Академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

ПОПОВИЧ Роман Омелянович

УДК 517.42:519.46

СИМЕТРІЙНА РЕДУКЦІЯ І ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ НАВ'Є-СТОКСА

Спеціальність – 01.01.03 – математична фізика

ДИСЕРТАЦІЯ
на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник –
член-кореспондент АН України
доктор фізико-математичних наук
професор В.І. Фущич

Київ – 1992

З М І С Т

ВСТУП . . . .

РОЗДІЛ І. ЛІЇВСЬКА РЕДУКЦІЯ РІВНЯНЬ НАВ'Є-СТОКСА.

§ I. Нееквівалентні одно- та двовимірні підалгебри алгебри A^{∞} . . . .

§ 2. A^{∞}-нееквівалентні анзаци корозмірності два для поля Нав'є-Стокса і редукція рівнянь Нав'є-Стокса . . . .

§ 3. Про редукцію рівнянь Нав'є-Стокса до лінійних систем ДРЧП . . . .

§ 4. Симетрійні властивості та точні розв'язки однієї редукованої системи . . . .

§ 5. A^{∞}-нееквівалентні анзаци корозмірності один для поля Нав'є-Стокса і редукція рівнянь Нав'є-Стокса . . . .

РОЗДІЛ 2. УМОВНА СИМЕТРІЯ ТА НЕЛІЇВСЬКІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ НАВ'Є-СТОКСА.

§ I. Про рівняння Нав'є-Стокса з додатковою умовою $u^1_1=u^2_2=u^3=0$ . . . .

§ 2. Про загальний розв'язок та симетрію рівнянь Нав'є-Стокса з додатковою умовою $((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}=\vec{0})$ . . . .

§ 3. Сім'ї розв'язків рівнянь Нав'є-Стокса, що представляються у вигляді суми експонент . .

§ 4. Ліївська симетрія деяких систем ДРЧП, пов'язаних з рівняннями Нав'є-Стокса . . . . . .

§ 5. Про клас операторів Q-умовної інваріантності рівнянь Нав'є-Стокса . . . .
ДОДАТОК А. Q-умовна симетрія лінійного одновимірного рівняння теплопровідності . . . .
ВИСНОВКИ . . . .
ЛІТЕРАТУРА . . . .

ВСТУП.

Одними з основних рівнянь математичної фізики є рівняння Нав'є-Стокса (РНС), що описують рух в'язкої нестисливої рідини. Ці рівняння істотньо нелінійні, і тому до останнього часу їх дослідження в основному велися наближеними методами, достатньо повний огляд яких міститься в [52]. Але не буде перебільшенням сказати, що основною метою дослідників РНС з моменту відкриття цих рівнянь було отримання їх точних розв'язків, оскільки саме точні розв'язки можуть дати найбільш повний опис нелінійних ефектів, притаманних гідродинаміці. Інтерес до відшукання нових розв'язків РНС різко зріс в зв'язку з новими можливостями, що відкривають започатковані Лі теоретико-групові методи, які в останній час інтенсивно розроблюються як за кордоном (Л.В. Овсянніков [35], П. Олвер [36], П. Вінтерніц [105], Н.Х. Ібрагімов [16]), так і на Україні (зокрема, школою В.І. Фущича).

Метою пропонованої дисертації є отримання широких класів точних розв'язків РНС з допомогою теоретико-алгебраїчних методів, вивчення умовної та нелокальної симетрії РНС. Результати дисертації лежать в руслі досліджень, що вже на протязі двадцяти років проводяться в відділі прикладних досліджень Інституту математики АН України під керівництвом В.І. Фущича.

Рівняння Нав'є-Стокса (РНС) були опубліковані французькими вченими Нав'є, який розглядував тільки випадок нестисливої рідини, в 1827 р. та Пуассоном, який досліджував випадок стисливої рідини, в 1831 р. І той, і другий виходили з гіпотетичних уявлень про молекулярні сили. В 1843 р. Сен-Венан та в 1845 р. Стокс дали нові виведення цих рівнянь, які приводяться в багатьох підручниках з теоретичної гідродинаміки [22]. РНС (якщо включити до них і рівняння неперервності) для нестисливої рідини набувають вигляду

$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \Delta \vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{0}, \qquad (0.1)$$
$$\operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

В формулах (0.1) і всюди надалі $u=\{u^a\}$ - поле швидкостей рідини, p - тиск, $x_0=t$, $\vec{x}=\{x_a\}$, $x=\{x_\mu\}$, $\partial_t=\partial/\partial t$, $\partial_a=\partial/\partial x_a$, $\vec{\nabla}=\{\partial_a\}$, $\Delta=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ - лапласіан, кінематичний коефіцієнт в'язкості та густину рідини покладемо рівними одиниці. Домовимось також вважати, що індекси з грецького алфавіту змінюються від 0 до 3, індекси a,b,c - від 1 до 3, індекси i,j,k - від 1 до 2, по індексам, що повторюються, всюди, де не обумовлене інше, йде сумування.

Дослідження симетрійних властивостей РНС мають свою історію. Ще Біркгоф [2] помітив, що рівняння (0.1) інваріантні відносно одинадцятипараметричної розширеної групи Галілея $\tilde{G}(1,3)$, алгебра Лі якої $A\tilde{G}(1,3)$ задається операторами

$$\partial_t , \quad J_{ab} , \quad D, \quad \partial_a , \quad G_a ,$$

де

$$D = 2t\, \partial_t + x_a\, \partial_a - u^a\, \partial_{u^a} - 2\, p\, \partial_p ,$$
$$J_{ab} = x_a\, \partial_b - x_b\, \partial_a + u^a\, \partial_{u^b} - u^b\, \partial_{u^a} ,$$
$$G_a = t\, \partial_a + \partial_{u^a} .$$

Довгий час алгебра $A\tilde{G}(1,3)$ вважалася максимальною алгеброю інваріантності РНС (0.1) (див., наприклад, [40]). Вперше максимальну в сенсі Лі алгебру інваріантності РНС (0.1) знайшов Ю.А. Данілов [14]. Вона виявилася нескінченновимірною (тому надалі будемо позначати її через A^{∞}) і породжується базисними елементами

$$\partial_t\,,\quad D,\quad J_{ab}\,,\quad R(\vec{m}(t)),\quad Z(\chi(t)), \tag{0.2}$$

де

$$R(\vec{m}(t)) = m^a(t)\,\partial_a + m^a_t(t)\,\partial_{u^a} - m^a_{tt}(t)\,x_a\,\partial_p\,, \tag{0.3}$$

$$Z(\chi(t)) = \chi(t)\,\partial_p\,, \tag{0.4}$$

$m^a=m^a(t)$, $\chi=\chi(t)$ – довільні гладкі функції. В роботі А.А. Бучнева вказується (з посиланням на В.В. Пухначьова), що рівняння (0.1) допускають оператори $R(\vec{m}(t))$, $Z(\chi(t))$. Алгебра A^{∞} була знайдена також в роботах В.О. Битева [5], С.П. Ллойда [85].

Зробимо декілька зауважень про алгебру A^{∞}.

Оператори ∂_a, G_a входять в сім'ю операторів (0.3). Дійсно, якщо $m^a=\delta^{ab}$, то $R(\vec{m})=\partial_b$, а при $m^a=\delta^{ab}t$ $R(\vec{m})=G_b$; тут δ^{ab} – символ Кронекера ($\delta^{ab}=1$, $b=a$, $\delta^{ab}=0$, $b\neq a$). Тому алгебра A^{∞} містить в собі алгебру $A\tilde{G}(1,3)$, але не є прямою сумою

$$A\tilde{G}(1,3) \oplus \langle\, R(\vec{m}(t)),\ Z(\chi(t))\,\rangle,$$

як це вказано в [35].

Багато авторів також не звертали увагу на те, що необхідно точно задавати степінь гладкості функцій $m^a=m^a(t)$, $\chi=\chi(t)$ та інтервал, на якому вони визначені. Набір операторів (0.2) породжує алгебру, коли, наприклад, параметри-функції m^a, χ лежать в класі $C^{\infty}((t_0,t_1),\mathbb{R})$ ($C^{\infty}_0((t_0,t_1),\mathbb{R})$, $A((t_0,t_1),\mathbb{R})$) – множині нескінченно диференційовних (нескінченно диференційовних фінітних, дійсно-аналітичних) функцій з інтевала

(t_0, t_1) в $\mathbb{R}$, де $-\infty \le t_0 < t_1 \le +\infty$. Але РНС (0.1) допускає оператори (0.3),(0.4) і з параметрами-функціями меншої гладкості, причому мінімальний степінь їх гладкості залежить від того, яка гладкість вимагається для розв'язка РНС (0.1). Так, якщо $u^a \in C^2((t_0,t_1)\times\Omega, \mathbb{R})$, $p \in C^1((t_0,t_1)\times\Omega, \mathbb{R})$, де Ω - область з $\mathbb{R}^3$, то достатньо, щоб $m^a \in C^3((t_0,t_1), \mathbb{R})$, $\chi \in C^1((t_0,t_1), \mathbb{R})$. Тому можна розглядувати "псевдоалгебру", породжену операторами (0.2), в якій операція комутування визначена не для всіх пар її елементів і, відповідно, співвідношення алгебри Лі виконуються лише на тих елементах, на яких вони визначені. Отже, більш правильним було б вказувати в позначенні алгебри A^∞ і класи функцій, які пробігають параметри m^a, χ . Надалі для простоти фіксуємо ці класи, вважаючи, що m^a, $\chi \in C^\infty((t_0,t_1), \mathbb{R})$, і зберігаємо позначення алгебри, що породжується операторами (0.2) через A^∞. При цьому всі викладки будуть зроблені таким чином, щоб вони переносилися і на випадок функцій меншої гладкості.

Оператори (0.2) породжують такі перетворення інваріантності РНС (0.1):

1. ∂_t: $\quad \tilde{\vec{u}}(t,\vec{x}) = \vec{u}(t+\delta,\vec{x})$, $\tilde{p}(t,\vec{x}) = p(t+\delta,\vec{x})$

(зсуви по часу);

2. J_{ab}: $\quad \tilde{\vec{u}}(t,\vec{x}) = B\,\vec{u}(t,B^T\vec{x})$, $\tilde{p}(t,\vec{x}) = p(t,B^T\vec{x})$

(просторові повороти); (0.5)

3. D: $\quad \tilde{\vec{u}}(t,\vec{x}) = e^{\varepsilon}\vec{u}(e^{2\varepsilon}t,e^{\varepsilon}\vec{x})$, $\tilde{p}(t,\vec{x}) = e^{2\varepsilon}p(e^{2\varepsilon}t,e^{\varepsilon}\vec{x})$

(масштабні перетворення);

4. $R(\vec{m})$: $\quad \tilde{\vec{u}}(t,\vec{x}) = \vec{u}(t,\vec{x}-\vec{m}(t)) + \vec{m}_t(t)$,

$$\tilde{p}(t,\vec{x}) = p(t,\vec{x}-\vec{m}(t)) - \vec{m}_{tt}(t)\cdot\vec{x}$$

(включають просторові зсуви і перетворення Галілея);

$5.2(\chi)$: $\tilde{\vec{u}}(t,\vec{x}) = \vec{u}(t,\vec{x})$, $\tilde{p}(t,\vec{x}) = p(t,\vec{x}) + \chi(t)$;

тут $\delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $B \in O(3)$, B^T – транспонована до B матриця.

РНС (0.1) допускають крім неперевних перетворень (0.5) і дискретні перетворення, що мають вигляд:

$$\begin{gathered} \tilde{t} = t, \quad \tilde{x}_a = x_a \text{ , } a \neq b, \quad \tilde{x}_b = -x_b \text{ ,} \\ \tilde{p} = p, \quad \tilde{u}^a = u^a \text{ , } a \neq b, \quad \tilde{u}^b = -u^b . \end{gathered} \tag{0.6}$$

Перетворення (0.5), (0.6) можна використати для одержання нових розв'язків РНС (0.1) з відомих (так зване розмноження розв'язків).

Основна складність при розв'язанні РНС (0.1) пов'язана з нелінійністю, яку дають конвективні члени. Тому один з методів розв'язання РНС полягає в тому, щоб шукати розв'язки, для яких конвективні члени тотожньо дорівнюють нулю, або виражаються в деякій простій формі. Прикладом таких розв'язків є узагальнені течії Бельтрамі [102, 104], для яких конвективний член є потенційним, тобто

$$\operatorname{rot} ((\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}) = \operatorname{rot} (\vec{u} \times \operatorname{rot} \vec{u}) = \vec{0} . \tag{0.7}$$

До цього класу течій, зокрема, належать декілька відомих, але більш спеціальних випадків:

а) течії, коли конвективні члени в системі (0.1) тотожньо дорівнюють нулю [15, 66, 82];

б) течії з потенційним полем швидкостей ($\operatorname{rot} \vec{u} = \vec{0}$);

в) течії Бельтрамі ($\vec{u} \times \operatorname{rot} \vec{u} = \vec{0}$, $\operatorname{rot} \vec{u} \neq \vec{0}$);

г) деякі спеціальні випадки, коли завихреність є константою на лініях течії [102, 104];

д) спеціальні осесиметричні течії, для яких завихреність пропорційна відстані від осі симетрії [102, 104];

Добре відомим є також метод відшукання точних розв'язків РНС (0.1) з допомогою лієвської редукції по підалгебрам алгебри A^{∞}. Він широко використовувався в неявній формі у вигляді "симетрійних міркувань", або в більш розвиненій формі у вигляді теорії розмірності та подібності [2, 43] ще задовго до розповсюдження теоретико-групових методів. З часом його використання набуло явного характеру [6, 13, 19, 40, 41, 73]. Багато в чому це сталося завдяки роботі Біркгофа [2], в якій саме на рівняннях динаміки в'язкої рідини продемонстровані ефективність і різноманітні можливі застосування групових методів.

В останні роки поширюються і нові алгебраїчні методи розв'язання РНС (0.1), пов'язані з поняттями анзаца, умовної та Q-умовної симетрії [60, 76, 90], які також раніше використовувалися в неявній формі [63, 82].

В даній дисертаційній роботі з допомогою методів Лі та інших теоретикоалгебраїчних методів знайдені широкі класи точних розв'зків РНС (0.1), проведено дослідження симетрійних властивостей РНС та деяких пов'язаних з ним ДРЧП.

Дисертація складається з вступу, двох розділів, додатку, висновків і списку літератури, що включає 106 найменувань.

Перший розділ присвячений лієвській редукції РНС (0.1) по одно- та двовимірним підалгебрам алгебри A^{∞}. В § 1 виписані комутаційні співвідношення, та побудоване приєднане представлення алгебри A^{∞}, а також знайдені повні набори A^{∞}-нееквівалентних одно- та двовимірних її підалгебр. В § 2 побудовані лієвські анзаци коровимірності два для поля Нав'є-Стокса, проведена редукція РНС (0.1) до систем ДРЧП від двох незалежних змінних, які можна об'єднати в п'ять сімей. В цьому ж параграфі для двох сімей редукованих систем досліджені симетрійні властивості, та одержані деякі точні розв'язки. В § 3 показано, що редуковані системи з двох інших сімей зводяться до лінійних систем ДРЧП, зокрема, до незачепленої системи з двох лінійних одновимірних рівнянь теплопровідності(ЛОРТ), доліджені симетрійні властивості цих лінійних систем, знайдені широкі класи їх точних розв'язків (як ліївських, так і неліївських). В § 4 розглядується сім'я редукованих систем, що крім цього безпосередньо зустрічається в теорії конвективного руху в'язкої рідини, досліджена їх ліївська симетрія, проведена редукція цих систем до звичайних диференційних рівнянь (ЗДР). В § 5 побудовані ліївські анзаци корозмірності один для поля Нав'є-Стокса, з їх допомогою РНС (0.1) редуковані до систем ДРЧП від трьох незалежних змінних, які можна об'єднати в три сім'ї, вивчена ліївська симетрія всіх редукованих систем.

Другий розділ присвячений неліївським методам дослідження РНС (0.1). В § 1 розглянуті РНС (0.1) з додатковою умовою $u^1_1 = u^2_2 = u^3 = 0$. В § 2 описаний загальний розв'язок та знайдена ліївська симетрія РНС (0.1) з додатковою умовою $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{u} = \vec{0}$. В § 3 побудований широкий клас точних неліївських розв'язків РНС, які виражаються через фукції exp, sin, cos. В § 4 вивчена ліївська симетрія деяких систем ДРЧП, що пов'язані з РНС (0.1). В § 5 знайденою сім'ю операторів Q-умовної симетрії РНС (0.1).

В додатку досліджена Q-умовна симетрія лінійного одновимірного рівняння теплопровідності (ЛОРТ). Знайдені визначальні рівняння на коефіцієнти оператора Q-умовної симетрії ЛОРТ, вивчена ліївська симетрія цих рівнянь, та отримані нелокальні заміни, що зводять їх до ЛОРТ. Показаний зв'язок Q-умовної симетрії з неліївськими формулами розмноження точних розв'язків та лінеаризацією нелінійних рівнянь.

В висновках коротко сформульовані результати дисертаційної роботи.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах [37-39, 59, 72]. Більша частина з них доповідалася на семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики АН України. Деякі результати представлялися на міжнародній конференції, присвяченій пам'яті академіка М.Ф. Кравчука.

Виражаю щиру подяку моєму науковому керівнику члену-кореспонденту АН України В.І. Фущичу за постановку задачі і постійну увагу до роботи та старшому науковому співробітнику В.М. Штеленю за співробітництво в процесі роботи над дисертацією.

РОЗДІЛ I. ЛІВСЬКА РЕДУКЦІЯ РІВНЯНЬ НАВ'Є-СТОКСА.

В цьому розділі побудовані повні набори нееквівалентних одно- та двовимірних підалгебр максимальної в сенсі Лі (нескінченновимірної) алгебри A^{∞} інваріантності РНС (0.1) і відповідних їм анзаців корозмірності один і два для поля Нав'є-Стокса. Проведена редукція РНС до систем ДРЧП від двох та трьох незалежних змінних. Досліджені симетрійні властивості редукованих систем та побудовані їх точні розв'язки. В деяких випадках ці системи вдалося звести до лінійних ДРЧП, зокрема, до лінійного одновимірного рівняння теплопровідності(ЛОРТ). В результаті отримані широкі сім'ї розв'язків РНС, що залежать від кількох довільних функцій або числових параметрів.

§ 1. Нееквівалентним одно- та двовимірні підлагебри алгебри A^{∞}.

Для знаходження повних наборів нееквівалентних підалгебр алгебри A^{∞} використаємо алгоритм, наведений, наприклад, в [35,36]. Коротко викладемо його. Попередньо дамо необхідні означення.

Нехай G - деяка група Лі, A - її алгебра. Для кожного $g \in G$ операція спряження $K_g(h)=ghg^{-1}$, $h\in G$ є дифеоморфізмом групи G. Його диференціал $Ad(g)=dK_g$ визначає лінійне відображення на A, що називається приєднаним представленням елемента g на алгебрі A. Значення цього відображення на $W\in A$ будемо називати приєднаною дією елемента g на W.

1. Знаходимо комутаційні співвідношення між базисними елементами алгебри A^{∞}.

2. Для довільних базисних елементів V та W^0 алгебри A^∞ та довільного $\varepsilon\in\mathbb{R}$ обчислюємо приєднану дію $Ad(\varepsilon V)W^0=Ad(\exp(\varepsilon V))W^0$ елемента $\exp(\varepsilon V)$ з однопараметричної групи, породженої оператором V, на W^0. Це можна зробити двома шляхами:

або сумуючи ряд Лі

$$W(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}\{V^n,W^0\} = W^0 + \frac{\varepsilon}{1!}[V,W^0] + \frac{\varepsilon^2}{2!}[V,[V,W^0]] + \ldots \tag{1.1.1}$$

(тут $\{V^0,W^0\}=W^0$, $\{V^n,W^0\}=[V,\{V^{n-1},W^0\}]$)

або безпосередньо інтегруючи систему лінійних ЗДР

$$\frac{dW(\varepsilon)}{d\varepsilon} = [V,W(\varepsilon)], \quad W(0) = W^0. \tag{1.1.2}$$

3. Візьмемо підалгебру загального вигляду з фіксованою розмірністю. Враховуючи замкненість підалгебри відносно дужки Лі, з допомогою різних приєднаних дій намагаємося "спростити" її настільки, наскільки це можливо.

Базисні елементи (0.2) алгебри A^∞ задовільняють таким комутаційним співвідношенням:

$$\begin{gathered}
[\partial_t,J_{ab}] = [D,J_{ab}] = 0, \quad [\partial_t,D] = 2\partial_t,\\
[\partial_t,Z(\chi)] = Z(\dot\chi), \quad [D,Z(\chi)] = Z(2t\dot\chi+2\chi),\\
[\partial_t,R(\vec m)] = R(\dot{\vec m}), \quad [D,R(\vec m)] = R(2t\dot{\vec m}-\vec m),\\
[R(\vec m),R(\vec n)] = Z(\dot{\vec m}\,\vec n-\vec m\cdot\dot{\vec n}), \quad [Z(\chi),R(\vec m)] = [Z(\chi),Z(\eta)] = 0,\\
[J_{12},J_{23}] = -J_{31}, \quad [J_{23},J_{31}] = -J_{12}, \quad [J_{31},J_{12}] = -J_{23},\\
[J_{ab},Z(\chi)] = 0, \quad [J_{ab},R(\vec m)] = R(\tilde{\vec m}),
\end{gathered}\tag{1.1.3}$$

де $\tilde m^a=m^b$, $\tilde m^b=-m^a$, $\tilde m^c=0$, $a\ne b\ne c\ne a$; тут і надалі точка позначає диференціювання по змінній t.

Більшість приєднаних дій обчислюються просто, як суми рядів Лі. Так

$$Ad(\varepsilon\partial_t)D = D + 2\varepsilon\partial_t, \quad Ad(\varepsilon D)\partial_t = e^{-2\varepsilon}\partial_t,$$
$$Ad(\varepsilon Z(\chi))\partial_t = \partial_t - \varepsilon Z(\dot\chi), \quad Ad(\varepsilon Z(\chi))D = D - \varepsilon Z(2t\dot\chi+2\chi),$$
$$Ad(\varepsilon R(\vec m))\partial_t = \partial_t - \varepsilon R(\dot{\vec m}) - \frac{\varepsilon^2}{2} Z(\dot{\vec m}\cdot\ddot{\vec m} - \vec m\cdot\dddot{\vec m}),$$
$$Ad(\varepsilon R(\vec m))D = D - \varepsilon R(2t\dot{\vec m}-\vec m) - \tag{1.1.4}$$
$$- \frac{\varepsilon^2}{2} Z(2t\dot{\vec m}\cdot\ddot{\vec m} - 2t\vec m\cdot\dddot{\vec m} - 4\vec m\cdot\ddot{\vec m}),$$
$$Ad(\varepsilon R(\vec m))J_{ab} = J_{ab} - \varepsilon R(\tilde{\vec m}) + \varepsilon^2 Z(m^a\cdot\ddot m^b - m^b\cdot\ddot m^a),$$
$$Ad(\varepsilon R(\vec m))R(\vec n) = R(\vec n) + \varepsilon Z(\vec n\cdot\ddot{\vec m} - \vec m\cdot\ddot{\vec n}),$$
$$Ad(\varepsilon J_{ab})R(\vec m) = R(\hat{\vec m}),$$
$$Ad(\varepsilon J_{ab})J_{cd} = J_{cd}\cos\varepsilon + [J_{ab},J_{cd}]\sin\varepsilon, \quad (a,b)\neq(c,d)\neq(b,a),$$

де $\tilde{\vec m}$ визначено в (1.1.3), $\hat m^d = m^d\cos\varepsilon + \tilde m^d\sin\varepsilon$, $d\in\{a,b\}$, $\hat m^c = m^c$, $a\neq b\neq c\neq a$. Чотири приєднані дії краще знайти, інтегруючи системи типу (1.1.2). В результаті отримаємо, що

$$\begin{cases} Ad(\varepsilon\partial_t)Z(\chi(t)) = Z(\chi(t+\varepsilon)), \\ Ad(\varepsilon\partial_t)R(\vec m(t)) = R(\vec m(t+\varepsilon)), \end{cases} \tag{1.1.5}$$
$$\begin{cases} Ad(\varepsilon D)Z(\chi(t)) = Z(e^{2\varepsilon}\chi(te^{2\varepsilon})), \\ Ad(\varepsilon D)R(\vec m(t)) = R(e^{-\varepsilon}\vec m(te^{2\varepsilon})). \end{cases}$$

Випадки, в яких приєднана дія співпадає з тотожнім відображенням, випущені.

Зауваження ~~1.1.1~~ A.2. Якщо $Z(\chi(t)) \in A^\infty[C^\infty((t_0,t_1),\mathbb{R}^3)]$, де $t_0>-\infty$, або $t_1<+\infty$, то приєднане представлення $Ad(\varepsilon\partial_t)$ ($Ad(\varepsilon D)$)встановлює відношення еквівалентності між операторами $Z(\chi(t))$ та $Z(\chi(t+\varepsilon))$ ($Z(\chi(t))$ та $Z(e^{2\varepsilon}\chi(te^{2\varepsilon}))$), що належать до (різних) алгебр $A^\infty[C^\infty((t_0,t_1),\mathbb{R}^3)]$ і $A^\infty[C^\infty((t_0-\varepsilon,t_1-\varepsilon),\mathbb{R}^3)]$ ($A^\infty[C^\infty((t_0,t_1),\mathbb{R}^3)]$ і $A^\infty[C^\infty((t_0e^{-2\varepsilon},t_1e^{-2\varepsilon}),\mathbb{R}^3)]$ відповідно. Аналогічне твердження справедливе і для оператора $R(\vec m)$. Еквівалентність підалгебр в теоремах 1.1.1 та 1.1.2 також розуміється в цьому сенсі. A.3

Зауваження ~~1.1.2~~. Крім приєднаних дій (1.1.4), (1.1.5) при класифікації підалгебр алгебри A^{∞} можна використовувати і дискретні перетворення (0.6).

Лема 1.1.1. Нехай $N\geq 1$.

а) Якщо $\chi\in C^N((t_0,t_1),\mathbb{R})$, то $\exists\eta\in C^N((t_0,t_1),\mathbb{R})$: $2t\dot\eta+2\eta=\chi$.

б) Якщо $\chi\in C^N((t_0,t_1),\mathbb{R})$, то $\exists\eta\in C^N((t_0,t_1),\mathbb{R})$: $2t\dot\eta-\eta=\chi$.

в) Якщо $m^1,m^2\in C^N((t_0,t_1),\mathbb{R})$, $a\in\mathbb{R}$, то $\exists l^1,l^2\in C^N((t_0,t_1),\mathbb{R})$:

$$2t\dot l^1 - l^1 + al^2 = m^1,$$

$$2t\dot l^2 - l^2 - al^1 = m^2.$$

Доведення. а) Якщо $0\notin(t_0,t_1)$, то функція

$$\eta(t) = \frac{1}{2t}\int_{t_2}^{t}\chi(\tau)\,d\tau,\quad t\in(t_0,t_1),$$

де t_2 - довільна фіксована точка з інтевала (t_0,t_1), задовільняє умовам леми. Нехай $0\in(t_0,t_1)$. Покладемо

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{2t}\int_0^t\chi(\tau)\,d\tau, & t\in(t_0,t_1)/\{0\},\\ \chi(0)/2\ , & t=0.\end{cases}$$

$\eta\in C((t_0,t_1),\mathbb{R})$, крім того, функція η є N раз неперевно диференційовною на $(t_0,t_1)/\{0\}$. Так як $\chi\in C^N((t_0,t_1),\mathbb{R})$, то

$$\chi(t) = \sum_{n=0}^{N}\frac{\chi^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{1}{(N-1)!}\int_0^t[\chi^{(N)}(\xi)-\chi^{(N)}(0)](t-\xi)^{N-1}\,d\xi. \qquad (1.1.6)$$

Звідси

$$\eta(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\frac{\chi^{(n)}(0)}{(n+1)!}t^n + \frac{1}{2t\ N!}\int_0^t[\chi^{(N)}(\xi)-\chi^{(N)}(0)](t-\xi)^{N}\,d\xi, \qquad (1.1.7)$$

коли $t\in(t_0,t_1)/\{0\}$. Доозначимо похідні $\eta^{(n)}$, $n=\overline{1,N}$ в точці $t=0$:

$$\eta^{(n)}(0) = \frac{\chi^{(n)}(0)}{2(n+1)}, \; n=\overline{1,N}.$$

Тоді з (1.1.7) випливає, що $\eta^{(n)} \in C((t\ ,t\ ),\mathbb{R})$, $n=\overline{1,N}$, а це означає, що $\eta \in C^N((t\ ,t\ ),\mathbb{R})$. Можна також перевірити, що $2t\dot{\eta}+2\eta=\chi$.

б) Якщо $0 \notin (t_0,t_1)$, то функція

$$\eta(t) = |t|^{1/2} \int_{t_2}^{t} |\tau|^{-1/2} \frac{\chi(\tau)}{2\tau} d\tau, \quad t\in(t_0,t_1),$$

де t_2 – довільна фіксована точка з інтевала (t_0,t_1), задовільняє умовам леми. Нехай $0\in(t_0,t_1)$. Покладемо

$$\eta(t) = \begin{cases} |t|^{1/2} \int_0^t |\tau|^{-1/2} \dfrac{\chi(\tau)-\chi(0)}{2\tau} d\tau - \chi(0), & t\in(t_0,t_1)/\{0\}, \\ -\chi(0), & t=0. \end{cases}$$

$\eta\in C((t_0,t_1),\mathbb{R})$, крім того, функція η є N раз неперевно диференційовною на $(t_0,t_1)/\{0\}$. З (1.1.6) випливає, що

$$\eta(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\chi^{(n)}(0)}{(n+1)!} \frac{t^n}{2n-1} + \qquad (1.1.8)$$

$$+ \frac{|t|^{1/2}}{(N-1)!} \int_0^t \frac{|\tau|^{-1/2}}{2\tau} \int_0^\tau [\chi^{(N)}(\xi) - \chi^{(N)}(0)](\tau-\xi)^N d\xi \, d\tau,$$

коли $t\in(t_0,t_1)/\{0\}$. Доозначимо похідні $\eta^{(n)}$, $n=\overline{1,N}$ в точці $t=0$:

$$\eta^{(n)}(0) = \frac{\chi^{(n)}(0)}{2n-1}, \; n=\overline{1,N}.$$

Тоді з (1.1.8) випливає, що $\eta^{(n)} \in C((t\ ,t\ ),\mathbb{R})$, $n=\overline{1,N}$, а це означає, що $\eta\in C^N((t\ ,t\ ),\mathbb{R})$. Можна також перевірити, що $2t\dot{\eta}-\eta=\chi$.

в) Введемо позначення:

$$si(t) = \sin((a/2)\ln|t|), co(t) = \cos((a/2)\ln|t|).$$

Якщо $0\notin(t_0,t_1)$, то функції

$$l^1(t) = |t|^{1/2} co(t) \int_t^t \frac{|\tau|^{-1/2}}{2\tau} [\, m^1(\tau)co(\tau) + m^2(\tau)si(\tau) \,] d\tau -$$

$$- |t|^{1/2} si(t) \int_{t}^{t} \frac{|\tau|^{-1/2}}{2\tau} [-m^1(\tau) si(\tau) + m^2(\tau) co(\tau)] \, d\tau ,$$

$$l^2(t) = |t|^{1/2} si(t) \int_{t}^{t} \frac{|\tau|^{-1/2}}{2\tau} [m^1(\tau) co(\tau) + m^2(\tau) si(\tau)] \, d\tau -$$

$$- |t|^{1/2} co(t) \int_{t}^{t} \frac{|\tau|^{-1/2}}{2\tau} [-m^1(\tau) si(\tau) + m^2(\tau) co(\tau)] \, d\tau ,$$

де $t \in (t_0, t_1)$; t_2 – довільна фіксована точка з інтевала (t_0, t_1), задовільняють умовам леми. Нехай $0 \in (t_0, t_1)$. Покладемо

$$l^1(t) = \begin{cases} |t|^{1/2} co(t) \int_0^t |\tau|^{-1/2} [(m^1(\tau)-m^1(0)) co(\tau) + \\ \qquad + (m^2(\tau)-m^2(0)) si(\tau)]/(2\tau) \, d\tau - \\ -|t|^{1/2} si(t) \int_0^t |\tau|^{-1/2} [-(m^1(\tau)-m^1(0)) si(\tau) + \\ \qquad + (m^2(\tau)-m^2(0)) co(\tau)]/(2\tau) \, d\tau + \\ + (-m^1(0)-am^2(0))/(1+a^2), \quad t \in (t_0, t_1)/\{0\}, \\ (-m^1(0)-am^2(0))/(1+a^2), \quad t=0. \end{cases}$$

$$l^2(t) = \begin{cases} |t|^{1/2} si(t) \int_0^t |\tau|^{-1/2} [(m^1(\tau)-m^1(0)) co(\tau) + \\ \qquad + (m^2(\tau)-m^2(0)) si(\tau)]/(2\tau) \, d\tau - \\ +|t|^{1/2} co(t) \int_0^t |\tau|^{-1/2} [-(m^1(\tau)-m^1(0)) si(\tau) + \\ \qquad + (m^2(\tau)-m^2(0)) co(\tau)]/(2\tau) \, d\tau + \\ + (am^1(0)-m^2(0))/(1+a^2), \quad t \in (t_0, t_1)/\{0\}, \\ (am^1(0)-m^2(0))/(1+a^2), \quad t=0. \end{cases}$$

Якщо доозначити похідні $(l^1)^{(n)}, (l^2)^{(n)}$, $n=\overline{1,N}$ в точці $t=0$:

$$(l^1)^{(n)} = \frac{(2n-1)m^1(0)-am^2(0)}{(2n-1)^2+a^2}, \quad (l^2)^{(n)} = \frac{(2n-1)m^2(0)+am^1(0)}{(2n-1)^2+a^2},$$

то аналогічно випадку б) можна показати, що визначені таким чином функції l^1, l^2 задовольняють умовам леми.

Теорема 1.1.1. Повний набір A^∞-нееквівалентних одновимірних підалгебр алгебри A^∞ вичерпується алгебрами:

1. $A^1(\varkappa) = \langle D + 2\varkappa J_{12} \rangle, \quad \varkappa \ge 0$;

2. $A^2 = \langle \partial_t \rangle$;

3. $A^3 = \langle \partial_t + J_{12} \rangle$;

4. $A^4(\chi,\eta) = \langle J_{12} + R(\,0,\,0,\,\eta(t)\,) + Z(\,\chi(t)\,)$,

причому алгебри $A^4(\chi^1,\eta^1)$ та $A^4(\chi^2,\eta^2)$ еквівалентні, якщо $\exists\ \varepsilon,\ \delta \in \mathbb{R},\ \exists\ \lambda \in C^\infty(\ (t_0,t_1),\ \mathbb{R}\ )$:

$$(\eta^2,\ \chi^2)(t) = (\ e^{-\varepsilon}\eta^1,\ e^{2\varepsilon}(\ \chi^1 + \dot\lambda\ \eta^1 - \dot\eta^1\ \lambda\ ))(te^{2\varepsilon}+\delta); \tag{1.1.9}$$

5. $A^5(\vec{m},\chi) = \langle R(\vec{m}) + Z(\chi) \rangle,\ (\vec{m},\chi) \ne (0,0)$,

причому алгебри $A^5(\vec{m}^1,\chi^1)$ та $A^5(\vec{m}^2,\chi^2)$ еквівалентні, якщо $\exists\ \varepsilon,\delta \in \mathbb{R},\ \exists\ c \ne 0,\ \exists\ B \in O(3),\ \exists\ \vec{l} \in C^\infty((t_0,t_1),\mathbb{R}^3)$:

$$(\vec{m}^2,\ \chi^2)(t) = \tag{1.1.10}$$
$$= (\ ce^{-\varepsilon}B\vec{m}^1,\ ce^{2\varepsilon}(\ \chi^1 + \dot{\vec{l}}\cdot\vec{m}^1 - \dot{\vec{m}}^1\cdot\vec{l}\ ))(te^{2\varepsilon}+\delta).$$

Доведення. Розглянемо довільну одновимірну підалгебру, що породжується елементом

$$V = a_1D + a_2\partial_t + a_3J_{12} + a_4J_{23} + a_5J_{31} + R(\vec{m}) + Z(\chi).$$

Коефіцієнти a_4 та a_5 будемо одразу вважати рівними нулю, бо їх завжди можна занулити з допомогою приєднаних представлень $Ad(\varepsilon_1J_{12})$ та $Ad(\varepsilon_2J_{31})$.

Якщо $a_1 \ne 0$, то заміною базиса зробимо $\tilde a_1=1$. Потім послідовно з допомогою приєднаних представлень $Ad(-\frac{1}{2}a_2\partial_t)$, $Ad(R(\vec{l}))$ і $Ad(Z(\eta))$, де $\vec{l} \in C^\infty((t_0+a_2/(2a_1),t_1+a_2/(2a_1)),\mathbb{R}^3)$, $\eta \in C^\infty((t_0+a_2/(2a_1),t_1+a_2/(2a_1)),\mathbb{R})$ та $\vec{l},\eta$ є розв'язками рівнянь: $2t\dot{\vec{l}} - \vec{l} + (a_3/a_1)(l^2, -l^1, 0)^T = \tilde{\vec{m}}$, де $\tilde{\vec{m}}(t) = a_1^{-1}\vec{m}(t-a_2/2)$,

$2t\dot{\eta} + 2\eta = \hat{\chi} + \frac{1}{2}(\ddot{\vec{l}}\cdot\vec{m} - \vec{l}\cdot\ddot{\vec{m}})$,   де $\hat{\chi}(t) = a_1^{-1}\chi(t-a_2/2)$,

занулимо a_2, $\vec{m}$ та χ. Такі $\vec{l}$ та η існують в силу леми 1.1.1. В результаті отримаємо алгебру $A^1(æ)$, де $2æ = a_3/a_1$. У випадку $æ < 0$ небхідно додатково застосувати перетворення (0.6) з b=1.

Якщо $a_1=0$, $a_2\neq 0$, то заміною базиса зробимо $\tilde{a}_2=1$. Потім послідовно приєднаними представленнями $Ad(R(\vec{l}))$ і $Ad(Z(\eta))$, де $\vec{l}\in C^\infty((t_0,t_1),\mathbb{R}^3)$, $\eta\in C^\infty((t_0,t_1),\mathbb{R})$ та

$$a_2\dot{\vec{l}} + a_3(l^2, -l^1, 0)^T = \vec{m},\quad a_2\dot{\eta} = \chi + \frac{1}{2}(\ddot{\vec{l}}\cdot\vec{m} - \vec{l}\cdot\ddot{\vec{m}}),\qquad (1.1.11)$$

занулимо $\vec{m}$ та χ. При цьому, якщо $a_3=0$, то одразу отримаємо алгебру A^2, а якщо $a_3\neq 0$, то, використовуючи при необхідності приєднану дію $Ad(\varepsilon D)$ та перетворення (0.6), отримаємо алгебру A^3.

Якщо $a_1=a_2=0$, $a_3\neq 0$, то після заміни базиса, застосувавши приєднане представлення $Ad(R(-m^2/a_3,\ m^1/a_3,\ 0))$, одержимо алгебру $A^4(\tilde{\chi},\eta)$, де $\eta = m^3/a_3$, $\tilde{\chi} = (\chi+\ddot{m}^1m^2-\ddot{m}^2m^1)/a_3$. Відношення еквівалентності (1.1.9) породжується приєднаними представленнями $Ad(\varepsilon D)$, $Ad(\delta\partial_t)$, $Ad(R(0,0,\lambda))$.

Якщо $a_1=a_2=a_3=0$, то одразу приходимо до алгебри $A^5(\vec{m},\chi)$. Відношення еквівалентності (1.1.10) породжується приєднаними представленнями $Ad(\varepsilon D)$, $Ad(\delta\partial_t)$, $Ad(R(\vec{l}))$ та $Ad(\varepsilon_{ab}J_{ab})$.

