Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

РОМАН Олена Василівна

СИМЕТРІЯ ТА РЕДУКЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ ХВИЛЬОВИХ РІВНЯНЬ

01.01.03 – математична фізика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Науковий керівник
член–кореспондент НАН України,
доктор фіз–мат наук, професор
ФУЩИЧ В. І.

Київ – 1996

Зміст

Вступ **3**

1 Симетрія та точні розв'язки нелінійних поліхвильових рівнянь **11**

1.1 Максимальні алгебри інваріантності поліхвильових рівнянь 12

1.2 Редукція та точні розв'язки деяких класів одновимірних біхвильових рівнянь 19

1.2.1 Рівняння $\Box^2 u = \lambda e^u$ 19

1.2.2 Рівняння $\Box^2 u = \lambda u^k$. 21

1.2.3 Конформно-інваріантне рівняння $\Box^2 u = \lambda u^{-3}$. . . 24

1.3 Редукція та точні розв'язки багатовимірних поліхвильових рівнянь з нелінійністю u^k 26

1.4 Симетрійна класифікація та точні розв'язки систем хвильових рівнянь 34

1.5 Поліхвильові рівняння для комплексного скалярного поля, інваріантні відносно алгебр $A\widetilde{P}(1,n)$ та $AC(1,n)$ 44

2 Нелінійні хвильові рівняння для комплексного скалярного поля **48**

2.1 Симетрійна класифікація рівняння $\Box u = F(|u|, (\nabla|u|)^2, \Box|u|)u$ 50

2.1.1 Лінійні та нелінійні зображення розширеної алгебри Пуанкаре і конформної алгебри для комплексного скалярного поля 51

2.1.2 Повний опис алгебр інваріантності рівняння $\Box u = F(|u|, (\nabla|u|)^2, \Box|u|)u$ 54

2.1.3 Доведення основних тверджень 59
2.2 Точні розв'язки нелінійних конформно–інваріантних хвильових рівнянь 67
2.2.1 Узагальненні пуанкаре–інваріантні анзаци . . . 67
2.2.2 Розв'язки хвильових рівнянь що містять довільні функції 71
2.2.3 Дилатаційно та конформно–інваріантні анзаци . 79
2.3 Умовна симетрія хвильових рівнянь для комплексного скалярного поля 86

A Антиредукція та неліївська редукція нелінійних лоренц–інваріантних хвильових рівняннь 93

Висновки 108

Література 110

Вступ

Практично в усіх галузях математичної і теоретичної фізики симетрійні методи дослідження відіграють провідну роль. Головним чином це зумовлено тим, що цілий ряд фундаментальних фізичних процесів підкоряється певним принципам симетрії. Очевидно, що принципам симетрії повинні підкорятися і диференціальні рівняння (системи), що моделюють такі процеси. Так всі основні рівняння математичної фізики - Ньютона, Лапласа, Д'аламбера, Ейлера–Лагранжа, Ламе, Гамільтона–Якобі, Дірака, Максвела, Шродінгера і.т.д. мають нетривіальну симетрію. Отже, при виборі оптимальної математичної моделі серед деякої множини допустимих моделей (рівнянь) основним критерієм може бути наявність певної симетрії, або, взагалі, найбільш широкої симетрії [34, 52].

Методи симетрії, що були започатковані в роботах Софуса Лі (див., наприклад [80, 81]), відкривають широкі можливості класифікації, редукції та побудови точних розв'язків диференціальних рівнянь та систем. В останній час ці методи інтенсивно розвиваються і узагальнюються.

Беклундом, Пуанкаре, Уіттекером, Бейтменом було одержано важливі результати по застосуванню ідей і методів терії Лі для знаходження точних розв'язків хвильових рівняннь [2, 56]. Фундаментальні ідеї по відшуканню інваріантних розв'язків були висловлені Біркгофом [3], Морганом [83]. Сучасне викладення теорії Лі та її застосувань для дослідження рівнянь математичної і теоретичної фізики наведене в монографіях [17, 18, 70, 41, 9, 10, 57, 16].

В останній час розвиваються різноманітні теорії, спрямовані на узагальнення класичного методу Лі, які дозволяють відкрити додаткову (неліївську) симетрію диференціальних рівнянь.

В роботі [30] звернено увагу на те, що за допомогою методу Лі ми не можемо отримати вичерпну інформацію про симетрійні властивості деяких класів рівнянь та систем. Новий (неліївський) підхід, запропонований В.І. Фущичем [31, 29] полягає в тому, що досліджуються *нелокальні* перетворення, які допускаються лінійними диференціальними рівняннями. Базисні елементи відповідних алгебр інваріантності у цьому випадку являються диференціальними операторами високого порядку або інтегро–диференціальними операторами [29, 31, 41, 42, 64].

Ще одним методом розширення симетрії диференціальних рівнянь є аналіз їх *умовної* інварантності. Основна ідея цього методу полягає в тому, що досліджується класична симетрія Лі лише для деякої підмножини розв'язків [35]. Ефективність та конструктивність цього методу проілюстрована на рівняннях теплопровідності, газової динаміки, нелінійної акустики, теорії Борна-Інфельда, Дірака [70, 24, 25, 40, 44, 46, 47, 48, 51, 50, 49, 38].

Іншими узагальненнями класичної симетрії С.Лі являються: симетрії Лі–Беклунда [10, 11, 58]; негеометричні симетрії [31, 27, 41, 65]; дискретні симетрії [8, 41]; наближені симетрії [69, 1], умовні симетрії Лі–Беклунда [91, 82].

В останній період інтенсивно розвивається теорія зображень різних алгебраїчних структур (їх класифікація, нелінійні зображення) [41, 75, 63, 73].

Симетрії диференціальних рівнянь можна використовувати для побудови їх точних розв'язків [18, 36, 52], знаходження нових законів збереження та інтегралів руху [41, 42], для розділення змінних [15].

Оскільки більшість фізичних процесів має суттєво нелінійний характер, особливу актуальність методи симетрійного аналізу набувають для нелінійних рівнянь, до яких важко або взагалі неможливо застосувати класичний апарат математичної фізики (метод розділення змінних, перетворень Фур'є та ін. [5, 14]). У зв'язку з цим актуальною є задача побудови та дослідження рівнянь (систем), що допускають нелінійні зображення алгебр Галілея, Пуанкаре, розширеної алгебри Пуанкаре, конформної алгебри та інші. Слід підкреслити, що деякі нелінійні диференціальні рівняння допускають такі широкі групи, відносно яких не інваріантне жодне лінійне диференціальне рівняння. Прикладами таких рівнянь є багатовимірне рівняння Монжа–Ампера, ейконала, Гамільтона–Якобі [52, 70].

Дисертаційна робота присвячена дослідженню теоретико-алгебраїчних властивостей і побудові точних розв'язків нелінійних багатовимірних поліхвильових та хвильових рівнянь.

