглянемо матрицю $A_0 = (a_{0,ij})$, де $a_{0,ij} = a_{i,j-1} - a_{i+n-j,n-1}$. У термінах A та J_0^n отримаємо представлення

$$A_0 = AJ_0^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i,n-1}(J_0^n)^i.$$

Простіше кажучи, матрицю A_0 отримано з матриці A пересуванням стовпчиків матриці A направо, заповненням першого стовпчика нулями та відніманням певної лінійної комбінації степенів матриці J_0^n, що дає нулі в останньому стовпчику матриці A_0. Структуру алгебри $\mathfrak{g}_0$ визначено в термінах матриці A_0 так само, як і структуру алгебри $\mathfrak{g}$ визначено в термінах матриці A, оскільки $a_{p+n-i,j-1} - a_{p+n-j,i-1} = a_{0,p+n-i,j} - a_{0,p+n-j,i}$. Цей результат перекликається з лемою 3 [105]. Дійсно, оскільки алгебру $\mathfrak{g}_0$ можна контрактувати тією самою матрицею $U = J_\varepsilon^n$, її структурні сталі задовольняють тим самим обмеженням, накладеним умовою існування контракції Салетана (1.4). З леми 3 з [105] також випливає, що n ітерацій цієї контракції призводять до абелевої алгебри.

Вивчимо вичерпно випадок $n = 3$. Тоді суттєвими є три співвідношення серед комутаційних співвідношень (1.4.2) і тотожність Якобі для набору (e_1, e_2, e_3):

$$
\begin{aligned}
&[e_3, e_1] = a_{p1}e_p,\\
&[e_3, e_2] = a_{p2}e_p,\\
&[e_1, e_2] = (a_{32} - a_{21})e_1 - a_{31}e_2,\\
&[e_1, [e_2, e_3]] + [e_2, [e_3, e_1]] + [e_3, [e_1, e_2]] = 0.
\end{aligned}
$$

Зберемо коефіцієнти базисних елементів у розкладі тотожності Якобі та проведемо певні спрощення. У результаті отримаємо таку систему рівнянь на елементи матриці A:

$$
\begin{aligned}
&a_{31}a_{21} = 0, \quad a_{31}a_{12} = 0, \quad a_{31}(a_{11} - a_{22}) = 0,\\
&a_{21}(2a_{32} - a_{21}) = 0, \quad a_{32}(a_{11} - a_{22}) + a_{12}a_{22} = 0.
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

Наслідком цієї системи є тотожність $a_{21}(a_{11} + a_{22}) = 0$.

Для спрощення вигляду матриці A перейдемо до алгебри, ізоморфної алгебрі $\mathfrak{g}$, що еквівалентно заміні базису базового простору. З огляду на поставлену задачу, допускаються лише такі заміни базису, матриці яких комутують з матрицею $U_0 = J_0^n$. Отже, кожна з таких матриць — лінійна комбінація степенів матриці U_0,

$$
S = \gamma(E + \alpha U_0 + \beta U_0^2),
$$

де α, β і γ — довільні сталі, $\gamma \neq 0$, а E позначає одиничну 3×3-матрицю. Обернена до S матриця має вигляд

$$S^{-1} = \gamma^{-1}(E - \alpha U_0 + (\alpha^2 - \beta)U_0^2).$$

Вирази для елементів перетвореної матриці $\tilde{A}$ відповідають виразам для перетворених дужок Лі $[e_3, e_1]^{\sim}$ і $[e_3, e_2]^{\sim}$. Отримуємо

$$\begin{aligned}
&[e_3, e_1]^{\sim} = S^{-1}[Se_3, Se_1] = \gamma(a_{11} - \alpha a_{32} - \beta a_{31})e_1 + \gamma a_{21}e_2 + \gamma a_{31}e_3,\\
&[e_3, e_2]^{\sim} = S^{-1}[Se_3, Se_2] = \gamma(a_{12} + \alpha(a_{11} - a_{22}) - \beta a_{21})e_1\\
&\qquad\qquad + \gamma(a_{22} + \alpha(a_{21} - a_{32}) - \beta a_{31})e_2 + \gamma(a_{32} + \alpha a_{31})e_3,
\end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned}
&\tilde{a}_{11} = \gamma(a_{11} - \alpha a_{32} - \beta a_{31}), && \tilde{a}_{12} = \gamma(a_{12} + \alpha(a_{11} - a_{22}) - \beta a_{21}),\\
&\tilde{a}_{21} = \gamma a_{21}, && \tilde{a}_{22} = \gamma(a_{22} + \alpha(a_{21} - a_{32}) - \beta a_{31}),\\
&\tilde{a}_{31} = \gamma a_{31}, && \tilde{a}_{32} = \gamma(a_{32} + \alpha a_{31}).
\end{aligned}$$

Контрактовану алгебру $\mathfrak{g}_0$ визначають комутаційні співвідношення

$$\begin{aligned}
&[e_3, e_1]_0 = -a_{32}e_1,\\
&[e_3, e_2]_0 = (a_{11} - a_{22})e_1 + (a_{21} - a_{32})e_2 + a_{31}e_3,\\
&[e_1, e_2]_0 = a_{31}e_1.
\end{aligned}$$

Вивчимо всі можливі розв'язки системи (1.8) з точністю до допустимих замін базису.

За умови $a_{31} \neq 0$ з системи (1.8) випливає, що

$$a_{21} = a_{12} = 0, \quad a_{11} = a_{22}.$$

Виберемо значення параметрів α, β і γ у заміні базису так, щоб $a_{32} = 0$, $a_{11} = a_{22} = 0$ і $a_{31} = -1$. Тоді комутаційні співвідношення алгебри $\mathfrak{g}$ набувають вигляду $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = e_3$ і $[e_2, e_3] = 0$. Отже, базисні елементи e_2 і e_3 породжують максимальний абелевий ідеал алгебри $\mathfrak{g}$, а елемент e_1 діє на цьому ідеалі як тотожній оператор, тобто алгебра $\mathfrak{g}$ —

майже абелева алгебра, асоційована з тотожнім оператором. У класифікації Мубаракзянова тривимірних алгебр [7] її позначено $\mathrm{A}_{3.3}$. На відміну від прикладу 1.20, надалі використовуємо позначення Мубаракзянова.[1.2] Контрактовану алгебру $\mathfrak{g}_0$ задають комутаційні співвідношення $[e_3, e_1]_0 = 0$, $[e_2, e_3]_0 = e_3$, $[e_2, e_1]_0 = e_1$. Отже, ця алгебра ізоморфна початковій алгебрі $\mathfrak{g}$. Ізоморфізм визначено через перестановку базисних елементів. Це означає, що контракція невласна.

Припустимо, що $a_{31} = 0$ і $a_{21} \neq 0$. Розв'язуючи систему (1.8), отримаємо

$$a_{32} = \tfrac{1}{2}a_{21}, \quad a_{21} = -a_{11}, \quad a_{22} = -a_{11}, \quad (a_{21} - a_{12})a_{11} = 0.$$

Сталі a_{11}, a_{22}, a_{12} і a_{21} можна покласти рівними 0, 0, 0 і -2 відповідно, провівши заміну базису з відповідною матрицею S. У результаті отримаємо канонічні комутаційні співвідношення алгебри $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$: $[e_1, e_2] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_3$, $[e_1, e_3] = 2e_2$. Контрактована алгебра $\mathfrak{g}_0$ ізоморфна алгебрі $\mathrm{A}_{3.3}$, що очевидно з її комутаційних співвідношень $[e_1, e_2]_0 = 0$, $[e_2, e_3]_0 = e_2$, $[e_1, e_3]_0 = e_1$.

У випадку $a_{31} = a_{21} = 0$, $a_{32} \neq 0$ система (1.8) зводиться до єдиного рівняння

$$a_{32}(a_{11} - a_{22}) + a_{12}a_{22} = 0.$$

Проведемо допустиму заміну базису з такими значеннями параметрів α і γ матриці заміни S, щоб $a_{22} = 0$, а $a_{32} = -1$. Тоді з рівняння випливає, що $a_{11} = 0$. Комутаційні співвідношення алгебри $\mathfrak{g}$ набувають вигляду

$$[e_1, e_3] = 0, \quad [e_2, e_3] = e_3 - a_{12}e_1, \quad [e_2, e_1] = e_1,$$

тобто $\mathfrak{g}$ є майже абелевою алгеброю, асоційованою з матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & -a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[1.2] Класичні алгебри Лі $\mathrm{h}(1)$, $\mathrm{e}(2)$, $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ і $\mathrm{so}(3)$ позначені Мубаракзяновим як $\mathrm{A}_{3.1}$, $\mathrm{A}^0_{3.5}$, $\mathrm{A}_{3.6}$ і $\mathrm{A}_{3.7}$ відповідно.

Контрактована алгебра має ті самі комутаційні співвідношення, що й у попередньому випадку: $\mathfrak{g}_0 \sim \mathrm{A}_{3.3}$. Якщо $a_{12} = 0$, то контракція $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ невласна, оскільки $\mathfrak{g} \sim \mathrm{A}_{3.3}$. Для випадку $a_{12} \neq 0$ контракція еквівалентна опаданню одиниці[1.3] у матриці, асоційованої з алгеброю $\mathfrak{g} \sim \mathrm{A}_{3.2}$, а отримана матриця визначає алгебру $\mathfrak{g}_0 \sim \mathrm{A}_{3.3}$.

Останній випадок відповідає значенням $a_{31} = a_{21} = a_{32} = 0$. Єдине рівняння, що залишається в системі (1.8), набуває вигляду $a_{12}a_{22} = 0$. Комутаційними співвідношеннями початкової та контрактованої алгебри є відповідно

$$
\begin{aligned}
&[e_3, e_1] = a_{11}e_1, && [e_3, e_1]_0 = 0,\\
&[e_3, e_2] = a_{12}e_1 + a_{22}e_2, && [e_3, e_2]_0 = (a_{11} - a_{22})e_1,\\
&[e_1, e_2] = 0, && [e_1, e_2]_0 = 0.
\end{aligned}
$$

Розглянемо випадки в залежності від значень решти параметрів. Якщо $a_{11} \neq a_{22}$, то вибором значення α у матриці перетворення S можна покласти $a_{12} = 0$. Параметр β тут не суттєвий, і його можна покласти рівним нулю. Параметр γ можна використати для масштабування ненульової лінійної комбінації a_{11} і a_{22} (наприклад, $a_{11} - a_{22}$) до одиниці. У підсумку отримаємо контракцію майже абелевої алгебри $\mathfrak{g} = \mathrm{A}_{3.4}$, асоційовану з діагональною (але не пропорційну одиничній) матрицею, до тривимірної алгебри Гейзенберга $\mathrm{h}(1) = \mathrm{A}_{3.1}$. Якщо $a_{11} = a_{22}$, то контрактована алгебра абелева, тобто отримаємо тривіальну контракцію майже абелевої алгебри Лі (однієї з $\mathrm{A}_{3.1}$, $\mathrm{A}_{3.2}$, $\mathrm{A}_{3.3}$ чи $3\mathrm{A}_1$, залежно від значень $a_{11} = a_{22}$ та a_{12}).

Твердження 1.22. *Контракції Салетана з сигнатурою* $(0;3)$ *реалізують лише такі контракції між тривимірними алгебрами Лі: власні контракції* $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{A}_{3.3}$, $\mathrm{A}_{3.2} \to \mathrm{A}_{3.3}$, $\mathrm{A}_{3.4} \to \mathrm{A}_{3.1}$, *і* $\mathrm{A}_{2.1} \oplus \mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_{3.3}$, *тривіальні контракції алгебр* $\mathrm{A}_{3.1}$, $\mathrm{A}_{3.2}$ *і* $\mathrm{A}_{3.3}$ *до абелевої алгебри* $3\mathrm{A}_1$, *а також невласні контракції* $\mathrm{A}_{3.3} \to \mathrm{A}_{3.3}$ *і* $3\mathrm{A}_1 \to 3\mathrm{A}_1$.

[1.3] Для випадку жорданових блоків 2×2, єдиним можливим опаданням одиниці є заміна 1 на позиції $(1, 2)$ на 0.

1.5. Висновки

Проблеми, зібрані в розділі 1, стосуються взаємозв'язку підалгебраїчної структури і контракцій (скінченновимірних) алгебр Лі, необхідності використання необмежених матричнозначних функцій або послідовностей для реалізації контракцій алгебр Лі, а також спеціальних — афінних за параметром — матриць контракцій, які реалізують так звані контракції Салетана.

Після наведення у підрозділі 1.1 необхідних означень і тверджень щодо контракцій алгебр Лі, у підрозділі 1.2 доведено теорему, що описує поведінку прапорів підалгебр при контракціях алгебр Лі та яку можна розглядати як набір нових критеріїв неіснування контракцій. Отримано також ослаблений аналог цієї теореми для прапорів підпросторів. За її допомогою показано неіснування контракцій для низки пар шестивимірних нільпотентних дійсних алгебрі Лі, для яких не працюють раніше відомі критерії.

У підрозділі 1.3 показано, що в кожній розмірності не меншій ніж п'ять існує контракція між розв'язними алгебрами Лі, яку можна реалізувати лише матрицями, евклідова норма яких прямує до нескінченності при граничному значенні параметра контракції. Отже, розмірність п'ять є найнижчою розмірністю, в якій між алгебрами Лі існує контракція вказаного вигляду.

Ще не зрозуміло, які властивості зумовлюють феномен необхідно необмежених матриць контракції, якого немає в нижчих розмірностях. Можна лише зазначити, що у випадку $n = 5$ контракція $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_0$ є прямою, тобто не існує алгебри $\tilde{\mathfrak{a}}_0$ такої, що $\mathfrak{a} \to \tilde{\mathfrak{a}}_0$ та $\tilde{\mathfrak{a}}_0 \to \mathfrak{a}_0$ є добре визначеними власними контракціями. Це випливає з того факту, що алгебри диференціювань алгебр $\mathfrak{a}$ та $\mathfrak{a}_0$ мають розмірності шість і сім відповідно, а кожна власна контракція збільшує розмірність алгебри диференціювань. Оскільки цей приклад є першим у літературі, не зрозуміло наскільки поширеними є контракції з необхідно необмеженими матрицями. Водночас немає причин вважати наведений приклад унікальним, і можна очікувати, що кількість таких контракцій зростає зі зростанням розмірності алгебр Лі.

У цьому контексті можна запропонувати таку задачу. Чи існує для узагальненої контракції Іньоню–Вігнера (див. розділ 2), що необхідно залучає від'ємні степені параметра контракції, її реалізація обмеженою матричнозначною функцією іншого типу?

Основним результатом підрозділу 1.4 є теорема 1.17, що описує канонічний вигляд контракцій Салетана. Доведення існування канонічного вигляду для кожної контракції Салетана дає конкретний скінчений набір невід'ємних цілих чисел, що відповідає цій контракції, та який природно назвати її сигнатурою. Сигнатура контракції Салетана повністю визначає її канонічний вигляд.

Введення поняття сигнатури дає можливість поставити декілька цікавих задач, пов'язаних з контракціями Салетана. Поняття сигнатури Салетана разом з умовами (1.4) і (1.5) також може слугувати основою алгоритму для вичерпної класифікації контракцій Салетана, принаймні у випадку низьких розмірностей. Цей алгоритм має схожі риси з алгоритмом для побудови чи доведення неіснування узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера, який запропоновано у підрозділі 2.2.

Відомо [41, 80, 102, 114], що всі контракції між тривимірними комплексними (відповідно дійсними) алгебрами Лі (за виключенням єдиної контракції $\mathrm{so}(3) \to \mathrm{h}(1)$ у дійсному випадку) можна реалізувати простими контракціями Іньоню–Вігнера. Контракцію $\mathrm{so}(3) \to \mathrm{h}(1)$ можна реалізувати узагальненою контракцією Іньоню–Вігнера, але не контракцією Салетана, див. приклади 1.20 та 2.5.

У розмірності чотири кількість контракцій, які не можна реалізувати простими контракціями Іньоню–Вігнера, суттєво зростає. Більше того, існує одна (відповідно дві) контракції між чотиривимірними комплексними (відповідно дійсними) алгебрами Лі, які не можна реалізувати узагальненими контракціями Іньоню–Вігнера, див. підрозділ 2.3.1.

Отже, питання реалізації цих контракцій контракціями Салетана є найбільш цікавим для контракцій Салетана між чотиривимірними алгебрами Лі. Тому ці реалізації, вперше виконані в [80, Remark 10], розглянуто й оптимізовано у прикладі 1.21, що є однією з передумов формулювання теореми 2.10.

Розділ 2

Узагальнені контракції Іньоню–Вігнера

Звичайні та узагальнені контракції Іньоню–Вігнера (або, скорочено, *ІВ-контракції*) широко використовують для реалізації контракцій між алгебрами Лі. Саме поняття контракцій з'явилося після відкриття Е. Іньоню та Ю.П. Вігнером цього, названого на їх честь, класу контракцій [60, 61]. Важливий у фізиці граничний перехід від алгебри Пуанкаре до алгебри Галілея, який є алгебраїчним проявом граничного переходу від релятивістської до класичної механіки можна реалізувати звичайною ІВ-контракцією. Контракції від алгебр Гейзенберга до абелевої алгебри такої самої розмірності, що лежать в основі граничного переходу від квантової до класичної механіки, є тривіальними ІВ-контракціями: будь-яку алгебру Лі можна контрактувати до абелевої алгебри такої самої розмірності за допомогою звичайної ІВ-контракції, що відповідає нульовій підалгебрі.

Назву "узагальнена контракція Іньоню–Вігнера" вперше використано в [55] для так званих p-контракцій, введених Х.Д. Дьобнером та О. Мельсхаймером [47]. Узагальнюючи контракції Іньоню–Вігнера, ці автори вивчали контракції, матриці яких можна діагоналізувати заміною базисів початкової та контрактованої алгебр, перетворюючи діагональні елементи на степені параметра контракції з дійсними показниками. В алгебраїчній літературі схожі контракції з цілими степенями параметра називають *виродженнями за однопараметричними підгрупами* [54], див. також [36, 37, 39]. Поняття виродження алгебр Лі розширює поняття контракцій на випадок довільного алгебраїчно замкненого поля й визначається в термінах замикання орбіт відносно топології Заріського.

Зазначимо, що параметризована сім'я матриць, яка реалізує “виродження за однопараметричною підгрупою” є однопараметричною матричною групою лише при правильному виборі базисів у відповідних початковій і контрактованій алгебрах, тому цей термін не є вдалим.

Означення узагальнених IВ-контракцій та їхні основні властивості наведено в підрозділі 2.1. Там само доведено теорему про достатність використання в узагальнених IВ-контракціях цілочислових сигнатур. На основі цього в підрозділі 2.2 запропоновано метод, що дає змогу будувати узагальнену IВ-контракцію, якщо вона існує, або доводити, що контракцію не можна реалізувати як узагальнену IВ-контракцію. Цей метод лежить в основі покрокового алгоритму, який можна реалізувати в пакетах символьних обчислень. Ефективність алгоритму продемонстровано в прикладі 2.5 через оптимізацію добре відомого опису контракцій тривимірних дійсних алгебр Лі; див. також підрозділ 2.3.4 щодо аналогічної оптимізації для розмірності чотири.

Усі неперервні контракції, що виникали у фізичних застосуваннях, можна реалізувати як узагальнені IВ-контракції. В [114] було зроблено припущення, що будь-яка контракція еквівалентна узагальненій IВ-контракції. Як показано у [80], спроба його доведення в [115] була хибною. Очевидними контрприкладами [82] до цього припущення є контракції до характеристично нільпотентних алгебр Лі, побудовані Д. Бурде [36, 37]. Дійсно, кожна власна узагальнена IВ-контракція породжує власне градуювання на контрактованій алгебрі. Можна встановити бієкцію між власними груповими градуюваннями алгебри Лі та її ненульовими діагоналізовними диференціюваннями. Кожна характеристично нільпотентна алгебра Лі допускає лише нільпотентні диференціювання, а тому не має ненульових діагоналізовних диференціювань і власних градуювань. Отже, будь-яку контракцію до характеристично нільпотентної алгебри Лі не можна реалізувати узагальненою IВ-контракцією. Оскільки найменша розмірність, у якій існують характеристично нільпотентні алгебри Лі, дорівнює семи, приклади Д. Бурде не стосуються нижчих розмірностей.

Доводити неіснування узагальнених IB-контракцій до алгебр Лі, які не є характеристично нільпотентними, значно складніше, оскільки такі алгебри допускають власні градуювання, а зазначене неіснування пов'язане з несумісністю фільтрацій початкової алгебри та градуювань контрактованої алгебри. Такого роду приклади неуніверсальності узагальнених IB-контракцій вперше отримано в [102] для чотиривимірних алгебр Лі, див. підрозділ 2.3.1.[2.1] Тобто навіть у випадку, коли контрактована алгебра допускає різноманітні власні градуювання, контракція може не допускати реалізацією узагальненою IB-контракцією. У [102] доведено, що між чотиривимірними алгебрами Лі над полем дійсних (відповідно комплексних) чисел існує дві (відповідно одна) добре визначені контракції, які не можна реалізувати узагальненими IB-контракціями. Інші контракції чотиривимірних алгебр Лі реалізовано в [10, 41, 80, 102] узагальненими IB-контракціями з використанням цілих невід'ємних степенів параметра контракції не більших за три. Об'єднання зазначених результатів у підрозділі 2.3 дає повний опис узагальнених IB-контракцій у розмірності чотири. На додачу, використання алгоритму з підрозділу 2.2 дало змогу ефективно побудувати простіші матриці контракцій, ніж знайдені в [10, 41, 80], а також виправити низку неточностей у цих роботах. Аналогічні задачі для розмірностей п'ять та шість не розв'язано до цього часу.

Розглядаючи замкнені відносно контракцій класи алгебр Лі або накладаючи обмеження на структуру матриць контракцій, природно поставити задачу часткової універсальності узагальнених IB-контракцій для таких спеціальних класів контракцій. Зокрема, узагальнені IB-контракції нільпотентних алгебр Лі до розмірності шість включно вивчено в [38]. Аналогічно можна поставити задачу щодо узагальнених IB-контракцій у класі майже абелевих алгебр Лі, оскільки цей клас також замкнений відносно контракцій. Поняття діагональної контракції є розширенням по-

[2.1] Твердження з більш ранньої статті [39] про неможливість реалізації контракції між певними чотиривимірними комплексними алгебрами Лі ($2\mathfrak{g}_{2.1}$ і $\mathfrak{g}_{4.1}$ у позначеннях, введених на початку підрозділу 2.3) узагальненою IB-контракцією є невірним з огляду на побудову таких реалізацій у явному вигляді в [41, 102]; див. підрозділ 2.3.2.

няття узагальненої ІВ-контракції. А саме, змінна частина діагональної контракції також діагональна, але може залежати від параметра контракції довільним чином, а не лише складатись зі степенів параметра контракції. Водночас у підрозділі 2.4 показано, що кожна діагональна контракція еквівалентна узагальненій ІВ-контракції.

Результати цього розділу опубліковано в статтях [91, 101, 102] і тезах конференцій [15, 88, 90, 94, 98].

2.1. Означення та основні властивості

Узагальнену контракцію Іньоню–Вігнера можна розглядати як результат параметризованого масштабування базисних елементів спеціальним чином вибраних базисів початкової та контрактованої алгебр. Це масштабування має бути виродженим при граничному переході відносно параметра контракції.

Означення 2.1. Контракцію $\mathcal{C}$ алгебри $\mathfrak{g}$ до $\mathfrak{g}_0$ (над полем $\mathbb{C}$ або $\mathbb{R}$) називають *узагальненою контракцією Іньоню–Вігнера* (або, скорочено, *узагальненою ІВ-контракцією*), якщо її матрицю U_ε можна представити у вигляді

$$U_\varepsilon = AW_\varepsilon P, \tag{2.1}$$

де матриці A і P невироджені і сталі (тобто не залежать від параметра ε), а $W_\varepsilon = \operatorname{diag}(\varepsilon^{\alpha_1}, \dots, \varepsilon^{\alpha_n})$ для деяких $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Набір з n показників $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ називають *сигнатурою* узагальненої ІВ-контракції $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$. Простим ІВ-контракціям відповідають сигнатури, складені з нулів і одиниць. Оскільки репараметризація $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}^\beta$, де $\beta > 0$, призводить до сильно еквівалентної вихідній узагальненої ІВ-контракції, сигнатура контракції $\mathcal{C}$ визначена з точністю до додатного множника. Сигнатура повинна мати ненульову компоненту, оскільки інакше алгебри $\mathfrak{g}$ та $\mathfrak{g}_0$ ізоморфні, тобто контракція $\mathcal{C}$ невласна. Також сигнатуру визначено з точністю до перестановок її компонент. Ці перестановки породжено перестановками образів базисних елементів вихідної алгебри при дії оператора A.

Наступне твердження тривалий час було лише припущенням (див., наприклад, [115]).

Теорема 2.2. *Будь-яка узагальнена IW-контракція (слабо) еквівалентна узагальненій IW-контракції з цілочисловою сигнатурою (і такими самими сталими матрицями).*

Доведення. Нехай контракція $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ має матрицю $U_\varepsilon = AW_\varepsilon P$, де A і P — сталі невироджені матриці, а $W_\varepsilon = \operatorname{diag}(\varepsilon^{\alpha_1}, \dots, \varepsilon^{\alpha_n})$ для деяких $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Введемо позначення

$$\mathcal{E} = \{(i,j,k) \mid c_{ij}^k \neq 0,\ \alpha_i + \alpha_j = \alpha_k\},$$
$$\mathcal{N} = \{(i,j,k) \mid c_{ij}^k \neq 0,\ \alpha_i + \alpha_j > \alpha_k\}.$$

Можна припустити, що $\mathcal{N} \neq \varnothing$, оскільки інакше контракція $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ невласна, а отже еквівалентна узагальненій IW-контракції з нульовою сигнатурою. Система S рівнянь $x_i + x_j = x_k$, де $(i,j,k) \in \mathcal{E}$, та нерівностей $x_i + x_j > x_k$, де $(i,j,k) \in \mathcal{N}$, для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ сумісна, оскільки $x = \alpha$ — її розв'язок. Якщо змінні x задовольняють систему S, то λx є розв'язком S для будь-якого додатного дійсного λ. Тому множина розв'язків системи S має вигляд непорожнього конуса в просторі $\mathbb{R}^n$. Виразимо максимальну підмножину змінних x через інші x, використовуючи рівняння $x_i + x_j = x_k$, $(i,j,k) \in \mathcal{E}$. Нехай I (відповідно $\bar{I}$) — набір індексів залежних (відповідно незалежних) серед змінних x; набір $\bar{I}$ доповнює набір I в наборі $\{1, \dots, n\}$. Вирази для x_i, $i \in I$, лінійні відносно x_j, $j \in \bar{I}$, і мають раціональні коефіцієнти. Після підстановки цих виразів у нерівності $x_i + x_j > x_k$, $(i,j,k) \in \mathcal{N}$, отримаємо систему S' строгих нерівностей для x_j, $j \in \bar{I}$, що визначає непустий конус у просторі $\mathbb{R}^{|\bar{I}|}$. Цей конус обов'язково містить точки з раціональними координатами. Це означає, що система S має раціональні розв'язки. Отже, вона має також цілі розв'язки. Будь-який розв'язок системи S є сигнатурою добре визначеної узагальненої IB-контракції $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ з такими самими сталими матрицями A і P. $\square$

Теорема 2.2 дає можливість розглядати лише цілочислові сигнатури. Ця теорема є наслідком більш загальної теореми 2.13 щодо діагональних контракцій.

Зауваження 2.3. Доведення теореми 2.2 дає конструктивний спосіб знаходження цілочислових сигнатур шляхом розв'язання системи S, наприклад, методом Гауса [109]. (Див. також [19] щодо різних методів розв'язання лінійних систем нерівностей.) Першим кроком є приведення системи S до системи S' методом Гауса через виключення змінних x_i, $i \in I$, завдяки рівнянням $x_i + x_j = x_k$, $(i, j, k) \in \mathcal{E}$. Потім застосовуємо метод Гауса до (сумісної) системи S' строгих нерівностей. Після виключення виберемо раціональні (наприклад, нульові) значення для решти компонент x і крок за кроком повторимо всю процедуру з виключенням і вибором раціональних значень тоді, коли відповідні компоненти x зв'язані нерівностями.

Схоже зауваження справедливе також щодо доведення теореми 2.13.

Множину сигнатур узагальнених IB-контракцій між двома фіксованими алгебрами з невід'ємними степенями параметра можна природним чином упорядкувати з точністю до перестановки компонент. Наприклад, припустимо, що $\bar\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ і $\bar\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, де $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_1 \geqslant \dots \geqslant \alpha_n \geqslant 0$, $\beta_1 \geqslant \dots \geqslant \beta_n \geqslant 0$, — сигнатури узагальнених IB-контракцій алгебри $\mathfrak{g}$ до алгебри $\mathfrak{g}_0$. З точністю до еквівалентності їхніх компонент, сигнатури $\bar\alpha$ (відповідно $\bar\beta$) можна вважати взаємно простими. Вважаємо, що $\bar\alpha < \bar\beta$, якщо $\alpha_1 = \beta_1$, …, $\alpha_{j-1} = \beta_{j-1}$ і $\alpha_j < \beta_j$ для деяких j. Сигнатуру узагальнених IB-контракцій з алгебри $\mathfrak{g}$ до алгебри $\mathfrak{g}_0$ називають *мінімальною*, якщо вона мінімальна відносно наведеного впорядкування. Знаходження мінімальних сигнатур є необхідним кроком при оптимізації вибору матриці контракції.

Частковим випадком узагальнених ІВ-контракцій є прості ІВ-контракції, сигнатури яких еквівалентні наборам з нулів та одиниць. Більшість контракцій алгебр Лі низьких розмірностей еквівалентні таким контракціям. Вони відповідають граничним процесам між алгебрами Лі з матрицями контракцій найпростішого можливого вигляду. ІВ-контракції три- та чотиривимірних алгебр Лі [44, 57] легко охарактеризувати, використовуючи класифікації таких алгебр, отримані в [86].

Для теоретичних досліджень зручно покласти матриці A і P рівними одиничній матриці, використавши заміну базисів у алгебрах $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{g}_0$ або, іншими словами, замінивши ці алгебри ізоморфними. Проте при обчисленнях контракцій конкретних алгебр Лі це не працює. Якщо

$$U_\varepsilon = W_\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon^{\alpha_1}, \dots, \varepsilon^{\alpha_n}),$$

то структурні сталі контрактованої алгебри $\mathfrak{g}_0$ задає формула

$$c^k_{0,ij} = \lim_{\varepsilon\to+0} c^k_{ij}\,\varepsilon^{\alpha_i+\alpha_j-\alpha_k} = \begin{cases} c^k_{ij}=0, & \text{якщо}\quad \alpha_i+\alpha_j<\alpha_k,\\ c^k_{ij}, & \text{якщо}\quad \alpha_i+\alpha_j=\alpha_k,\\ 0, & \text{якщо}\quad \alpha_i+\alpha_j>\alpha_k \end{cases} \tag{2.2}$$

без підсумовування за повтореними індексами. Отже, матриця U_ε визначає узагальнену ІВ-контракцію тоді і лише тоді, коли $\alpha_i+\alpha_j\geqslant\alpha_k$ для довільних (i,j,k) таких, що $c^k_{ij}\neq 0$. Ці умови існування узагальнених ІВ-контракцій і умови на структуру контрактованих алгебр можна записати в незалежному від базиса вигляді в термінах градуювань контрактованих алгебр, асоційованих з фільтраціями на початкових алгебрах [4, 54]. Зокрема, контрактована алгебра $\mathfrak{g}_0$ повинна мати диференціювання, матриця якого діагоналізовна до вигляду $\mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.[2.2]

[2.2]Оператор $D\in\mathrm{GL}(V)$ на базовому просторі алгебри Лі $\mathfrak{g}$ називають *диференціюванням* цієї алгебри, якщо $D[x,y]=[Dx,y]+[x,Dy]$ для будь-яких елементів $x,y\in V$. Диференціювання алгебри $\mathfrak{g}$ утворюють алгебру Лі, яку називають алгеброю диференціювань алгебри $\mathfrak{g}$ і позначають як $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Коли базис $(e_1,\dots,e_n)$ простору V зафіксовано, елементи матриці $\Gamma=(\gamma^i_j)$ диференціювання D задовольняють систему $c^{k'}_{ij}\gamma^k_{k'}=c^k_{i'j}\gamma^{i'}_i+c^k_{ij'}\gamma^{j'}_j$.

Очевидно, що узагальнені IB-контракції, визначені матрицями $U_\varepsilon = AW_\varepsilon P$ та $\tilde{U}_\varepsilon = \tilde{A}\tilde{W}_\varepsilon\tilde{P}$, де

$$\begin{aligned}&\tilde{A} = MAN, \quad \tilde{P} = N^{-1}PM_0,\\ &\tilde{W}_\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon^{\beta\alpha_1}, \ldots, \varepsilon^{\beta\alpha_n}) \text{ для деяких } \beta > 0,\end{aligned} \tag{2.3}$$

сильно еквівалентні. Тут M та M_0 — матриці автоморфізмів алгебр $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{g}_0$ відповідно, а N — матриця, що комутує з діагональними частинами матриць W_ε та $\tilde{W}_\varepsilon$. Інакше кажучи, матриця N відповідає довільній заміні базисів у компонентах градуювань алгебри $\mathfrak{g}_0$, асоційованих з W_ε та $\tilde{W}_\varepsilon$. Зазначимо, що діагональні матриці W_ε та $\tilde{W}_\varepsilon$ породжують таке саме градуювання алгебри $\mathfrak{g}_0$. Підсумовуючи, можна вважати, що певний ступінь свободи у виборі матриць A та P зберігається навіть після фіксації канонічних комутаційних співвідношень.

2.2. Алгоритм обчислення

Для узагальненої IB-контракції з матрицею $U_\varepsilon = AW_\varepsilon P$ граничний перехід між структурними сталими вихідної та контрактованої алгебр можна зобразити у вигляді

$$C \cdot AW_\varepsilon \to C_0 \cdot Q, \quad \varepsilon \to 0,$$

де $Q = P^{-1}$. Введемо позначення

$$x_{ij}^k := a_i^{i'} a_j^{j'} b_{k'}^k c_{i'j'}^{k'}, \tag{2.4}$$

$$y_{ij}^k := q_i^{i'} q_j^{j'} p_{k'}^k c_{0,i'j'}^{k'} \tag{2.5}$$

з $A = (a_j^i)$, $A^{-1} = (b_j^i)$, $P = (p_j^i)$, $Q = (q_j^i)$. Очевидно, що $x_{ij}^k = -x_{ji}^k$, $y_{ij}^k = -y_{ji}^k$. Насправді,

$$X := (x_{ij}^k) = C \cdot A, \quad Y := (y_{ij}^k) = C_0 \cdot Q$$

є відповідно тензорами структурних сталих алгебр $\tilde{\mathfrak{g}}$, $\tilde{\mathfrak{g}}_0$, ізоморфних алгебрам $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_0$ і пов'язаних з цими алгебрами через дію операторів A, Q.