Теорема 2. Повний набір A^∞-нееквівалентних двовимірних підалгебр алгебри A^∞ вичерпується такими алгебрами:

1. $L^1(æ) = \langle\, \partial_t,\ D + æ J_{12} \,\rangle$, $æ \geq 0$;

2. $L^2(æ,\varepsilon) = \langle\, D,\ J_{12} + R(\,0,\ 0,\ æ\,|t|^{1/2}\,) + Z(\,\varepsilon\, t^{-1}\,)\,\rangle$, $æ \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$;

3. $L^3(æ,\varepsilon) = \langle\, \partial_t,\ J_{12} + æ\,\partial_3 + \varepsilon\,\partial_p \,\rangle$, $æ \in \{\,0;\ 1\,\}$, $\varepsilon \geq 0$ при $æ = 1$ та $\varepsilon \in \{\,0;\ 1\,\}$ при $æ = 0$;

4. $L^4(\sigma,æ,\mu,\nu,\varepsilon) = \langle\, D + 2\,æ\,J_{12}\,,\ Z(\,\varepsilon\,|t|^{\sigma-3/2}\,) +$

$+ R(\nu|t|^{\sigma}\cos(\varkappa\ln|t|),\ \nu|t|^{\sigma}\sin(\varkappa\ln|t|),\ \mu|t|^{\sigma})\rangle$,
$\varepsilon = 0$ при $\sigma \ne 1/2$ та $\varepsilon \ge 0$ при $\sigma = 1/2$, $\varkappa > 0$, $\mu \ge 0$, $\nu \ge 0$, $\mu^2 + \nu^2 = 1$;

5. $L^5(\sigma,\varepsilon) = \langle D,\ R(0, 0, |t|^{\sigma}) + Z(\varepsilon|t|^{\sigma-3/2})\rangle$,
$\varepsilon = 0$ при $\sigma \ne 1/2$ та $\varepsilon \ge 0$ при $\sigma = 1/2$;

6. $L^6(\sigma,\mu,\nu,\varepsilon) = \langle \partial_t + J_{12},\ Z(\varepsilon e^{\sigma t}) + R(\nu e^{\sigma t}\cos t,\ \nu e^{\sigma t}\sin t,\ \mu e^{\sigma t})\rangle$, $\mu \ge 0$, $\nu \ge 0$, $\mu^2 + \nu^2 = 1$, $\varepsilon = 0$ при $\sigma \ne 0$ та $\varepsilon \ge 0$ при $\sigma = 0$;

7. $L^7(\sigma,\varepsilon) = \langle \partial_t,\ Z(\varepsilon e^{\sigma t}) + R(0, 0, e^{\sigma t})\rangle$
$\sigma \in \{-1;0;1\}$, $\varepsilon = 0$ при $\sigma \ne 0$ та $\varepsilon \in \{0;1\}$ при $\sigma = 0$;

8. $L^8(\lambda,\eta,\rho,\chi) = \langle J_{12} + R(0, 0, \lambda(t)) + Z(\eta(t)),\ R(0, 0, \rho(t)) + Z(\chi(t))\rangle$, $\ddot\lambda\rho - \lambda\ddot\rho = 0$, $(\rho, \chi) \ne (0,0)$, причому алгебри $L^8(\lambda^1,\eta^1,\rho^1,\chi^1)$ та $L^8(\lambda^2,\eta^2,\rho^2,\chi^2)$ еквівалентні, якщо $\exists\, c^1 \ne 0$, $\exists\, \varepsilon,\delta,c^2 \in \mathbb{R}$, $\exists\, \phi \in C^{\infty}((t_0,t_1), \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
&\lambda^2(t) = e^{-\varepsilon}(\lambda^1 + c^2\rho^1)(te^{2\varepsilon}+\delta),\\
&\rho^2(t) = c^1 e^{-\varepsilon}\rho^1(te^{2\varepsilon}+\delta), \qquad (1.1.12)\\
&\eta^2(t) = e^{2\varepsilon}(\eta^1 + \ddot\phi\lambda^1 - \phi\ddot\lambda^1 + c^2(\chi^1 + \ddot\phi\rho^1 - \phi\ddot\rho^1))(te^{2\varepsilon}+\delta),\\
&\chi^2(t) = c^1 e^{2\varepsilon}(\chi^1 + \ddot\phi\rho^1 - \phi\ddot\rho^1)(te^{2\varepsilon}+\delta);
\end{aligned}$$

9. $L^9(\vec m,\chi,\vec n,\eta) = \langle R(\vec m(t)) + Z(\chi(t)),\ R(\vec n(t)) + Z(\eta(t))\rangle$, $\ddot{\vec m}\cdot\vec n - \vec m\cdot\ddot{\vec n} = \vec 0$, $\forall\, c^1, c^2 \in \mathbb{R}$: $c^1(\vec m,\chi) + c^2(\vec n,\eta) \ne (\vec 0,0)$, причому алгебри $L^9(\vec m^1,\chi^1,\vec n^1,\eta^1)$ та $L^9(\vec m^2,\chi^2,\vec n^2,\eta^2)$ еквівалентні, якщо $\exists\, \varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$, $\exists\, \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$: $\det\{a_{ij}\} \ne 0$, $\exists\, B \in O(3)$, $\exists\, \vec l \in C^{\infty}((t_0,t_1), \mathbb{R}^3)$:

$$\begin{aligned}
&\vec m^2(t) = e^{-\varepsilon}B(a_{11}\vec m^1 + a_{12}\vec n^1)(te^{2\varepsilon}+\delta),\\
&\vec n^2(t) = e^{-\varepsilon}B(a_{21}\vec m^1 + a_{22}\vec n^1)(te^{2\varepsilon}+\delta), \qquad (1.1.13)
\end{aligned}$$

$$\chi^2(t) = e^{2\varepsilon}\big(a_{11}(\chi^1 + \dot{\vec{l}}\cdot\vec{m}^1 - \vec{l}\cdot\dot{\vec{m}}^1) + a_{12}(\eta^1 + \dot{\vec{l}}\cdot\vec{n}^1 - \vec{l}\cdot\dot{\vec{n}}^1)\big)(te^{2\varepsilon}+\delta),$$

$$\eta^2(t) = e^{2\varepsilon}\big(a_{21}(\chi^1 + \dot{\vec{l}}\cdot\vec{m}^1 - \vec{l}\cdot\dot{\vec{m}}^1) + a_{22}(\eta^1 + \dot{\vec{l}}\cdot\vec{n}^1 - \vec{l}\cdot\dot{\vec{n}}^1)\big)(te^{2\varepsilon}+\delta);$$

10. $L^{10}(æ,\sigma)=\langle D + æ J_{12} , Z(|t|^{\sigma}) \rangle$, $æ \geq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$;

11. $L^{11}(\sigma) = \langle \partial_t + J_{12} , Z(e^{\sigma t}) \rangle$, $\sigma \in \mathbb{R}$;

12. $L^{12}(\sigma) = \langle \partial_t , Z(e^{\sigma t}) \rangle$, $\sigma \in \{-1;0;1\}$;

Теорема 1.1.2 доводиться аналогічно теоремі 1.1.1. Візьмемо довільну двовимірну підалгебру, що породжується базисними елементами:

$$V = a_1D + a_2\partial_t + a_3J_{12} + a_4J_{23} + a_5J_{31} + R(\vec{m}) + Z(\chi),$$

$$W = b_1D + b_2\partial_t + b_3J_{12} + b_4J_{23} + b_5J_{31} + R(\vec{n}) + Z(\eta),$$

де $[V,W]\in\langle V,W\rangle$, і, розглядуючи різні можливі випадки, намагаємо максимально їх "спростити" з допомогою предданих представлень. На подробицях доведення в силу його громіздкості зупинятися не будемо.

§ 2. A^{∞}-нееквівалентні анзаци корозмірності два для поля Нав'є-Стокса і редукція рівнянь Нав'є-Стокса.

По алгебрах L^1-L^7 з теореми А.2 та по алгебрах L^8, L^9 (при деяких обмеженнях на функції ρ, $\vec{m}$, $\vec{n}$) можна побудувати такий набір A^{∞}-нееквівалентних анзаців корозмірності два для поля Нав'є-Стокса:

1. $$\begin{aligned} u^1 &= (rR)^{-1}((x_1-æx_2)v^1 - x_2v^2 + x_1x_3r^{-1}v^3),\\ u^2 &= (rR)^{-1}((x_2+æx_1)v^1 + x_1v^2 + x_2x_3r^{-1}v^3),\\ u^1 &= x_3(rR)^{-1}v^1 - R^{-1}v^3,\\ p &= R^{-2}q, \end{aligned} \qquad (1.2.1)$$

де $\omega_1 = \varepsilon \operatorname{arctg} x_2/x_1 - \varkappa \ln R$, $\omega_2 = \operatorname{arctg} r/x_3$,

тут і надалі в §§ 2,3,4 $v^a = v^a(\omega_1, \omega_2)$, $q = q(\omega_1, \omega_2)$,

$r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $R = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$; $\varkappa, \varepsilon, \sigma, \mu, \nu$ – константи, задовольняють умови

2.
$$
\begin{aligned}
u^1 &= |t|^{-1/2} r^{-1} (x_1 v^1 - x_2 v^2) + \tfrac{1}{2} t^{-1} x_1 + x_1 r^{-2}, \\
u^2 &= |t|^{-1/2} r^{-1} (x_2 v^1 + x_1 v^2) + \tfrac{1}{2} t^{-1} x_2 + x_2 r^{-2}, \\
u^3 &= |t|^{-1/2} v^3 + \varkappa r^{-1} v^2 + \tfrac{1}{2} t^{-1} x_3, \\
p &= |t|^{-1} q - \tfrac{1}{2} r^{-2} + \tfrac{1}{8} (R/t)^2 + \varepsilon |t|^{-1} \operatorname{arctg} x_2/x_1,
\end{aligned}
\tag{1.2.2}
$$

де $\omega_1 = |t|^{-1/2} r$, $\omega_2 = |t|^{-1/2} x_3 - \varkappa \operatorname{arctg} x_2/x_1$;

3.
$$
\begin{aligned}
u^1 &= r^{-1} (x_1 v^1 - x_2 v^2) + x_1 r^{-2}, \\
u^2 &= r^{-1} (x_2 v^1 + x_1 v^2) + x_2 r^{-2}, \\
u^3 &= v^3 + \varkappa r^{-1} v^2, \\
p &= q - \tfrac{1}{2} r^{-2} + \varepsilon \operatorname{arctg} x_2/x_1,
\end{aligned}
\tag{1.2.3}
$$

де $\omega_1 = r$, $\omega_2 = x_3 - \varkappa \operatorname{arctg} x_2/x_1$;

4.
$$
\begin{aligned}
u^1 &= |t|^{-1/2} \mathrm{co}(t) (\mu v^1 + \nu v^3) - |t|^{-1/2} \mathrm{si}(t) v^2 + \\
&\qquad + \nu \xi t^{-1} \mathrm{co}(t) + \tfrac{1}{2} t^{-1} x_1 - \varkappa x_2/t, \\
u^2 &= |t|^{-1/2} \mathrm{si}(t) (\mu v^1 + \nu v^3) + |t|^{-1/2} \mathrm{co}(t) v^2 + \\
&\qquad + \nu \xi t^{-1} \mathrm{si}(t) + \tfrac{1}{2} t^{-1} x_2 + \varkappa x_1/t, \\
u^3 &= |t|^{-1/2} (\mu v^3 - \nu v^1) + \mu \xi t^{-1} + \tfrac{1}{2} t^{-1} x_3, \\
p &= |t|^{-1} q - \tfrac{1}{2} (\xi/t)^2 + \tfrac{1}{8} (R/t)^2 + \tfrac{1}{2} (\varkappa r/t)^2 + \\
&\qquad + \varepsilon |t|^{-3/2} (\nu x_1 \mathrm{co}(t) + \nu x_2 \mathrm{si}(t) + \mu x_3),
\end{aligned}
\tag{1.2.4}
$$

де
$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= |t|^{-1/2} (\mu x_1 \mathrm{co}(t) + \mu x_2 \mathrm{si}(t) - \nu x_3), \\
\omega_2 &= |t|^{-1/2} (x_2 \mathrm{co}(t) - x_1 \mathrm{si}(t)), \\
\xi &= (\sigma - \tfrac{1}{2})(\nu x_1 \mathrm{co}(t) + \nu x_2 \mathrm{si}(t) + \mu x_3) + 2\varkappa\nu (x_2 \mathrm{co}(t) - x_1 \mathrm{si}(t)),
\end{aligned}
$$

$si(t) = \sin(æ\ln|t|), co(t) = \cos(æ\ln|t|)$;

5. $$u^1 = |t|^{-1/2}v^1 + \tfrac{1}{2}t^{-1}x_1,$$
$$u^2 = |t|^{-1/2}v^2 + \tfrac{1}{2}t^{-1}x_2, \qquad (1.2.5)$$
$$u^3 = |t|^{-1/2}v^3 + \sigma t^{-1}x_3,$$
$$p = |t|^{-1}q + \tfrac{1}{8}(r/t)^2 - \tfrac{1}{2}\sigma(\sigma-1)(x_3/t)^2 + \varepsilon|t|^{-3/2}x_3,$$

де $\omega_1 = |t|^{-1/2}x_1$, $\omega_2 = |t|^{-1/2}x_2$,

6. $$u^1 = (\mu v^1 + \nu v^3)\cos t - v^2\sin t + \nu\xi\cos t - x_2,$$
$$u^2 = (\mu v^1 + \nu v^3)\sin t + v^2\cos t + \nu\xi\sin t + x_1, \qquad (1.2.6)$$
$$u^3 = \mu v^3 - \nu v^1 + \mu\xi,$$
$$p = q - \tfrac{1}{2}\xi^2 + \tfrac{1}{2}r^2 + \varepsilon(\nu x_1\cos t + \nu x_2\sin t + \mu x_3),$$

де $\omega_1 = (\mu x_1\cos t + \mu x_2\sin t - \nu x_3)$,

$$\omega_2 = x_2\cos t - x_1\sin t,$$
$$\xi = \sigma(\nu x_1\cos t + \nu x_2\sin t + \mu x_3) + 2\nu(x_2\cos t - x_1\sin t);$$

7. $$u^1 = v^1,\quad u^2 = v^2,\quad u^3 = v^3 + \sigma x_3, \qquad (1.2.7)$$
$$p = q - \tfrac{1}{2}\sigma^2x_3^2 + \varepsilon x_3,$$

де $\omega_1 = x_1$, $\omega_2 = x_2$.

8. Анзац по алгебрі $L^8(\lambda,\eta,\rho,\chi)$ можна побудувати лише для тих t, для яких $\rho(t)\neq 0$. При цій умові з формули (1.1.12) випливає, що алгебра $L^8(\lambda,\eta,\rho,\chi)$ еквівалентна або алгебрі

$$L^{8,1}(\rho,\tilde\eta) = \langle J_{12} + Z(\tilde\eta(t)),\ R(0,0,\rho(t)) \rangle,$$

або алгебрі

$$L^{8,2}(\rho,\tilde\eta) = \langle J_{12} + R(0,0,\rho(t)\textstyle\int(\rho(t))^{-2}dt) + Z(\tilde\eta(t)),\ R(0,0,\rho(t)) \rangle,$$

де $\tilde\eta$ визначається з (1.1.12); хвилю над η надалі будемо випускати. Анзаци, побудовані по алгебрах $L^{8,1}$ та $L^{8,2}$ мають вигляд:

$$u^1 = x_1v^1 - x_2r^{-2}(\ v^2 - s(t)\ ),$$
$$u^2 = x_2v^1 + x_1r^{-2}(\ v^2 - s(t)\ ),$$
$$u^3 = (\rho(t))^{-1}(\ v^3 + \dot\rho(t)x_3 + \varepsilon \operatorname{arctg} x_1/x_2\ ), \tag{1.2.8}$$
$$p = q + \tfrac{1}{2}\ddot\rho(t)(\rho(t))^{-1}x_3^2 + \eta(t) \operatorname{arctg} x_1/x_2\ ,$$

де $\omega_1 = t$, $\omega_2 = r$, $s(t) = \int\eta(t)dt$, $\varepsilon=0$ для алгебри $L^{8,1}$, $\varepsilon=1$ для алгебри $L^{8,2}$.

9. Анзац по алгебрі $L^9(\vec m,\chi,\vec n,\eta)$ можна побудувати лише для тих t, для яких $\operatorname{rank}(\vec m(t),\vec n(t)) = 2$. При цій умові з (1.1.13) випливає, що алгебра $L^9(\vec m,\chi,\vec n,\eta)$ еквівалентна алгебрі $L^9(\vec m,0,\vec n,0)$. Анзац, побудований по алгебрі $L^9(\vec m,0,\vec n,0)$, має вигляд:

$$\vec u = \vec v + \frac{\tilde{\vec m}\cdot\vec x}{\lambda}\dot{\vec m} + \frac{\tilde{\vec n}\cdot\vec x}{\lambda}\dot{\vec n} - \frac{\vec k\cdot\vec x}{\lambda}\dot{\vec k}, \tag{1.2.9}$$
$$p = q + \tfrac{1}{2}\,\rho^{ab}(t)x_ax_b,$$

де $\omega_1=t$, $\omega_2=\vec k\cdot\vec x$, $\vec k=\vec m\times\vec m$, $\tilde{\vec m}=\vec n\times\vec k$, $\tilde{\vec n}=\vec k\times\vec m$, $\lambda=|\vec k|^2$,

$$\rho^{ab} = -\lambda^{-1}\Big[\ \ddot m^a\tilde m^b + \ddot n^a\tilde n^b + \frac{\vec k\cdot\ddot{\vec m}}{\lambda}\tilde m^a k^b + \frac{\vec k\cdot\ddot{\vec n}}{\lambda}\tilde n^a k^b\ \Big].$$

Підставивши анзаци (1.2.1)-(1.2.9) в РНС (0.1), отримаємо такі системи редукованих рівнянь:

1. $v^2v^1_1 + v^3v^1_2 - v^1v^3\operatorname{ctg}\omega_2 - (v^1)^2 - (v^3)^2 - (v^2+æv^1)^2\sin^2\omega_2 -$
$- [\ (æ^2+\sin^{-2}\omega_2)v^1_{11} + v^1_{22} - æv^1_1 - 2v^3_2 - 2v^2_1 - 2v^1\ ]\sin\omega_2 +$
$+ v^1_2\cos\omega_2 - v^1\sin^{-1}\omega_2 - (2q+æq_1)\sin^2\omega_2 = 0,$

$v^2v^2_1 + v^3v^2_2 + v^3(v^2+2æv^1)\operatorname{ctg}\omega_2 - æ((v^1)^2+(v^3)^2+(v^2+æv^1)^2\sin^2\omega_2)-$
$- [\ (æ^2+\sin^{-2}\omega_2)v^2_{11} + v^2_{22} + 3æv^2_1 + 2æ(v^3_2+æv^1_1+v^1)\ ]\sin\omega_2 +$
$- (\ v^2_2 + 2æv^1_2\ )\cos\omega_2 + (\ 2v^1_1 + 2v^3_1\operatorname{ctg}\omega_2 - v^2 - 2æv^1\ )\sin^{-1}\omega_2 +$

$$+ 2æq\sin^2\omega_2 + (1+æ^2\sin^2\omega_2)q_1 = 0, \qquad (1.2.10)$$

$$v^2v^3_1 + v^3v^3_2 - (v^3)^2\operatorname{ctg}\omega_2 - (v^2+æv^1)^2\sin\omega_2\cos\omega_2 -$$

$$- [\ (æ^2+\sin^{-2}\omega_2)v^3_{11} + v^3_{22} + æv^3_1 + 2v^1_2\ ]\sin\omega_2 +$$

$$- (\ 2v^1 + v^3_2 + v^2_1 + æv^1_1\ )\cos\omega_2 + q_2\sin^2\omega_2 = 0,$$

$$v^1 + v^2_1 + v^3_2 = 0;$$

2. $$v^1v^1_1 + v^3v^1_2 - \omega_1^{-1}v^2v^2 - [v^1_{11}+(1+æ^2\omega_1^{-2})v^1_{22}+2æ\omega_1^{-2}v^2_2] + q_1 = 0,$$

$$v^1v^2_1 + v^3v^2_2 + \omega_1^{-1}v^1v^2 - [v^2_{11}+(1+æ^2\omega_1^{-2})v^2_{22}-2æ\omega_1^{-2}v^1_2] +$$

$$+ 2\omega_1^{-2}v^2 - æ\omega_1^{-1}q_2 + \varepsilon\omega_1^{-1} = 0, \qquad (1.2.11)$$

$$v^1v^3_1 + v^3v^3_2 - 2æ\omega_1^{-2}v^1v^2 - [\ v^3_{11} + (1+æ^2\omega_1^{-2})v^3_{22}\ ] +$$

$$+ 2æ\omega_1^{-2}v^2_1 - 4æ\omega_1^{-3}v^2 - 2æ^2\omega_1^{-3}v^1_2 + (1+æ^2\omega_1^{-2})q_2 - \varepsilon æ\omega_1^{-2} = 0,$$

$$v^1_1 + v^3_2 + \omega_1^{-1}v^1 + \gamma = 0,$$

де $\gamma = \pm 3/2$ для анзаца (1.2.2) та $\gamma=0$ для анзаца (1.2.3), тут і надалі в знаках "$\pm$" та "$\mp$" верхній знак потрібно брати при $t>0$, нижній - при $t<0$.

Для анзаців (1.2.4)-(1.2.7) відповідні редуковані системи можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} &v^iv^1_i - v^1_{ii} + q_1 + \theta v^2 = 0,\\ &v^iv^2_i - v^2_{ii} + q_2 - \theta v^1 + \zeta v^3 = 0,\\ &v^iv^3_i - v^3_{ii} + \alpha v^3 + \beta = 0,\\ &v^i_i = \gamma, \end{aligned} \qquad (1.2.12)$$

де константи $\alpha,\beta,\gamma,\theta,\zeta$ приймають такі значення:

4. $\alpha = \pm(\sigma-1/2)$, $\beta = \varepsilon$, $\gamma = \mp(\sigma+1)$, $\theta = \mp 2æ\mu$, $\zeta = \pm 2æ\nu$;

5. $\alpha = \pm(\sigma-1/2)$, $\beta = \varepsilon$, $\gamma = \mp(\sigma+1)$, $\theta = 0$, $\zeta = 0$;

6. $\alpha = \sigma$, $\beta = \varepsilon$, $\gamma = -\sigma$, $\theta = -2\mu$, $\zeta = -2\nu$;

7. $\alpha = \sigma$, $\beta = \varepsilon$, $\gamma = -\sigma$, $\theta = 0$, $\zeta = 0$;

8. $v^1_1 + (v^1)^2 - \omega_2^{-4}(v^2-s)^2 + \omega_2 v^1 v^1_2 - v^1_{22} - 3\omega_2 v^1_2 + \omega_2^{-1} q_2 = 0,$ (1.2.13)

$$v^2_1 + \omega_2 v^1 v^2_2 - v^2_{22} + \omega_2^{-1} v^2_2 = 0, \tag{1.2.14}$$

$$v^3_1 + \omega_2 v^1 v^3_2 - v^3_{22} - \omega_2^{-1} v^3_2 + \omega_2^{-2}(v^2-s) = 0, \tag{1.2.15}$$

$$2v^1 + \omega_2 v^1_2 + \dot\rho/\rho = 0; \tag{1.2.16}$$

9. $\vec v_1 - \lambda \vec v_{22} + q_2 \vec k + \dfrac{\dot{\vec m}\cdot\vec v}{\lambda}\dot{\vec m} + \dfrac{\dot{\vec n}\cdot\vec v}{\lambda}\dot{\vec n} + \omega_2 \dot{\vec e} = \vec 0,$ (1.2.17)

$$\vec k\cdot\vec v_2 = 0, \tag{1.2.18}$$

де $\vec e = \vec e(t) = 2\lambda^{-2}(\dot{\vec m}\cdot\vec n - \dot{\vec n}\cdot\vec m)\dot{\vec k}\times\vec k + \lambda^{-2}(2\dot{\vec k}\cdot\dot{\vec k} - \ddot{\vec k}\cdot\vec k)$.

Тут нумерація анзаців та редукованих систем відповідає нумерації підалгебр в теоремі 1.1.2. Нижні індекси 1 і 2 означають диференціювання по інваріантним змінним ω_1 та ω_2 відповідно.

Зауваження 1.2.1. Анзаци (1.2.1)–(1.2.9) мають загальний вигляд

$$u^\mu = f^{\mu\nu}(t,\vec x)v^\nu(\omega_1,\omega_2) + g^\mu(t,\vec x), \tag{1.2.19}$$

де $u^0 := p$. Взв'язку з цим можна поставити таку задачу: описати всі (в тому числі і неліївські) анзаци вигляду (1.2.19), що редукують РНС (0.1). Так як РНС (0.1) є системою ДРЧП, то ця задача дуже складна і ще чекає свого розв'язання.

Проведемо дослідження симетрійних властивостей редукованих систем та побудуємо деякі їх точні розв'язки.

Теорема 1.2.1. Максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності системи (1.2.10) є алгебра $< \partial_1 >$.

Теорема 1.2.1. Максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності системи (1.2.11) є алгебра

1. $< \partial_2,\ \partial_q,\ D^1 = \omega_1\partial_1 - v^a\partial_{v^a} - 2q\partial_q >$, якщо $\gamma=æ=\varepsilon=0$;

2. $\langle \partial_2, \partial_q \rangle$, якщо $(\gamma,\varkappa,\varepsilon)\neq(0,0,0)$;

Теореми 1.2.1, 1.2.2 доводяться з допомогою стандартного алгоритма Лі.

Таким чином, всі оператори ліівської симетрії систем (1.2.10), (1.2.11) "індукуються" відповідними операторами з алгебри A^∞.

Редукція системи (1.2.10) по алгебрі $\langle \partial_1 \rangle$ і редукція системи (1.2.11) по алгебрі $\langle D^1 \rangle$ еквівалентні редукції РНС по алгебрі $\langle \partial_t, D, J_{12} \rangle$. Загальний розв'язок системи ЗДР, отриманої в результаті такої редукції, при додатковій умові $v^2=0$ виражається через гіпергеометричні функції [63] (див. також [27,43]).

Побудований по алгебрі $\langle \partial_2 + a\partial_q \rangle$, $a\in\mathbb{R}$, анзац має вигляд

$$v^a = f^a(\omega), \quad q = \tilde{q}(\omega) + a\omega_2, \tag{1.2.20}$$

де $\omega=\omega_1$. Після підстановки анзаца (1.2.20) в систему (1.2.11), на функції f^a, $\tilde{q}$ отримаємо таку систему ЗДР:

$$\begin{aligned}
&f^1f^1_\omega - f^1_{\omega\omega} - \omega^{-1}f^2f^2 + \tilde{q}_\omega = 0,\\
&f^1f^2_\omega - f^2_{\omega\omega} + \omega^{-1}f^1f^2 + 2\omega^{-2}f^2 + \varepsilon\omega^{-1} = 0,\\
&f^1f^3_\omega - f^3_{\omega\omega} - 2\varkappa\omega^{-2}f^1f^2 + 2\varkappa\omega^{-2}f^2_\omega - 4\varkappa\omega^{-3}f^2 - \varepsilon\varkappa\omega^{-2} = 0,\\
&f^1_\omega + \omega^{-1}f^1 + \gamma = 0.
\end{aligned} \tag{1.2.21}$$

В результаті інтегрування системи (1.2.21) можна знайти в квадратурах її загальний розв'язок:

$$\begin{aligned}
&f^1 = -\tfrac{1}{2}\gamma\omega + C_1\omega^{-1},\\
&f^2 = \omega^{-1}\Big\{ C_2 \int e^{-\frac{1}{4}\gamma\omega^2}|\omega|^{C_1+2}\,d\omega + C_3 +\\
&\qquad + \varepsilon\int e^{-\frac{1}{4}\gamma\omega^2}|\omega|^{C_1+2}\Big[\int e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2}\omega|\omega|^{C_1+2}\,d\omega\Big]d\omega\Big\},
\end{aligned} \tag{1.2.22}$$

$$f^3 = C_4 \int e^{-\frac{1}{4}\gamma\omega^2} |\omega|^{C_1} d\omega + C_5 +$$

$$\varkappa \int e^{-\frac{1}{4}\gamma\omega^2} |\omega|^{C_1} \left[\int e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2} |\omega|^{C_1} [-f^1 f^2 + 2f_1^2 - 4f^2 - \varepsilon]\omega^{-2} d\omega \right] d\omega ,$$

$$\tilde{q} = C_6 - \frac{1}{2} (- \frac{1}{2}\gamma\omega + C_1\omega^{-1})^2 - C_1\omega^{-2} + \int \omega^{-1}(f^2(\omega))^2 d\omega.$$

Якщо $\gamma=0$, то всі квадратури в формулах (1.2.22) виражаються через елементарні функції.

Дослідження редукованих систем 8,9 та системи (1.2.12) проведено в §§ 3,4.

§ 3. Про редукцію рівняння Нав'є-Стокса до лінійних систем ДРЧП.

Покажемо, що нелінійні редуковані системи 8, 9 з § 2 зводяться до лінійних систем ДРЧП.

Розглянемо систему 9 (рівняння (1.2.17), (1.2.18)). Проінтегруємо рівняння (1.2.18) по ω_2:

$$\dot{\vec{k}}\cdot\vec{v} = h(t).$$

Зробимо перетворення з групи симетрії РНС:

$$\tilde{\vec{u}}(t,\vec{x}) = \vec{u}(t,\vec{x}-\vec{l}(t)) + \dot{\vec{l}}(t), \quad \tilde{p}(t,\vec{x}) = p(t,\vec{x}-\vec{l}(t)) - \ddot{\vec{l}}(t)\cdot\vec{x},$$

де $\ddot{\vec{l}}\cdot\vec{m} - \vec{l}\cdot\ddot{\vec{m}} = \ddot{\vec{l}}\cdot\vec{n} - \vec{l}\cdot\ddot{\vec{n}} = 0$,

$$\dot{\vec{k}}\cdot\left[\,\dot{\vec{l}} - \frac{\dot{\vec{m}}\cdot\vec{l}}{\lambda}\dot{\vec{m}} - \frac{\dot{\vec{n}}\cdot\vec{l}}{\lambda}\dot{\vec{n}} + \frac{\dot{\vec{k}}\cdot\vec{l}}{\lambda}\dot{\vec{k}}\,\right] + h = 0.$$

Це перетворення не міняє анзац (1.2.9), і в той же час

$$\dot{\vec{k}}\cdot\tilde{\vec{v}} = 0,$$

тобто $\tilde{h}(t) = 0$. Тому без обмеження загальності можна покласти $h(t) \equiv 0$.

Нехай $f = f(\omega_1,\omega_2) = \dot{\vec{m}}\cdot\vec{v}$, $g = g(\omega_1,\omega_2) = \dot{\vec{n}}\cdot\vec{v}$. Так як $\ddot{\vec{m}}\cdot\vec{n} - \vec{m}\cdot\ddot{\vec{n}} = 0$, то $\dot{\vec{m}}\cdot\vec{n} - \vec{m}\cdot\dot{\vec{n}} = C = \mathrm{const}$. Рівняння (1.2.17) домножимо скалярно на вектори $\dot{\vec{m}}$, $\dot{\vec{n}}$, $\dot{\vec{k}}$. В результаті приходимо до лінійної системи рівнянь з змінними коефіцієнтами для функцій f, g, q:

$$f_1 - \lambda f_{22} + C\left[\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\lambda}f - \frac{\vec{m}\cdot\vec{m}}{\lambda}g\,\right] + 2C\lambda^{-2}\omega_2\ddot{\vec{n}}\cdot\dot{\vec{k}} = 0,$$

$$g_1 - \lambda g_{22} + C\left[\frac{\vec{n}\cdot\vec{n}}{\lambda}f - \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\lambda}g\,\right] - 2C\lambda^{-2}\omega_2\ddot{\vec{m}}\cdot\dot{\vec{k}} = 0,$$

$$q_2 = 2\lambda^{-2}\left(\,(\ddot{\vec{m}}\cdot\dot{\vec{k}})f + (\ddot{\vec{n}}\cdot\dot{\vec{k}})g\,\right) + \lambda^{-2}\omega_2(\ddot{\vec{k}}\cdot\vec{k} - 2\dot{\vec{k}}\cdot\vec{k}).$$

Розглянемо два можливих випадки.

а) Нехай C=0. Тоді існують такі функції $\phi^i=\phi^i(\tau,\omega)$, де $\tau = \int\lambda(t)dt$, $\omega = \omega_2$, що $f=\phi^1_\omega$, $g=\phi^2_\omega$ та $\phi^i_\tau - \phi^i_{\omega\omega} = 0$. Звідси випливає, що

$$\vec{u} = \left(\phi^1_\omega(\tau,\omega) + \frac{\dot{\vec{m}}\cdot\vec{x}}{\lambda}\right) \tilde{\vec{m}} + \left(\phi^2_\omega(\tau,\omega) + \frac{\dot{\vec{n}}\cdot\vec{x}}{\lambda}\right) \tilde{\vec{n}} - \frac{\dot{\vec{k}}\cdot\vec{x}}{\lambda}\ \vec{k},$$

$$p = \frac{2}{\lambda^2}(\tilde{\vec{m}}\cdot\dot{\vec{k}})\ \phi^1\ (\tau,\omega) + \frac{2}{\lambda^2}(\tilde{\vec{n}}\cdot\dot{\vec{k}})\ \phi^2\ (\tau,\omega) + \qquad (1.3.1)$$

$$+ \frac{1}{2\lambda}\left\{ \frac{\ddot{\vec{k}}\cdot\vec{k} - 2\ \dot{\vec{k}}\cdot\dot{\vec{k}}}{\lambda}\omega^2 - (\tilde{\vec{m}}\cdot\vec{x})(\ddot{\vec{m}}\cdot\vec{x}) - (\tilde{\vec{n}}\cdot\vec{x})(\ddot{\vec{n}}\cdot\vec{x}) - \right.$$

$$\left. - \frac{\dot{\vec{k}}\cdot\ddot{\vec{m}}}{\lambda}(\tilde{\vec{m}}\cdot\vec{x})(\vec{k}\cdot\vec{x}) - \frac{\dot{\vec{k}}\cdot\ddot{\vec{n}}}{\lambda}(\tilde{\vec{n}}\cdot\vec{x})(\vec{k}\cdot\vec{x}) \right\},$$

де $\dot{\vec{m}}\cdot\vec{n} - \vec{m}\cdot\dot{\vec{n}} = 0$, $\vec{k} = \vec{m}\times\vec{n}$, $\tilde{\vec{m}} = \vec{n}\times\vec{k}$, $\tilde{\vec{n}} = \vec{k}\times\vec{m}$, $\lambda = |\vec{k}|^2$, $\omega = \vec{k}\cdot\vec{x}$, $\tau = \int \lambda(t)\ dt$, $\phi^i_\tau - \phi^i_{\omega\omega} = 0$, $i=1,2$, є розв'язком РНС (0.1).

Зауваження 1.3.1. Рівняння

$$\dot{\vec{m}}\cdot\vec{n} - \vec{m}\cdot\dot{\vec{n}} = 0 \qquad (1.3.2)$$

легко розв'язується. Зафіксуємо довільні функції $\vec{m},\vec{l}\in C^\infty((t_0,t_1),\mathbb{R}^3)$ такі, що $\vec{m}(t)\neq\vec{0}$, $\vec{l}(t)\neq\vec{0}$ та $\vec{m}(t)\cdot\vec{l}(t)=0$ при $t\in(t_0,t_1)$. Функцію $\vec{n}=\vec{n}(t)$ шукаємо у вигляді

$$\vec{n}(t) = \phi(t)\vec{m}(t) + \vec{l}(t). \qquad (1.3.3)$$

З рівняння (1.3.2)

$$\phi(t) = \int\frac{\dot{\vec{m}}\cdot\vec{l} - \vec{m}\cdot\dot{\vec{l}}}{\vec{m}\cdot\vec{m}}dt. \qquad (1.3.4)$$

б) Нехай C≠0. З допомогою заміни базиса алгебри $L^9(\vec{m},0,\vec{n},0)$ зробимо C=1. Тоді отримаємо такий розв'язок РНС (0.1):

$$\vec{u} = \left(y^i(t)\ \phi^i_\omega(\tau,\omega) + y^0(t)\ \omega + \frac{\dot{\vec{m}}\cdot\vec{x}}{\lambda} - \frac{\tilde{\vec{n}}\cdot\vec{x}}{\lambda^2}\right) \tilde{\vec{m}} +$$

$$+ \left(z^1(t)\, \phi^1_\omega(\tau,\omega) + z^0(t)\, \omega + \frac{\dot{\vec{n}}\cdot\vec{x}}{\lambda} - \frac{\tilde{\vec{m}}\cdot\vec{x}}{\lambda^2} \right) \tilde{\vec{n}} - \frac{\dot{\vec{k}}\cdot\vec{x}}{\lambda}\, \vec{k},$$

$$p = \frac{2}{\lambda^2} \left(\dot{\tilde{\vec{m}}}\cdot\dot{\vec{k}} \right) \left(y^1(t)\, \phi^1(\tau,\omega) + y^0(t) \frac{\omega^2}{2} \right) + \qquad (1.3.5)$$

$$+ \frac{2}{\lambda^2} \left(\dot{\tilde{\vec{n}}}\cdot\dot{\vec{k}} \right) \left(z^1(t)\, \phi^1(\tau,\omega) + z^0(t) \frac{\omega^2}{2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\ddot{\vec{k}}\cdot\vec{k} - 2\,\dot{\vec{k}}\cdot\dot{\vec{k}}}{\lambda} \omega^2 - \left(\dot{\tilde{\vec{m}}}\cdot\vec{x} \right)\left(\dot{\tilde{\vec{m}}}\cdot\vec{x} \right) - \left(\dot{\tilde{\vec{n}}}\cdot\vec{x} \right)\left(\dot{\tilde{\vec{n}}}\cdot\vec{x} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\vec{k}\cdot\ddot{\vec{m}}}{\lambda} \left(\dot{\tilde{\vec{m}}}\cdot\vec{x} \right)\left(\vec{k}\cdot\vec{x} \right) - \frac{\vec{k}\cdot\ddot{\vec{n}}}{\lambda} \left(\dot{\tilde{\vec{n}}}\cdot\vec{x} \right)\left(\vec{k}\cdot\vec{x} \right) \right\},$$

де $\dot{\vec{m}}\cdot\vec{n} - \vec{m}\cdot\dot{\vec{n}} = 1$, $\vec{k} = \vec{m}\times\vec{n}$. $\tilde{\vec{m}} = \vec{n}\times\vec{k}$, $\tilde{\vec{n}} = \vec{k}\times\vec{m}$, $\lambda = |\vec{k}|^2$, $\omega = \vec{k}\cdot\vec{x}$,

$\tau = \int \lambda(t)\, dt$, $\phi^i_\tau - \phi^i_{\omega\omega} = 0$, $i=1,2$,

$(y^i(t),\ z^i(t))$, $i=1,2$ – фундаментальна система розв'зків ЗДР

$$\dot{y} + \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\lambda} y - \frac{\vec{m}\cdot\vec{m}}{\lambda} z = 0\ , \quad \dot{z} + \frac{\vec{n}\cdot\vec{n}}{\lambda} y - \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\lambda} z = 0\ , \qquad (1.3.6)$$

а $(y^0(t),\ z^0(t))$ – частковий розв'язок системи

$$\begin{aligned} &\dot{y} + \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\lambda} y - \frac{\vec{m}\cdot\vec{m}}{\lambda} z + 2\, \frac{\tilde{\vec{n}}\cdot\dot{\vec{k}}}{\lambda^2} = 0, \\ &\dot{z} + \frac{\vec{n}\cdot\vec{n}}{\lambda} y - \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\lambda} z - 2\, \frac{\tilde{\vec{m}}\cdot\dot{\vec{k}}}{\lambda^2} = 0; \end{aligned} \qquad (1.3.7)$$

Зауваження 1.3.2. Аналогічно випадку C=0 розв'язок рівняння

$$\dot{\vec{m}}\cdot\vec{n} - \vec{m}\cdot\dot{\vec{n}} = 1 \qquad (1.3.8)$$

шукаємо у вигляді (1.3.3). В результаті одержимо, що

$$\phi(t) = \int \frac{\dot{\vec{m}}\cdot\vec{l} - \vec{m}\cdot\dot{\vec{l}} - 1}{\vec{m}\cdot\vec{m}}\, dt. \qquad (1.3.9)$$

Зауваження 1.3.3. Систему (1.3.6) можна звести до одного лінійного однорідного рівняння другого порядку відносно $\mathbf{y}$:

$$\left[\frac{\lambda}{\vec{m}\cdot\vec{m}}\dot{y} \right]^{\cdot} + \left[\left[\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\vec{m}\cdot\vec{m}}\right]^{\cdot} + \frac{1}{\vec{m}\cdot\vec{m}} \right] y = 0 \qquad (1.3.10)$$

(тоді $z = \frac{\lambda}{\vec{m}\cdot\vec{m}}\dot{y} + \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\vec{m}\cdot\vec{m}}y$), або відносно z:

$$\left[\frac{\lambda}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\dot{z} \right]^{\cdot} + \left[\frac{1}{\vec{n}\cdot\vec{n}} - \left[\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\right]^{\cdot} \right] z = 0 \qquad (1.3.11)$$

(тоді $y = -\frac{\lambda}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\dot{z} + \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}z$). В позначеннях зауваження 1.3.2 рівняння (1.3.10) має вигляд:

$$((\vec{l}\cdot\vec{l})\dot{y})^{\cdot} + \frac{\dot{\vec{m}}\cdot\vec{l} - \vec{m}\cdot\dot{\vec{l}}}{\vec{m}\cdot\vec{m}}y = 0. \qquad (1.3.12)$$

Вектор-функції $\vec{m}$ та $\vec{l}$ підбираємо таким чином, щоб для рівняння (1.3.12) можна знайти фундаментальну систему розв'язків. Нехай, наприклад, $\vec{m}\times\ddot{\vec{m}}=0$ для довільного $t\in(t_0,t_1)$. Покладемо

$$\vec{l} = \eta(t)\vec{m}\times\dot{\vec{m}},$$

де $\eta\in C^{\infty}((t_0,t_1),\mathbb{R})$, $\eta(t)\neq 0$ при $t\in(t_0,t_1)$. Тоді

$$\dot{\vec{m}}\cdot\vec{l} = 0, \quad \dot{\vec{m}}\cdot\vec{l} - \vec{m}\cdot\dot{\vec{l}} = 0,$$

$$\vec{n} = -\left[\int\frac{dt}{\vec{m}\cdot\vec{m}}\right]\vec{m} + \eta\vec{m}\times\dot{\vec{m}}, \quad \vec{k} = \eta\vec{m}\times(\vec{m}\times\dot{\vec{m}}), \quad \lambda = (\eta)^2(\vec{m}\cdot\vec{m})|\vec{m}\times\dot{\vec{m}}|^2,$$

$$\tilde{\vec{n}} = \eta(\vec{m}\cdot\vec{m})\vec{m}\times\dot{\vec{m}}, \quad \tilde{\vec{m}} = \eta(\vec{m}\cdot\vec{m})\left[\int\frac{dt}{\vec{m}\cdot\vec{m}}\right]\vec{m}\times\dot{\vec{m}} + (\eta)^2|\vec{m}\times\dot{\vec{m}}|^2\vec{m},$$

$$y^1(t) = \int(\eta)^{-2}|\vec{m}\times\dot{\vec{m}}|^{-2}dt, \quad z^1(t) = 1 - \left[\int\frac{dt}{\vec{m}\cdot\vec{m}}\right]\int(\eta)^{-2}|\vec{m}\times\dot{\vec{m}}|^{-2}dt,$$

$$y^2(t) = 1, \quad z^2(t) = -\int\frac{dt}{\vec{m}\cdot\vec{m}},$$

$$y^0(t) = 2\int\left\{ ((\vec{m}\times\dot{\vec{m}})\cdot\ddot{\vec{m}})|\vec{m}\times\dot{\vec{m}}|^{-2} + \int(\eta)^{-1}(\vec{m}\cdot\vec{m})^{-2}dt \right\}(\eta)^{-2}|\vec{m}\times\dot{\vec{m}}|^{-2}dt,$$

$$z^0(t) = -y^0(t)\int \frac{dt}{\vec{\dot m}\cdot\vec{\dot m}} + 2\int(\eta)^{-1}(\vec m\cdot\vec m)^{-2}dt.$$

Якщо $\vec m\times\vec{\dot m} = 0$ для довільного $t\in(t_0,t_1)$, то $\vec m = \chi(t)\vec a$, де $\chi(t)\in C^\infty((t_0,t_1),\mathbb{R})$, $\chi(t)\neq 0$ при $t\in(t_0,t_1)$, $\vec a=\mathrm{const}$, $|\vec a|=1$. Покладемо

$$\vec l(t) = \eta^1(t)\vec b + \eta^2(t)\vec c,$$

де $\eta^1,\eta^2\in C^\infty((t_0,t_1),\mathbb{R})$, $(\eta^1(t),\eta^2(t))\neq(0,0)$ при $t\in(t_0,t_1)$, $\vec b=\mathrm{const}$, $|\vec b|=1$, $\vec a\cdot\vec b=0$, $\vec c=\vec a\times\vec b$. Тоді

$$\vec n = -\chi\int(\chi)^{-2}dt\vec a + \eta^1\vec b + \eta^2\vec c, \quad \vec k = \chi\eta^1\vec c - \chi\eta^2\vec b,$$

$$\lambda = (\chi)^2((\eta^1)^2+(\eta^2)^2), \quad \vec{\tilde n} = (\chi)^2(\eta^1\vec b + \eta^2\vec c),$$

$$\vec{\tilde m} = (\chi)^2\left[\int(\chi)^{-2}dt\right](\eta^1\vec b + \eta^2\vec c) + \chi((\eta^1)^2+(\eta^2)^2)\vec a,$$

$$y^1(t) = \int((\eta^1)^2+(\eta^2)^2)^{-1}dt,$$

$$z^1(t) = 1 - \left[\int(\chi)^{-2}dt\right]\left[\int((\eta^1)^2+(\eta^2)^2)^{-1}dt\right],$$

$$y^2(t) = 1, \quad z^2(t) = -\int(\chi)^{-2}dt,$$

$$y^0(t) = 2\int(\dot\eta^2\eta^1-\dot\eta^1\eta^2)\chi^{-1}((\eta^1)^2+(\eta^2)^2)^{-1}dt,$$

$$z^0(t) = -y^0(t)\int(\chi)^{-2}dt.$$

Зауваження 1.3.4. В формулах (1.3.1), (1.3.5) розв'язки РНС (0.1) виражені через розв'язки системи двох незачеплених лінійних одновимірних рівнянь теплопровідності (ЛОРТ), що мають вигляд:

$$\Phi_\tau = \Phi_{\omega\omega}. \tag{1.3.13}$$

Ліївська симетрія ЛОРТ добре відома, для нього побудовані широкі класи точних розв'язків [36,67]. Q-умовна симетрія ЛОРТ досліджена в додатку А. [Дод. N12]

Розглянемо систему 8 (рівняння (1.2.13)-(1.2.16)). Рівняння (1.2.16) одразу дає, що

$$v^1 = -\frac{1}{2}\rho\dot\rho^{-1} + (h(t)-1)\omega_2^{-2}, \qquad (1.3.14)$$

де $h=h(t)$ - довільна диференційовна функція змінної $\omega_1=t$. Підставивши вираз (1.3.14) в рівняння (1.2.13)-(1.2.15), отримаємо, що

$$q_2 = \frac{1}{2}\left((\dot\rho/\rho)^{\cdot} - \frac{1}{2}(\dot\rho/\rho)^2\right)\omega_2 - \dot h\omega_2^{-1} - (h-1)^2\omega_2^{-3} + (v^2-s)^2\omega_2^{-3}, \qquad (1.3.15)$$

$$v_1^2 - v_{22}^2 + \left[\frac{h}{\omega_2} - \frac{\dot\rho}{2\rho}\omega_2\right]v_2^2 = 0, \qquad (1.3.16)$$

$$v_1^3 - v_{22}^3 + \left[\frac{h-2}{\omega_2} - \frac{\dot\rho}{2\rho}\omega_2\right]v_2^2 + \varepsilon\frac{v^2-s}{\omega_2} = 0. \qquad (1.3.17)$$

(Нагадаємо, що $\rho=\rho(t)$, $s=s(t)$ - довільні диференційовні функції змінної t, $\varepsilon\in\{0;1\}$.)