Перш ніж перейти до викладення одержаних результатів, сформулюємо найбільш важливі теореми та позначення симертійного аналіза [84, 17, 70].

Нехай

$$L\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{r}{u}\right) = 0 \tag{0.1}$$

система диференціальних рівнянь в частинних похідних r–го порядку, де $u = u(x)$; $x = (x_0, \vec{x})$; $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$; $u \in \mathrm{R}^m$; $\underset{k}{u}$ – сукупність похідних k–го порядку функції u; $k = \overline{1, r}$; $k, n, m, r \in \mathrm{N}$.

Визначення 1 *Група Лі перетворень вигляду*

$$\begin{aligned} \widetilde{x_\mu} &= f^\mu(x, u, \tau), \quad \mu = \overline{0, n}, \\ \widetilde{u^k} &= g^k(x, u, \tau), \quad k = \overline{1, m}, \end{aligned} \tag{0.2}$$

де $\tau = (\tau_b, b = \overline{1, l})$, називається l–параметричною групою інваріантності системи (0.1), якщо множина розв'язків (0.1) інваріантна відносно перетворень (0.2).

Визначення 2 *Алгеброю Лі групи (0.2) називається лінійний векторний простір, базисом якого є диференціальні оператори вигляду*

$$X_b = \xi_b^\mu(x, u)\partial_{x_\mu} + \eta_b^k(x, u)\partial_{u^k}, \qquad b = \overline{1, l} \tag{0.3}$$

де

$$\xi_b^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial \tau^b}\bigg|_{\tau = 0}, \qquad \eta_b^k = \frac{\partial g^k}{\partial \tau^b}\bigg|_{\tau = 0}, \tag{0.4}$$

замкнений відносно операції комутування

$$X_a, X_b \to [X_a, X_b] = X_a X_b - X_b X_a.$$

Між групою Лі перетворень (0.2) і її алгеброю Лі існує взаємнооднозначна відповідність (перша теорема Лі). Для того щоб відновити групу Лі по її алгебрі Лі необхідно розв'язати наступну задачу Коші (систему рівнянь Лі):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f^\mu}{\partial \tau^b} = \xi^\mu_b(f,g), \quad \frac{\partial g^k}{\partial \tau^b} = \eta^k_b(f,g), \\
&f^\mu|_{\tau=0} = x_\mu, \qquad g^k|_{\tau=0} = u^k.
\end{aligned} \tag{0.5}$$

Сформулюємо алгоритм Лі знаходження алгебри інваріантності системи (0.1) [52, 70, 84, 17].

Теорема 0.1. *Диференціальний оператор*

$$X = \xi^\mu(x,u)\partial_{x_\mu} + \eta^k(x,u)\partial_{u^k}$$

є оператором інваріантності системи (0.1) тоді і тільки тоді, коли

$$\underset{r}{X} L\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{r}{u}\right)\Bigg|_{L=0} \equiv 0, \tag{0.6}$$

де $\underset{r}{X}$ *– r–те продовження оператора X, яке будується згідно формул*

$$\begin{aligned}
&\underset{r}{X} = X + \zeta^k_{i_1}\partial_{u^k_{i_1}} + \cdots + \zeta^k_{i_1 i_2 \cdots i_r}\partial_{u^k_{i_1 i_2 \cdots i_r}}, \\
&\zeta^k_{i_1} = D_{i_1}(\eta^k) - u^k_j D_{i_1}(\xi^j), \\
&\zeta^k_{i_1 i_2} = D_{i_2}(\zeta^k_{i_1}) - u^k_{i_1 j} D_{i_2}(\xi^j), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\zeta^k_{i_1 i_2 \cdots i_r} = D_{i_r}(\zeta^k_{i_1 \cdots i_{r-1}}) - u^k_{i_1 i_2 \cdots i_{r-1} j} D_{i_r}(\xi^j).
\end{aligned} \tag{0.7}$$

Тут D_i *– оператори повного диференціювання, тобто*

$$D_i = \partial_{x_i} + u^k_i \partial_{u^k} + u^k_{i i_1}\partial_{u^k_{i_1}} + \cdots + u^k_{i i_1 \cdots i_{r-1}}\partial_{u^k_{i_1 \cdots i_{r-1}}},$$

$$i, i_1, \ldots, i_r, j = \overline{0, n}, \qquad k = \overline{1, m}.$$

Записавши (0.6) в розгорнутому вигляді і розщепивши по похідних, отримаємо систему лінійних рівнянь в частинних похідних відносно компонент ξ, η оператора X (систему визначальних рівнянь), загальний розв'язок якої визначає максимальну в розумінні Лі алгебру інваріантності системи (0.1).

Використовуючи формули (0.5), можна визначити локальні групи Лі, що відповідають даній алгебрі.

Окрім знаходження алгебр інваріантності, що допускаються даним диференціальним рівняння, важливою також є задача повної симетрійної класифікації певного класу диференціальних рівнянь. Ця задача може бути розділена на такі підзадачі:

- знаходження максимальної алгебри інваріантності (МАІ) даного класу диференціальних рівнянь (так-званої тривіальної алгебри);
- виділення усіх підкласів рівнянь, які допускають більш широку алгебру інваріантності, ніж тривіальна;
- знаходження МАІ усіх цих підкласів.

Наявність у того чи іншого диференціального рівняння нетривіальної алгебри інваріантності дозволяє знаходити широкі класи інваріантних розв'язків та за даним розв'язком будувати нові багатопараметричні класи точних розв'язків диференціальних рівнянь [17, 70, 52].

Важливим елементом процедури побудови інваріантних розв'язків є поняття інваріанта.

Визначення 3 *Функція $F(x,u)$ називається абсолютним інваріантом групи (0.2), якщо*

$$F\left(f^{\mu}(x,u,\tau), g^{k}(x,u,\tau)\right) = F(x,u).$$

Теорема 0.2 *$F(x,u)$ є інваріантом групи (0.2) тоді і тільки тоді, коли*

$$\xi_b^{\mu}\frac{\partial F}{\partial x_{\mu}} + \eta_b^{k}\frac{\partial F}{\partial u^{k}} = 0, \quad b = \overline{1,l}.$$

Якщо відома алгебра інваріантності диференціального рівняння, то, знайшовши інваріанти підалгебр цієї алгебри, можна будувати розв'язки цього рівняння в спеціальному вигляді (використовуючи так-звані анзаци) [34, 52, 32]. Анзаци, які відповідають операторам симетрії Лі (ліївські анзаци) редукують (зводять) дане диференціальне рівняння в частинних похідних до рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних.

Слід зауважити, що точні розв'язки рівнянь (систем) можна знаходити за допомогою методу анзаців, який запропонований у [33, 72]. Ідея цього методу базується на тому, що для проведення редукції і побудови точних розв'язків не обов'язково знати симетрію диференціального рівняння. Досить вказати анзац, який редукує дане рівняння до більш простого рівняння або системи рівнянь (наприклад до звичайного диференціального рівняння або системи). Певна річ, що метод анзаців значно розширює можливості побудови точних розв'язків в порівнянні з методом ліївської редукції, оскільки за допомогою методу анзаців будуються також і неліївські анзаци, які відповідають неліївській симетрії.