Тому компоненти тензорів X і Y пов'язує аналогічне (2.2) граничне співвідношення

$$y_{ij}^k = \lim_{\varepsilon \to +0} x_{ij}^k \, \varepsilon^{\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k},$$

де за індексами i, j, k знову не відбувається підсумовування. Це співвідношення призводить до алгебраїчних зв'язків на компоненти тензорів, вигляд яких залежить від знаку показника $\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k$ степеня параметра ε. Також підлаштуємо систему (2.4), (2.5). Домножимо тензори з лівої та правої сторін рівнянь (2.4) та (2.5) відповідно на $a_k^{k''}$ та $q_k^{k''}$ і згорнемо по індексу k. Додатково перепишемо отримані рівняння за допомогою перепозначення індексів $k \to k'$ та $k'' \to k$. У результаті отримаємо систему щонайбільше квадратичних рівнянь

$$a_i^{i'} a_j^{j'} c_{i'j'}^k = a_{k'}^k x_{ij}^{k'}, \quad q_i^{i'} q_j^{j'} c_{0,i'j'}^k = q_{k'}^k y_{ij}^{k'}, \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} &y_{ij}^k = 0, \; x_{ij}^k = 0, && \text{якщо} \quad \alpha_i + \alpha_j - \alpha_k < 0, \\ &y_{ij}^k = x_{ij}^k, && \text{якщо} \quad \alpha_i + \alpha_j - \alpha_k = 0, \\ &y_{ij}^k = 0, && \text{якщо} \quad \alpha_i + \alpha_j - \alpha_k > 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

на елементи матриць A, Q та тензорів X, Y, де можна вважати $i < j$ з огляду на антисиметричність тензорів X, Y по парі нижніх індексів, що значно зменшує кількість рівнянь і невідомих у системі. Цю кількість можна додатково зменшити, якщо інтерпретувати (2.7) як набір підстановок, які треба виконати в системі (2.6). Остаточно, отримаємо систему квадратичних рівнянь

$$a_i^{i'} a_j^{j'} c_{i'j'}^k = \sum_{k' \colon \alpha_i + \alpha_j \geqslant \alpha_{k'}} a_{k'}^k x_{ij}^{k'}, \quad i < j, \tag{2.8}$$

$$q_i^{i'} q_j^{j'} c_{0,i'j'}^k = \sum_{k' \colon \alpha_i + \alpha_j = \alpha_{k'}} q_{k'}^k x_{ij}^{k'}, \quad i < j, \tag{2.9}$$

на елементи матриць A, Q та x_{ij}^k з індексами (i, j, k), для яких $i < j$ та $\alpha_i + \alpha_j \geqslant \alpha_k$. Звичайно, цю систему потрібно розв'язувати з урахуванням умови невиродженості матриць A та Q, тобто приєднувати до неї нерівності $\det A \neq 0$, $\det Q \neq 0$.

Отже, доведено таке твердження.

Твердження 2.4. *Матриця вигляду* (2.1) *є матрицею узагальненої IВ-контракції алгебри $\mathfrak{g}$ до $\mathfrak{g}_0$ тоді і лише тоді, коли матриці A, $Q = P^{-1}$ разом з деяким тензором X задовольняють систему* (2.8), (2.9).

У важливих частинних випадках систему (2.6), (2.7) або, еквівалентно, систему (2.8), (2.9) можна суттєво спростити. Припустимо, що канонічний базис алгебри $\mathfrak{g}_0$ асоційований з градуюванням, ізоморфним градуюванню, породженому W_ε. Тоді матрицю P можна представити у вигляді добутку $P_{\rm grad}P_{\rm aut}$, де $P_{\rm grad}$ та $P_{\rm aut}$ — матриці заміни базисів компонент градуювання та автоморфізма алгебри $\mathfrak{g}_0$ відповідно. Отже, в такому випадку можна позбутися матриці P, поклавши її рівною одиничній матриці з точністю до наведеної еквівалентності. Тоді $y_{ij}^k := c_{0,ij}^k$, причому $c_{0,ij}^k = 0$ при $\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k \neq 0$. Рівняння в (2.6) з $\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k > 0$ перетворюються на тотожності, тобто граничний перехід не накладає обмежень на елементи x_{ij}^k, для яких $\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k > 0$. Перші два набори рівнянь у (2.6) формально об'єднаємо в один набір $x_{ij}^k = c_{0,ij}^k$, $\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k \leqslant 0$, оскільки $c_{0,ij}^k$ також дорівнює нулю, якщо $\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k < 0$. Система (2.6), (2.7) набуває вигляду

$$a_i^{i'} a_j^{j'} c_{i'j'}^k = a_{k'}^k x_{ij}^{k'}, \tag{2.10}$$

$$x_{ij}^k = c_{0,ij}^k, \quad \text{якщо} \quad \alpha_i + \alpha_j - \alpha_k \leqslant 0, \tag{2.11}$$

де невідомими є елементи матриці A і тензора X, причому $x_{ij}^k = -x_{ji}^k$. Відповідною редукцією системи (2.8), (2.9) є система

$$a_i^{i'} a_j^{j'} c_{i'j'}^k = \sum_{k'\colon\, \alpha_i+\alpha_j>\alpha_{k'}} a_{k'}^k x_{ij}^{k'} + \sum_{k'\colon\, \alpha_i+\alpha_j=\alpha_{k'}} a_{k'}^k c_{0,ij}^{k'}, \quad i<j, \tag{2.12}$$

на елементи матриці A та x_{ij}^k з індексами (i,j,k), для яких $i < j$ та $\alpha_i + \alpha_j > \alpha_k$. До цієї системи потрібно приєднати лише одну нерівність $\det A \neq 0$.

Для алгебр Лі низьких розмірностей, систему (2.8), (2.9) і тим більше систему (2.12) легко розв'язати з використанням символьних обчислень, наприклад у `Maple`. Зауважимо, що комутаційні співвідношення різних представників класів ізоморфних алгебр з класифікації Г.М. Мубаракзянова низьковимірних алгебр [7, 8, 9] є добре узгодженими щодо контракцій, а тому якщо між двома такими алгебрами існує узагальнена ІВ-контракція, то між ними існує і узагальнена ІВ-контракція з компонентою P, рівною одиничній матриці E. Аналогічна узгодженість є і між комутаційними співвідношеннями алгебр з класифікацій п'ятивимірних або шестивимірних нільпотентних алгебр, використаних у підрозділі 1.2.2. Взагалі, як пошук розв'язків відповідної системи, так і вибір представника оптимального вигляду в множині цих розв'язків є значно простішими для узагальнених ІВ-контракцій з $P = E$, ніж з загальною матрицею P, зокрема у зв'язку зі спільною невизначеністю (2.3) компонент A і P матриці контракції. Тому при побудові узагальнених ІВ-контракцій у фіксованій парі алгебр Лі можна спочатку шукати контракції з $P = E$ і тільки при їх неіснуванні розглядати загальний випадок P.

Виходячи із зазначеного, запропонуємо алгоритм для реалізації контракцій між алгебрами Лі узагальненими ІВ-контракціями або доведення неможливості такої реалізації. Зафіксуємо дві алгебри Лі — $\mathfrak{g}$ та $\mathfrak{g}_0$. Припустимо, що контракція $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ існує.

1. Дослідження узагальнених ІВ-контракцій зручно почати з вичерпного опису простих ІВ-контракцій алгебри $\mathfrak{g}$. Ця задача рівносильна дослідженню підалгебраїчної структури алгебри $\mathfrak{g}$. Якщо $\mathfrak{g}_0$ є серед ізоморфних отриманим контрактованим алгебрам, виконання алгоритму завершено. В іншому випадку продовжимо, виключивши прості ІВ-контракції з розгляду.

2. Знайдемо алгебру диференціювань контрактованої алгебри $\mathfrak{g}_0$ та виберемо діагоналізовне диференціювання. Існує взаємно однозначна відповідність між такими диференціюваннями та градуюваннями алгебри $\mathfrak{g}_0$. Інакше кажучи, вивчимо градуювання контрактованої алгебри Лі в термінах діагоналізовних градуювань.

Вивчення градуювань допомагає досягти двох цілей — отримати можливі значення степенів параметра контракції у матрицях контракцій та зрозуміти структуру сталих компонент у представленнях для цих матриць.

3. Сигнатура будь-якої узагальненої IВ-контракції алгебри $\mathfrak{g}$ до алгебри $\mathfrak{g}_0$ співпадає з діагоналлю деякого діагоналізованого диференціювання алгебри $\mathfrak{g}_0$. Подальші обмеження на степені параметра випливають з відсутності простої IВ-контракції між алгебрами $\mathfrak{g}$ та $\mathfrak{g}_0$. Можна використати той факт, що з точністю до додатного множника будь-яка сигнатура, асоційована з простою IВ-контракцією, складається з нулів та одиниць.

4. Нехай зафіксовано придатного кандидата на сигнатуру (не простої) узагальненої IВ-контракції $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$. Матрицю P у представленні $U_\varepsilon = AW_\varepsilon P$ матриці контракції U_ε визначено з точністю до замін базисів градуйованих компонент і до автоморфізмів контрактованої алгебри. Вона часто задає автоморфізм між градуюваннями алгебри $\mathfrak{g}_0$, і тоді її можна покласти рівною одиничній матриці. Якщо для зафіксованого кандидата на сигнатуру існує декілька неізоморфних градуювань, то вони відповідають нееквівалентним значенням параметр-матриці P. Окремо покладемо кожне з цих значень рівним одиничній матриці, здійснивши відповідні заміни канонічного базису алгебри $\mathfrak{g}_0$ та продовживши алгоритм з зафіксованим кандидатом на сигнатуру. У розглянутих вище двох випадках, типових для алгебр низьких розмірностей, лише елементи матриці A залишаються невідомими. Ці елементи — разом з x_{ij}^k з індексами (i,j,k), для яких $i<j$ та $\alpha_i+\alpha_j>\alpha_k$, — задовольняють систему алгебраїчних (квадратичних) рівнянь (2.12).

   Якщо кандидат на сигнатуру асоційований з параметризованою сім'єї нееквівалентних градуювань, то все одно починаємо з пошуку контракцій з $P=E$, і тільки якщо доведено, що такі контракції не існують, — переходимо до загального випадку P.

5. Значну частину випадків для сигнатур можна ігнорувати, оскільки асоційовані системи рівнянь для елементів матриці A є розширеннями таких систем для інших випадків, і сумісність перших означає сумісність других.

6. Розглядаємо кожний набір степенів параметра ε, для якого відповідна система алгебраїчних рівнянь — (2.8), (2.9) або (2.12) — мінімальна, та виконуємо для нього дії з пункту 4.

Приклад 2.5. Розглянемо контракції тривимірних дійсних алгебр Лі, повний список яких з точністю до ізоморфізма складають такі алгебри [7] (див. також [80, 85, 86, 103, 108] стосовно різних модифікацій цього списку):

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})\colon & [e_1,e_2]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_3,\ [e_1,e_3]=2e_2;\\
\mathrm{so}(3)\colon & [e_1,e_2]=e_3,\ [e_2,e_3]=e_1,\ [e_3,e_1]=e_2;\\
\mathrm{A}^b_{3.5}\colon & [e_1,e_3]=be_1-e_2,\ [e_2,e_3]=e_1+be_2,\ b\geqslant 0;\\
\mathrm{A}^a_{3.4}\colon & [e_1,e_3]=e_1,\ [e_2,e_3]=ae_2,\ -1\leqslant a<1, a\neq 0;\\
\mathrm{A}_{3.3}\colon & [e_1,e_3]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_2;\\
\mathrm{A}_{3.2}\colon & [e_1,e_3]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_1+e_2;\\
\mathrm{A}_{3.1}\colon & [e_2,e_3]=e_1;\\
\mathrm{A}_{2.1}\oplus\mathrm{A}_1\colon & [e_1,e_2]=e_1;\\
3\mathrm{A}_1. &
\end{array}$$

Контракції таких алгебр вичерпно описано і реалізовано як узагальнені IВ-контракції в [80]. За допомогою запропонованого вище алгоритма проведено перерахунок і оптимізацію наведених у [80] матриць контракцій. У результаті загальну кількість сталих матричних множників I_j у розкладах матриць узагальнених IВ-контракцій, відмінних від одиничної матриці, вдалося скоротити з семи до п'яти. Також вдалося спростити вигляд матриці I_4. Наведемо оптимізований список власних і нетривіальних контракцій тривимірних дійсних алгебр Лі та відповідну діаграму Хассе (рис. 2.1); для кожної простої ІВ-контракції додатково вказано асоційовану підалгебру вихідної алгебри.

$$\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})\colon\quad \xrightarrow{I_3W(1,1,0)} \mathrm{A}_{3.1},\ \langle e_3\rangle;\quad \xrightarrow{I_4W(1,0,0)} \mathrm{A}_{3.4}^{-1},\ \langle e_2,e_3\rangle;$$
$$\xrightarrow{I_5W(1,1,0)} \mathrm{A}_{3.5}^{0},\ \langle e_1+e_3\rangle.$$

$$\mathrm{so}(3)\colon\quad \xrightarrow{W(2,1,1)} \mathrm{A}_{3.1};\quad \xrightarrow{W(1,1,0)} \mathrm{A}_{3.5}^{0},\ \langle e_3\rangle.$$

$$\mathrm{A}_{2.1}\oplus\mathrm{A}_1\colon\quad \xrightarrow{I_1W(1,1,0)} \mathrm{A}_{3.1},\ \langle e_1-e_3\rangle.$$

$$\mathrm{A}_{3.2}\colon\quad \xrightarrow{W(1,0,1)} \mathrm{A}_{3.1},\ \langle e_2\rangle;\quad \xrightarrow{W(0,1,0)} \mathrm{A}_{3.3},\ \langle e_1,e_3\rangle.$$

$$\mathrm{A}_{3.4}^{a}\colon\quad \xrightarrow{I_2W(1,0,1)} \mathrm{A}_{3.1},\ \langle e_1+e_2\rangle.$$

$$\mathrm{A}_{3.5}^{b}\colon\quad \xrightarrow{W(1,0,1)} \mathrm{A}_{3.1},\ \langle e_2\rangle.$$

Сталі частини матриць контракцій мають вигляд:

$$I_1=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad I_2=\begin{pmatrix}1-a&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad I_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$I_4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\qquad I_5=\begin{pmatrix}0&0&\frac12\\0&1&0\\1&0&\frac12\end{pmatrix}.$$

Зауваження 2.6. При побудові узагальнених ІВ-контракцій (особливо з $P=E$) або доведенні їх неіснування між алгебрами Лі низької розмірності без використання систем символьних обчислень може бути зручно не збільшувати кількість невідомих у відповідних системах через введення допоміжних невідомих тензорів, хоча таке введення спрощує структуру систем. Інакше кажучи, при $P=E$ безпосередньо розв'язуємо систему

$$a_i^{i'}a_j^{j'}b_{k'}^{k}c_{i'j'}^{k'}=c_{0,ij}^{k},\quad \text{якщо}\quad \alpha_i+\alpha_j-\alpha_k\leqslant 0, \tag{2.13}$$

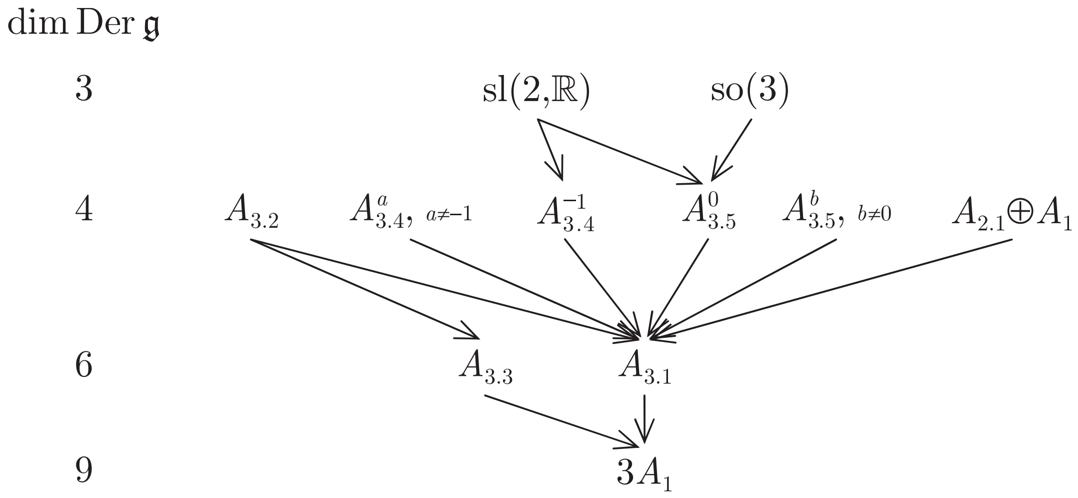

Рис. 2.1. Діаграма Хассе для контракції тривимірних дійсних алгебр Лі.

де невідомими є елементи матриці $A = a^i_j$, а $(b^i_j) = A^{-1}$. Можна також інтерпретувати (2.13) як систему відносно невідомих A і B з додатковими рівняннями $AB = E$. Часто для спрощення супутніх обчислень без обмеження загальності — завдяки, наприклад, діагональним автоморфізмам вихідної алгебри, якщо такі автоморфізми існують, — можна покласти $\det A = 1$ або просто шукати розв'язки, які задовольняють цю умову. Див. підрозділи 2.3.1–2.3.3 для прикладів застосування зазначеного підходу при вивченні узагальнених ІВ-контракцій чотиривимірних дійсних і комплексних алгебр Лі.

2.3. Узагальнені ІВ-контракції чотиривимірних алгебр Лі

Повний список чотиривимірних дійсних алгебр Лі з точністю до ізоморфізма складають такі алгебри:[2.3]

$$\mathrm{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathrm{A}_1\colon\quad [e_1, e_2] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_3,\ [e_1, e_3] = 2e_2;$$

$$\mathrm{so}(3) \oplus \mathrm{A}_1\colon\quad [e_1, e_2] = e_3,\ [e_2, e_3] = e_1,\ [e_3, e_1] = e_2;$$

[2.3] Чотиривимірні дійсні алгебри Лі вперше прокласифікував Г.М. Мубаракзянов в [7]. У дисертації використано його список алгебр з незначними модифікаціями і в позначеннях з [80, 103]. Див. також [85, 86, 108] стосовно інших варіантів такого списку.

$\mathrm{A}_{4.10}$: $[e_1,e_3]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_2,\ [e_1,e_4]=-e_2,\ [e_2,e_4]=e_1;$

$\mathrm{A}^a_{4.9}$: $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_4]=2ae_1,\ [e_2,e_4]=ae_2-e_3,$
$[e_3,e_4]=e_2+ae_3,\ a\geqslant 0;$

$\mathrm{A}^b_{4.8}$: $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_4]=(1+b)e_1,\ [e_2,e_4]=e_2,$
$[e_3,e_4]=be_3,\ -1\leqslant b\leqslant 1;$

$\mathrm{A}_{4.7}$: $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_4]=2e_1,\ [e_2,e_4]=e_2,$
$[e_3,e_4]=e_2+e_3;$

$\mathrm{A}^{ab}_{4.6}$: $[e_1,e_4]=ae_1,\ [e_2,e_4]=be_2-e_3,\ [e_3,e_4]=e_2+be_3,$
$a>0;$

$\mathrm{A}^{abc}_{4.5}$: $[e_1,e_4]=ae_1,\ [e_2,e_4]=be_2,\ [e_3,e_4]=ce_3,\ abc\neq 0,$
причому набір (a,b,c) визначений з точністю до ненульового множника і перестановки компонент;

$\mathrm{A}_{4.4}$: $[e_1,e_4]=e_1,\ [e_2,e_4]=e_1+e_2,\ [e_3,e_4]=e_2+e_3;$

$\mathrm{A}_{4.3}$: $[e_1,e_4]=e_1,\ [e_3,e_4]=e_2;$

$\mathrm{A}^b_{4.2}$: $[e_1,e_4]=be_1,\ [e_2,e_4]=e_2,\ [e_3,e_4]=e_2+e_3,\ b\neq 0;$

$\mathrm{A}_{4.1}$: $[e_2,e_4]=e_1,\ [e_3,e_4]=e_2;$

$\mathrm{A}^b_{3.5}\oplus\mathrm{A}_1$: $[e_1,e_3]=be_1-e_2,\ [e_2,e_3]=e_1+be_2,\ b\geqslant 0;$

$\mathrm{A}^a_{3.4}\oplus\mathrm{A}_1$: $[e_1,e_3]=e_1,\ [e_2,e_3]=ae_2,\ -1\leqslant a<1,\ a\neq 0;$

$\mathrm{A}_{3.3}\oplus\mathrm{A}_1$: $[e_1,e_3]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_2;$

$\mathrm{A}_{3.2}\oplus\mathrm{A}_1$: $[e_1,e_3]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_1+e_2;$

$\mathrm{A}_{3.1}\oplus\mathrm{A}_1$: $[e_2,e_3]=e_1;$

$2\mathrm{A}_{2.1}$: $[e_1,e_2]=e_1,\ [e_3,e_4]=e_3;$

$\mathrm{A}_{2.1}\oplus 2\mathrm{A}_1$: $[e_1,e_2]=e_1;$

$4\mathrm{A}_1$.

Для комплексного випадку $\mathfrak{g}_{\dots}$ позначає комплексифікацію відповідної алгебри $\mathrm{A}_{\dots}$. Повний список неізоморфних чотиривимірних комплексних алгебр Лі складають такі алгебри: $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_{4.8}^b$, де $|b|\leqslant 1$ та, при $|b|=1$, $\operatorname{Im} b\geqslant 0$, $\mathfrak{g}_{4.7}$, $\mathfrak{g}_{4.5}^{abc}$, де $abc\neq 0$ і набір (a,b,c) визначений з точністю до ненульового (комплексного) множника і перестановки компонент, $\mathfrak{g}_{4.4}$, $\mathfrak{g}_{4.3}$, $\mathfrak{g}_{4.2}^b$ з $b\neq 0$, $\mathfrak{g}_{4.1}$, $\mathfrak{g}_{3.4}^a\oplus\mathfrak{g}_1$, де $a\neq 0$, $|a|\leqslant 1$ та, при $|a|=1$, $\operatorname{Im} a\geqslant 0$, $\mathfrak{g}_{3.3}\oplus\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_{3.2}\oplus\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_{3.1}\oplus\mathfrak{g}_1$, $2\mathfrak{g}_{2.1}$, $\mathfrak{g}_{2.1}\oplus 2\mathfrak{g}_1$, $4\mathfrak{g}_1$.

2.3.1. Неіснування узагальнених ІВ-контракцій між чотиривимірними алгебрами Лі. Майже всі контракції чотиривимірних алгебр Лі реалізовано в статтях [41, 80] узагальненими ІВ-контракціями. Виключення вичерпують контракції

$$2\mathrm{A}_{2.1}\to\mathrm{A}_1\oplus\mathrm{A}_{3.2},\quad \mathrm{A}_{4.10}\to\mathrm{A}_1\oplus\mathrm{A}_{3.2}\quad\text{та}\quad 2\mathfrak{g}_{2.1}\to\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_{3.2}$$

для дійсного та комплексного випадків відповідно, оскільки комплексифікація алгебри $\mathrm{A}_{4.10}$ ізоморфна комплексифікації $2\mathfrak{g}_{2.1}$ алгебри $2\mathrm{A}_{2.1}$.

Насправді, контракцію $2\mathfrak{g}_{2.1}\to\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_{3.2}$ не можна реалізувати узагальненими ІВ-контракціями. Нижче наведено як оригінальне доведення з [102], так і його модифікацію, яка демонструє роботу алгоритму з попереднього підрозділу та допускає перевірку за допомогою систем символьних обчислень. Оскільки всі інші контракції між чотиривимірними комплексними алгебрами Лі еквівалентні узагальненим ІВ-контракціям, справедлива така теорема [102].

Теорема 2.7. *Існує єдина контракція між чотиривимірними комплексними алгебрами Лі (а саме, $2\mathfrak{g}_{2.1}\to\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_{3.2}$), яку не можна реалізувати узагальненою ІВ-контракцією.*

Доведення. Доведемо теорему від супротивного. Припустимо, що контракцію $2\mathfrak{g}_{2.1}\to\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_{3.2}$ можна реалізувати узагальненою ІВ-контракцією. Почнемо з пошуку градуювань алгебри $\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_{3.2}$, пов'язаних з цією контракцією. Алгебру диференціювань алгебри $\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_{3.2}$ складають лінійних оператори на цій алгебрі, матриці яких у канонічному базисі мають вигляд [103]

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1^1 & 0 & 0 & \gamma_4^1 \\ 0 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 & \gamma_4^2 \\ 0 & 0 & \gamma_2^2 & \gamma_4^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де всі елементи матриці, окрім тотожно нульових, довільні. Тут і надалі верхній та нижній індекси елемента матриці позначають номери відповідних рядка та стовпчика. Отже, матрицю будь-якого діагоналізованого диференціювання алгебри $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$ заміною базису можна привести до вигляду

$$\mathrm{diag}(\beta, \alpha, \alpha, 0),$$

звідки також отримаємо всі можливі сигнатури $(\beta, \alpha, \alpha, 0)$ реалізації $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$ узагальненими IВ-контракціями. Інакше кажучи, кожне градуювання контракції $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$ допускає щонайбільше три ненульові компоненти, причому одна з них відповідає нульовому степеню.

Сигнатура $(\beta, \alpha, \alpha, 0)$ включає щонайменше два ненульові значення, оскільки в іншому випадку контракція $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$ була б еквівалентною звичайній IВ-контракції, що насправді не так [57]. Отже, контракція $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$ породжує лише градуювання з трьома ненульовими компонентами: L_β, L_α та L_0, для яких $0 \neq \alpha \neq \beta \neq 0$, $\dim L_\beta = \dim L_0 = 1$ та $\dim L_\alpha = 2$. Доведемо, що кожне таке градуювання $\tilde{\mathcal{G}}$ еквівалентне, з точністю до автоморфізма алгебри $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$, градуюванню $\mathcal{G}$ з $L_\beta = \langle e_1 \rangle$, $L_\alpha = \langle e_2, e_3 \rangle$ та $L_0 = \langle e_4 \rangle$.

Дійсно, нехай Γ — матриця (в канонічному базисі $\{e_i\}$) диференціювання, пов'язаного з градуюванням $\tilde{\mathcal{G}} = (\tilde{L}_\beta, \tilde{L}_\alpha, \tilde{L}_0)$. Тоді $\gamma_3^2 = 0$, оскільки матриця Γ діагоналізовна. Виберемо новий базис $\tilde{e}_i = e_j s_i^j$, де $\det(s_j^i) \neq 0$, таким чином, що $\tilde{L}_\beta = \langle \tilde{e}_1 \rangle$, $\tilde{L}_\alpha = \langle \tilde{e}_2, \tilde{e}_3 \rangle$ та $L_0 = \langle \tilde{e}_4 \rangle$. При такому виборі, матриця Γ набуває діагонального вигляду. Тому

$s_1^2 = s_1^3 = s_1^4 = 0$ та $s_2^1 = s_2^4 = s_3^1 = s_3^4 = 0$. Тоді розглядувану заміну базису можна представити у вигляді композиції заміни базисів градуйованих компонент

$$\hat{e}_1 = e_1 s_1^1, \quad \hat{e}_2 = e_2 s_2^2 + e_3 s_2^3, \quad \hat{e}_3 = e_2 s_3^2 + e_3 s_3^3, \quad \hat{e}_4 = e_4 s_4^4$$

з $s_1^1 s_4^4 (s_2^2 s_3^3 - s_2^3 s_3^2) \neq 0$, що не впливає суттєво на Γ, та автоморфізма

$$\tilde{e}_1 = \hat{e}_1, \quad \tilde{e}_2 = \hat{e}_2, \quad \tilde{e}_3 = \hat{e}_3, \quad \tilde{e}_4 = \hat{e}_4 + \hat{e}_1 \hat{s}_4^1 + \hat{e}_2 \hat{s}_4^2 + \hat{e}_3 \hat{s}_4^3,$$

який приводить до $\gamma_4^1 = \gamma_4^2 = \gamma_4^3 = 0$. (Тут коефіцієнти $\hat{s}_4^1$, $\hat{s}_4^2$ і $\hat{s}_4^3$ виражаються через s_j^i.) Це означає, що з точністю до автоморфізма можна вважати $\tilde{L}_\beta = L_\beta$, $\tilde{L}_\alpha = L_\alpha$, $\tilde{L}_0 = L_0$.

Матриці узагальнених IВ-контракцій алгебри $2\mathfrak{g}_{2.1}$ до алгебри $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$ мають загальний вигляд $U_\varepsilon = A W_\varepsilon P$, де A та P — сталі невироджені матриці, $W_\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon^\beta, \varepsilon^\alpha, \varepsilon^\alpha, 1)$. Оскільки P — матриця переходу між двома градуйованими базисами зі спільною сигнатурою $(\beta, \alpha, \alpha, 0)$, її можна записати у вигляді $P = P_{\mathrm{grad}} P_{\mathrm{aut}}$, де P_{grad} — матриця заміни базису у градуйованій компоненті, а P_{aut} — матриця автоморфізму алгебри $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$. Матриця P_{grad} комутує з W_ε, і матриця A поглинає її через перехід від A до $\tilde{A} = A P_{\mathrm{grad}}$. Матрицю P_{aut} можна ігнорувати, оскільки вона не впливає на комутаційні співвідношення контрактованої алгебри $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$. Отже, достатньо вивчити лише контрактовані матриці вигляду $U_\varepsilon = A W_\varepsilon$, вважаючи матрицю P одиничною. З точністю до масштабування автоморфізмами алгебри $2\mathfrak{g}_{2.1}$ надалі також можна вважати, що $\det A = 1$. Це припущення суттєво спрощує всі обчислення за рахунок спрощення виразів для елементів оберненої матриці A^{-1}.

Кожна перетворена структурна стала $(U_\varepsilon)_{i'}^i (U_\varepsilon)_{j'}^j ({U_\varepsilon}^{-1})_k^{k'} c_{ij}^k$ включає один степінь параметра контракції ε. Для степенів можливі лише значення з множини

$$\mathcal{E} = \{0,\ \alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta,\ \alpha-\beta,\ \beta-\alpha,\ 2\alpha,\ 2\alpha-\beta\}.$$

Розглянемо окремо два випадки $\alpha > \beta$ та $\beta > \alpha$. У кожному з випадків також припустимо, що α та β додатні. Більше того, в другому випадку також припустимо, що $2\alpha > \beta$. Системи алгебраїчних рівнянь на елементи матриці A, виведені за умов $\alpha > \beta > 0$ чи ($\beta > \alpha > 0$ та $2\alpha > \beta$), мінімальні. Відкидання додаткових припущень призводить до розширення мінімальних систем іншими алгебраїчними рівняннями. Покажемо, що мінімальні системи не мають розв'язків, а тому й усі розширені системи є несумісними. Отже, достатньо вивчити лише підвипадок $\alpha > \beta > 0$ та підвипадок ($\beta > \alpha > 0$ та $2\alpha > \beta$) першого та другого випадків відповідно. Параметри α та β впливають лише на граничний перехід $\varepsilon \to 0$ і не містяться явно у виведених алгебраїчних рівняннях. Нерівності, що виокремлюють підвипадки, повністю визначають граничні значення (або нуль, або нескінченність) зазначених ненульових експонент. Через це специфічні значення параметрів α та β не є суттєвими. Покладемо $\alpha = 2$ та $\beta = 1$ у першому підвипадку і $\alpha = 2$ та $\beta = 3$ — у другому.

Надалі $B = (b^i_j)$ позначає обернену матрицю A^{-1} до матриці A.

Для значень $\alpha = 2$ та $\beta = 1$ умови (2.13) на матрицю узагальненої IB-контракції дають рівняння

$$\begin{pmatrix} b^1_1 & b^1_3 \\ b^2_1 & b^2_3 \\ b^3_1 & b^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1_1a^2_4 - a^2_1a^1_4 \\ a^3_1a^4_4 - a^4_1a^3_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

$$\begin{pmatrix} b^2_1 & b^2_3 \\ b^3_1 & b^3_3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y^1_1 & y^1_2 \\ y^2_1 & y^2_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a^1_2a^2_4 - a^2_2a^1_4 & a^1_3a^2_4 - a^2_3a^1_4 \\ a^3_2a^4_4 - a^4_2a^3_4 & a^3_3a^4_4 - a^4_3a^3_4 \end{pmatrix}.$$

З системи (2.15) випливає, що $b^2_1b^3_3 - b^2_3b^3_1 \neq 0$, $\det Y \neq 0$, а тому $(a^1_4, a^2_4) \neq (0,0)$ та $(a^3_4, a^4_4) \neq (0,0)$. Тоді $a^1_1a^2_4 - a^2_1a^1_4 = 0$ та $a^3_1a^4_4 - a^4_1a^3_4 = 0$ з огляду на систему (2.14), тобто

$$\begin{pmatrix} a^1_1 \\ a^2_1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} a^1_4 \\ a^2_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a^3_1 \\ a^4_1 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} a^3_4 \\ a^4_4 \end{pmatrix}$$

для деяких μ, ν. Оскільки за таких умов маємо

$$\begin{pmatrix} b_1^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_3^3 \end{pmatrix} = (\nu-\mu) \begin{pmatrix} a_4^2 y_2^2 & -a_4^4 y_2^1 \\ -a_4^2 y_1^2 & a_4^4 y_1^1 \end{pmatrix},$$

то систему (2.15) можна переписати як

$$\begin{aligned} &(\nu-\mu)(a_4^2 y_1^1 y_2^2 - a_4^4 y_2^1 y_1^2) = 1, \quad (\nu-\mu)(a_4^4 - a_4^2) y_1^1 y_1^2 = 0, \\ &(\nu-\mu)(a_4^4 y_1^1 y_2^2 - a_4^2 y_2^1 y_1^2) = 1, \quad (\nu-\mu)(a_4^2 - a_4^4) y_2^1 y_2^2 = 1. \end{aligned}$$

Віднімання першого рівняння від третього дає рівняння

$$(\nu-\mu)(a_4^4 - a_4^2)(y_1^1 y_2^2 + y_2^1 y_1^2) = 0.$$

Оскільки $(\nu-\mu)(a_4^2 - a_4^4) \neq 0$ згідно з четвертим рівнянням, то система (2.15) очевидно призводить до несумісних умов $y_1^1 y_1^2 = 0$, $y_1^1 y_2^2 + y_2^1 y_1^2 = 0$ та $(y_1^1 y_2^2, y_2^1 y_1^2) \neq (0,0)$.