Після заміни незалежних змінних

$$\tau = \int |\rho(t)|\,dt, \quad \omega = |\rho(t)|^{1/2}\omega_2 \qquad (1.3.18)$$

в рівняннях (1.3.16),(1.3.17) одержимо лінійну систему більш простого вигляду:

$$v_\tau^2 - v_{\omega\omega}^2 + \frac{\hat h(\tau)}{\omega}v_\omega^2 = 0, \qquad (1.3.19)$$

$$v_\tau^3 - v_{\omega\omega}^3 + \frac{\hat h(\tau)-2}{\omega}v_\omega^3 + \varepsilon\frac{v^2-\hat s(\tau)}{\omega^2} = 0, \qquad (1.3.20)$$

де $\hat h(\tau)=h(t)$, $\hat s(\tau)=s(t)$. З рівнянь (1.3.15) випливає, що

$$q = \frac{1}{4}\left((\dot\rho/\rho)^{\cdot} - \frac{1}{2}(\dot\rho/\rho)^2\right)\omega_2^2 - \dot h\ln|\omega_2| - \frac{1}{2}(h-1)^2\omega_2^{-2} + \int(v^2(\tau,\omega)-\hat s(\tau))^2\omega_2^{-3}d\omega_2. \qquad (1.3.21)$$

Формули (1.3.14),(1.3.18)-(1.3.21) та анзац (1.2.8) дають розв'язок РНс (0.1).

При $\varepsilon=0$ система (1.3.19), (1.3.20) є незачепленою і складається з двох лінійних рівнянь переносу загального вигляду

$$f_t + \frac{\hat{h}(t)}{r} f_r - f_{rr} = 0, \qquad (1.3.22)$$

(1)

де $\tilde{h}=\hat{h}$ ($\tilde{h}=\hat{h}-2$) для рівняння (1.3.19) ((1.3.20)); тут зроблено перепозначення незалежних змінних ($\tau \to t$, $\omega \to r$); хвилю над h надалі будемо випускати. Дослідимо симетрійні властивості рівняння (1.3.22) та побудуємо деякі його точні розв'язки.

Теорема 1.3.1. Максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності рівняння (1.3.22) (1) є алгебра

1. $A_1 = \langle f\partial_f ,\ g(t,r)\partial_f \rangle$, якщо $h(t) \neq \text{const}$;
2. $A_2 = \langle \partial_t,\ D,\ \Pi,\ f\partial_f,\ g(t,r)\partial_f \rangle$, якщо $h(t)=\text{const}$, $h \notin \{0;-2\}$;
3. $A_3 = \langle \partial_t ,\ D,\ \Pi,\ \partial_r + \frac{h}{2r} f\partial_f ,\ f\partial_f,\ g(t,r)\partial_f,$
$$G = 2t\partial_t - (r-\frac{ht}{r})f\partial_f \rangle, \text{ якщо } h \in \{0;-2\}.$$

Тут $D = 2t\partial_t + r\partial_r$, $\Pi = 4t^2\partial_t + 4tr\partial_r - (r^2+2(1-h)t)f\partial_f$;
$g = g(t,r)$ – довільний розв'язок рівняння (1.3.22).

Теорема 1.3.1 доводиться з допомогою стандартного алгоритма Лі.

(1)

У випадку $h=\text{const}$, редукуючи рівняння (1.3.22) по нееквівалентним одновимірним підалгебрам алгебри A_2, можна побудувати такі його розв'язки:

по підалгебрі $\langle \partial_t + af\partial_f \rangle$, де $a \in \{-1;0;1\}$:

$$f = e^{-t} r^{\nu}(C_1 J_{\nu}(r)+C_2 Y_{\nu}(r)), \text{ якщо } a=-1,$$

$$f = e^{t} r^{\nu}(C_1 I_{\nu}(r)+C_2 K_{\nu}(r)), \text{ якщо } a=1,$$

$$f = C_1 r^{h+1} + C_2, \text{ якщо } a=0 \text{ та } h\neq-1,$$

$$f = C_1 \ln r + C_2, \text{ якщо } a=0 \text{ та } h=-1,$$

тут J_{ν}, Y_{ν} – функції Бесселя дійсної змінної,
I_{ν}, K_{ν} – функції Бесселя уявної змінної, $\nu=(h+1)/2$;

по підалгебрі $\langle D + 2af\partial_f \rangle$, де $a \in \mathbb{R}$:

$$f = |t|^a e^{-\frac{1}{2}\omega} |\omega|^{\frac{h-1}{2}} W\left(\frac{h-1}{4} - a, \frac{h+1}{4}, \omega\right),$$

де $\omega = \frac{r^2}{4t}$, $W(æ,\mu,\omega)$ – загальний розв'язок рівняння Уіттекера

$$4\omega^2\varphi_{\omega\omega} = (\omega^2 - 4æ\omega + 4\mu^2 - 1)\varphi;$$

по підалгебрі $\langle \partial_t + \Pi + af\partial_f \rangle$, де $a \in \mathbb{R}$:

$$f = (4t^2+1)^{\frac{h-1}{2}} \exp\{-t\omega + \frac{a}{2}\operatorname{arctg}2t\}\phi(\omega),$$

де $\omega = r^2(4t^2+1)^{-1}$, функція ϕ є розв'язком рівняння

$$4\omega\phi_{\omega\omega} + 2(1-h)\phi_\omega + (\omega - a)\phi = 0,$$

при цьому, якщо $a=0$, то $\phi(\omega) = \omega^{\mu}(C_1 J_\mu(\frac{\omega}{2}) + C_2 Y_\mu(\frac{\omega}{2}))$, де $\mu = \frac{h-1}{4}$.

(1)

Розглянемо рівняння ~~(1.3.22)~~ при довільній диференційовній функції $h=h(t)$.

(1)

Теорема ~~1.~~3.2. Рівняння ~~(1.3.22)~~ Q-умовно інваріантне відносно оператора

$$Q = C(t,r.f)\partial_t + A(t,r.f)\partial_r + B(t,r.f)\partial_f$$

тоді і тільки тоді, коли функції A,B,C задовольняють таким умовам:

Випадок 1. $C \neq 0$. Без обмеження загальності можна покласти $C=1$. При цьому $A = g^1(t,r)$, $B = g^2(t,r)f + g^3(t,r)$, де

(2)

$$\begin{aligned} & g^1_t - \frac{h}{r}g^1_r + \frac{h}{r^2}g^1 - g^1_{rr} + 2g^1_r g^1 - \frac{\dot{h}}{r} + 2g^2_r = 0, \\ & g^k_t - \frac{h}{r}g^k_r - g^k_{rr} + 2g^1_r g^k = 0, \quad k=2,3. \end{aligned} \qquad (1.3.23)$$

Випадок 2. $C=0, A \neq 0$. Без обмеження загальності можна покласти $C=1$. При цьому $B=B(t,r,f)$ є розв'язком рівняння

(3)

$$B_t - \frac{h}{r^2}B + \frac{h}{r}B_r - B_{rr} - 2BB_{rf} - B^2B_{ff} = 0. \qquad (1.3.24)$$

Теорема ~~1.~~3.2 доводиться з допомогою метода, викладеного в [60]

Зауваження 1.3.5. Аналогічно тому, як це робиться при дослідженні Q-умовної симетрії рівняння теплопровідності (див. додаток А, теореми А.1, А.2), можна показати, що система (1.3.23) з допомогою нелокальної заміни

$$g^1 = -\frac{f^1_{rr}f^2 - f^1 f^2_{rr}}{f^1_r f^2 - f^1 f^2_r} + \frac{h}{r},$$

$$g^2 = -\frac{f^1_{rr}f^2_r - f^1_r f^2_{rr}}{f^1_r f^2 - f^1 f^2_r}, \qquad (1.3.25)$$

$$g^3 = f^3_{rr} - \frac{h}{r}f^3_r + g^1 f^3_r - g^2 f^3$$

зводиться до незачепленої лінійної системи

$$f^a_t + \frac{h}{r}f^a_r - f^a_{rr} = 0, \quad a=\overline{1,3}, \qquad (1.3.26)$$

а рівняння (1.3.24) після заміни

$$B = -\Phi_t/\Phi_f, \quad \Phi=\Phi(t,r,f)$$

та перетворення годографа

$$y_0=t, \quad y_1=r, \quad y_2=\Phi, \quad \Psi=f$$

отримаємо рівняння на функцію $\Psi=\Psi(y_0,y_1,y_2)$:

$$\Psi_{y_0} + \frac{h}{y_1}\Psi_{y_1} - \Psi_{y_1y_1} = 0.$$

Таким чином, на відміну від ліївської, Q-умовна симетрія рівняння (1.3.22) є досить широкою при довільній гладкій функції $h=h(t)$. Наприклад, з теореми 1.3.2 випливає, що рівняння (1.3.22) Q-умовно інваріантне відносно операторів

$$\partial_r, \quad X = \partial_t + \frac{h-1}{r}\partial_r, \quad G = (2t+C)\partial_r - rf\partial_f$$

(C = const). Редукцією рівняння (1.3.22) по оператору X отримаємо такий розв'язок:

$$f = C_2\left(r^2 - 2\int (h(t)-1)\,dt\right) + C_1. \qquad (1.3.27)$$

його узагальненнями є розв'язки вигляду

(5)
$$f = \sum_{k=0}^{N} T^k(t)\, r^{2k}, \qquad (1.3.28)$$

де коефіцієнти $T^k = T^k(t), k=\overline{0,N}$ задовольняють систему ЗДР:

$$\dot{T}^k + (2k+2)(h(t)-2k-1)T^{k+1} = 0,\ k=\overline{0,N-1},\quad \dot{T}^N = 0, \qquad (1.3.29)$$

яка легко інтегрується при довільному $N \in \mathbb{N}$. Наприклад, якщо N=2, то

$$f = C_3\left\{ r^4 - 4r^2\int(h(t)-3)dt + 8\int[(h(t)-3)\int(h(t)-1)dt]dt \right\} +$$
$$+ C_2\,(r^2 - 2\int(h(t)-1)dt) + C_1.$$

Точний вираз для розв'язка вигляду (1.3.28) (5) при N=1 дає формула (1.3.27).(4)

Узагальнюючи розв'язок

$$f = C_0\exp\{-r^2/(4t+2C) + \int(h(t)-1)/(2t+C)dt\}, \qquad (1.3.30)$$

(1)

який отримується редукцією рівняння (1.3.22) по оператору G, можна побудувати розв'язки загального вигляду

$$f = \sum_{k=0}^{N} S^k(t)\,[r/(2t+C)]^{2k} \cdot \qquad (1.3.31)$$
$$\cdot \exp\{-r^2/(4t+2C) + \int(h(t)-1)/(2t+C)dt\},$$

де коефіцієнти $S^k = S^k(t), k=\overline{0,N}$ задовольняють систему ЗДР:

$$\dot{S}^k + (2k+2)(h(t)-2k-1)S^{k+1}/(2t+C)^2 = 0,\ k=\overline{0,N-1}, \qquad (1.3.32)$$
$$\dot{S}^N = 0.$$

Наприклад, при N=1

$$f = \left\{ C_1\left[(r/(2t+C))^{2k} - 2\int(h(t)-1)/(2t+C)^2dt\right] + C_0 \right\} \cdot$$
$$\cdot \exp\{-r^2/(4t+2C) + \int(h(t)-1)/(2t+C)dt\}.$$

Якщо припустити, що в системі (1.3.23) (2) $g^2=g^3=0$, то для знаходження функції g^1 маємо рівняння

$$g^1_t - \frac{h}{r} g^1_r + \frac{h}{r^2} g^1 - g^1_{rr} + 2g^1_r g^1 - \frac{h}{r} = 0.$$

Звідси одержимо, що $g^1 = -g_r/g + (h-1)/r$, де $g=g(t,r)$ є розв'язком рівняння

$$g_t + \frac{h-2}{r} g_r - g_{rr} = 0. \qquad (1.3.33)$$

З Q-умовної симетрії рівняння (1.3.22) відносно оператора

$$Q = \partial_r + (-g_r/g+(h-1)/r)\partial_r \qquad (1.3.34)$$

випливає наступне твердження. (6)

Теорема 1.3.3. Якщо g – розв'язок рівняння (1.3.33), а функція $f=f(t,r)$ – загальний інтеграл ЗДР

$$(rg_r-(h-1)g)dt + rgdr = 0, \qquad (1.3.35)$$

то f – розв'язок рівняння (1.3.22). (1)

Доведення. Очевидно, що (1.3.35) (4) є рівнянням в повних диференціалах. Тоді його загальний інтеграл

$$f(t,r) = C$$

має таку властивість:

$$f_t + \frac{h}{r} f_r - f_{rr} = rg_r - (h-1)g + \frac{h}{r} rg - (rg)_r = 0,$$

що і вимагалося довести.

Оберненим до теореми 1.3.3 є таке очевидне твердження.

Теорема 1.3.4. Якщо f – розв'язок рівняння (1.3.22) (1), то функція (8)

$$g = \frac{1}{r} f_r \qquad (1.3.36)$$

задовольняє рівняння (1.3.33). (6)

З теорем 1.3.3, 1.3.4 випливає, що для $h=2n$, де $n\in\mathbb{Z}$, розв'язки рівняння (1.3.22) можна будувати з відомих розв'язків рівняння теплопровідності або інтегруючи послідовно n звичайних диференційних рівнянь типу (1.3.35) (4) (коли $n>0$), або застосовуючи n раз формулу (1.3.36) (коли n<0).

Дослідимо симетрійні властивості та побудуємо деякі точні розв'язки системи (1.3.19)-(1.3.20) при $\varepsilon=0$. Для зручності перепишемо її у вигляді

$$f_\tau - f_{\omega\omega} + \frac{\hat{h}(\tau)}{\omega} f_\omega = 0, \qquad (1.3.37)$$

$$g_\tau - g_{\omega\omega} + \frac{\hat{h}(\tau)-2}{\omega} g_\omega + \frac{f-\hat{s}(\tau)}{\omega^2} = 0. \qquad (1.3.38)$$

Якщо (f,g) - розв'язок системи (1.3.37)-(1.3.38), то (f,g^0+g), де функція $g^0=g^0(\tau,\omega)$ задовольняє рівняння

$$g^0_\tau - g^0_{\omega\omega} + \frac{\hat{h}(\tau)-2}{\omega} g^0_\omega = 0, \qquad (1.3.39)$$

також є розв'язком системи (1.3.37)-(1.3.38).

Система (1.3.37)-(1.3.38) для деяких $\hat{s}=\hat{s}(\tau)$ має часткові розв'язки вигляду

$$f = \sum_{k=0}^{N} T^k(\tau)\omega^{2k}, \quad g = \sum_{k=0}^{N-1} S^k(\tau)\omega^{2k},$$

де $T^0(\tau) = \hat{s}(\tau)$. Наприклад, якщо $N=1$,

$$\hat{s}(\tau) = -2C_1\int(\hat{h}(\tau)-1)d\tau + C_2,$$

то

$$f = C_1(\omega^2 - 2\int(\hat{h}(\tau)-1)d\tau) + C_2, \quad g = -C_1\tau.$$

Нехай $\hat{s}(\tau)=0$.

Теорема 1.3.5. Максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності системи (1.3.37)-(1.3.38) є алгебра

1. $\langle f\partial_f + g\partial_g,\ \tilde{f}(t,r)\partial_f + \tilde{g}(t,r)\partial_g \rangle$, якщо $\hat{h}(t) \neq \mathrm{const}$;

2. $\langle 2\tau\partial_\tau + \omega\partial_\omega,\ \partial_\tau,\ f\partial_f + g\partial_g,\ \tilde{f}(t,r)\partial_f + \tilde{g}(t,r)\partial_g \rangle$, якщо $\hat{h}(t) = \mathrm{const}$, $\hat{h} \neq 0$;

3. $< 2\tau\partial_\tau + \omega\partial_\omega, \partial_\tau, f\omega^{-1}\partial_g, f\partial_f + g\partial_g, \tilde{f}(t,r)\partial_f + \tilde{g}(t,r)\partial_g >$,

якщо $\hat{h} = 0$;

Тут $(\tilde{f},\tilde{g})$ – довільний розв'язок системи (1.3.37)-(1.3.38) при $\hat{s}(\tau)=0$.

Теорема 1.3.1 доводиться з допомогою стандартного алгоритма Лі.

У випадку $\hat{s}(\tau)=0$, $\hat{h}(t) = \mathrm{const}$ редукцією по нееквівалентних підалгебрах максимальної алгебри симетрії можна отримати такі розв'язки системи (1.3.37)-(1.3.38):

по підалгебрі $< \partial_\tau >$:

$$f = C_1\ln\omega + C_2,$$

$$g = \frac{1}{4}C_1(\ln^2\omega - \ln\omega) + \frac{1}{2}C_2\ln\omega + C_3\omega^{-2} + C_4, \quad \text{якщо} \quad \hat{h}=-1;$$

$$f = C_1\omega^2 + C_2,$$

$$g = \frac{1}{4}\omega^2 + \frac{1}{2}C_2\ln^2\omega + C_3\ln\omega + C_4, \quad \text{якщо} \quad \hat{h}=1;$$

$$f = C_1\omega^{\hat{h}+1} + C_2,$$

$$g = \frac{1}{2}C_1(\hat{h}+1)^{-1}\omega^{\hat{h}+1} + C_2(\hat{h}-1)^{-1}\ln\omega + C_3\omega^{\hat{h}-1} + C_4,$$

якщо $\hat{h}=\not\in\{-1;1\}$;

по підалгебрі $< \partial_\tau - f\partial_f - g\partial_g >$:

$$f = e^{-\tau}\omega^{\frac{\hat{h}+1}{2}}\varphi^1(\omega), \quad g = e^{-\tau}\omega^{\frac{\hat{h}-1}{2}}\varphi^2(\omega),$$

де функції φ^1, φ^2 задовольняють систему

$$\omega^2\varphi^1_{\omega\omega} + \omega\varphi^1_\omega + (\omega^2 - \frac{1}{4}(\hat{h}+1)^2)\varphi^1 = 0, \qquad (1.3.40)$$

$$\omega^2\varphi^2_{\omega\omega} + \omega\varphi^2_\omega + (\omega^2 - \frac{1}{4}(\hat{h}-1)^2)\varphi^2 = \omega\varphi^1, \qquad (1.3.41)$$

загальний розв'язок якої можна виразити через квадратури від функцій Бесселя дійсної змінної $J_\nu(\omega)$ та $Y_\nu(\omega)$:

$$\psi^1 = C_1 J_{\nu+1}(\omega) + C_2 Y_{\nu+1}(\omega),$$

$$\psi^2 = C_3 J_\nu(\omega) + C_4 Y_\nu(\omega) + \frac{\pi}{2} Y_\nu(\omega)\int J_\nu(\omega)\psi^1(\omega)d\omega - \frac{\pi}{2} J_\nu(\omega)\int Y_\nu(\omega)\psi^1(\omega)d\omega,$$

$\nu = (\hat{h}-1)/2$;

по підалгебрі $< \partial_\tau + f\partial_f + g\partial_g >$:

$$f = e^\tau \omega^{\frac{\hat{h}+1}{2}} \psi^1(\omega), \quad g = e^\tau \omega^{\frac{\hat{h}-1}{2}} \psi^2(\omega),$$

де функції ψ^1, ψ^2 задовольняють систему

$$\omega^2\psi^1_{\omega\omega} + \omega\psi^1_\omega - (\omega^2 + \tfrac{1}{4}(\hat{h}+1)^2)\psi^1 = 0, \qquad (1.3.42)$$

$$\omega^2\psi^2_{\omega\omega} + \omega\psi^2_\omega - (\omega^2 + \tfrac{1}{4}(\hat{h}-1)^2)\psi^2 = \omega\psi^1, \qquad (1.3.43)$$

загальний розв'язок якої можна виразити через квадратури від функцій Бесселя уявної змінної $I_\nu(\omega)$ та $K_\nu(\omega)$:

$$\psi^1 = C_1 I_{\nu+1}(\omega) + C_2 K_{\nu+1}(\omega),$$

$$\psi^2 = C_3 I_\nu(\omega) + C_4 K_\nu(\omega) + I_\nu(\omega)\int K_\nu(\omega)\psi^1(\omega)d\omega - K_\nu(\omega)\int I_\nu(\omega)\psi^1(\omega)d\omega,$$

$\nu = (\hat{h}-1)/2$;

по підалгебрі $< 2\tau\partial_\tau + \omega\partial_\omega + a(f\partial_f - g\partial_g) >$:

$$f = |\tau|^a e^{-\frac{1}{2}\xi} |4\xi|^{\frac{\hat{h}-1}{4}} \psi^1(\xi), \quad g = |\tau|^a e^{-\frac{1}{2}\xi} |4\xi|^{\frac{\hat{h}-3}{4}} \psi^2(\xi),$$

де $\xi = \omega^2/(4\tau)$, а функції ψ^1, ψ^2 задовольняють систему

$$4\xi^2\psi^1_{\xi\xi} = \psi^1[\omega^2 + (a - \tfrac{1}{4}(\hat{h}-1))\omega + \tfrac{1}{4}(\hat{h}+1)^2 - 1], \qquad (1.3.44)$$

$$4\xi^2\psi^2_{\xi\xi} = \psi^2[\omega^2 + (a - \tfrac{1}{4}(\hat{h}-3))\omega + \tfrac{1}{4}(\hat{h}-1)^2 - 1] + 2|\omega|^{1/2}\psi^1, \quad (1.3.45)$$

загальний розв'язок якої можна виразити через квадратури від функцій Уіттекера.

§ 4. Симетрійні властивості та точні розв'язки однієї редукованої системи.

Як вже відзначалося в § 2, редукція РНС (0.1) по підалгебрам L^4-L^7 з теореми 1.1.2 приводить до систем ДРЧП однакової структури, що мають загальний вигляд ((1.2.14)):

$$\begin{aligned} &v^i v^1_i - v^1_{ii} + q_i + \theta v^2 = 0, \\ &v^i v^2_i - v^2_{ii} + q_2 - \theta v^1 + \zeta v^3 = 0, \\ &v^i v^3_i - v^3_{ii} + \alpha v^3 + \beta = 0, \\ &v^i_i = \gamma, \end{aligned} \qquad (1.4.1)$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \zeta$ – довільні дійсні параметри.

Якщо в системі (1.4.1) покласти $\theta=\alpha=\beta=\gamma=0$, то отримаємо рівняння, що описують плоский конвективний рух нестисливої в'язкої рідини, який виникає внаслідок неоднорідного нагрівання меж [28]. В цьому випадку v^1, v^2 – координати вектора швидкості, v^3 – температура, q – тиск, число Грассгофа $\lambda=-\zeta$, число Прандля $\sigma=1$. Деякі інваріантно-групові розв'язки цих рівнянь побудовані в [20]. Частковий випадок системи (1.4.1) (коли $\alpha=\beta=\theta=\zeta=0$, $\gamma=1$) розглянутий в [40].

В цьому параграфі досліджені симетрійні властивості системи (1.4.1) та побудовані широкі сім'ї її точних розв'язків.

Теорема 1.4.1. Максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності системи (1.4.1) є алгебра:

1. $E^1 = \langle \partial_1, \partial_2, \partial_q \rangle$, якщо $\zeta\neq0$, $\alpha\neq0$;
2. $E^2 = \langle \partial_1, \partial_2, \partial_q, \partial_{v^3} - \zeta x_2 \partial_q \rangle$, якщо $\zeta\neq0$, $\alpha=0$, $(\gamma,\theta,\beta) \neq (0,0,0)$;
3. $E^3 = \langle \partial_1, \partial_2, \partial_q, \partial_{v^3} - \zeta x_2 \partial_q, \tilde{D} - 3v^3 \partial_{v^3} \rangle$, якщо $\zeta\neq0$, $\alpha=\beta=\gamma=\theta=0$;

4. $E^4 = \langle \partial_1, \partial_2, \partial_q, J, (v^3 + \beta/\alpha)\partial_{v^3} \rangle$, якщо $\zeta=0$, $\alpha\neq0$;
5. $E^5 = \langle \partial_1, \partial_2, \partial_q, J, \partial_{v^3} \rangle$, якщо $\zeta=\alpha=0$, $(\gamma,\theta)\neq(0,0)$, $\beta\neq0$;
6. $E^6 = \langle \partial_1, \partial_2, \partial_q, J, \partial_{v^3}, v^3\partial_{v^3} \rangle$, якщо $\zeta=\alpha=\beta=0$, $(\gamma,\theta)\neq(0,0)$;
7. $E^7 = \langle \partial_1, \partial_2, \partial_q, J, \partial_{v^3}, \tilde{D} + 2v^3\partial_{v^3} \rangle$, якщо $\beta\neq0$, $\zeta=\alpha=\gamma=\theta=0$;
8. $E^8 = \langle \partial_1, \partial_2, \partial_q, J, \partial_{v^3}, \tilde{D}, v^3\partial_{v^3} \rangle$, якщо $\zeta=\alpha=\beta=\gamma=\theta=0$.

Тут $\tilde{D} = x_1\partial_1 + x_2\partial_2 - v^1\partial_{v^1} - v^2\partial_{v^2} - 2q\partial_q$,

$J = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 + v^1\partial_{v^2} - v^2\partial_{v^1}$.

Теорема 1.4.1 доводиться з допомогою стандартного алгоритма Лі.

Зауваження I. Серед базисних елементів алгебр E^1–E^8 є оператори ($\partial_{v^3} - \zeta x_2\partial_q$, ∂_{v^3}, $v^3\partial_{v^3}$), що не "індукуються" елементами алгебри A^∞.

Зауваження 2. Якщо $\alpha\neq0$, то локальним перетворенням

$$v^3 = \tilde{v}^3 - \beta/\alpha,\quad q = \tilde{q} + \zeta\beta x_2/\alpha$$

(незалежні змінні та інші функції при цьому не перетворюються) константу β в системі (7) можна занулити. Тому надалі вважаємо, що $\beta=0$ при $\alpha\neq0$.

Зауваження 3. Якщо $\gamma=0$, то після нелокального перетворення

$$q = \tilde{q} - \theta F,$$

де $F_1 = v^2$, $F_2 = -v^1$ (така функція F існує в силу останнього рівняння системи (7)) з системи (7) отримаємо знову систему вигляду (7), причому $\tilde{\theta}=0$. В деяких випадках ($\zeta\neq0$, $\alpha=\beta=\gamma=0, \theta\neq0$; $\zeta=\alpha=\gamma=0, \theta\neq0$) це дає змогу розширити симетрію системи (7), а отже отримати її неліївські розв'язки. Крім того, це означає, що система (7) в перерахованих випадках інваріантна відносно нелокальних перетворень

$\hat{x}_i = e^{\varepsilon}x_i$, $\hat{v}^i = e^{-\varepsilon}v^i$, $\hat{v}^3 = e^{\delta\varepsilon}v^3$, $\hat{q} = e^{-2\varepsilon}q + \theta(e^{-2\varepsilon}-1)F$,

де δ відповідно приймає значення -3, 2, 0 для випадків

$\alpha=\beta=\gamma=0$, $\zeta,\theta\neq0$; $\zeta=\alpha=\gamma=0$, $\beta,\theta\neq0$; $\zeta=\alpha=\beta=\gamma=0$, $\theta\neq0$.

Повні набори нееквівалентних одновимірних підалгебр алгебр E^1-E^8 вичерпуються такими алгебрами:

E^1: $\langle a_1\partial_1 + a_2\partial_2 + a_3\partial_q\rangle, a_1^2 + a_2^2 = 1$, $\langle\partial_q\rangle$;

E^2: $\langle a_1\partial_1 + a_2\partial_2 + a_3(\partial_{v^3}-\zeta x_2\partial_q)\rangle, a_1^2 + a_2^2 = 1$,

$\langle\partial_1 + a\partial_q\rangle, a\neq0$, $\langle\partial_{v^3}-\zeta x_2\partial_q\rangle$, $\langle\partial_q\rangle$;

E^3: $\langle a_1\partial_1 + a_2\partial_2 + a_3(\partial_{v^3}-\zeta x_2\partial_q)\rangle, a_1^2 + a_2^2 = 1, a_3\in\{-1;0;1\}$,

$\langle\partial_1 + a\partial_q\rangle, a\in\{-1;1\}$, $\langle D - 3v^3\partial_{v^3}\rangle$, $\langle\partial_{v^3}-\zeta x_2\partial_q\rangle$,

$\langle\partial_q\rangle$;

E^4: $\langle J_{12} + a_1\partial_q + a_2v^3\partial_{v^3}\rangle$, $\langle\partial_2 + a_1\partial_q + a_2v^3\partial_{v^3}\rangle$,

$\langle v^3\partial_{v^3} + a_1\partial_q\rangle$, $\langle\partial_q\rangle$, де $a_1,a_2\in\mathbb{R}$;

E^5: $\langle J_{12} + a_1\partial_q + a_2\partial_{v^3}\rangle$, $\langle\partial_2 + a_1\partial_q + a_2\partial_{v^3}\rangle$,

$\langle\partial_{v^3} + a_1\partial_q\rangle$, $\langle\partial_q\rangle$, де $a_1,a_2\in\mathbb{R}$;

E^6: $\langle J_{12} + a_1\partial_q + av^3\partial_{v^3}\rangle$, $\langle\partial_2 + a_1\partial_q + av^3\partial_{v^3}\rangle$,

$\langle J_{12} + a_1\partial_q + a_2\partial_{v^3}\rangle$, $\langle\partial_2 + a_1\partial_q + a_2\partial_{v^3}\rangle$,

$\langle v^3\partial_{v^3} + a_1\partial_q\rangle$, $\langle\partial_{v^3} + a_2\partial_q\rangle$, $\langle\partial_q\rangle$,

де $a_1\in\mathbb{R}$, $a_2\in\{-1;0;1\}$, $a\neq0$; (1.4.4)

E^7: $\langle D + 2v^3\partial_{v^3} + aJ_{12}\rangle$, $\langle J_{12} + a_1\partial_q + a_2\partial_{v^3}\rangle$,

$\langle\partial_2 + a_1\partial_q + a_2\partial_{v^3}\rangle$, $\langle\partial_{v^3} + a_2\partial_q\rangle$, $\langle\partial_q\rangle$,

де $a\in\mathbb{R}$, $a_2\in\{-1;0;1\}$, $a_1\in\mathbb{R}$ при $a_2\neq0$ і $a_1\in\{-1;0;1\}$ при $a_2=0$;

E^8: $\langle D + aJ_{12} + a_3 v^3 \partial_{v^3} \rangle$, $\langle D + aJ_{12} + a_3 \partial_{v^3} \rangle$,

$\langle J_{12} + a_1 \partial_q + av^3 \partial_{v^3} \rangle$, $\langle \partial_2 + a_1 \partial_q + av^3 \partial_{v^3} \rangle$,

$\langle J_{12} + a_1 \partial_q + a_2 \partial_{v^3} \rangle$, $\langle \partial_2 + a_1 \partial_q + a_2 \partial_{v^3} \rangle$,

$\langle v^3 \partial_{v^3} + a_1 \partial_q \rangle$, $\langle \partial_{v^3} + a_1 \partial_q \rangle$, $\langle \partial_q \rangle$,

де $a_1 \in \{-1;0;1\}$, $a_2 \in \{-1;1\}$, $a_3, a \in \mathbb{R}$.

Алгебри (1.4.4) використаємо для побудови анзаців, що редукують систему (1.4.1) до звичайних диференційних рівнянь. Результати досліджень для зручності зведемо в таблицю 1.4.1, яка містить повну інформацію про анзаци та інваріантну змінну ω. В таблиці 1.4.1 $f^1, f^2, f^3, \tilde{q}$ – диференційовні функції змінної ω.

Підставивши анзаци з таблиці 1.4.1 в систему (1.4.1), отримаємо такі редуковані системи ЗДР для функцій $f^1, f^2, f^3, \tilde{q}$:

1. $$\begin{aligned} &f^2 f^1_\omega - f^1_{\omega\omega} + a_3 - \theta f^2 + a_2 \zeta f^3 = 0, \\ &f^2 f^2_\omega - f^2_{\omega\omega} + \tilde{q}_\omega + \theta f^1 - a_1 \zeta f^3 = 0, \\ &f^2 f^3_\omega - f^3_{\omega\omega} + \alpha f^3 = 0, \\ &f^2_\omega = \gamma; \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

2. $$\begin{aligned} &f^2 f^1_\omega - f^1_{\omega\omega} + a - \theta f^2 = 0, \\ &f^2 f^2_\omega - f^2_{\omega\omega} + \tilde{q}_\omega + \theta f^1 + \zeta f^3 = 0, \\ &f^2 f^3_\omega - f^3_{\omega\omega} + \beta = 0, \\ &f^2_\omega = \gamma; \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

3. $$\begin{aligned} &f^2 f^1_\omega - f^1_{\omega\omega} - \theta f^2 + a_2 \zeta f^3 + \zeta a_3 a_1 \omega = 0, \\ &f^2 f^2_\omega - f^2_{\omega\omega} + \tilde{q}_\omega + \theta f^1 - a_1 \zeta f^3 + \zeta a_3 a_2 \omega = 0, \\ &f^2 f^3_\omega - f^3_{\omega\omega} + a_3 f^3 + \beta = 0, \\ &f^2_\omega = \gamma; \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

Таблиця 1.4.1. ($r=(\omega_1^2+\omega_2^2)^{1/2}$)

N, знач. параметр.	Алгебра	Інваріантна змінна	Анзац
1. $\zeta\neq0$, $\alpha\neq0, \beta=0$	$\langle a_1\partial_1+a_2\partial_2+a_3\partial_q\rangle$, $a_1^2+a_2^2=1$	$\omega=a_2\omega_1-a_1\omega_2$	$v^1=a_1f^1+a_2f^2$, $v^2=a_2f^1-a_1f^2$, $v^3=f^3$, $q=\tilde{q}+a_3(a_1\omega_1+a_2\omega_2)$
2. $\zeta\neq0$, $\alpha=0$	$\langle\partial_1+a\partial_q\rangle$, $a\neq0$	$\omega=\omega_2$	$v^1=f^1$, $v^2=f^2$, $v^3=f^3$, $q=\tilde{q}+a\omega_1$
3. $\zeta\neq0$, $\alpha=0$	$\langle a_1\partial_1+a_2\partial_2+$ $+a_3(\partial_{v^3}-\zeta\omega_2\partial_q)\rangle$, $a_1^2+a_2^2=1$	$\omega=a_2\omega_1-a_1\omega_2$	$v^1=a_1f^1+a_2f^2$, $v^2=a_2f^1-a_1f^2$, $v^3=f^3+a_3(a_1\omega_1+a_2\omega_2)$, $q=\tilde{q}-\zeta a_3(a_1\omega_1\omega_2+\frac{1}{2}a_2(\omega_2^2-\omega_1^2))$
4. $\zeta\neq0$, $\alpha=\beta=\gamma=\theta=0$	$\langle D-3v^3\partial_{v^3}\rangle$	$\omega=\operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{\omega_2}$	$v^1=r^{-2}(\omega_1f^1-\omega_2f^2)$, $v^2=r^{-2}(\omega_2f^1+\omega_1f^2)$, $v^3=r^{-3}f^3$, $q=r^{-2}\tilde{q}$,
5. $\zeta=\alpha=0$	$\langle\partial_2+a_1\partial_q+a_2\partial_{v^3}\rangle$	$\omega=\omega_1$	$v^1=f^1$, $v^2=f^2$, $v^3=f^3+a_2\omega_2$, $q=\tilde{q}+a_1\omega_2$
6. $\zeta=\beta=0$	$\langle\partial_2+a_1\partial_q+a_2v^3\partial_{v^3}\rangle$ $a_2\neq0$ при $\alpha=0$	$\omega=\omega_1$	$v^1=f^1$, $v^2=f^2$, $v^3=f^3e^{a_2\omega_2}$, $q=\tilde{q}+a_1\omega_2$

$$\begin{aligned}
4.\quad & f^2f^1_\omega - f^1_{\omega\omega} - f^1f^1 - f^2f^2 - 2\tilde{q} + \zeta f^3\sin\omega + 2f^2_\omega = 0,\\
& f^2f^2_\omega - f^2_{\omega\omega} + \tilde{q}_\omega - 2f^1_\omega + \zeta f^3\cos\omega = 0,\\
& f^2f^3_\omega - f^3_{\omega\omega} - 3f^1f^3 - 9f^3 = 0,\\
& f^2_\omega = 0;
\end{aligned} \tag{1.4.8}$$

$$\begin{aligned}
5.\quad & f^1f^1_\omega - f^1_{\omega\omega} + \theta f^2 + \tilde{q}_\omega = 0,\\
& f^1f^2_\omega - f^2_{\omega\omega} - \theta f^1 + a_1 = 0,\\
& f^1f^3_\omega - f^3_{\omega\omega} + a_2f^2 + \beta = 0,\\
& f^1_\omega = \gamma;
\end{aligned} \tag{1.4.9}$$

$$\begin{aligned}
6.\quad & f^1f^1_\omega - f^1_{\omega\omega} + \theta f^2 + \tilde{q}_\omega = 0,\\
& f^1f^2_\omega - f^2_{\omega\omega} - \theta f^1 + a_1 = 0,\\
& f^1f^3_\omega - f^3_{\omega\omega} + a_2f^2f^3 + (\alpha - a_2^2)f^3 = 0,\\
& f^1_\omega = \gamma;
\end{aligned} \tag{1.4.10}$$

$$\begin{aligned}
7.\quad & \omega f^1f^1_\omega - f^1_{\omega\omega} + f^1f^1 - \omega^{-4}f^2f^2 - 3\omega^{-1}f^1_\omega + \theta\omega^{-2}f^2 + \omega^{-1}\tilde{q}_\omega = 0,\\
& \omega f^1f^2_\omega - f^2_{\omega\omega} + \omega^{-1}f^2_\omega - \theta\omega^2f^1 + a_1 = 0,\\
& \omega f^1f^3_\omega - f^3_{\omega\omega} + a_2\omega^{-2}f^2 - \omega^{-1}f^3_\omega + \beta = 0,\\
& 2f^1 + \omega f^1_\omega = \gamma;
\end{aligned} \tag{1.4.11}$$

$$\begin{aligned}
8.\quad & \omega f^1f^1_\omega - f^1_{\omega\omega} + f^1f^1 - \omega^{-4}f^2f^2 - 3\omega^{-1}f^1_\omega + \theta\omega^{-2}f^2 + \omega^{-1}\tilde{q}_\omega = 0,\\
& \omega f^1f^2_\omega - f^2_{\omega\omega} + \omega^{-1}f^2_\omega - \theta\omega^2f^1 + a_1 = 0,\\
& \omega f^1f^3_\omega - f^3_{\omega\omega} + a_2\omega^{-2}f^2f^3 - \omega^{-1}f^3_\omega + (\alpha - a_2^2\omega^{-2})f^3 = 0,\\
& 2f^1 + \omega f^1_\omega = \gamma;
\end{aligned} \tag{1.4.12}$$

$$\begin{aligned}
9.\quad & (f^2-af^1)f^1_\omega - (1+a^2)f^1_{\omega\omega} - f^1f^1 - f^2f^2 + 2(f^2_\omega - af^1_\omega) - a\tilde{q}_\omega - 2\tilde{q} = 0,\\
& (f^2-af^1)f^2_\omega - (1+a^2)f^2_{\omega\omega} - 2(af^2_\omega + f^1_\omega) + \tilde{q}_\omega = 0,
\end{aligned} \tag{1.4.13}$$

$$(f^2-af^1)f^3_\omega-(1+a^2)f^3_{\omega\omega}+2f^1f^3-4f^3+4af^3_\omega+\beta=0,$$
$$f^2_\omega-af^1_\omega=0;$$

10. $$(f^2-af^1)f^1_\omega-(1+a^2)f^1_{\omega\omega}-f^1f^1-f^2f^2+2(f^2_\omega-af^1_\omega)-a\tilde{q}_\omega-2\tilde{q}=0,$$
$$(f^2-af^1)f^2_\omega-(1+a^2)f^2_{\omega\omega}-2(af^2_\omega+f^1_\omega)+\tilde{q}_\omega=0, \qquad (1.4.14)$$
$$(f^2-af^1)f^3_\omega-(1+a^2)f^3_{\omega\omega}+a_1f^1=0,$$
$$f^2_\omega-af^1_\omega=0;$$

11. $$(f^2-af^1)f^1_\omega-(1+a^2)f^1_{\omega\omega}-f^1f^1-f^2f^2+2(f^2_\omega-af^1_\omega)-a\tilde{q}_\omega-2\tilde{q}=0,$$
$$(f^2-af^1)f^2_\omega-(1+a^2)f^2_{\omega\omega}-2(af^2_\omega+f^1_\omega)+\tilde{q}_\omega=0, \qquad (1.4.15)$$
$$(f^2-af^1)f^3_\omega-(1+a^2)f^3_{\omega\omega}+a_1f^1f^3-a_1^2f^3+2aa_1f^3_\omega=0,$$
$$f^2_\omega-af^1_\omega=0;$$

Нумерація редукованих систем (1.4.5)-(1.4.15) відповідає нумерації анзаців в таблиці 1.4.1. Проінтегруємо системи (1.4.5)-(1.4.15) в тих випадках, коли це можливо. Надалі в цьому параграфі $C_k=\mathrm{const}$, $k=\overline{1,6}$.