Інший спосіб побудови точних розв'язків – використовувати анзаци, що відповідають умовній симетрії диференціальних рівнянь (систем) [70, 52].

Нехай Q – деякий оператор першого порядку, який не належить алгебрі інваріантності (0.1).

Визначення 4 *Система (0.1) – умовно інваріантна відносно оператора Q, якщо існує деяка додаткова умова*

$$\widehat{L}\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{s}{u}\right) = 0, \tag{0.8}$$

така, що система (0.1) разом з (0.8) буде інваріантна відносно Q.

Додаткова умова (0.8) виділяє з множини розв'язків (0.1) деяку підмножину, що є інваріантною відносно оператора Q. Іншими словами, умова (0.8) розширює симетрію рівняння (0.1).

Зауважимо, що умовну симетрію можна також знаходити використовуючи метод анзаців. Якщо анзац неліївський і редукує диференціальне рівняння до рівняння з меншою кількістю незалежних змінних, то цей анзац відповідає умовній симетрії даного рівняння [7].

В дисертаційній роботі розглядаються рівняння та системи, що задовольняють принцип Лоренца Пуанкаре Айнштайна. Теоретико алгебраїчним формулюванням цього принципу є вимога інваріантності відносно алгебри Пуанкаре, яку ми будемо позначати $AP(1, n)$, з базисними операторами $P_\mu, J_{\mu\nu}$, що задовольняють комутаційні співвідношення:

$$\begin{aligned} &[P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad [P_\sigma, J_{\mu\nu}] = g_{\sigma\mu}P_\nu - g_{\sigma\nu}P_\mu; \\ &[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} \end{aligned} \tag{0.9}$$

Основна мета роботи – побудувати такі рівняння, які інваріантні відносно більш широких алгебр, ніж алгебра Пуанкаре $AP(1,n)$, зокрема, розширеної алгебри Пуанкаре, яку ми будемо позначати $A\widetilde{P}(1,n)$, з базисними операторами $P_\mu, J_{\mu\nu}, D$, що задовольняють комутаційні співвідношення (0.9) і

$$[P_\mu, D] = P_\mu, \qquad [J_{\mu\nu}, D] = 0; \tag{0.10}$$

та конформної алгебри, яку ми будемо позначати $AC(1,n)$, з базисними операторами $P_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu$, що задовольняють комутаційні співвідношення (0.9), (0.10) та

$$\begin{aligned} &[K_\mu, K_\nu] = 0, \qquad [K_\sigma, J_{\mu\nu}] = g_{\sigma\mu}K_\nu - g_{\sigma\nu}K_\mu; \\ &[P_\mu, K_\nu] = 2(g_{\mu\nu}D - J_{\mu\nu}), \qquad [D, K_\mu] = K_\mu. \end{aligned} \tag{0.11}$$

Тут P_μ – оператори зсувів, $J_{\mu\nu}$ – оператори поворотів і псевдоповоротів (Лоренца), D – оператор масштабних перетворень (дилатації), а K_μ – конформні оператори, $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, \ldots, -1)$ — метричний тензор $(n+1)$–вимірного псевдоевклідового простору.

В роботі побудовано широкі класи дилатаційно та конформно–інваріантних гіперболічних рівнянь другого порядку (хвильових рівнянь) та високого порядку (поліхвильових рівнянь) для дійсного і комплексного скалярних полів. Досліджено умовну інваріантність ряду хвильових рівнянь відносно нелінійних операторів, зокрема, нелінійного зображення розширеної алгебри Пуанкаре.

На основі узагальненого підходу Лі, який включає такі складові частини, як методи симетрійної та неліївської редукції, а також метод анзаців, побудовано широкі класи точних розв'язків поліхвильових рівнянь, систем хвильових рівнянь та узагальнених хвильових рівнянь.

Принципово важливим є те, що нам вдалося побудувати нові нелінійні зображення конформної алгебри для комплексного скалярного поля, які реалізуються на множині розв'язків нелінійного хвильового рівняння (див. параграф 2.1 та [55])

$$\Box u = \frac{\Box|u|}{|u|}u + \lambda u, \qquad \lambda \neq 0,$$

λ – дійсна стала.

По темі дисертації опубліковано 8 друкованих робіт [19, 20, 21, 55, 22, 66, 67, 87].

Результати, викладені в дисертації, доповідались на семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України, на IV міжнародній конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 1995), на наукових конференціях "Сучасні фізико–математичні дослідження молодих науковців вузів України" (Київ, 1994, 1995), на міжнародній конференції, присвяченій пам'яті Ганса Гана (Чернівці, 1994), на Всеукраїнській конференції "Розробка та застосування математичних методів в науково–технічних дослідженнях" (Львів, 1995), на міжнародній конференції "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Київ, 1995), на четвертій міжнародній конференції "Integral Methods in Science and Engineering" (Фінляндія, Оулу, 1996).

Висловлюю щиру подяку моєму науковому керівникові член-кор. НАН України Фущичу В.І. за постановку задач і постійну увагу до роботи, доктору фіз.–мат. наук Жданову Р.З. за наукове співробітництво в процесі роботи над дисертацією, а також усім учасникам наукового семінару відділу прикладних досліджень Інституту математики за корисне обговорення результатів.

Розділ 1

Симетрія та точні розв'язки нелінійних поліхвильових рівнянь

Основним (базовим) рівнянням, яке використовується в сучасній квантовій теорії для опису безспінової незарядженої частинки, є хвильове рівняння другого порядку

$$\Box u = F(u), \tag{1.1}$$

де $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$ - оператор д'Аламбера в $(n+1)$–вимірному псевдоевклідовому просторі $R(1,n)$, $\mu, \nu = \overline{0,n}$; по повторним індексам розуміється сума від 0 до n; $\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$; підняття та пониження векторних індексів здійснюється за допомогою згортки з метричним тензором: $x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$; $u = u(x) = u(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ - дійсна функція, $F(u)$ - довільна дійсна функція.

В останні роки для моделювання хвильових процесів запропоновано використовувати рівняня гіперболічного типу високого порядку [59, 34, 70]. Одним з найпростіших рівнянь такого типу є поліхвильове рівняння [34]

$$\Box^l u = F(x, u, u_\mu u^\mu), \tag{1.2}$$

де $\Box^l = \Box(\Box^{l-1})$, $l \in \mathrm{N}$, $u_\mu = \partial_\mu u$.

Той факт, що рівняння (1.2) є рівнянням високого порядку, ускладнює дослідження таких моделей. Але нетрівіальну інформацію про це рівняння та про його розв'язки можна отримати за допомогою його симетрійних властивостей.