Отже, узагальнена IB-контракція $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$ не може мати сигнатури вигляду $(\beta, \alpha, \alpha, 0)$, де $\alpha > \beta$.

Для значень $\alpha = 2$ та $\beta = 3$, отримуємо рівності (2.15) та

$$(a_4^2 b_1^1,\ -a_4^1 b_1^1,\ a_4^4 b_3^1,\ -a_4^3 b_3^1) \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 \end{pmatrix} = (0,\ 0,\ 0). \tag{2.16}$$

Приєднаємо тотожність $a_4^1 a_4^2 b_1^1 - a_4^2 a_4^1 b_1^1 + a_4^3 a_4^4 b_3^1 - a_4^4 a_4^3 b_3^1 = 0$ до системи (2.16) у якості четвертого рівняння. Розширену систему можна записати у вигляді $(a_4^2 b_1^1, -a_4^1 b_1^1, a_4^4 b_3^1, -a_4^3 b_3^1)A = (0,0,0,0)$, і, домноживши на $B = A^{-1}$ справа, отримати наслідок $a_4^1 b_1^1 = a_4^2 b_1^1 = a_4^3 b_3^1 = a_4^4 b_3^1 = 0$. Нагадаємо, що $\det Y \neq 0$. Якщо $a_4^1 = a_4^2 = 0$ (відповідно $a_4^3 = a_4^4 = 0$), то $y_1^1 = y_2^1 = 0$ (відповідно $y_1^2 = y_2^2 = 0$), що суперечить умові $\det Y \neq 0$. Отже, $(a_4^1, a_4^2) \neq (0,0)$, $(a_4^3, a_4^4) \neq (0,0)$ і тому $b_1^1 = b_3^1 = 0$.

У термінах матриці A рівняння $b_1^1 = 0$ та $b_3^1 = 0$ означають, що мінори матриці A, які доповнюють a_1^1 та a_1^3, нульові. Тоді з невиродженості матриці A випливає, що трійки (a_2^2, a_3^2, a_4^2) та (a_2^4, a_3^4, a_4^4) пропорційні, і принаймні одна з них містить ненульові елементи. Інакше кажучи, існують числа μ та ν, де $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$, і ненульова трійка (d_2, d_3, d_4) такі, що $a_j^2 = \mu d_j$, $a_j^4 = \nu d_j$, $j = 2, 3, 4$. Позначивши

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1^1 & \tilde{y}_2^1 \\ \tilde{y}_1^2 & \tilde{y}_2^2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2^1 d_4 - d_2 a_4^1 & a_3^1 d_4 - d_3 a_4^1 \\ a_2^3 d_4 - d_2 a_4^3 & a_3^3 d_4 - d_3 a_4^3 \end{pmatrix},$$

отримаємо

$$\begin{pmatrix} b_1^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_3^3 \end{pmatrix} = (\mu a_1^4 - \nu a_1^2) \begin{pmatrix} \tilde{y}_2^2 & -\tilde{y}_2^1 \\ -\tilde{y}_1^2 & \tilde{y}_1^1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} \mu \tilde{y}_1^1 & \mu \tilde{y}_2^1 \\ \nu \tilde{y}_1^2 & \nu \tilde{y}_2^2 \end{pmatrix},$$

а матричне рівняння (2.15) набуває вигляду

$$(\mu a_1^4 - \nu a_1^2) \begin{pmatrix} \mu \tilde{y}_1^1 \tilde{y}_2^2 - \nu \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_2^1 & (\mu - \nu) \tilde{y}_2^2 \tilde{y}_2^1 \\ (\nu - \mu) \tilde{y}_1^1 \tilde{y}_1^2 & \nu \tilde{y}_1^1 \tilde{y}_2^2 - \mu \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо рівняння на $(1, 2)$-елементи та дві комбінації рівнянь на $(1, 1)$- та $(2, 2)$-елементи з коефіцієнтами $(\mu, -\nu)$ та $(\nu, -\mu)$:

$$\begin{aligned} &(\mu a_1^4 - \nu a_1^2)(\mu - \nu) \tilde{y}_2^2 \tilde{y}_2^1 = 1, \\ &(\mu a_1^4 - \nu a_1^2)(\mu^2 - \nu^2) \tilde{y}_1^1 \tilde{y}_2^2 = \mu - \nu, \\ &(\mu a_1^4 - \nu a_1^2)(\mu^2 - \nu^2) \tilde{y}_1^2 \tilde{y}_2^1 = \nu - \mu. \end{aligned}$$

Їх наслідками є нерівності $\mu a_1^4 - \nu a_1^2 \neq 0$, $\mu - \nu \neq 0$, $\tilde{y}_1^1 \neq 0$ та $\tilde{y}_1^2 \neq 0$, сукупність яких суперечить рівнянню $(\mu a_1^4 - \nu a_1^2)(\mu - \nu) \tilde{y}_1^1 \tilde{y}_1^2 = 0$ на $(2, 1)$-елементи. Отже, матриця U_ε узагальненої IВ-контракції $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$ не може мати сигнатуру вигляду $(\beta, \alpha, \alpha, 1)$ з $\alpha < \beta$.

Оскільки припущення існування узагальненої IВ-контракції алгебри $2\mathfrak{g}_{2.1}$ до алгебри $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$ призводить до суперечності для всіх потенційно можливих сигнатур, то це припущення невірне, що завершує доведення з огляду на результати з [41, 80]. $\square$

Обговоримо основні моменти доведення теореми 2.7 у контексті загального алгоритму доведення неіснування узагальнених IВ-контракцій.

1. Усі необхідні критерії існування контракцій загального вигляду [37, 39, 80] не працюють для узагальнених ІВ-контракцій, оскільки відомо, що контракція існує, і необхідні критерії вочевидь задовільнено. Необхідно визначити, чи можна реалізувати контракцію спеціальним чином, а це потребує інших інструментів.

2. Є простий критерій, що контракція не еквівалентна узагальненій ІВ-контракції, якщо контрактована алгебра має лише невласні градуювання. На відміну від контракцій до характеристично нільпотентних алгебр Лі, цей критерій не можна застосувати до алгебри $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$, оскільки вона має нетривіальні діагональні диференціювання, а отже і власні градуювання.

3. У канонічному базисі алгебра $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$ має двовимірну алгебру діагональних диференціювань. Отже, треба розглянути цілий список градуювань контрактованої алгебри. Вивчення градуювань потрібне для знаходження можливих значень степенів параметра, а також для розуміння структури сталих компонент матриць контракції. Структура диференціювань алгебри $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$ показує, що допустимі лише сигнатури вигляду $(\beta, \alpha, \alpha, 0)$.

4. Подальші обмеження на степені параметра випливають з відсутності звичайних ІВ-контракції алгебри $2\mathfrak{g}_{2.1}$ до алгебри $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$. З точністю до додатних множників, будь-яка сигнатура, що відповідає звичайній ІВ-контракції, складається з нулів та одиниць. Звідси отримаємо умову $0 \neq \alpha \neq \beta \neq 0$.

5. Матрицю P з представлення матриці контракції $U_\varepsilon = AW_\varepsilon P$ визначено з точністю до заміни базисів всередині градуйованих компонент і до автоморфізмів контрактованої алгебри. Оскільки у контракції з теореми матриця P необхідно визначає ізоморфізм градуювань, можна вважати P рівною одиничній матриці.

6. Значною частиною випадків для степенів параметра можна нехтувати, оскільки відповідні системи рівнянь на елементи матриці A є

розширеннями систем для інших випадків, і їх несумісність безпосередньо випливає з несумісності для інших випадків.

7. За допомогою масштабування базисних елементів автоморфізмами контрактованої (або початкової) алгебри можна покласти $\det A = 1$ для спрощення вигляду елементів оберненої матриці A^{-1}.
8. Розглянуто кожний набір степенів параметра, для якого відповідна система алгебраїчних рівнянь на елементи матриці A мінімальна. Цю нелінійну систему записано в спеціальному вигляді, який дає змогу застосувати методи розв'язання *лінійних* систем алгебраїчних рівнянь. Зокрема, явні вирази елементів оберненої матриці $B = A^{-1}$ через елементи матриці A використано лише на останніх кроках доведення.

Аналогічні прийоми лежать в основі доведення в наступних підрозділах 2.3.2 та 2.3.3 того факту, що сигнатури узагальнених IВ-контракцій $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_{4.1}$ та $\mathrm{so}(3) \oplus \mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_{4.1}$ з невід'ємними цілими степенями параметра обов'язково мають компоненти не менші ніж три.

Зауваження 2.8. Останній етап доведення теореми 2.7, пов'язаний з неіснуванням матриці A, можна перевірити за допомогою підходу на основі системи (2.12) з використанням систем символьних обчислень.

Аналогічно доведенню розглянемо окремо випадки $\alpha > \beta$ та $\beta > \alpha$.

Так, у випадку $\alpha > \beta$ два степеня, 0 та $\beta - \alpha$, обов'язково недодатні. Покладемо $x_{ij}^k = c_{0,ij}^k$ для відповідних значень i, j та k. Якщо також α та β додатні, то більше недодатних елементів у $\mathcal{E}$ немає, а отже, немає й інших обмежень на x_{ij}^k цього типу. Інакше кажучи, система (2.12) рівнянь на x_{ij}^k та a_j^i, асоційована з умовою $\alpha > \beta > 0$, є мінімальною (тобто є підсистемою) серед усіх таких систем для випадку $\alpha > \beta$. Більше того, будь-яка така система не залежить від параметрів α та β. Тому покладемо, наприклад, $\alpha = 2$ та $\beta = 1$ для зручності при символьних обчисленнях. Отримана система

$$a_4^1 x_{41}^4 = a_4^1 a_1^2 - a_4^2 a_1^1, \quad a_1^1 x_{42}^1 - a_2^1 + a_4^1 x_{42}^4 = a_4^1 a_2^2 - a_4^2 a_2^1,$$

$$
\begin{aligned}
&a^2_4x^4_{41}=0, && a^2_1x^1_{42}-a^2_2+a^2_4x^4_{42}=0,\\
&a^3_4x^4_{41}=a^3_4a^4_1-a^4_4a^3_1, && a^3_1x^1_{42}-a^3_2+a^3_4x^4_{42}=a^3_4a^4_2-a^4_4a^3_2,\\
&a^4_4x^4_{41}=0, && a^4_1x^1_{42}-a^4_2+a^4_4x^4_{42}=0,\\
&a^1_1x^1_{43}-a^1_2-a^1_3+a^1_4x^4_{43}=a^1_4a^2_3-a^2_4a^1_3,\\
&a^2_1x^1_{43}-a^2_2-a^2_3+a^2_4x^4_{43}=0,\\
&a^3_1x^1_{43}-a^3_2-a^3_3+a^3_4x^4_{43}=a^3_4a^4_3-a^4_4a^3_3,\\
&a^4_1x^1_{43}-a^4_2-a^4_3+a^4_4x^4_{43}=0
\end{aligned}
$$

не має розв'язків з $\det(a^i_j)\neq 0$, що можна легко перевірити за допомогою системи символьних обчислень `Maple`.

Випадок $\beta>\alpha$ розглянемо аналогічно. Множина $\mathcal{E}$ обов'язково містить два недодатні елементи, 0 та $\alpha-\beta$, і за додаткових умов $\beta>\alpha>0$ та $2\alpha>\beta$ лише ці два елементи є недодатними в $\mathcal{E}$. Отже, система рівнянь на x^k_{ij} і a^i_j, асоційована з підвипадком з додатковими нерівностями $\beta>\alpha>0$ і $2\alpha>\beta$, є мінімальною (тобто є підсистемою) поміж усіх таких систем для випадку $\beta>\alpha$. Конкретні значення параметрів α та β знову несуттєві як такі, що не зустрічаються в системі. Отже, можна покласти, наприклад, $\alpha=2$ та $\beta=3$ для зручності при символьних обчисленнях. Тут також можна перевірити за допомогою `Maple`, що отримана в цьому випадку система

$$
\begin{aligned}
&a^1_2x^2_{41}+a^1_3x^3_{41}+a^1_4x^4_{41}=a^1_4a^2_1-a^2_4a^1_1, && -a^1_2+a^1_4x^4_{42}=a^1_4a^2_2-a^2_4a^1_2,\\
&a^2_2x^2_{41}+a^2_3x^3_{41}+a^2_4x^4_{41}=0, && -a^2_2+a^2_4x^4_{42}=0,\\
&a^3_2x^2_{41}+a^3_3x^3_{41}+a^3_4x^4_{41}=a^3_4a^4_1-a^4_4a^3_1, && -a^3_2+a^3_4x^4_{42}=a^3_4a^4_2-a^4_4a^3_2,\\
&a^4_2x^2_{41}+a^4_3x^3_{41}+a^4_4x^4_{41}=0, && -a^4_2+a^4_4x^4_{42}=0,\\
&-a^1_2-a^1_3+a^1_4x^4_{43}=a^1_4a^2_3-a^2_4a^1_3,\\
&-a^2_2-a^2_3+a^2_4x^4_{43}=0,\\
&-a^3_2-a^3_3+a^3_4x^4_{43}=a^3_4a^4_3-a^4_4a^3_3,\\
&-a^4_2-a^4_3+a^4_4x^4_{43}=0
\end{aligned}
$$

не має розв'язків з $\det(a^i_j)\neq 0$.

Наслідок 2.9. *Існують рівно дві контракції між дійсними чотиривимірними алгебрами Лі, а саме,* $2\mathrm{A}_{2.1} \to \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_{3.2}$ *та* $\mathrm{A}_{4.10} \to \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_{3.2}$, *які не можна реалізувати узагальненими IВ-контракціями.*

Доведення. Базове поле (дійсних чи комплексних чисел) не є суттєвим для доведення. Отже, твердження стосовно контракцій між алгебрами $2\mathfrak{g}_{2.1}$ та $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$ можна переформулювати для контракції між їх дійсними аналогами $2\mathrm{A}_{2.1}$ та $\mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_{3.2}$. Більше того, якби контракцію $\mathrm{A}_{4.10} \to \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_{3.2}$ можна було б реалізувати узагальненою IВ-контракцією над полем $\mathbb{R}$, то таке саме твердження виконувалося б над полем $\mathbb{C}$ для її комплексифікації, яка еквівалентна контракції $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$. Це суперечить доведеному неіснуванню узагальненої IВ-контракції між $2\mathfrak{g}_{2.1}$ та $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$. □

2.3.2. Узагальнені IВ-контракції з $2\mathfrak{g}_{2.1}$ до $\mathfrak{g}_{4.1}$.

Як і при вивченні контракції $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$, почнемо з розгляду градуювань контрактованої алгебри. Алгебру диференціювань алгебри $\mathfrak{g}_{4.1}$ складають лінійні оператори, матриці яких у канонічному базисі мають вигляд [103]

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_3^3 + 2\gamma_4^4 & \gamma_3^2 & \gamma_3^1 & \gamma_4^1 \\ 0 & \gamma_3^3 + \gamma_4^4 & \gamma_3^2 & \gamma_4^2 \\ 0 & 0 & \gamma_3^3 & \gamma_4^3 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_4^4 \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

де всі елементи матриці, окрім тотожно нульових, довільні. Будь-яку діагоналізовну матрицю вигляду (2.17) можна привести за допомогою відповідної заміни базису до вигляду $\mathrm{diag}(\alpha + 2\beta, \alpha + \beta, \alpha, \beta)$, де $\alpha = \gamma_3^3$ та $\beta = \gamma_4^4$. Контракція $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_{4.1}$ не еквівалентна простій IВ-контракції [57]. Отже, четвірка чисел з $\alpha = 1$ та $\beta = 0$ не може бути сигнатурою цієї контракції. Вивчимо інші четвірки, що відповідають мінімальним невід'ємним цілим значенням α та β, а саме, четвірки $(4,3,2,1)$, $(3,2,1,1)$, $(2,1,0,1)$.

Перші дві четвірки є сигнатурами узагальнених IB-контракцій алгебри $2\mathfrak{g}_{2.1}$ до алгебри $\mathfrak{g}_{4.1}$. Для них з самого початку обмежимося пошуком матриць контракції у вигляді (2.1) з матрицею P рівною одиничній та $\det A = 1$.

Четвірка $(4,3,2,1)$ призводить до системи, яку утворюють лише три рівняння на елементи матриці A:

$$\begin{pmatrix} b^1_1 & b^1_3 \\ b^2_1 & b^2_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1_3 a^2_4 - a^2_3 a^1_4 \\ a^3_3 a^4_4 - a^4_3 a^3_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

$$(a^1_2 a^2_4 - a^2_2 a^1_4) b^1_1 + (a^3_2 a^4_4 - a^4_2 a^3_4) b^1_3 = 1. \tag{2.19}$$

Нагадаємо, що $(b^i_j) = A^{-1}$. Частинний розв'язок системи (2.18)–(2.19) було знайдено у [41].

Для степенів параметра $(3,2,1,1)$ система (2.18)–(2.19) доповнюється рівнянням

$$(a^1_2 a^2_3 - a^2_2 a^1_3) b^1_1 + (a^3_2 a^4_3 - a^4_2 a^3_3) b^1_3 = 0. \tag{2.20}$$

Матриця A, що задовольняє усі рівняння (2.18)–(2.20), підходить для узагальнених IB-контракцій алгебри $2\mathfrak{g}_{2.1}$ до алгебри $\mathfrak{g}_{4.1}$ як з сигнатурою $(4,3,2,1)$, так і з $(3,2,1,1)$. Знайдемо роз'язок системи (2.18)–(2.20) за обмеження $\det A = 1$. Оскільки система (2.18)–(2.20) недовизначена, виберемо прості значення для більшості змінних a^i_j не порушуючи сумісності рівнянь, що не задовільнені завдяки цьому. З (2.18) та (2.19) випливає, що $(b^1_1, b^1_3) \neq (0,0)$ та $(b^2_1, b^2_3) \neq (0,0)$. Якби вираз $b^1_1 b^2_3 - b^1_3 b^2_1$ дорівнював нулю, то $(b^1_1, b^1_3) = \mu(b^2_1, b^2_3)$ для деякого $\mu \neq 0$ і рівняння (2.18) мало б суперечливий наслідок $\mu = 0$. Отже, з тотожності Якобі для доповняльних мінорів взаємнообернених матриць [65] випливає, що

$$b^1_1 b^2_3 - b^1_3 b^2_1 = -(a^2_3 a^4_4 - a^2_4 a^4_3) \neq 0.$$

Покладемо $a^2_3 = a^4_3 = a^4_4 = 1$ та $a^2_4 = 0$. Тоді з точністю до перетворень базису з $\mathrm{Aut}(2\mathfrak{g}_{2.1})$ можна вважати $a^1_2 = a^3_3 = 0$. Після підстановки фіксованих значень a, з системи (2.18)–(2.20) отримаємо, зокрема,

$a^1_2a^3_4 - a^1_4a^3_2 = 0$ та $a^1_1a^3_4 - a^1_4a^3_1 = 1$. Для простоти також покладемо $a^1_4 = a^3_4 = a^1_1 = 1$ та $a^2_1 = a^4_1 = a^1_2 = a^2_2 = 0$. Решту елементів матриці A легко знайти. В результаті отримаємо розв'язок

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Цю матрицю позначено в підрозділі 2.3.4 як I_{31}.) Матриця $U_\varepsilon = A\,\mathrm{diag}(\varepsilon^3, \varepsilon^2, \varepsilon, \varepsilon)$ реалізує узагальнену IВ-контракцію $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_{4.1}$ та є простішою за знайдену в [41] як за сигнатурою, $(3, 2, 1, 1)$ замість $(4, 3, 2, 1)$,[2.4] так і за сталою частиною A.

Доведемо від супротивного, що четвірка $(2, 1, 0, 1)$ не може бути сигнатурою узагальненої IВ-контракції $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_{4.1}$.

Дійсно, припустимо, що існує узагальнена IВ-контракція $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_{4.1}$ з сигнатурою $(2, 1, 0, 1)$. Це означає, що для деяких невироджених сталих матриць A та P добуток $U_\varepsilon = A\,\mathrm{diag}(\varepsilon^2, \varepsilon, 1, \varepsilon)P$ є матрицею контракції $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_{4.1}$. Алгебра Лі, отримана контракцією алгебри $2\mathfrak{g}_{2.1}$ з матрицею $A\,\mathrm{diag}(\varepsilon^2, \varepsilon, 1, \varepsilon)$, має диференціювання з матрицею $\mathrm{diag}(2, 1, 0, 1)$, яка під дією матриці P переходить у матрицю Γ вигляду (2.17), де $\gamma_{33} = 0$ та $\gamma_{44} = 1$. Отже, матриці P та Γ задовольняють рівняння $\mathrm{diag}(2, 1, 0, 1)P = P\Gamma$, з чого випливає умова діагоналізовності $\gamma^1_2\gamma^3_4 + \gamma^2_4 = 0$ для Γ та представлення $P = P_{\mathrm{grad}}P_{\mathrm{aut}}$, де

$$P_{\mathrm{grad}} = \begin{pmatrix} p^1_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^2_2 & 0 & p^2_4 \\ 0 & 0 & p^3_3 & 0 \\ 0 & p^4_2 & 0 & p^4_4 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad P_{\mathrm{aut}} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma^1_2 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ 0 & 1 & \gamma^1_2 & -\gamma^1_2\gamma^3_4 \\ 0 & 0 & 1 & -\gamma^3_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

є матрицями заміни базису в градуйованих компонентах та автоморфізму алгебри $\mathfrak{g}_{4.1}$ у канонічному базисі відповідно, $\sigma_1 = \frac{1}{2}\big(\gamma^1_3 + (\gamma^1_2)^2\big)$ та

[2.4] Вперше на можливість пониження сигнатури узагальненої IВ-контракції $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_{4.1}$ з [41] вказала М.О. Нестеренко [10].

$\sigma_2 = \gamma_4^1 + \frac{1}{2}\gamma_4^3\big(\gamma_3^1 - (\gamma_2^1)^2\big)$. Узявши до уваги зазначене представлення для P, можна вважати P рівним одиничній матриці та розглядати лише матриці контракцій вигляду $U_\varepsilon = AW_\varepsilon$.

На противагу двом попереднім сигнатурам, умови на матриці узагальнених ІВ-контракцій з сигнатурою $(2,1,0,1)$ призводять до значно більшої системи з восьми рівнянь. Їх можна записати у вигляді

$$(a_3^2b_1^1,\ -a_3^1b_1^1,\ a_3^4b_3^1,\ -a_3^3b_3^1)\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_4^4 \end{pmatrix} = (0,\ 0,\ 0), \tag{2.21}$$

$$\begin{pmatrix} b_1^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_3^2 \\ b_1^4 & b_3^4 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_1^1 & z_2^1 \\ z_1^2 & z_2^2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2^1a_3^2 - a_2^2a_3^1 & a_3^1a_4^2 - a_3^2a_4^1 \\ a_2^3a_3^4 - a_2^4a_3^3 & a_3^3a_4^4 - a_3^4a_4^3 \end{pmatrix}.$$

$$(a_2^1a_4^2 - a_2^2a_4^1)b_1^1 + (a_2^3a_4^4 - a_2^4a_4^3)b_3^1 = 1. \tag{2.23}$$

Для зручності одну пару рівнянь включено як у (2.21), так і в (2.22).

З рівнянь (2.22) та (2.23) отримаємо, що $z_1^1 = z_1^2 = 0$. Дійсно, в іншому разі з огляду на (2.22) для деяких d^1, d^2, d^4 виконувалося би

$$\begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_1^2 \\ b_1^4 \end{pmatrix} = -z_1^2\begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_3^1 \\ b_3^2 \\ b_3^4 \end{pmatrix} = z_1^1\begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^4 \end{pmatrix},$$

$$(z_1^1z_2^2 - z_2^1z_1^2)\begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тобто $z_1^1z_2^2 - z_2^1z_1^2 \neq 0$, $d_1 = d_4 = 0$, і через це $b_1^1 = b_3^1 = 0$, що суперечить рівнянню (2.23).

Приєднаємо тотожність $a_3^1a_3^2b_1^1 - a_3^2a_3^1b_1^1 + a_3^3a_3^4b_3^1 - a_3^4a_3^3b_3^1 = 0$ до системи (2.21) в якості четвертого рівняння. Після перестановки рівнянь розширену систему можна записати у вигляді

$$(a_3^2b_1^1, -a_3^1b_1^1, a_3^4b_3^1, -a_3^3b_3^1)A = (0,0,0,0).$$

Оскільки $\det A \neq 0$, отримаємо $a_3^1b_1^1 = a_3^2b_1^1 = a_3^3b_3^1 = a_3^4b_3^1 = 0$, а тому $b_1^1b_3^1 = 0$ з огляду на $(a_3^1, a_3^2, a_3^3, a_3^4)^\mathsf{T} \neq (0,0,0,0)^\mathsf{T}$. З рівняння (2.23) випливає, що $(b_1^1, b_3^1) \neq (0,0)$. Тому для значень (b_1^1, b_3^1) є два випадки, а саме

$$b_1^1 \neq 0,\ b_3^1 = 0 \quad \text{та} \quad b_1^1 = 0,\ b_3^1 \neq 0.$$

Достатньо вивчити перший випадок. Розгляд другого аналогічний.

Якщо $b_1^1 \neq 0$ та $b_3^1 = 0$, то $a_3^1 = a_3^2 = 0$, а тому $z_2^1 = 0$, $b_3^2z_2^2 = 1$, $b_3^4z_2^2 = 0$. Це дає умови $b_3^2 \neq 0$, $z_2^2 \neq 0$ та $b_3^4 = 0$. У термінах матриці A, занулення елементів b_3^1 та b_3^4 означає, що трійки (a_2^1, a_2^2, a_2^4) та (a_3^1, a_3^2, a_3^4) пропорційні. Тоді $(a_2^1, a_2^2) \neq (0,0)$ та $a_3^4 = 0$, з огляду на $a_3^1 = a_3^2 = 0$ та $\det A \neq 0$. Оскільки $a_3^1 = a_3^2 = a_3^4 = 0$, отримаємо рівність $b_3^2 = 0$, що суперечить нерівності $b_3^2 \neq 0$.

У результаті, можна бачити, що четвірка $(3,2,1,1)$ — сигнатура узагальненої IB-контракції $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_{4.1}$ з мінімальними невід'ємними цілими степенями.

Доведення мінімальності залишається в силі при розгляді над полем дійсних (замість комплексних) чисел. Отже, твердження про контракцію алгебри $2\mathfrak{g}_{2.1}$ до алгебри $\mathfrak{g}_{4.1}$ можна переписати для контракції між їх дійсними аналогами $2\mathrm{A}_{2.1}$ та $\mathrm{A}_{4.1}$. Більше того, відомо [41], що контракцію $\mathrm{A}_{4.10} \to \mathrm{A}_{4.1}$ реалізує узагальнена IB-контракція з сигнатурою $(3,2,1,1)$. Якби ця контракція мала сигнатуру з степенями, обмеженими набором $\{0,1,2\}$ над полем $\mathbb{R}$, це поширювалося б на її комплексифікацію, еквівалентну контракції $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_{4.1}$, і суперечило б мінімальності сигнатури $(3,2,1,1)$ у комплексному випадку. Отже, для обох контракцій $2\mathrm{A}_{2.1} \to \mathrm{A}_{4.1}$ та $\mathrm{A}_{4.10} \to \mathrm{A}_{4.1}$ четвірка $(3,2,1,1)$ є мінімальною сигнатурою.

2.3.3. Узагальнені ІВ-контракції з so(3)$\oplus$A$_1$ до A$_{4.1}$. У статті [80] контракцію $\mathrm{so}(3) \oplus \mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_{4.1}$ реалізовано узагальненою ІВ-контракцією з сигнатурою $(3, 2, 1, 1)$. Покажемо, що ця сигнатура мінімальна в тому сенсі, що жодна четвірка чисел з набору $\{0, 1, 2\}$ не може бути сигнатурою узагальненої ІВ-контракції алгебри $\mathrm{so}(3) \oplus \mathrm{A}_1$ до алгебри $\mathrm{A}_{4.1}$. Зауважимо, що комплексифікація контракції $\mathrm{so}(3) \oplus \mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_{4.1}$ еквівалентна контракції $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_{4.1}$, а тому її сигнатура — $(1, 1, 1, 0)$, тобто це звичайна ІВ-контракція. Отже, на відміну від контракцій з попереднього підрозділу 2.3.2, для контракції $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_{4.1}$ базове поле є суттєвим і доведення не можна провести над полем комплексних чисел.

Оскільки контрактована алгебра $\mathrm{A}_{4.1}$ та сама, що й у попередньому підрозділі, і контракція не еквівалентна звичайній ІВ-контракції [57], можна використати результати і позначення з попереднього розділу. Отже, достатньо перевірити лише четвірку $(2, 1, 0, 1)$ і, не втрачаючи загальності, можна вважати P одиничною матрицею.

Припустимо, що *існує* узагальнена ІВ-контракція $\mathrm{so}(3) \oplus \mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_{4.1}$ з сигнатурою $(2, 1, 0, 1)$ і матрицею $U_\varepsilon = AW_\varepsilon$. З умов існування контракції випливає, зокрема, така система алгебраїчних рівнянь на елементи матриці A:

$$\begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^4 & b_2^4 & b_3^4 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{де} \quad B = (b_j^i) = A^{-1} \quad \text{та}$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_1^1 & z_2^1 \\ z_1^2 & z_2^2 \\ z_1^3 & z_2^3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2^2 a_3^3 - a_2^3 a_3^2 & a_3^2 a_4^3 - a_3^3 a_4^2 \\ a_2^3 a_3^1 - a_2^1 a_3^3 & a_3^3 a_4^1 - a_3^1 a_4^3 \\ a_2^1 a_3^2 - a_2^2 a_3^1 & a_3^1 a_4^2 - a_3^2 a_4^1 \end{pmatrix}.$$

Доповнимо систему тотожними “віртуальними” рівняннями:

$$B \begin{pmatrix} z_1^1 & z_2^1 \\ z_1^2 & z_2^2 \\ z_1^3 & z_2^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ t_1 & t_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{тобто} \quad \bar{Z} := \begin{pmatrix} z_1^1 & z_2^1 \\ z_1^2 & z_2^2 \\ z_1^3 & z_2^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ t_1 & t_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де t_1 та t_2 — деякі нові невідомі. З рівності перших стовпчиків лівої та правої сторін у останньому матричному рівнянні випливає, що перший і третій стовпчики відповідно матриць $\bar{Z}$ і A пропорційні. Водночас вони ортогональні відносно звичайного скалярного добутку за означенням матриці $\bar{Z}$ (тут і надалі важливо, що базове поле є полем дійсних чисел), а всі стовпчики матриці A ненульові з огляду на її невиродженість. Отже, $z_1^1 = z_1^2 = z_1^3 = 0$, тобто набори (a_2^1, a_2^2, a_2^3) та (a_3^1, a_3^2, a_3^3) пропорційні. Тоді з рівності других стовпчиків лівої та правої сторін у тому ж матричному рівнянні випливає, що набори $(z_2^1, z_2^2, z_2^3, 0)$ і $(a_3^1, a_3^2, a_3^3, 0)$ пропорційні, хоча за означенням матриці $\bar{Z}$ вони ортогональні відносно звичайного скалярного добутку і, крім того, перший набір нульовий, якщо другий є таким. Звідси $z_2^1 = z_2^2 = z_2^3 = 0$, а тому другий та третій стовпчики матриці A пропорційні. Це суперечить невиродженості матриці A.

2.3.4. Оптимізований опис контракцій чотиривимірних алгебр Лі. Комбінуючи зазначені результати з результатами з [80, 41], див. також приклад 1.21, отримаємо такі теореми.

Теорема 2.10. *Будь-яку контракцію між чотиривимірними комплексними (відповідно дійсними) алгебрами Лі за винятком контракцій* $2\mathrm{A}_{2.1} \to \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_{3.2}$, $\mathrm{A}_{4.10} \to \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_{3.2}$ *та* $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$ *для дійсного та комплексного випадків відповідно, можна реалізувати як узагальнену IВ-контракцію. Усі винятки можна реалізувати як контракції Салетана.*

Інакше кажучи, об'єднання узагальнених IВ-контракцій і контракцій Салетана є універсальним для чотиривимірних алгебр Лі.

Теорема 2.11. *Будь-яка узагальнена IВ-контракція між чотиривимірними комплексними (відповідно дійсними) алгебрами Лі еквівалентна узагальненій IВ-контракції з показниками степенів параметра з множини* $\{0, 1, 2, 3\}$*. Показників з* $\{0, 1, 2\}$ *достатньо для всіх таких контракцій, за винятком* $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_{4.1}$ *у комплексному випадку та*

$2\mathrm{A}_{2.1} \to \mathrm{A}_{4.1}$, $\mathrm{A}_{4.10} \to \mathrm{A}_{4.1}$, $\mathrm{so}(3) \oplus \mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_{4.1}$ *у дійсному випадку, де мінімальним набором показників є* $(3,2,1,1)$.