1. Розглянемо систему (1.4.5). Якщо $\gamma=0$, то

$$f^2=2C_1,$$

$$f^3=\begin{cases} e^{C_1\omega}(\,C_2+C_3\omega\,), & C_1^2+\alpha=0,\\ e^{C_1\omega}(\,C_2e^{\lambda_1\omega}+C_3e^{-\lambda_1\omega}\,), & C_1^2+\alpha>0,\\ e^{C_1\omega}(\,C_2\cos\lambda_2\omega+C_3\sin\lambda_2\omega\,), & C_1^2+\alpha<0,\end{cases}$$

$$f^1=\frac{a_2\zeta}{\alpha}f^3+C^4+(a_3-2C_1\theta)\left\{\begin{matrix}-\frac{1}{2}\omega C_1^{-1}\\ \frac{1}{2}\omega^2\end{matrix}\right\}\begin{matrix},C_1\neq0\\ ,C_1=0\end{matrix}+C_5\left\{\begin{matrix}e^{2C_1\omega}\\ \omega\end{matrix}\right\}\begin{matrix},C_1\neq0\\ ,C_1=0\end{matrix},$$

$$\tilde q = C_5 - \theta C_4\omega - \frac{1}{2}\theta\begin{cases}(\theta-\frac{1}{2}a_3C_1^{-1})\omega^2 + C_5C_1^{-1}e^{2C_1\omega}, & C_1\neq 0\\ \frac{1}{3}a_3\omega^3 + C_5\omega^2, & C_1=0\end{cases} +$$

$$+\zeta(a_1-\theta a_2\alpha^{-1})\begin{cases}e^{C_1\omega}C_1^{-1}(C_2 + C_3(\omega - C_1^{-1})), & C_1^2=-\alpha\\ e^{C_1\omega}\left(\frac{C_2}{C_1+\lambda_1}e^{\lambda_1\omega} + \frac{C_3}{C_1-\lambda_1}e^{-\lambda_1\omega}\right), & C_1^2>-\alpha,\\ \frac{1}{\alpha}e^{C_1\omega}[(C_3\lambda_2-C_1C_2)\cos\lambda_2\omega-(C_2\lambda_2+C_1C_3)\sin\lambda_2\omega], & C_1^2<-\alpha\end{cases}$$

де $\lambda_1 = (C_1^2+\alpha)^{1/2}$, $\lambda_2 = (-C_1^2-\alpha)^{1/2}$.

Нехай $\gamma\neq 0$. Тоді

$f^2 = \gamma\omega$

(константу інтегрування можна занулити з допомогою зсувів),

$$f^3 = \omega^{-1/2}e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2}w\left(\frac{1}{2}\alpha\gamma^{-1}-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\gamma\omega^2\right),$$

$$f^1 = C_1 + C_2\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega + \theta\omega + a_3\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\left[\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega\right]d\omega + a_2\zeta\alpha^{-1}f^3,$$

$$\tilde q = C_3 - \theta(C_1+a_3\gamma^{-1})\omega - \frac{1}{2}(\gamma^2+\theta^2)\omega^2 - \theta C_2\left[\omega\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega - \gamma^{-1}e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\right] -$$

$$- \theta a_3\left\{\omega\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\left[\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega\right]d\omega - \gamma^{-1}e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega\right\} +$$

$$+ (a_1-\theta\alpha^{-1}a_2)\zeta\int f^3(\omega)d\omega,$$

де $w(\varkappa,\mu,\tau)$ – загальний розв'язок рівняння Уіттекера

$$4\tau^2 w_{\tau\tau} = (\tau^2-4\varkappa\tau+4\mu^2-1)w, \qquad (1.4.16)$$

причому для функцій Уіттеккера $M(\varkappa,\mu,\tau)$, $W(\varkappa,\mu,\tau)$, що визначаються інтегральними представленнями [7]:

$$M(\varkappa,\mu,\tau) = \frac{\Gamma(2\mu+1)\ \tau^{\mu+1/2}\ e^{-\tau/2}}{\Gamma(\mu-\varkappa+1/2)\Gamma(\mu+\varkappa+1/2)}\int_0^1 t^{\mu-\varkappa-1/2}(1-t)^{\mu+\varkappa-1/2}e^{\tau t}dt$$

$$(\ \mathrm{Re}(\mu-\varkappa+1/2)>0,\ \ \mathrm{Re}(\mu+\varkappa+1/2)>0\ ), \qquad (1.4.17)$$

$$W(\varkappa,\mu,\tau) = \frac{\tau^{\mu+1/2}e^{-\tau/2}}{\Gamma(\mu-\varkappa+1/2)}\int_0^{+\infty} t^{\mu-\varkappa-1/2}(1+t)^{\mu+\varkappa-1/2}e^{-\tau t}dt$$

$(\ \mathrm{Re}(\mu-\varkappa+1/2)>0,\ \ \mathrm{Re}(\tau)>0\ )$,

виконуються такі співвідношення

$$\int\omega^{-1/2}e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2}M(\varkappa,\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{2}\gamma\omega^2)d\omega =$$
$$= -(4\varkappa-1)^{-1}(-2/\gamma)^{1/2}\omega^{-1/2}e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2}M(\varkappa-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{2}\gamma\omega^2),$$

$$\int\omega^{-1/2}e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2}W(\varkappa,\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{2}\gamma\omega^2)d\omega = \qquad (1.4.18)$$
$$= -\tfrac{1}{2}(-2/\gamma)^{1/2}\omega^{-1/2}e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2}W(\varkappa-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{2}\gamma\omega^2),$$

$$\int\omega^{-1/2}e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2}W(-\varkappa,\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}\gamma\omega^2)d\omega =$$
$$= -2(4\varkappa-1)^{-1}(2/\gamma)^{1/2}\omega^{-1/2}e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2}M(-\varkappa+\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}\gamma\omega^2).$$

2. Розглянемо систему (1.4.6). Якщо $\gamma=0$, то

$f^2 = C_1$,

$$f^3 = \begin{cases} \frac{1}{2}\beta\omega^2 + C_2 + C_3\omega, & C_1=0,\\ -\beta C_1^{-1}\omega + C_2 + C_3e^{C_1\omega}, & C_1\neq 0,\end{cases}$$

$$f^1 = \begin{cases} \frac{1}{2}a\omega^2 + C_4 + C_5\omega, & C_1=0,\\ -(a+\theta C_1)C_1^{-1}\omega + C_4 + C_5e^{C_1\omega}, & C_1\neq 0,\end{cases}$$

$$\tilde{q} = C_6 + (C_4\theta-C_2\zeta)\omega + \begin{cases}(C_5\theta-C_3\zeta)\frac{1}{2}\omega^2+\frac{1}{6}(a\theta-\zeta\beta)\omega^3, & C_1=0\\ (C_5\theta-C_3\zeta)C_1^{-1}e^{C_1\omega}+\frac{\omega^2}{2}((\zeta\beta-a\theta)C_1^{-1}-\theta^2), & C_1\neq 0\end{cases}.$$

Якщо $\gamma\neq 0$, то

$f^2 = \gamma\omega$

(константу інтегрування можна занулити з допомогою зсувів),

$$f^3 = C_2 + C_1\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2} d\omega + \beta\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\left[\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2} d\omega\right]d\omega,$$

$$f^1 = C_4 + C_3\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2} d\omega + a\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\left[\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2} d\omega\right]d\omega - \theta\omega,$$

$$\tilde{q} = C_5 - \frac{1}{2}(\gamma^2+\theta^2)\omega^2 + (\theta C_4 - \zeta C_2)\omega + (\theta C_3 - \zeta C_1)\left[\omega\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2} d\omega - \gamma^{-1}e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\right] +$$
$$+ (a\theta - \zeta\beta)\left\{\omega\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\left[\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2} d\omega\right]d\omega - \gamma^{-1}e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2} d\omega + \gamma^{-1}\omega\right\}.$$

3. Розглянемо систему (1.4.7). Покладемо спочатку $\gamma=0$. Тоді з останнього рівняння системи (1.4.7) випливає, що $f^3=C_1$, а при інтегруванні інших рівнянь системи (1.4.7) виділяються такі окремі випадки:

а) $a_2=C_1=0$:

$$f^1 = C_2 + C_3\omega + \zeta a_3 a_1 \frac{\omega^3}{6},$$
$$f^2 = C_4 + C_5\omega + (\beta + a_3C_2)\frac{\omega^2}{2} + a_3C_3\frac{\omega^3}{6} + \zeta a_3^2 a_1\frac{\omega^5}{120},$$
$$\tilde{q} = C_6 + (a_1\zeta C_4 - \theta C_2)\omega + (a_1\zeta C_5 - \theta C_3)\frac{\omega^2}{2} + a_1\zeta(\beta + C_2a_3)\frac{\omega^3}{6} +$$
$$+ \zeta a_1 a_3(C_3 - \theta)\frac{\omega^4}{24} + (\zeta a_1 a_3)^2\frac{\omega^6}{720};$$

б) $a_2=0$, $C_1\neq 0$:

$$f^1 = C_2 + C_3e^{C_1\omega} - \zeta a_3 a_1 C_1^{-1}\frac{\omega^2}{2} + (\theta - \zeta a_3 a_1 C_1^{-2})\omega,$$
$$f^3 = C_4 + C_5e^{C_1\omega} + \zeta a_3^2 a_1 C_1^{-2}\frac{\omega^3}{6} + (2\zeta a_3^2 a_1 C_1^{-2} - \theta a_3)C_1^{-1}\frac{\omega^2}{2} -$$
$$- (\beta + a_3C_2 + \theta a_3 C_1^{-1} - 2\zeta a_3^2 a_1 C_1^{-3})C_1^{-1}\omega + C_3a_3C_1^{-1}\omega e^{C_1\omega},$$
$$\tilde{q} = C_6 + (a_1\zeta C_4 - \theta C_2)\omega + (a_1\zeta C_5 - \theta C_3)C_1^{-1}e^{C_1\omega} -$$
$$- [\theta^2 + a_1\zeta C_1^{-1}(\beta + a_3C_2 - 2\zeta a_3^2 a_1 C_1^{-3})]\frac{\omega^2}{2} + C_1^3(\zeta a_3 a_1)^2\frac{\omega^3}{3} +$$
$$+ (\zeta a_3 a_1)^2 C_1^{-2}\frac{\omega^4}{24} + \zeta a_1 a_3 C_3 C_1^{-2}(\omega - C_1^{-1})e^{C_1\omega};$$

в) $a_3=C_1=0$, $a_2\neq 0$:

$$f^1 = C_4 + C_5\omega + (\zeta a_2 C_2 - \theta C_1)\frac{\omega^2}{2} + \zeta a_2 C_3 \frac{\omega^3}{6} + \zeta a_2 \beta \frac{\omega^4}{24},$$

$$f^3 = C_2 + C_3\omega + \beta\frac{\omega^2}{2},$$

$$\tilde{q} = C_6 + (a_1\zeta C_2 - C_1)\omega + (a_1\zeta C_3 - \theta C_5)\frac{\omega^2}{2} + (a_1\zeta\beta - \theta\zeta a_2 C_2 + \theta^2 C_1)\frac{\omega^3}{6} -$$

$$- \zeta\theta a_2 C_3 \frac{\omega^4}{24} - \zeta\theta a_2 \beta \frac{\omega^5}{120};$$

г) $a_3=0$, $C_1\neq 0$, $a_2\neq 0$:

$$f^1 = C_4 + C_5 e^{C_1\omega} + \zeta a_2 C_3 C_1^{-1}\omega e^{C_1\omega} + \zeta a_2 \beta C_1^{-2}\frac{\omega^2}{2} +$$

$$+ (\zeta a_2 \beta C_1^{-3} - \zeta a_2 C_2 C_1^{-1} + \theta)\omega,$$

$$f^3 = C_2 + C_3 e^{C_1\omega} - \beta C_1^{-1}\omega,$$

$$\tilde{q} = C_6 + (\zeta a_1 C_2 - \theta C_4)\omega - (\zeta a_2 \beta\theta C_1^{-2} + \theta^2 + a_1\zeta\beta C_1 - \zeta a_2 C_2 \theta C_1^{-1})\frac{\omega^2}{2} -$$

$$- \zeta a_2 \beta\theta C_1^{-2}\frac{\omega^3}{6} + C_1^{-1}(a_1\zeta C_3 - \theta C_5 + \zeta\theta a_2 C_3 C_1^{-2} - \zeta\theta a_2 C_3 C_1^{-1}\omega)e^{C_1\omega};$$

д) $a_2\neq 0$, $a_3\neq 0$. Зробимо заміну змінних

$$f^1 = g^1 + \frac{C_1 a_1}{a_2} - \frac{\beta}{a_3}, \quad f^3 = g^3 - \frac{a_3 a_1}{a_2}\omega + \frac{\theta C_1}{\zeta a_2}.$$

Для функцій g^1, g^3 отримаємо лінійну однорідну систему ЗДР з постійними коефіцієнтами

$$\begin{aligned} g^1_{\omega\omega} - C_1 g^1_\omega - \zeta a_2 g^3 &= 0, \\ g^3_{\omega\omega} - C_1 g^3_\omega - a_3 g^1 &= 0, \end{aligned} \qquad (1.4.19)$$

що легко інтегрується. Тоді

$$\tilde{q} = a_1\zeta\int g^3(\omega)d\omega - \theta\int g^1(\omega)d\omega - \frac{\zeta a_3}{a_2}\frac{\omega^2}{2} + \theta\beta a_3\omega. \qquad (1.4.20)$$

Докладний розв'язок рівнянь (1.4.19) випускаємо по причині його громіздкості.

Нехай $\gamma\neq0$. Тоді з останнього рівняння системи (1.4.7) випливає, що $f^2=C_1$. При інтегруванні інших рівнянь системи (1.4.7) виділяються такі випадки:

а) $a_3=0$:

$$f^3 = C_2 + C_1\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega + \beta\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\left[\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega\right]d\omega,$$

$$f^1 = C_4 + C_3\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega + \zeta a_3\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\left[\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}f^3(\omega)d\omega\right]d\omega +$$

$$+ (\theta-\zeta a_3 a_1\gamma^{-1})\omega,$$

$$\tilde{q} = C_5 - \frac{1}{2}(\gamma^2+\theta^2+\zeta a_3(a_2-\theta\gamma^{-1}a_1))\omega^2 + (a_1\zeta C_2-\theta C_4)\omega +$$

$$+ (a_1\zeta C_1-\theta C_3)\left[\omega\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega - \gamma^{-1}e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\right] +$$

$$+ \omega\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\left[\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}(\beta a_1\zeta - \theta\zeta a_2 f^3(\omega))d\omega\right]d\omega -$$

$$- \gamma^{-1}e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}(\beta a_1\zeta-\theta\zeta a_2 f^3(\omega))d\omega + \gamma^{-1}\int(\beta a_1\zeta-\theta\zeta a_2 f^3(\omega))d\omega;$$

б) $\gamma^2 - \zeta a_2 a_3 = 0$, $a_3\neq0$:

$$f^1 = -\beta/a_3 + \frac{1}{2}(\zeta a_3 a_1-\gamma\theta)\left\{\omega\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\left[\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega\right]d\omega -\right.$$

$$\left.- \gamma^{-1}e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega\right\} + \gamma\left\{C_1 e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2} + C_2 e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega +\right.$$

$$\left.+ C_3\omega + C_4\left[\omega\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega - \gamma^{-1}e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\right]\right\},$$

$$f^3 = \frac{1}{2}a_3\gamma^{-1}(\zeta a_3 a_1-\gamma\theta)\left\{\omega\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\left[\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega\right]d\omega -\right.$$

$$- \gamma^{-1}e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega + \gamma^{-1}\omega \Big\} + a_3\Big\{ C_1e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2} + C_2e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega +$$

$$- C_3\omega - C_4\Big[\omega\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega - \gamma^{-1}e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\Big] \Big\},$$

$$\tilde{q} = C_5 - [\tfrac{1}{2}\zeta a_3a_1\gamma^{-1}(\zeta a_3a_1\gamma^{-1}-\theta) + (\theta\gamma+\zeta a_3a_1)C_3 + \gamma^2 + \zeta a_3a_1]\frac{\omega^2}{2} +$$

$$+ \theta\beta a_3^{-1}\omega + \tfrac{1}{2}\gamma^{-1}(\theta^2\gamma^2-(\zeta a_3a_1)^2)\Big\{\tfrac{1}{2}(\omega^2-\gamma^{-1})\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\Big[\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega\Big]d\omega\ -$$

$$- \tfrac{1}{2}\gamma^{-1}\omega e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega + \tfrac{1}{4}\gamma^{-1}\omega^2\Big\} + (\zeta a_3a_1-\theta\gamma)\Big\{C_1\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega +$$

$$C_2\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\Big[\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega\Big]d\omega\Big\} - (\zeta a_3a_1+\theta\gamma)C_4\Big\{\tfrac{1}{2}(\omega^2-\gamma^{-1})\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega -$$

$$- \tfrac{1}{2}\gamma^{-1}\omega e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\Big\};$$

в) $a_3 \neq 0$, $\gamma^2 - \zeta a_2a_3 \neq 0$:

Зробимо заміну змінних

$$f^1 = g^1 + g^3 - \frac{\beta}{a_3} - \frac{\zeta a_3a_1 - \gamma\theta}{\gamma^2 - \zeta a_3a_2}\gamma\omega,$$

$$f^2 = \Big(\frac{a_3}{\zeta a_2}\Big)^{1/2}(g^1-g^3) + \frac{\zeta a_3a_1 - \gamma\theta}{\gamma^2 - \zeta a_3a_2}a_3\omega.$$

Тоді

$$g^1 = \omega^{-1/2}e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2}W(\varkappa_1, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{2}\gamma\omega^2), \quad \varkappa_1 = -\tfrac{1}{2}\gamma^{-1}(\zeta a_1a_3)^{1/2} - \tfrac{1}{4},$$

$$g^2 = \omega^{-1/2}e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2}W(\varkappa_2, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{2}\gamma\omega^2), \quad \varkappa_2 = \tfrac{1}{2}\gamma^{-1}(\zeta a_1a_3)^{1/2} - \tfrac{1}{4},$$

$$\tilde{q} = C_1 + \theta\beta a_3^{-1}\omega + \Big[-\gamma^2 - \zeta a_3a_1 + \frac{\zeta a_3a_1 - \gamma\theta}{\gamma^2 - \zeta a_3a_2}(\zeta a_3a_1+\theta\gamma)\Big]\frac{\omega^2}{2} -$$

$$- [a_1(\zeta a_3/a_2)^{1/2}+\theta]\int g^1(\omega)d\omega + [a_1(\zeta a_3/a_2)^{1/2}-\theta]\int g^2(\omega)d\omega,$$

де $w(æ,\mu,\tau)$ – загальний розв'язок рівняння Уїттекера (1.4.16); невизначені інтеграли, що зустрічаються у виразі для $\tilde{q}$, даються формулами (1.4.18).

4. Проінтегрувати систему (1.4.8) в загальному випадку не вдалося. Знайдені такі її часткові розв'язки:

а) $f^1 = -6\wp(\omega+C_3, \frac{1}{3}(4-2C_1), C_2) - 2,$

$f^2 = f^3 = 0, \quad \tilde{q} = 2f^1 + C_1;$

б) $f^1 = -6C_1^2 e^{2C_1\omega}\wp(e^{C_1\omega} + C_3, 0, C_2) + 3C_1^2 - 2,$

$f^2 = 5C_1, \quad f^1 = 0,$

$\tilde{q} = -12C_1^2 e^{2C_1\omega}\wp(e^{C_1\omega} + C_3, 0, C_2) - 2 - \frac{13}{2}C_1^2 - \frac{9}{2}C_1^4;$

в) $f^1 = C_1, \quad f^2 = C_2, \quad f^3 = 0, \quad \tilde{q} = -\frac{1}{2}(C_1^2+C_2^2).$

Тут $\wp(\tau,æ_1,æ_2)$ – функція Вейєрштрасса, що задовільняє рівняння [17]:

$$(\wp_\tau)^2 = 4\wp^3 - æ_1\wp - æ_2. \tag{1.4.21}$$

5. Загальний розв'зок системи (1.4.9) при $\gamma\neq 0$;

$f^1 = \gamma\omega$

(константу інтегрування можна занулити з допомогою зсувів),

$$f^2 = C_1 + C_2\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega + a_1\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\left[\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega\right]d\omega,$$

$$f^3 = C_3 + C_4\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega + \int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\left[\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}(\beta+a_2 f^2(\omega))d\omega\right]d\omega,$$

$$\tilde{q} = C_5 - \frac{1}{2}(\gamma^2+\theta^2)\omega^2 - \theta C_2\omega - \theta C_3\left[\omega\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega - \gamma^{-1}e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\right] -$$

$$- \theta a_1\left\{\omega\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\left[\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega\right]d\omega - \gamma^{-1}e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega + \gamma^{-1}\omega\right\}.$$

при $\gamma=0$:

$f^1 = C_1,$

$$f^2 = C_3 + C_2\left\{\begin{matrix} e^{C_1\omega} \\ \omega \end{matrix}\right\} + (a_1-\theta C_1)\left\{\begin{matrix} -C_1^{-1}\omega \\ \frac{1}{2}\omega^2 \end{matrix}\right\}\begin{matrix} ,C_1\neq 0 \\ ,C_1=0 \end{matrix},$$

$$f^3 = C_4 + C_5\left\{\begin{matrix} e^{C_1\omega} \\ \omega \end{matrix}\right\} + (\beta+a_2C_3)\left\{\begin{matrix} -C_1^{-1}\omega \\ \frac{1}{2}\omega^2 \end{matrix}\right\} + C_2a_2\left\{\begin{matrix} C_1^{-1}\omega e^{C_1\omega} \\ \frac{1}{6}\omega^3 \end{matrix}\right\} +$$

$$+ (a_1-\theta C_1)a_2\left\{\begin{matrix} \frac{1}{2}C_1^{-1}\omega^2+C_1^{-2}\omega \\ \frac{1}{24}\omega^4 \end{matrix}\right\}\begin{matrix} ,C_1\neq 0 \\ ,C_1=0 \end{matrix},$$

$$\tilde{q} = C_6 - \theta C_3\omega - \theta C_2\left\{\begin{matrix} C_1^{-1}e^{C_1\omega} \\ \frac{1}{2}\omega^2 \end{matrix}\right\} - \theta(a_1-\theta C_1)\left\{\begin{matrix} -C_1^{-1}\frac{1}{2}\omega^2 \\ \frac{1}{6}\omega^3 \end{matrix}\right\}\begin{matrix} ,C_1\neq 0 \\ ,C_1=0 \end{matrix}.$$

6. З системи (1.4.10) при $\gamma=0$ випливає, що

$f^1 = C_1,$

$$f^2 = C_3 + C_2\left\{\begin{matrix} e^{C_1\omega} \\ \omega \end{matrix}\right\} + (a_1-\theta C_1)\left\{\begin{matrix} -C_1^{-1}\omega \\ \frac{1}{2}\omega^2 \end{matrix}\right\}\begin{matrix} ,C_1\neq 0 \\ ,C_1=0 \end{matrix},$$

$$\tilde{q} = C_6 - \theta C_3\omega - \theta C_2\left\{\begin{matrix} C_1^{-1}e^{C_1\omega} \\ \frac{1}{2}\omega^2 \end{matrix}\right\} - \theta(a_1-\theta C_1)\left\{\begin{matrix} -C_1^{-1}\frac{1}{2}\omega^2 \\ \frac{1}{6}\omega^3 \end{matrix}\right\}\begin{matrix} ,C_1\neq 0 \\ ,C_1=0 \end{matrix},$$

а функція f^3 задовольняє рівняння

$$f^3_{\omega\omega} - C_1f^3_\omega + (a_2^2-\alpha-a_2f^2)f^3 = 0. \qquad (1.4.22)$$

Розв'язки рівняння (1.4.22) знайдені в таких випадках:

а) $a_2C_2=a_2(a_1-\theta C_1)=0$, $\mu:=\frac{1}{4}C_1^2-a_2^2+\alpha+a_2C_3$:

$f^3 = e^{\frac{1}{2}C_1\omega}(C_4e^{\mu^{1/2}\omega} + C_5e^{-\mu^{1/2}\omega})$, якщо $\mu>0$,

$f^3 = e^{\frac{1}{2}C_1\omega}(C_4 + C_5\omega)$, якщо $\mu=0$,

$f^3 = e^{\frac{1}{2}C_1\omega}(C_4\cos((-\mu)^{1/2}\omega) + C_5\sin((-\mu)^{1/2}\omega))$, якщо $\mu<0$;

б) $C_1=a_1=0$, $a_2C_2=0$ ([17]):

$$f^3 = \xi^{1/2}Z_{1/3}\left[\frac{2}{3}(-a_2C_2)^{1/2}\xi^{3/2}\right], \quad \xi = \omega + (C_3a_2-a_2^2+\alpha)/(a_2C_2),$$

де $Z_\nu(\tau)$ – загальний розв'язок рівняння Бесселя:

$$\tau^2Z_{\tau\tau} + \tau Z_\tau + (\tau^2-\nu^2)Z = 0; \qquad (1.4.23)$$

в) $C_1=0$, $a_1\neq0$, $a_2\neq0$ ([17]):

$$f^3 = (\omega+C_2a_1^{-1})^{-1/2}W\left[\nu, \frac{1}{4}, (\frac{1}{2}a_1a_2)^{1/2}(\omega+C_2a_1^{-1})^2\right],$$

де $\nu = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}a_1a_2)^{-1/2}\left[a_2^2 - \alpha - a_2C_3 + \frac{1}{2}a_2C_3^2a_1^{-1}\right]$,

$W(\varkappa,\mu,\tau)$ – загальний розв'язок рівняння Уіттекера (1.4.16);

г) $C_1\neq0$, $a_2C_2\neq0$, $a_1-\theta C_1=0$ ([17]):

$$f^3 = e^{\frac{1}{2}C_1\omega}Z_\nu\left[2C_1^{-1}(-a_2C_2)^{1/2}e^{\frac{1}{2}C_1\omega}\right], \; \nu=C_1^{-1}(C_1^2+4(\alpha+a_2C_3-a_2^2))^{1/2},$$

де $Z_\nu(\tau)$ – загальний розв'язок рівняння Бесселя (1.4.23);

д) $C_1\neq0$, $a_2(a_1-\theta C_1)\neq0$, $C_2=0$ ([17]):

$$f^3 = e^{\frac{1}{2}C_1\omega}\xi^{1/2}Z_{1/3}\left[\frac{2}{3}[a_2C_1^{-1}(a_1-\theta C_1)]^{1/2}\xi^{3/2}\right],$$

де $\xi = \omega + \left[a_2^2-\frac{1}{4}C_1^2-C_3a_2-\alpha\right]/[a_2C_1^{-1}(a_1-\theta C_1)]$,

$Z_\nu(\tau)$ – загальний розв'язок рівняння Бесселя (1.4.23).

Якщо $\gamma\neq0$, то

$$f^1 = \gamma\omega$$

(константу інтегрування можна занулити з допомогою зсувів),

$$f^2 = C_1 + C_2\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega + a_1\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\left[\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega\right]d\omega,$$

$$\tilde{q} = C_5 - \frac{1}{2}(\gamma^2+\theta^2)\omega^2 - \theta C_2\omega - \theta C_3\left[\omega\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega - \gamma^{-1}e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\right] -$$

$$- \theta a_1\left\{\omega\int e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\left[\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega\right]d\omega - \gamma^{-1}e^{\frac{1}{2}\gamma\omega^2}\int e^{-\frac{1}{2}\gamma\omega^2}d\omega + \gamma^{-1}\omega\right\},$$

а функція f^3 задовільняє рівняння

$$f^3_{\omega\omega} - \gamma\omega f^3_\omega + (a_2^2-\alpha-a_2f^2)f^3 = 0. \qquad (1.4.24)$$

Знайти розв'язок рівняння (1.4.24) вдалося лише при $a_1= C_3=0$:

$$f^3 = e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2} V\left[\gamma^{1/2}(\omega+2a_2\theta\gamma^{-2}),\ \nu\right],$$

де $\nu = 4\gamma^{-1}(\alpha+a_2C_2-a_2^2(\theta^2\gamma^{-2}+1))$, $V(\tau,\nu)$ – – загальний розв'язок рівняння Вебера

$$4V_{\tau\tau} = (\tau^2+\nu)V. \qquad (1.4.25)$$

7. Загальний розв'язок системи (1.4. 11) має вигляд:

$$f^1 = C_1\omega^{-2} + \frac{1}{2}\gamma,$$

$$f^2 = C_2+C_3\int\omega^{C_1+1} e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2} d\omega+(a_1-\theta C_1)\int\omega^{C_1+1} e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2}\left[\int\omega^{-C_1-1} e^{-\frac{1}{4}\gamma\omega^2} d\omega\right]d\omega-$$

$$- \frac{1}{2}\theta\gamma\int\omega^{C_1+1} e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2}\left[\int\omega^{-C_1+1} e^{-\frac{1}{4}\gamma\omega^2} d\omega\right]d\omega,$$

$$f^3 = C_4 + C_5\int\omega^{C_1-1} e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2} d\omega + \beta\int\omega^{C_1-1} e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2}\left[\int\omega^{1-C_1} e^{-\frac{1}{4}\gamma\omega^2} d\omega\right]d\omega +$$

$$+ a_2\int\omega^{C_1-1} e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2}\left[\int\omega^{-C_1-1} e^{-\frac{1}{4}\gamma\omega^2} f^2(\omega)d\omega\right]d\omega,$$

$$\tilde{q} = C_6 - \frac{1}{8}\gamma^2\omega^2 - \frac{1}{2}C_1^2\omega^{-2} + \int(f^2(\omega))^2\omega^{-3}d\omega.$$

8. З системи (1.4.12) випливає, що

$$f^1 = C_1\omega^{-2} + \frac{1}{2}\gamma,$$

$$f^2 = C_2+C_3\int\omega^{C_1+1} e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2} d\omega+(a_1-\theta C_1)\int\omega^{C_1+1} e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2}\left[\int\omega^{-C_1-1} e^{-\frac{1}{4}\gamma\omega^2} d\omega\right]d\omega-$$

$$- \frac{1}{2}\theta\gamma\int\omega^{C_1+1} e^{\frac{1}{4}\gamma\omega^2}\left[\int\omega^{-C_1+1} e^{-\frac{1}{4}\gamma\omega^2} d\omega\right]d\omega,$$

$$\tilde{q} = C_6 - \frac{1}{8}\gamma^2\omega^2 - \frac{1}{2}C_1^2\omega^{-2} + \int(f^2(\omega))^2\omega^{-3}d\omega,$$

а функція f^3 задовільняє рівняння

$$f^3_{\omega\omega} - [(C_1-1)\omega^{-1}+\frac{1}{2}\gamma\omega]f^3_\omega + (a_2^2\omega^{-2}-\alpha-a_2\omega^{-2}f^2)f^3 = 0. \quad (1.4.26)$$

Розв'язати рівняння (1.4.26) вдалося в таких випадках:

а) $C_3=a_1=\theta=0$, $\gamma\neq 0$:

$$f^3 = \omega^{\frac{1}{2}C_1-1}e^{\frac{1}{8}\gamma\omega^2}w(\text{æ},\mu,\frac{1}{4}\gamma\omega^2),$$

де $\text{æ} = \frac{1}{4}(2-C_1-4\alpha\gamma^{-1})$, $\mu = \frac{1}{4}(C_1^2-4a_2^2+4a_2C_2)^{1/2}$,

$w(\text{æ},\mu,\tau)$ – загальний розв'язок рівняння Уіттекера (1.4.16); надалі $\gamma=0$, при цьому

$$f^2 = \begin{cases} C_2 + C_3\ln\omega + \frac{1}{4}(a_1+2\theta)\omega^2, & C_1=-2, \\ C_2 + \frac{1}{2}C_3\omega^2 + \frac{1}{2}a_1\omega^2(\ln\omega-\frac{1}{2}), & C_1=0, \\ C_2 + C_3(C_1+2)^{-1}\omega^{C_1+2} - \frac{1}{2}C_1^{-1}(a_1-\theta C_1)\omega^2, & C_1\neq\{0;-2\}; \end{cases}$$

б) $C_3 = a_1 - \theta C_1 = 0$:

$$f^3 = \begin{cases} \omega^{\frac{1}{2}C_1}Z_\nu((-\alpha)^{1/2}\omega), & \alpha\neq 0, \\ \omega^{\frac{1}{2}C_1}(C_5\omega^\nu + C_6\omega^{-\nu}), & \alpha=0, \nu\neq 0, \\ \omega^{\frac{1}{2}C_1}(C_5 + C_6\ln\omega), & \alpha=0, \nu=0, \end{cases}$$

де $\nu = \frac{1}{2}(C_1^2-4a_2^2+4a_2C_2)^{1/2}$, тут і надалі $Z_\nu(\tau)$ – загальний розв'язок рівняння Бесселя (1.4.23);

в) $C_3=0$, $C_1\neq 0$:

$$f^3 = \begin{cases} \omega^{\frac{1}{2}C_1}Z_\nu(\mu^{1/2}\omega), & \mu\neq 0, \\ \omega^{\frac{1}{2}C_1}(C_5\omega^\nu + C_6\omega^{-\nu}), & \mu=0, \nu\neq 0, \\ \omega^{\frac{1}{2}C_1}(C_5 + C_6\ln\omega), & \mu=0, \nu=0, \end{cases}$$

де $\mu = \frac{1}{2} a_2 C_1^{-1}(a_1-\theta C_1) - \alpha, \quad \nu = \frac{1}{2}(C_1^2-4a_2^2+4a_2C_2)^{1/2};$

г) $C_1=a_1=0$:

$$f^3 = \begin{cases} \omega^{\frac{1}{2}C_1} Z_\nu(\mu^{1/2}\omega), & \mu\neq 0, \\ \omega^{\frac{1}{2}C_1}(C_5\omega^{\nu} + C_6\omega^{-\nu}), & \mu=0, \nu\neq 0, \\ \omega^{\frac{1}{2}C_1}(C_5 + C_6 \ln\omega), & \mu=0, \nu=0, \end{cases}$$

де $\mu = -\frac{1}{2} a_2 C_3 - \alpha, \quad \nu = (-a_2^2+a_2C_2)^{1/2};$

д) $C_3\neq 0, \quad C_1\notin\{0;2\}, \quad a_2(a_1-\theta C_1) - 2\alpha C_1 = 0$:

$$f^3 = \omega^{\frac{1}{2}C_1} Z_\nu(\mu\omega^{1+\frac{1}{2}C_1}),$$

де $\mu = 2C_3^{1/2}(C_1+2)^{-3/2}, \quad \nu = (C_1+2)^{-1}(C_1^2-4a_2^2+4a_2C_2)^{1/2};$

е) $C_1=-2, \quad C_3\neq 0, \quad a_2(a_1+2\theta)+4\alpha=0$ ([17]):

$$f^3 = \omega^{-1}\xi^{1/2} Z_{1/3}\left(\frac{2}{3} C_3^{1/2}\xi^{3/2}\right),$$

де $\xi = \ln\omega + C_3^{-1}(a_2^2-a_2C_3-1)$.

Однаковими наслідками систем (1.4.13), (1.4.14) та (1.4.15) є співвідношення

$$f^2 = af^1 + C_1, \tag{1.4.27}$$

$$\tilde{q} = a(1+a^2)f^1_\omega + (2+2a^2-aC_1)f^1 + C_2, \tag{1.4.28}$$

$$(1+a^2)f^1_{\omega\omega} + (4a-C_1)f^1_\omega + f^1f^1 + 4f^1 + (1+a^2)^{-1}(C_1^2+2C_2) = 0. \tag{1.4.29}$$

Знайдені такі часткові розв'язки рівняння (1.4.29):

$$f^1 = -6\wp\left[(1+a^2)^{-1/2}\omega+C_4, \tfrac{1}{3}[4-(1+a^2)^{-1}(C_1^2+2C_2)], C_3\right] - 2, \tag{1.4.30}$$

якщо $C_1=4a$;

$$f^1 = -\frac{6}{25}\mu^2 e^{-2\xi}\wp(e^{-\xi}+C_4, 0, C_3) + \frac{3}{25}\mu^2 - 2, \tag{1.4.31}$$

якщо $(1+a^2)^{-1}(C_1^2+2C_2) - 4 = -\frac{9}{625}\mu^4$, де $\xi = \frac{1}{5}\mu\omega$,

$\mu = (4a-C_1)(1+a^2)^{-1/2}$, $\wp(\tau,\varkappa_1,\varkappa_2)$ – функція Вейерштрасса, що задовольняє рівнянню (1.4.21);

$$f^1 = [4 - (1+a^2)^{-1}(C_1^2+2C_2)]^{1/2} - 2. \tag{1.4.32}$$

Функцію f^3 необхідно шукати для кожного з випадків 9–11 окремо.

9. Функція f^3 задовольняє рівняння

$$(1+a^2)f^3_{\omega\omega} - (C_1+4a)f^3_\omega - (2f^1-4)f^3 - \beta = 0.$$

Якщо f^1 визначається формулою (1.4.32), то

$$f^3 = \exp\left[\frac{C_1+4a}{2(1+a^2)}\omega\right] \left\{ \begin{array}{ll} C_5\exp(\mu^{1/2}\omega) + C_6\exp(\mu^{1/2}\omega) & ,\mu>0, \\ C_5\cos((-\mu)^{1/2}\omega) + C_6\sin((-\mu)^{1/2}\omega) & ,\mu<0, \\ C_5 + C_6\omega & ,\mu=0, \end{array} \right. +$$

$$+ \left\{ \begin{array}{ll} -\beta/(2f^1-4) & ,2f^1-4\neq 0, \\ -\beta\omega/(4a+C_1) & ,2f^1-4=0,\ C_1+4a\neq 0, \\ \frac{1}{2}\beta(1+a^2)^{-1}\omega^2 & ,2f^1-4=0,\ C_1+4a=0. \end{array} \right.$$

10. В цьому випадку

$$f^3 = C_5 + C_6\exp\left[\frac{C_1\omega}{1+a^2}\right] +$$

$$+ a_1C_1^{-1}\left\{ \exp\left[\frac{C_1\omega}{1+a^2}\right] \int \exp\left[-\frac{C_1\omega}{1+a^2}\right] f^1(\omega)d\omega - \int f^1(\omega)d\omega \right\},$$

якщо $C_1\neq 0$,

$$f^3 = C_5 + C_6\omega + a_1(1+a^2)^{-1}[\omega\int f^1(\omega)d\omega - \int\omega f^1(\omega)d\omega],$$

якщо $C_1=0$.

11. На функцію f^3 маємо рівняння

$$(1+a^2)f^3_{\omega\omega} - (C_1+2a_1a)f^3_\omega + (a_1^2-a_1f^1)f^3 = 0. \tag{1.4.33}$$

Якщо f^1 визначається формулою (1.4.32), то

$$f^3 = \exp\left[\frac{C_1+2a_1a}{2(1+a^2)}\omega\right]\left\{\begin{array}{l} C_5\exp(\nu^{1/2}\omega) + C_6\exp(\nu^{1/2}\omega) \\ C_5\cos((-\nu)^{1/2}\omega) + C_6\sin((-\nu)^{1/2}\omega) \\ C_5 + C_6\omega \end{array}\right\}\begin{array}{l},\nu>0,\\ ,\nu<0,\\ ,\nu=0,\end{array}$$

де $\nu = \left[\frac{C_1+2a_1a}{2(1+a^2)}\right]^2 - \frac{a_1^2-a_1f^1}{1+a^2}$.

Якщо $C_1=4a$, то

$f^3 = \exp\{a(a_1+2)(1+a^2)^{-1}\omega\}g(\tau)$,

де $\tau = (1+a^2)^{-1/2} + C_4$, функція $g(\tau)$ є загальним розв'язком рівняння Ламе

$$g_{\tau\tau} + \{6a_1\wp(\tau)+a_1^2+2a_1-a^2(2+a_1)^2(1+a^2)^{-1}\}g = 0$$

з функцією Вейєрштрасса $\wp(\tau) = \wp(\tau, \frac{1}{3}(4-(C_1^2+2C_2)(1+a^2)^{-1}), C_3)$ [17]. У випадку, коли $(1+a^2)^{-1}(C_1^2+2C_2) - 4 = -\frac{9}{625}\mu^4$,

$a_1^2 - 2a_1 - \frac{1}{4}(C_1+2a_1a)^2(1+a^2)^{-1} = \frac{1}{25}(3a_1-\frac{1}{4})\mu^2$,

де $\mu = (4a-C_1)(1+a^2)^{-1/2}$, отримаємо, що

$f^3 = \exp\{\frac{1}{2}(C_1+2a_1a)(1+a^2)^{-1}\omega\}\tau^{-1/2}g(\tau)$,

де $\tau = e^{-\frac{1}{5}\mu\omega}$, функція $g(\tau)$ є загальним розв'язком рівняння Ламе

$$g_{\tau\tau} + 6a_1\wp(\tau)g = 0$$

з функцією Вейєрштрасса $\wp(\tau) = \wp(\tau+C_4, 0, C_3)$.

§ 5. A^∞-нееквівалентні анзаци корозмірності один для поля Нав'є-Стокса і редукція рівнянь Нав'є-Стокса.

По алгебрах A^1-A^4 з теореми 1.1.1 та (при деяких обмеженнях на функцію $\vec{m}$) по алгебрі A^5 можна побудувати такий набір A^∞-нееквівалентних анзаців корозмірності один для поля Нав'є-Стокса:

1. $$\begin{aligned} u^1 &= |t|^{-1/2}(v^1 co(t) - v^2 si(t)) + \tfrac{1}{2}x_1 t^{-1} - \varkappa x_2 t^{-1}, \\ u^2 &= |t|^{-1/2}(v^1 si(t) + v^2 co(t)) + \tfrac{1}{2}x_2 t^{-1} + \varkappa x_1 t^{-1}, \\ u^3 &= |t|^{-1/2} v^3 + \tfrac{1}{2}x_3 t^{-1}, \\ p &= |t|^{-1} q + \tfrac{1}{2}(\varkappa^2+\tfrac{1}{4})t^{-2}r^2 + \tfrac{1}{8}t^2 x_3^2 , \end{aligned} \qquad (1.5.1)$$

де $\omega_1 = |t|^{-1/2}(x_1 co(t) + x_2 si(t))$,

$\omega_2 = |t|^{-1/2}(-x_1 si(t) + x_2 co(t))$, $\omega_3 = |t|^{-1/2} x_3$,

$co(t) = \cos(\varkappa\ln|t|)$, $si(t) = \sin(\varkappa\ln|t|)$, $r = (x_1^2+x_2^2)^{1/2}$;

тут і надалі в цьому параграфі $v^a=v^a(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, $q=q(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, нумерація анзаців відповідає нумерації алгебр A^1-A^5;

2. $$u^a = v^a, \quad p = q, \qquad (1.5.2)$$

де $\omega_a = x_a$;

3. $$\begin{aligned} u^1 &= v^1\cos t - v^2\sin t - x_2, \\ u^2 &= v^1\sin t + v^2\cos t + x_1, \\ u^3 &= v^3, \quad p = q + \tfrac{1}{2}r^2, \end{aligned} \qquad (1.5.3)$$

де $\omega_1 = x_1\cos t + x_2\sin t$, $\omega_2 = - x_1\sin t + x_2\cos t$, $\omega_3 = x_3$;

4. $$\begin{aligned} u^1 &= x_1 r^{-1} v^1 - x_2 r^{-1} v^2 + x_1 r^{-2}, \\ u^2 &= x_2 r^{-1} v^1 + x_1 r^{-1} v^2 + x_2 r^{-2}, \\ u^3 &= v^3 + \eta(t) r^{-1} v^2 + \dot\eta(t)\operatorname{arctg} x_1/x_2 , \\ p &= q - \tfrac{1}{2}\ddot\eta(t)(\eta(t))^{-1}x_3^2 - \tfrac{1}{2}r^{-2} + \chi(t)\operatorname{arctg} x_1/x_2 , \end{aligned} \qquad (1.5.4)$$

де $\omega_1 = t$, $\omega_2 = r$, $\omega_3 = x_3 - \eta(t)\operatorname{arctg} x_1/x_2$.