У цьому розділі повністю розв'язана задача симетрійної класифікації багатовимірного поліхвильового рівняння

$$\Box^l u = F(u). \tag{1.3}$$

та знайдено його максимальну (в сенсі Лі) симетрію, що уточнює результати В.І. Фущича, М.І. Серова [26, 70].

На основі цього побудовано точні розв'язки нелінійних біхвильових ($l = 2$) та поліхвильових рівнянь, серед яких є такі, що містять довільні функції. У четвертому параграфі з симетрійної точки зору досліджуються системи хвильових рівнянь, що еквівалентні нелінійним біхвильовим рівнянням. Поліхвильові рівняння для комплексного скалярного поля вивчені в останньому параграфі.

1.1 Максимальні алгебри інваріантності поліхвильових рівнянь

Відомо [11], що хвильове рівняння (1.1) для довільної функції $F(u)$ інваріантне відносно алгебри Пуанкаре $AP(1,n)$ з базисними операторами

$$P_\mu = \partial_\mu, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu.$$

Симетрійна класифікація рівняння (1.1), яка проведена у [68], дає опис нелінійних функцій $F(u)$, при яких рівняння (1.1) інваріантне відносно перетворень дилатації та конформних перетворень. Виявляється, що існує лише два типу функцій $F(u)$, а саме,

$$F(u) = \lambda(u+c)^k, \qquad F(u) = \lambda \exp(cu),$$

(c, λ, $k \neq 1$ – довільні сталі), при яких пуанкаре–інваріантне рівняння (1.1) допускає оператор дилатації, а отже, буде інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре $A\widetilde{P}(1,n)$. Вимога конформної інваріантності ще більше конкретизує вигляд функцій F. Так, рівняння (1.1) інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,n)$, $n > 1$, тоді і тільки тоді, коли $F(u) = \lambda(u+c)^{(n+3)/(n-1)}$, та інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,1)$ тоді і тільки тоді, коли $F(u) = \lambda \exp(cu)$, $n = 1$, причому в останньому випадку хвильове рівняння допускає нескінченновимірну алгебру [52, 68].

Деякі симетрійні властивості поліхвильових рівнянь (1.3) були досліджені раніше. У роботах [26, 52] була встановлена конформна інваріантність поліхвильового рівняння (1.3) при $F(u) = \lambda u^{(n+1+2l)/(n+1-2l)}$, $n \neq 2l-1$, а в роботі [70] конформна інваріантність рівняння (1.3), при $F(u) = \lambda \exp(cu)$, $n = 2l - 1$. Конформна інваріантність псевдодифференціальних рівнянь (1.3) (коли l не обов'язково натуральне число) досліджена в роботах [45, 52].

В цьому параграфі, зокрема, буде показано, що окрім вказаних типів, не існує інших конформно–інваріантних поліхвильових рівнянь. При $l + n > 2$ справедливі такі твердження [66, 87]:

Теорема 1.1. *Максимальна алгебра інваріантності рівняння (1.3) з довільною функцією $F(u)$ – алгебра Пуанкаре $AP(1,n)$, яка генерується операторами $< P_\mu, J_{\mu\nu} >$.*

Теорема 1.2. *Всі рівняння типу (1.3), які допускають більш широку алгебру інваріантності ніж $AP(1,n)$ локально еквівалентні таким диференціальним рівнянням:*

1. $\Box^l u = \lambda u^k, \qquad k \neq 1, \qquad (1.4)$

$$MAI: \qquad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D \rangle,$$

$$D = x^\mu \partial_\mu + \frac{2l}{1-k} u \partial_u;$$

2. $\Box^l u = \lambda u^{(n+1+2l)/(n+1-2l)}, \qquad n+1 \neq 2l, \qquad (1.5)$

$$MAI: \qquad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(1)}, K_\mu^{(1)} \rangle,$$

$$D^{(1)} = x^\mu \partial_\mu + \frac{(2l-n-1)}{2} u \partial_u, \qquad K_\mu^{(1)} = 2x_\mu D^{(1)} - (x_\nu x^\nu) \partial_\mu;$$

3. $\Box^l u = \lambda \exp(u), \qquad (1.6)$

$$MAI: \qquad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(2)} \rangle,$$

$$D^{(2)} = x^\mu \partial_\mu - 2l \partial_u;$$

4. $\Box^l u = \lambda \exp(u), \qquad n+1 = 2l, \qquad (1.7)$

$$MAI: \qquad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(2)}, K_\mu^{(2)} \rangle,$$

$$K_\mu^{(2)} = 2x_\mu D^{(2)} - (x_\nu x^\nu) \partial_\mu.$$

5. $\Box^l u = \lambda u, \qquad (1.8)$

$$MAI: \qquad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, Q_1, I \rangle,$$

$$Q_1 = f(x)\partial_u, \qquad I = u\partial_u,$$

де $f(x)$ *– довільний розв'язок рівняння (1.8);*

$$6.\ \Box^l u = 0, \tag{1.9}$$

$$MAI: \qquad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(1)}, K_\mu^{(1)}, Q_2, I \rangle,$$

$$Q_2 = q(x)\partial_u,$$

де $q(x)$ *– довільний розв'язок рівняння (1.9).*

Зауважимо, що аналогічні теореми для біхвильового рівняння (коли $l = 2$) наведені у [19, 67].

Доведення теорем 1.1, 1.2 здійснюється за допомогою інфінітезимального алгоритму С. Лі [70, 17]. За рахунок того, що при $l > 1$ рівняння (1.3) є рівнянням високого порядку, застосування алгоритму Лі вимагає досить громіздких нестандартних обчислень. Нам вдалося провести повну симетрійну класифікацію рівняння (1.3) використовуючи комбінаторні властивості формул продовження [17].

Згідно з теоремою 0.1, критерій інваріантності рівняння (1.3) відносно оператора

$$X = \xi^\mu(x,u)\partial_\mu + \eta(x,u)\partial_u. \tag{1.10}$$

приймає вигляд:

$$\underset{2l}{X}(\Box^l u - F(u)) \Big|_{\Box^l u = F(u)} = 0, \tag{1.11}$$

де $2l$–продовження оператора (1.10) знаходиться за формулами (0.7) ($m = 1$).