Використовуючи власні програми в системі символьних обчислень `Maple` на основі запропонованих алгоритмів пошуку узагальнених IW-контракцій і контракцій Салетана, переобчислено всі реалізації контракцій між чотиривимірними комплексними або дійсними алгебрами Лі з [41, 80]. За рахунок більшої ефективності та гнучкості цих алгоритмів порівняно з попередніми, виправлено помилки в кількох реалізаціях, а більшу кількість реалізацій оптимізовано через зменшення сигнатур або спрощення сталих частин I_j матриць контракцій. Наведемо оптимізований список власних і нетривіальних контракцій чотиривимірних дійсних алгебр Лі та відповідну діаграму Хассе (рис. 2.2); для кожної простої IW-контракції додатково вказано асоційовану підалгебру вихідної алгебри.

$$\mathrm{A}_{2.1} \oplus 2\mathrm{A}_1\colon \quad \xrightarrow{I_{30}W(1,1,0,0)} \mathrm{A}_{3.1} \oplus \mathrm{A}_1, \quad \langle e_3 - e_1, e_4 \rangle.$$

$$\begin{aligned}
2\mathrm{A}_{2.1}\colon \quad & \xrightarrow{W(0,0,0,1)} \mathrm{A}_{2.1} \oplus 2\mathrm{A}_1,\ \langle e_1, e_2, e_3 \rangle; \\
& \xrightarrow{I_1W(1,1,0,1)} \mathrm{A}_{3.1} \oplus \mathrm{A}_1,\ \langle e_1 + e_3 \rangle; \quad \xrightarrow{S_1} \mathrm{A}_{3.2} \oplus \mathrm{A}_1; \\
& \xrightarrow{I^1_{27}W(0,0,0,1)} \mathrm{A}_{3.3} \oplus \mathrm{A}_1,\ \langle e_1, e_3, e_2 + e_4 \rangle; \\
& \xrightarrow{I^a_{27}W(0,0,0,1)} \mathrm{A}^a_{3.4} \oplus \mathrm{A}_1,\ \langle e_1, e_3, e_2 + ae_4 \rangle; \\
& \xrightarrow{I_{31}W(3,2,1,1)} \mathrm{A}_{4.1}; \quad \xrightarrow{I_{28}W(0,1,1,0)} \mathrm{A}_{4.3},\ \langle e_1, e_2 + e_3 \rangle; \\
& \xrightarrow{I_3W(1,0,1,0)} \mathrm{A}^0_{4.8},\ \langle e_1 + e_3, e_2 + e_4 \rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{3.2} \oplus \mathrm{A}_1\colon \quad & \xrightarrow{W(1,0,1,0)} \mathrm{A}_{3.1} \oplus \mathrm{A}_1,\ \langle e_2, e_4 \rangle; \\
& \xrightarrow{W(0,1,0,0)} \mathrm{A}_{3.3} \oplus \mathrm{A}_1,\ \langle e_1, e_3, e_4 \rangle; \quad \xrightarrow{I_{29}W(2,1,0,1)} \mathrm{A}_{4.1}.
\end{aligned}$$

$$\mathrm{A}_{3.3} \oplus \mathrm{A}_1\colon \quad \xrightarrow{I_4W(1,0,1,0)} \mathrm{A}_{3.1} \oplus \mathrm{A}_1,\ \langle e_2, e_1 + e_4 \rangle.$$

$$\mathrm{A}^a_{3.4} \oplus \mathrm{A}_1\colon \quad \xrightarrow{I_4W(1,0,1,0)} \mathrm{A}_{3.1} \oplus \mathrm{A}_1,\ \langle e_2, e_1 + e_4 \rangle; \quad \xrightarrow{I_6W(2,1,0,1)} \mathrm{A}_{4.1}.$$

$$\mathrm{A}^b_{3.5}\oplus\mathrm{A}_1\colon\quad \xrightarrow{W(1,0,1,0)} \mathrm{A}_{3.1}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_2,e_4\rangle;\quad \xrightarrow{I_9W(2,1,0,1)} \mathrm{A}_{4.1}.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathrm{A}_1\colon\quad &\xrightarrow{I_8W(1,1,0,0)} \mathrm{A}_{3.1}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_3,e_4\rangle;\\ &\xrightarrow{I_7W(1,0,0,0)} \mathrm{A}^{-1}_{3.4}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_2,e_3,e_4\rangle;\\ &\xrightarrow{I_{10}W(1,1,0,0)} \mathrm{A}^0_{3.5}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_1+e_3,e_4\rangle;\\ &\xrightarrow{I_{23}W(1,1,1,0)} \mathrm{A}_{4.1},\ \langle e_1+e_4\rangle;\\ &\xrightarrow{I_{19}W(1,0,1,0)} \mathrm{A}^{-1}_{4.8},\ \langle e_1,e_2+e_4\rangle;\quad \xrightarrow{I_{22}W(2,1,1,0)} \mathrm{A}^0_{4.9}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{so}(3)\oplus\mathrm{A}_1\colon\quad &\xrightarrow{W(2,1,1,0)} \mathrm{A}_{3.1}\oplus\mathrm{A}_1;\quad \xrightarrow{W(1,1,0,0)} \mathrm{A}^0_{3.5}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_3,e_4\rangle;\\ &\xrightarrow{I_5W(3,2,1,1)} \mathrm{A}_{4.1};\qquad \xrightarrow{I_{11}W(2,1,1,0)} \mathrm{A}^0_{4.9}.\end{aligned}$$

$$\mathrm{A}_{4.1}\colon\quad \xrightarrow{I^0_{13}W(0,0,0,1)} \mathrm{A}_{3.1}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_1,e_2,e_4\rangle.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{A}^b_{4.2}\colon\quad &\xrightarrow{I_{14}W(1,0,1,0)} \mathrm{A}_{3.1}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_1,e_3\rangle;\quad \xrightarrow{b\neq1,\ I_{15}W(2,1,0,1)} \mathrm{A}_{4.1};\\ &\xrightarrow{W(1,0,1,0)} \mathrm{A}^{b,1,1}_{4.5},\ \langle e_2,e_4\rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{4.3}\colon\quad &\xrightarrow{I_{16}W(0,0,1,0)} \mathrm{A}_{2.1}\oplus2\mathrm{A}_1,\ \langle e_1,e_2,e_4\rangle;\\ &\xrightarrow{I_{14}W(1,0,1,0)} \mathrm{A}_{3.1}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_1,e_3\rangle;\quad \xrightarrow{I_{17}W(2,1,0,1)} \mathrm{A}_{4.1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{4.4}\colon\quad &\xrightarrow{I^0_{13}W(1,0,1,1)} \mathrm{A}_{3.1}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_2\rangle;\quad \xrightarrow{W(2,1,0,1)} \mathrm{A}_{4.1};\\ &\xrightarrow{W(0,1,1,0)} \mathrm{A}^1_{4.2},\ \langle e_1,e_4\rangle;\quad \xrightarrow{W(0,1,2,0)} \mathrm{A}^{111}_{4.5}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{A}^{ab1}_{4.5}\colon\quad &\xrightarrow{a\neq1,\ I_{18}W(1,0,1,0)} \mathrm{A}_{3.1}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_1+e_2,e_3\rangle;\\ &\xrightarrow{1\neq a\neq b\neq1,\ I_{12}W(2,1,0,1)} \mathrm{A}_{4.1}.\end{aligned}$$

$$\mathrm{A}^{ab}_{4.6}\colon\quad \xrightarrow{I_{14}W(1,0,1,0)} \mathrm{A}_{3.1}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_1,e_3\rangle;\quad \xrightarrow{I_{21}W(2,1,0,1)} \mathrm{A}_{4.1}.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{4.7}\colon\quad &\xrightarrow{I_{14}W(1,0,1,0)} \mathrm{A}_{3.1}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_1,e_3\rangle;\quad \xrightarrow{I_{20}W(1,1,1,0)} \mathrm{A}_{4.1},\ \langle e_4\rangle;\\ &\xrightarrow{W(0,1,1,0)} \mathrm{A}^2_{4.2},\ \langle e_1,e_4\rangle;\quad \xrightarrow{W(0,0,1,0)} \mathrm{A}^{2,1,1}_{4.5},\ \langle e_1,e_2,e_4\rangle;\\ &\xrightarrow{W(1,0,1,0)} \mathrm{A}^1_{4.8},\ \langle e_2,e_4\rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{4.8}^{b}\colon\quad &\xrightarrow{W(0,0,0,1)} \mathrm{A}_{3.1}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_1,e_2,e_3\rangle;\\
&\xrightarrow{b=0,\ I_{24}W(0,0,0,1)} \mathrm{A}_{3.2}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_1,e_2,e_3+e_4\rangle;\\
&\xrightarrow{b=0,\ I_{13}^{0}W(0,0,0,1)} \mathrm{A}_{3.3}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_1,e_2,e_4\rangle;\\
&\xrightarrow{b=-1,\ I_{14}W(0,1,0,0)} A_{3.4}^{-1}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_1,e_2,e_4\rangle;\\
&\xrightarrow{b\neq1,\ I_{25}W(1,1,1,0)} \mathrm{A}_{4.1},\ \langle e_2+e_3\rangle;\\
&\xrightarrow{b\neq-1,0,\ W(0,0,1,0)} \mathrm{A}_{4.5}^{1+b,1,b},\ \langle e_1,e_2,e_4\rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{4.9}^{a}\colon\quad &\xrightarrow{W(0,0,0,1)} \mathrm{A}_{3.1}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_1,e_2,e_3\rangle;\\
&\xrightarrow{a=0,\ I_{14}W(1,1,0,0)} \mathrm{A}_{3.5}^{0}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_1,e_4\rangle;\\
&\xrightarrow{I_{26}W(1,1,1,0)} \mathrm{A}_{4.1},\ \langle e_2\rangle;\qquad \xrightarrow{a\neq0,\ W(1,1,1,0)} \mathrm{A}_{4.6}^{2a,a},\ \langle e_4\rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{4.10}\colon\quad &\xrightarrow{I_{13}^{0}W(1,0,1,1)} \mathrm{A}_{3.1}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_2\rangle;\qquad \xrightarrow{S_2} \mathrm{A}_{3.2}\oplus\mathrm{A}_1;\\
&\xrightarrow{W(0,0,0,1)} \mathrm{A}_{3.3}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_1,e_2,e_3\rangle;\\
&\xrightarrow{I_{13}^{b}W(0,0,0,1)} \mathrm{A}_{3.5}^{b}\oplus\mathrm{A}_1,\ \langle e_1,e_2,be_3+e_4\rangle;\\
&\xrightarrow{I_{31}W(3,2,1,1)} \mathrm{A}_{4.1};\qquad \xrightarrow{I_{13}^{0}W(1,0,1,0)} \mathrm{A}_{4.8}^{0},\ \langle e_2,e_3\rangle.
\end{aligned}$$

Сталі частини I матриць зазначених узагальнених IВ-контракцій, які відповідають замінам базисів у вихідних алгебрах, мають такий вигляд:

$$I_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad I_2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad I_3=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$I_4=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad I_5=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix},\quad I_6=\begin{pmatrix}1-a&1&1&0\\0&a&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$I_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_9 = \begin{pmatrix} 2b & 1 & 0 & 0 \\ b^2-1 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I_{12} = \begin{pmatrix} (a-1)(a-b) & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & b-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{13}^b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{15} = \begin{pmatrix} (b-1)^2 & b-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{17} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I_{18} = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{19} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{21} = \begin{pmatrix} 1+(a-b)^2 & a-b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I_{25} = \begin{pmatrix} b-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{26} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_{27}^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{28} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{29} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_{30} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4. Еквівалентність діагональних контракцій узагальненим IB-контракціям

Існує клас контракцій, ширший за клас узагальнених IB-контракцій, але водночас будь-яка контракція з цього класу еквівалентна узагальненій IB-контракції, сигнатуру якої складено з цілих чисел. Аналогічно до узагальнених IB-контракцій, цей клас визначено обмеженням на матриці контракцій, а не на структуру алгебри.

Означення 2.12. Контракцію $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ над дійсним або комплексним полем $\mathbb{F}$ називають *діагональною*, якщо її матрицю U_ε можна представити у вигляді $U_\varepsilon = AW_\varepsilon P$, де A і P — сталі невироджені ма-

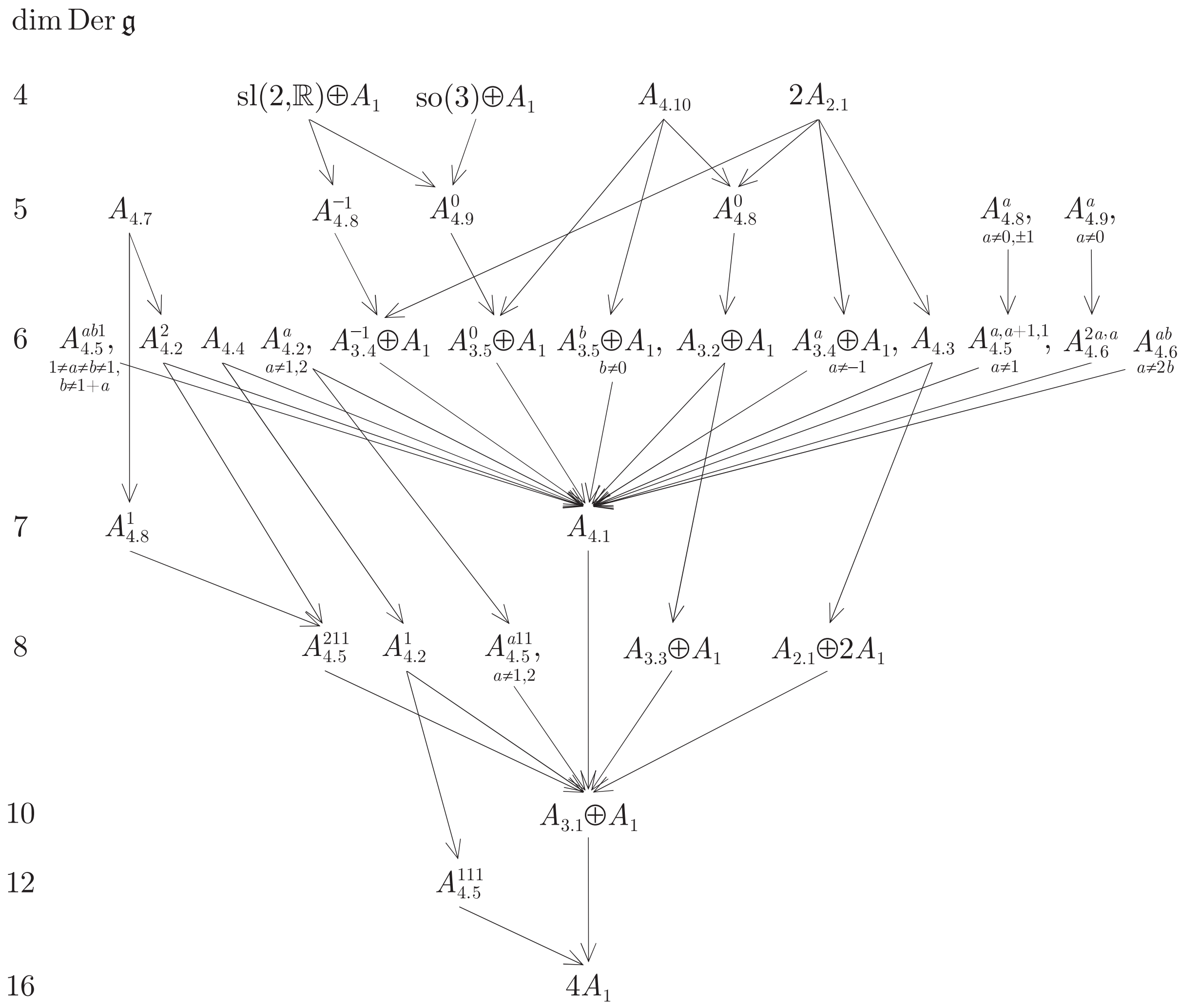

Рис. 2.2. Діаграма Хассе для контракцій чотиривимірних дійсних алгебр Лі.

триці, а $W_\varepsilon = \mathrm{diag}(f_1(\varepsilon), \dots, f_n(\varepsilon))$ для деяких неперервних функцій $f_i\colon (0,1] \to \mathbb{F}\backslash\{0\}$.

Теорема 2.13. *Довільна діагональна контракція еквівалентна узагальненій IВ-контракції з цілочисловою сигнатурою.*

Доведення. Припустимо, що матриця U_ε контракції $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ має вигляд з означення 2.12. Використовуючи заміну базисів у початковій і контрактованій алгебрах, покладемо матриці A та P рівними одиничній. Якщо $U_\varepsilon = W_\varepsilon$, то структурні сталі контрактованої алгебри $\mathfrak{g}_0$ задає формула

$$c^k_{0,ij} = \lim_{\varepsilon\to+0} c^k_{ij}\,\frac{f_i f_j}{f_k}.$$

(Тут і нижче підсумовування за повторюваними індексами по замовчуванню не ведемо.) Тому умова

$$\exists \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{f_i f_j}{f_k} =: F_{ij}^k \in \mathbb{F} \quad \text{при} \quad c_{ij}^k \neq 0$$

є необхідною і достатньою для існування добре визначеної діагональної контракції $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ з матрицею U_ε. Тоді $c_{0,ij}^k = c_{ij}^k F_{ij}^k$, якщо границя F_{ij}^k визначена й належить $\mathbb{F}\backslash\{0\}$, і $c_{0,ij}^k = 0$ інакше.

Увівши позначення

$$\mathcal{E} = \{(i,j,k) \mid i<j,\ c_{ij}^k \neq 0,\ F_{ij}^k \neq 0\},$$
$$\mathcal{N} = \{(i,j,k) \mid i<j,\ c_{ij}^k \neq 0,\ F_{ij}^k = 0\},$$

пов'яжемо множину границь F_{ij}^k, $(i,j,k) \in \mathcal{E}\cup\mathcal{N}$, з двома системами[2.5]:

1) системою Σ рівнянь $y_i y_j / y_k = F_{ij}^k$, $(i,j,k) \in \mathcal{E}$, для $y = (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{F}\backslash\{0\})^n$ і
2) змішаною системою S рівнянь $x_i + x_j - x_k = 0$, $(i,j,k) \in \mathcal{E}$ та нерівностей $x_i + x_j - x_k > 0$, $(i,j,k) \in \mathcal{N}$, для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Доведемо від супротивного, що існування ненульових границь F_{ij}^k для $(i,j,k) \in \mathcal{E}$ (відповідно цих границь та додатково нульових границь для $(i,j,k) \in \mathcal{N}$) призводить до сумісності системи Σ (відповідно S). Основою доведення є спостереження, що операції з рівняннями та нерівностями еквівалентні аналогічним операціям з границями.

Припустимо, що система Σ несумісна. Тоді $\mathcal{E} \neq \varnothing$. Застосуємо метод Гауса для множення, використовуючи лише цілі степені. Цей метод зводиться до повторення таких дій. Позначимо через Σ_ν множину $\{Y_s = G_s,\ s = 1, \dots, \sigma\}$ наслідків системи Σ, отриманих після ν-ї ітерації, $\Sigma_0 := \Sigma$. Тут Y_s (відповідно G_s) — добутки цілих степенів деяких виборок змінних y (відповідно сталих F), а кількості $|\Sigma_\nu|$ та $|\Sigma|$ рівнянь

[2.5] Тут можемо також вважати, що $\mathcal{N} \neq \varnothing$, оскільки інакше контракція $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ невласна, а отже еквівалентна узагальненій IB-контракції з нульовою сигнатурою.

у системах Σ_ν та Σ збігаються, $|\Sigma_\nu| = |\Sigma| =: \sigma$. Виберемо таке значення індексу i, що змінна y_i є в системі Σ_ν, та позначимо через β_s степінь змінної y_i у виразі Y_s. Позначимо через $\bar{\beta} = \gcd(\beta_1, \ldots, \beta_\sigma)$ найбільший спільний дільник для β_1, ..., β_σ. За узагальненою тотожністю Безу, існує представлення $\bar{\beta} = \sum_{s=1}^{\sigma} \delta_s \beta_s$ з цілими коефіцієнтами δ_s. Розглянемо наслідок $\bar{Y} = \bar{G}$ системи Σ_ν, де $\bar{Y} = Y_1^{\delta_1} \cdots Y_\sigma^{\delta_\sigma}$ та $\bar{G} = G_1^{\delta_1} \cdots G_\sigma^{\delta_\sigma}$. Степінь виразу $\bar{Y}$ за змінною y_i дорівнює $\bar{\beta}$. Рівняння $Y_s \bar{Y}^{-\beta_s/\bar{\beta}} = G_s \bar{G}^{-\beta_s/\bar{\beta}}$, $s = 1, \ldots, \sigma$, утворюють систему $\Sigma_{\nu+1}$. За побудовою, кількість невідомих у системі $\Sigma_{\nu+1}$ на одиницю менша, ніж у системі Σ_ν. Несумісність системи Σ_ν еквівалентна несумісності системи $\Sigma_{\nu+1}$. Виходячи з несумісності системи Σ, у результаті ітерацій отримаємо несумісний наслідок вигляду

$$1 = \prod_{(i,j,k)\in\mathcal{E}} (F_{ij}^k)^{m_{ij}^k} \qquad \left(\text{або} \quad Y^2 = \prod_{(i,j,k)\in\mathcal{E}} (F_{ij}^k)^{m_{ij}^k}\right),$$

де права частина не дорівнює одиниці (відповідно від'ємна), $m_{ij}^k \in \mathbb{Z}$, $(i,j,k) \in \mathcal{E}$, Y — добуток цілих степенів змінних y. Наслідки другого типу несумісні лише в дійсному випадку, тому наслідки першого типу вичерпують можливі несумісні наслідки у комплексному випадку. Така сама комбінація операцій добре визначена для границь з $(i,j,k) \in \mathcal{E}$ і, застосована до них, призводить до такої самої (або подібної) суперечливої рівності для границь, що суперечить існуванню діагональної контракції.

Припустимо, що система S несумісна. Підсистема рівнянь $x_i + x_j - x_k = 0$, де $(i,j,k) \in \mathcal{E}$, має розв'язки. (Принаймні вона має нульовий розв'язок.) Застосовуючи метод Гауса над $\mathbb{Z}$ до цієї підсистеми, представимо її у вигляді

$$a_i x_i = \sum_{j\in\bar{I}} b_i^j x_j, \quad i \in I,$$

де $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $\bar{I} = \{1, \ldots, n\} \setminus I$, $a_i \in \mathbb{N}$, $b_i^j \in \mathbb{Z}$, $i \in I$ та $j \in \bar{I}$. Виключимо x_i, $i \in I$, з нерівностей $x_{i'} + x_{j'} - x_{k'} > 0$, $(i',j',k') \in \mathcal{N}$, домноживши їх на відповідні добутки потрібних a_i, $i \in I$. Отримаємо систему S' строгих однорідних лінійних нерівностей для x_j, $j \in \bar{I}$, з цілими коефіцієнтами. Оскільки система S несумісна, існує тотожно нульова лінійна комбінація з натуральними коефіцієнтами, складена з лівих частин нерівностей з S'.[2.6] Це твердження призводить до несумісної нерівності $0 > 0$.

Зазначеному вище ланцюгу адитивних операцій з рівностями та нерівностями з системи S можна зіставити ланцюг добре визначених мультиплікативних операцій з границями F_{ij}^k, $(i,j,k) \in \mathcal{E} \cup \mathcal{N}$. За такої відповідності операції додавання, віднімання та множення на ціле число відповідно асоційовані з множенням, діленням та підведенням до такого самого степеня. Лише множення та підведення до натурального степеня можна застосувати до нульових границь F_{ij}^k, $(i,j,k) \in \mathcal{N}$, що узгоджено з обмеженнями на операції з нерівностями. Зазначений ланцюг операцій з границями призводить до несумісної рівності $1 = 0$, що суперечить існуванню контракції.

Нехай $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ і $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — розв'язки систем Σ та S відповідно. Очевидно, що $\gamma_1 \cdots \gamma_n \neq 0$. Система S' має раціональні розв'язки, оскільки множина її розв'язків відкрита й непорожня. Тому система S має раціональні розв'язки, а отже, і цілі розв'язки, тобто можна вважати, що $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$. Тоді $\tilde{U}_\varepsilon = \tilde{A}\tilde{W}_\varepsilon P$, де $\tilde{A} = A\,\mathrm{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\tilde{W}_\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon^{\alpha_1}, \dots, \varepsilon^{\alpha_n})$, дає добре визначену IB-контракцію алгебри $\mathfrak{g}$ до алгебри $\mathfrak{g}_0$ з цілими степенями параметра. $\square$

Інакше кажучи, теорема 2.13 стверджує, що узагальнені IB-контракції є універсальними в класі діагональних контракцій.

Зауваження 2.14. При побудові еквівалентної діагональній узагальненої IB-контракції за описаним у доведенні методом, сталі матриці при відповідній матриці контракції насправді відомі та збігаються, з точністю до множника, з такими самими матрицями для діагональної контракції.

[2.6] Це твердження — модифікація добре відомої теореми Вороного [113] (див. також [19, p. 10]) для випадку однорідних строгих лінійних нерівностей з дійсними (або раціональними) коефіцієнтами.

Цей множник є сталою діагональною матрицею, елементи з діагоналі якої є розв'язками системи Σ. Лише розв'язання системи лінійних рівнянь та нерівностей S відносно степенів параметра є значущим. Можна вибрати цілочисловий розв'язок системи S, який є в певному сенсі оптимальним, наприклад має найменший максимум абсолютних значень компонент. У загальному випадку вибраний розв'язки можуть бути неоптимальними у зазначеному сенсі у повному наборі цілочислових сигнатур узагальнених IВ-контракцій алгебри $\mathfrak{g}$ до алгебри $\mathfrak{g}_0$. Для знаходження оптимальної сигнатури для кожного набору степенів з переліку попередньо вибраних потрібно або побудувати розв'язок громіздкої системі алгебраїчних рівнянь на коефіцієнти сталих матричних множників, або довести несумісність цієї системи. Це складніша проблема, ніж розглянута в теоремі 2.13.

Наслідок 2.15. *Будь-яка діагональна контракція, матриця якої має скінченну границю при $\varepsilon \to +0$, еквівалентна узагальненій IВ-контракції з невід'ємними степенями параметра.*

Доведення. Оскільки функції f_i мають скінченні границі при $\varepsilon \to +0$, можна приєднати додаткові рівняння $x_i > 0$ до системи S і довести аналогічно доведенню теореми 2.13, що розширена система має цілі розв'язки. $\square$

Зауваження 2.16. Інші додаткові обмеження на степені параметра узагальнених IВ-контракцій, еквівалентних діагональним контракціям з певними властивостями, можна встановити схожим чином. Зокрема, з доведення теореми 2.13 випливає, що для будь-якого фіксованого $j \in \{1, \ldots, n\}$ j-й степінь параметра можна вибрати невід'ємним (або від'ємним), якщо існує скінченна (або нескінченна) границя функції f_j при $\varepsilon \to +0$.

Зауваження 2.17. Аналогічна теорема справедлива й для діагональних послідовних контракцій, а її доведення збігається з доведенням теореми 2.13.

Зауваження 2.18. Теорему 2.13 можна очевидним чином розширити на більш загальний клас контракцій, ніж діагональні. Наприклад, розглянемо будь-яку контракцію $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$, матрицю якої можна представити у вигляді $U_\varepsilon = \hat{U}_\varepsilon A W_\varepsilon \check{U}_\varepsilon \check{U}_\varepsilon$, де $\check{U} \in \mathrm{C}\big([0,1], \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})\big)$, $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$, функції $\hat{U}, \check{U} \in \mathrm{C}\big((0,1], \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})\big)$ такі, що для кожного $\varepsilon \in (0,1]$ значення $\hat{U}_\varepsilon$ and $\check{U}_\varepsilon$ є матрицями автоморфізмів алгебр $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{g}_0$ відповідно, а $W_\varepsilon = \mathrm{diag}(f_1(\varepsilon), \dots, f_n(\varepsilon))$ для деяких функцій $f_1, \dots, f_n \in \mathrm{C}\big((0,1], \mathbb{F}\backslash\{0\}\big)$. Ця контракція строго еквівалентна діагональній контракції з матрицею $AW_\varepsilon P$, де $P := \lim_{\varepsilon\to+0} \check{U}_\varepsilon$. Отже, за теоремою 2.13, вона еквівалентна узагальненій IВ-контракції з цілочисловою сигнатурою.

2.5. Висновки

Запропонований у підрозділі 2.2 алгоритм дає змогу ефективно проводити обчислення щодо узагальнених IВ-контракцій алгебр Лі низької розмірності. Завдяки його використанню не тільки доведено, що деякі контракції між чотиривимірними алгебрами Лі не можна реалізувати як узагальнені IВ-контракції, а й виправлено та оптимізовано опис контракцій три- та чотиривимірних алгебр Лі в цілому.

Теорема 2.7 важлива з різних міркувань. Насамперед, знайдено значення найменшої розмірності, в якій деякі добре визначені контракції не можна реалізувати узагальненими IВ-контракціями. Контракція $2\mathfrak{g}_{2.1} \to \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{3.2}$ та її дійсні аналоги $2\mathrm{A}_{2.1} \to \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_{3.2}$ $\mathrm{A}_{4.10} \to \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_{3.2}$ є першими прикладами таких контракцій для розмірностей, менших за сім. Більш того, вони також є першими для випадку, коли контрактована алгебра допускає нетривіальні діагональні диференціювання. Попередня серія прикладів, побудованих Д. Бурде у [36, 37] для розмірностей, більших за шість, використовує факт, що характеристично нільпотентні алгебри мають лише нільпотентні диференціювання. Хоча виключні контракції з теореми 2.10 не мають прямої фізичної інтерпретації, розвіювання ілюзії універсальності узагальнених ІВ-контракцій саме по собі може бути цікавим для фізиків. У зв'язку з цим треба зазначити, що відповідні алгебри Лі є не такими екзотичними, як характеристично нільпотентні алгебри, та з'являються, зокрема, у загальній теорії відносності [14]. Так, алгебру $2A_{2.1}$ можна реалізувати як алгебру Лі групи Лі, породженої одночасними масштабуваннями та зсувами у двох напрямах.

Повне розв'язання задачі опису узагальнених ІВ-контракцій чотиривимірних комплексних (або дійсних) алгебр Лі призводить до постановки нових цікавих задач.

Добре відомо, що всі контракції тривимірних комплексних (або дійсних) алгебр Лі можна реалізувати узагальненими ІВ-контракціями [80]. Аналогічне твердження для розмірностей один та два є очевидним. Це не так для розмірності чотири і розмірностей, більших за шість, що відповідно доведено в підрозділі 2.3.1 і в [36, 37]. Проблема універсальності узагальнених ІВ-контракцій для п'яти- та шестивимірних алгебр Лі наразі відкрита. Можна очікувати, що для цих розмірностей відповідь та підхід до її отримання будуть схожими на такі у випадку розмірності чотири.

Оскільки узагальнені ІВ-контракції не універсальні у повній множині алгебр Лі, природно постає важливе питання: в яких класах алгебр Лі, замкнених відносно контракцій, кожна контракція еквівалентна узагальненій ІВ-контракції? Наприклад, класи чотири- та п'ятивимірних нільпотентних алгебр є такими [38, 54, 80]. Можна також ставити питання про універсальність узагальнених ІВ-контракцій у певному класі реалізацій контракцій. Так, у підрозділі 2.4 доведено, що довільна діагональна контракція еквівалентна узагальненій ІВ-контракції з цілочисловою сигнатурою. Водночас, як показують приклад 1.21 і результати підрозділу 2.3, вже в розмірності чотири існують контракції Салетана, нееквівалентні узагальненим ІВ-контракціям.

Хоча повна універсальність ІВ-контракцій спростована контрприкладами [36, 37], у [41] після аналізу класифікації контракцій чотиривимірних алгебр Лі, виконаної в [80], було висунуто припущення, що будь-яка контракція алгебр Лі є композицією узагальнених IW-контракцій, але приклади з [36, 37] спростовують і це припущення. Існує контракція між семивимірними характеристично нільпотентними алгебрами Лі, розмірності орбіт яких відрізняються на 1. Отже, ця контракція нерозкладна і її не можна реалізувати як узагальнену IW-контракцію. Можна висунути слабше припущення, що будь-яка контракція до алгебри Лі з нетривіальними градуюваннями є композицією узагальнених IW-контракцій. Це припущення не суперечить відомим чотири- та семивимірним прикладам контракцій, нееквівалентних узагальненим IW-контракціям, але можна очікувати, що відповідні контрприклади буде знайдено.

Не менш важливою є проблема знаходження критеріїв існування узагальнених IW-контракцій, що відрізнялися б від найпростішого, побудованого на перевірці наявності діагоналізовних диференціювань у контрактованої алгебри, та працювали б у випадку, коли контрактована алгебра допускає ненільпотентні диференціювання.

Розділ 3

Лiївськи ортогональнi оператори

Умова лiївської ортогональностi операторiв на алгебрах Лi природно виникає при вивченнi деяких структур, що пов'язанi з алгебрами Лi, таких як многовиди Келера та структури Клiффорда [25, 26, 48]. Найпростiшими серед таких структур є абелевi комплекснi структури на дiйсних алгебрах Лi [25, 26], тобто лiнiйнi оператори, що задовольняють двi умови:

1) $J^2 = -\mathrm{id}$,
2) $[Jx, Jy] = [x, y]$.

Об'єктом дослiдження у цьому роздiлi є ширший клас операторiв, кожен з яких задовольняє лише другу умову, яку i називають умовою лiївської ортогональностi [12, 30]. Вiдкидання першої умови допомагає зрозумiти, за якi властивостi абелевих комплексних структур вiдповiдає саме умова лiївської ортогональностi. Так, твердження 3.1 з [25] елементарно випливає з теореми 3.31 дисертацiї.

Крiм того, невиродженi лiївськи ортогональнi оператори пов'язанi з так званими узагальненими диференцiюваннями в той самий спосiб, як автоморфiзми пов'язанi з диференцiюваннями. Нагадаємо, що лiнiйний оператор $D \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ називають узагальненим (α, β, γ)-диференцiюванням на алгебрi $\mathfrak{g}$, якщо для будь-яких елементiв x, y з алгебри $\mathfrak{g}$ виконується спiввiдношення

$$\alpha D[x, y] = \beta[Dx, y] + \gamma[x, Dy]$$

для заданих сталих α, β, γ [81]. Очевидно, що iнфiнiтезимальними аналогами лiївськи ортогональних операторiв є $(0, 1, 1)$-диференцiювання.

Див. також підрозділ 3.2.2 для додаткових зв'язків ліївськи ортогональних операторів з узагальненими диференціюваннями.

У цьому розділі узагальнено результати з [12, 13, 30] та повністю описано множини ліївськи ортогональних операторів на деяких класах алгебр Лі. Всюди крім підрозділу 3.1 і початку підрозділу 3.3 вважаємо, що базове поле $\mathbb{F}$ має характеристику нуль, а алгебра Лі $\mathfrak{g}$ скінченновимірна. Додаткові обмеження на базове поле і алгебру вказуємо там, де вони суттєві.