Зауваження 1.5.1. В точках $t\in(t_0,t_1)$, де $\eta(t)=0$, вираз для тиску p з анзацу (1.5.4) і невизначеним. Якщо такі точки t існують, то будемо розглядати анзац (1.5.4) на інтервалах (t_0^n,t_1^n), що містяться в інтервалі (t_0,t_1) і для яких виконується одна з умов:

а) $\forall t\in(t_0^n,t_1^n)$: $\eta(t)\neq 0$;

б) $\eta(t)\equiv 0$ на (t_0^n,t_1^n).

При цьому, в другому випадку покладемо $\ddot\eta/\eta:=0$.

5. Анзац по алгебрі $A^5(\vec m,\chi)$ можна побудувати лише для тих t, для яких $\vec m(t)\neq 0$. При цій умові з (1.1.10) випливає, що алгебра $A^5(\vec m,\chi)$ еквівалентна алгебрі $A^5(\vec m,0)$. Анзац, побудований по алгебрі $A^5(\vec m,0)$, має вигляд:

$$\vec u = v^i\vec n^i + (\vec m\cdot\vec m)^{-1}v^3\vec m + (\vec m\cdot\vec x)(\vec m\cdot\vec m)\dot{\vec m} - \omega_i\dot{\vec n}^i,$$
$$p = q - \tfrac{3}{2}(m\cdot m)^{-1}(\ (\dot m\cdot n^i)\omega_i\ )^2 + \tfrac{1}{2}\rho^{ab}(t)x_a x_b\ , \tag{1.5.5}$$

де $\omega_i = \vec n^i\cdot\vec x$, $\omega_3 = t$, $\vec m\in C^\infty((t_0,t_1),\mathbb{R}^3)$,

$$\vec n^i = \vec n^i(t),\ \vec n^i\cdot\vec m = \vec n^1\cdot\vec n^2 = 0,\ |\vec n^i| = 1,\ \dot{\vec n}^1\cdot\vec n^2 = 0, \tag{1.5.6}$$

$$\rho^{ab} = -(\vec m\cdot\vec m)^{-1}(\ \ddot m^a m^b + \ddot m^b m^a\ ) + (\ddot{\vec m}\cdot\vec m)(\vec m\cdot\vec m)^{-2}m^a m^b\ .$$

Зауваження 1.5.2. Вектор-функції $\vec n^i$, що задовольняють умовам (1.5.6), існують. Їх можна побудувати таким чином: вибрати і зафіксувати вектор-функції $\vec k^i=\vec k^i(t)$, для яких $\vec k^i\cdot\vec m=\vec k^1\cdot\vec k^2=0$, $|\vec k^i| = 1$, а потім покласти

$$\vec n^1 = \vec k^1\cos\phi(t) - \vec k^2\sin\phi(t),$$
$$\vec n^2 = \vec k^1\sin\phi(t) + \vec k^2\cos\phi(t).$$

Тоді $\dot{\vec n}^1\cdot\vec n^2 = \dot{\vec k}^1\cdot\vec k^2 - \dot\phi = 0$, якщо $\phi = \int(\dot{\vec k}^1\cdot\vec k^2)dt$.

Підставивши анзаци (1.5.1)-(1.5.3) в РНС (0.1), отримаємо редуковані системи ДРЧП однакової структури, що мають загальний вигляд:

$$
\begin{aligned}
&v^a v^1_a - v^1_{aa} + q_1 + \theta v^2 = 0,\\
&v^a v^2_a - v^2_{aa} + q_2 - \theta v^1 = 0,\\
&v^a v^3_a - v^3_{aa} + q_3 = 0,\\
&v^a_a = \gamma,
\end{aligned}
\qquad (1.5.7)
$$

де константи θ та γ приймають такі значення:

1. $\theta = -2æ$, $\gamma = -\frac{3}{2}$, якщо $t>0$, $\theta = 2æ$, $\gamma = \frac{3}{2}$, якщо $t<0$;
2. $\theta = \gamma = 0$;
3. $\theta = -2$, $\gamma = 0$.

Для анзаців (1.5.4), (1.5.5) редуковані рівняння мають відповідно вигляд:

4. $$
\begin{aligned}
&v^1_1 + v^1 v^1_2 + v^3 v^1_3 - \omega_2^{-1} v^2 v^2 -\\
&- [\, v^1_{22} + (1+\eta^2\omega_2^{-2}) v^1_{33} + 2\eta\omega_2^{-2} v^2_3 \,] + q_2 = 0,\\
&v^2_1 + v^1 v^2_2 + v^3 v^2_3 + \omega_2^{-1} v^1 v^2 -\\
&- [\, v^2_{22} + (1+\eta^2\omega_2^{-2}) v^2_{33} - 2\eta\omega_2^{-2} v^1_3 \,] + 2\omega_2^{-2} v^2 - \eta\omega_2^{-1} q_3 + \chi\omega_2^{-1} = 0,\\
&v^3_1 + v^1 v^3_2 + v^3 v^3_3 - [\, v^3_{22} + (1+\eta^2\omega_2^{-2}) v^3_{33} \,] - 2\eta^2\omega_2^{-3} v^1_3 +\\
&+ 2\dot\eta\omega_2^{-1} v^2 + 2\eta\omega_2^{-1}(\omega_2^{-1} v^2)_2 + (1+\eta^2\omega_2^{-2}) q_3 - \ddot\eta\eta\omega_3 - \chi\eta\omega_2^{-2} = 0,\\
&\omega_2^{-1} v^1 + v^1_2 + v^3_3 = 0;
\end{aligned}
\qquad (1.5.8)
$$

5. $$
\begin{aligned}
&v^i_3 + v^j v^i_j - v^i_{jj} + q_i + \rho^i(\omega_3) v^3 = 0,\\
&v^3_3 + v^j v^3_j - v^3_{jj} = 0,\\
&v^i_i + \rho^3(\omega_3) = 0,
\end{aligned}
\qquad (1.5.9)
$$

де

$$
\rho^i = \rho^i(\omega_3) = 2(\vec m\cdot\vec m)^{-1}(\dot{\vec m}\cdot\vec n^i),\quad \rho^3 = \rho^3(\omega_3) = (\vec m\cdot\vec m)^{-1}(\dot{\vec m}\cdot\vec m)
\qquad (1.5.10)
$$

Вивчимо симетрійні властивості систем (1.5.7), (1.5.8), (1.5.10). Всі подальші результати цього параграфа отримані з допомогою стандартного алгоритма Лі.

Розглянемо систему (1.5.7).

Теорема 1.5.1. Максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності системи (1.5.7) є алгебра

1. $\langle \partial_a, \ \partial_t, \ J^1_{12} \rangle$, якщо $\theta\neq0$;

2. $\langle \partial_a, \ \partial_t, \ J^1_{ab} \rangle$, якщо $\theta=0$, $\gamma\neq0$;

3. $\langle \partial_a, \ \partial_t, \ J^1_{ab}, \ D^1 \rangle$, якщо $\theta=0$, $\gamma\neq0$.

Тут $J^1_{ab} = \omega_a\partial_b - \omega_b\partial_a + v^a\partial_{v^b} - v^b\partial_{v^a}$,

$D^1 = \omega_a\partial_a - v^a\partial_{v^a} - 2q\partial_q$.

Таким чином, всі оператори ліївської симетрії системи (1.5.7) "індукуються" відповідними операторами з алгебри A^∞.

Перейдемо до системи (1.5.8). Через A^{max} позначимо максимальну в сенсі Лі алгебру інваріантності системи (1.5.8). При дослідженні симетрійних властивостей системи (1.5.8) необхідно розглянути такі випадки:

а) $\eta,\chi\equiv0$. Тоді

$$A^{max} = \langle \partial_1, D^2, R^1(\phi(\omega_1)), Z^1(\lambda(\omega_1)) \rangle,$$

де $D^2 = 2\omega_1\partial_1 + \omega_2\partial_2 + \omega_3\partial_3 - v^a\partial_{v^a} - 2q\partial_q$,

$Z^1(\lambda(\omega_1)) = \lambda(\omega_1)\partial_q$, $R^1(\phi(\omega_1)) = \phi\partial_3 + \phi_1\partial_{v^3} - \phi_{11}\partial_q$;

тут і надалі $\phi=\phi(\omega_1)$, $\lambda=\lambda(\omega_1)$ – довільні гладкі функції змінної ω_1.

б) $\eta\equiv0$, $\chi\neq0$. Розширення алгебри інваріантності в цьому випадку досягається при $\chi=(C_1\omega_1+C_2)^{-1}$, де $C_1,C_2=\mathrm{const}$. Нехай $C_1\neq0$. Покладемо $\chi=C\omega_1^{-1}$, де $C=\mathrm{const}$ (при $C_1\neq0$ константу C_2 перетвореннями еквівалентності (1.1.9) можна занулити). Тоді

$$A^{max} = \langle D^2,\ R^1(\psi(\omega_1)),\ Z^1(\lambda(\omega_1)) \rangle.$$

Якщо $C_1=0$, то $\chi=C=\mathrm{const}$ і

$$A^{max} = \langle \partial_1,\ R^1(\psi(\omega_1)),\ Z^1(\lambda(\omega_1)) \rangle.$$

При інших значеннях параметра-функції χ (тобто, коли $\chi_{11}\chi\neq\chi_1\chi_1$)

$$A^{max} = \langle R^1(\psi(\omega_1)),\ Z^1(\lambda(\omega_1)) \rangle.$$

в) $\eta\neq0$. Перетвореннями еквівалентності (1.1.9) зробимо $\chi=0$. Розширення алгебри інваріантності системи (1.5.8) з $\eta\neq0$ досягається при $\eta=|C_1\omega_1+C_2|^{1/2}$, де $C_1, C_2=\mathrm{const}$. Нехай $C_1\neq0$. Покладемо $\eta=C|\omega_1|^{1/2}$ (при $C_1\neq0$ константу C_2 перетвореннями еквівалентності (1.1.9) можна занулити). Тоді

$$A^{max} = \langle D^2,\ Z^1(\lambda(\omega_1)),\ R^2(|\omega_1|^{1/2}),\ R^2(|\omega_1|^{1/2}\ln|\omega_1|) \rangle,$$

де $R^1(\psi(\omega_1)) = \psi\partial_3 + \psi_1\partial_{v^3}$. Якщо $C_1=0$, тобто $\eta=C=\mathrm{const}$, то

$$A^{max} = \langle \partial_1,\ Z^1(\lambda(\omega_1)),\ \partial_3,\ \omega_1\partial_3 + \partial_{v^3} \rangle.$$

При інших значеннях параметра-функції η (тобто, коли $(\eta^2)_{11}\neq0$)

$$A^{max} = \langle Z^1(\lambda(\omega_1)),\ R^2(\eta(\omega_1)),\ R^2(\ \eta(\omega_1)\int(\eta(\omega_1))^{-2}d\omega_1\ ) \rangle.$$

Систему (1.5.8) при $\eta=\chi=0$, попередньо перетворивши її до системи двох рівнянь відносно функції течії Ψ^1 та функції Ψ^2, що визначаються співвідношеннями

$$\Psi^1_3 = \omega_2 v^1,\quad \Psi^1_2 = -\omega_2 v^3,\quad \Psi^2 = \omega_2 v^2,$$

докладно дослідив Л.В. Капітанський [18,19].

Розглянемо систему (1.5.9). Введемо позначення:

$t = \omega_3,\quad \tilde\rho = \int \rho^3(t)dt,$

$R^3(\psi^1(t),\psi^2(t)) = \psi^i\partial_i + \psi^i_t\partial_{v^i} - \psi^i_{tt}\omega_i\partial_q$,

$Z^1(\lambda(t)) = \lambda(t)\partial_q$, $S = \partial_{v^3} - \rho^i(t)\omega_i\partial_q$,

$E(\chi(t)) = 2\chi\partial_t + \chi_t\omega_i\partial_{\omega^i} + (\chi_{tt}\omega_i - \chi_t v^i)\partial_{v^i} - (2\chi_t q + \frac{1}{2}\chi_{ttt}\omega_j\omega_j)\partial_q$,

$J^1_{12} = \omega_1\partial_2 - \omega_2\partial_1 + v^1\partial_{v^2} - v^2\partial_{v^1}$.

Теорема 1.5.2. Максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності системи (1.5.9) є алгебра

1. $< R^3(\psi^1(t),\psi^2(t)),\ Z^1(\lambda(t)),\ S,\ E(\chi^1(t)),\ E(\chi^2(t)),\ v^3\partial_{v^3},$ $J^1_{12} >$, де $\chi^1 = e^{-\tilde\rho(t)}\int e^{\tilde\rho(t)}dt$, $\chi^2 = e^{-\tilde\rho(t)}$, якщо $\rho^1=\rho^2=0$;

2. $< R^3(\psi^1(t),\psi^2(t)),\ Z^1(\lambda(t)),\ S,\ E(\chi(t)) + 2a_1v^3\partial_{v^3} +$ $+ 2a_2J^1_{12} >$, де a_1,a_2,a_3 – деякі фіксовані константи,

$\chi^1 = e^{-\tilde\rho(t)}\left[\int e^{\tilde\rho(t)}dt + a_3\right]$, якщо

$\rho^1 = e^{\frac{3}{2}\tilde\rho(t)}(\hat\rho(t))^{-\frac{3}{2}-a_1}(\ C_1\cos(a_2\ln\hat\rho(t)) + C_2\sin(a_2\ln\hat\rho(t))\ ),$

$\rho^2 = e^{\frac{3}{2}\tilde\rho(t)}(\hat\rho(t))^{-\frac{3}{2}-a_1}(-C_1\sin(a_2\ln\hat\rho(t)) + C_2\cos(a_2\ln\hat\rho(t))\ ),$

де $\hat\rho(t) = |\int e^{\tilde\rho(t)}dt + a_3|$, $C_1,C_2=\mathrm{const}$, $(C_1,C_2)\neq(0,0)$;

3. $< R^3(\psi^1(t),\psi^2(t)),\ Z^1(\lambda(t)),\ S,\ E(\chi(t)) + 2a_1v^3\partial_{v^3} +$ $+ 2a_2J^1_{12} >$, де a_1,a_2 – деякі фіксовані константи, $\chi^1 = e^{-\tilde\rho(t)}$, якщо

$\rho^1 = e^{\frac{3}{2}\tilde\rho(t)-a_1\hat\rho(t)}(\ C_1\cos(a_2\hat\rho(t)) + C_2\sin(a_2\hat\rho(t))\ ),$

$\rho^2 = e^{\frac{3}{2}\tilde\rho(t)-a_1\hat\rho(t)}(-C_1\sin(a_2\hat\rho(t)) + C_2\cos(a_2\hat\rho(t))\ ),$

де $\hat\rho(t) = \int e^{\tilde\rho(t)}dt$, $C_1,C_2=\mathrm{const}$, $(C_1,C_2)\neq(0,0)$;

2. $< R^3(\psi^1(t),\psi^2(t)),\ Z^1(\lambda(t)),\ S >$ в усіх інших випадках.

Тут $\psi^i=\psi^i(t)$, $\lambda=\lambda(t)$ – довільні гладкі функції змінної $t=\omega_3$.

Зауваження 1.5.3. Якщо функції $\rho^b=\rho^b(t)$ задаються співвідношеннями (1.5.10), то $e^{\tilde\rho(t)}= C\ |\vec m(t)|$, де $C=\mathrm{const}$, а з умови $\rho^1=\rho^2=0$ випливає, що $\vec m = |\vec m(t)|\ \vec e$, де $|\vec e|=1,\vec e=\mathrm{const}$.

Таким чином, алгебрі інваріантності системи (1.5.9) належать оператори S, $v^3\partial_{v^3}$, що не "індукуються" операторами з алгебри A^∞.

Зауваження 1.5.4. Так як алгебри інваріантності системи вигляду (1.5.9) з різними параметрами-функціями $\rho^3=\rho^3(t)$ схожі між собою, то це наштовхує на думку, що існує локальне перетворення змінних, застосувавши яке до системи (1.5.9), можна занулити функцію ρ^3. Дійсно, зробимо заміну змінних

$$\tilde{\omega}_i = \omega_i e^{\frac{1}{2}\tilde{\rho}(t)}, \quad \tilde{\omega}_3 = \int e^{\tilde{\rho}(t)} dt,$$

$$\tilde{v}^i = \left[v^i + \tfrac{1}{2}\omega_i \rho^3(t) \right] e^{-\frac{1}{2}\tilde{\rho}(t)}, \quad \tilde{v}^3 = v^3,$$

$$\tilde{q} = q e^{-\tilde{\rho}(t)} + \tfrac{1}{8}\omega_i \omega_i [(\rho^3(t))^2 - 2\dot{\rho}^3(t)] e^{-\tilde{\rho}(t)}.$$

На функції $\tilde{v}^a=\tilde{v}^a(\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2,\tilde{\omega}_3)$, $\tilde{q}=\tilde{q}(\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2,\tilde{\omega}_3)$ отримаємо таку систему ДРЧП:

$$\tilde{v}^i_3 + \tilde{v}^j \tilde{v}^i_j - \tilde{v}^i_{jj} + \tilde{q}_i + \tilde{\rho}^i(\tilde{\omega}_3)\tilde{v}^3 = 0,$$

$$\tilde{v}^3_3 + \tilde{v}^j \tilde{v}^3_j - \tilde{v}^3_{jj} = 0,$$

$$\tilde{v}^i_i = 0,$$

де $\tilde{\rho}^i(\tilde{\omega}_3) = \rho^i(\omega_3) e^{-\frac{3}{2}\tilde{\rho}(\omega_3)}$, нижні індекси 1,2,3 означають диференціювання по новим незалежним змінним $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$ відповідно.

РОЗДІЛ 2. УМОВНА СИМЕТРІЯ ТА НЕЛІЇВСЬКІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ НАВ'Є-СТОКСА.

Другий розділ присвячений неліївським методам дослідження РНС (0.1). Розглянуті РНС (0.1) з додатковою умовою $u^1_1=u^2_2=u^3=0$. Описаний загальний розв'язок та знайдена ліївська симетрія РНС (0.1) з додатковою умовою $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}=\vec{0}$. Побудовані широкі сім'ї неліївських розв'язків РНС (0.1), що виражаються через функції exp, sin, cos. Одержаний клас операторів Q-умовної симетрії РНС (0.1). Вивчена ліївська симетрія деяких систем, пов'язаних з РНС (0.1), в результаті чого знайдена сім'я нелокальних перетворень інваріантності плоского РНС.

§ 1. Про рівняння Нав'є-Стокса з додатковою умовою $u^1_1 = u^2_2 = u^3 = 0$.

Розглянемо РНС (0.1) з додатковою умовою

$$u^1_1 = u^2_2 = u^3 = 0. \qquad (2.1.1)$$

При умові (2.1.1) РНС (0.1) еквівалентні системі

$$u^1_t + u^2 u^1_2 - u^1_{22} - u^1_{33} + p_1 = 0, \qquad (2.1.2)$$

$$u^2_t + u^1 u^2_1 - u^2_{11} - u^2_{33} + p_2 = 0, \qquad (2.1.3)$$

$$p_3 = 0. \qquad (2.1.4)$$

Зауваження 2.1.1. Розв'язки системи (2.1.1)-(2.1.4) шукаємо з точністю до перетворень еквівалентності, які включають дискретне перетвореня

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x}_1 = x_2, \quad \tilde{x}_2 = x_1, \quad \tilde{x}_3 = x_3,$$

$$\tilde{u}^1 = u^2, \; \tilde{u}^2 = u^1, \quad \tilde{u}^3 = u^3, \quad \tilde{p} = p$$

та неперевні перетворення, що породжуються операторами ∂_t, $R(m^1(t),m^2(t),0)$, $Z(\chi(t))$ з алгебри інваріантності системи (2.1.1)-(2.1.4).

Можливі два випадки, які небхідно досліджувати окремо: $u^1_2\, u^2_1 \neq 0$ та $u^1_2\, u^2_1 = 0$.

Випадок I. $u^1_2\, u^2_1 \neq 0$. Продиференцюємо рівняння (2.1.2) по x_2 і рівняння (2.1.3) по x_1. Враховуючи рівність мішаних похідних від тиску $p_{12}=p_{21}$, приходимо до рівняння

$$(u^1_t + u^2u^1_2 - u^1_{22} - u^1_{33})_2 = (u^2_t + u^1u^2_1 - u^2_{11} - u^2_{33})_1 . \qquad (2.1.5)$$

Рівняння (2.1.5) продиференцюємо по x_1 та x_2. Так як $u^1_1=u^2_2=0$, то

$$u^1_{222}u^2_1 = u^2_{111}u^1_2 , \qquad (2.1.6)$$

а отже

$$u^1_{222} \,/\, u^1_2 = u^2_{111} \,/\, u^2_1 = h\,, \qquad (2.1.7)$$

де $h=h(t,x_3)$ – деяка гладка функція змінних t, x_3. Ще один наслідок системи (2.1.1)-(2.1.4)

$$(u^1_2 u^2_1)_3 = 0 \qquad (2.1.8)$$

одержимо, продиференціювавши рівняння (2.1.2) по x_1 та x_3.

Розглянемо три можливих підвипадки.

а) $h(t,x_3) > 0$. Нехай $k:=h^{1/2}$. Тоді з (2.1.7) випливає, що функції u^1, u^2 можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} u^1 &= f^1 e^{k^2t+kx_2} + f^2 e^{k^2t-kx_2} + f^3, \\ u^2 &= g^1 e^{k^2t+kx_1} + g^2 e^{k^2t-kx_1} + g^3, \end{aligned} \qquad (2.1.8)$$

де $f^a=f^a(t,x_3)$, $g^a=g^a(t,x_3)$ – гладкі функції змінних t, x_3. Так як $(u^1_2u^2_1)_3 = 0$, а функції

$$\varphi^{1ij}(x_1,x_2) = x_1 e^{k(\pm x_1 \pm x_2)}, \quad \varphi^{2ij}(x_1,x_2) = x_2 e^{k(\pm x_1 \pm x_2)},$$

$$\varphi^{3ij}(x_1,x_2) = e^{k(\pm x_1 \pm x_2)}, \qquad \varphi^4(x_1,x_2) = 1$$

є лінійно незалежними як функції змінних x_1, x_2 (t та x_3 при цьому вважаємо параметрами), то $k_3kf^ig^j=0$, а отже $k_3=0$ (в протилежному випадку, якщо $k_3\neq0$, то $u^1_2u^2_1=0$). Аналогічно, з рівняння (2.1.5) випливає, що $k_t=0$, тобто $k=\mathrm{const}$, причому $k\neq0$, і

$$Tf^1 + kg^3f^1 = 0, \quad Tf^2 - kg^3f^2 = 0, \qquad (2.1.9)$$

$$Tg^1 + kf^3g^1 = 0, \quad Tg^2 - kf^3g^2 = 0, \qquad (2.1.10)$$

де $T = \partial_t - \partial_{33}$. Продиференцюємо рівняння (2.1.2), (2.1.3) по x_3 і з допомогою співвідношення (2.1.4), одержимо ще такі рівняння на функції f^a, g^a:

$$(f^ig^j)_3 = 0, \qquad (2.1.11)$$

$$(Tf^3)_3 = (Tg^3)_3 = 0,$$

або, з врахуванням зауваження 2.1.1 (тобто розв'язки (f^a, g^a), $(\tilde{f}^a, \tilde{g}^a)$, для яких $\tilde{f}^3 - f^3 = \eta^1(t)$, $\tilde{g}^3 - g^3 = \eta^2(t)$, вважаємо еквівалентними)

$$Tf^3 = Tg^3 = 0. \qquad (2.1.12)$$

Знайдемо загальний (з точністю до перетворень еквівалентності) розв'язок системи (2.1.9)- (2.1.12).

За умов (2.1.9)- (2.1.12) можна вважати, що

$$f^1 f^2 g^3 = g^1 g^2 f^3 = 0. \qquad (2.1.13)$$

Дійсно, нехай, наприклад, $f^1 \neq 0$, $g^1 \neq 0$. Тоді з рівнянь (2.1.11), (2.1.12) випливає, що $g^i = \chi^i(t)/f^1$, тобто $g^2 = \chi(t) g^1$, а тому $2k\chi f^3 = \chi_t$. Звідси або $\chi = g^2 = 0$, або $f^3 = \chi_t/(2k\chi)$, отже можна покласти $f^3 = 0$ (див. зауваження 2.1.1). Аналогічно $f^2 g^3 = 0$.

Нехай $f^1 f^2 \neq 0$, $g^1 g^2 \neq 0$. Тоді $f^3 = g^3 = 0$ і f^i, g^i задовольняють рівнянням

$$Tf^i = 0, \quad Tg^i = 0, \quad (f^i g^j)_3 = 0. \qquad (2.1.14)$$

Лема 2.1.1. Загальний розв'язок системи

$$Tf = 0, \quad Tg = 0, \quad (fg)_3 = 0. \qquad (2.1.15)$$

при умові $f \neq 0$, $g \neq 0$ має вигляд

$$f = C_1 e^{\varkappa^2 t + \varkappa x_3}, \quad g = C_2 e^{\varkappa^2 t - \varkappa x_3}, \qquad (2.1.16)$$

де C_i, $\varkappa$ - деякі константи.

Доведення. Так як $(fg)_3 = 0$, то $g = \eta(t)/f$. З інших рівнянь системи (2.1.15) випливає, що

$$2(f_3)^2 = \eta_t \eta^{-1} f^2. \qquad (2.1.17)$$

продиференцюємо рівність (2.1.17) по x_3:

$$f_t = f_{33} = \frac{1}{2} \eta_t \eta^{-1} f, \qquad (2.1.18)$$

звідки $f = \phi(x_3)|\eta(t)|^{1/2}$. Тоді з рівняння (2.1.17) маємо, що

$(\phi_3\phi^{-1})^2 = \frac{1}{2}\eta_t\eta^{-1} = \varkappa^2 = \mathrm{const}$ ($\phi_3\phi^{-1} = \varkappa$), тобто

$\eta = \tilde{C}_1 e^{2\varkappa^2 t}$, $\phi = \tilde{C}_2 e^{\varkappa x_3}$, де $\tilde{C}_i = \mathrm{const}$. Це означає, що функції f, g мають вигляд (2.1.16).

Доведення леми 2.1.1 завершено.

В силу леми 2.1.1

$$f^i = C_{1i} e^{\varkappa^2 t + \varkappa x_3}, \quad g^i = C_{2i} e^{\varkappa^2 t - \varkappa x_3}, \tag{2.1.19}$$

де $C_{ij}, \varkappa = \mathrm{const}$, $C_{ij} \neq 0$, а отже

$$\begin{aligned} u^1 &= e^{(k^2+\varkappa^2)t + \varkappa x_3}(C_{11} e^{kx_2} + C_{12} e^{-kx_2}), \\ u^2 &= e^{(k^2+\varkappa^2)t - \varkappa x_3}(C_{21} e^{kx_1} + C_{22} e^{-kx_1}). \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Тоді з системи (2.1.1)-(2.1.4) одержимо рівняння на тиск p:

$$p_1 + u^2 u^1_2 = 0, \quad p_2 + u^1 u^2_1 = 0, \quad p_3 = 0, \tag{2.1.21}$$

які легко інтегруються:

$$p = -e^{2(k^2+\varkappa^2)t}(C_{11} e^{kx_2} - C_{12} e^{-kx_2})(C_{21} e^{kx_1} - C_{22} e^{-kx_1}). \tag{2.1.22}$$

Нехай $g^2=0$, $f^1 f^2 \neq 0$. Тоді $g^1 \neq 0$ (інакше $u^1_2 u^2_1 = 0$),

$$g^3 = 0, \quad Tf^a = 0, \quad (f^i g^1)_3 = 0, \quad Tg^1 + kf^3 g^1 = 0. \tag{2.1.23}$$

Наслідками системи (2.1.23) є співвідношення:

$$f^2/f^1 = \mathrm{const}, \quad g^1 = \chi(t)/f^1, \tag{2.1.24}$$

$$f^3 = \frac{2}{k}(f^1_3/f^1)^2 - \frac{1}{k}\chi_t \chi^{-1}, \tag{2.1.25}$$

де $\chi=\chi(t)$ - деяка гладка функція змінної t. З рівняння (2.1.25) знаходимо вираз для f^1:

$$f^1 = \eta(t)\exp\{ \pm\int(\tfrac{1}{2} kf^3 + \tfrac{1}{2}\chi_t\chi^{-1})^{1/2} dx_3\}. \tag{2.1.26}$$

Виключаючи з системи (2.1.23) з допомогою формул (2.1.24), (2.1.26) функції f^1, f^2, g^1, одержимо переозначену систему ДР відносно однієї функції f^3, з якої випливає, що $f^3_3=0$, а отже, можна вважати (див. зауваження 2.1.1), що $f^3=0$. Тому функції f^i, g^i знову задовольняють рівнянням (2.1.14), а відповідний розв'язок системи (2.1.1)-(2.1.4) має вигляд (2.1.20),(2.1.22), де $C_{22}=0$, $C_{11}\neq0$, $C_{21}\neq0$. Інші подібні випадки ($g^1=0$, $f^1f^2\neq0$; $f^1=0$, $g^1g^2\neq0$; $f^2=0$, $g^1g^2\neq0$) розглядаються аналогічно.

Нехай $f^1f^2=g^1g^2=0$. Без обмеження загальності можна вважати, що $f^1\neq0$. Перепозначимо f^1 через f, а ненульову функцію серед функцій g^1, g^2 через g. Тоді

$$
\begin{aligned}
u^1 &= f(t,x_3)e^{k^2t+kx_2} + f^3(t,x_3),\\
u^2 &= g(t,x_3)e^{k^2t\pm kx_1} + g^3(t,x_3),
\end{aligned}
\qquad (2.1.27)
$$

де

$$
Tf + kg^3f = 0, \quad Tg \pm kf^3g = 0, \qquad (2.1.28)
$$

$$
Tf^3 = 0, \quad Tg^3 = 0, \qquad (2.1.29)
$$

$$
(fg)_3 = 0. \qquad (2.1.30)
$$

З системи (2.1.28)-(2.1.30) випливає, щр

$$
g = \chi/f, \qquad (2.1.31)
$$

$$
(f_3/f)^2 = \frac{1}{2}k(g^3\pm f^3) + \frac{1}{2}\chi_t\chi^{-1}, \qquad (2.1.32)
$$

де $\chi=\chi(t)$ - деяка гладка функція змінної t. Інтегруючи рівняння (2.1.32), знаходимо вираз для f:

$$
f = \eta(t)\,\exp\{\pm\int(\frac{1}{2}k(g^3\pm f^3) + \frac{1}{2}\chi_t\chi^{-1})^{1/2}dx_3\}. \qquad (2.1.33)
$$

На функцію $f^4 = \frac{1}{2}k(g^3\pm f^3)$ маємо перевизначену систему

$$
Tf^4 = 0, \qquad (2.1.34)
$$

$$
\left[\frac{\chi_t}{2\chi}\right]_{tt}\left[f^4+\frac{\chi_t}{2\chi}\right]^3 - \frac{1}{2}\left[\left(\left[\frac{\chi_t}{2\chi}\right]_t\right)^2 + 2(f^4_{33})^2\right]\left[f^4+\frac{\chi_t}{2\chi}\right]^2 -
$$

$$
- \frac{3}{2}(f^4_{33})^2\left[\frac{\chi_t}{2\chi}\right]_t\left[f^4+\frac{\chi_t}{2\chi}\right] - \frac{15}{8}(f^4_3)^4 = 0,
$$

з якої в результаті складних і громіздких викладок, які випускаємо, приходимо до співвідношення $f^4_3=0$, а отже, можна покласти (див. зауваження 2.1.1)

$$\frac{2}{k}f^4 = g^3 \pm f^4 = 0.$$

Тоді

$$f = \eta(t)\exp\left\{ \pm \left[\frac{\chi_t}{2\chi}\right]^{1/2} x_3 \right\}, \qquad (2.1.35)$$

$$-kg^3 = \frac{Tf}{f} = \frac{\eta_t}{\eta} \pm \left[\left[\frac{\chi_t}{2\chi}\right]^{1/2}\right]_t x_3 - \frac{\chi_t}{2\chi}. \qquad (2.1.36)$$

Так як $Tg^3=0$, то з формули (2.1.36) випливає, що $g^3 = \frac{\varkappa}{k}x_3$, де $\varkappa=\mathrm{const}$, тобто

$$\pm\left[\left[\frac{\chi_t}{2\chi}\right]^{1/2}\right]_t = \frac{\varkappa}{k}, \quad \frac{\eta_t}{\eta} = \frac{\chi_t}{2\chi}. \qquad (2.1.37)$$

Проінтегруємо рівняння (2.1.37) і підставимо отримані розв'язки в формули (2.1.35), (2.1.27). Якщо $\varkappa=0$, то в результаті одержимо, що функції u^1, u^2 мають вигляд (2.1.20), де $C_{12}=0$, $C_{21}=C_{22}=0$. Нехай $\varkappa\neq0$. Тоді

$$u^1 = C_1\exp\{ \tfrac{1}{3}\varkappa^2t^3 + k^2t - \varkappa tx_3 + kx_2 \} \mp \frac{\varkappa}{k}x_3,$$
$$u^2 = C_2\exp\{ \tfrac{1}{3}\varkappa^2t^3 + k^2t + \varkappa tx_3 \pm kx_1 \} + \frac{\varkappa}{k}x_3 \qquad (2.1.38)$$

(при цьому для спрощення розв'язка використано зсув по змінній t). Після підстановки виразів (2.1.38) для функцій u^1, u^2 в систему (2.1.2)-(2.1.4) приходимо до рівнянь на тиск p:

$$p_1 + kC_1C_2\exp\{ \tfrac{2}{3}\varkappa^2t^3 + 2k^2t + kx_2 \mp kx_1 \} = 0,$$
$$p_2 \pm kC_1C_2\exp\{ \tfrac{2}{3}\varkappa^2t^3 + 2k^2t + kx_2 \mp kx_1 \} = 0, \qquad (2.1.39)$$
$$p_3 = 0,$$

які легко інтегруються:

$$p = \mp C_1C_2\exp\{ \tfrac{2}{3}\varkappa^2t^3 + 2k^2t + kx_2 \mp kx_1 \}. \qquad (2.1.40)$$

Формули (2.1.38), (2.1.40) дають простий приклад розв'язка

РНС (0.1), що не є узагальненою течією Бельтрамі (тобто $\mathrm{rot}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}) \neq \vec{0}$).

Таким чином, підвипадок $h(t,x_3)>0$ розглянуто повністю.

б) $h(t,x_3)<0$. Нехай $k:=(-h)^{1/2}$. Тоді з рівняння (2.1.7) випливає, що функції u^1, u^2 можна записати у вигляді:

$$u^1 = f^1e^{-k^2t}\cos kx_2 + f^2e^{-k^2t}\sin kx_2 + f^3,$$
$$u^2 = g^1e^{-k^2t}\cos kx_1 + g^2e^{-k^2t}\sin kx_1 + g^3, \qquad (2.1.41)$$

де $f^a=f^a(t,x_3)$, $g^a=g^a(t,x_3)$ – деякі гладкі функції змінних t і x_3, $(f^1,f^2)\neq(0,0)$, $(g^1,g^2)\neq(0,0)$. Аналогічно підвипадку а) з рівнянь (2.1.2)-(2.1.5), (2.1.8) маємо, що $k=\mathrm{const}$,

$$Tf^1 + kg^3f^2 = 0, \quad Tf^2 - kg^3f^1 = 0, \qquad (2.1.42)$$

$$Tg^1 + kf^3g^2 = 0, \quad Tg^2 - kf^3g^1 = 0, \qquad (2.1.43)$$

$$(f^ig^j)_3 = 0, \qquad (2.1.44)$$

$$(Tf^3)_3 = (Tg^3)_3 = 0, \qquad (2.1.45)$$

За умов (2.1.42)-(2.1.44) можна вважати, що

$$f^3 = g^3 = 0. \qquad (2.1.46)$$

Дійсно, нехай, наприклад, $f^1\neq0$, $g^1\neq0$. Тоді з рівнянь (2.1.43), (2.1.44) випливає, що $g^1=\chi^1(t)/f^1$, тобто $g^2=\chi(t)g^1$, а тому $f^3 = \frac{1}{k}\chi_t(1+\chi^2)$. Аналогічно $g^3_3=0$. Тому з врахуванням зауваження 2.1.1 покладемо $f^3=g^3=0$.

Таким чином, на функції f^i, g^i маємо систему ДР

$$Tf^i = 0, \quad Tg^i = 0, \quad (f^ig^j)_3 = 0, \qquad (2.1.47)$$

з якої в силу леми 2.1.1 випливає, що

$$f^i= C_{1i}e^{\varkappa^2t+\varkappa x_3}, \quad g^i= C_{2i}e^{\varkappa^2t-\varkappa x_3}, \qquad (2.1.48)$$

де $C_{ij},\varkappa=\mathrm{const}$, а отже

$$u^1 = e^{(\text{æ}^2-k^2)t+\text{æ}x_3}(C_{11}\cos kX_2 + C_{12}\sin kX_2),$$
$$u^2 = e^{(\text{æ}^2-k^2)t-\text{æ}x_3}(C_{21}\cos kX_1 + C_{22}\sin kX_1). \qquad (2.1.49)$$

Після підстановки виразів (2.1.49) для функцій u^1, u^2 в систему (2.1.1)-(2.1.4) одержимо рівняння вигляду (2.1.21), інтегруючи які, знайдемо, що

$$p = e^{2(\text{æ}^2-k^2)t}(C_{12}\cos kX_2 - C_{11}\sin kX_2)(C_{22}\cos kX_1 - C_{21}\sin kX_1), \qquad (2.1.50)$$

в) $h(t,x_3)=0$. Тоді з рівняння (2.1.7) випливає, що

$$u^1 = f^3x_2^2 + f^2x_2 + f^1,$$
$$u^2 = g^3x_1^2 + g^2x_1 + g^1, \qquad (2.1.51)$$

де $f^a=f^a(t,x_3)$, $g^a=g^a(t,x_3)$ - гладкі функції змінних t, x_3, $(f^2,f^3)\neq(0,0)$, $(g^2,g^3)\neq(0,0)$ (інакше $u^1_2u^2_1=0$). Це означає, що права і ліва частини рівняння (2.1.5) є поліномами по x_1 і x_2. Збираючи коефіцієнти при степенях x_1 і x_2, отримаємо такі рівняння на функції f^a, g^a:

$$f^3g^3 = 0, \quad Tg^3 = f^3g^2, \quad Tf^3 = g^3f^2, \qquad (2.1.52)$$

$$Tf^2 + 2g^1f^3 = Tg^2 + 2f^1g^3. \qquad (2.1.53)$$

З рівнянь (2.1.52) випливає, що $f^3=g^3=0$ (інакше $u^1_2u^2_1=0$). Тоді $f^2\neq0$, $g^2\neq0$, причому

$$Tf^2 = Tg^2 \qquad (2.1.54)$$

Продиференцюємо рівняннння (2.1.2), (2.1.3) по x_3 і, враховуючи, що $p_3=0$, одержимо ще такі рівняннння на функції f^i, g^i:

$$(Tf^2)_3 = 0, \quad (Tg^2)_3 = 0, \quad (f^2g^2)_3 = 0, \qquad (2.1.55)$$

$$(Tf^1+f^2g^1)_3 = 0, \quad (Tg^1+ g^2f^1)_3 = 0. \qquad (2.1.56)$$

Лема 2.1.1. Довільний розв'язок системи системи (2.1.55), де $f^2\neq 0$, $g^2\neq 0$, належить одній з наступних сімей:

$$1.\ f^2 = f^2(t),\quad g^2 = g^2(t); \tag{2.1.57}$$

$$2.\ f^2 = C_1 e^{\varkappa^2 t+\varkappa x_3},\quad g^2 = C_2 e^{\varkappa^2 t-\varkappa x_3}, \tag{2.1.58}$$

де C_i, $\varkappa$ - деякі константи.

Доведення. Якщо $f^2_3=0$, то розв'язок (f^2,g^2) належить сім'ї (2.1.57). Нехай $f^2_3\neq 0$. Так як $(f^2,g^2)_3=0$, то $g^2=\eta(t)/f^2$, причому $\eta(t)\neq 0$. Інші рівняння системи (2.1.55) запишемо у вигляді:

$$Tf^2 = \chi^1(t), \tag{2.1.59}$$

$$Tg^2 = \chi^2(t). \tag{2.1.60}$$

З рівнянь (2.1.59), (2.1.60) випливає, що

$$2(f^2_3)^2 = \eta^1(f^2)^2 - \chi^1 f^2 + \eta^2(f^2)^3, \tag{2.1.61}$$

де $\eta^1=\eta^1(t)=\eta_t/\eta$, $\eta^2=\eta^2(t)=-\chi^2/\eta$. Використовуючи рівняння (2.1.59), (2.1.61), з умови $f^2_{333}=f^2_{33t}$ отримаємо, що f^2 задовольняє алгебраїчному рівнянню з коефіцієнтами, що залежать лише від змінної t:

$$3(\eta^2)^2(f^2)^3 + 3(\eta^2\eta^1-\eta^2_t)(f^2)^2 - (9\chi^1\eta^2+2\eta^1_t)f^2 + \chi^1_t - 2\eta^1\chi^1 = 0. \tag{2.1.62}$$

Так як $f^2_3\neq 0$, то коефіцієнти многочлена, що стоїтб в лівій частині рівняння (2.1.62), мають дорівнювати нулю. Тому на функції η^1, η^2, χ^1 маємо рівняння

$$\eta^2 = 0,\quad \eta^1_t = 0,\quad \chi^1_t - 2\eta^1\chi^1 = 0, \tag{2.1.63}$$

тобто $\chi^2=0$. Аналогічно можна показати, що $\chi^1=0$. Це означає, що функції f^2, g^2 задовольняють системі (2.1.15), а отже, в силу леми 2.1.1 виконуєть співвідношення (2.1.58), що завершує доведення леми 2.1.2.