Оскільки рівняння (1.3) можна переписати у вигляді

$$\Box^l u \equiv \sum_{\substack{l_\nu \in \mathbb{N},\, \nu=\overline{0,n} \\ l_0+l_1+\ldots+l_n=l}} \frac{(-1)^{l-l_0} l!}{l_0! l_1! \ldots l_n!} u_{\underbrace{0\ldots0}_{2l_0}\underbrace{1\ldots1}_{2l_1}\ldots\underbrace{n\ldots n}_{2l_n}} = F(u).$$

то дія оператора $\underset{2l}{X}$ на вираз $\Box^l u - F(u)$ дає:

$$\underset{2l}{X}(\Box^l u - F(u)) = \sum_{\substack{l_\nu \in \mathbb{N},\, \nu=\overline{0,n} \\ l_0+l_1+\ldots+l_n=l,}} (-1)^{l-l_0} \frac{l!}{l_0! l_1! \ldots l_n!} \times$$
$$\times \zeta_{\underbrace{0\ldots0}_{2l_0}\underbrace{1\ldots1}_{2l_1}\ldots\underbrace{n\ldots n}_{2l_n}} - \eta F'(u), \tag{1.12}$$

де

$$\zeta_{\underbrace{0\ldots0}_{2l_0}\underbrace{1\ldots1}_{2l_1}\ldots\underbrace{n\ldots n}_{2l_n}} =$$
$$= D_0^{(2l_0)} D_1^{(2l_1)} \ldots D_n^{(2l_n)} \eta - \sum_{\substack{\alpha_\nu \in \mathbb{N},\, 0 \le \alpha_\nu \le 2l_\nu, \\ \nu=\overline{0,n},\, \alpha_0+\ldots+\alpha_n \ne 2l}} C_{2l_0}^{\alpha_0} C_{2l_1}^{\alpha_1} \ldots C_{2l_n}^{\alpha_n} \times$$
$$\times u_{\mu \underbrace{0\ldots0}_{\alpha_0}\underbrace{1\ldots1}_{\alpha_1}\ldots\underbrace{n\ldots n}_{\alpha_n}} D_0^{(2l_0-\alpha_0)} D_1^{(2l_1-\alpha_1)} \ldots D_n^{(2l_n-\alpha_n)} \xi^\mu.$$

Тут C_β^α – біноміальні коефіцієнти, D_ν – оператор повного диференціювання: $D_\nu = \partial_\nu + u_\nu \partial_u + u_{\mu\nu}\partial_{u_\mu} + \ldots$; $D_0^{(2l_0)} = \underbrace{D_0 D_0 \ldots D_0}_{2l_0}$ і так далі.

Якщо у виразі (1.12) перейти на многовид $\Box^l u = F(u)$, і розщепити по незалежним змінним, то ми одержимо систему визначальних рівнянь для функцій $\xi^\mu(x,u)$, $\eta(x,u)$. Оскільки для довільного l ця процедура досить громіздка, то ми більш детально зупинимось на випадку $l = 2$. Тоді вираз (1.12) прийме вигляд:

$$\begin{gathered}\underset{4}{X}(\Box^2 u - F) = (D_\mu D^\mu)^2 \eta - u_\nu (D_\mu D^\mu)^2 \xi^\nu - 4u_{\mu\nu} D_\delta D^\delta D^\mu \xi^\nu - \\ -2\Box u_\nu D_\mu D^\mu \xi^\nu - 4u_{\mu\nu\delta} D^\mu D^\delta \xi^\nu - 4\Box u_{\mu\nu} D^\mu \xi^\nu - \eta F',\end{gathered} \tag{1.13}$$

де, як і всюди, $D^\mu = g^{\mu\nu} D_\nu$.

Переходячи на многовид $\Box^2 u = F(u)$, прирівнюємо коефіцієнти спочатку при старших похідних до нуля:

$$\begin{aligned} &\Box u_{\mu\nu},\ \mu \ne \nu: && D^\mu(\xi^\nu) + D^\nu(\xi^\mu) = 0; \\ &\Box u_{\mu\nu},\ \mu = \nu,\ \mu,\nu \ne 0: && D_0(\xi^0) = D_1(\xi^1) = \ldots D_n(\xi^n); \end{aligned}$$

З останніх рівностей випливає, що ξ^ν мають задовольняти системі рівнянь Кіллінга:

$$\begin{aligned} &\xi_0^i = \xi_i^0,\ \xi_j^i = -\xi_i^j,\ i \ne j,\ i,j = \overline{1,n}; \\ &\xi_0^0 = \xi_1^1 = \cdots = \xi_n^n; \end{aligned} \tag{1.14}$$

та рівняння

$$\xi^\mu_u = 0, \tag{1.15}$$

де $\xi^\mu_\nu = \dfrac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}$ і.т.д. З урахуванням цього перепишемо вираз (1.13) у вигляді:

$$\underset{4}{X}(\Box^2 u - F(u)) = (D_\mu D^\mu)^2 \eta + 2(n-1)\xi^\nu_{00}\Box u_\nu -$$
$$-4\xi^\nu_{00}\Box u_\nu - 4\xi^0_0 \Box^2 u - \eta F'(u).$$

Подальше розщеплення останнього виразу приводить до таких рівнянь:

$$\eta_{uu} = 0, \qquad 2\eta^\nu_u = (3-n)\xi^\nu_{00},$$

$$\Box^2 \eta - \eta F'(u) + F(u)(\eta_u - 4\xi^0_0) = 0.$$

$$\eta_{00u} = 0 \qquad \eta_{11u} = 0, \qquad \text{коли } n = 1$$

Можна переконатись, що коли l – довільне натуральне число, то визначальні рівняння приймають вигляд (1.14), (1.15) та

$$\begin{gathered}\eta_{uu} = 0, \quad 2\eta^\nu_u = (2l-n-1)\xi^\nu_{00}, \\ \eta_{00u} = \frac{2l-4}{3}\xi^0_{000}, \qquad \eta_{11u} = \frac{2l-4}{3}\xi^1_{111} \qquad \text{коли } n = 1\end{gathered} \tag{1.16}$$

$$\Box^l \eta - \eta F'(u) + F(u)(\eta_u - 2l\xi^0_0) = 0. \tag{1.17}$$

Загальний розв'язок системи (1.14), (1.15), (1.16) має вигляд:

$$\begin{gathered}\xi^\nu = 2x^\nu x_\mu c^\mu - x_\mu x^\mu c^\nu + b^{\nu\mu} x_\mu + dx^\nu + a^\nu, \\ \eta = ((2l-n-1)c^\mu x_\mu + a)u + h(x),\end{gathered} \tag{1.18}$$

де c^μ, $b^{\nu\mu} = -b^{\mu\nu}$, d, a^ν, a – довільні константи, $h(x)$ – довільна гладка функція.

Підстановка виразів (1.18) до класифікуючого рівняння (1.17) дає:

$$\begin{gathered}\Box^l h(x) - (((2l-n-1)c^\mu x_\mu + a)u + h(x))F'(u) + \\ +((2l-n-1)c^\mu x_\mu + a - 2l(2c^\mu x_\mu + d))F(u) = 0.\end{gathered} \tag{1.19}$$

Звідси очевидно, що якщо $F(u)$ – довільна функція, то $c^{\mu} = a = d = 0$, $h(x) \equiv 0$. А отже, рівняння (1.3) інваріантне відносно оператора

$$X = b^{\mu\nu} x_{\mu} \partial_{\nu} + a^{\nu} \partial_{\nu},$$

звідки і випливає твердження теореми 1.1.