Структура розділу така. У підрозділі 3.1 розглянуто найпростіші поняття та властивості, пов'язані з ліївськи ортогональними операторами, та введено відношення еквівалентності таких операторів, яке є особливо важливим при розгляді алгебр Лі з ненульовим центром. Там само досліджено елементарні алгебраїчні структури на множинах таких операторів та обговорено базисний підхід при дослідженні таких операторів. Дію ліївськи ортогональних операторів на центрі та радикалі алгебри Лі, а також на ідеалах, породжених кореневими підпросторами та центром, вивчено в підрозділі 3.2. Відмічено зв'язок ліївськи ортогональних операторів з узагальненими диференціюваннями. Підрозділ 3.3 присвячено вивченню ліївськи ортогональних автоморфізмів алгебр Лі. У підрозділі 3.4 отримано вичерпний опис ліївськи ортогональних операторів на метричних алгебрах Лі, з якого випливає, що на простих алгебрах існують лише тривіальні ліївськи ортогональні оператори. Завдяки цьому повністю описано множину ліївськи ортогональних операторів на напівпростих та редуктивних алгебрах Лі, а також отримано деякі результати для загальних алгебр Лі з ненульовими факторами Леві. Базисний підхід використано у підрозділі 3.5 для прямого обрахунку повних множин ліївськи ортогональних операторів для деяких важливих класів алгебр Лі — спеціальних лінійних алгебр, алгебр Гейзенберга, майже абелевих алгебр, всіх дійсних і комплексних алгебр Лі розмірності три та чотири тощо.

Результати цього розділу опубліковано в статті [92] і тезах конференції [89].

3.1. Елементарні властивості ліївськи ортогональних операторів

3.1.1. Означення і приклади.

Означення 3.1. (Лінійний) оператор J на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ називають *ліївськи ортогональним*, якщо $[Jx, Jy] = [x, y]$ для довільних елементів $x, y \in \mathfrak{g}$.

Приклад 3.2. Будь-який (лінійний) оператор на абелевій алгебрі Лі є ліївськи ортогональним. Лише абелева алгебра Лі допускає нульовий оператор як ліївськи ортогональний.

Останнє твердження можна узагальнити до такого:

Твердження 3.3. *Нехай $\mathfrak{g}$ — алгебра Лі, а J — нільпотентний ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$. Тоді алгебра $\mathfrak{g}$ абелева.*

Доведення. Позначимо через m степінь нільпотентності оператора J: $J^m = 0$. Для довільних $x, y \in \mathfrak{g}$ маємо: $[x, y] = [J^m x, J^m y] = 0$. □

Приклад 3.4. Для будь-якої алгебри Лі $\mathfrak{g}$ тотожній оператор $\mathrm{id}_\mathfrak{g}$, а також $-\mathrm{id}_\mathfrak{g}$ є ліївськи ортогональними операторами на $\mathfrak{g}$. Будемо називати такі оператори *тривіальними* ліївськи ортогональними операторами на $\mathfrak{g}$. Тому цікавими для дослідження ліївськи ортогональними операторами є лише ті, що відрізняються від тривіальних.

Для деяких алгебр Лі множина ліївськи ортогональних операторів вичерпується тривіальними.

Приклад 3.5. Розглянемо алгебру Лі $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$. Зафіксуємо базис (e_1, e_2, e_3), в якому комутаційні співвідношення мають вигляд $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = e_2$, або $[e_i, e_j] = e_k$ для парної перестановки трійки індексів i, j, k. Інакше кажучи, використаємо зображення алгебри $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ як алгебри тривимірних векторів з векторним добутком як дужкою Лі. Нехай J — ліївськи ортогональний оператор на $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$. За означенням, $e_k = [e_i, e_j] = [Je_i, Je_j]$. Отже, вектор e_k ортогональний векторам Je_i та Je_j. Перегруповуючи ці співвідношення, отримаємо, що для кожного i вектор Je_j ортогональний e_j і e_k, а тому пропорційний e_i: $Je_i = \lambda_i e_i$ для деякої сталої λ_i. З комутаційних співвідношень випливає $\lambda_i\lambda_j = 1$, $i \neq j$, звідки або $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, або $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, тобто або $J = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, або $J = -\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. Таким чином, алгебра $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ допускає лише тривіальні ліївськи ортогональні оператори.

Твердження 3.6. *Нехай $\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{i}_p$, тобто $\mathfrak{g}$ є прямою сумою своїх ідеалів $\mathfrak{i}_1$, ..., $\mathfrak{i}_p$, а J_s — ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{i}_s$, $s = 1, \ldots, p$. Тоді оператор $J = J_1 \oplus \cdots \oplus J_p$ є ліївськи ортогональним оператором на $\mathfrak{g}$.*

Приклад 3.7. Нехай $\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{i}_p$, де $\mathfrak{i}_1$, ..., $\mathfrak{i}_p$ — ідеали алгебри $\mathfrak{g}$, і для кожного $s = 1, \ldots, p$ або $J_s = \mathrm{id}_{\mathfrak{i}_s}$, або $J_s = -\mathrm{id}_{\mathfrak{i}_s}$. Тоді оператор $J = J_1 \oplus \cdots \oplus J_p$ є ліївськи ортогональним оператором на $\mathfrak{g}$.

Нехай J — ліївськи ортогональний оператор на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$, а x, y, z — довільні елементи цієї алгебри. Для виведення тотожності, яка пов'язує ліївську ортогональність з тотожністю Якобі, підставимо Jx, Jy, Jz у тотожність Якобі й використаємо означення ліївськи ортогонального оператора:

$$\big[Jx, [y, z]\big] + \big[Jy, [z, x]\big] + \big[Jz, [x, y]\big] = 0. \tag{3.1}$$

Щоб отримати іншу корисну тотожність, підставимо Jx замість x у (3.1) та багаторазово використаємо тотожність Якобі й означення ліївськи ортогонального оператора:

$$\begin{aligned}
&\big[J^2x, [y, z]\big] + \big[Jy, [z, Jx]\big] + \big[Jz, [Jx, y]\big] \\
&\quad = \big[J^2x, [y, z]\big] - \big[Jx, [Jy, z]\big] - \big[z, [x, y]\big] - \big[Jx, [y, Jz]\big] - \big[y, [z, x]\big] \\
&\quad = \big[J^2x, [y, z]\big] - \big[J^2x, J[Jy, z]\big] - \big[J^2x, J[y, Jz]\big] + \big[x, [y, z]\big] \\
&\quad = \big[J^2x, [y, z]\big] - \big[J^2x, J[Jy, z]\big] - \big[J^2x, J[y, Jz]\big] + \big[J^2x, J^2[y, z]\big] \\
&\quad = \big[J^2x, (J^2 + \mathrm{id})[y, z] - J[Jy, z] - J[y, Jz]\big] = 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Твердження 3.8. *Нехай* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Лі,* J — *ліївськи ортогональний оператор на* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{s}$ — *підалгебра алгебри* $\mathfrak{g}$, *інваріантна відносно оператора* J*. Тоді обмеження оператора* J *на* $\mathfrak{s}$ *є ліївськи ортогональним оператором на підалгебрі* $\mathfrak{s}$.

3.1.2. Відношення еквівалентності. Доведемо допоміжні твердження, які обґрунтовують природність введеної нижче еквівалентності ліївськи ортогональних операторів.

Лема 3.9. *Нехай* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Лі,* $\mathfrak{l}$ — *деякий доповняльний підпростір алгебри* $\mathfrak{g}$ *до її центру* $\mathfrak{z}$, *тобто* $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \dotplus \mathfrak{l}$, J — *ліївськи ортогональний оператор на* $\mathfrak{g}$, *а оператор* $\tilde{J}$ *на* $\mathfrak{g}$ *задовольняє умови* $\tilde{J}|_{\mathfrak{l}} = J|_{\mathfrak{l}}$ *і* $\tilde{J}\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{z}$. *Тоді* $\tilde{J}$ — *ліївськи ортогональний оператор на* $\mathfrak{g}$.

Інакше кажучи, ліївськи ортогональний оператор можна довизначати на центрі алгебри Лі довільним чином.

Доведення. Візьмемо довільні елементи x, y з $\mathfrak{g}$, і зобразимо їх у вигляді $x = x_0 + x_1$, $y = y_0 + y_1$, де $x_0, y_0 \in \mathfrak{z}$, $x_1, y_1 \in \mathfrak{l}$. Тоді

$$[\tilde{J}x, \tilde{J}y] = [\tilde{J}x_0 + \tilde{J}x_1, \tilde{J}y_0 + \tilde{J}y_1] = [\tilde{J}x_1, \tilde{J}y_1] = \\ = [Jx_1, Jy_1] = [x_1, y_1] = [x_0 + x_1, y_0 + y_1] = [x, y].$$

Це означає, що $\tilde{J}$ — ліївськи ортогональний оператор. $\square$

Наступна лема є узагальненням леми 3.9.

Лема 3.10. *Нехай* J — *ліївськи ортогональний оператор на алгебрі Лі* $\mathfrak{g}$, *а* J_0 — *оператор на* $\mathfrak{g}$, *образ якого міститься у центрі* $\mathfrak{z}$ *цієї алгебри:* $J_0\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{z}$. *Тоді* $J + J_0$ — *ліївськи ортогональний оператор на* $\mathfrak{g}$.

Доведення. Виберемо довільні елементи x, y з $\mathfrak{g}$. Оскільки J_0x та J_0y належать центру за умовами леми, то

$$[(J + J_0)x, (J + J_0)y] = [Jx, Jy] + [J_0x, Jy] + [Jx, J_0y] + [J_0x, J_0y] \\ = [Jx, Jy] = [x, y],$$

що доводить лему. $\square$

У лемі 3.9 оператор J_0 дорівнює нулю на доповняльному підпросторі $\mathfrak{l}$ до центру. Лема 3.10 дає змогу ввести відношення еквівалентності на множині ліївськи ортогональних операторів на фіксованій алгебрі $\mathfrak{g}$.

Означення 3.11. Ліївськи ортогональні оператори J та $\tilde{J}$ на деякій алгебрі Лі назвемо *еквівалентними*, якщо образ їх різниці міститься в центрі цієї алгебри.

Якщо центр алгебри нульовий, еквівалентними є лише рівні оператори.

3.1.3. Алгебраїчні структури на ліївськи ортогональних операторах.

Ліївськи ортогональні оператори утворюють різні алгебраїчні структури.

Твердження 3.12. *Якщо J — ліївськи ортогональний оператор на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$, то оператор $-J$ також є ліївськи ортогональним на цій алгебрі.*

Твердження 3.13. *Нехай J — невироджений ліївськи ортогональний оператор на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$. Тоді*

(i) обернений до нього оператор J^{-1} також є ліївськи ортогональним на цій алгебрі;

(ii) умова ліївської ортогональності оператора J еквівалентна умові $[Jx, y] = [x, J^{-1}y]$ для довільних елементів $x, y \in \mathfrak{g}$.

Твердження 3.14. *Нехай $\mathfrak{g}$ — алгебра Лі. Тоді композиція ліївськи ортогональних операторів на $\mathfrak{g}$ є ліївськи ортогональним оператором на цій алгебрі. Отже, ліївськи ортогональні оператори на $\mathfrak{g}$ утворюють моноїд з інволюцією. Множина ліївськи ортогональних невироджених операторів на алгебрі Лі є групою відносно композиції операторів.*

Використовуючи міркування з доведення теореми 3 зі статті [30], можна отримати таке твердження:

Твердження 3.15. *Нехай J — ліївськи ортогональний оператор на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$, S — її автоморфізм. Тоді оператор $S^{-1}JS$ є ліївськи ортогональним оператором на $\mathfrak{g}$.*

Доведення. Розглянемо оператор $\tilde{J} = S^{-1}JS$. Для довільних x, y з алгебри $\mathfrak{g}$ виконується рівність

$$[\tilde{J}x, \tilde{J}y] = [S^{-1}JSx, S^{-1}JSy] = S^{-1}[JSx, JSy] = S^{-1}[Sx, Sy] = [x, y],$$

а це є умовою ліївської ортогональності для оператора $\tilde{J}$. □

Наслідок 3.16. *Множина ліївськи ортогональних операторів на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ є G-множиною, де $G = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.*

3.1.4. Базисний підхід. Нехай $\mathfrak{g}$ — n-вимірна ($n < \infty$) алгебра Лі, а J — ліївськи ортогональний оператор на ній. Зафіксуємо базис $(e_1, \ldots, e_n)$ у $\mathfrak{g}$. Комутаційні співвідношення алгебри $\mathfrak{g}$ у зафіксованому базисі мають вигляд $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, де c_{ij}^k є компонентами тензора структурних сталих, а матриця оператора J — (J_{ij}): $Je_i = J_{ij}e_j$. Тут і надалі індекси i, j, k пробігають значення від 1 до n, а за індексами, що повторюються, іде підсумовування.

Запишемо означення ліївськи ортогонального оператора для пар базисних елементів і розкладемо всі елементи алгебри, що зустрічаються, за базисом:

$$\begin{aligned}[Je_i, Je_j] &= [J_{i'i}e_{i'}, J_{j'j}e_{j'}] = J_{i'i}J_{j'j}[e_{i'}, e_{j'}] = J_{i'i}J_{j'j}c_{i'j'}^k e_k = \\ &= [e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k,\end{aligned}$$

звідки $J_{i'i}J_{j'j}c_{i'j'}^k = c_{ij}^k$. У матричних позначеннях останню умову можна записати у вигляді $J^\mathsf{T} C^k J = C^k$, де для кожного фіксованого k матриця $C^k = (c_{ij}^k)$ кососиметрична. Ця умова є не чим іншим як умовою інваріантності білінійної кососиметричної форми, асоційованої з матрицею C_k, відносно оператора J для всіх k. Для коефіцієнтів матриці оператора J

це дає систему щонайбільше $n^2(n-1)/2$ квадратичних неоднорідних рівнянь. Розв'язок цієї системи повністю описує множину ліївськи ортогональних операторів на алгебрі $\mathfrak{g}$. (Див. підрозділ 3.5 для прикладів відповідних обрахунків.)

3.2. Інваріантні ідеали ліївськи ортогональних операторів

У теорії ліївськи ортогональних операторів важливу роль відіграють інваріантні підпростори цих операторів, що додатково є ідеалами відповідних алгебр Лі.

3.2.1. Центр. Особливе місце серед ідеалів, інваріантних відносно всіх ліївськи ортогональних операторів на заданій алгебрі, займає центр цієї алгебри. Властивості ліївськи ортогональних операторів суттєво залежать від того, чи є центр алгебри нульовим.

Лема 3.17. *Нехай $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна алгебра Лі, $\mathfrak{z}$ — її центр, а J — ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$. Тоді $J\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{z}$.*

Доведення. Візьмемо довільний елемент $x \in \mathfrak{z}$. Тоді $[x, y] = 0$ для довільного $y \in \mathfrak{g}$. Необхідно довести, що для довільного $y \in \mathfrak{g}$ виконується $[Jx, y] = 0$. Запишемо розклад Фіттінга (див., наприклад, [64, с. 47]) алгебри $\mathfrak{g}$ відносно оператора J: $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}_0 \dotplus \hat{\mathfrak{l}}$, де $\mathfrak{l}_0$ та $\hat{\mathfrak{l}}$ — інваріантні підпростори для J, а обмеження J_0 та J_1 оператора J на $\mathfrak{l}_0$ та $\hat{\mathfrak{l}}$ — відповідно нільпотентний та невироджений оператори, причому $J = J_0 \oplus J_1$. Позначимо через m степінь нільпотентності оператора J_0: ${J_0}^m = 0$. Тоді $y = y_0 + y_1$, $y_0 \in \mathfrak{l}_0$, $y_1 \in \hat{\mathfrak{l}}$, а тому

$$\begin{aligned}[Jx, y] &= [Jx, y_0] + [Jx, y_1] = [J^{m+1}x, J^m y_0] + [Jx, J_1 J_1^{-1} y_1] \\ &= [J^{m+1}x, {J_0}^m y_0] + [Jx, J J_1^{-1} y_1] = [J^{m+1}x, 0] + [x, J_1^{-1} y_1] = 0,\end{aligned}$$

що завершує доведення. □

Лема 3.18 ([12]). *Нехай $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна алгебра Лі, J — ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$. Тоді $\mathfrak{l}_0 \subseteq \mathfrak{z}$, де $\mathfrak{l}_0$ — кореневий підпростір алгебри $\mathfrak{g}$ відносно оператора J, що відповідає нульовому власному числу (тобто нульова компонента Фіттінга цього оператора).*

Доведення. Доведемо цю лему іншим способом, ніж у [12], не використовуючи жорданову нормальну форму. Нехай k — степінь нільпотентності обмеження оператора J на $\mathfrak{l}_0$. Виберемо довільні $x \in \mathfrak{l}_0$, $y \in \mathfrak{g}$. Маємо $J^k x = 0$. Оскільки J^k, як і J, є ліївськи ортогональним оператором на $\mathfrak{g}$, то $[x, y] = [J^k x, J^k y] = [0, J^k y] = 0$, а тому x належить центру. $\square$

У випадку скінченновимірних алгебр Лі лема 3.18 є узагальненням твердження 3.3.

Наслідок 3.19. *Будь-який ліївськи ортогональний оператор на скінченновимірній алгебрі Лі з нульовим центром є обертовним. Ліївськи ортогональні оператори на такій алгебрі утворюють групу відносно композиції операторів.*

Наслідок 3.20. *Будь-який ліївськи ортогональний оператор на скінченновимірній алгебрі Лі еквівалентний деякому обертовному ліївськи ортогональному оператору на цій же алгебрі.*

Якщо маємо розклад алгебри $\mathfrak{g}$ на пряму суму центру $\mathfrak{z}$ та доповнення $\mathfrak{l}$ до нього як векторних просторів ($\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \dotplus \mathfrak{l}$), то "суттєвою" частиною будь-якого ліївськи ортогонального оператора J на $\mathfrak{g}$ є оператор $PJ = PJP$, де P — оператор проекції на $\mathfrak{l}$ у зафіксованому вище розкладі $\mathfrak{g}$. (Такий проектор P завжди є ліївськи ортогональним оператором.) Існує взаємно-однозначна відповідність між композиціями проектора P з ліївськи ортогональними операторами J і факторизованими операторами $J/\mathfrak{z}$ на фактор-алгебрі $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ (див. підрозділ 3.2.3 щодо факторизації ліївськи ортогональних операторів). Зафіксувавши базис таким чином, що перші його k елементів утворюють базис $\mathfrak{z}$, де $k = \dim \mathfrak{z}$, а інші утворюють базис $\mathfrak{l}$, отримаємо, що матрицю будь-якого ліївськи ортогонального оператора J на $\mathfrak{g}$ можна подати у вигляді

$$\begin{pmatrix} B_0 & B_1 \\ 0 & \tilde{J} \end{pmatrix},$$

де B_0 і B_1 — довільні матриці розміру $k \times k$ і $k \times (n-k)$ відповідно, 0 — нульова матриця розміру $(n-k) \times k$, а $\tilde{J}$ — матриця обмеження оператора PJP на $\mathfrak{l}$. Матрицю $\tilde{J}$ також можна інтерпретувати як матрицю факторизованого оператора $J/\mathfrak{z}$ на фактор-алгебрі $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$.

3.2.2. Зв'язок з узагальненими диференціюваннями і радикал форми Кіллінга. Нехай центр алгебри $\mathfrak{g}$ нульовий. Тоді в силу наслідку 3.19 будь-який ліївськи ортогональний оператор J на $\mathfrak{g}$ є невиродженим, а тому

$$[Jx, y] = [x, J^{-1}y], \quad [J^{-1}x, y] = [x, Jy]$$

для довільних елементів $x, y \in \mathfrak{g}$. Комбінуванням цих рівностей отримаємо

$$[Sx, y] = [x, Sy], \quad S := J + J^{-1}, \tag{3.3}$$

$$[Rx, y] = -[x, Ry], \quad R := J - J^{-1}, \tag{3.4}$$

тобто оператори S і R — відповідно $(0, 1, -1)$- та $(0, 1, 1)$-диференціювання на $\mathfrak{g}$ [81]. Нетривіальніше твердження виведемо з тотожності (3.2). Оскільки елемент x, а отже і Jx, пробігає всю алгебру $\mathfrak{g}$, а центр алгебри $\mathfrak{g}$ нульовий, то $(J^2+1)[x, y] = J[Jx, y]+J[x, Jy]$. Домножимо останню рівність на J^{-1}:

$$\begin{aligned}(J + J^{-1})[x, y] &= [Jx, y] + [x, Jy] = [Jx, y] + [J^{-1}x, y] \\ &= [(J + J^{-1})x, y],\end{aligned}$$

тобто

$$S[x, y] = [Sx, y] = [x, Sy]. \tag{3.5}$$

Це означає, що S — також $(1,1,0)$- та $(1,0,1)$-диференціювання на $\mathfrak{g}$. Тотожність можна проінтепретувати в термінах приєднаного зображення: $S\,\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_{Sx} = \mathrm{ad}_x\,S$. Отже,

$$K(Sx,y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{Sx}\,\mathrm{ad}_y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x\,S\,\mathrm{ad}_y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_{Sy}) = K(x,Sy),$$

тобто оператор S симетричний відносно форми Кіллінга K алгебри $\mathfrak{g}$.

Твердження 3.21. *Нехай $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна алгебра Лі з нульовим центром, J — ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$, а $S := J + J^{-1}$. Тоді $S\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{l}$, де $\mathfrak{l}$ — радикал форми Кіллінга K алгебри $\mathfrak{g}$.*

Доведення. За означенням, $\mathfrak{l} := \{x \in \mathfrak{g} \mid K(x,y) = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\}$. Нехай $x \in \mathfrak{l}$. Для будь-якого $y \in \mathfrak{g}$ маємо $K(Sx,y) = K(x,Sy) = 0$, тобто $Sx \in \mathfrak{l}$. □

3.2.3. Радикал та інші спеціальні ідеали.

Лема 3.22. *Нехай $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна алгебра Лі, а J — ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$. Тоді $J\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{r}$, де $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{g}}$ — радикал алгебри $\mathfrak{g}$, тобто її максимальний розв'язний ідеал.*

Доведення. Нехай K — форма Кіллінга алгебри $\mathfrak{g}$. Радикал $\mathfrak{r}$ є ортогональним доповненням до похідної алгебри $\mathfrak{g}'$ алгебри $\mathfrak{g}$ відносно форми Кіллінга K [1, с. 63], тобто

$$\mathfrak{r} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall y,z \in \mathfrak{g}\colon K(x,[y,z]) = 0\}.$$

Візьмемо довільне x з $\mathfrak{r}$ та довільні y і z з $\mathfrak{g}$. Тоді, за означенням ліївськи ортогонального оператора та асоціативністю форми Кіллінга відносно дужки Лі,

$$\begin{aligned} K(Jx,[y,z]) &= K(Jx,[Jy,Jz]) = K([Jx,Jy],Jz) = \\ &= K([x,y],Jz) = K(x,[y,Jz]) = 0, \end{aligned}$$

а це означає, що $Jx \in \mathfrak{r}$. □

З доведення леми 3 з [30] очевидно, що вона справедлива не тільки для обертовних ліївськи ортогональних операторів. Тому її можна переформулювати таким чином:

Лема 3.23. *Нехай* $\mathfrak{i}$ *— ідеал алгебри* $\mathfrak{g}$ *такий, що фактор-алгебра* $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ *має нульовий центр. Тоді ідеал* $\mathfrak{i}$ *інваріантний відносно дії довільного ліївськи ортогонального оператора на алгебрі* $\mathfrak{g}$*.*

Доведення. Оскільки при факторизації елементи центру алгебри $\mathfrak{g}$ відображаються в центр фактор-алгебри $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$, який за умовами леми нульовий, то центр алгебри міститься в ідеалі $\mathfrak{i}$. Тому цей ідеал інваріантний відносно деякого ліївськи ортогонального оператора J тоді й лише тоді, коли він інваріантний відносно будь-якого ліївськи ортогонального оператора, еквівалентного J. Отже, можна вважати, що оператор J обертовний.

Використовуючи переформульоване означення ліївськи ортогонального оператора, отримаємо, що для будь-яких $x \in \mathfrak{i}$ та $y \in \mathfrak{g}$ комутатор $[Jx, y] = [x, J^{-1}y]$ належить ідеалу $\mathfrak{i}$. Отже, клас еквівалентності $Jx + \mathfrak{i}$ належить центру фактор-алгебри $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$, звідки маємо, що $Jx \in \mathfrak{i}$. □

Якщо ідеал $\mathfrak{i}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ інваріантний відносно дії ліївськи ортогонального оператора J на $\mathfrak{g}$, то оператор J можна факторизувати узгоджено з алгеброю $\mathfrak{g}$. Оператор $J/\mathfrak{i}$ на фактор-алгебрі $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ також є ліївськи ортогональним. Але факторизовані ліївськи ортогональні оператори не вичерпують усіх можливих ліївськи ортогональних операторів на фактор-алгебрі.

Ітеративно комбінуючи лему 3.17 з факторизацією по центру, отримаємо узагальнення наслідку 2 з [30].

Твердження 3.24. *Кожен елемент зростаючого центрального ряду алгебри* $\mathfrak{g}$ *інваріантний відносно будь-якого ліївськи ортогонального оператора на* $\mathfrak{g}$*.*

Лема 3.25. *Нехай* $\mathfrak{g}$ *— скінченновимірна алгебра Лі з нульовим центром, яка розкладається у пряму суму своїх ідеалів* $\mathfrak{i}_1$*, …,* $\mathfrak{i}_p$*:*

$\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{i}_p$. *Оператор* J *є ліївськи ортогональним на* $\mathfrak{g}$ *тоді й лише тоді, коли його можна зобразити у вигляді*

$$J = J_1 \oplus \cdots \oplus J_p,$$

де для кожного $s = 1, \ldots, p$ *оператор* J_s *є ліївськи ортогональним на* $\mathfrak{i}_s$. *Якщо центр алгебри* $\mathfrak{g}$ *ненульовий, то таке саме зображення справедливе з точністю до відношення еквівалентності.*

Доведення. Твердження леми еквівалентно тому, що кожен з ідеалів $\mathfrak{i}_1$, ..., $\mathfrak{i}_k$ інваріантний (з точністю до відношення еквівалентності) відносно дії будь-якого ліївськи ортогонального оператора. Достатньо довести інваріантність ідеалів $\mathfrak{i}_1$, ..., $\mathfrak{i}_k$ для частинного випадку $k = 2$. Центр $\mathfrak{z}$ алгебри $\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_1 \oplus \mathfrak{i}_2$ можна зобразити у вигляді $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 \oplus \mathfrak{z}_2$, де $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{i}_1$ і $\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{i}_2$. Крім того, $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}_1 \simeq \mathfrak{i}_2$ та $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}_2 \simeq \mathfrak{i}_1$. Тому у випадку нульового центру алгебри $\mathfrak{g}$ інваріантність ідеалів $\mathfrak{i}_1$ та $\mathfrak{i}_2$ безпосередньо випливає з леми 3.23, оскільки тоді центри ідеалів $\mathfrak{i}_1$ та $\mathfrak{i}_2$ також нульові.

Нехай центр алгебри $\mathfrak{g}$ ненульовий. З точністю до відношення еквівалентності можна розглядати лише обертовні ліївськи ортогональні оператори. Зафіксуємо такий оператор J. Позначимо через P_1 та P_2 відповідно оператори проекції на ідеали $\mathfrak{i}_1$ та $\mathfrak{i}_2$, що асоційовані з розкладом $\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_1 \oplus \mathfrak{i}_2$, $P_1 + P_2 = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. Для довільних $x \in \mathfrak{i}_1$, $y \in \mathfrak{i}_2$ комутатор $[Jx, y] = [x, J^{-1}y]$ належить перетину ідеалів $\mathfrak{i}_1$ та $\mathfrak{i}_2$, а отже, дорівнює 0. Це означає, що $P_2Jx \in \mathfrak{z}_2$, а $P_1Jy \in \mathfrak{z}_1$, тому образи операторів P_1JP_2 та P_2JP_1 містяться в $\mathfrak{z}$. Розглянемо оператор $\tilde{J} = J - P_1JP_2 - P_2JP_1$. За означенням він еквівалентний оператору J. Крім того, якщо $x \in \mathfrak{i}_1$, то $\tilde{J}x = Jx - P_2Jx = P_1Jx \in \mathfrak{i}_1$. Аналогічно, якщо $y \in \mathfrak{i}_2$, то $\tilde{J}y = Jy - P_1Jy = P_2Jy \in \mathfrak{i}_2$. □

3.2.4. Кореневі підпростори операторів.

Лема 3.26 ([12]). *Нехай* $\mathfrak{g}$ — *скінченновимірна алгебра Лі,* J — *ліївськи ортогональний оператор на* $\mathfrak{g}$. *Якщо* $\mathfrak{l}_\lambda$ *та* $\mathfrak{l}_\mu$ — *кореневі підпростори* *алгебри $\mathfrak{g}$ відносно оператора J, які відповідають власним числам λ і μ таким, що $\lambda\mu \neq 1$, то $[\mathfrak{l}_\lambda, \mathfrak{l}_\mu] = 0$.*

Доведення. Доведемо цю лему, не вибираючи базис алгебри $\mathfrak{g}$. Нехай λ, μ — власні значення оператора J такі, що $\lambda\mu \neq 1$. Відповідні кореневі підпростори $\mathfrak{l}_\lambda$, $\mathfrak{l}_\mu$ можна зобразити у вигляді:

$$\mathfrak{l}_\lambda = \bigcup_{s=0}^{m_\lambda} \ker(J - \lambda E)^s, \quad \mathfrak{l}_\mu = \bigcup_{r=0}^{m_\mu} \ker(J - \mu E)^r,$$

де m_λ та m_μ — кратності λ і μ як коренів характеристичного многочлена оператора J, а $E = \mathrm{id}_\mathfrak{g}$. Тому достатньо довести, що для кожного s та r довільні $x \in \ker(J - \lambda E)^s$ та $y \in \ker(J - \mu E)^r$ комутують. Останнє твердження доведемо індукцією по $m = s + r$. Якщо $m = 0$, то $s = r = 0$, звідки $x = y = 0$ як елементи ядра тотожного оператора і $[x, y] = 0$. Нехай твердження справедливе для всіх $s + r < m$. Доведемо його для m. За означенням ліївськи ортогонального оператора маємо

$$\begin{aligned}[x, y] = [Jx, Jy] = [(J - \lambda E)x, (J - \mu E)y] + [(J - \lambda E)x, \mu y] \\ + [\lambda x, (J - \mu E)y] + [\lambda x, \mu y] = \lambda\mu[x, y].\end{aligned}$$

Три перші доданки дорівнюють нулю за припущенням індукції, оскільки $(J - \lambda E)x \in \ker(J - \lambda E)^{s-1}$ і $(J - \mu E)y \in \ker(J - \mu E)^{r-1}$. Враховуючи, що $\lambda\mu \neq 1$, отримаємо $[x, y] = 0$. $\square$

Узагальнимо лему 3 з [12] та основну теорему тієї ж статті, позбавляючись умови, що центр алгебри нульовий.

Лема 3.27. *Нехай $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна алгебра Лі над алгебраїчно замкненим полем, а J — ліївськи-ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$. Для кожного власного числа λ оператора J розглянемо підпростір $\mathfrak{i}_\lambda = \mathfrak{l}_\lambda \dotplus \mathfrak{l}_{\lambda^{-1}} \dotplus \mathfrak{z}$, якщо $\lambda \notin \{\pm 1, 0\}$, $\mathfrak{i}_\lambda = \mathfrak{l}_\lambda \dotplus \mathfrak{z}$, якщо $\lambda = \pm 1$, або $\mathfrak{i}_\lambda = \mathfrak{l}_0$, якщо $\lambda = 0$. Тоді $\mathfrak{i}_\lambda$ — ідеал алгебри $\mathfrak{g}$.*

Доведення. Для $\lambda = 0$ твердження очевидне. Нехай $\lambda \neq 0$. Розглянемо підпростір $\mathfrak{v}_\lambda = \sum_{\mu \notin \{\lambda, \lambda^{-1}\}} \mathfrak{l}_\mu$. Тоді за лемою 3.26 його централізатор $\mathfrak{c}_\lambda$

в алгебрі $\mathfrak{g}$ містить $\mathfrak{i}_\lambda$. Якщо деякий елемент з централізатора не належить $\mathfrak{i}_\lambda$, то $\mathfrak{v}_\lambda \cap \mathfrak{c}_\lambda \cap (\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{i}_\lambda) \neq \varnothing$. Елементи цього перетину комутують з усіма елементами підпростору $\mathfrak{v}_\lambda$ за означенням централізатора і з усіма елементами підпростору $\mathfrak{i}_\lambda$ за лемою 3.26 та означенням центру, а $\mathfrak{i}_\lambda + \mathfrak{v}_\lambda = \mathfrak{g}$. Отже, ці елементи належать центру, а це суперечить припущенню, що вони лежать у доповненні до $\mathfrak{i}_\lambda$. Таким чином, $\mathfrak{c}_\lambda = \mathfrak{i}_\lambda$, а тому $\mathfrak{i}_\lambda$ є підалгеброю алгебри $\mathfrak{g}$. Тоді з леми 3.26 випливає, що $\mathfrak{i}_\lambda$ — ідеал цієї алгебри. □

Наслідок 3.28. *Якщо $\lambda \neq \pm 1$, то $\mathfrak{i}_\lambda$ — розв'язний ідеал алгебри $\mathfrak{g}$ степеня розв'язності не вище двох.*

Доведення. Оскільки $\lambda \neq \pm 1$, то за лемою 3.26 $\mathfrak{l}_\lambda$ та $\mathfrak{l}_{\lambda^{-1}}$ є абелевими підалгебрами алгебри $\mathfrak{g}$, а отже й ідеалу $\mathfrak{i}_\lambda$. Позначимо $\mathfrak{z}_\lambda = \mathfrak{l}_\lambda \cap \mathfrak{z}$. Виберемо підпростір $\tilde{\mathfrak{z}}_\lambda$ у центрі $\mathfrak{z}$ такий, що $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_\lambda \dot{+} \tilde{\mathfrak{z}}_\lambda = \mathfrak{z}_\lambda \oplus \tilde{\mathfrak{z}}_\lambda$. Тоді $\mathfrak{i}_\lambda = \mathfrak{l}_\lambda \dot{+} \tilde{\mathfrak{l}}_\lambda$, де $\tilde{\mathfrak{l}}_\lambda = \mathfrak{l}_{\lambda^{-1}} + \tilde{\mathfrak{z}}_\lambda$. Оскільки підалгебри $\mathfrak{l}_\lambda$ і $\tilde{\mathfrak{l}}_\lambda$ абелеві, то ідеал $\mathfrak{i}_\lambda$ є сумою двох абелевих підалгебр, а тому він розв'язний і степінь його розв'язності не перевищує два (див., наприклад, [2]). □

Наслідок 3.29. *Якщо $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна проста алгебра Лі, а J — ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$, то всі власні числа оператора J одночасно дорівнюють або 1, або -1.*

Доведення. Проста алгебра має нульовий центр і не містить власних ідеалів, а також не є розв'язною. Отже, оператор J має лише один кореневий підпростір, що відповідає власному числу, рівному або 1, або -1. □

Наслідок 3.30. *Якщо $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна напівпроста алгебра Лі, а J — ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$, то всі власні числа оператора J дорівнюють або 1, або -1, причому кожна проста компонента алгебри $\mathfrak{g}$ міститься в одному з кореневих просторів.*

Доведення. Напівпроста алгебра має нульовий центр і не містить ненульових розв'язних ідеалів. Отже, алгебра $\mathfrak{g}$ є прямою сумою двох кореневих підпросторів, що є ідеалами й відповідають власним числам, рівним 1

та -1. Оскільки будь-яка проста компонента алгебри $\mathfrak{g}$ є ідеалом у цій алгебрі без власних ідеалів, то вона або не перетинається з кореневим підпростором, або міститься в ньому. $\square$

У підрозділі 3.4 доведено теореми 3.45 та 3.46, які відповідно суттєво сильніші за наслідки 3.29 і 3.30.