Якщр $f^2_3=g^2_3=0$, то з формули (2.1.54) випливає, що $f^2_t=g^2_t$, тобто $f^2=\eta(t)$, $g^2=\eta(t)+C$, де $\eta=\eta(t)$ – деяка гладка функція змінної t, $C=\mathrm{const}$, а рівняння (2.1.56) (див. зауваження 2.1.1) можна записати у вигляді:

$$Tf^1 + \eta g^1 = 0, \quad Tg^1 + (\eta+C)f^1 = 0. \tag{2.1.64}$$

Відповідний розв'язок РНС (0.1) задається формулами:

$$u^1 = f^1(t,x_3) + \eta(t)x_2, \quad u^2 = g^1(t,x_3) + (\eta(t)+C)x_2, \quad u^3 = 0,$$

$$p = -\eta_t(t)x_1x_2 - \frac{1}{2}(t)(\eta(t)+C)(x_1^2+x_2^2),$$

де функції f^1, g^1 задовольняють системі (2.1.64). Локальне перетворення

$$f^1 = \chi^{11}(t)\tilde{f} + \chi^{12}(t)\tilde{g},$$
$$g^1 = \chi^{21}(t)\tilde{f} + \chi^{22}(t)\tilde{g},$$

де (χ^{1i},χ^{2i}) – фундаментальна система розв'язків ЗДР

$$\chi^1_t + \eta\chi^2 = 0, \quad \chi^2_t + (\eta+C)\chi^1 = 0,$$

приводять рівняння (2.1.64) до двох незачеплених лінійних рівнянь теплопровідності. Тому розв'язок (2.1.65) відноситься до розв'язків типу (1.3.5).

Якщо функції f^2, g^2 задаються формулами (2.1.58), то відповідний розв'язок РНС (0.1) має вигляд:

$$u^1 = C_1e^{\varkappa^2t+\varkappa x_3}x_2 + f^1(t,x_3), \quad u^2 = C_2e^{\varkappa^2t-\varkappa x_3}x_1 + g^1(t,x_3),$$

$$u^3 = 0, \quad p = -\frac{1}{2}C_1C_2e^{2\varkappa^2t}(x_1^2+x_2^2). \tag{2.1.66}$$

де $C_1,C_2\neq0$. Функції f^1, g^1 задовольняють рівнянням (2.1.56), проінтегрувавши які по x_3, одержимо, що

$$\begin{aligned} Tf^1 + C_1e^{\varkappa^2t+\varkappa x_3}g^1 &= \psi^1(t),\\ Tg^1 + C_2e^{\varkappa^2t-\varkappa x_3}f^1 &= \psi^2(t), \end{aligned} \tag{2.1.67}$$

де $\psi^i=\psi^i(t)$ – довільні гладкі функції змінної t, котрі можна покласти рівними нулю. Дійсно, подіємо на розв'язок (2.1.66) перетворенням з групи симетрії РНС, породженим оператором $R(m^1,m^2,0)$. При цьому загальний вигляд розв'язка зберігається, перетворюються лише функції f^1, g^1, що переходять відповідно в функції

$$
\begin{aligned}
f &= f^1 + m^1_t(t) - C_1 e^{\text{æ}^2 t + \text{æ} x_3} m^2(t),\\
g &= g^1 + m^2_t(t) - C_2 e^{\text{æ}^2 t - \text{æ} x_3} m^1(t).
\end{aligned}
\tag{2.1.68}
$$

Якщо $m^i = m^i(t)$ задовольняють ЗДР

$$
- m^i_{tt} + C_1 C_2 e^{2\text{æ}^2 t} m^i = \varphi^i, \tag{2.1.69}
$$

то на функції f, g маємо лінійну однорідну систему ДРЧП

$$
\begin{aligned}
Tf + C_1 e^{\text{æ}^2 t + \text{æ} x_3} g &= 0,\\
Tg + C_2 e^{\text{æ}^2 t - \text{æ} x_3} f &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.1.70}
$$

Дослідимо симетрійні властивості системи (2.1.70) та побудуємо деякі її точні розв'язки.

Зауважуння 2.1.2. З допомогою локального перетворення

$$
t = \text{æ}^{-2}[\tilde{t} - \tfrac{1}{2}\ln(|C_1C_2|\text{æ}^{-2})], \quad x_3 = \text{æ}^{-1}\tilde{x}_3,
$$

$$
f = C_2^{-1}|C_1C_2|^{1/2}\tilde{f}, \quad g = \tilde{g}
$$

система (2.1.70) приводиться до вигляду

$$
\begin{aligned}
\tilde{T}\tilde{f} + \delta e^{\tilde{t} + \tilde{x}_3} \tilde{g} &= 0,\\
\tilde{T}\tilde{g} + e^{\tilde{t} - \tilde{x}_3} \tilde{f} &= 0,
\end{aligned}
$$

де $\tilde{T} = \partial_{\tilde{t}} - \partial_{\tilde{x}_3\tilde{x}_3}$, $\delta=1$, якщо $C_1C_2>0$, $\delta=-1$, якщо $C_1C_2<0$.

Теорема 2.1.1. Максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності системи (2.1.70) є алгебра, породжена операторами

$$P^1 = \partial_3 - \varkappa g\partial_g, \qquad I^1 = f\partial_f + g\partial_g,$$
$$\tilde{f}(t,x_3)\partial_f + \tilde{g}(t,x_3)\partial_g, \qquad (2.1.71)$$

де $(\tilde{f},\tilde{g})$ – довільний розв'язок системи (2.1.70).

Теорема 2.1.1 доводиться з допомогою стандартного алгоритма Лі.

Точний розв'язок системи (2.1.70), побудований з допомогою редукції по одновимірній алгебрі $\langle P^1+a\varkappa I^1\rangle$, має вигляд:

$$f = e^{a\varkappa x_3+(a^2-a+1)\varkappa^2 t}\left(C_3J_{a-1}(\omega) + C_4Y_{a-1}(\omega) \right),$$
$$g = (-C_1C_2)^{1/2}C_1^{-1}e^{(a-1)\varkappa x_3+(a^2-a+1)\varkappa^2 t}\left(C_3J_a(\omega) + C_4Y_a(\omega) \right), \qquad (2.1.72)$$

де $\omega = \varkappa^{-2}(-C_1C_2)^{1/2}e^{\varkappa^2 t}$, якщо $C_1C_2<0$;

$$f = e^{a\varkappa x_3+(a^2-a+1)\varkappa^2 t}\left(C_3I_{a-1}(\omega) + C_4K_{a-1}(\omega) \right),$$
$$g = (C_1C_2)^{1/2}C_1^{-1}e^{(a-1)\varkappa x_3+(a^2-a+1)\varkappa^2 t}\left(C_3I_a(\omega) + C_4K_a(\omega) \right), \qquad (2.1.73)$$

де $\omega = \varkappa^{-2}(C_1C_2)^{1/2}e^{\varkappa^2 t}$, якщо $C_1C_2>0$;

тут J_a, Y_a – функції Бесселя дійсної змінної,

I_a, K_a – функції Бесселя уявної змінної.

Після підстановки виразів (2.1.72) (або (2.1.73)) для f, g замість функцій f^1, g^1 в формули (2.1.66) одержимо розв'язок РНС (0.1) в замкненій формі.

Випадок 2. $u_2^1u_1^2 = 0$. Нехай $u_1^2 = 0$ (достатньо розглядувати тільки цей підвипадок, так як підвипадок $u_2^1 = 0$ зводиться до нього дискретним перетворенням з зауваження 2.1.1). Тоді з рівнянь (2.1.2)-(2.1.4) випливає, що $p_{11}=p_{12}=p_{22}=0$, тобто $p = \psi(t) + \chi^i(t)x_i$, а тому перетвореннями, що породжуються операторами $R(m^1,m^2,0)$, $Z(\eta)$ (див. зауваження 2.1.1) p можна занулити. В результаті система (2.1.1)-(2.1.4) набуває вигляду

$$u^1_t + u^2 u^1_2 - u^1_{22} - u^1_{33} = 0, \qquad (2.1.74)$$

$$u^2_t - u^2_{33} = 0, \quad u^2_2 = 0, \qquad (2.1.75)$$

$$u^3 = p = 0,$$

де $u^i = u^i(t,x_2,x_3)$.

Зауваження 2.1.2. Легко помітити, що система (2.1.74), (2.1.75) є лінійною по u^1. Тому , якщо $(\underset{(1)}{u^1},u^2)$, $(\underset{(2)}{u^1},u^2)$ – розв'язки системи (2.1.74),(2.1.75) , то

$$(u^1,u^2) = (\underset{(1)}{u^1} + \underset{(2)}{u^1},u^2)$$

також буде її розв'язком.

Дослідимо симетрійні властивості системи (2.1.74),(2.1.75), та побудуємо деякі сім'ї її точних розв'язків.

Теорема 2.1.2. Максимальна в сенсі Лі алгебра інваріантності системи (2.1.74),(2.1.75) породжується операторами

$$\partial_1, \ \partial_2, \ \partial_3, \ G^2 = t\partial_2 + \partial_{u^2}, \ I^2 = u^1\partial_{u^1}, \ u^2\partial_{u^1},$$
$$S^1 = (tu^2-x_2)\partial_{u^1}, \ D^2 = 2t\partial_t + x_2\partial_2 + x_3\partial_3 - u^2\partial_{u^2}, \qquad (2.1.76)$$
$$f(t,x_3)\partial_{u^1},$$

де f – довільний розв'язок рівняння $Tf=0$.

Теорема 2.1.2 доводиться з допомогою стандартного алгоритма Лі.

З теореми 2.1.2 випливає, що

$$(\tilde{u}^1,\tilde{u}^2) = (u^1+\varepsilon(tu^2-x_2)+f(t,x_3),u^2),$$

де (u^1,u^2) – розв'язок системи (2.1.74),(2.1.75), $Tf=0$, також є її розв'язком.

Позначимо через $_3f$ перший інтеграл ЗДР

$$f_3 dt + f dx_3 = 0, \qquad (2.1.77)$$

${}_{33}f:={}_3({}_3f)$, і т.д. Якщо $Tf=0$, то $T({}_3f)=0$ (див. теорему А.4). Тому систему (2.1.74),(2.1.75) можна переписати у вигляді

$$u^1_t + v_3u^1_2 - u^1_{22} - u^1_{33} = 0, \qquad (2.1.78)$$

$$v_t - v_{33} = 0, \quad v_2 = 0, \qquad (2.1.79)$$

де $v={}_3u^2$ (а отже $u^2=v_3$).

Теорема 2.1.3. Максимальна в сенсі Лі алгебра інваріантності системи (2.1.78),(2.1.79) породжується операторами

$$\partial_1, \quad \partial_2, \quad \partial_3, \quad G^3 = t\partial_2 + x_3\partial_v, \quad I^2 = u^1\partial_{u^1}, \quad \partial_v,$$
$$D^3 = 2t\partial_t + x_2\partial_2 + x_3\partial_3, \quad f(t,x_3)\partial_{u^1}, \qquad (2.1.80)$$
$$(g(t,x_3)v+2g_3(t,x_3)x_2)\partial_{u^1},$$

де f, g - довільні розв'язки рівнянь $Tf=0$, $Tg=0$.

Теорема 2.1.2 доводиться з допомогою стандартного алгоритма Лі.

З теореми 2.1.2 випливає, що

$$(\tilde{u}^1,\tilde{u}^2) = (u^1+g(t,x_3)({}_3u^2)+2g_3(t,x_3)x_2,u^2),$$

де (u^1,u^2) - розв'язок системи (2.1.74),(2.1.75), $Tg=0$, також є її розв'язком.

Запис системи (2.1.74),(2.1.75) у вигляді

$$u^1_t + v_{33}u^1_2 - u^1_{22} - u^1_{33} = 0, \qquad (2.1.81)$$

$$v_t - v_{33} = 0, \quad v_2 = 0, \qquad (2.1.82)$$

де $v={}_{33}u^2$ (тобто $u^2=v_{33}$) не веде до розширення або суттєвої зміни її ліївської симетрії. Алгеброю інваріантності системи (2.1.81), (2.1.82) є алгебра

$$<\partial_1, \quad \partial_2, \quad \partial_3, \quad G^4 = t\partial_2 + (t+\tfrac{1}{2}x_3^2)\partial_v, \quad I^2 = u^1\partial_{u^1}, \quad \partial_v,$$
$$x_3\partial_v, \quad D^2 = 2t\partial_t + x_2\partial_2 + x_3\partial_3 + v\partial_v, \quad f(t,x_3)\partial_{u^1} >, \qquad (2.1.83)$$

де f – довільний розв'язкок рівняння $Tf=0$.

Наслідки теорем 2.1.2, 2.1.3 наводять на думку, що система (2.1.74), (2.1.75) має допускати широкий клас перетворень загального вигляду

$$\tilde{u}^1 = u^1 + \Sigma(t,x_2,x_3,u,{}_{\langle 1\rangle}u,{}_{\langle 2\rangle}u,\dots,{}_{\langle N\rangle}u),\quad \tilde{u}^2 = u, \qquad (2.1.84)$$

де $u{:=}u^2$, ${}_{\langle 1\rangle}u={}_3u$, ${}_{\langle 2\rangle}u={}_{33}u,\dots$, $N\geq 1$. Обмежимось тут випадком, коли $N=2$.

Теорема 2.1.4. Система (2.1.74), (2.1.75) інваріантна відносно перетворень вигляду

$$\tilde{u}^1 = u^1 + \Sigma(t,x_2,x_3,u,{}_3u,{}_{33}u),\quad \tilde{u}^2 = u, \qquad (2.1.85)$$

де $u{:=}u^2$, тоді і тільки тоді, коли

$$\Sigma = C_1(tx_2u+\tfrac{1}{2}t({}_3u)^2+\tfrac{1}{4}({}_{33}u)^2-\tfrac{1}{2}x_2^2) + C_2(x_2u+\tfrac{1}{2}({}_3u)^2) +$$
$$+ C_3(x_3({}_{33}u)({}_3u) + 2x_2x_3({}_3u) - ({}_{33}u)^2 + 2x_2({}_{33}u) + 2x_2^2) +$$
$$+ C_4({}_{33}u + 2x_2)({}_3u) + C_5(4t^2u + 4tx_3({}_3u) + (x_3^2+2t)({}_{33}u)) +$$
$$+ C_6(tu - x_2) + C_7u + C_8(t({}_3u) + \tfrac{1}{2}x_3({}_{33}u)) + C_9({}_{33}u) +$$
$$+ f^1(t,x_3)({}_3u) + 2x_2f^1_3(t,x_3) + f^2(t,x_3),$$

де $Tf^i=0$, $C_n=\mathrm{const}, n=\overline{1,9}$.

Доведення. Підставимо вираз для $\tilde{u}^1$, що визначається формулою (2.1.85), в рівняння (2.1.74). Враховуючи рівняння (2.1.75), одержимо, що

$$\Sigma_0 - \Sigma_{22} - \Sigma_{33} + u\Sigma_2 - 2\Sigma_{3u}u_3 - 2\Sigma_{3\langle{}_3u\rangle}u - 2\Sigma_{3\langle{}_{33}u\rangle}({}_3u) -$$
$$- 2\Sigma_{u\langle{}_3u\rangle}u_3u - 2\Sigma_{u\langle{}_{33}u\rangle}u_3({}_3u) - 2\Sigma_{\langle{}_3u\rangle\langle{}_{33}u\rangle}u({}_3u) - \qquad (2.1.87)$$
$$- \Sigma_{uu}u_3u_3 - \Sigma_{\langle{}_3u\rangle\langle{}_3u\rangle}(u)^2 - \Sigma_{\langle{}_{33}u\rangle\langle{}_{33}u\rangle}({}_3u)^2 = 0.$$

Розщеплення умови (2.1.87) по похідній u_3 дає такі визначальні рівняння:

$$\Sigma_{uu} = \Sigma_{u(_3u)} = \Sigma_{u(_{33}u)} = \Sigma_{3u} = 0, \qquad (2.1.88)$$

а тому функція Σ має вигляд:

$$\Sigma = \Sigma^1(t,x_2)u + \Sigma^2(t,x_2,x_3,{}_3u,{}_{33}u). \qquad (2.1.89)$$

Так як функції Σ^1, Σ^2 не залежать від змінної u, то підставляючи вираз (2.1.89) для Σ в умову (2.1.87) і розщеплюючи її по змінній u, отримаємо визначальні рівняння на функції Σ^1, Σ^2. Продовжуючи цю процедуру, в результаті прийдемо до твердження теореми 2.1.4.

Фіксуємо довільний розв'язок u^2 рівнянь (2.1.75). Розв'язки рівняння (2.1.74) шукаємо у вигляді

$$u^1 = \sum_{m=0}^{M} g^m(t,x_3)\, x_2^m, \qquad (2.1.90)$$

де функції $g^m, m=\overline{0,M}$, задовольняють системі ДРЧП

$$g^m_t - g^m_{33} + (m+1)\, u^2\, g^{m+1} - (m+1)(m+2)\, g^{m+2} = 0, \quad m=\overline{0,M},$$
$$g^{M+1} = g^{M+2} = 0. \qquad (2.1.91)$$

Кожне рівняння в системі (2.1.91) є неоднорідним лінійним одновимірним рівнянням теплопровідності (неоднорідним ЛОРТ) відносно функції g^m, якщо функції g^{m+1}, g^{m+2} вже відомі. Тому інтегрування системи (2.1.91), якщо послідовно розв'язувати її, починаючи з останнього рівняння (m=M), зведеться до інтегрування M неоднорідних ЛОРТ. Часткові розв'язки цих рівнянь можна шукати, як згортку джерела з фундаментальним розв'язком ЛОРТ, але тоді отримаємо вирази для функцій $g^m, m=\overline{0,M}$, через кратні інтеграли. В деяких випадках цього вдається уникнути, або фіксуючи M – степінь полінома (2.1.90) по x_3, або конкретизуючи вигляд функції u^2. Так для M=0 та M=1 довільний розв'язок системи

(2.1.91) можна виразити через похідні розв'язків (однорідного) ЛОРТ. Для M=2 та M=3 знайдені часткові розв'язки системи (2.1.91), що виражаються через похідні розв'язків ЛОРТ. В результаті отримані такі розв'язки РНС (0.1):

1. $u^1 = f^1, \quad u^2 = f^2, \; u^3 = p = 0, (M=0).$ (2.1.92)

2. $u^1 = f^2_3 x_2 + f^3 + \frac{1}{2} f^1 f^2, \quad u^2 = f^1_3, \; u^3 = p = 0, \; (M=1).$ (2.1.93)

Тут і нижче $f^k = f^k(t, x_3), k=\overline{1,4}$ – довільні розв'язки ЛОРТ, тобто $f^k_t = f^k_{33}$, $f_{(n)} = \partial^n f/\partial x^n_3$, $C_1, C_2 = \text{const}$, $P^N = P^N(t, x_3)$ – поліном теплопровідності N-го порядку (див. формули (A.25), (A.26)).

3. $$u^1 = (C_1 f^1_{(N+3)} + P^N_{(1)})\, x^2_2 + (f^2_3 + C_1 f^1_{(N+1)} f^1_{(N+2)} + f^1_{(N+1)} P^N)\, x_2 + f^3 + \frac{1}{2} f^1_{(N+1)} f^2 - (C_1 f^1_{(N+2)} + P^N)\, x_3 + C_1\, (f^1_{(N+1)})^3/6 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n (f^1_{(N+1-n)} f^1_{(N-n)})_{(n)} P^N_{(n)}, \tag{2.1.94}$$

$u^2 = f^1_{(N+2)}, \; u^3 = p = 0, \; (M=2).$

4. $$u^1 = f^1_{(N+2)} x^2_2 + [\, f^2_3 + P^{2N+2}_{(N+1)} f^1_{(N+1)} \,] x_2 + f^3 + \frac{1}{2} P^{2N+2}_{(N+1)} f^2 - x_3 f^1_{(N+1)} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n (P^{2N+2}_{(N-n)} f^1_{(N-n)})_{(n)} P^{2N+2}_{(N+2+n)}, \tag{2.1.95}$$

$u^2 = P^{2N+2}_{(N+2+n)}, \quad u^3 = p = 0.$

5. $$u^1 = C_1 x^3_2 + [\, f^3_3 + \frac{3}{2} C_1 x_3\, f^1_{(N+1)} \,]\, x^2_2 + [\, f^4_3 + f^1_{(N+1)} f^3 - 3C_1 x^2_3 + \frac{3}{2} C_1 (\, f^1_{(N+1)} f^1_{(N)} x_3 - f^1_{(N+1)} f^1_{(N-1)} - f^1_{(N)} f^1_{(N)} \,)\,]\, x_2 + f^2 - x_3\, f^3 + \tag{2.1.96}$$

$$+ \frac{1}{2} f^1_{(N+1)} f^4 + C_1 [\, \frac{3}{8} f^1_{(N+1)} f^1_{(N)} f^1_{(N)} x_3 - \frac{1}{2} x^3_3 f^1_{(N+1)} \,] - \frac{9}{8} C_1 f^1_{(N-1)} f^1_{(N)} f^1_{(N+1)} + \frac{1}{8} C_1 (f^1_{(N)})^3 + \frac{1}{6} C_2 (f^1_{(N+1)})^3 +$$

$$+\ \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\ (\ f^1_{(N+1-n)}f^1_{(N-n)}\ )_{(n)}\ P^N_{(n)}\ ,$$

де $f^3 = -\ \frac{3}{4}C_1\ f^1_{(N-1)} + C_2\ f^1_{(N+2)} + P^N$,

$u^2 = f^1_{(N+2)}$, $u^3 = p = 0$, $(M=3)$.

Деякі розв'язки типу (2.1.92)-(2.1.96) наведені в [3].

Нехай $u^2=P^N(t,x_3)$. Справедливе таке очевидне твердження.

Лема 2.1.3. Якщо $f=f(t,x_3)$ - розв'язок ЛОРТ, тобто $f_t=f_{33}$, то

$$g = g(t,x_3) = \sum_{l=0}^{m}\frac{n!}{(n+l+1)!}\,t^{n+l+1}\{\partial^l_{33},x^m_3\}f, \qquad (2.1.97)$$

де $\{\partial^0_{33},x^m_3\}=x^m_3$, $\{\partial^{l+1}_{33},x^m_3\}=[\partial_{33},\{\partial^l_{33},x^m_3\}]$, $\partial_{33}=\partial^2/\partial x_3\partial x_3$, є частковим розв'язком неоднорідного ЛОРТ

$$g_t - g_{33} = t^n x^m_3 f(t,x_3).$$

В силу леми 2.1.3 загальний розв'язок системи (2.1.91) при $u^2=P^N(t,x_3)$ для довільного $M\in\mathbb{N}$ виражається через похідні розв'язків ЛОРТ.

Розв'язки рівняння (2.1.74) можна також шукати у вигляді

$$u^1 = e^{a^2t+ax_2}\sum_{m=0}^{M} g^m(t,x_3)\,x^m_2\ , \qquad (2.1.98)$$

де $a\neq0$. Після підстановки виразa (2.1.98) в рівняння (2.1.74) на функції $g^m, m=\overline{0,M}$, одержимо таку систему ДРЧП:

$$g^m_t - g^m_{33} + au^2g^m + (m+1)(u^2-2a)g^{m+1} - (m+1)(m+2)g^{m+2} = 0,$$
$$m=\overline{0,M},\quad g^{M+1} = g^{M+2} = 0. \qquad (2.1.99)$$

Розглянемо два часткових випадки.

Нехай $M=0$, тобто

$$u^1 = g^0(t,x_3)e^{a^2t+ax_2}\ , \qquad (2.1.100)$$

де функція g^0 задовольняє рівняння

$$g^0_t - g^0_{33} + au^2g^0 = 0. \qquad (2.1.101)$$

Систему (2.1.75), (2.1.101) для зручності перепишемо у вигляді:

$$f^1_t - f^1_{33} + af^2f^1 = 0, \tag{2.1.102}$$

$$f^2_t - f^2_{33} = 0, \tag{2.1.103}$$

де $f^i=f^i(t,x_3)$, $a\neq 0$.

Теорема 2.1.5. Максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності системи (2.1.102) є алгебра

$$< \partial_t,\ \ \partial_3,\ \ D^4 = 2t\partial_t + x_3\partial_3 -2f^2\partial_{f^2},\ \ f^1\partial_{f^1},$$

$$S^2 = atf^1\partial_{f^1} - \partial_{f^2} >. \qquad (2.1.103)$$

Теорема 2.1.5 доводиться з допомогою стандартного алгоритма Лі.

Точні розв'язки системи (2.1.102) можна побудувати, редукуючи її по нееквівалентних одновимірних підалгебрах

$$\langle D^4+a_1f^1\partial_{f^1}\rangle,\ \langle \partial_t+a_2\partial_3+a_1S^2\rangle,\ \langle \partial_3+a_2S^2\rangle,\ \langle \partial_3+a_2f^1\partial_{f^1}\rangle,$$

де $a_1\in\mathbb{R}$, $a_2\in\{-1;0;1\}$, алгебри (2.1.103), але на цьому зупинятися не будемо.

Нехай $M=1$. Тоді

$$u^1 = [g^1(t,x_3)x_2+g^0(t,x_3)]e^{a^2t+ax_2}, \tag{2.1.104}$$

де функції g^0, g^1 задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} &g^1_t - g^1_{33} + au^2g^1 = 0, \\ &g^0_t - g^0_{33} + au^2g^0 + (u^2-2a)g^1 =0. \end{aligned} \tag{2.1.105}$$

Якщо $u^2_3=bu^2$, де $b\neq 0$, тобто $u^2 = Ce^{b^2t+bx_3}$, $C=\mathrm{const}$, то

$$g^0 = g + 2atg^1 - \frac{1}{ab}g^1_3,$$

де на функцію $g=g(t,x_3)$, як і на функцію g^1, маємо рівняння:

$$g_t - g_{33} + au^2g = 0,$$

В результаті одержимо такий розв'язок РНС (0.1):

$$u^1 = [g^1(t,x_3)(x_2+2at)-\frac{1}{ab}g^1_3(t,x_3)+g(t,x_3)]e^{a^2t+ax_2},$$

$$u^2 = Ce^{b^2t+bx_3}, \quad u^3=p=0, \tag{2.1.106}$$

де функції g, g^1 задовольняють рівняння

$$f_t - f_{33} + aCe^{b^2t+bx_3}f = 0. \tag{2.1.107}$$

Теорема 2.1.6. Максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності системи (2.1.102) є алгебра

$$< \partial_t - b\partial_3, \quad f\partial_f, \quad \tilde{f}(t,x_3)\partial_f >, \tag{2.1.108}$$

де $\tilde{f}$ - довільний розв'язок рівняння (2.1.107).

Теорема 2.1.6 доводиться з допомогою стандартного алгоритма Лі.

Редукцією по одновимірній підалгебрі $<\partial_t-b\partial_3+a_1f\partial_f>$ алгебри (2.1.108) побудуємо такий розв'язок рівняння (2.1.107):

$$f = e^{a_1t}\phi(\omega), \tag{2.1.109}$$

де

$$\phi = e^{\frac{1}{2}\omega}\left[C_1I_\nu(2\tilde{C}^{1/2}e^{\frac{1}{2}\omega}) + C_2K_\nu(2\tilde{C}^{1/2}e^{\frac{1}{2}\omega}) \right], \quad \text{якщо} \quad \tilde{C}>0,$$

$$\phi = e^{\frac{1}{2}\omega}\left[C_1J_\nu(2(-\tilde{C})^{1/2}e^{\frac{1}{2}\omega}) + C_2Y_\nu(2(-\tilde{C})^{1/2}e^{\frac{1}{2}\omega}) \right], \quad \text{якщо} \quad \tilde{C}<0,$$

$$\omega = b^2t + bx_3, \quad \tilde{C} = ab^{-2}C, \quad \nu = (1+4ab^{-2})^{1/2};$$

тут J_ν, Y_ν - функції Бесселя дійсної змінної,

I_ν, K_ν - функції Бесселя уявної змінної.

Підставивши вираз (2.1.109) замість функцій g, g^1 в формулу (2.1.106), отримаємо розв'язок РНС (0.1) в замкненій формі.

§ 2. Про загальний розв'язок та симетрію рівнянь Нав'є-Стокса з додатковою умовою $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = \vec{0}$.

В [53] запропоновано таку лінеаризацію РНС (0.1):

$$\vec{u}_t - \Delta\vec{u} + \vec{\nabla}p = \vec{0}, \tag{2.2.1}$$

$$\operatorname{div}\vec{u} = 0. \tag{2.2.2}$$

$$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = \vec{0}, \tag{2.2.3}$$

ДЕякі розв'язки системи (2.2.1)-(2.2.3) побудовані в роботах [15,66,82].

Якщо $(\vec{u},p)$ - розв'язок системи (2.2.1)-(2.2.3), то з рівнянь (2.2.3) випливає, що $\det\{u^a_b\}_{a,b=1,3} = 0$, тобто $\operatorname{rank}\{u^a_b\}_{a,b=1,3} < 3$. По аналогії з [46] введемо означення.

Означення I. Розв'язок $(\vec{u},p)$ системи (2.2.1)-(2.2.3) назвемо біжучою хвилею рангу один (два) в області $D \subset \mathbb{R}^4$, якщо

$$\operatorname{rank}\{u^a_b\}_{a,b=1,3} = 1 \quad (\operatorname{rank}\{u^a_b\}_{a,b=1,3} = 2)$$

в області D.

Теорема 2.2.1. У системи (2.2.1)-(2.2.3) немає розв'язків типу біжучої хвилі рангу два.

Доведення проведемо від супротивного. Фіксуємо точку $x=(t,\vec{x})$. Нехай $(\vec{u},p)$ - розв'язок системи (2.2.1)-(2.2.3) і $\operatorname{rank}\{u^a_b\} = 2$ в околі цієї точки. Без обмеження загальності можна вважати, що $\operatorname{rank}\{u^i_b\} = 2$ в можливо меншому околі. Тоді в деякому околі точки x $u^3=F(u^1,u^2,u^3)$. Розглянемо два випадки.

1. В околі точки x $\det\{u^i_j\}\neq 0$. Зробимо перетворення годографа:

$\tau=t$, $y_1=u^1$, $y_2=u^2$, $y_3=x_3$ - нові незалежні змінні,

$q=p$, $v^1=x_1$, $v^2=x_2$, $v^3=u^3$ – нові залежні змінні.

Рівняння (2.2.3) в нових змінних приймають вигляд:

$$y_1 = F(y_1,y_2,\tau)v^1_{y_3}, \quad y_2 = F(y_1,y_2,\tau)v^2_{y_3}.$$

Звідси, враховуючи умову $F\neq0$, одержимо, що

$$v^1 = \frac{y_1}{F}y_3 + g^1(y_1,y_2,\tau), \quad v^2 = \frac{y_2}{F}y_3 + g^2(y_1,y_2,\tau). \tag{2.2.4}$$

Підставимо вирази (2.2.4) для функцій v^1, v^2 в рівняння (2.2.2), записане в нових змінних, і розщепимо по змінній y_3. Коефіцієнт при y_3 повинен дорівнювати нулю, в той же час він дорівнює $2/F\neq0$, тобто ми прийшли до протиріччя.

2. В околі точки x $\det\{u^i_j\}=0$. З умови сумісності системи

$$u^1u^1_1 + u^2u^1_2 + Fu^1_3 = 0,$$

$$u^1u^2_1 + u^2u^2_2 + Fu^2_3 = 0$$

як системи лінійних рівнянь відносно (u^1,u^2) випливає, що $F=0$ (інакше $\operatorname{rank}\{u^i_a\} < 2$). Тоді рівняння (2.2.2), (2.2.3) приймають вигляд:

$$u^1_1 + u^2_2 = 0, \quad u^1u^1_1 + u^2u^1_2 = 0, \quad u^1u^2_1 + u^2u^2_2 = 0$$

звідки $(u^2/u^1)_1 = (u^2/u^1)_2 = 0$ ($u^1\neq0$), а отже

$$u^1 = g(t,\omega,x_3), \quad u^2 = f(t,x_3)u^1, \tag{2.2.5}$$

де $\omega = x_2-f(t,x_3)x_1$, причому $f_3\neq0$ (інакше $\operatorname{rank}\{u^i_a\} < 2$). Так як $u^3=F=0$, то $p_3=0$, і тому

$$(u^i_t - u^i_{aa})_3 = 0. \tag{2.2.6}$$

З рівності мішаних похідних тиску p_{12} і p_{21} маємо, що

$$(u^1_t - u^1_{aa})_2 = (u^2_t - u^2_{aa})_1 . \tag{2.2.7}$$

Підставимо вирази (2.2.5) для функцій u^1, u^2 в рівняння (2.2.6) і, вважаючи t, x_1, ω, x_3 новими незалежними змінними, розщепимо отримані співвідношення по x_1. Коефіцієнт біля одночлена x_1^2 дорівнює

$$f_t g_{\omega\omega} - 3f_3 g_{\omega\omega 3} - 3f_{33} g_{\omega\omega} = 0, \qquad (2.2.8)$$

коли $i=1$, та дорівнює

$$f(f_t g_{\omega\omega} - 3f_3 g_{\omega\omega 3} - 3f_{33} g_{\omega\omega}) - 3f_3 f_3 g_{\omega\omega} = 0, \qquad (2.2.9)$$

коли $i=2$. З формул (2.2.8), (2.2.9) випливає, що $f_3 f_3 g_{\omega\omega} = 0$, тобто $g_{\omega\omega}=0$, а тому

$$u^1 = f^1(t,x_3)(x_2 - f(t,x_3)) + f^0(t,x_3), \qquad (2.2.10)$$

де f^0, f^1, f – деякі гладкі функції змінних t, x_3, які задовольняють рівняння

$$Tf_3^1 = 0, \quad T(f^1 f)_3 = 0, \quad T([1+(f)^2]f^1) = 0, \qquad (2.2.11)$$

$$Tf_3^0 = 0, \quad T(f^0 f)_3 = 0, \qquad (2.2.12)$$

причому $f^1 \neq 0$, $f \neq 0$; тут введено позначення $T := \partial_t - \partial_{33}$.

Справедлива така лема.

Лема 2.2.1. Якщо функції f, f^1 є розв'язками системи (2.2.11), то $f^1 f_3 = 0$.

Доведення. Інтегруючи перші два рівняння системи (2.2.11) по x_3, приходимо до співвідношень

$$Tf^1 = \chi^1(t), \quad T(f^1 f) = \chi^2(t), \qquad (2.2.13)$$

де $\chi^i(t)$ – довільні гладкі функції змінної t. Тоді останнє рівняння системи (2.2.11) можна переписати у вигляді

$$T[(f)^2 f^1] = - \chi^1(t). \qquad (2.2.14)$$

Нехай $f_3 \neq 0$. З рівнянь (2.2.13), (2.2.14) випливає, що

$$f^1 = (f)^{-2} H, \quad \text{де} \quad H = f\chi^2 + \tfrac{1}{2}\chi^1(1-f^2),$$

$$f_t + 3f_{33} = 3H^{-1}(\chi^2 - f\chi^1) f_3 f_3 , \qquad (2.2.15)$$

$$f_{333} = \frac{3}{4}(f_{33})^2(f_3)^{-1} + \frac{3}{2}(\chi^2 - f\chi^1)Hf_{33}f_3 + \Big[-\frac{3}{4}\chi^1 H^{-1} - -\frac{9}{8}(\chi^1 - f\chi^2)^2 H^{-2}\Big](f_3)^3 - \frac{1}{8}H^{-1}\Big[f\chi^2_t + \frac{1}{2}\chi^1_t(1-f^2)\Big] \qquad (2.2.16)$$

Очевидно, що $f^1=0$ при $\chi^1=\chi^2=0$. Наслідком рівнянь (2.2.15), (2.2.16) при $(\chi^1,\chi^2)\neq(0,0)$ є рівність $f^3=0$. Доведення цього твердження дуже громіздке, тому, не поглиблюючись в деталі, зупинимось лише на основних його моментах.

Використовуючи рівняння (2.2.15), (2.2.16), знайдемо вирази для мішаних похідних f_{t333}, f_{333t}, які будуть многочленами по f_{33}. Рівність $f_{t333} = f_{333t}$ дає функціональне співвідношення на f_{33}, f_3, f:

$$\Phi^1(f_{33},f_3,f) = 0. \qquad (2.2.17)$$

Виключаючи з допомогою рівняння (2.2.16) похідну f_{333} з рівності, отриманої в результаті диференціювання співвідношення (2.2.17) по змінній x_3, прийдемо до другого функціонального співвідношення на f_{33}, f_3, f:

$$\Phi^2(f_{33},f_3,f) = 0. \qquad (2.2.18)$$

Повторення цієї процедури з співвідношенням (2.2.18) дає ще одне функціональне співвідношення на f_{33}, f_3, f:

$$\Phi^3(f_{33},f_3,f) = 0. \qquad (2.2.19)$$

Функції Φ^a будуть многочленами по f_{33}, і при всіх викладках для доведення леми достатньо обчислювати лише коефіцієнти при одночленах, що мають по f_{33} степінь $n\in\{N^a,\ N^a-1,\ N^a-2\}$, де N^a – степінь многочлена Φ^a по змінній f_{33}.

Можна показати, що визначник

$$
\begin{vmatrix}
\Phi^1_{f_{33}} & \Phi^1_{f_3} & \Phi^1_f \\
\Phi^2_{f_{33}} & \Phi^2_{f_3} & \Phi^2_f \\
\Phi^3_{f_{33}} & \Phi^3_{f_3} & \Phi^3_f
\end{vmatrix} \neq 0,
$$

Отже $f = f(t)$, тобто $f_3 = 0$, а це неможливо.

Лема 2.2.1 доведена.

Таким чином, маємо, що $f^1 \neq 0$, $f_3 \neq 0$, бо $\mathrm{rank}\ \{ u^i_b \} = 2$, і $f^1 f_3 = 0$ в силу леми 2.2.1. Це означає, що ми прийшли до протиріччя. Доведення теореми 2.2.1 завершено.

Теорема 2.2.2. Довільний розв'язок системи (2.2.1)-(2.2.3) локально належить одній з наступних сімей :

I. $\vec{u} = (\vec{m}(t)\cdot\vec{x})\ \vec{m}(t)\times\vec{a} + \vec{n}(t)$, (2.2.20)

$p = -\frac{1}{2}\ (((\vec{m}(t)\times\vec{a}\ )\cdot\vec{x}\ )(\vec{m}(t)\cdot\vec{x}\ ))_t - \vec{n}_t(t)\cdot\vec{x} + \chi(t)$,

де $\vec{m} = \vec{m}(t)$, $\vec{n} = \vec{n}(t)$ - довільні диференційовні вектор-функції такі, що $|\vec{m}| = 1$, $\vec{m}\cdot\vec{a} = \vec{m}\cdot\vec{n} = 0$; тут і надалі $\chi=\chi(t)$, $\eta^1=\eta^1(t)$, $\eta^2=\eta^2(t)$, $\eta=\eta(t)$ - довільні диференційовні функції змінної t, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \mathrm{const}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$,

II. $\vec{u} = (v^1(t,\omega) + \eta^1(t))\vec{b} + (v^2(t,\omega) + \eta^2(t))\vec{c}$,

$p = -\eta^1_t(t)(\vec{b}\cdot\vec{x}) - \eta^2_t(t)(\vec{c}\cdot\vec{x}) + \chi(t)$, (2.2.21)

де $\omega = \vec{a}\cdot\vec{x}$, $v^1_t - v^1_{\omega\omega} = 0$, $v^2_t - v^2_{\omega\omega} = 0$;

III. $\vec{u} = (v(t,\omega_1,\omega_2) + \eta(t))\vec{c}$, $p = -\eta_t(t)(\vec{c}\,\vec{x}) + \chi(t)$, (2.2.22)

де $\omega_1 = \vec{a}\cdot\vec{x}$, $\omega_2 = \vec{b}\cdot\vec{x}$, $v_t - v_{\omega_1\omega_1} - v_{\omega_2\omega_2} = 0$.

Доведення. Легко перевірити, що сім'ї I-III дійсно є сім'ями розв'язків системи (2.2.1)-(2.2.3). Покажемо, що інших розв'язків система (2.2.1)-(2.2.3) не має.

Якщо $u^a_b = 0$ в деякій області D, то

$$\vec{u} = \vec{n}(t), \quad p = -\vec{n}_t(t)\cdot\vec{x} + \chi(t),$$

а цей розв'язок належить першій сім'ї.

Нехай $(\vec{u},p)$ – біжуча хвиля рангу 1 в околі точки $x=\{t,\vec{x}\}$. Розглянемо два випадки.

1. $u^1_1 = u^2_2 = u^3_3 = 0$ в околі точки x. Без обмеження загальності можна вважати, що $(u^3_1;u^3_2) \neq (0;0)$ в можливо меншому околі. Звідси

$$u^i = F^i(u^3,t), \quad u^1_3 = u^2_3 = 0, \quad F^1_{u^3}u^3_1 = F^2_{u^3}u^3_2 = 0.$$

З рівнянь (2.2.2), (2.2.3) отримаємо, що

$$F^i u^3_i = 0, \quad F^i_{u^3}u^3_i = 0. \qquad (2.2.23)$$

Умова сумісності рівнянь (2.2.23) як лінійних рівнянь відносно u^3_i має вигляд:

$$F^1_{u^3}F^2 - F^2_{u^3}F^1 = 0. \qquad (2.2.24)$$

а) Якщо $F^1=F^2=0$, то $p_1 = p_2 = p_{33} = 0$ і

$$u^1 = u^2 = 0, \quad u^3 = v(t,x_1,x_2) + \eta(t), \quad p = -\eta_t(t)x_3 + \chi(t),$$

де $v_t = v_{33}$, а це розв'язок з сім'ї III.

б) Якщо $F^1\neq 0$, $F^2=0$, то $u^3_1 = p_{11} = p_{33} = p_2 = 0$ і

$$u^1 = v^1(t,x_2) + \eta^1(t), \quad u^2 = 0, \quad u^3 = v^2(t,x_2) + \eta^2(t),$$

$$p = -\eta^1_t(t)x_1 - \eta^2_t(t)x_3 + \chi(t), \quad \text{де} \quad v^i_t = v^i_{22},$$

а це розв'зок з сім'ї II. Випадок $F^1=0$, $F^2\neq 0$ розглядується аналогічно.

в) Нехай $F^1\neq 0$, $F^2\neq 0$. Тодіз умови (2.2.24) випливає, що $F^2=\rho(t)F^1$, де $\rho\neq 0$. Звідси або $F^1_{u^3} \neq 0$, $F^2_{u^3} \neq 0$ (але це неможливо, бо тоді $u^3_1=u^3_2=0$), або $F^1_{u^3} = F^2_{u^3} = 0$. Тому

$$u^i = \eta^i(t), \quad u^3 = v(t,\omega), \quad p = -\eta^a_t(t)x_a + \chi(t),$$

де $\omega = x_2 - \rho(t)x_1$. З рівнянь (2.2.1) отримаємо, що

$$u^3_t - \Delta u^3 = v_t + \rho_t x_1 v_\omega - (1+\rho^2)v_{\omega\omega} = f^3_t(t). \qquad (2.2.25)$$

Вважаючи t, ω, x_1 незалежними змінними, розщепимо рівність (2.2.25) по x_1. Коефіцієнт при x_1 $\rho_t v_\omega=0$, отже $\rho_t=0$, тобто $\rho = C = \mathrm{const}$. В результаті одержимо, що

$$u^3 = v(t,\tilde{\omega}) + f^3(t),$$

де $\tilde{\omega} = (x_2-Cx_1)(1+C^2)^{-1/2}$, $v_t = v_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$, $\eta^2(t) = C\eta^1(t)$.