Якщо $F(u) = 0$, то рівняння (1.3) інваріантне відносно оператора (1.10), де ξ^{μ} і η мають вигляд (1.18), причому $\Box^{l} h(x) = 0$, що і стверджується в пункті 6 теореми 1.2.

Якщо $F(u) = \lambda u$, то з (1.19) випливає, що $c^{\mu} = d = 0$, $\Box^{l} h(x) = \lambda h(x)$. Отже, ми прийшли до пункту 5 теореми 1.2.

Очевидно, що випадок $F(u) = \lambda_1 u + \lambda_2$ зводиться до $F(u) = \lambda_1 u$ за допомогою локальної заміни $u \to u - \lambda_2/\lambda_1$ якщо $\lambda_1 \neq 0$ і до $F(u) = 0$ за допомогою заміни $u \to u + (\lambda_2/2) x_0^2$ якщо $\lambda_1 = 0$.

Припустимо тепер, що $F''(u) \neq 0$. Тоді, диференцюючи (1.19) послідовно по x_{μ}, x_{ν}, u, одержимо:

$$h_{\mu\nu}(x) F''(u) = 0.$$

Звідси, $h_{\mu\nu}(x) = 0$ або $h = s^{\mu} x_{\mu} + s$, де s^{μ}, s – довільні сталі. Отже, (1.19) перепишеться у вигляді:

$$\begin{gathered}(((2l - n - 1) c^{\mu} x_{\mu} + a) u + s^{\mu} x_{\mu} + s) F'(u) - \\ -((2l - n - 1) c^{\mu} x_{\mu} + a - 2l(2 c^{\mu} x_{\mu} + d)) F(u) = 0.\end{gathered}$$

Розщеплюючи по змінним x_{μ}, ми одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} (2l - n - 1)(u F'(u) - F(u)) c^{\mu} + s^{\mu} F'(u) + 4l c^{\mu} F(u) = 0, \\ a(u F'(u) - F(u)) + s F'(u) + 2l d F(u) = 0, \end{cases}$$

загальний розв'язок якої з точністю до заміни змінних $u \to \lambda_1 u + \lambda_2$ має вигляд:

$$\begin{array}{l|l} F(u) = \lambda u^{k}, & c^{\mu} = s^{\mu} = s = 0;\ a = \frac{2ld}{1-k}; \\ F(u) = \lambda u^{\frac{n+1+2l}{n+1-2l}}, & n + 1 \neq 2l,\ s^{\mu} = s = 0;\ 2a = (2l - n - 1) d; \\ F(u) = \lambda \exp(u), & n + 1 \neq 2l,\ c^{\mu} = s^{\mu} = a = 0;\ s = -2ld; \\ F(u) = \lambda \exp(u), & n + 1 = 2l,\ a = 0,\ 4l c^{\mu} + s^{\mu} = 0;\ s = -2ld, \end{array}$$

що і приводить нас до пунктів 1–4 теореми 1.2.**Теореми доведено.**

З доведених теорем випливає, що рівняння типу (1.3) інваріантне відносно розширеної групи Пуанкаре $A\widetilde{P}(1,n)$ тоді і лише тоді, коли воно еквівалентне одному з рівнянь (1.4), (1.6), (1.9).

Наступне твердження є також наслідком теореми 1.2, але завдяки його важливості ми наведемо його як окрему теорему.

Теорема 1.3. *Рівняння (1.3) допускає конформну алгебру $AC(1,n)$ тоді і тільки тоді, коли воно еквівалентне рівнянням (1.5) або (1.7).*

У заключенні цього параграфу ми вкажемо на одну важливу властивість лінійного поліхвильового рівняння (1.9), яка випливає з доведених теорем [87].

Твердження *У випадку, коли $n+1=2l$, на множині розв'язків рівняння (1.9) реалізується 2 нееквівалентних зображення конформної алгебри $AC(1,n)$:*

$$
\begin{aligned}
1.\ \ & P^{(1)}_\mu = P_\mu = \partial_\mu, && J^{(1)}_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu, \\
& D^{(1)} = x^\mu\partial_\mu, && K^{(1)}_\mu = 2x_\mu D^{(1)} - (x_\nu x^\nu)\partial_\mu;
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

$$
\begin{aligned}
2.\ \ & P^{(2)}_\mu = P_\mu = \partial_\mu, && J^{(2)}_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu, \\
& D^{(2)} = x^\mu\partial_\mu + \partial_u, && K^{(2)}_\mu = 2x_\mu D^{(2)} - (x_\nu x^\nu)\partial_\mu.
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

Іншими словами, оператори (1.20), (1.21) є операторами симетрії рівняння (1.3) і, крім того, не існує локальної заміни змінних, яка переводить зображення $\langle P^{(1)}_\mu, J^{(1)}_{\mu\nu}, D^{(1)}, K^{(1)}_\mu\rangle$ у зображення $\langle P^{(2)}_\mu, J^{(2)}_{\mu\nu}, D^{(2)}, K^{(2)}_\mu\rangle$. Зокрема, хвильове рівняння (1.1) ($l=1$) допускає два нееквівалентних зображення конформної алгебри лише в одновимірному просторі.

Зауважимо, що симетрія полігармонічних рівнянь розглядалась в [23]. Властивості бігармонічних функцій досліджено в [13], а один клас точних розв'язків нелінійних бігармонічних рівнянь знайдено в [6]. Галілей-інваріантні рівняння параболічного типу високого порядку побудовані в [71].

1.2 Редукція та точні розв'язки деяких класів одновимірних біхвильових рівнянь

У цьому параграфі проводиться редукція одновимірних біхвильових рівнянь до звичайних диференціальних рівнянь за підалгебрами розширеної алгебри Пуанкаре $A\widetilde{P}(1,1)$ та конформної алгебри $AC(1,1)$ [36, 86]. Побудовано багатопараметричні класи інваріантних розв'язків. Зауважимо, що інваріантні розв'язки хвильового рівняння (1.1) побудовано в [52, 68, 88, 28, 36].

1.2.1 Рівняння $\Box^2 u = \lambda e^u$

Як випливає з теореми 1.2, МАІ біхвильового рівняння

$$\Box^2 u = \lambda e^u, \tag{1.22}$$

при $n = 1$ є розширена алгебра Пуанкаре $A\widetilde{P}(1,1)$ з базисними операторами $< P_0, P_1, J_{01}, D >$, де

$$D = x^0\partial_0 + x^1\partial_1 - 4\partial_u.$$

Знайдемо точні розв'язки рівняння (1.22), інваріантні відносно одновимірних підалгебр розширеної алгебри Пуанкаре $A\widetilde{P}(1,1)$.

Оскільки оператори цієї алгебри мають структуру

$$X = \xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta(x)\partial_u \tag{1.23}$$

то інваріантні розв'язки рівняння (1.22) можуть бути знайдені за допомогою анзацу [34, 70]

$$u(x) = \varphi(\omega) + g(x), \tag{1.24}$$

де $\omega = \omega(x)$ — інваріантна змінна.