Теорема 3.31. *Нехай $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна алгебра Лі над алгебраїчно замкненим полем, а J — ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$, власні числа якого відмінні від ± 1. Тоді $\mathfrak{g}$ — розв'язна алгебра степеня розв'язності, що не перевищує два.*

Доведення. За умов теореми, алгебра $\mathfrak{g}$ є сумою ідеалів $\mathfrak{i}_\lambda$, визначених вище, де λ пробігає ненульові власні значення оператора J. Зауважимо, що сума не є прямою, оскільки кожна пара таких ідеалів перетинається по центру $\mathfrak{z}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Для кожного λ $\mathfrak{i}_\lambda$ є розв'язним ідеалом степеня розв'язності не більше двох. Ці ідеали комутують між собою. Отже, вся алгебра $\mathfrak{g}$ також є розв'язною алгеброю степеня розв'язності, що не перевищує два. $\square$

Зауваження 3.32. Теорема 3.31 узагальнює теорему з [12] через уникнення умови, що центр алгебри нульовий. Для теореми 3.31 також релевантне зауваження 1 з [12] щодо справедливості цього твердження над $\mathbb{R}$.

3.3. Ліївськи ортогональні автоморфізми

Вивчимо ліївськи ортогональні оператори алгебр Лі, що також є їх автоморфізмами. Через $\mathfrak{g}'$ позначимо похідну алгебру алгебри $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Лема 3.33. *Нехай J — ліївськи ортогональний автоморфізм на алгебрі $\mathfrak{g}$. Тоді $\ker(J - \mathrm{id}_\mathfrak{g}) \supseteq \mathfrak{g}'$ та $[\mathrm{im}(J - \mathrm{id}_\mathfrak{g}), \mathfrak{g}'] = \{0\}$.*

Доведення. Для довільних елементів x та y алгебри $\mathfrak{g}$ виконується рівність $J[x, y] = [Jx, Jy] = [x, y]$. Звідси $(J - \mathrm{id}_\mathfrak{g})[x, y] = 0$, а тому $\ker(J - \mathrm{id}_\mathfrak{g}) \supseteq \mathfrak{g}'$. Аналогічно, для довільних елементів x, y, z алгебри $\mathfrak{g}$

отримаємо: $\big[[x,y],Jz\big] = \big[[Jx,Jy],Jz\big] = \big[J[x,y],Jz\big] = \big[[x,y],z\big]$, звідки $\big[[x,y],Jz-z\big] = 0$. Це означає, що $[\mathrm{im}(J-\mathrm{id}_\mathfrak{g}),\mathfrak{g}'] = \{0\}$. $\square$

Очевидно, що ліївськи ортогональні автоморфізми на алгебрі Лі можна описати як автоморфізми, що діють тотожно на похідній алгебрі, або як ліївськи ортогональні оператори, що задовольняють ту саму умову.

Наслідок 3.34 ([30]). *Ліївськи ортогональний автоморфізм на досконалій алгебрі*[3.1] *може бути лише тотожнім.*

Лема 3.35. *Оператор J на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ є ліївськи ортогональним автоморфізмом тоді і лише тоді, коли його можна представити у вигляді*

$$J = \mathrm{id}_\mathfrak{g} + N, \tag{3.6}$$

де оператор N задовольняє такі умови: $N[x,y] = 0$ і $[Nx,y]+[x,Ny]+[Nx,Ny] = 0$ для довільних $x,y \in \mathfrak{g}$. Крім того, оператор JN є $(0,1,1)$-диференціюванням на $\mathfrak{g}$.

Доведення. Покладемо $N := J - \mathrm{id}_\mathfrak{g}$. Тоді для довільних $x,y \in \mathfrak{g}$ маємо: $J[x,y] = [x,y]+N[x,y]$, $[Jx,Jy] = [x,y]+[Nx,y]+[x,Ny]+[Nx,Ny]$. Отже, рівності $J[x,y] = [Jx,Jy] = [x,y]$ еквівалентні рівностям $N[x,y] = 0$ і $[Nx,y]+[x,Ny]+[Nx,Ny] = 0$.

Якщо оператор J на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ є ліївськи ортогональним автоморфізмом, то його квадрат J^2 має таку саму властивість. Тому для довільних $x,y \in \mathfrak{g}$ оператор $\tilde{N} := J^2 - \mathrm{id}_\mathfrak{g} = 2N + N^2$ задовольняє умову $[\tilde{N}x,y] + [x,\tilde{N}y] + [\tilde{N}x,\tilde{N}y] = 0$. Підставимо в цю умову вираз для $\tilde{N}$ і врахуємо її виконання для J на (x,y) і (Nx,Ny), звідки $\big[(N^2+N)x,y\big] + \big[x,(N^2+N)y\big] = 0$. Залишилося зауважити, що $N^2+N = JN = NJ$. $\square$

Позначимо через V базовий векторний простір скінченновимірної алгебри Лі $\mathfrak{g}$, а через $\mathrm{LOA}(\mathfrak{g})$ — групу ліївськи ортогональних автоморфізмів на цій алгебрі:

$$\mathrm{LOA}(\mathfrak{g}) := \{J \in \mathrm{GL}(V) \mid J[x,y] = [Jx,Jy] = [x,y] \;\; \forall x,y \in \mathfrak{g}\}.$$

[3.1] Алгебру Лі називають *досконалою*, якщо вона збігається зі своєю похідною алгеброю.

Згідно з лемою 3.35 $\mathrm{LOA}(\mathfrak{g}) = \{J = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} + N \mid N \in \mathrm{loa}(\mathfrak{g})\}$, де

$$\mathrm{loa}(\mathfrak{g}) := \big\{N \in \mathrm{End}(V) \mid N[x,y] = 0,\\ [Nx,y] + [x,Ny] + [Nx,Ny] = 0 \ \ \forall x,y \in \mathfrak{g}\big\}.$$

Лема 3.36. *Нехай $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна алгебра Лі, а J — ліївськи ортогональний автоморфізм алгебри $\mathfrak{g}$. Тоді $\mathrm{im}(J - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \subseteq \mathrm{C}_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{g}')$, де $\mathrm{C}_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{g}')$ позначає централізатор похідної алгебри $\mathfrak{g}'$ алгебри $\mathfrak{g}$ у радикалі $\mathfrak{r}$ цієї алгебри.*

Доведення. Зафіксуємо довільні елементи x, y та z алгебри $\mathfrak{g}$. Використовуючи інваріантність форми Кіллінга $K(x,y)$ алгебри $\mathfrak{g}$ відносно автоморфізмів алгебри $\mathfrak{g}$, отримаємо рівність $K([Jx,Jy],Jz) = K([x,y],z)$. Водночас, з ліївської ортогональності оператора J виводимо $K([Jx,Jy],Jz) = K([x,y],Jz)$. Як наслідок, маємо $K([x,y],Jz - z) = 0$, тобто образ $\mathrm{im}(J - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})$ лежить в ортогональному відносно форми Кіллінга K доповненні похідної алгебри $\mathfrak{g}'$. Як відомо, це доповнення збігається з радикалом $\mathfrak{r}$. Отже, $\mathrm{im}(J - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \subseteq \mathfrak{r}$. Оскільки додатково $[\mathrm{im}(J - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}), \mathfrak{g}'] = \{0\}$ згідно з лемою 3.33, це означає, що $\mathrm{im}(J - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \subseteq \mathrm{C}_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{g}')$. □

Припустимо, що поле $\mathbb{F}$, над яким визначено алгебру $\mathfrak{g}$, є алгебраїчно замкненим. Через $\mathfrak{i}_\mu$ для $\mu \in \mathbb{F}$ позначимо ідеал алгебри $\mathfrak{g}$, введений у лемі 3.27.

Наслідок 3.37. *Нехай J — ліївськи ортогональний автоморфізм скінченновимірної алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Тоді для будь-якого власного значення μ оператора J, що не дорівнює одиниці, відповідний ідеал $\mathfrak{i}_\mu$ є нільпотентним степеня нільпотентності не більше двох.*

Доведення. Оскільки $\mathfrak{i}_\mu$ є ідеалом алгебри $\mathfrak{g}$, то комутатор $[\mathfrak{i}_\mu, \mathfrak{i}_\mu]$ міститься в ідеалі $\mathfrak{i}_\mu$. Більше того, $[\mathfrak{i}_\mu, \mathfrak{i}_\mu] \subset \mathfrak{g}'$ за означенням похідної алгебри $\mathfrak{g}'$ і $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{i}_1$ згідно з лемою 3.33. Отже, $[\mathfrak{i}_\mu, \mathfrak{i}_\mu] \subset \mathfrak{i}_\mu \cap \mathfrak{i}_1 = \mathfrak{z}$, де $\mathfrak{z}$ є центром алгебри $\mathfrak{g}$, тобто степінь нільпотентності ідеала $\mathfrak{i}_\mu$ не більший двох. □

Наслідок 3.38. *Нехай J — ліївськи ортогональний автоморфізм на скінченновимірній алгебрі Лі $\mathfrak{g}$. Тоді алгебру $\mathfrak{g}$ можна представити у вигляді суми двох ідеалів $\mathfrak{i}_1 + \hat{\mathfrak{i}}$, де обмеження оператора J на $\mathfrak{i}_1$ має лише одиничні власні значення, а $\hat{\mathfrak{i}}$ є нільпотентним ідеалом степеня нільпотентності не більше двох.*

У випадку нульового центру можна довести сильніше твердження, не накладаючи обмежень на поле $\mathbb{F}$.

Лема 3.39. *Нехай $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна алгебра Лі з нульовим центром. Оператор J на $\mathfrak{g}$ є ліївськи ортогональним автоморфізмом тоді і лише тоді, коли він допускає представлення у вигляді*

$$J = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} + N, \tag{3.7}$$

де N — нільпотентний оператор на $\mathfrak{g}$ степеня нільпотентності не більше двох: $N^2 = 0$, причому $N\mathfrak{g}' = (N\mathfrak{g})' = \{0\}$ і оператор N додатково є $(0,1,1)$-диференціюванням на $\mathfrak{g}$.

Доведення. Достатність представлення (3.7) очевидно випливає з леми 3.35. Доведемо його необхідність. За умов леми з означення автоморфізма, а також з означення й властивості (3.5) ліївськи ортогонального оператора для довільних $x, y \in \mathfrak{g}$ випливає, що

$$\begin{aligned}[(J + J^{-1})x, y] &= (J + J^{-1})[x, y] = J[x, y] + J^{-1}[x, y] \\ &= [Jx, Jy] + [J^{-1}x, J^{-1}y] = 2[x, y],\end{aligned}$$

тобто $[(J+J^{-1}-2\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})x, y] = 0$, звідки $J+J^{-1}-2\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} = 0$, або $(J-\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^2 = 0$. Поклавши $N := J - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, отримаємо $J = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} + N$, де $N^2 = 0$ і згідно з лемою 3.33 $N\mathfrak{g}' = \{0\}$. Очевидно, що $J^{-1} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} - N$. Перепишемо в термінах оператора N означення ліївської ортогональності для операторів J і J^{-1}:

$$\begin{aligned}[x, y] = [Jx, Jy] &= \big[(\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} + N)x, (\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} + N)y\big] \\ &= [x, y] + [Nx, y] + [x, Ny] + [Nx, Ny],\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[x,y] = [J^{-1}x, J^{-1}y] &= \big[(\mathrm{id}_{\mathfrak g} - N)x, (\mathrm{id}_{\mathfrak g} - N)y\big] \\
&= [x,y] - [Nx,y] - [x,Ny] + [Nx,Ny]
\end{aligned}
$$

для довільних $x, y \in \mathfrak g$. Отже, $[Nx, Ny] = 0$ і $[Nx, y] + [x, Ny] = 0$. $\square$

Теорема 3.40. *Якщо $\mathfrak g$ — скінченновимірна алгебра Лі з нульовим центром, то множина $\mathrm{loa}(\mathfrak g)$ є асоціативною алгеброю відносно композиції операторів з тривіальним (тотожно нульовим) антикомутатором. Також для довільного $N \in \mathrm{loa}(\mathfrak g)$ маємо $N^2 = 0$, $N\mathfrak g' = (N\mathfrak g)' = \{0\}$, $N\mathfrak g \subseteq \mathrm{C}_{\mathfrak r}(\mathfrak g')$ і оператор N є $(0,1,1)$-диференціюванням на $\mathfrak g$. Тут $\mathrm{C}_{\mathfrak r}(\mathfrak g')$ позначає централізатор похідної алгебри $\mathfrak g'$ алгебри $\mathfrak g$ у радикалі $\mathfrak r$ цієї алгебри.*

Доведення. Розглянемо довільну пару операторів $J, \tilde J \in \mathrm{LOA}(\mathfrak g)$. Згідно з лемою 3.35 представимо ці оператори як $J = \mathrm{id}_{\mathfrak g} + N$, $\tilde J = \mathrm{id}_{\mathfrak g} + \tilde N$, де $N, \tilde N \in \mathrm{loa}(\mathfrak g)$. В силу леми 3.39 маємо $N^2 = \tilde N^2 = 0$. Оператори J^{-1}, $\tilde J^{-1}$, $J\tilde J$, $J^{-1}\tilde J^{-1}$ також належать групі $\mathrm{LOA}(\mathfrak g)$, з огляду на рівності $N^2 = \tilde N^2 = 0$ отримаємо представлення $J^{-1} = \mathrm{id}_{\mathfrak g} - N$, $\tilde J^{-1} = \mathrm{id}_{\mathfrak g} - \tilde N$. Отже, $J\tilde J = \mathrm{id}_{\mathfrak g} + \hat N$, $\tilde J^{-1}J^{-1} = \mathrm{id}_{\mathfrak g} + \check N$ з $\hat N := N + \tilde N + N\tilde N$, $\check N := -N - \tilde N + \tilde N N$. Оскільки $J\tilde J \in \mathrm{LOA}(\mathfrak g)$, то $\hat N^2 = 0$, а тому $\tilde J^{-1}J^{-1} = (J\tilde J)J^{-1} = \mathrm{id}_{\mathfrak g} - \hat N$, звідки $\check N = -\hat N$. Підстановка виразів для $\hat N$ і $\check N$ в останню рівність і подальше спрощення дають $N\tilde N + \tilde N N = 0$. Інакше кажучи, антикомутатор будь-яких двох операторів з $\mathrm{loa}(\mathfrak g)$ нульовий.

Оператор $N + \tilde N$ задовольняє умови, що визначають множину $\mathrm{loa}(\mathfrak g)$:

$$
(N + \tilde N)[x,y] = N[x,y] + \tilde N[x,y] = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
&\big[(N+\tilde N)x, y\big] + \big[x, (N+\tilde N)y\big] + \big[(N+\tilde N)x, (N+\tilde N)y\big] \\
&\quad = [Nx, \tilde N y] + [\tilde N x, Ny] = -[x, N\tilde N y] - [x, \tilde N N y] \\
&\quad = -\big[x, (N\tilde N + \tilde N N)y\big] = 0
\end{aligned}
$$

для довільних $x, y \in \mathfrak g$. Перевірка цих умов для оператора cN з довільним $c \in \mathbb F$ є тривіальною з огляду на лему 3.39, з якої випливає, що

$[Nx, Ny] = 0$ і $[Nx, y] + [x, Ny] = 0$. Отже, $N + \tilde{N}, cN \in \mathrm{loa}(\mathfrak{g})$, тобто множина операторів $\mathrm{loa}(\mathfrak{g})$ є лінійним простором над $\mathbb{F}$.

Для будь-яких $N, \tilde{N} \in \mathrm{loa}(\mathfrak{g})$ маємо $N + \tilde{N}, N + \tilde{N} + N\tilde{N} \in \mathrm{loa}(\mathfrak{g})$, а тому також $N\tilde{N} \in \mathrm{loa}(\mathfrak{g})$. Це означає, що множина операторів $\mathrm{loa}(\mathfrak{g})$ замкнена відносно композиції операторів, тобто вона є асоціативною алгеброю над $\mathbb{F}$.

Інші властивості операторів з $\mathrm{loa}(\mathfrak{g})$ з твердження теореми випливають з лем 3.36, 3.39. □

3.4. Ліївськи ортогональні оператори на метричних алгебрах Лі і алгебрах Лі з ненульовим фактором Леві

Нагадаємо, що алгебру Лі $\mathfrak{g}$ називають *метричною* [50, 66], якщо на цій алгебрі існує невироджена симетрична інваріантна білінійна форма $B(x, y)$ (яка задає ad-інваріантну "метрику" на $\mathfrak{g}$).[3.2] Класичними прикладами метричних алгебр Лі є

- напівпрості алгебри, для кожної з яких відповідна форма Кіллінга є єдиною з точністю до ненульового множника невиродженою симетричною інваріантною білінійною формою,
- абелеві алгебри, для яких кожна невироджена симетрична білінійна форма є тривіально інваріантною,
- редуктивні алгебри як прямі суми напівпростих і абелевих.

Але є й інші метричні алгебри Лі. Будь-яка метрична розв'язна алгебра Лі має ненульовий центр [49], тому, наприклад, алгебра $\mathfrak{g}_{2.1}$ не є метричною. Метричні дійсні алгебри Лі розмірності не вище п'яти вичерпують

[3.2]Інші назви — *квадратичні* [75], *регулярні квадратичні* [49], *самодуальні* або *ортогональні* [87], *симетрично самодуальні* [51], *метризовні* [33] або *квазікласичні* [40] алгебри Лі; див. також [46, 83] і посилання там само.

тривимірні $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$, $\mathrm{so}(3)$, чотиривимірні $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})\oplus \mathrm{A}_1$, $\mathrm{so}(3)\oplus \mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_{4.8}^{-1}$, $\mathrm{A}_{4.9}^{0}$,[3.3] п'ятивимірні $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})\oplus 2\mathrm{A}_1$, $\mathrm{so}(3)\oplus 2\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_{4.8}^{-1}\oplus \mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_{4.9}^{0}\oplus \mathrm{A}_1$, $\mathfrak{n}_{5.4}$ [50]. У цій самій статті наведено шестивимірні метричні алгебри Лі. Див. також огляд результатів щодо метричних алгебр Лі в [83] і класифікацію незвідних метричних алгебр Лі розмірності не вище 13 в [28].

Лема 3.41. *Довільний ліївськи ортогональний оператор на будь-якій метричній алгебрі Лі еквівалентний такому, що його анулює многочлен x^2-1.*

Доведення. Нехай $\mathfrak{g}$ — метрична алгебра Лі, а J — ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$. За означенням таких алгебр, на $\mathfrak{g}$ існує симетрична інваріантна білінійна форма $B(x,y)$, де інваріантність означає асоціативність відносно дужки Лі: $B([x,y],z)=B(x,[y,z])$. Використовуючи означення ліївськи ортогонального оператора та зазначену асоціативність, для будь-яких x, y, z з $\mathfrak{g}$ маємо рівності

$$B([Jx,Jy],Jz)=B(Jx,[Jy,Jz])=B(Jx,[y,z])=B([Jx,y],z),$$

$$\begin{aligned}B([Jx,Jy],Jz)&=-B([Jy,Jx],Jz)=-B(Jy,[Jx,Jz])=\\&=-B(Jy,[x,z])=-B([Jy,x],z)=B([x,Jy],z).\end{aligned}$$

Отже, $B([Jx,y],z)=B([x,Jy],z)$, або $B([Jx,y]-[x,Jy],z)=0$. Оскільки z довільне, а форма B невироджена, то $[Jx,y]-[x,Jy]=0$, тобто $[Jx,y]=[x,Jy]$ для довільних x і y з $\mathfrak{g}$. Скомбінувавши цю властивість з означенням ліївськи ортогонального оператора, отримаємо $[x,y]=[Jx,Jy]=[x,J^2y]$, звідки $[x,J^2y-y]=0$, тобто $\mathrm{im}(J^2-\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\subseteq\mathfrak{z}$.

Розкладемо алгебру $\mathfrak{g}$ на пряму суму центру $\mathfrak{z}$ та доповнення $\mathfrak{l}$ до нього як векторних просторів: $\mathfrak{g}=\mathfrak{z}\dotplus\mathfrak{l}$ (див. доведення наслідку 3.20). Нехай P — оператор проекції на $\mathfrak{l}$ у зафіксованому вище розкладі алгебри $\mathfrak{g}$. Тоді $PJ^2-P=(PJ)^2-P=0$, або $((PJ)^2-P)|_{\mathfrak{l}}=(PJ)^2|_{\mathfrak{l}}-\mathrm{id}_{\mathfrak{l}}=0$. Отже, $\mathrm{id}_{\mathfrak{z}}\oplus(PJ)^2|_{\mathfrak{l}}$ — шуканий оператор. □

[3.3] Алгебри $\mathrm{A}_{4.8}^{-1}$ і $\mathrm{A}_{4.9}^{0}$ відповідно називають діамантовою алгеброю Лі [43] і алгеброю Лі осцилятора [110]. Це дві дійсні форми комплексної діамантової алгебри Лі $\mathfrak{g}_{4.8}^{-1}$.

Наслідок 3.42. *Многочлен $x^2 - 1$ анулює довільний ліївськи ортогональний оператор на будь-якій метричній алгебрі Лі з нульовим центром.*

Доведення. Оскільки центр алгебри $\mathfrak{g}$ нульовий, а x довільний, то з $[x, J^2y - y] = 0$ випливає, що $J^2y - y = 0$ для всіх y з $\mathfrak{g}$. Це означає, що $J^2 - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} = 0$, тобто многочлен $x^2 - 1$ анулює J. □

Теорема 3.43. *Нехай $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна метрична алгебра Лі, а J — ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$. Тоді існує розклад алгебри $\mathfrak{g}$ у пряму суму двох ідеалів $\mathfrak{i}_+$, $\mathfrak{i}_-$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_+ \oplus \mathfrak{i}_-$ такий, що оператор J можна зобразити у вигляді*

$$J = \mathrm{id}_{\mathfrak{i}_+} \oplus (-\mathrm{id}_{\mathfrak{i}_-}) + J_{\mathfrak{z}},$$

де $J_{\mathfrak{z}}$ — оператор на $\mathfrak{g}$ з образом, що міститься в центрі $\mathfrak{z}$.

Теорема 3.44. *Нехай $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна метрична алгебра Лі з нульовим центром, а J — ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$. Тоді існує розклад алгебри $\mathfrak{g}$ у пряму суму двох ідеалів $\mathfrak{i}_+$, $\mathfrak{i}_-$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_+ \oplus \mathfrak{i}_-$ такий, що оператор J можна зобразити у вигляді*

$$J = \mathrm{id}_{\mathfrak{i}_+} \oplus (-\mathrm{id}_{\mathfrak{i}_-}).$$

Інакше кажучи, кожний нетривіальний ліївськи ортогональний оператор J розщеплює метричну алгебру Лі $\mathfrak{g}$ з нульовим центром на два власних ідеали, на одному з яких діє як id, а на іншому — як $-\mathrm{id}$.

Будь-яка напівпроста алгебра Лі $\mathfrak{g}$ є метричною алгеброю Лі з нульовим центром, де форма Кіллінга є єдиною з точністю до ненульового множника невиродженою симетричною інваріантною білінійною формою. Тому наслідок 3.42 справедливий для таких алгебр, а отже він узагальнює лему 12 з [92]. З нього випливає, що всі власні числа ліївськи ортогонального оператора J дорівнюють 1 або -1, що узгоджується з наслідками 3.29 та 3.30. Але твердження цього наслідку значно сильніше: воно гарантує існування власного базису оператора J. З урахуванням наслідку 3.30, маємо такі теореми:

Теорема 3.45. *Ліївськи ортогональні оператори на будь-якій простій алгебрі Лі вичерпуються тривіальними операторами* $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ *та* $-\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$.

Теорема 3.46. *Нехай* $\mathfrak{g}$ *— скінченновимірна напівпроста алгебра Лі, а* $\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{i}_p$ *— її розклад на прості компоненти. Тоді будь-який ліївськи ортогональний оператор* J *на* $\mathfrak{g}$ *можна зобразити у вигляді*

$$J = J_1 \oplus \cdots \oplus J_p,$$

де для кожного $s = 1, \ldots, p$ *або* $J_s = \mathrm{id}_{\mathfrak{i}_s}$*, або* $J_s = -\mathrm{id}_{\mathfrak{i}_s}$.

Комбінуючи лему 3.25 з теоремою 3.46, можна одразу отримати повний опис ліївськи ортогональних операторів на редуктивних алгебрах Лі.

Наслідок 3.47. *Нехай* $\mathfrak{g}$ *— скінченновимірна редуктивна алгебра Лі, а* $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{i}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{i}_p$ *— її розклад на центр і прості компоненти. Оператор* J *є ліївськи ортогональним на* $\mathfrak{g}$ *тоді й лише тоді, коли його можна зобразити у вигляді:*

$$J = J_0 \oplus J_1 \oplus \cdots \oplus J_p + J_{\mathfrak{z}},$$

де для кожного $s = 1, \ldots, p$ *або* $J_s = \mathrm{id}_{\mathfrak{i}_s}$*, або* $J_s = -\mathrm{id}_{\mathfrak{i}_s}$*,* J_0 *— тотожно нульовий оператор на* $\mathfrak{z}$*,* $J_{\mathfrak{z}}$ *— довільний оператор на* $\mathfrak{g}$ *з образом, що міститься в центрі* $\mathfrak{z}$.

За лемою 3.27, алгебру Лі, що допускає ліївськи ортогональний оператор J, можна зобразити у вигляді суми ідеалів $\mathfrak{i}_\lambda$, кожен з яких має вигляд: $\mathfrak{i}_\lambda = \mathfrak{l}_\lambda \dotplus \mathfrak{l}_{\lambda^{-1}} \dotplus \mathfrak{z}$, якщо $\lambda \notin \{\pm 1, 0\}$, або $\mathfrak{i}_\lambda = \mathfrak{l}_\lambda \dotplus \mathfrak{z}$, якщо $\lambda = \pm 1$. Тут кожне λ — ненульове власне значення оператора J. Якщо λ^{-1} також є власним числом оператора, відповідний ідеал у сумі опускаємо для уникнення повторень. Ця сума в загальному випадку не є прямою, оскільки кожна пара таких ідеалів перетинається по центру алгебри $\mathfrak{g}$. Але, оскільки ці ідеали є інваріантними підпросторами оператора J і $[\mathfrak{i}_\lambda, \mathfrak{i}_\mu] = 0$, коли $\lambda \neq \mu$ і $\mu\lambda \neq 1$, з урахуванням відношення еквівалентності кожен з цих ідеалів можна досліджувати окремо з точки зору обмежень на їх структуру, які накладає оператор J.

Кожен ідеал $\mathfrak{i}_\lambda$, де $\lambda \neq \pm 1$, є розв'язним і тому міститься в радикалі $\mathfrak{r}$ алгебри $\mathfrak{g}$. Отже, ненульовий перетин з фактором Леві алгебри $\mathfrak{g}$ можуть мати лише ідеали $\mathfrak{i}_1$ та $\mathfrak{i}_{-1}$. Завдяки існуванню інволюції $J \to -J$ на множині ліівськи ортогональних операторів, достатньо вивчити ідеал $\mathfrak{i}_1$.

За наслідком 4 з [1, с. 82] радикал $\mathfrak{r}$ та фактор Леві $\mathfrak{f}$ всієї алгебри $\mathfrak{g}$ у перетині з ідеалом $\mathfrak{i}_1$ дають відповідно його радикал $\mathfrak{r}_1$ та фактор Леві $\mathfrak{f}_1$. Зауважимо, що $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_1 \oplus \mathfrak{f}_{-1}$, де $\mathfrak{f}_{-1} = \mathfrak{f} \cap \mathfrak{i}_{-1}$. За лемою 3.22, радикал $\mathfrak{r}_1$ інваріантний відносно J, а тому й відносно обмеження J на $\mathfrak{i}_1$. Фактор-алгебра ідеалу $\mathfrak{i}_1$ по його радикалу $\mathfrak{r}_1$ ізоморфна підалгебрі $\mathfrak{f}_1$ і, очевидно, є напівпростою. Оскільки радикал $\mathfrak{r}_1$ інваріантний відносно J, то факторизація обмеження J_1 оператора J на $\mathfrak{i}_1$ по $\mathfrak{r}_1$ дає добре визначений оператор $J_1/\mathfrak{r}_1$ на фактор-алгебрі $\mathfrak{i}_1/\mathfrak{r}_1$ з єдиним власним значенням, рівним 1. За теоремою 3.46, факторизований оператор $J_1/\mathfrak{r}_1$ є тотожнім. Отже, образ оператора $J_1 - \mathrm{id}_{\mathfrak{i}_1}$ міститься в $\mathfrak{r}_1$, а сам оператор є нільпотентним за визначенням $\mathfrak{i}_1$ з точністю до відношення еквівалентності.

Підсумуємо отриманий результат у вигляді твердження.

Твердження 3.48. *Нехай J — ліівськи ортогональний оператор на скінченновимірній алгебрі Лі $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{i}_1$ — ідеал, що відповідає власному числу 1. Тоді обмеження J_1 оператора J на ідеал $\mathfrak{i}_1$ можна зобразити у вигляді $J_1 = \mathrm{id}_{\mathfrak{i}_1} + N$, де N — нільпотентний оператор на $\mathfrak{i}_1$, причому його образ міститься в радикалі $\mathfrak{r}_1$ ідеалу $\mathfrak{i}_1$.*

3.5. Прямий обрахунок ліівськи ортогональних операторів

Для деяких класів алгебр Лі простої структури можна цілковито описати множини їх ліівськи ортогональних операторів, використовуючи лише означення таких операторів та комутаційні співвідношення у канонічних базисах цих алгебр.

3.5.1. Спеціальні лінійні алгебри. Для зручності замість $\mathrm{sl}(n,\mathbb{F})$, де $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ або $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, будемо обраховувати ліївськи ортогональні оператори на $\mathrm{gl}(n,\mathbb{F})$. Це можливо, оскільки алгебра $\mathrm{gl}(n,\mathbb{F})$ є центральним розширенням алгебри $\mathrm{sl}(n,\mathbb{F})$: $\mathrm{gl}(n,\mathbb{F})=\mathrm{sl}(n,\mathbb{F})\oplus\langle E_n\rangle$, де E_n — одинична матриця розмірності n, яка й породжує центр $\langle E_n\rangle$ алгебри $\mathrm{gl}(n,\mathbb{F})$. Тому за лемою 3.10 оператор J буде ліївськи ортогональним на алгебрі $\mathrm{gl}(n,\mathbb{F})$ тоді й лише тоді, коли оператор $PJ|_{\mathrm{sl}(n,\mathbb{F})}$ буде ліївськи ортогональним на алгебрі $\mathrm{sl}(n,\mathbb{F})$. Тут P позначає оператор проекції з $\mathrm{gl}(n,\mathbb{F})$ на $\mathrm{sl}(n,\mathbb{F})$, асоційований з наведеним вище розкладом $\mathrm{gl}(n,\mathbb{F})$.

Зауважимо, що алгебра Лі $\mathrm{sl}(n,\mathbb{F})$ є простою для кожного n, тому будь-який ліївськи ортогональний оператор на ній невироджений. Через це завжди можна знайти відповідний невироджений ліївськи ортогональний оператор на її центральному розширенні — $\mathrm{gl}(n,\mathbb{F})$. Як наслідок, можна обмежитися розглядом лише невироджених ліївськи ортогональних операторів на $\mathrm{gl}(n,\mathbb{F})$.