Це означає, що в цьому випадку $(\vec{u},p)$ – розв'язок з сім'ї II.

2. $(u^1_1;u^2_2;u^3_3) \neq (0;0;0)$ в околі точки x. Без обмеження загальності можна вважати, що $u^3_3\neq 0$ в можливо меншому околі. Звідси $u^i=F^i(u^3,t)$. Зробимо перетворення годографа:

$\tau = t$, $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = u^3$ – нові незалежні змінні,

$q = p$, $v^1 = u^1$, $v^2 = u^2$, $v^3 = x_3$ – нові залежні змінні.

В нових змінних рівняння (2.2.2), (2.2.3) мають вигляд:

$$F^i_{y_3} v^3_{y_i} = 1, \quad F^i v^3_{y_i} = y_3. \qquad (2.2.26)$$

Введемо позначення:

$$\delta = F^1_{y_3} F^2 - F^1 F^2_{y_3} .$$

а) Нехай $\delta\neq 0$. Тоді з рівнянь (2.2.26) випливає, що

$$v^3 = G^1(y_3,\tau)y_1 + G^2(y_3,\tau)y_2 + G^0(y_3,\tau), \qquad (2.2.27)$$

де

$$G^1 = (F^2 - F^2_{y_3} y_3)/\delta, \quad G^2 = - (F^1 - F^1_{y_3} y_3)/\delta.$$

Звідси $G^1_{y_3} = F^2 H(y_3,\tau)$, $G^2_{y_3} = - F^1 H(y_3,\tau)$. Тому , якщо $G^1_{y_3} = 0$, $G^2_{y_3} \neq 0$, то $F^2 = 0$ і $\delta = 0$. Аналогічно, якщо $G^1_{y_3} \neq 0$, $G^2_{y_3} = 0$, то $F^1 = 0$ і $\delta = 0$. Отже, можливі лише такі випадки: $G^1_y \neq 0$, $G^2_{y_3} \neq 0$ та $G^1_{y_3} = G^2_{y_3} = 0$.

Рівняння (2.2.1) в нових змінних мають вигляд:

$$\begin{cases} F^i_\tau + (F^i_{y_3} + v^3_{y_i})[Tu^3] - F^i_{y_i y_i} (1 + v^3_{y_j} v^3_{y_j})/(v^3_{y_3})^2 + q_{y_i} = 0, \\ v^3_{y_3} [Tu^3] + q_{y_3} = 0, \end{cases} \tag{2.2.28}$$

де

$$[Tu^3] = - v^3_\tau/v^3_{y_3} + (v^3_{y_3 y_3} (1 + v^3_{y_j y_j}) - 2v^3_{y_3} v^3_{y_j} v^3_{y_j y_3})/(v^3_{y_3})^3.$$

З рівнянь (2.2.28), використовуючи рівність мішаних похідних $q_{y_1 y_2}$ і $q_{y_2 y_1}$, отримаємо, що

$$(F^1_{y_3} + G^1)[Tu^3]_{y_2} + 2F^1_{y_3 y_3} (1 + G^j G^j)G^2_{y_3} /(v^3_{y_3})^3 =$$
$$= (F^2_{y_3} + G^2)[Tu^3]_{y_1} + 2F^2_{y_3 y_3} (1 + G^j G^j)G^1_{y_3} /(v^3_{y_3})^3 . \tag{2.2.29}$$

Можна показати, що наслідком співвідношення (2.2.29) при $G^1_{y_3} \neq 0$, $G^2_{y_3} \neq 0$ є умова $\delta=0$. Тому обов'язково $G^1_{y_3} = G^2_{y_3} = 0$, отже $G^0_{y_3} \neq 0$ (інакше $v^3_{y_3} = 0$). З рівнянь (2.2.28) тоді випливає, що або $G^1_\tau = G^2_\tau = 0$, або $G^0_{y_3 y_3} = 0$. В першому випадку $G^i = C_i = \mathrm{const}$, $u^i = v^i(t,\omega)$, $u^3 = C_i u^i$, де $\omega = x_3 - C_i x_i$, і в результаті одержимо розв'язок з сім'ї II, а при умові $G^0_{y_3 y_3} = 0$ маємо, що $F^i_{y_3 y_3} = 0$, отже функції u^a набувають вигляду:

$$u^3 = \rho^a(t)x_a + \chi(t), \quad u^i = \eta^i(t)u^3 + \phi^i(t),$$

і розв'язок $(\vec{u},p)$ належить першій сім'ї.

б) Нехай $\delta=0$. Тоді з рівнянь (2.2.26) по теоремі Кронекера-Капеллі отримаємо, що $F^i_{y_3} y_3 = F^i$, тобто $F^i = \rho^i(t)y_3$. Повернемося до старих змінних. Рівняння (2.2.2), (2.2.3) еквiвалентні рівнянню

$$\rho^i(t)u^3_i + u^3_i = 0,$$

звідки $u^3 = v(t,\omega_1,\omega_2)$, де $\omega_i = x_i - \rho^i(t)x_3$. Якщо $\rho^i_t = 0$, то в результаті отримаємо розв'язок, що належить сім'ї III. Якщо $\rho^1_t \neq 0$ або $\rho^2_t \neq 0$, то $v_{\omega_i\omega_j} = 0$, і розв'язок належить першій сім'ї.

Теорема 2.2.2 доведена.

Теорема 2.2.3. Максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності системи (2.2.1)-(2.2.3) є алгебра

$$\begin{aligned}
< \ & \partial_t, \ \partial_a, \ Z(\chi) = \chi(t)\partial_p, \ I^1 = u^a\partial_{u^a} + p\partial_p \\
& J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a + u^a\partial_{u^b} - u^b\partial_{u^a}, \\
& D^1 = 2t\partial_t + x_a\partial_a + u^a\partial_{u^a} \ >.
\end{aligned} \tag{2.2.30}$$

При доведенні теореми 2.2.3 стандартний алгоритм Лі є малоефективним, тому що система (2.2.1)-(2.2.3) сильно перевизначена і має багато нетривіальних диференційних наслідків, а це ускладнює перехід на многовид в алгоритмі Лі. Дещо модифікуємо цей алгоритм.

Для системи (2.2.1)-(2.2.3) критерій інваріантності набуває вигляду:

$$\underset{2}{Q}(u^a_t - u^a_{bb} + p_a) = 0, \quad \underset{1}{Q}(u^a_a) = 0, \quad \underset{1}{Q}(u^b u^a_b) = 0, \tag{2.2.31}$$

якщо $(\vec{u},p)$ - розв'язок системи (2.2.1)-(2.2.3); тут $\underset{k}{Q}$ - стандартне продовження оператора Q k-го порядку [60]. Замість того, щоб переходити на многовид, підставимо в співвідношення (2.2.31) деяку багатопараметричну сім'ю розв'язків системи (2.2.1)-(2.2.3), наприклад, сім'ю (2.2.21), і проведемо розщеплення по всім параметрам, використовуючи їх довільність. В результаті отримаємо визначальні рівняння, з яких випливає, що довільний оператор ліївської симетрії міститься в алгебрі (2.2.30). Легко перевірити, що всі базисні елементи цієї алгебри є операторами ліївської симетрії, а це означає, що алгебра (2.2.30) – максимальна в сенсі Лі алгебра інваріантності системи (2.2.1)–(2.2.3).

Теорема 2.2.3 доведена.

§ 3 Сім'ї розв'язків рівнянь Нав'є-Стокса, що представляються у вигляді суми експонент.

В цьому параграфі розв'язки РНС (0.1) будемо шукати у вигляді:

$$\vec{u} = \sum_{n=1}^{N} \vec{a}_n \exp(|\vec{b}_n|^2 t + \vec{b}_n \cdot \vec{x}) , \qquad (2.3.1)$$

де $\vec{a}_n$, $\vec{b}_n$ = const, $\vec{a}_n \neq 0$, $\vec{b}_n \neq \vec{b}_m$, коли $n \neq m$, $n,m=\overline{1,N}$, вектори $\vec{a}_n$, $\vec{b}_n$ та тиск p визначаються з РНС (0.1). Деякі розв'язки типу (2.3.1) отримані в § 2.1 (див. формули (2.1.20), (2.1.22)). Поле Нав'є-Стокса, що задається формулою (2.3.1), задовольняє рівняння

$$\vec{u}_t - \Delta\vec{u} = 0, \qquad (2.3.2)$$

а тому

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{0}, \qquad (2.3.3)$$

звідки

$$\mathrm{rot} ((\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}) = \vec{0}. \qquad (2.3.4)$$

Це означає, що поле Нав'є-Стокса (2.3.1) відноситься до так званих узагальнених течій Бельтрамі [102,104], для яких виконується додаткова умова (2.3.4).

Якщо всі вектори $\vec{a}_n$ колінеарні між собою, то розв'язок (2.3.1) РНС (0.1) належить сім'ї (2.2.22). У випадку, коли всі вектори $\vec{b}_n$ колінеарні між собою, маємо розв'язок з сім'ї (2.2.21). Такі розв'язки будемо вважати тривіальними. Знайдемо деякі нетривіальні розв'язки (2.3.1) РНС (0.1).

З умови соленоїдальності поля Нав'є-Стокса $\mathrm{div}\vec{u}=0$ випливає, що

$$\vec{a}_n \cdot \vec{b}_n = 0 \qquad (2.3.5)$$

для довільного $n=\overline{1,N}$ (сумування по індексу n в формулі (2.3.5) не проводиться). Після підстановки виразу (2.3.1) для поля $\vec{u}$ в рівняння (2.3.4) отримаємо таке співвідношення:

$$\sum_{n<m} ((\vec{a}_m\cdot\vec{b}_n)\vec{a}_n + (\vec{a}_n\cdot\vec{b}_m)\vec{a}_m)\times(\vec{b}_n+\vec{b}_m)\cdot \cdot\exp\{ (|\vec{b}_n|^2+|\vec{b}_m|^2)t + (\vec{b}_n+\vec{b}_m)\cdot\vec{x} \} = \vec{0}. \qquad (2.3.6)$$

Нехай N=2. Тоді співвідношення (2.3.6) можна переписати у вигляді:

$$((\vec{a}_2\cdot\vec{b}_1)\vec{a}_1 + (\vec{a}_1\cdot\vec{b}_2)\vec{a}_2)\times(\vec{b}_1+\vec{b}_2) = \vec{0}, \qquad (2.3.7)$$

або

$$(\vec{a}_2\cdot\vec{b}_1)\vec{a}_1 + (\vec{a}_1\cdot\vec{b}_2)\vec{a}_2 = \alpha(\vec{b}_1+\vec{b}_2) \qquad (2.3.8)$$

де α - деякий коефіцієнт пропорційності. Домножимо скалярно рівність (2.3.8) на вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_1\times\vec{a}_2$. В результаті одержимо рівняння:

$$(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_1)(\vec{a}_2\cdot\vec{b}_1) + (\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2-\alpha)(\vec{a}_1\cdot\vec{b}_2) = 0, \qquad (2.3.9)$$

$$(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2-\alpha)(\vec{a}_2\cdot\vec{b}_1) + (\vec{a}_2\cdot\vec{a}_2)(\vec{a}_1\cdot\vec{b}_2) = 0, \qquad (2.3.10)$$

$$\alpha(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\cdot(\vec{b}_1+\vec{b}_2) = \vec{0}. \qquad (2.3.11)$$

Рівняння (2.3.9), (2.3.10) можна розглядувати як систему лінійних рівнянь відносно невідомих $\beta_1=\vec{a}_2\cdot\vec{b}_1$, $\beta_2=\vec{a}_1\cdot\vec{b}_2$, причому $(\beta_1,\beta_2)\neq(0,0)$ (інакше вектори $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ або вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ колінеарні). Тому визначник цієї системи дорівнює нулю:

$$(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_1)(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_2) - (\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2-\alpha)^2 = 0, \qquad (2.3.12)$$

або

$$\alpha = \vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 \pm |\vec{a}_1||\vec{a}_2|. \qquad (2.3.12)$$

Так як вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ неколінеарні, $\alpha\neq0$. Тоді з рівнянь (2.3.9)-

(2.3.11) отримаємо рівняння для визначення векторів $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$:

$$|\vec{a}_1|(\vec{a}_2\cdot\vec{b}_1) = \pm\, |\vec{a}_2|(\vec{a}_1\cdot\vec{b}_2), \qquad (\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\cdot(\vec{b}_1+\vec{b}_2) = \vec{0},$$

які дають, що

$$\vec{b}_1 = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_3, \quad \vec{b}_2 = \pm\,\alpha_1\vec{e}_2 - \alpha_2\vec{e}_3,$$

де

$$\vec{e}_1 = \frac{(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\times\vec{a}_1}{|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|}, \quad \vec{e}_2 = -\frac{(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\times\vec{a}_2}{|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{a}_1\times\vec{a}_2}{|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|}, \tag{2.3.13}$$

α_i – довільні константи. Відповідне поле Нав'є-Стокса має вигляд:

$$\vec{u} = e^{-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)t}\left[\vec{a}_1 e^{(\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_3)\cdot\vec{x}} + \vec{a}_2 e^{(\pm\alpha_1\vec{e}_2-\alpha_2\vec{e}_3)\cdot\vec{x}}\right]. \tag{2.3.14}$$

Звідси інтегруванням рівнянь (2.3.3) одержимо вираз для тиску:

$$p = -(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 \pm |\vec{a}_1||\vec{a}_2|)e^{2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)t+\alpha_1(\vec{e}_1\pm\vec{e}_2)\cdot\vec{x}}. \tag{2.3.15}$$

Розв'язок (2.3.14), (2.3.15) узагальнюється до розв'язка типу (2.3.1) РНС (0.1) з N=4:

$$\begin{aligned} 1.\ \vec{u} = {} & \vec{a}_1 \exp\{ (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)t + \alpha_2\vec{e}_3\cdot\vec{x} \}\cdot \\ & \cdot [\, C_1\exp\{ \alpha_1\vec{e}_1\cdot\vec{x} \} + C_2\exp\{ -\alpha_1\vec{e}_1\cdot\vec{x} \}\,] + \\ & + \vec{a}_2 \exp\{ (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)t - \alpha_2\vec{e}_3\cdot\vec{x} \}\cdot \\ & \cdot [\, C_3\exp\{ \alpha_1\vec{e}_2\cdot\vec{x} \} + C_4\exp\{ -\alpha_1\vec{e}_2\cdot\vec{x} \}\,], \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

$$\begin{aligned} p = {} & -\exp\{ 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)t \}\,(\, \vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 + 1)\cdot \\ & \cdot[\, C_1C_3\exp\{ \alpha_1(\vec{e}_1+\vec{e}_2)\cdot\vec{x} \} + C_2C_4\exp\{ -\alpha_1(\vec{e}_1+\vec{e}_2)\cdot\vec{x} \}\,] - \\ & -\exp\{ 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)t \}\,(\, \vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 - 1)\cdot \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

$$\cdot \left(C_1C_4\exp\{ \alpha_1(\vec{e}_1-\vec{e}_2)\cdot\vec{x} \} + C_2C_3\exp\{ -\alpha_1(\vec{e}_1-\vec{e}_2)\cdot\vec{x} \} \right),$$

де C_k, $k=\overline{1,4}$, α_i – довільні константи, $|\vec{a}_i|=1$, вектори $\vec{e}_a$, $a=\overline{1,3}$ визначаються формулами (2.3.13). Якщо $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=0$, то перепозначивши $\vec{a}_1=\vec{a}$, $\vec{a}_2=\vec{b}$, розв'язок (2.3.16), (2.3.17) можна записати в більш компактному вигляді:

$$\vec{u} = e^{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)t}\left\{ \vec{a}e^{\alpha_2\vec{c}\cdot\vec{x}}\left[C_1e^{\alpha_1\vec{b}\cdot\vec{x}} + C_2e^{-\alpha_1\vec{b}\cdot\vec{x}} \right] + \right.$$

$$\left. + \vec{b}e^{-\alpha_2\vec{c}\cdot\vec{x}}\left[C_3e^{\alpha_1\vec{a}\cdot\vec{x}} + C_4e^{-\alpha_1\vec{a}\cdot\vec{x}} \right] \right\}, \tag{2.3.18}$$

$$p = -e^{2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)t}\left[C_1e^{\alpha_1\vec{b}\cdot\vec{x}} - C_2e^{-\alpha_1\vec{b}\cdot\vec{x}} \right]\left[C_3e^{\alpha_1\vec{a}\cdot\vec{x}} - C_4e^{-\alpha_1\vec{a}\cdot\vec{x}} \right], \tag{2.3.19}$$

де C_k, $k=\overline{1,4}$, α_i – довільні константи, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.

Крім розв'язка (2.3.16), (2.3.17) вдалося знайти ще такі розв'язки типу (2.3.1) РНС (0.1):

2. $$\vec{u} = \exp(\alpha^2 t)\cdot \tag{2.3.20}$$

$$\cdot\sum_{n=1}^{N}\left(C_{n1}\exp\{ \alpha\,\vec{e}_n\cdot\vec{x} \} + C_{n2}\exp\{ -\alpha\,\vec{e}_n\cdot\vec{x} \} \right)\vec{a}_n,$$

$$p = -\exp(2\alpha^2 t)\sum_{n<m}\left\{ (\vec{a}_n\cdot\vec{a}_m - 1)\cdot \right.$$

$$\cdot\left(C_{n1}C_{m1}\exp\{ \alpha(\vec{e}_n+\vec{e}_m)\cdot\vec{x} \} + C_{n2}C_{m2}\exp\{ -\alpha(\vec{e}_n+\vec{e}_m)\cdot\vec{x} \} \right) +$$

$$+ (\vec{a}_n\cdot\vec{a}_m + 1)\cdot \tag{2.3.21}$$

$$\left.\cdot\left(C_{n1}C_{m2}\exp\{ \alpha(\vec{e}_n-\vec{e}_m)\cdot\vec{x} \} + C_{n2}C_{m1}\exp\{ -\alpha(\vec{e}_n-\vec{e}_m)\cdot\vec{x} \} \right) \right\},$$

де C_{ni}, $n=\overline{1,N}$, α – довільні константи, $|\vec{a}_n|=|\vec{d}|=1$, $\vec{a}_n\cdot\vec{d}=0$, $\vec{e}_n=\vec{a}_n\times\vec{d}$ для довільного $n=\overline{1,N}$.

3. $\vec{u} = \exp(2\alpha^2 t)\cdot$

$$\cdot\ \left(C_1\exp\{\alpha(\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{x}\}\vec{a} + C_2\exp\{\alpha(\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{x}\}\vec{b} + C_3\exp\{\alpha(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{x}\}\vec{c}\ \right),$$

$$p = -\exp(\ 4\alpha^2 t\ )\ \cdot$$

$$\cdot\left(C_1C_2\exp\{\alpha(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{x}\} + C_2C_3\exp\{\alpha(\vec{c}-\vec{b})\cdot\vec{x}\} + C_3C_1\exp\{\alpha(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{x}\}\ \right),$$

де C_1, C_2, C_3, α – довільні константи, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.

Можна побудувати аналоги розв'язків (2.3.16)-(2.3.17), (2.3.18)-(2.3.19), (2.3.20)-(2.3.21) з тригонометричними функціями:

$$1.\ \vec{u} = e^{(\alpha_2^2-\alpha_1^2)t}\Big\{ \vec{a}_1 e^{\alpha_2\vec{e}_3\cdot\vec{x}}\ (\ C_1\cos\{\alpha_1\vec{e}_1\cdot\vec{x}\} + C_2\sin\{\alpha_1\vec{e}_1\cdot\vec{x}\}\ ) +$$

$$+ \vec{a}_2 e^{-\alpha_2\vec{e}_3\cdot\vec{x}}\ (\ C_3\cos\{\alpha_1\vec{e}_2\cdot\vec{x}\} + C_4\sin\{\alpha_1\vec{e}_2\cdot\vec{x}\}\ )\Big\}, \tag{2.3.23}$$

$$p = -\frac{1}{2}e^{2(\alpha_2^2-\alpha_1^2)t}\Big\{ (\vec{a}_n\cdot\vec{a}_m+1)(C_1C_3-C_2C_4)\cos\{\alpha_1(\vec{e}_1+\vec{e}_2)\cdot\vec{x}\} +$$

$$+ (\vec{a}_n\cdot\vec{a}_m-1)(C_1C_3+C_2C_4)\cos\{\alpha_1(\vec{e}_2-\vec{e}_1)\cdot\vec{x}\} +$$

$$+ (\vec{a}_n\cdot\vec{a}_m+1)(C_1C_4+C_2C_3)\sin\{\alpha_1(\vec{e}_1+\vec{e}_2)\cdot\vec{x}\} +$$

$$+ (\vec{a}_n\cdot\vec{a}_m-1)(C_1C_4-C_2C_3)\sin\{\alpha_1(\vec{e}_2-\vec{e}_1)\cdot\vec{x}\}\Big\},$$

де C_k , $k=\overline{1,4}$, α_i – довільні константи, $|\vec{a}_i|=1$, вектори $\vec{e}_a$, $a=\overline{1,3}$ визначаються формулами (2.3.13).

$$2.\ \vec{u} = e^{(\alpha_2^2-\alpha_1^2)t}\Big\{ \vec{a}e^{\alpha_2\vec{c}\cdot\vec{x}}\ (\ C_1\cos\{\alpha_1\vec{b}\cdot\vec{x}\} + C_2\sin\{\alpha_1\vec{b}\cdot\vec{x}\}\ ) +$$

$$+ \vec{b}e^{-\alpha_2\vec{c}\cdot\vec{x}}\ (\ C_3\cos\{\alpha_1\vec{a}\cdot\vec{x}\} + C_4\sin\{\alpha_1\vec{a}\cdot\vec{x}\}\ )\Big\}, \tag{2.3.24}$$

$$p = e^{2(\alpha_2^2-\alpha_1^2)t}\ (\ C_1\sin\{\alpha_1\vec{b}\cdot\vec{x}\} - C_2\cos\{\alpha_1\vec{b}\cdot\vec{x}\}\ )\cdot$$

$$\cdot\ (\ C_3\cos\{\alpha_1\vec{a}\cdot\vec{x}\} + C_4\sin\{\alpha_1\vec{a}\cdot\vec{x}\}\ ),$$

де C_1, C_2, C_3, α – довільні константи, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$.

3. $\vec{u} = \exp(-\alpha^2 t) \cdot$ (2.3.25)

$$\cdot \sum_{n=1}^{N} [\, C_{n1}\cos(\alpha\, \vec{e}_n \cdot \vec{x}) + C_{n2}\sin(\alpha\, \vec{e}_n \cdot \vec{x}) \,]\, \vec{a}_n ,$$

$$p = -\frac{1}{2}\exp(-2\alpha^2 t) \sum_{n<m} \Big\{$$

$$(\vec{a}_n\cdot\vec{a}_m - 1)\,(C_{n1}C_{m1} - C_{n2}C_{m2})\cos(\alpha(\vec{e}_n+\vec{e}_m)\cdot\vec{x}) +$$

$$+ (\vec{a}_n\cdot\vec{a}_m + 1)\,(C_{n1}C_{m1} + C_{n2}C_{m2})\cos(\alpha(\vec{e}_n-\vec{e}_m)\cdot\vec{x}) +$$

$$+ (\vec{a}_n\cdot\vec{a}_m - 1)\,(C_{n2}C_{m1} + C_{n1}C_{m2})\sin(\alpha(\vec{e}_n+\vec{e}_m)\cdot\vec{x}) +$$

$$+ (\vec{a}_n\cdot\vec{a}_m + 1)\,(C_{n2}C_{m1} - C_{n1}C_{m2})\sin(\alpha(\vec{e}_n-\vec{e}_m)\cdot\vec{x}) \Big\},$$

де C_{ni}, $n=\overline{1,N}$, α – довільні константи, $|\vec{a}_n| = |\vec{d}| = 1$, $\vec{a}_n\cdot\vec{d} = 0$, $\vec{e}_n = \vec{a}_n\times\vec{d}$, для довільного $n=\overline{1,N}$.

Зауваження 2.3.1. Всі розв'язки РНС (0.1), побудовані в цьому параграфі, є неліївськими.

§ 4. Ліївська симетрія деяких ситем ДРЧП, пов'язаних з рівняннями Нав'є-Стокса.

Ліївська симетрія рівнянь Нав'є-Стокса добре відома [2,4,5,14,85]. Але існує багато цікавих систем ДРЧП, пов'язаних з РНС (0.1), для яких симетрія ще не досліджена. В цьому параграфі знайдені максимальні в сенсі Лі алгебри інваріантності декількох таких систем. В одному випадку це дозволило знайти нелокальне перетворення симетрії плоского РНС. Всі результати по вивченню симетріфних властивостей отримані з допомогою стандартного алгоритма Лі.

Лема І. Довільне соленоїдальне поле $\vec{u}=\vec{u}(t,x)$ ($\mathrm{div}\,\vec{u}=0$) локально можна представити у вигляді:

$$\vec{u} = \vec{\nabla} f^1 \times \vec{\nabla} f^2 , \qquad (2.4.1)$$

де $f^i=f^i(t,\vec{x})$ - деякі гладкі функції.

Доведення. Для векторного поля $\vec{u}=\vec{0}$ твердження теореми очевидне. Нехай $\vec{u}\neq\vec{0}$ в деякому околі точки $x=(t,\vec{x})$. Для довільних двох незалежних інтегралів $\tilde{f}^i=\tilde{f}^i(t,\vec{x})$ лінійного ДРЧП

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla} f = 0$$

маємо рівність:

$$\vec{u} = g\, \vec{\nabla}\tilde{f}^1 \times \vec{\nabla}\tilde{f}^2 , \qquad (2.4.2)$$

де $g=g(t,\vec{x})$ - гладка функція своїх змінних, явний вигляд якої залежить від вибору інтегралів $\tilde{f}^i=\tilde{f}^i(t,\vec{x})$. З формули (2.4.2) випливає, що

$$\mathrm{div}\,\vec{u} = \vec{\nabla} g \cdot (\vec{\nabla}\tilde{f}^1 \times \vec{\nabla}\tilde{f}^2) = 0,$$

а тому $g=G(\tilde{f}^1,\tilde{f}^2,t)$. Нехай $\tilde{f}^i=F^i(f^1,f^2,t)$. Тоді

$$\vec{u} = (F^1_{f^1}F^2_{f^2} - F^1_{f^2}F^2_{f^1})\, G(F^1,F^2,t)\, \vec{\nabla} f^1 \times \vec{\nabla} f^2 = \vec{\nabla} \tilde{f}^1 \times \vec{\nabla} \tilde{f}^2,$$

якщо $(F^1_{f^1}F^2_{f^2} - F^1_{f^2}F^2_{f^1})\, G(F^1,F^2,t) = 1.$

Лема 2.4.1 доведена.

Зауваження 2.4.1. Якщо $\tilde{f}^i = F^i(f^1,f^2,t)$, то

$$\vec{\nabla}\tilde{f}^1 \times \vec{\nabla}\tilde{f}^2 = \vec{\nabla} f^1 \times \vec{\nabla} f^2$$

тоді і тільки тоді, коли $(F^1_{f^1}F^2_{f^2} - F^1_{f^2}F^2_{f^1}) = 1.$

Після підстановки виразу (2.4.1) в РНС (0.1) приходимо до еквівалентної їм системи ДРЧП:

$$(\vec{\nabla} f^1 \times \vec{\nabla} f^2)_t + ((\vec{\nabla} f^1 \times \vec{\nabla} f^2)\cdot\vec{\nabla})\, \vec{\nabla} f^1 \times \vec{\nabla} f^2 - \Delta (\vec{\nabla} f^1 \times \vec{\nabla} f^2) + \vec{\nabla} p = \vec{0}. \qquad (2.4.3)$$

Теорема 7. Максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності рівнянь (2.4.3) є нескінченновимірна алгебра, що породжується базисними елементами

$$\partial_t ,\ \partial_a ,\ D^1 = 2t\partial_t + x_a\, \partial_a + f^1\, \partial_{f^1} - 2p\, \partial_p , \qquad (2.4.4)$$

$$J^1_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a ,\ Z(\chi) = \chi(t)\partial_p ,\ E(G) = G_{f^2}\, \partial_{f^1} - G_{f^1}\, \partial_{f^2} ,$$

де $G=G(f^1,f^2,t)$, $\chi=\chi(t)$ – довільні гладкі функції.

Так як поле Нав'є-Стокса соленоїдальне, то його можна також представити у вигляді

$$\vec{u} = \mathrm{rot}\, \vec{v}, \qquad (2.4.5)$$

де $\vec{v} = \vec{v}(t,\vec{x})$. Підставимо вираз (2.4.5) в РНС (I). В результаті отримаємо еквівалентну їм систему ДРЧП:

$$(\mathrm{rot}\, \vec{v})_t + ((\mathrm{rot}\, \vec{v})\cdot\vec{\nabla})\, \mathrm{rot}\, \vec{v} - \Delta (\mathrm{rot}\, \vec{v}) + \vec{\nabla} p = \vec{0} . \qquad (2.4.6)$$

Теорема 7. Максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності рівнянь (2.4.6) є алгебра

$< \partial_t ,\ D^2 = 2t\, \partial_t + x_a\, \partial_a - 2\, p\, \partial_p ,$

$$J^2_{ab} = x_a\,\partial_b - x_b\,\partial_a + v^a\,\partial_{v^b} - v^b\,\partial_{v^a}\,, \qquad (2.4.7)$$

$$R^1(\vec{m}(t)) = m^a(t)\,\partial_a + \tfrac{1}{2}(\vec{m}_t(t)\times\vec{x})^a\,\partial_{v^a} - m^a_{tt}(t)x_a\,\partial_p\,,$$

$$Z(\chi(t)) = \chi(t)\,\partial_p\,,\quad S(f) = f_a(t,\vec{x})\,\partial_{v^a}\ \rangle\,,$$

де $m^a=m^a(t)$, $\chi=\chi(t)$, $f=f(t,\vec{x})$ – довільні гладкі функції своїх аргументів.

Розглянемо рівняння Гельмгольца [23], яке отримується з РНС (0.1) з допомогою операції rot:

$$\begin{aligned} &\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{u} - \Delta\,\vec{u} = 0, \\ &\vec{v} = \mathbf{rot}\,\vec{u}\,,\ \mathbf{div}\,\vec{u} = 0. \end{aligned} \qquad (2.4.8)$$

Теорема 8. Максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності системи (2.4.8) є алгебра

$$\langle\ \partial_t\,,\ D^3 = 2t\,\partial_t + x_a\,\partial_a - u^a\,\partial_{u^a} - 2v^a\,\partial_{v^a}\,, \qquad (2.4.9)$$

$$J^3_{ab} = x_a\,\partial_b - x_b\,\partial_a + u^a\,\partial_{u^b} - u^b\,\partial_{u^a} + v^a\,\partial_{v^b} - v^b\,\partial_{v^a}\,,$$

$$R^2(\vec{m}(t)) = m^a(t)\,\partial_a + m^a_t(t)\,\partial_{u^a}\ \rangle\,,$$

де $m^a=m^a(t)$ – довільні гладкі функції змінної t.

Істотне розширення ліївської симетрії рівнянь Гельмгольца отримується в плоскому випадку, в якому рівняння Гельмгольца набувають вигляду:

$$\begin{aligned} &w_t + u^i\,w_i - w_{ii} = 0, \\ &w = u^2_1 - u^1_2\,,\ u^1_1 + u^2_2 = 0, \end{aligned} \qquad (2.4.10)$$

де $u^i=u^i(t,x_1,x_2)$, $w=w(t,x_1,x_2)$.

Теорема 9. Максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності системи (2.4.10) є алгебра

$$\langle\ \partial_t\,,\ D^4 = 2t\,\partial_t + x_i\,\partial_i - u^i\,\partial_{u^i} - 2w\,\partial_w\,,$$

$$J^4 = x_1\,\partial_2 - x_2\,\partial_1 + u^1\,\partial_{u^2} - u^2\,\partial_{u^1}\,,$$

$$R^3(m^1(t),m^2(t)) = m^i(t)\,\partial_i + m^i_t(t)\,\partial_{u^i}\,, \tag{2.4.11}$$

$$J^5 = tJ^4 + x_1\,\partial_{u^2} - x_2\,\partial_{u^1} + 2\,\partial_w > ,$$

де $m^i = m^i(t)$ – довільні гладкі функції змінної t.

Оператор J^5 породжує такі перетворення [1]:

$$\tilde{t} = t,\quad \tilde{w} = w + 2\varepsilon\,, \tag{2.4.12}$$

$$\tilde{x}_1 = x_1\cos\varepsilon t - x_2\sin\varepsilon t\,;\quad \tilde{x}_2 = x_1\sin\varepsilon t + x_2\cos\varepsilon t\,,$$

$$\tilde{u}^1 = u^1\cos\varepsilon t - u^2\sin\varepsilon t - \varepsilon x_1\sin\varepsilon t - \varepsilon x_2\cos\varepsilon t\,,$$

$$\tilde{u}^2 = u^1\sin\varepsilon t + u^2\cos\varepsilon t + \varepsilon x_1\cos\varepsilon t - \varepsilon x_2\sin\varepsilon t\,,$$

де ε – параметр. Плоскі рівняння Нав'є-Стокса не інваріантні відносно перетворень (2.4.12), так як тиск при цьому повинен перетворюватися по формулі:

$$\tilde{p} = p + 2\varepsilon\int(u^2\,dx_1 - u^1\,dx_2) + \varepsilon^2(x_1^2 + x_2^2) \tag{2.4.13}$$

§ 5. Q-умовна інваріантність рівнянь Нав'-Стокса.

Задача знаходження операторів Q-умовної симетрії деякого рівняння, що не належать максимальній в сенсі Лі алгебрі інваріантності цього рівняння, є набагато складнішою за задачу дослідження ліївської симетрії. Це пояснюється нелінійністю визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора Q-умовної симетрії (в стандартному алгоритмі Лі вони завжди лінійні), а також їх меншою в порівнянні з ліївським алгоритмом кількістю. Задача дослідження Q-умовної симетрії стає ще складнішою, коли необхідно розглянути не одне рівняння, а систему ДРЧП, наприклад, РНС (0.1). Тому виникає потреба попередньо звузити клас операторів, в якому розв'язується задача, тобто накласти на коефіцієнти операторів додаткові умови. Один з типів таких умов - апріорне задання деяких з коефіцієнтів.

Знайдемо оператори Q-умовної інваріантності РНС (0.1), що мають вигляд:

$$Q = \partial_t + u^a\partial_a + \eta^a\partial_{u^a} + \phi\partial_p , \tag{2.5.1}$$

де $\eta^a=\eta^a(t,\vec{x},\vec{u},p)$, $\phi=\phi(t,\vec{x},\vec{u},p)$.

Теорема 2.5.1. РНС (0.1) Q-умовно інваріантні відносно оператора Q (2.5.1) при довільних гладких функціях η^a, ϕ.

Доведення. РНС (0.1) з врахуванням умов $Q\vec{u}=0$, $Qp=0$, тобто

$$u^a_0 + u^b u^a_b = \eta^a, \tag{2.5.2}$$

$$p_0 + u^b p_b = \phi, \tag{2.5.3}$$

можна переписати у вигляді:

$$\eta^a - u^a_{bb} + p_a = 0, \tag{2.5.4}$$

$$u^a_a = 0. \tag{2.5.5}$$

Через $\underset{2}{Q}$ позначимо стандартне продовження оператора Q друтого порядку [35,36,60], через D_μ – повну похідну по змінній x_μ, тобто

$$D_\mu = \partial_\mu + u^a_\mu \partial_{u^a} + p_\mu \partial_p + u^a_{\nu\mu} \partial_{u^a_\nu} + p_{\nu\mu} \partial_{p_\nu} + \dots \quad .$$

З критерію Q-умовної інваріантності [60]

$$\underset{2}{Q} \left(u^a_0 + u^b u^a_b - u^a_{bb} + p_a \right) \Big|_{\text{РНС},\ Q\vec{u}=\vec{0},\ Qp=0} = 0,$$

$$\underset{2}{Q} \left(u^a_a \right) \Big|_{\text{РНС},\ Q\vec{u}=\vec{0},\ Qp=0} = 0,$$

на функції η^a, ϕ отримаємо такі рівняння

$$D_0\eta^a - u^c_0 u^a_c + \eta^b u^a_b + u^b (D_b\eta^a - u^c_b u^a_c) - D_{bb}\eta^a +$$
$$+ u^c_{bb} u^a_c + 2u^c_b u^a_{cb} + D_a\sigma - u^c_a p_c = 0, \qquad (2.5.6)$$

$$D_a\eta^a - u^c_a u^a_c = 0. \qquad (2.5.7)$$

Покажемо, що рівняння (2.5.6), (2.5.7) є диференційними наслідками рівнянь (2.5.2)-(2.5.5). Застосовуючи диференціювання та алгебраїчні операції до рівнянь (2.5.2)-(2.5.5), одержимо співвідношення

$$u^a_{0cc} + u^b_{cc} u^a_b + 2u^b_c u^a_{bc} + u^b u^a_{bcc} - D_{cc}\eta^a = 0, \qquad (2.5.8)$$

$$D_0\eta^a - u^a_{bb0} + p_{a0} = 0, \qquad (2.5.9)$$

$$u^c D_c\eta^a - u^c u^a_{bbc} + u^c p_{ac} = 0, \qquad (2.5.10)$$

$$D_a\sigma - p_{0a} - u^b_a p_b - u^b p_{ab} = 0, \qquad (2.5.11)$$

$$D_a\eta^a - u^a_{a0} - u^b_a u^a_b - u^b u^a_{ab} = 0, \qquad (2.5.12)$$

$$u^a_{a0} = 0, \qquad (2.5.13)$$

$$u^b u^a_{ab} = 0. \qquad (2.5.14)$$

Легко бачити,що рівняння (2.5.6) є сумою співвідношень (2.5.8)-(2.5.11), а рівняння (2.5.7) - сумою співвідношень (2.5.12)-(2.5.14).

Доведення теореми 2.5.1 завершено.

ДОДАТОК А. Q-умовна інваріантність лінійного одновимірного рівняння теплопровідності.

Тут детально розглянуто простий, але нетривіальний приклад, як знайти і використати Q-умовну симетрію лінійного одновимірного рівняння теплопровідності (ЛОРТ)

$$u_t = u_{xx} \tag{A.1}$$

($u = u(t,x)$, $u_t = \partial u/\partial t$, $u_x = \partial u/\partial x$ і т. д., $x \in \mathbb{R}$). Рівняння (A.1) є одним з основних рівнянь математичної фізики. До нього зводяться ряд рівнянь Фоккера-Планка [97], в багатьох випадках до ЛОРТ (A.1) редукуються РНС (0.1) [15,22,40,59,66,72,82].

Добре відомо [36,60], що максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності рівняння (A.1) є алгебра з базисними елементами

$$\begin{aligned} &\partial_t = \partial/\partial t, \quad \partial_x = \partial/\partial x, \quad G = t\partial_x - \tfrac{1}{2}xu\partial_u, \quad I = u\partial_u, \\ &D = 2t\partial_t + x\partial_x, \quad \Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x - \tfrac{1}{4}(x^2+2t)u\partial_u, \\ &X = f(t,x)\partial_u, \quad (f_t = f_{xx}). \end{aligned} \tag{A.2}$$

Проблема знаходження некласичної симетрії (в нашій термінології, Q-умовної симетрії) ЛОРТ (A.1) була вперше поставлена Блуменом та Коулом [67]. Однак, в цій важливій статті автори не дали жодного приклада оператора симетрії ЛОРТ (A.1), що відрізнявся б від операторів (A.2). Нижче представлено цілком повне дослідження цієї проблеми. Всі поняття, використані без пояснення, визначені в [54,55,58,60].

Означення A.1 [60]. Диференційне рівняння порядку m

$$S^1(y, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \dots, \underset{m}{u}) = 0 \tag{A.3}$$

для функції $u=u(y)$, де $\underset{k}{u}$ означає всі частинні похідні порядку k, називається умовно інваріантним відносно оператора Q, якщо існує додаткова умова вигляду

$$S^2(y, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u},\dots, \underset{m}{u}) = 0, \qquad (A.4)$$

сумісна з (А.3), така, що

$$\tilde{Q}S^i\Big|_{S^1=0,S^2=0} = 0, \ i=1,2. \qquad (A.5)$$

В формулі (А.5) $\tilde{Q}$ - стандартне продовження оператора Q.

В тому частковому випадку, коли умова (А.4) має вигляд

$$Qu = 0, \qquad (A.6)$$

рівняння (А.3) називається Q-умовно інваріантним відносно оператора Q. Поняття Q-умовної інваріантності співпадає з поняттям "некласичної" інваріантності, введеним Блуменом і Коулом в статті [67].

Загальна форма оператора першого порядку дається формулою:

$$Q = A(t,x,u)\ \partial_t + B(t,x,u)\ \partial_x + C(t,x,u)\ \partial_u\ , \qquad (A.7)$$

де A,B,C - деякі диференційовні функції змінних t.x.u, які необчідно визначити з умови інваріантності (А.5). Відзначимо, що так як накладена умова (А.6)

$$Qu = 0 \ \Leftrightarrow\ Au_t + Bu_x = C, \qquad (A.8)$$

то в дійсності існує лише два нееквівалентних випадка оператора (А.7).

Теорема А.1. ЛОРТ (А.1) Q-умовно інваріантне відносно оператора (А.7) тоді і тільки тоді, коли його координати задовольняють такі умови:

Випадок I.

$$A = 1,\ \ B = W^1(t,x),\ \ C = W^2(t,x)\,u + W^3(t,x), \qquad (A.9)$$

де функції (W^1, W^2, W^3) є одним з розв'язків системи

$$W^1_t + 2\,W^1_x\,W^1 - W^1_{xx} + 2\,W^2_x = 0, \qquad (A.10)$$

$$W^k_t + 2\,W^1_x\,W^k - W^k_{xx} = 0, \ k=2,3.$$

Випадок 2.

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = v(t,x,u), \tag{A.11}$$

де функція $v=v(t,x,u)$ задовольняє ДРЧП

$$v_t = v_{xx} + 2\, v\, v_{xu} + v^2\, v_{uu}\,. \tag{A.12}$$

Доведення. З критерію інваріантності

$$\underset{2}{Q}(u_t-u_{xx})\Big|_{u_t=u_{xx},\,Qu=0} = 0 \tag{A.13}$$

абсолютно аналогічно стандартному алгоритму Лі знаходимо визначальні рівняння для координат оператора (A.7), які можна звести до умов (A.9)-(A.12). Відзначимо, що на відміну від алгоритма Лі у випадках, наведених вище, визначальні рівняня (A.10),(A.12) є нелінійними, і це типова риса Q-умовної інваріантності.