Неізоморфні підалгебри алгебри $A\widetilde{P}(1,n)$ побудовані в роботах [36, 86]. Знайшовши їх інваріанти, ми одержимо усі $\widetilde{P}(1,1)$ нееквівалентні анзаци, які, разом з відповідними підалгебрами наведені у таблиці 1.1. Зауважимо, що при побудові нееквівалентних анзаців ми враховували інваріантність рівняння (1.22) відносно дискретних симетрій виду:

$$\begin{array}{lcl} x'_0 = x_0, & \quad\text{і}\quad & x'_0 = x_1, \\ x'_1 = -x_1; & & x'_1 = x_0. \end{array} \tag{1.25}$$

Підставляючи анзаци з таблиці 1.1 до (1.22), ми отримаємо такі редуковані рівняння для функції $\varphi(\omega)$:

1° $\quad 0 = \lambda e^{\varphi}$,

2° $\quad \varphi^{(4)}(\alpha^2-1)^2+2\varphi^{(3)}\alpha(1-\alpha^2)-\varphi^{(2)}(1-\alpha^2) = \dfrac{\lambda}{16}\exp\left(\varphi+\dfrac{2\omega}{\alpha+1}\right)$,

3° $\quad \varphi^{(4)} - \varphi^{(3)} = \dfrac{\lambda}{64}e^{\varphi}$,

4° $\quad \varphi^{(4)}\omega^2 + 4\varphi^{(3)}\omega + 2\varphi^{(2)} = \dfrac{\lambda}{16}e^{\varphi}$,

5° $\quad \varphi^{(4)} = \lambda e^{\varphi}$,

6° $\quad 0 = \lambda e^{\varphi}$.

Рівняння 5° має частинний розв'язок

$$\varphi = \ln\left(\frac{24}{\lambda}(\omega+c)^{-4}\right), \qquad \lambda > 0,$$

з якого, враховуючи вигляд відповідного анзацу, випливають такі точні розв'язки рівняння (1.22) [22]:

$$\begin{aligned} u &= \ln\left(\frac{24}{\lambda}(x_0+c_1)^{-4}\right), \qquad \lambda > 0,\\ u &= \ln\left(\frac{24}{\lambda}(x_1+c_2)^{-4}\right), \qquad \lambda > 0. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Тут c, c_1, c_2 – довільні сталі. Ці розв'язки інваріантні відносно операторів P_0 і P_1 відповідно.

Таблиця 1.1:

N	Алгебра	Інваріантні змінні ω	Анзац
1°	$D - J_{01}$	$x_0 + x_1$	$u = \varphi(\omega) - 2\ln(x_0 - x_1)$
2°	$D + \alpha J_{01}, \quad \alpha \neq -1$	$(1+\alpha)\ln(x_1 - x_0) - (1-\alpha)\ln(x_0+x_1)$	$u = \varphi(\omega) - \dfrac{4}{\alpha+1}\ln(x_0+x_1)$
3°	$D - J_{01} + P_0$	$\ln(x_0 - x_1 + 1/2) - 2(x_0 + x_1)$	$u = \varphi(\omega) - 2\ln(x_0 - x_1 + 1/2)$
4°	J_{01}	$x_0^2 - x_1^2$	$u = \varphi(\omega)$
5°	P_0	x_1	$u = \varphi(\omega)$
6°	$P_0 + P_1$	$x_0 - x_1$	$u = \varphi(\omega)$

Оскільки алгебра $A\widetilde{P}(1,1) = < P_0, P_1, J_{01}, D >$ породжує чотирьохпараметричну групу перетворень

$$x_0' = \rho x e^a + b_1;$$

$$x_1' = \beta x e^a + b_2;$$

$$u' = u - 4a,$$

($\rho^2 = -\beta^2 = 1$, $\rho\beta = 0$, a, b_1, b_2 – довільні сталі), яка допускається рівнянням (1.22), то за допомогою неї ми можемо розмножити розв'язки (1.26). Тоді одержимо таку сім'ю інваріантних розв'язків:

$$u = \ln\left(\frac{24}{\lambda}(\alpha x + b)^{-4}\right), \tag{1.27}$$

де $\alpha^2 = \pm 1$; b – довільні сталі.

Слід зауважити, що розв'язки (1.27) можна отримати використовуючи анзац [67]:

$$u = \ln\left\{\frac{24}{\lambda}\frac{\left(\dot{\varphi}_1(\omega_1)\dot{\varphi}_2(\omega_2)\right)^2}{\left(\varphi_1(\omega_1) + \varphi_2(\omega_2)\right)^4}\right\},$$

$$\omega_1 = x_0 + x_1, \qquad \omega_2 = x_0 - x_1,$$

який зводить рівняння (1.22) до однієї з наступних систем:

$$1. \quad \begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = 0, \\ \ddot{\varphi}_2 = 0; \end{cases} \qquad 2. \quad \begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = 2\dot{\varphi}_1^2/\varphi_1, \\ \ddot{\varphi}_2 = 2\dot{\varphi}_2^2/\varphi_2. \end{cases}$$

Тут $\dot{\varphi}$ і $\ddot{\varphi}$ означають першу та другу похідні за відповідним аргументом. Загальний розв'язок цих систем приводить до розв'язку (1.27) рівняння (1.22).

1.2.2 Рівняння $\Box^2 u = \lambda u^k$.

Як випливає з теореми 1.2, при $n = 1$ рівняння

$$\Box^2 u = \lambda u^k \tag{1.28}$$

інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре з базисними операторами $< P_0, P_1, J_{01}, D >$,

$$D = x^0\partial_0 + x^1\partial_1 + \frac{4}{1-k}u\partial_u.$$

Оператори з цієї алгебри мають вид:

$$X = \xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta(x)u\partial_u. \tag{1.29}$$

Отже, усі інваріантні розв'язки рівняння (1.28) можуть бути знайдені за допомогою анзацу [70, 34]:

$$u(x) = f(x)\varphi(\omega), \tag{1.30}$$

де $\omega = \omega(x)$ – інваріантна змінна.

Знайшовши інваріанти неізоморфних одновимірних підалгебр алгебри $A\widetilde{P}(1,1)$ [36, 86], ми одержимо усі $\widetilde{P}(1,1)$–нееквівалентні анзаци, які редукують рівняння (1.28) до звичайних диференціальних рівнянь. Анзаци і відповідні підалгебри записані до таблиці 1.2.