Нехай J — такий оператор. Тоді умову ліївської ортогональності можна представити у вигляді $[Jx,y]=[x,J^{-1}y]$. Запишемо цю рівність для матричних одиниць $x=E^{ij}$, $y=E^{kl}$ алгебри $\mathrm{gl}(n,\mathbb{F})$ при фіксованих значеннях індексів i, j, k, l з $\{1,\dots,n\}$. Для цього позначимо

$$JE^{ij}=A^{ij},\quad J^{-1}E^{kl}=B^{kl}.$$

Розклад по базису для A^{ij} та B^{kl} має вигляд

$$A^{ij}=A^{ij}_{pq}E^{pq},\quad B^{kl}=B^{kl}_{pq}E^{pq}.$$

Тут і надалі за індексами p і q, що повторюються, іде підсумовування від 1 до n. Отже, умова ліївської ортогональності для матричних одиниць матиме вигляд

$$[A^{ij},E^{kl}]-[E^{ij},B^{kl}]=[A^{ij},E^{kl}]+[B^{kl},E^{ij}]=0,$$

а після розкладу матриць A^{ij} та B^{kl} по базису матричних одиниць —

$$A^{ij}_{pk}E^{pl}-A^{ij}_{lq}E^{kq}+B^{kl}_{pi}E^{pj}-B^{kl}_{jq}E^{iq}=0.$$

Розглядаючи різні можливості для значень індексів i, j, k, l з $\{1,\dots,n\}$, зберемо в цій рівності коефіцієнти при базисних елементах і прирівняємо їх до нуля.

$$
\begin{aligned}
k\neq i,\ l\neq j,\quad & E^{pl}, p\neq i,k\colon\ A^{ij}_{pk}=0,\quad E^{pj}, p\neq i,k\colon\ B^{kl}_{pi}=0,\\
& E^{kq}, q\neq j,l\colon\ A^{ij}_{lq}=0,\quad E^{iq}, q\neq j,l\colon\ B^{kl}_{jq}=0,\\
& E^{il}\colon\ A^{ij}_{ik}=B^{kl}_{jl},\quad E^{kl}\colon\ A^{ij}_{kk}=A^{ij}_{ll},\\
& E^{kj}\colon\ A^{ij}_{lj}=B^{kl}_{ki},\quad E^{ij}\colon\ B^{kl}_{ii}=B^{kl}_{jj};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k=i,\ l\neq j,\quad & E^{pl}, p\neq i\colon\ A^{ij}_{pi}=0,\quad E^{pj}, p\neq i\colon\ B^{kl}_{pk}=0,\\
& E^{kq}, q\neq j,l\colon\ A^{ij}_{lq}+B^{kl}_{jq}=0,\\
& E^{il}\colon\ A^{ij}_{ii}=A^{ij}_{ll}+B^{kl}_{jl},\quad E^{ij}\colon\ B^{kl}_{kk}=A^{ij}_{lj}+B^{kl}_{jj};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k\neq i,\ l=j,\quad & E^{kq}, q\neq j\colon\ A^{ij}_{jq}=0,\quad E^{iq}, q\neq j\colon\ B^{kl}_{lq}=0,\\
& E^{pj}, p\neq k,i\colon\ A^{ij}_{pk}+B^{kl}_{pi}=0,\\
& E^{kj}\colon\ A^{ij}_{jj}=A^{ij}_{kk}+B^{kl}_{ki},\quad E^{ij}\colon\ B^{kl}_{ll}=A^{ij}_{ik}+B^{kl}_{ii};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k=i,\ l=j,\quad & E^{pj}, p\neq i\colon\ A^{ij}_{pi}+B^{kl}_{pk}=0,\quad E^{iq}, q\neq j\colon\ A^{ij}_{jq}+B^{kl}_{lq}=0,\\
& E^{ij}\colon\ A^{ij}_{ii}+B^{kl}_{kk}=A^{ij}_{jj}+B^{kl}_{ll}.
\end{aligned}
$$

Оскільки система симетрична відносно A^{ij} і B^{kl}, достатньо вивчити лише обмеження, накладені нею на A^{ij}. З системи випливає, що $A^{ij}_{pq}=0$, коли $p\neq q$ і $(p,q)\neq(i,j)$; $A^{ij}_{kk}=A^{ij}_{ll}$, якщо $i\neq j$; $A^{ii}_{kk}=A^{ii}_{ll}$, якщо $k,l\neq i$. Це означає, що $A^{ij}=\lambda_{ij}E^{ij}+\kappa_{ij}E_n$, де λ_{ij}, κ_{ij} — деякі сталі. Оскільки значення оператора J на базисних елементах визначені з точністю до додавання елементів з центру, сталу κ_{ij} можна вважати рівною нулю, тобто $A^{ij}=JE^{ij}=\lambda_{ij}E^{ij}$. Це означає, що кожний базисний елемент E^{ij} є власним вектором оператора J. Тоді для довільної трійки індексів (i,j,k) такої, що $(i,k)\neq(k,j)$, отримаємо: $[E^{ik},E^{kj}]=[JE^{ik},JE^{kj}]=$ $=\lambda_{ik}\lambda_{kj}[E^{ik},E^{kj}]$, а тому $\lambda_{ik}\lambda_{kj}=1$, оскільки $[E^{ik},E^{kj}]\neq0$. Отже, λ_{ij} всі одночасно дорівнюють або 1, або -1.

У результаті, отримаємо твердження теореми 3.45 для часткового випадку $\mathfrak{g}=\mathrm{sl}(n,\mathbb{F})$.

3.5.2. Алгебри Гейзенберга. Розглянемо алгебру Гейзенберга h_n для деякого n. Це нільпотентна алгебра Лі розмірності $2n+1$ і степеня нільпотентності два з одновимірним центром $\mathfrak{z}$. Зафіксуємо базис $(e, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ алгебри h_n, в якому ненульові комутаційні співвідношення мають канонічний вигляд:

$$[p_j, q_j] = e,$$

а тому $\mathfrak{z} = \langle e \rangle$. Тут і надалі індекси i, j, k пробігають значення від 1 до n.

Нехай J — ліївськи ортогональний оператор на h_n, а $\tilde{J}$ — його суттєва частина, тобто $\tilde{J} = (\mathrm{P}J)|_{\tilde{\mathrm{h}}}$, де $\tilde{\mathrm{h}} = \langle p_i, q_j \rangle$ та P — оператор проекції на $\tilde{\mathrm{h}}$ при зображенні $\mathrm{h}_n = \mathfrak{z} \dotplus \tilde{\mathrm{h}}$. Матрицю оператора $\tilde{J}$ у канонічному базисі $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ будемо позначати так само, як оператор. Розіб'ємо цю матрицю на блоки відповідно до розбиття базису на $(p_1, \dots, p_n)$ і $(q_1, \dots, q_n)$, тобто

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \text{де} \quad A, B, C, D \in M_n.$$

Тоді

$$\tilde{J} p_j = p_i a_{ij} + q_i c_{ij}, \quad \tilde{J} q_k = p_i b_{ik} + q_i d_{ik}.$$

Тут і надалі за індексом i, що повторюється, іде підсумовування. За означенням ліївськи ортогонального оператора маємо:

$$[Jp_j, Jq_k] = (a_{ij} d_{ik} - c_{ij} b_{ik}) e = \delta_{ik} e,$$
$$[Jp_j, Jp_k] = (a_{ij} c_{ik} - c_{ij} a_{ik}) e = 0,$$
$$[Jq_j, Jq_k] = (b_{ij} d_{ik} - d_{ij} b_{ik}) e = 0,$$

де δ_{jk} — символ Кронекера. В матричних позначеннях ці рівності можна записати у вигляді:

$$A^{\mathsf{T}} D - C^{\mathsf{T}} B = E, \quad A^{\mathsf{T}} C - C^{\mathsf{T}} A = 0, \quad B^{\mathsf{T}} D - D^{\mathsf{T}} B = 0,$$

де $E \in M_n$ — одинична матриця. Це означає, що $\tilde{J} \in \mathrm{Sp}_{2n}$. Дійсно, нехай

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

— матриця канонічної симплектичної форми. Тоді

$$\tilde{J}^{\mathsf{T}} S \tilde{J} = \begin{pmatrix} C^{\mathsf{T}}A - A^{\mathsf{T}}C & C^{\mathsf{T}}B - A^{\mathsf{T}}D \\ D^{\mathsf{T}}A - B^{\mathsf{T}}C & D^{\mathsf{T}}B - B^{\mathsf{T}}D \end{pmatrix} = S.$$

Теорема 3.49. *Оператор є ліївськи ортогональним на алгебрі Гейзенберга* h_n *тоді й лише тоді, коли в канонічному базисі* $(e, p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ *його матриця має вигляд*

$$\begin{pmatrix} r & R \\ 0 & \tilde{J} \end{pmatrix},$$

де r *— довільний скаляр,* R *— довільна матриця з* $M_{1,2n}$*,* 0 *позначає нульову матрицю з* $M_{2n,1}$*,* $\tilde{J}$ *— довільна матриця з* Sp_{2n}*.*

3.5.3. Майже абелеві алгебри. Алгебру Лі називають майже абелевою, якщо вона містить абелів ідеал корозмірності 1. Будь-яка майже абелева алгебра є розв'язною алгеброю Лі степеня розв'язності не більше двох.

Нехай $\mathfrak{g}$ — майже абелева, але не абелева алгебра розмірності n. Виберемо в $\mathfrak{g}$ базис таким чином, що $e_1, \ldots, e_{n-1}$ утворюють базис $(n-1)$-вимірного абелевого ідеалу I. Тоді ненульові комутаційні співвідношення алгебри $\mathfrak{g}$ вичерпуються такими: $[e_n, e_j] = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ij} e_i$. Тут і надалі індекси i, j, i', j' пробігають значення від 1 до $n-1$, а індекси k, l пробігають значення від 1 до n. За індексами, що повторюються, йде підсумовування. Таким чином, ненульова матриця $A = (a_{ij}) \in M_{n-1}$ повністю задає майже абелеву алгебру $\mathfrak{g}$. Зауважимо, що центр алгебри $\mathfrak{g}$ співпадає з ядром оператора A, що діє на I та який визначено матрицею A. Майже абелеві алгебри $\mathfrak{g}$ і $\tilde{\mathfrak{g}}$ ізоморфні, якщо відповідні матриці A і $\tilde{A}$ подібні з точністю до постійного ненульового множника, тобто існують ненульова стала μ і невироджена матриця $S \in M_{n-1}$ такі, що $\tilde{A} = \mu S^{-1} A S$.

Твердження 3.50. *Нехай $\mathfrak{g}$ — n-вимірна майже абелева, але не абелева алгебра Лі з зафіксованим базисом таким, що $\langle e_1,\dots,e_m\rangle = \mathfrak{z}$, де $m = \dim\mathfrak{z} < n-1$, $\langle e_1,\dots,e_{n-1}\rangle$ — абелевий ідеал, а тому комутаційні співвідношення алгебри $\mathfrak{g}$ визначають матрицю $A = (a_{ij})$: $[e_n, e_j] = a_{ij}e_i$, де перші m стовпчиків A нульові і ранг A дорівнює $n-m$. Оператор J на $\mathfrak{g}$ є ліївськи ортогональним тоді й лише тоді, коли його матриця в базисі $(e_1,\dots,e_n)$ має вигляд:*

1. $m = \dim\mathfrak{z} < n-2$:

$$\begin{pmatrix} B_0 & B_1 & B_2 \\ 0 & \mu E & B_3 \\ 0 & 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix},$$

де B_0, B_1, B_2 та B_3 — довільні матриці розміру $m\times m$, $m\times(n-m-1)$, $m\times 1$ та $n-m-1\times 1$ відповідно, μ — довільна ненульова стала, E —одинична матриця розміру $n-m-1$, а нулі позначають нульові матриці підходящих розмірів.

2. $m = \dim\mathfrak{z} = n-2$, тобто алгебра $\mathfrak{g}$ ізоморфна або $(n-2)\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_{2.1}$, або $(n-3)\mathfrak{g}_1\oplus\mathrm{h}_3$:

$$\begin{pmatrix} B_0 & B_1 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

де B_0 та B_1 — довільні матриці розміру $(n-2)\times(n-2)$ та $(n-2)\times 2$ відповідно, 0 — нульова матриця розміру $2\times 2n$, а матриця C — довільна матриця розміру 2×2 з визначником 1, $C\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$.

Доведення. Розіб'ємо матрицю оператора J на блоки відповідно до зображення алгебри $\mathfrak{g}$ як прямої суми векторних просторів $I = \langle e_1,\dots e_{n-1}\rangle$ та $\langle e_n\rangle$:

$$J = \begin{pmatrix} J_{II} & J_{In} \\ J_{nI} & J_{nn} \end{pmatrix}.$$

За означенням ліївськи ортогонального оператора, маємо

$$\begin{aligned} 0 &= [e_i, e_j] = [Je_i, Je_j] = [J_{ki}e_k, J_{lj}e_l] = (J_{ni}J_{i'j} - J_{nj}J_{i'i})a_{j'i'}e_{j'}, \\ a_{j'j}e_{j'} &= [e_n, e_j] = [Je_n, Je_j] = [J_{kn}e_k, J_{lj}e_l] \\ &\qquad = (J_{nn}J_{i'j} - J_{nj}J_{i'n})a_{j'i'}e_{j'}, \end{aligned}$$

або у матричних позначеннях

$$J_{ni}(AJ_{II})_{j'j} = J_{nj}(AJ_{II})_{j'i}, \tag{3.8}$$

$$J_{nn}(AJ_{II})_{j'j} - J_{nj}(AJ_{jn})_{j'} = a_{j'j}. \tag{3.9}$$

Система (3.8) показує, що природно розглянути окремо два випадки, які покривають усі можливості: або $J_{nj} = 0$ для кожного j, або існує j_0 таке, що $J_{nj_0} \neq 0$.

1. Нехай $J_{nj} = 0$ для кожного j. Тоді з (3.9) випливає, що $J_{nn}AJ_{II} = A$. Оскільки A — ненульова матриця, отримаємо, що $J_{nn} \neq 0$. Позначимо $\mu = 1/J_{nn}$. Система (3.9) набуває вигляду $A(J_{II} - \mu E) = 0$. Це еквівалентно тому, що образ оператора $J_{II} - \mu E$ міститься в $\ker A$, що співпадає з центром $\mathfrak{z}$. Отже, отримаємо перший випадок теореми.

2. Припустимо, що існує j_0 таке, що $J_{nj_0} \neq 0$. Тоді всі набори $((AJ_{II})_{1j}, \dots, (AJ_{II})_{n-1,j}, J_{nj})$ пропорційні, тобто $J_{nj} = \lambda_j J_{nj_0}$ та $(AJ_{II})_{ij} = \lambda_j (AJ_{II})_{ij_0}$ для деяких сталих λ_j. Підставляючи отримані вирази у систему (3.9), отримаємо, що $a_{ij} = \kappa_i \lambda_j$, де $\kappa_i = J_{nn}(AJ_{II})_{ij_0} - J_{nj_0}(AJ_{In})_i$. Оскільки $A \neq 0$, це означає, що ранг A дорівнює одиниці. З точністю до заміни базису алгебри можна вважати, що або $A = E^{n-1,n-1}$, або $A = E^{n-2,n-1}$. У термінах κ і λ маємо, що $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-2} = 0$, а тому $j_0 = n-1$ і $\lambda_{n-1} = 1$. Також відповідно або $\kappa_{n-1} = 1$, або $\kappa_{n-2} = 1$, а всі інші κ нульові. Тоді з рівняння $J_{nj} = \lambda_j J_{n,n-1}$ випливає, що $J_{nj} = 0$ для j від 1 до $n-2$. Аналогічно, рівняння $(AJ_{II})_{ij} = \lambda_j (AJ_{II})_{i,n-1}$ для $i = n-1$ або $i = n-2$ відповідно дає, що $J_{n,n-1} = 0$ для j від 1 до $n-2$. Ще одне рівняння $J_{n-1,n-1}J_{nn} - J_{n-1,n}J_{n,n-1} = 1$ є наслідком означення κ. Інших рівнянь на коефіцієнти матриці J не виникає, що призводить до випадку 2 теореми. □

3.5.4. Комплексні розв'язні алгебри з нільрадикалом мінімальної розмірності. В [7, теорема 5] Г.М. Мубаракзянов довів, що розмірність нільрадикала $\mathfrak{n}$ n-вимірної розв'язної алгебри $\mathfrak{g}$ більша або рівна $n/2$. Для $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, якщо $\dim \mathfrak{n} = n/2$ у випадку парного n, то $\mathfrak{g}$ є прямою сумою $n/2$ копій двовимірної неабелевої алгебри $\mathfrak{g}_{2.1}$: $\mathfrak{g} = (n/2)\mathfrak{g}_{2.1}$ [7, теорема 6]. Згідно теореми 7 цієї ж статті [7] у випадку непарного n мінімальна розмірність нільрадикала дорівнює $[n/2] + 1 = (n + 1)/2$ і комплексна алгебра $\mathfrak{g}$ з нільрадикалом такої розмірності розкладається у пряму суму однієї одновимірної (абелевої) алгебри $\mathfrak{g}_1$ та $n/2$ копій алгебри $\mathfrak{g}_{2.1}$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus [n/2]\mathfrak{g}_{2.1}$. За лемою 3.25 довільний ліївськи ортогональний оператор J на алгебрі $\mathfrak{g}$ розкладається на пряму суму операторів на компонентах алгебри $\mathfrak{g}$ (у випадку непарної розмірності — з точністю до еквівалентності ліївськи ортогональних операторів, оскільки у цьому випадку алгебра має ненульовий центр $\mathfrak{z} = \mathfrak{g}_1$). Оскільки алгебра $\mathfrak{g}_{2.1}$ має нульовий центр, то ліївськи ортогональні оператори на цій алгебрі утворюють групу. Прямим обрахунком легко встановити (див. також [30, Example 1]), що ця група співпадає з групою $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Тому з урахуванням леми 3.10 очевидним є таке твердження.

Твердження 3.51. *Нехай n-вимірна комплексна розв'язна алгебра $\mathfrak{g}$ має нільрадикал мінімальної з можливих розмірності $[(n+1)/2]$. Тоді, у випадку парного n, $\mathfrak{g} = [n/2]\mathfrak{g}_{2.1}$ і ліївськи ортогональні оператори на $\mathfrak{g}$ утворюють групу, ізоморфну прямому добутку $n/2$ копій групи $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. У випадку непарного n, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus [n/2]\mathfrak{g}_{2.1}$, а оператор J на $\mathfrak{g}$ ліївськи ортогональний тоді і лише тоді, коли $J = 0 \oplus J_1 \oplus \cdots \oplus J_{[n/2]} + J_0$, де 0 позначає нульовий оператор на центрі $\mathfrak{z} = \mathfrak{g}_1$, J_i — ліївськи ортогональний оператор на i-й копії $\mathfrak{g}_{2.1}$ (тобто його матриця належить групі $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$), а J_0 — деякий оператор на $\mathfrak{g}$ з образом у $\mathfrak{z} = \mathfrak{g}_1$.*

Зауваження 3.52. Аналогічний результат справедливий для дійсних алгебр $[n/2]\mathrm{A}_{2.1}$ з парним n і $\mathrm{A}_1 \oplus [n/2]\mathrm{A}_{2.1}$ з непарним n з заміною $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ на $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

3.5.5. Нерозв'язні алгебри низьких розмірностей. Нерозв'язні комплексні алгебри Лі розмірності $n \leqslant 5$ вичерпують алгебри $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ ($n=3$), $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{g}_1$ ($n=4$), $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus 2\mathfrak{g}_1$, $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{g}_{2.1}$ та $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \inplus 2\mathfrak{g}_1$ ($n=5$).

Алгебра $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ проста, а тому в силу теореми 3.45 ліївськи ортогональні оператори на ній є тривіальними $\mathrm{id}_\mathfrak{g}$ та $-\mathrm{id}_\mathfrak{g}$ (див. також підрозділ 3.5.1). Алгебри $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{g}_1$ та $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus 2\mathfrak{g}_1$ є редуктивними, а ліївськи ортогональні оператори для редуктивних алгебр повністю описано в наслідку 3.47.

Алгебра $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{g}_{2.1}$ має нульовий центр і є прямою сумою своїх ідеалів $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ і $\mathfrak{g}_{2.1}$. Тому за лемою 3.25 будь-який ліївськи ортогональний оператор на цій алгебрі є прямою сумою ліївськи ортогональних операторів на ідеалах $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ і $\mathfrak{g}_{2.1}$. Множини ліївськи ортогональних операторів на цих ідеалах уже описано (див. вище та попередній підрозділ). Таким чином, ліївськи ортогональні оператори на алгебрі $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{g}_{2.1}$ утворюють групу, ізоморфну групі $\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Залишилося описати лише ліївськи ортогональні оператори на алгебрі $L = \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \inplus 2\mathfrak{g}_1$. Ненульові комутаційні співвідношення цієї алгебри в канонічному базисі вичерпуються такими:

$$\begin{aligned}
&[e_1,e_2]=2e_2, \quad [e_1,e_3]=-2e_3, \quad [e_2,e_3]=e_1,\\
&[e_1,e_4]=e_4, \quad [e_2,e_5]=e_4, \quad [e_3,e_4]=e_5, \quad [e_1,e_5]=-e_5,
\end{aligned}$$

тобто e_1, e_2, e_3 утворюють базис у факторі Леві, ізоморфному $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, а e_4 і e_5 утворюють базис абелевого радикала $\mathfrak{r}$ цієї алгебри.

Нехай J — деякий ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$. Єдиним ідеалом алгебри $\mathfrak{g}$, який містить фактор Леві, є сама алгебра $\mathfrak{g}$. Зауважимо також, що алгебра $\mathfrak{g}$ має нульовий центр. Тоді з розгляду до твердження 3.48 випливає, що оператор J має єдине власне значення, рівне 1 або -1. З точністю до інволюції можна вважати, що воно дорівнює 1. Тобто вся алгебра $\mathfrak{g}$ міститься в кореневому підпросторі оператора J, що відповідає власному значенню 1. Крім того, з твердження 3.48 випливає, що $J = \mathrm{id}_\mathfrak{g} + N$, де N — нільпотентний оператор з образом у радикалі $\mathfrak{r}$. Отже, дію оператора J на базисні елементи можна зобразити у вигляді:

$$Je_i = e_i + a_ie_4 + b_ie_5, \quad i = 1, 2, 3,$$
$$Je_i = a_ie_4 + b_ie_5, \quad i = 4, 5.$$

Застосуємо означення ліївської ортогональності до різних пар базисних елементів:

$$[Je_1, Je_2] = 2e_2 + a_2e_4 - b_2e_5 - b_1e_4 = [e_1, e_2] = 2e_2,$$
$$[Je_1, Je_3] = -2e_3 + a_3e_4 - b_3e_5 - a_1e = [e_1, e_3] = -2e_3,$$
$$[Je_2, Je_3] = e_1 + b_3e_4 - a_2e_5 = [e_2, e_3] = e_1,$$
$$[Je_1, Je_4] = a_4e_4 - b_4e_5 = [e_1, e_4] = e_4,$$
$$[Je_1, Je_5] = a_5e_4 - b_5e_5 = [e_1, e_5] = -e_5.$$

Тому на коефіцієнти маємо рівняння $b_2 = 0$, $a_2 = b_1$, $a_3 = 0$, $a_1 = -b_3$, $b_3 = 0$, $a_2 = 0$ (звідки $a_i = b_i = 0$, $i = 1, 2, 3$) та $a_4 = 1$, $b_4 = 0$, $a_5 = 0$, $b_5 = 1$.

Підсумовуючи обчислення, отримаємо таке твердження.

Твердження 3.53. *Ліївськи ортогональні оператори на алгебрі Лі* $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) \Subset 2\mathfrak{g}_1$ *вичерпуються тривіальними* $\mathrm{id}_\mathfrak{g}$ *та* $-\mathrm{id}_\mathfrak{g}$.

Зауважимо, що алгебра $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) \Subset 2\mathfrak{g}_1$ не є метричною.

3.5.6. Тривимірні алгебри Лі. З класифікації тривимірних дійсних алгебр Лі, яку наведено у прикладі 2.5, легко бачити, що всі такі алгебри, як і тривимірні комплексні, вичерпують прості і майже абелеві алгебри. Тому внаслідок прикладу 3.2, теореми 3.45 і твердження 3.50 опис множин ліївськи ортогональних операторів для них є очевидним:

$$\mathrm{sl}(2, \mathbb{R}),\ \mathrm{so}(3)\colon \quad \{\pm\,\mathrm{diag}(1, 1, 1)\},$$
$$\mathrm{A}^b_{3.5},\ \mathrm{A}^a_{3.4},\ a \neq 0,\ \mathrm{A}_{3.3},\ \mathrm{A}_{3.2}\colon \quad \left\{ \begin{pmatrix} \mu & 0 & a_3^1 \\ 0 & \mu & a_3^2 \\ 0 & 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \,\middle|\, \mu \neq 0 \right\},$$

$$\mathrm{A}_{3.1},\ \mathrm{A}_1\oplus\mathrm{A}_{2.1}\colon\qquad \left\{\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3\\ 0 & a^2_2 & a^2_3\\ 0 & a^3_2 & a^3_3\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{vmatrix} a^2_2 & a^2_3\\ a^3_2 & a^3_3\end{vmatrix} = 1\right\},$$

$$3\mathrm{A}_1\colon\qquad \mathrm{M}(3,\mathbb{R}).$$

Тут a^i_j, μ — довільні дійсні числа, що задовольняють вказані обмеження. Наведені результати додатково перевірено прямими обрахунками з використанням системи символьних обчислень Maple. Для відповідних тривимірних комплексних алгебр Лі множини ліївськи ортогональних операторів виглядають так само з точністю до комплексифікації.

3.5.7. Чотиривимірні алгебри Лі. Повний список неізоморфних чотиривимірних дійсних алгебр Лі, який наведено в підрозділі 3.5.7, містить дві редуктивні алгебри $\mathrm{A}_1\oplus\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ і $\mathrm{A}_1\oplus\mathrm{so}(3)$, 13 сімей майже абелевих алгебр $\mathrm{A}^{ab}_{4.6}$, $\mathrm{A}^{abc}_{4.5}$, $\mathrm{A}_{4.4}$, $\mathrm{A}_{4.3}$, $\mathrm{A}^b_{4.2}$, $\mathrm{A}_{4.1}$, $\mathrm{A}_1\oplus\mathrm{A}^b_{3.5}$, $\mathrm{A}_1\oplus\mathrm{A}^a_{3.4}$, $\mathrm{A}_1\oplus\mathrm{A}_{3.3}$, $\mathrm{A}_1\oplus\mathrm{A}_{3.2}$, $\mathrm{A}_1\oplus\mathrm{A}_{3.1}$, $2\mathrm{A}_1\oplus\mathrm{A}_{2.1}$, $4\mathrm{A}_1$, а також п'ять сімей розв'язних алгебр Лі складнішої структури — $\mathrm{A}_{4.10}$, $\mathrm{A}^a_{4.9}$, $\mathrm{A}^b_{4.8}$, $\mathrm{A}_{4.7}$, $2\mathrm{A}_{2.1}$, серед яких є дві нерозкладні метричні розв'язні алгебри Лі — алгебра Лі осцилятора $\mathrm{A}^0_{4.9}$ і діамантова алгебра $\mathrm{A}^{-1}_{4.8}$, центри яких одновимірні (див. зноску 3.3). З огляду на приклад 3.2, теорему 3.43, наслідок 3.47, твердження 3.50 і зауваження 3.52 достатньо обчислити ліївськи ортогональні оператори на алгебрах $\mathrm{A}_{4.10}$, $\mathrm{A}^a_{4.9,\ a\neq0}$, $\mathrm{A}^b_{4.8,\ b\neq-1}$, $\mathrm{A}_{4.7}$ з використанням системи символьних обчислень Maple. Результуючий список множин ліївськи ортогональних операторів на неізоморфних чотиривимірних дійсних алгебрах Лі є таким:

$$\begin{matrix}\mathrm{A}_1\oplus\mathrm{sl}(2,\mathbb{R}),\ \mathrm{A}_1\oplus\mathrm{so}(3),\\ \mathrm{A}^{-1}_{4.8},\ \mathrm{A}^0_{4.9}\end{matrix}\ \colon\qquad \left\{\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & a^1_4\\ 0 & \varepsilon & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon\end{pmatrix}\ \middle|\ \varepsilon=\pm1\right\},$$

$$\mathrm{A}_{4.10}\colon\quad \left\{ \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ -a_2^1 & a_1^1 & a_4^1 & -a_3^1 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_2^3 & -a_1^3 & -a_4^3 & a_3^3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_3^1 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2^1 & a_4^1 \\ a_2^3 & a_4^3 \end{vmatrix} = 1, \\ \begin{vmatrix} a_1^1 & a_4^1 \\ a_1^3 & a_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \end{array} \right\}$$

$$\simeq \left\{ \begin{pmatrix} a_1^1 - \mathrm{i}a_2^1 & a_4^1 - \mathrm{i}a_3^1 \\ a_2^3 + \mathrm{i}a_1^3 & a_3^3 + \mathrm{i}a_4^3 \end{pmatrix} \middle| \begin{vmatrix} a_1^1 - \mathrm{i}a_2^1 & a_4^1 - \mathrm{i}a_3^1 \\ a_2^3 + \mathrm{i}a_1^3 & a_3^3 + \mathrm{i}a_4^3 \end{vmatrix} = 1 \right\} \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}),$$

$$\mathrm{A}^a_{4.9},\ {\scriptstyle a\neq 0},\ \mathrm{A}_{4.7}\colon\quad \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 2aa_3^1 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -2aa_2^1 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \middle| \varepsilon = \pm 1 \right\},$$

$$\mathrm{A}^b_{4.8},\ {\scriptstyle b\neq -1,0}\colon\quad \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ 0 & \varepsilon & 0 & (b+1)a_3^1 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -(b+1)a_2^1 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \middle| \varepsilon = \pm 1 \right\},$$

$$\mathrm{A}^0_{4.8}\colon\quad \left\{ \begin{pmatrix} a_2^2 & a_2^1 & a_4^2 & a_4^1 \\ 0 & a_2^2 & 0 & a_4^2 \\ a_2^4 & a_2^3 & a_4^4 & a_4^3 \\ 0 & a_2^4 & 0 & a_4^4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_2^2 & a_4^2 \\ a_2^4 & a_4^4 \end{vmatrix} = 1, \\ \begin{vmatrix} a_2^1 & a_4^1 \\ a_2^4 & a_4^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^2 & a_4^2 \\ a_2^3 & a_4^3 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right\},$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{A}^{ab}_{4.6},\ {\scriptstyle a>0},\ \mathrm{A}^{abc}_{4.5},\ {\scriptstyle abc\neq 0}, \\ \mathrm{A}_{4.4},\ \mathrm{A}_{4.3},\ \mathrm{A}^b_{4.2},\ {\scriptstyle b\neq 0}\ \mathrm{A}_{4.1} \end{array} \colon\quad \left\{ \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & a_4^1 \\ 0 & \mu & 0 & a_4^2 \\ 0 & 0 & \mu & a_4^3 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \middle| \mu \neq 0 \right\},$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}^b_{3.5},\ \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}^a_{3.4},\ {\scriptstyle a\neq 0}, \\ \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_{3.3},\ \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_{3.2}, \end{array} \colon\quad \left\{ \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ 0 & \mu & 0 & a_4^2 \\ 0 & 0 & \mu & a_4^3 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \middle| \mu \neq 0 \right\},$$

$$\mathrm{A}_1\oplus\mathrm{A}_{3.1},\ 2\mathrm{A}_1\oplus\mathrm{A}_{2.1}\colon\quad \left\{\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2\\ 0 & 0 & a_3^3 & a_4^3\\ 0 & 0 & a_3^4 & a_4^4\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{vmatrix} a_3^3 & a_4^3\\ a_3^4 & a_4^4\end{vmatrix}=1\right\},$$

$$\begin{aligned}2\mathrm{A}_{2.1}\colon\quad &\left\{\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & 0 & 0\\ a_1^2 & a_2^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_3^3 & a_4^3\\ 0 & 0 & a_3^4 & a_4^4\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{vmatrix} a_3^3 & a_4^3\\ a_3^4 & a_4^4\end{vmatrix}=1,\ \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1\\ a_1^2 & a_2^2\end{vmatrix}=1\right\}\\ &=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}),\end{aligned}$$

$$4\mathrm{A}_1\colon\quad \mathrm{M}(4,\mathbb{R}).$$

Тут a_j^i, μ — довільні дійсні числа, що задовольняють вказані обмеження. Для відповідних чотиривимірних комплексних алгебр Лі множини ліївськи ортогональних операторів виглядають так само з точністю до комплексифікації.

3.5.8. П’ятивимірні нільпотентні алгебри Лі. Алгебри, зібрані на початку підрозділу 1.2.2, вичерпують неізоморфні п’ятивимірні нільпотентні алгебри Лі над $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ або $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. Вони містять п’ять майже абелевих алгебр $\mathfrak{n}_{5.5}$, $\mathfrak{n}_{5.2}$, $\mathfrak{n}_4\oplus\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_3\oplus 2\mathfrak{n}_1$, $5\mathfrak{n}_1$, алгебру Гейзенберга $\mathrm{h}_2=\mathfrak{n}_{5.1}$, метричну алгебру $\mathfrak{n}_{5.4}$ з двовимірним центром, а також алгебри $\mathfrak{n}_{5.6}$ і $\mathfrak{n}_{5.3}$.[3.4] Приклад 3.2, теорема 3.43 і твердження 3.50, 3.51 описують (з точністю до перестановки базисних елементів) ліївськи ортогональні оператори на всіх зазначених алгебрах, крім двох останніх — $\mathfrak{n}_{5.6}$ і $\mathfrak{n}_{5.3}$, для яких зручно обчислити ліївськи ортогональні оператори з використанням системи символьних обчислень Maple. Наведемо загальний

[3.4]У дійсному випадку цим нільпотентним алгебрам Лі відповідають такі алгебри $\mathrm{A}_{n.m}$ з класифікації Мубаракзянова [7, 8, 9] дійсних низьковимірних алгебр Лі, де n — розмірність алгебри, а m — її номер у класифікаційному списку: $\mathfrak{n}_1=\mathrm{A}_1$, $\mathfrak{n}_3\simeq\mathrm{A}_{3.1}$, $\mathfrak{n}_4\simeq\mathrm{A}_{4.1}$, $\mathfrak{n}_{5.1}\simeq\mathrm{A}_{5.4}$, $\mathfrak{n}_{5.2}\simeq\mathrm{A}_{5.1}$, $\mathfrak{n}_{5.3}\simeq\mathrm{A}_{5.5}$, $\mathfrak{n}_{5.4}\simeq\mathrm{A}_{5.3}$, $\mathfrak{n}_{5.5}\simeq\mathrm{A}_{5.2}$, $\mathfrak{n}_{5.6}\simeq\mathrm{A}_{5.6}$, див. також приклад 2.5 та початок підрозділу 2.3 відповідно щодо класифікацій три- та чотиривимірних дійсних алгебр Лі.

вигляд ліївськи ортогональних операторів для кожної з неізоморфних п'ятивимірних нільпотентних алгебр Лі. Нижче $\varepsilon = \pm 1$, a^i_j, μ — довільні (дійсні або комплексні, якщо відповідно $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ або $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) числа, що задовольняють вказані обмеження, причому $\mu \neq 0$.

$$\mathfrak{n}_{5.6}\colon\quad \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^2 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ a_1^3 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ a_1^4 & a_1^3 & -a_1^2 & \varepsilon & 0 \\ a_1^5 & a_2^5 & a_3^5 & a_4^5 & a_5^5 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{n}_{5.5}\colon\quad \begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^2 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ a_1^3 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ a_1^4 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ a_1^5 & a_2^5 & a_3^5 & a_4^5 & a_5^5 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{n}_{5.4}\colon\quad \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & a_5^4 \\ a_1^5 & a_2^5 & a_3^5 & a_4^5 & a_5^5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} \mathfrak{n}_{5.2}, \\ \mathfrak{n}_4 \oplus \mathfrak{n}_1 \end{matrix}\colon\quad \begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^2 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ a_1^3 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & a_5^4 \\ a_1^5 & a_2^5 & a_3^5 & a_4^5 & a_5^5 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{n}_{5.3}\colon\quad \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_1^1 & -a_2^1 & 0 \\ a_1^4 & a_2^4 & -a_1^2 & a_2^2 & 0 \\ a_1^5 & a_2^5 & a_3^5 & a_4^5 & a_5^5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = 1, \\[2ex] \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix} = 0, \end{matrix}$$

$$\mathfrak{n}_{5.1}\colon\quad \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & 0 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & 0 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & 0 \\ a_1^5 & a_2^5 & a_3^5 & a_4^5 & a_5^5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_1^1 & a_3^1 & a_2^1 & a_4^1 \\ a_1^3 & a_3^3 & a_2^3 & a_4^3 \\ a_1^2 & a_3^2 & a_2^2 & a_4^2 \\ a_1^4 & a_3^4 & a_2^4 & a_4^4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{F}),$$

$$\mathfrak{n}_3 \oplus 2\mathfrak{n}_1 : \quad \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & a_5^4 \\ a_1^5 & a_2^5 & a_3^5 & a_4^5 & a_5^5 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$5\mathfrak{n}_1 : \quad (a_j^i)_{i,j=1,\ldots,5}.$$

3.6. Висновки

Метою цього розділу було вивчення ліївськи ортогональних операторів на скінченновимірних алгебрах Лі.