Очевидно, що Q-умовна інваріантність містить в собі ліївську інваріантність. Так, для рівняння теплопровідності оператори (A.2) отримуються як найбільш прості розв'язки рівнянь (A.10), (A.12):

$$\begin{aligned}
&A = 1, \quad W^1 = W^2 = W^3 = 0 \;\Rightarrow\; Q = \partial_t\,,\\
&A = C = 0, \quad B = 1 \;\Rightarrow\; Q = \partial_x\,,\\
&A = 0. \quad B = 1. \quad v = -\,xu/(2t) \;\Rightarrow\; Q \sim G,\\
&A = 1, \quad W^1 = x/(2t), \quad W^2 = W^3 = 0 \;\Rightarrow\; Q \sim D,\\
&A = 1,\; W^1 = x/t. \quad W^2 = -\,(x^2+2t)/(4t^2), \quad W^3 = 0 \;\Rightarrow\; Q \sim \Pi.
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Зауваження A.1. Система визначальних рівнянь (A.10) була вперше отримана Блуменом і Коулом [67]. Подальше дослідження системи (A.10) проводилося в [103], де вивчалося питання лінеаризації перших двох рівнянь системи (A.10). Повний розв'зок проблеми лінеаризації рівнянь (A.10),(A.12) дано нижче.

Наведемо список деяких конкретних операторів (A.7) Q-умовної інваріантності рівняння (A.1), отриманих як часткові розв'язки визначальних рівнянь (A.10), (A.12). В таблицю A.1 також виписані відповідні інваріантні анзаци та редуковані рівняння.

Таблиця A.1.

N	Оператор Q	Анзац	Редуковане рівняння
1.	$-x\partial_t+\partial_x+(4B_1x^3+B_2)\partial_u$	$u = \phi(t+\frac{1}{2}x^2) + B_1x^4 + B_2x$	$\phi''+12B_1=0$
2.	$-x^2\partial_t + 3x\partial_x + 3(u+4B_1x^5-B_2)\partial_u$	$u = x\phi(t+\frac{1}{6}x^2) + B_1x^5 + B_2$	$\phi''+150B_1=0$
3.	$(t+\frac{1}{2}x^2+\lambda x)\partial_t - (x+\lambda)\partial_u$	$u = \phi(tx+\frac{1}{6}x^6+\lambda(t+\frac{1}{2}x^2))$	$\phi''=0$
4.	$\partial_x+(\eta_x\eta^{-1}u+\theta_x-\eta_x\eta^{-1}\theta)\partial_u$, $\eta=\eta(x)$, $\theta=\theta(x)$, $\eta''=a\eta$, $\theta''=b\theta$	$u = \eta(x)\phi(t) + \theta(x)$	$\phi''-a\phi-b=0$
5.	$\partial_1 - (-2t-2u)^{1/2}\partial_u$	$u = -t - \frac{1}{2}[x+\phi(t)]$	$\phi'=0$

Зрозуміло, що оператори, наведені в таблиці A.1 далеко не вичерпують всіх операторів Q-умовної інваріантності ЛОРТ (A.1).

Зауваження A.2. Інших анзаців загального вигляду

$$u = f(x)\,\phi(\lambda_0 t+ \lambda_1 tx+\lambda_2 x^2+\lambda_3 x^3) + g(x)$$

($f\neq 0$, $(\lambda_0,\lambda_1)\neq(0,0)$), що редукують ЛОРТ (A.1), крім анзаців 1-4 з таблиці A.1, немає.

Вивчимо лівську симетрію визначальних рівнянь (A.10), (A.12).

Теорема A.2. Максимальна лівська алгебра інваріантності системи (A.10) породжується операторами

$$\partial_t,\quad \partial_x,\quad G^{(1)}= t\partial_x + \partial_{W^1} - \tfrac{1}{2}W^1\partial_{W^2} - \tfrac{1}{2}xW^3\partial_{W^3},$$

$$D^{(1)}= 2t\partial_t + x\partial_x - W^1\partial_{W^1} - 2W^2\partial_{W^2},$$

$$\Pi^{(1)}= t^2\partial_t + tx\partial_x + (x-tW^1)\partial_{W^1} - \tag{A.15}$$

$$- (\tfrac{1}{2}xW^1+2tW^2+\tfrac{1}{2})\partial_{W^2} - (\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{5}{2}t)W^3\partial_{W^3},$$

$$X^{(1)}= (f_t+f_xW^1-fW^2)\partial_{W^3},\quad I^{(1)}= W^3\partial_{W^3},$$

де $f=f(t,x)$ – довільний розв'язок ЛОРТ (A.1), тобто $f_t=f_{xx}$.

Теорема А.3. Максимальна лiївська алгебра інваріантності рівняння (A.12) породжується операторами

$$\partial_t,\quad \partial_x,\quad G^{(2)}= t\partial_x - \tfrac{1}{2}xu\partial_u - \tfrac{1}{2}(xv+u)\partial_v,$$

$$D^{(2)}= 2t\partial_t + x\partial_x + u\partial_u,\quad I^{(2)}= u\partial_u + v\partial_v,$$

$$\Pi^{(2)}= t^2\partial_t + tx\partial_x - \tfrac{1}{4}(x^2+2t)u\partial_u - \tag{A.16}$$

$$- (\tfrac{1}{4}(x^2+6t)v + \tfrac{1}{2}xu\partial_v,$$

$$X^{(2)}= f\partial_u + f_x\partial_v,$$

де $f=f(t,x)$ – довільний розв'язок ЛОРТ (A.1), тобто $f_t=f_{xx}$.

Доведення теорем А.2, А.3 отримується з допомогою стандартного алгоритма Лі.

Оператори (A.15), (A.16) можна використати для знаходження точних розв'язків рівнянь (A.10), (A.12). Зокрема, використовуючи формулу розмноження розв'язків, отриману з допомогою оператора $\Pi^{(2)}$

$$\begin{aligned} v^{II}(t,x,u) &= (1-\varepsilon t)^{-3/2}\exp\{\tfrac{1}{4}\varepsilon x^2/(1-\varepsilon t)\}\, v^{I}(t',x',u') + \\ &+ \tfrac{1}{2}\varepsilon(1-\varepsilon t)^{-1}xu, \\ t' &= t(1-\varepsilon t)^{-1},\quad x' = x(1-\varepsilon t)^{-1}, \\ u' &= (1-\varepsilon t)^{1/2}\exp\{-\tfrac{1}{4}\varepsilon x^2/(1-\varepsilon t)\}u, \qquad (\ \varepsilon=\mathrm{const}\ ) \end{aligned} \tag{A.17}$$

можна будувати нові розв'язки рівняння (A.12) з відомих.

Розвєязки рівнянь (A.10), (A.12) можна також отримати з допомогою редукції по підалгебрах алгебр інваріантності (А.15), (А.16) відповідно. Наприклад, використовуюи підалгебру $\langle \partial_t + aI^{(1)} \rangle$ алгебри (А.15), знайдемо такий розв'язок системи (А.10):

$$W^1 = \frac{C_1^2 - C_2^2}{-C_1 tg(C_1x+C_2) + C_3 tg(C_3x+C_4)},$$

$$W^1 = - C_1C_3 \frac{-C_3 tg(C_1x+C_2) + C_1 tg(C_3x+C_4)}{-C_1 tg(C_1x+C_2) + C_3 tg(C_3x+C_4)}, \qquad (А.18)$$

$$W^3 = (\phi_{xx} - W^1\phi_x - W^2\phi)\, e^{at},$$

де $C_1,\ldots,C_4$ - довільні константи, $\phi=\phi(x)$: $\phi_{xx} = a\phi$.

Якщо покласти $W^2=W^3=0$, то з системи (А.10) для знаходження функції W^1 отримаємо рівняння Бюргерса:

$$W^1_t + 2\, W^1_x\, W^1 - W^1_{xx} = 0, \qquad (А.19)$$

З допомогою заміни Коула-Хопфа розв'язок рівняння (А.19) представимо у вигляді:

$$W^1 = - \partial_1 \ln f = - f_1/f, \quad (f=f(t,x),\ f_t=f_{xx}). \qquad (А.20)$$

В результаті отримаємо оператор

$$Q = f\partial_t - f_x\partial_x\ . \qquad (А.21)$$

З Q-умовної інваріантності ЛОРТ (А.1) відносно оператора (А.21) випливає таке твердження.

Теорема А.4. Якщо функція f - довільний розв'язок ЛОРТ (А.1), а u - загальний інтеграл звичайного диференційного рівняння

$$f_x\, dt + f\, dx = 0, \qquad (А.22)$$

то u задовольняє ЛОРТ (А.1).

Доведення. Очевидно, що рівняння (А.22) є рівнянням в повних диференціалах. Тоді його загальний розв'язок

$$u(t.x) = C, \quad C = \mathrm{const}$$

має таку властивість:

$$u_t = f_x, \quad u_x = f. \qquad (A.23)$$

Використовуючи формули (А.23), одержимо:

$$u_t - u_{xx} = f_x - f_x = 0,$$

що і вимагалося довести.

Теорему А.4 можна розглядувати як деякий алгоритм розмноження розв'язків ЛОРТ (А.1). Дійсно, навіть починаючи з тривіального розв'язка ЛОРТ u=1, одержимо цілий ланцюжок досить цікавих розв'язків, що залежать ве від змінних (t,x):

$$1 \rightarrow x \rightarrow t + \frac{x^2}{2!} \rightarrow tx + \frac{x^3}{3!} \rightarrow \ldots \; . \qquad (A.24)$$

Продовжуючи цей процес, знайдемо загальний вигляд розв'язків, що отримуються таким чином:

$$\frac{x^{2m}}{(2m)!} + \frac{t}{1!}\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} + \frac{t^2}{2!}\frac{x^{2m-4}}{(2m-4)!} + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\frac{x^2}{2!} + \frac{t^m}{m!}, \qquad (A.25)$$

$$\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \frac{t}{1!}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{t^2}{2!}\frac{x^{2m-3}}{(2m-3)!} + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\frac{x^3}{3!} + \frac{t^m}{m!}\frac{x}{1!}, \qquad (A.26)$$

Розв'язки (А.25), (А.26) (з точністю до постійного множника) називають многочленами теплопровідності [36].

Теорема А.5. Система (А.10) з допомогою нелокальної заміни

$$W^1 = -\frac{z^1_{xx}\, z^2 - z^1\, z^2_{xx}}{z^1_x\, z^2 - z^1\, z^2_x}, \quad W^2 = -\frac{z^1_{xx}\, z^2_x - z^1_x\, z^2_{xx}}{z^1_x\, z^2 - z^1\, z^2_x}, \qquad (A.27)$$

$$W^3 = z^3_{xx} + W^1\, z^3_x - W^2\, z^3$$

зводиться до незачепленої системи з трьох ЛОРТ для функцій $z^a = z^a(t,x)$:

$$z^a_t = z^a_{xx}, \quad a=\overline{1,3}. \qquad (A.28)$$

Доведення. Розглянемо спочатку останнє рівняння системи (A.10). Введемо позначення:

$$L = \partial_{xx} + W^1\partial_x - W^2, \quad B = \partial_t - \partial_{xx} + 2W^1_x, \quad T = \partial_t - \partial_{xx}.$$

В цих позначеннях

$$BL = LT \tag{A.29}$$

(при умові, що W^1, W^2 є розв'язками перших двох рівнянь системи (A.10)), а вираз для функції W^3 з формули (A.27) можна переписати у вигляді $W^3 = Lz^3$. З формули (A.29) випливає, що $BW^3 = 0$, якщо $Tz^3 = 0$. Доведемо, що для довільного розв'язку W^3 рівняння $BW^3=0$ існує розв'язок z^3 рівняння $Tz^3=0$ такий, що $W^3=Lz^3$.

Нехай z^H – частковий розв'язок лінійного неоднорідного ЗДР $Lz=W^3$, а z^0 – довільний розв'язок відповідного однорідного рівняння $Lz=0$ (в ці рівняння змінна t входить як параметр). Тоді $z^0=\eta^i(t)z^{0i}$, де $z^{0i}=z^{0i}(x)$ – фундаментальна система розв'язків рівняння $Lz=0$, $L(z^H+z^0)=W^3$. Покажемо, що функції η^i можна підібрати таким чином, щоб $Tz^3=0$, де $z^3 = z^H + z^0$.

Так як $LTz^H=BLz^H=BW^3=0$, то Tz^H є розв'язком рівняння $Lz=0$, а отже існують функції $\theta^i=\theta^i(t)$ такі, що

$$Tz^H = \theta^i z^{0i}. \tag{A.30}$$

Аналогічно

$$\begin{gathered} Tz^{0i} = \chi^{ij}z^{0i}, \quad \text{де} \quad \chi^{ij} = \chi^{ij}(t), \\ Tz^0 = \eta^i_t z^{0i} + \eta^i Tz^{0i} = \eta^i_t z^{0i} + \eta^i\chi^{ij}z^{0j}. \end{gathered} \tag{A.31}$$

З формул (A.30), (A.31) випливає, що умова $Tz^3=Tz^H+Tz^0=0$ рівносильна системі ЗДР для функції η^i:

$$\eta^i_t + \chi^{ij}\eta^i + \theta^i = 0. \tag{A.32}$$

Тому, якщо $(\eta^i)_{i=1,2}$ – розв'язок системи (A.32), а

$z^3=z^H+\eta^i z^{0i}$, то $Tz^3=0$ і $Lz^3=W^3$.

Розглянемо перших два рівняння системи (A.10). Нехай $BW^1+2W^2_1 = BW^2 = 0$. Заміну (A.27) для функцій W^1, W^2 перепишемо у вигляді

$$W^1 = -\frac{z^1_x}{z^1} - \frac{\tilde z_x}{\tilde z}, \quad W^2 = -\left[\frac{z^1_x}{z^1}\right]_x - \frac{z^1_x}{z^1}\frac{\tilde z_x}{\tilde z}, \qquad (A.33)$$

де $\tilde z = \frac{z^1_x}{z^1} z^2 - z^2_x$. Підставимо вирази (A.33) у систему (A.10). В результаті отримаємо, що

$$BW^1 + 2W^2_1 = -F_x - G_x = 0, \quad BW^2 = -\frac{\tilde z_x}{\tilde z} F_x - \frac{z^1_x}{z^1} G_x + F_{xx} = 0, \qquad (A.34)$$

де

$$F = \frac{z^1_t - z^1_{xx}}{z^1}, \quad G = \frac{\tilde z_t - \tilde z_{xx}}{\tilde z} - 2\left[\frac{z^1_x}{z^1}\right]_x.$$

З рівнянь (A.34) випливає, що $G_x = -F_x$,

$$F_{xx} = F_x\left[\frac{\tilde z_x}{\tilde z} - \frac{z^1_x}{z^1}\right], \text{ тобто } F_x = \rho^1(t)\frac{\tilde z}{z^1} = -\rho^1(t)\left[\frac{z^2}{z^1}\right]_x.$$

Це означає, що

$$\begin{aligned} z^1_t - z^1_{xx} &= -\rho^1(t)z^2 + \rho^2(t)z^1, \\ G = -F &= -\rho^1(t)\,(z^2/z^1), \end{aligned} \qquad (A.35)$$

звідки

$$\tilde z G = \tilde z\,(\rho^1(t)z^2/z^1 + \rho^3(t)) = -(z^2/z^1)_x(\rho^1(t)z^2 + \rho^3(t)z^1).$$

З другого боку

$$\tilde z G = \left[\frac{z^1_t - z^1_{xx}}{z^1}\right]_x z^2 + \frac{z^1_x}{z^1}(z^2_t - z^2_{xx}) - (z^2_t - z^2_{xx})_x. \qquad (A.36)$$

Тому

$$\left[\frac{z^2_t - z^2_{xx}}{z^1}\right]_x = \rho^3(t)\left[\frac{z^2}{z^1}\right]_x$$

або після інтегрування

$$z^2_t - z^2_{xx} = \rho^3(t)z^2 + \rho^4(t)z^1. \qquad (A.37)$$

Залишилося помітити, що при перетворенні

$$z^1 = \varphi^{1i}(t)\tilde{z}^i, \quad z^2 = \varphi^{2i}(t)\tilde{z}^i, \qquad (A.38)$$

де $\det\{\varphi^{ij}\}_{i,j=1,2} \neq 0$, вигляд заміни (A.27) не міняється. В той же час, якщо функції $(\varphi^{i1},\varphi^{i2})_{i=1,2}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків ЗДР

$$\varphi^1_t = \rho^2\varphi^1 - \rho^1\varphi^2,$$
$$\varphi^2_t = \rho^4\varphi^1 + \rho^3\varphi^2,$$

то з рівнянь (A.35), (A.36) для функцій $\tilde{z}^1$, $\tilde{z}^2$ отримаємо два незачеплених ЛОРТ: $\tilde{z}^i_t = \tilde{z}^i_{xx}, i=1,2.$

І навпаки, можна довести (див. формули (A.34), (A,36)), що при умові $z^1_t = z^1_{xx}$, $z^2_t = z^2_{xx}$ $BW^1 + 2W^2_1 = BW^2 = 0$, якщо функції W^1, W^2 визначаються формулами (A.27).

Доведення теореми A.5 завершено.

По оператору (A.7), (A.9) з врахуванням заміни (A.27) можна побудувати анзац вигляду

$$u = z^1\phi(\omega) + z^3, \quad \omega = z^2/z^1,$$

де (z^1, z^2, z^3) – розв'язок системи (A.28). Для визначення функції ϕ маємо таке редуковане рівняння:

$$\phi_{\omega\omega} = 0.$$

Це означає, що

$$u = C_1z^1 + C_2z^2 + C_3z^3.$$

Таким чином, ми отримали відомий принцип суперпозиції для ЛОРТ.

Розглянемо рівняння (A.12). Якщо функція v не залежить від змінної x, і перепозначивши

$$v = (w(t,u))^{-1}, \qquad (A.39)$$

замість рівняння (A.12) отримаємо нелінійне рівняння теплопровідності

$$w_t = (w^{-2}w_u)_u \ . \qquad (A.40)$$

Легко побачити, що оператор

$$Q = w(t,u)\partial_x + \partial_u \qquad (A.41)$$

встановлює зв'язок між рівняннями (A.40) та (A.1):

$$w_t - (w^{-2}w_u)_u = \frac{1}{u_x}\left[\frac{u_t - u_{xx}}{u}\right]_x$$

$$u_t - u_{xx} = w^{-1}\int[\, w_t - (w^{-2}w_u)_u \,]du \qquad (A.42)$$

з допогою замін

$$w(t,u) = \partial x(t,u)/\partial u, \quad \partial u(t,x)/\partial x = (w(t,u))^{-1}. \qquad (A.43)$$

Цей результат був отриманий з інших позицій в роботах [68,95].

Якщо припустити, що функція v має вигляд

$$v = \phi^1(t,x)u, \qquad (A.44)$$

то рівняння (A.12) зведеться до рівняння Бюргерса відносно функції ϕ^1:

$$\phi^1_t - 2\phi^1\phi^1_x - \phi^1_{xx} = 0, \qquad (A.45)$$

і можна сказати, що оператор

$$Q = \partial_x + \phi^1 u\partial_u \qquad (A.46)$$

встановлює зв'язок між рівняннями (A.45) та (A.1) через підстановку

$$\phi^1 = f_x/f, \quad (\ f_t = f_{xx}\ ). \qquad (A.47)$$

Якщо покласти

$$v = \phi^1(t,x)u + \phi^2(t,x) \qquad (A.48)$$

і підставити (A.48) в (A.12), то отримаємо рівняння Бюргерса (A.45) для функції ϕ^1 і таке рівняння для функції ϕ^2:

$$\phi^2_t - 2\phi^2\phi^1_x - \phi^2_{xx} = 0. \qquad (A.49)$$

Заміна

$$\phi^1 = f_x/f, \quad \phi^2 = gf_x/f - g_x \qquad (A.50)$$

зводить систему (A.45), (A.49) до двох незачеплених ЛОРТ

$$f_t = f_{xx}\ ,\quad g_t = g_{xx}\ . \tag{A.51}$$

Система (A.45), (A.49) була також отримана в [103] при дослідженні системи (A.10).

Розглянемо питання лінеаризації рівняння (A.12) в загальному випадку.

Теорема A.6. ДРЧП (A.12) нелокальною заміною

$$v = -\Phi_x / \Phi_u\ ,\quad \Phi = \Phi(t,x,u) \tag{A.52}$$

та перетворенням годографа

$$\Phi = u,\ y_0 = t,\ y_1 = x,\ y_2 = \Phi \tag{A.53}$$

зводиться до рівняння

$$\Phi_{y_0} = \Phi_{y_1 y_1} \tag{A.54}$$

відносно функції $\Phi = \Phi(y_0, y_1, y_2)$.

Доведення. Зробимо нелокальну заміну змінних (A.52) і введемо позначення

$$G = v_x + vv_u = -\left(\frac{\Phi_x}{\Phi_u}\right)_x + \frac{\Phi_x}{\Phi_u}\left(\frac{\Phi_x}{\Phi_u}\right)_u . \tag{A.55}$$

Рівняння (A.12) можна переписати у вигляді

$$v_t + v_u G = G_x + vG_u . \tag{A.56}$$

Розв'яжемо рівняння (A.56) відносно G:

$$G = (F(t,\Phi) - \Phi_t)/\Phi_u \tag{A.57}$$

Нехай $\Phi = H(t,\Lambda)$, $\Lambda=\Lambda(t,x,u)$. Тоді

$$v = -\frac{\Phi_x}{\Phi_u} = -\frac{\Lambda_x}{\Lambda_u},\quad G = \frac{F(t,H) - H_t - H_\Lambda \Lambda_t}{H_\Lambda \Lambda_u} . \tag{A.58}$$

Якщо функція H задовольняє рівнянню $H_t=F(t,H)$, то $G=-\Lambda_t/\Lambda_u$, тобто

$$-\frac{\Lambda_t}{\Lambda_u} = -\left(\frac{\Lambda_x}{\Lambda_u}\right)_x + \frac{\Lambda_x}{\Lambda_u}\left(\frac{\Lambda_x}{\Lambda_u}\right)_u . \tag{A.59}$$

В рівнянні (A.59) зробимо перетворення годографа (A.53), після якісно на функцію $\Psi = \Psi(y_0, y_1, y_2)$ отримаємо рівняння (A.54).

В рівнянні (A.54) змінна y_2 входить як параметр.

ВИСНОВКИ.

Перерахуємо основні результати, отримані в дисертації:

1. Побудовані повні набори нееквівалентних одно- та двовимірних підалгебр максимальної в сенсі Лі алгебри A^{∞} інваріантності РНС (основною складністю при цьому була нескінченновимірність алгебри A^{∞}) та відповідних їм анзаців корозмірності один і два для поля Нав'є-Стокса. З їх допомогою проведена редукція РНС до систем ДРЧП від двох та трьох незалежних змінних Досліджені симетрійні властивості редукованих систем та побудовані їх точні розв'язки. Максимальні в сенсі Лі алгебри інваріантності більшості з цих систем містять оператори, що не "індукуються" елементами алгебри A^{∞}. В деяких випадках редуковані системи вдалося звести до лінійних ДРЧП, зокрема, до лінійного одновимірного рівняння теплопровідності (ЛОРТ) та лінійного рівняння переносу. В результаті отримані широкі сім'ї розв'язків РНС, що залежать від кількох довільних функцій та числових параметрів.

2. Досліджені РНС з додатковою умовою $u^1_1=u^2_2=u^3=0$, і побудовані класи їх точних розв'язків. Ці розв'язки неліївські; і серед них є клас розв'язків РНС, що виражаються через розв'язки ЛОРТ.

3. Для системи, що складається з РНС та додаткової умови рівності конвективних членів нулю, введене поняття розв'язків типу біжучої хвилі рангу один та рангу два. Доведена теорема про те, що ця система не має розв'язків типу біжучої хвилі рангу два. Описаний її загальний розв'язок, та знайдена її максимальна в сенсі Лі алгебра інваріантності. Відмітимо, що пряме

застосування алгоритма Лі до цієї системи малоефективне в силу її переозначеності, тому була зроблена його модифікація.

4. Побудований широкий клас точних неліївських розв'язків РНС, які виражаються через фукції exp, sin, cos і мають структуру суперпозиції певної кількості плоских хвиль.

6. Вивчена ліївська симетрія деяких систем ДРЧП, пов'язаних з РНС, зокрема, рівнянь Гельмгольца. У плоскому випадку максимальна в сенсі Лі алгебра інваріантності рівнянь Гельмгольца містить оператор, що не "індукується" елементами алгебри A^{∞}. Плоскі рівняння Нав'є-Стокса не інваріантні в сенсі Лі відносно перетворень, що породжує цей оператор, так як тиск при цьому повинен перетворюватися нелокально.

6. Отримана сім'я операторів Q-умовної симетрії РНС.

7. Детально розглянуто простий, але нетривіальний приклад, як знайти і використати Q-умовну симетрію одного з основних рівнянь математичної фізики - лінійного одновимірного рівняння теплопровідності (ЛОРТ), що зустрічається при редукції РНС. Виписані визначальні рівняння на коефіцієнти оператора Q-умовної симетрії ЛОРТ. Вивчена ліївська симетрія цих рівнянь (вона виявилася такою ж широкою. як і симетрія ЛОРТ). Побудовані деякі розв'язки визначальних рівнянь, в результаті отримані класи операторів Q-умовної симетрії, що не належать до максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності ЛОРТ. Знайдені нелокальні заміни, що зводять визначальні рівняння до ЛОРТ. Наведена одна неліївська формула розмноження точних розв'язків ЛОРТ.Показаний зв'язок між Q-умовною симетрєю ЛОРТ та лінеаризацією відомих нелінійних рівнянь.

Всі результати, отримані в дисертації, нові і можуть бути використані при розв'язанні прикладних задач динаміки в'зких течій нестисливої рідини.

Література.

1. Андреев В.К., Родионов А.А. Групповой анализ уравнений плоских течений идеальной жидкости в лагранжевых координатах // ДАН СССР.- 1989.- 298,N 6.- С. 1358-1361.

2. Биркгоф Г. Гидродинамика.- М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954.- 184 с.

3. Брутян М.А.,Крапивский П.Л. Точное решение уравнений Навье-Стокса, описывающее еволюцию вихревой структуры в обобщенном сдвиговом течении // Журн. выч. мат. и мат. физ.- 1992.- 32,N 2.- С. 326-329.

4. Бучнев А.А. Группа Ли, допускаемая уравнениями движения идеальной несжимаемой жидкости// Динамика сплошной среды, вып. 7. - Новосибирск: Ин-т гидромеханики СО АН СССР, 1971.- С. 212-214.

5. Бытев В.О. Групповые свойства уравнений Навье-Стокса // Численные методы механики сплошной среды.- Новосибирск: Вычисл. центр СО АН СССР, 1972.- 3,N 4.- С. 13-17.

6. Бытев В.О. Инвариантные решения уравнений Навье-Стокса // Журн. прикл. механ. и техн. Физ.- 1972.- N 6.- С. 56-64.

7. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп.- М.: Наука, 1991.- 576 с.

8. Гарипов Р.М. Плоские локальные решения уравнений Навье-Стокса // Динамика сплошной среды, вып. 58.- Новосибирск: Ин-т гидромеханики СО АН СССР, 1982.- С. 27-59.

9. Голубинский А.А., Сычев В.В. Об одном автомодельном решении уравнений Навье-Стокса // Учёные записки ЦАГИ,- 1976.- 7,N 7.- С. 11-17.

10. Гольдштик М.А. Одно парадоксальное решение уравнений

Навье-Стокса // Прикл. матем. и мех.- 1960.-**24**,вып. 4.- С. 610-621.

11. Гольдштик М.А. Один класс точных решений уравнений Навье-Стокса // Журн. прикл. механ. и техн. физ.- 1966.- N 2.-С. 106-107.

12. Гольдштик М.А. Парадоксы вязких течений // Механика и научно-технический прогресс, Т 2. Механика жидкости и газа.- М.: Наука, 1987.- С. 34-48.

13. Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами.- Новосибирск: Наука, 1989.- 336 с.

14. Данилов Ю.А. Групповые свойства уравнений Максвелла и Навье-Стокса.- М., 1967.- 15 с.- (Препринт/ АН СССР. Ин-т атомной энергии им. И.В. Курчатова).

15. Жермен П. Курс механики сплошных сред.- М.: Высш. шк., 1983.- 399 с.

16. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике.- М.: Наука, 1983.- 280 с.

17. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1965.- 703 с.

18. Капитанский Л.В. Групповой анализ уравнений Навье-Стокса и Эйлера при наличии вращательной симметрии и новые точные решения этих уравнений // ДАН СССР.- 1978.- **243**,N 4.- С. 901-904.

19. Капитанский Л.В. Групповой анализ уравнений Навье-Стокса и Эйлера при наличии вращательной симметрии и некоторые новые точные решения // Записки научн. сем. ЛОМИ.- 1979.- **84**.- С. 89-107.

20. Катков В.Л. Точные решения некоторых задач конвекции // Прикл. матем. и механ.- 1968.- **32**,N 3.- С. 482-486.

21. Корн Г.,Корн Т. Справочник по математике.- М.: Наука,

I984.- 83I с.

22. Кочин Н.Б., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика.- М.: Физматгиз, I963.- Ч. 2.- 727 с.

23. Лаврентьев М.А.,Шабат Б.В. Проблемы гидромеханики и их мактематические модели.- М.: Наука, I977.- 408 с.

24. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного.-М.: Наука, I987.- 688 с.

25. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.- М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, I96I.- 203 с.

26. Ламб Г. Гидромеханика.- М.-Л.: Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры, I947.- 928 с.

27. Ландау Л.Д. Об одном новом решении уравнений Навье-Стокса // ДАН СССР.- I944.- 28,N 7.- С. 299-30I.

28. Ландау Л.Д.,Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика.- М.: Наука, I988.- 736 с.

29. Лапко Б.В. Построение оптимальных систем подгрупп группы Ли преобразований, допускаемых уравнениями газовой динамики // Динамика сплошной среды, вып. I4.- Новосибирск: Ин-т гидромеханики СО АН СССР, I973.- С. II2-II9.

30. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.- М.: Наука, I978.- 727 с.

31. Марков Д.Ф. Об одном случае интегрирования дифференциального уравнения движения вязкой жидкости // Ученые записки МГУ.- I934.- Вып. 2.- С. I23-I25.

32. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидромеханика.- М.: Мир, I964.- 655 с.

33. Назаров Г.И., Пучкова Н.Г., Янко А.К. К интегрированию сис-

темы уравнений Навье-Стокса для одного случая вихревого осесимметрическото движения несжимаемой жидкости // Гидромеханика.- I971.- Вып. I9.- С. 66-7I.

34. Назаров Г.И., Янко А.К. Автомодельные решения для трёхкомпонентного осесимметрического движения вязкой жидкости // Гидромеханика.- I971.- Вып. I9.- С. 62-66.

35. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.- М.: Наука, I978.- 400 с.

36. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.-М.: Мир, I989.- 639 с.

37. Попович Р.Е. Симметрийные свойства интегро-дифференциальных уравнений типа Хартри // Теоретико-алгеьраический анализ уравнений математической физики.- Киев: Ин-т математики АН УССР, I990.- С. 50-53.

38. Попович Р.Е. Об общем решении уравнений Навье-Стокса с дополнительным условием // Докл. АН Украины.- I992.- N 4.- С.2I-24.

39. Попович Р.О. Про загальний розв'язок та симетрію рівнянь Нав'є-Стокса з додатковою умовою $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{u}=\vec{0}$ // Тези доп. міжнародної конференції, присвяченої пам'яті М.Ф. Кравчука (Київ, 22-26 вересня, I992).- Київ:Ін-т математики, I992.- С. I63.

40. Пухначёв В.В. Групповые свойства уравнений Навье- Стокса в плоском случае // Журн. прикл. механ. и техн. физ.- I960.- N I.- С. 83-90.

41. Пухначёв В.В. Инвариантные решенния уравнений Навье-Стокса, описывающие движения со свободной границей // ДАН СССР.- I972.- 202,N 2.- С. 302-305.

42. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных

уравнений и их приложения к газовой динамике.- М.: Наука, 1968.- 592 с.

43. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике.- М.: Наука, 1972.- 440 с.

44. Сенашов С.И. О построении оптимальной системы подалгебр алгеьры Ли, допускаемой системой дифференциальных уравнений // Динамика сплошной среды,вып 50.- Новосибирск: Ин-т гидромеханики СО АН СССР, 1981.- С. 150-163.

45. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости.- М.: ИЛ, 1961.

46. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике.- Новосибирск: Наука, 1984.- 272 с.

47. Славутский С.Л. Групповые свойства некоторых уравнений гидрогазодинамики // Теоретико-алгебраические исследования уравнений мфтематической физики.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983.- С. 71-74.

48. Славутский С.Л. Симметрия некоторых уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости // Теоретико-групповые исследования уравнений матемaтичвской физики.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985.- С. 74-80.

49. Слезкин Н.А. Движение вязкой жидкости между двумя конусами // Ученые записки МГУ.- 1934.- Вып. 2.- С. 83-87.

50. Слезкин Н.А. Об одном случае интегрируемости полных уравнений движения вязкой жидкости // Ученые записки МГУ.- 1934.- Вып. 2.- С. 89-91.

51. Страхович К.И. Об одном случае движения вязкой жидкости в просеранстве // Прикл. матем. и механ.- 1934.- 2, вып. 1.-

С. 74-81.

52. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ.- М.: Мир, 1981.- 408 с.

53. Фущич В.И. О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики // Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983.- С. 4-23.

54. Фущич В.И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987.- С. 4-16.

55. Фущич В.И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики // Укр. мат. журн.- 1991.- 43,N 11.- С. 1456-1470.

56. Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгрупповой анализ групп Галилея,Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений.- Киев: Наукова думка, 1991.- 304 с.

57. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики.- М.: Наука, 1990. 400 с.

58. Фущич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН Украины.- 1990.- N 7.- С. 24-24.

59. Фущич В.И., Штелень В.М., Попович Р.Е. О редукции уравнений Навье-Стокса к линейным уравнениям теплопроводности// Докл. АН Украины.- 1992.- N 2.- С. 23-30.

60. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный ианализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики.- Киев: Наукова думка, 1989.- 335 с.

61. Хабиров С.В. О структуре псевдогруппы, допускаемой уравнениями идеальной несжимаемой жидкости // Динамика сплошной среды,

вып. 24.- Новосибирск: Ин-т гидромеханики СО АН СССР, 1976.- С. 105-114.

62. Чакыров Е.Й. Дифференциальные инварианты некоторых расширений группы Галилея // Динамика сплошной среды, вып. 69.- Новосибирск: Ин-т гидромеханики СО АН СССР, 1985.- С. 123-149.

63. Яцеев В.И. Об одном классе точных решений уравнений движения вязкой жидкости // Журн. эксперим. и теор. физики.- 1950.- **20**,N 11.- С. 1031-1034.

64. Agrawal H.L. A new exact solution of the equations of viscous motion with axial symmetry // Quart. J. Mech. Appl. Math.- 1957.- **10**.- P. 42-44.

65. Batchelor G.K. Note jn class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steade rotationally-symmetric flow // Quart. J. Mech. Appl. Math.- 1951.- **4**.- P. 29-41.

66. Berker R. Integration des equations du mouvement d'un fluid visqueux incompressible // Handbuch der Physik.- 1963.- V. VIII, Part 2.- P. 1-384.

67. Bluman G.W., Cole J.D. The General Similarity Solutions of the Heat equation // J. of Math. and Mech.- 1969.- **18**, N 11.- P. 1025-1042.

68. Bluman G.W., Kumei S. On the remarkable nonlinear diffusion equation $\frac{\partial}{\partial x}\left[a (u + b)^{-2} \frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ // J. Math. Phys. - 1980.- **21**,N 5.- P. 1019-1023.

69. Brady J.F., Durlofsky L. On rotating disk flow: similarity solution versus finite disk // J. Fluid Mech.- 1986.- **175**.- P. 363-394.

70. Craik A.D.D., Criminale W.O. Evolution of wavelike disturbances in shear flows: a class of exact solutions of the Navier-

Stokes equations // Proc. Roy. Soc. London.- 1986.- **A406**.- P. 13-26.

71. David D., Karman N., Levi D., Winternitz P. Symmetry reduction for the Kadomtsev-Petviashvili equation using a loop algebra // J. Math. Phys.- 1986.- **27**,N 5.- P. 1225-1237.

72. Fushchych W.I., Popowych R.O. Symmetry reduction of the Navier-Stokes equations to linear two-dimensional system of equations // Dopovidi Acad. Nauk Ukrainy.- 1992.- N 8.- P. 29-37.

73. Fushchich W.I., Shtelen W.M., Slavutsky S.L. Reduction and exact solutions of the Navier-Stokes equations // J. Phys.: Math. Gen.- 1991.- **24**,N 4.- P. 971-984.

74. Grauel A., Steeb W.-H. Similarity solutions of the Euler equation and the Navier-Stokes equation in two space dimensions // Int. J. Theor. Phys.- 1985.- **24**,N 3.- P. 255-265.

75. Guilloud J.C., Arnault J., Dicerescenzo C. Etude d'une nouvelle famille de solutions des equations de Navier-Stokes // J. Mec.- 1973.- **12**,N 1.- P. 47-74.

76. HallP., Balakumar P., Papageorgiu D. On a class of unsteady three-dimensional Navier-Stokes solutions relevant to rotating disk flow: threshold amplitudes and finite-time singularities // J. Fluid Mech.- 1992.- **238**.-P. 297-323.

77. Hoffman J.A. Similarity solution for the interaction of a potential vortex with free steam sink flow and a stationary surface // Trans. ASME. Basic Engeneering.- 1974.- **96**,N 1.- P. 49-54.

78. Hui W.H. Exact solutions of the unsteady two-dimensional Navier-Stokes equations // J. Appl. Math. Phys. (ZAMP).- 1983.- **38**.- P. 689-702.

79. Irmay S., Zuzovsky M. Exact solutions of the Navier-Stokes equations in two-way flows // Israel J. Tech.- 1970.- **8**.- P. 307-315.

80. Jeffery C.B. Two-Dimension Steady Motion of a Viscous Fluid // Phil. Mag. Ser. 6.- 1915.- **29**.N 172.- P. 455-465.

81. Kovasznay L.I.G. Laminar Flow Behind a Two-Dimensional Grid // Proc. Camb. Philos. Soc.- 1948.- **44**.- P. 58-62.

82. Laminar Boundary Layers.- Oxford: The Clarendon Press, 1963.- 688 p.

83. Lance G.N., Rogers M.H. Axially Symmetric Flow of a Viscous Fluid between Two Infinite rotating Disks // Proc. Roy. Soc. London.- 1962.- **A226**.- P. 109-121.

84. Lin S.P., Tobak M. Reversed flow above a plate with suction // AIAA Journal.- 1986.- **24**,N 2.- P. 334-335.

85. Lloyd S.P. The infinitesimal group of the Navitr-Stokes equations // Acta Mtch.- 1981.- **38**,N 1-2.- P. 85-98.

86. Long R.R. Vortex motion in a viscous fluid // J. Meteor.- 1958.- **15**.- P. 108-112.

87. Long R.R. A vortex in an infinite viscous fluid // J. Fluid Mech.- 1961.- **11**,N 4.- P. 611-624.

88. Marris A.W. Remark on plane universal Navier-Stokes motions // Arch. Ret. Mech. Anal.- 1981.- **77**.- P. 95-102.

89. Marris A.W., Aswani M.G. On the general imposibility of controllable axi-symmetric Navier-Stokes motions // Arch. Rat. Mech. Anal.- 1977.- **63**.- P. 107-153.

90. Mayer E.W., Powell K.G. Similarity solution for viscous vortex cores // J. Fluid Mech.- 1992.- **238**.- P. 487-507.

91. O'Brien V. Steady spheroidal vortices - more exact solu-

tions to the Navier-Stokes equation // Qwart. Appl. Math.- 1961.- **19**.- P. 163-168.

92. Paull R., Pillow A.F. Conically similar viscous flows. Part 2. One parameter swill-free flows // J. Fluid Mech.- 1985.- **155**.- P. 343-358.

93. Pearson C.F., Abernathy F.H. Evolution of the flow field associated with a stream-wise diffusing vortex // J. Fluid Mech.- 1984.- **146**.- P. 271-283.

94. Pillow A.F., Paull R. Conically similar viscous flows. Part 1. Basic conservation principles and characterization of axial causes in swirl free flow // J. Fluid Mech.- 1985.- **155**.- P. 327-342.

95. Rosen G. Nonlinear heat condition in solid H_2 // Phys. Rev. B.-1979.- **19**,N 4.- P. 2398-2399.

96. Rosen G. Restricted invariance of the Navier-Stokes equation // Phys. Rev. A.- 1980.- **22**,N 1.- P. 313-314.

97. Shtelen W.M., Stogny V.I. Symmetry properties of one- and two-dimensional Fokker-Planck equations // J. Phys. A: Math. Gen.- 1989.- **22**.- P. 539-543.

98. So R.M.C. On similarity solutions for turbulent and heated round jets // J. Appl. Math. Phys.(ZAMP).- 1986.- **37**.- P.624-631.

99. Sullivan R. D. A two-cell solution of the Navier-Stokes equations // J. Aerospace Sci.- **26**,N 11.- P. 163-164.

100. Taylor G.I. On the decay of vortices in a viscous fluid // Philos. Mag. Ser. 6.- 1923.- **46**, N 6.- P. 671-674.

101. Terrill B.M. An exact solution for flow in a porous pipe // J. Appl. Math. Phys.(ZAMP).- 1982.- **33**.- P. 547-552.

Gen.- 1989.- 22.- P. 539-543.

98. So R.M.C. On similarity solutions for turbulent and heated round jets // J. Appl. Math. Phys.(ZAMP).- 1986.- 37.- P.624-631.

99. Sullivan R. D. A two-cell solution of the Navier-Stokes equations // J. Aerospace Sci.-1959.- 26,N 11.- P. 163-164.

100. Taylor G.I. On the decay of vortices in a viscous fluid // Philos. Mag. Ser. 6.- 1923.- 46, N 6.- P. 671-674.

101. Terrill B.M. An exact solution for flow in a porous pipe // J. Appl. Math. Phys.(ZAMP).- 1982.- 33.- P. 547-552.

102. Wang C.Y. Exact solutions of the Navier-Stokes equations - the generalized Beltami flows, review and extension // Acta Mechanica.- 1990.- 81,N 1-2.- P, 69-74.

103. Webb G.M. Lie symmetries of a coupled nonlinear Burgers-heat equation system // J. Phys. A.- 1990.- 23,N 17.- P. 3885-3894.

104. Weinbaum S., O'Brien V. Exact Navier-Stokes solutions including swirl and cross flow // Phys. of Fluids.- 1967.- 10,N 7.- P. 1438-1447.

105. Winternitz P. Kac-Moody-Virasoro symmetries of integrable nonlinear partial differential equations.- Montréal (Québec), 1988.- (Prepr./ Universitéde Montréal. Centre de recherches mathématiques; CRM-1548).- 18 p.

106. Yih C.-S., Wu F., Garg A.K., Leibovich S. Conical vortices: a class of exact solutions of the Navier-Stokes equations // Phys. Fluids.- 1982.- 25,N 12.- P. 2147-2158.