Введено природне поняття еквівалентності ліївськи ортогональних операторів, пов'язане з центром алгебри, яке відіграло важливу роль у дослідженні, оскільки багато результатів сформульовано з точністю до цієї еквівалентності. Так, доведено, що розклад алгебри на пряму суму ідеалів тягне за собою розклад будь-якого ліївськи ортогонального оператора на алгебрі на пряму суму ліївськи ортогональних операторів на цих ідеалах з точністю до згаданого відношення еквівалентності.

Одним із основних напрямків дослідження було узагальнення результатів, отриманих у статтях [12, 30], через зняття обмежень на існування центру алгебри та/або невиродженість операторів. Зокрема, доведено, що центр та всі елементи зростаючого центрального ряду алгебри є інваріантними відносно будь-якого ліївськи ортогонального оператора. Також спрощено доведення низки тверджень, а саме: леми про те, що нульовий кореневий підпростір ліївськи ортогонального оператора міститься в центрі алгебри, леми про комутування кореневих просторів, для яких добуток відповідних власних значень не дорівнює 1, леми про інваріантність ідеала, фактор-алгебра якого має нульовий центр тощо. З зазначених результатів щодо кореневих просторів випливає, що будь-яка скінченновимірна алгебра Лі, що допускає ліївськи ортогональний оператор, усі власні значення якого не дорівнюють ± 1, є розв'язною алгеброю степеня розв'язності не більше ніж два.

Посилено результати щодо ліївськи ортогональних автоморфізмів на алгебрах Лі. Для них знайдено зображення, яке уточнено для скінченновимірних алгебр Лі з нульовим центром. На його основі встановлено взаємнооднозначну відповідність між групою ліївськи ортогональних автоморфізмів довільної такої алгебри і асоціативною алгеброю нільпотентних операторів степеня нільпотентності два з тривіальним (тотожно нульовим) антикомутатором відносно композиції операторів.

Мабуть, найбільш цікавим результатом розділу є повний опис ліївськи ортогональних операторів на метричних алгебрах Лі, зокрема на напівпростих алгебрах Лі. Виявляється, що ліївськи ортогональні оператори на простій алгебрі вичерпуються тривіальними (тобто тотожним та мінус тотожним), а на напівпростій алгебрі кожен ліївськи ортогональний оператор є прямою сумою тривіальних операторів на простих компонентах цієї алгебри. Цей результат дав змогу також легко отримати опис ліївськи ортогональних операторів на редуктивних алгебрах Лі та довести певні властивості ліївськи ортогональних операторів на алгебрах з ненульовим фактором Леві. Водночас, згідно з твердженням 3.53 крім простих існують інші алгебри Лі з виключно тривіальними ліївськи ортогональними операторами.

У зв'язку з зазначеними описами і твердженням 3.53, природно виникає проблема пошуку інших класів алгебр Лі або, більш загально, вичерпної характеризації алгебр Лі, на яких всі ліївськи ортогональні оператори еквівалентні тривіальним.

Для деяких класів алгебр Лі знайдено їх множини ліївськи ортогональних операторів через прямий обрахунок. Список таких класів включає спеціальні лінійні алгебри, алгебри Гейзенберга, майже абелеві алгебри та нерозв'язні алгебри розмірності не вище п'яти. Обрахунок для спеціальних лінійних алгебр відігравав тестову роль для застосування базисного підходу. Введене поняття еквівалентності дало змогу коротко сформулювати твердження про ліївськи ортогональні оператори на алгебрах Гейзенберга таким чином: суттєві частини таких операторів утворюють симплектичну групу відповідної розмірності (на 1 меншої від розмірності алгебри). Опис ліївськи ортогональних операторів майже абелевих алгебр є важливим кроком у повному описі ліївськи ортогональних операторів на алгебрах низької розмірності, оскільки майже абелеві алгебри складають значну частину всіх алгебр низької розмірності. Обрахунок ліївськи ортогональних операторів на алгебрах низької розмірності дає необхідний матеріал для висунення гіпотез щодо ліївськи ортогональних операторів з нетривіальним розкладом Леві–Мальцева.

Всі отримані результати справедливі для скінченновимірних алгебр Лі над алгебраїчно замкненими полями характеристики 0. За допомогою процедури алгебраїчного замикання більшість результатів можна поширити й на випадок полей, що не є алгебраїчно замкненими. Але цей перехід не завжди є тривіальним і потребує подальшого дослідження.

ВИСНОВКИ

У дисертації вивчено властивості контракцій скінченновимірних дійсних і комплексних алгебр Лі, спеціальні типи реалізації контракцій, як-то контракції Салетана, контракції з необмеженими матрицями, узагальнені контракції Іньоню–Вігнера, а також ліївськи ортогональні оператори на таких алгебрах.

Основні результати дисертації можна підсумувати таким чином:

- Доведено теорему, що описує поведінку прапорів підалгебр при контракціях алгебр Лі та яку можна розглядати як новий критерій неіснування контракцій. Отримано також ослаблений аналог цієї теореми для прапорів підпросторів. За її допомогою показано неіснування контракцій для низки пар шестивимірних нільпотентних дійсних алгебрі Лі, для яких не працюють раніше відомі критерії.

- Для кожної розмірності не менше п'яти знайдено приклад контракції між розв'язними алгебрами Лі, яку можна реалізувати лише за допомогою матриць, евклідові норми яких обов'язково прямують до нескінченності при граничному значенні параметра контракції. Отже, розмірність п'ять є найнижчою розмірністю алгебр Лі, між якими існують контракції зазначеного типу.

- Показано, що з точністю до замін базисів початкової і кінцевої алгебр Лі будь-яку контракцію Салетана можна реалізувати матричнозначною функцією, повністю визначеною розбиттям розмірності нульової компоненти Фіттінга її значення при граничному значенні параметра контракції. Це дало змогу ввести поняття сигнатури контракції Салетана, яку складають розмірність одиничної компоненти Фіттінга такого значення і вказане розбиття. Вивчено контракції Салетана з зазначеними одиничними компонентами Фіттінга розмірності нуль. Вичерпно прокласифіковано такі контракції між алгебрами Лі розмірності три.

- Запропоновано алгоритм побудови узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера або доведення їх неіснування для фіксованої пари алгебр Лі. За допомогою цього алгоритму оптимізовано відомий з літератури опис узагальнених контракцій Іньоню–Вігнера три- та чотиривимірних дійсних і комплексних алгебр Лі. Зокрема, показано, що будь-яка узагальнена контракція Іньоню–Вігнера між чотиривимірними комплексними або дійсними алгебрами Лі еквівалентна такій контракції зі степенями параметра контракції з множини $\{0, 1, 2, 3\}$, причому ця множина є мінімальною.

- Показано, що існує єдина пара комплексних чотиривимірних алгебр Лі, добре визначена контракція між якими не еквівалентна узагальненій контракції Іньоню–Вігнера. Над полем дійсних чисел цій парі відповідають дві пари алгебр Лі з однаковою контрактованою алгеброю. Цей результат є важливим, оскільки він означає, що навіть у розмірності чотири узагальнені контракції Іньоню–Вігнера не є достатніми для реалізації всіх можливих контракцій, і ця розмірність є найнижчою серед тих, для яких узагальнені контракції Іньоню–Вігнера не є універсальними. Більше того, це також перший приклад неіснування узагальненої контракції Іньоню–Вігнера у випадку, коли контрактована алгебра не є характеристично нільпотентною і допускає нетривіальні діагональні диференціювання.

- Як підсумок зазначених вище результатів доведено, що будь-яку контракцію між чотиривимірними комплексними або дійсними алгебрами Лі можна реалізувати як узагальнену контракцію Іньоню–Вігнера або контракцію Салетана.

- Доведено, що будь-яка діагональна контракція еквівалентна узагальненій контракції Іньоню–Вігнера з цілими степенями параметра контракції.

- Вивчено основні властивості ліївськи ортогональних операторів на скінченновимірних алгебрах Лі. Так, введено поняття еквівалентності таких операторів, Показано інваріантність центру, радикала та членів зростаючого центрального ряду відносно дії довільного ліївськи ортогонального оператора. Доведено, що над алгебраїчно замкненим полем характеристики 0 лише розв'язні алгебри Лі степеня розв'язності не більше за два допускають ліївськи ортогональні оператори, спектри яких не містять 1 і -1.

- Вивчено ліївськи ортогональні автоморфізми алгебр Лі. Знайдено зображення для таких автоморфізмів, яке конкретизовано для алгебр Лі з нульовим центром. На основі цього зображення для кожної з таких алгебр встановлено взаємнооднозначну відповідність між її групою ліївськи ортогональних автоморфізмів і асоціативною алгеброю нільпотентних операторів степеня нільпотентності два з тривіальним (тотожно нульовим) антикомутатором відносно композиції операторів.

- Вичерпно описано ліївськи ортогональні оператори на метричних алгебрах Лі. Зокрема, на простих алгебрах Лі можливі лише тривіальні ліївськи ортогональні оператори. Це дало змогу отримати повний опис ліївськи ортогональних операторів на напівпростих і редуктивних алгебрах Лі, а також попередній опис ліївськи ортогональних операторів з нетривіальним розкладом Леві–Мальцева.

- Для деяких класів алгебр Лі (алгебр Гейзенберга, майже абелевих алгебр, алгебр низьких розмірностей тощо) відповідні множини ліївськи ортогональних операторів обчислено прямим методом. Зокрема, показано, що група, утворена класами еквівалентності ліївськи ортогональних операторів алгебри Гейзенберга, ізоморфна стандартній симплектичній групі відповідної розмірності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, Часть 1, Мир, Москва, 1976.
2. Кострикин А.И., Критерий разрешимости конечномерной алгебры Ли, *Вестник московского университета, Матем.-Мех.* (1982), №2, 5–8.
3. Лисенко С., Лучко В., Петравчук А., Ортогональні оператори на асоціативних алгебрах, *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки* (2014), вип. 1, 53–58.
4. Лыхмус Я.Х., Предельные (сжатые) группы Ли, *Труды II летней школы по проблемам теории элементарных частиц (Отепя, 1967), Часть IV*, Академия наук ЭстССР, Таллинн, 1969, 3–132.
5. Мальцев А.И., Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли, *Изв. АН СССР. Сер. матем.* **9** (1945), №4, 291—300.
6. Морозов В.В., Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка., *Изв. высш. уч. зав. Сер. матем.* (1958), № 4, 161–171.
7. Мубаракзянов Г.М., О разрешимых алгебрах Ли, *Изв. высш. уч. зав. Сер. матем.* (1963), № 1, 114–123.
8. Мубаракзянов Г.М., Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка, *Изв. высш. уч. зав. Сер. матем.* (1963), № 3, 99–106.
9. Мубаракзянов Г.М., Классификация разрешимых алгебр Ли шестого порядка с одним ненильпотентным базисным элементом, *Изв. высш. уч. зав. Сер. матем.* (1963), № 4, 104–116.
10. Нестеренко М.О., особисте повідомлення.
11. Петравчук А.П., Алгебры Ли, разложимые в сумму абелевой и нильпотентной подалгебр, *Укр. мат. журн.*, **40** (1988), № 3, С.385–388.

12. Петравчук А.П., Білун С.В., Про ортогональні оператори на скінченновимірних алгебрах Лі, *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки* (2003), вип. 3, 60–64.

13. Петравчук А.П., Максименко Д.В., Про розв'язність алгебри Лі, на якій задано ортогональний оператор без нерухомих точок, *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки* (2003), вип. 9/10, 123–124.

14. Петров А.З., Новые методы в общей теории относительности, Наука, Москва, 1966.

15. Попович Д.Р., Діагональні контракції алгебр Лі, *Тези Третьої міжуніверситетської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики (25–27 квітня 2013 р., Київ, Україна)*, с. 132–133.

16. Попович Д.Р., Контракція між алгебрами Лі з обов'язково сингулярними компонентами матриці контракції, *Допов. Нац. акад. наук Укр.* (2014), № 7, 29–35.

17. Попович Д.Р., Прапори підалгебр у контрактованих алгебрах Лі, *Допов. Нац. акад. наук Укр.* (2021), № 4, 9–17.

18. Хамфрис Дж., Введение в теорию алгебр Ли и их представлений, МЦНМО, Москва, 2003.

19. Черников С.Н., Линейные неравенства, *Итоги науки. Сер. Мат. Алгебра. Топол. Геом.* (1968), 137–187.

20. Agaoka Y., On the variety of 3-dimensional Lie algebras, *Lobachevskii J. Math.* **3** (1999), 5–17.

21. Agaoka Y., An algorithm to determine the isomorphism classes of 4-dimensional complex Lie algebras, *Linear Algebra Appl.* **345** (2002), 85–118.

22. Alvarez M.A., The variety of 7-dimensional 2-step nilpotent Lie algebras, *Symmetry* **10** (2018), no. 1, 26.

23. Alvarez M.A., Degenerations of 8-dimensional 2-step nilpotent Lie algebras, *Algebr. Represent. Theory* **24** (2021), 1231–1243.

24. Andrada A., Barberis M.L. and Dotti I., Classification of abelian complex structures on 6-dimensional Lie algebras, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **83** (2011), 232–255, arXiv:0908.3213.

25. Barberis M.L. and Dotti I.G., Abelian complex structures on solvable Lie algebras, *J. Lie Theory* **14** (2004), no. 1, 25–34, arXiv:math.RA/0202220.

26. Barberis M.L., Dotti I.G. and Miatello R.J., On certain locally homogenous Clifford manifolds, *Ann. Glob. Anal. Geom.* **13** (1995), 289–301.

27. Baum H. and Kath I., Doubly extended Lie groups—curvature, holonomy and parallel spinors, *Differential Geom. Appl.* **19** (2003), 253–280.

28. Benayadi S. and Elduque A., Classification of quadratic Lie algebras of low dimension, *J. Math. Phys.* **55** (2014), no. 8, 081703, arXiv:1404.5174.

29. Beneš T. and Burde D., Degenerations of pre-Lie algebras, *J. Math. Phys.* **50** (2009), 112102.

30. Bilun S.V., Maksimenko D.V. and Petravchuk A.P., On the group of Lie-orthogonal operators on a Lie algebra, *Methods Funct. Anal. Topology* **17** (2011), 199–203.

31. Bluman G. and Kumei S., *Symmetries and differential equations*, Springer, New York, 1989.

32. Bluman G.W., Reid G.J. and Kumei S., New classes of symmetries for partial differential equations, *J. Math. Phys.* **29** (1988), 806–811.

33. Bordemann M., Nondegenerate invariant bilinear forms on nonassociative algebras, *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)* **66** (1997), 151–201.

34. Bourbaki N., *Lie groups and Lie algebras. Chapters 1–3*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

35. Boyko V.M., Lokaziuk O.V. and Popovych R.O., Realizations of Lie algebras on the line and the new group classification of (1+1)-dimensional generalized nonlinear Klein–Gordon equations, *Anal. Math. Phys.* **11** (2021), 127, 38 pp., arXiv:2008.05460.

36. Burde D., Degenerations of nilpotent Lie algebras, *J. Lie Theory* **9** (1999), 193–202.

37. Burde D., Degenerations of 7-dimensional nilpotent Lie algebras, *Comm. Algebra* **33** (2005), 1259–1277, arXiv:math.RA/0409275.

38. Burde D., Nesterenko M. and Popovych R.O., Generalized Inönü–Wigner contractions of nilpotent Lie algebras, in preparation.

39. Burde D. and Steinhoff C., Classification of orbit closures of 4-dimensional complex Lie algebras, *J. Algebra* **214** (1999), 729–739.

40. Campoamor-Stursberg R., Quasi-classical Lie algebras and their contractions, *Internat. J. Theoret. Phys.* **47** (2008), 583–598.

41. Campoamor-Stursberg R., Some comments on contractions of Lie algebras, *Adv. Studies Theor. Phys.* **2** (2008), 865–870.

42. Cariñena J., Grabowski J. and Marmo G., Contractions: Nijenhuis and Saletan tensors for general algebraic structures, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001), 3769–3789.

43. Casati P., Minniti S. and Salari V., Indecomposable representations of the Diamond Lie algebra, *J. Math. Phys.* **51** (2010), 033515.

44. Conatser C.W., Contractions of the low-dimensional Lie algebras, *J. Math. Phys.* **13** (1972), 196–203.

45. Couture M., Patera J., Sharp R.T. and P. Winternitz, Graded contractions of sl$(3,\mathbb{C})$, *J. Math. Phys.* **32** (1991), 2310–2318.

46. del Barco V., Lie algebras admitting symmetric, invariant and nondegenerate bilinear forms, 2016, arXiv:1602.08286.

47. Doebner H.D. and Melsheimer O., On a class of generalized group contractions, *Nuovo Cimento A(10)* **49** (1967), 306–311.

48. Dotti I. G. and Fino A. Hypercomplex nilpotent Lie groups, *Global differential geometry: the mathematical legacy of Alfred Gray (Bilbao, 2000)*, 310–314, Contemp. Math., **288**, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 2001.

49. Favre G. and Santharoubane L.J., Symmetric, invariant, nondegenerate bilinear form on a Lie algebra, *J. Algebra* **105** (1987), 451–464.

50. Fialowski A. and Penkava M., On the cohomology of Lie algebras with an invariant inner product, *Algebr. Represent. Theory* (2021), https://doi.org/10.1007/s10468-021-10061-x.

51. Figueroa-O'Farrill J.M. and Stanciu S., On the structure of symmetric self-dual Lie algebras, *J. Math. Phys.* **37** (1996), 4121–4134.

52. Gorbatsevich V.V., Onishchik A.L. and Vinberg E.B. Lie groups and Lie algebras. III. Structure of Lie groups and Lie algebras. Berlin: Springer-Verlag, 1997. xx+328 pp.

53. Grantcharov G. and Poon Y.S., Geometry of hyper-Kähler connections with torsion, *Comm. Math. Phys.* **213** (2000), 19–37.

54. Grunewald F. and O'Halloran J., Varieties of nilpotent Lie algebras of dimension less than six, *J. Algebra* **112** (1988), 315–325.

55. Hegerfeldt G.C., Some properties of a class of generalized Inönü–Wigner contractions, *Nuovo Cimento A(10)* **51** (1967), 439–447.

56. Hrivnák J., Novotný P., Patera J. and Tolar J., Graded contractions of the Pauli graded sl$(3,\mathbb{C})$, *Linear Algebra Appl.* **418** (2006), 498–550.

57. Huddleston P.L., Inönü–Wigner contractions of the real four-dimensional Lie algebras, *J. Math. Phys.* **19** (1978), 1645–1649.

58. Humphreys J.E., *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9., Springer-Verlag, New York–Berlin, 2000.

59. Inönü E., Contraction of Lie groups and their representations, in *Group theoretical concepts and methods in elementary particle physics (Lectures Istanbul Summer School Theoret. Phys., 1962)*, 391–402, Gordon and Breach, New York, 1964.

60. Inönü E. and Wigner E.P., On the contraction of groups and their representations, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **39** (1953), 510–524.

61. Inönü E. and Wigner E.P., On a particular type of convergence to a singular matrix, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **40** (1954), 119–121.

62. Ismailov N., Kaygorodov I. and Volkov Yu., Degenerations of Leibniz and anticommutative algebras, *Canad. Math. Bull.* **62** (2019), 539–549.

63. Ivanova N.M., Popovych R.O. and Sophocleous C., Group analysis of variable coefficient diffusion–convection equations. II. Contractions and exact solutions, arXiv:0710.3049.

64. Jacobson N., *Lie algebras*, Interscience, New York, 1955.

65. Jacobi's equality between complementary minors of inverse matrices, https://mathoverflow.net/questions/87877/jacobis-equality-between-complementary-minors-of-inverse-matrices.

66. Kath I. and Olbrich M., Metric Lie algebras with maximal isotropic centre, *Math. Z.* **246** (2004), 23–53.

67. Kaygorodov I., Lopes S. and Popov Yu., Degenerations of nilpotent associative commutative algebras, *Commun. Algebra* **1** (2019), 1632–1639.

68. Kaygorodov I. and Volkov Yu., Degenerations of Filippov algebras, *J. Math. Phys.* **61** (2020), 021701.

69. Kupczyǹski M., On the generalized Saletan contractions, *Commun. Math. Phys.* **13** (1969), 154–162.

70. Lauret J., Degenerations of Lie algebras and geometry of Lie groups, *Differential Geom. Appl.* **18** (2003), 177–194.

71. Le Bellac M. and Lévy-Leblond J.M., Galilean electromagnetism, *Nuovo Cimento B*, 1973, **14**, 217–233.

72. Leger G.F. and Luks E.M., Generalized derivations of Lie algebras, *J. Algebra* **228** (2000), 165–203.

73. Levy-Nahas M., Deformation and contraction of Lie algebras, *J. Math. Phys.* **8** (1967), 1211–1222.

74. Magnin L., Sur les algebres de Lie nilpotentes de dimension $\leq$ 7, *J. Geom. Phys.* **3** (1986), 119–144.

75. Medina A. and Revoy P., Algèbres de Lie et produit scalaire invariant, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **18** (1985), 553–561 (in French).

76. Mohamed N.S., Husain S. and Yunos F., On Degenerations and invariants of low-dimensional complex nilpotent Leibniz algebras, *Mathematics and Statistics* **8** (2020), 95-99.

77. de Montigny M. and Patera J., Discrete and continuous graded contractions of Lie algebras and superalgebras, *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** (1991), 525–547.

78. de Montigny M., Patera J. and Tolar J., Graded contractions and kinematical groups of space-time, *J. Math. Phys.* **35** (1994), 405–425.

79. Mimura F. and Ikushima A., Structure of contracted Lie algebras, *Bull. Kyushu Inst. Tech. (M. & N. S.)* (1978), no. 25, 1–7.

80. Nesterenko M. and Popovych R.O., Contractions of low-dimensional Lie algebras, *J. Math. Phys.* **47** (2006), 123515, 45 pp, arXiv:math-ph/0608018.

81. Novotný P., Hrivnák J. On (α, β, γ)-derivations of Lie algebras and corresponding invariant functions, *J. Geom. Phys.* **58** (2008), 208–217.

82. O'Halloran J., Review of "Degenerations of nilpotent Lie algebras" (in *J. Lie Theory* **9** (1999), 193–202, D. Burde), Mathematical Reviews/MathSciNet MR1679999.

83. Ovando G.P., Lie algebras with ad-invariant metrics: A survey-guide. *Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino.* **74** (2016), no. 1, 243–268.

84. Patera J., Graded contractions of Lie algebras, representations and tensor products, *AIP Conf. Proc.* **266** (1992), 46–54.

85. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P. and Zassenhaus H., Invariants of real low dimension Lie algebras, *J. Math. Phys.* **17** (1976), 986–994.

86. Patera J. and Winternitz P., Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras, *J. Math. Phys.* **18** (1977), 1449–1455.

87. Pelc O., A new family of solvable self-dual Lie algebras, *J. Math. Phys.* **38** (1997), 3832–3840.

88. Popovych D.R., Generalized IW-contractions of Lie algebras, *International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (2009, June 21–27, Kyiv, Ukraine)*. Abstract. https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2009/PopovychD

89. Popovych D., Lie-orthogonal operators, *International Workshop "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (2011, December 18–19, Kyiv, Ukraine)*. Abstract. http://www.imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/PopovychD

90. Popovych D., Non-universality of IW-contractions, *Book of abstracts of the Sixth International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (2012, June 17–21, Protaras, Cyprus)*, p. 35.

91. Popovych D.R., Generalized IW-contractions of low-dimensional Lie algebras, *Proceedings of the Sixth International Workshop "Group

Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Protaras, Cyprus, June 17–21, 2012), University of Cyprus, Nicosia, 2013, pp. 179–191.

92. Popovych D.R., Lie-orthogonal operators, *Linear Algebra Appl.* **438** (2013), 2090–2106.

93. Popovych D., Lowest dimensional example of contraction with necessarily singular matrix components, *International Workshop "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (2013, December 22–23, Kyiv, Ukraine)*. Abstract. http://www.imath.kiev.ua/appmath/~AbstractsWIF/PopovychD2013

94. Popovych D.R., Application of Voronoi theorem to diagonal contractions of Lie algebras, *Book of abstracts of the Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, (2013, September 16–20, Kyiv, Ukraine)*, pp. 26–27.

95. Popovych D.R., Contractions with necessarily unbounded matrices, *Linear Algebra Appl.* **458** (2014), 689–698.

96. Popovych D.R., Contractions with specific contraction matrices, *Book of abstracts of the Seventh International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (2014, June 15–19, Larnaca, Cyprus)*, p. 36.

97. Popovych D.R., Canonical forms for matrices of Saletan contractions, *J. Phys.: Conf. Ser.* **621** (2015), 012012, 10 pp., arXiv:1507.00781.

98. Popovych D.R., IW contractions and their generalizations, *Book of abstracts of the International Conference "Algebraic and Geometric Methods of Analysis" dedicated to the memory of Yuriy Trokhymchuk (17.03.1928–18.12.2019) (2021, May 25–28, Odesa, Ukraine)*, pp. 116–117. https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2021/contents/agma2021-abstracts.pdf

99. Popovych D.R., Chains of subalgebras in contracted Lie algebras, *Book of abstracts of the International Conference of Young Mathematicians (2021, June 3–5, Kyiv, Ukraine)*, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2021, p. 36. https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2021/Abstracts_2021.pdf

100. Popovych D.R., Subalgebra and subspace flags in contracted Lie algebras, *Book of abstracts of the 13th International Algebraic Conference in Ukraine (2021, July 6–9, Kyiv, Ukraine)*, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2021, p. 62.

101. Popovych D.R. and Popovych R.O., Equivalence of diagonal contractions to generalized IW-contractions with integer exponents, *Linear Algebra Appl.* **431** (2009), 1096–1104, arXiv:0812.4667.

102. Popovych D.R. and Popovych R.O., Lowest dimensional example on non-universality of generalized Inönü–Wigner contractions, *J. Algebra* **324** (2010), 2742–2756, arXiv:0812.1705.

103. Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O. and Lutfullin M.W., Realizations of real low-dimensional Lie algebras, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 7337–7360 (see arXiv:math-ph/0301029v7 for an extended and revised version).

104. Popovych R.O. and Ivanova N.M., Potential equivalence transformations for nonlinear diffusion-convection equations, *J. Phys. A* **38** (2005), 3145–3155, arXiv:math-ph/0402066.

105. Saletan E.J., Contraction of Lie groups, *J. Math. Phys.* **2** (1961), 1–21.

106. Seeley C. Degenerations of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over $\mathbb{C}$, *Arch. Math.* **56** (1990), no. 10, 236–241.

107. Segal I.E., A class of operator algebras which are determined by groups, *Duke Math. J.* **18** (1951), 221–265.

108. Šnobl L. and Winternitz P., *Classification and identification of Lie algebras*, CRM Monograph Series, American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

109. Solodovnikov A.S., *Systems of linear inequalities*, Nauka, Moskow, 1977.

110. Streater R.F., The representations of the oscillator group, *Comm. Math. Phys.* **4** (1967), 217–236.

111. Umlauf K.A., *Über die Zusammensetzung der endlichen continuierlichen Transformationsgruppen, insbesondere der Gruppen von Range Null*, Ph.D. thesis, University of Leipzig, 1891.

112. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Extended group analysis of variable coefficient reaction-diffusion equations with exponential nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.* **396** (2012), 225–242, arXiv:1111.5198.

113. Voronoï G., Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Premier mémoire. Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites, *J. Reine und Angew. Math.* **133** (1908), 97–178.

114. Weimar-Woods E., The three-dimensional real Lie algebras and their contractions, *J. Math. Phys.* **32** (1991), 2028–2033.

115. Weimar-Woods E., Contractions, generalized Inönü–Wigner contractions and deformations of finite-dimensional Lie algebras, *Rev. Math. Phys.* **12** (2000), 1505–1529.

Додаток А

Список публікацій і апробація результатів

Основні результати дисертації опубліковано в статтях [1–8] і тезах конференцій [9–18]. Статті [1–6] відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук. Статті [1–4, 7, 8] опубліковано без співавторів.

Статті [2–6] проіндексовано в міжнародних наукометричних базах даних Web of Science і Scopus, статті [3–8] прореферовано в міжнародних реферативних базах MathSciNet і Zentralblatt MATH.

Статті [4, 5] опубліковано у виданнях, що віднесено до квартиля Q1, а [3, 6] — Q2 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank.

1. Попович Д.Р., Прапори підалгебр у контрактованих алгебрах Лі, *Допов. Нац. акад. наук Укр.* (2021), № 4, 9–17.
2. Popovych D.R., Canonical forms for matrices of Saletan contractions, *J. Phys.: Conf. Ser.* **621** (2015), 012012, 10 pp., arXiv:1507.00781.
3. Popovych D.R., Contractions with necessarily unbounded matrices, *Linear Algebra Appl.* **458** (2014), 689–698, arXiv:1401.5456.
4. Popovych D.R., Lie-orthogonal operators, *Linear Algebra Appl.* **438** (2013), 2090–2106, arXiv:1109.1548.
5. Popovych D.R. and Popovych R.O., Lowest dimensional example on non-universality of generalized Inönü–Wigner contractions, *J. Algebra* **324** (2010), 2742–2756, arXiv:0812.1705.

6. Popovych D.R. and Popovych R.O., Equivalence of diagonal contractions to generalized IW-contractions with integer exponents, *Linear Algebra Appl.* **431** (2009), 1096–1104, arXiv:0812.4667.

7. Попович Д.Р., Контракція між алгебрами Лі з обов'язково сингулярними компонентами матриці контракції, *Допов. Нац. акад. наук Укр.* (2014), № 7, 29–35.

8. Popovych D.R., Generalized IW-contractions of low-dimensional Lie algebras, *Proceedings of the Sixth International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Protaras, Cyprus, June 17–21, 2012)*, University of Cyprus, Nicosia, 2013, pp. 179–191.

9. Popovych D.R., Subalgebra and subspace flags in contracted Lie algebras, *Book of abstracts of the 13th International Algebraic Conference in Ukraine (2021, July 6–9, Kyiv, Ukraine)*, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2021, p. 62.

10. Popovych D.R., Chains of subalgebras in contracted Lie algebras, *Book of abstracts of the International Conference of Young Mathematicians (2021, June 3–5, Kyiv, Ukraine)*, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2021, p. 36. https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2021/Abstracts_2021.pdf

11. Popovych D.R., IW contractions and their generalizations, *Book of abstracts of the International Conference "Algebraic and Geometric Methods of Analysis" dedicated to the memory of Yuriy Trokhymchuk (17.03.1928–18.12.2019) (2021, May 25–28, Odesa, Ukraine)*, pp. 116–117. https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2021/contents/agma2021-abstracts.pdf

12. Popovych D.R., Contractions with specific contraction matrices, *Book of abstracts of the Seventh International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (2014, June 15–19, Larnaca, Cyprus)*, p. 36.

13. Popovych D., Lowest dimensional example of contraction with necessarily singular matrix components, *International Workshop "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (2013, December 22–23, Kyiv, Ukraine)*. Abstract. http://www.imath.kiev.ua/appmath/~AbstractsWIF/PopovychD2013
14. Popovych D.R., Application of Voronoi theorem to diagonal contractions of Lie algebras, *Book of abstracts of the Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, (2013, September 16–20, Kyiv, Ukraine)*, pp. 26–27.
15. Попович Д.Р., Діагональні контракції алгебр Лі, *Тези Третьої міжуніверситетської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики (25–27 квітня 2013 р., Київ, Україна)*, с. 132–133.
16. Popovych D., Non-universality of IW-contractions, *Book of abstracts of the Sixth International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (2012, June 17–21, Protaras, Cyprus)*, p. 35.
17. Popovych D., Lie-orthogonal operators, *International Workshop "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (2011, December 18–19, Kyiv, Ukraine)*. Abstract. http://www.imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/PopovychD
18. Popovych D.R., Generalized IW-contractions of Lie algebras, *International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (2009, June 21–27, Kyiv, Ukraine)*. Abstract. https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2009/PopovychD

Результати дисертації доповідалися на таких конференціях і симпозіумах:

- Міжнародна конференція "The 13th International Algebraic Conference in Ukraine" (Київ, 6–9 липня 2021 р.),
- Міжнародна конференція "The International Conference of Young Mathematicians" (Київ, 3–5 червня 2021 р.),

- Міжнародна конференція “Algebraic and Geometric Methods of Analysis”, присвячена пам’яті Юрія Трохимчука (17.03.1928–18.12.2019) (Одеса, 25–28 травня 2021 р.),
- Сьомий міжнародний симпозіум “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (GADEIS)” (Ларнака, Кіпр, 15–19 червня 2014 р.),
- Міжнародний симпозіум “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics” (Київ, 22–23 грудня 2013 р.),
- Міжнародна конференція “The Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations” (Київ, 16–20 серпня 2013 р.),
- Третья міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 25–27 квітня 2013 р.),
- Міжнародна конференція “Lie Algebras and Applications” (Упсала, Швеція, 6–8 вересня 2012 р.)
- Шостий міжнародний симпозіум “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (GADEIS)” (Протарас, Кіпр, 17–21 червня 2012 р.),
- Міжнародний симпозіум “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics” (Київ, 18–19 грудня 2011 р.),
- Дев’ята міжнародна конференція “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics” (Київ, 21–27 червня 2009 р.)

Результати дисертації також неодноразово доповідалися та обговорювалися на засіданнях наукових семінарів

- відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін),
- кафедри алгебри і комп’ютерної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, (керівник семінару — професор А.П. Петравчук).