Підставляючи анзаци з таблиці 1.2 до рівняння (1.28) ми отримаємо такі редуковані рівняння для функції $\varphi(\omega)$:

1° $$\frac{1+k}{(1-k)^2}\varphi^{(2)} = \frac{\lambda}{32}\varphi^k,$$

2° $$(\alpha-1)^2\varphi^{(4)}\omega^2 + 2(\alpha-1)(\alpha+1)^2\left(\frac{3k+1}{1-k} + 2\alpha\right)\omega\varphi^{(3)} + $$
$$+ 2\left(\alpha^2 - 4\alpha + 3 + \frac{6\alpha-10}{1-k} + \frac{8}{(1-k)^2}\right)\varphi^{(2)} = \frac{\lambda}{16}(\alpha+1)^2\varphi^k,$$

Таблиця 1.2:

N	Алгебра	Інваріантні змінні ω	Анзац
1°	$D - J_{01}$	$x_0 + x_1$	$u = (x_0 - x_1)^{\frac{2}{1-k}}\varphi(\omega)$
2°	$D + \alpha J_{01}, \quad \alpha \neq -1$	$(x_0 - x_1)(x_0 + x_1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}$	$u = (x_0 + x_1)^{\frac{4}{(1-k)(\alpha+1)}}\varphi(\omega)$
3°	$D + J_{01} + P_0$	$(x_0 + x_1 + \frac{1}{2})\times$ $\times\exp\Big(2(x_1 - x_0)\Big)$	$u = \exp\Big(\frac{4}{k-1}(x_1 - x_0)\Big)\varphi(\omega)$
4°	J_{01}	$x_0^2 - x_1^2$	$u = \varphi(\omega)$
5°	P_0	x_1	$u = \varphi(\omega)$
6°	$P_0 + P_1$	$x_0 + x_1$	$u = \varphi(\omega)$

$3^\circ \qquad \varphi^{(4)}\omega^2 + \frac{5k-1}{k-1}\varphi^{(3)}\omega + \frac{4k^2}{(1-k)^2}\varphi^{(2)} = \frac{\lambda}{64}\varphi^k,$

$4^\circ \qquad \varphi^{(4)}\omega^2 + 4\varphi^{(3)}\omega + 2\varphi^{(2)} = \frac{\lambda}{16}\varphi^k,$

$5^\circ \qquad \varphi^{(4)} = \lambda\varphi^k,$

$6^\circ \qquad \lambda\varphi^k = 0,$

частинні розв'язки яких можна шукати у вигляді

$$\varphi = c_1(\omega + c)^{c_2},$$

де c_1, c_2 – певні сталі.

Рівняння 1°, 2°, 4° мають частинний розв'язок виду:

$$\varphi = \left(\frac{64}{\lambda}\frac{(k+1)^2}{(k-1)^4}\right)^{\frac{1}{k-1}} \omega^{-\frac{2}{k-1}}, \qquad k \neq -1,$$

а рівняння 5° – виду:

$$\varphi = \left(\frac{8}{\lambda}\frac{(k+1)(k+3)(3k+1)}{(k-1)^4}\right)^{\frac{1}{k-1}} (\omega + c)^{\frac{4}{1-k}}, \tag{1.31}$$

$$k \neq -1, -3, -\frac{1}{3}$$

Ці результати приводять нас до таких розв'язків рівняння (1.28) [87]:

$$u = \left(\frac{64}{\lambda}\frac{(k+1)^2}{(k-1)^4}\right)^{\frac{1}{k-1}} \left((x_0 + c_0)^2 - (x_1 + c_1)^2\right)^{-\frac{2}{k-1}}, \qquad k \neq -1,$$

$$u = \left(\frac{8}{\lambda}\frac{(k+1)(k+3)(3k+1)}{(k-1)^4}\right)^{\frac{1}{k-1}} (x_0 + c_2)^{\frac{4}{1-k}}, \qquad k \neq -1, -3, -\frac{1}{3},$$

$$u = \left(\frac{8}{\lambda}\frac{(k+1)(k+3)(3k+1)}{(k-1)^4}\right)^{\frac{1}{k-1}} (x_1 + c_3)^{\frac{4}{1-k}}, \qquad k \neq -1, -3, -\frac{1}{3},$$

де c_0, c_1, c_2, c_3 – довільні сталі.

За допомогою чотирьохпараметричної групи перетворень

$$x_0' = \rho x e^a + b_1;$$

$$x_1' = \beta x e^a + b_2;$$

$$u' = u \exp(4a/(1-k)).$$

($\rho^2 = -\beta^2 = 1$, $\rho\beta = 0$, a, b_1, b_2 довільні сталі), яка породжується операторами з розширеної алгебри Пуанкаре $\widetilde{AP}(1,1) =< P_0, P_1, J_{01}, D >$, ми можемо розмножити побудовані розв'язки біхвильового рівняння і отримати ще такий розв'язок:

$$u = \left(\frac{8}{\lambda}\frac{(k+1)(k+3)(3k+1)}{(k-1)^4}\right)^{\frac{1}{k-1}} (\alpha x + c_3)^{\frac{4}{1-k}},$$

де $k \neq -1, -3, -\frac{1}{3}$, $\alpha^2 = \pm 1$.

Порівнюючи одержані розв'язки з розв'язками нелінійного хвильового рівняння [52, 68, 88, 28, 36]

$$\Box u = \lambda u^k. \tag{1.32}$$

ми бачимо, що вони мають подібну структуру.

1.2.3 Конформно–інваріантне рівняння $\Box^2 u = \lambda u^{-3}$.

Як випливає з теореми 1.2, у випадку, коли $n = 1$ рівняння

$$\Box^2 u = \lambda u^{-3} \tag{1.33}$$

інваріантне відносно шестивимірної конформної алгебри $AC(1,1)$ з базисними операторами $< P_0, P_1, J_{01}, D^{(1)}, K_0^{(1)}, K_1^{(1)} >$,

$$D^{(1)} = x^0\partial_0 + x^1\partial_1 + u\partial_u \qquad K_\mu^{(1)} = 2x_\mu D^{(1)} - (x_\nu x^\nu)\partial_\mu.$$

Як і раніше інваріантні розв'язки рівняння (1.33) мають структуру (1.30), оскільки усі оператори з $AC(1,1)$ належать до класу (1.29). $C(1,1)$-нееквівалентні анзаци одержуються за допомогою відшукання інваріантів неізоморфних одновимірних підалгебр конформної алгебри $AC(1,1)$ [36]. Результати зведені у таблиці 1.3., де розглядаються лише підалгебри, що містять конформні оператори. Решту підалгебр було розглянуто у попередньому пункті.

Анзаци, наведені у таблиці 1.3, редукують рівняння (1.33) до таких рівнянь для функції $\varphi(\omega)$:

1° $\qquad \varphi^{(4)} + 2\varphi^{(2)} + \varphi = \dfrac{\lambda}{16}\varphi^{-3}$;

2° $\qquad (\alpha^2-1)^2\varphi^{(4)} + 2(\alpha^2+1)\varphi^{(2)} + \varphi = \dfrac{\lambda}{16}\varphi^{-3}$;

3° $\qquad \varphi^{(2)} = \dfrac{\lambda}{16}\varphi^{-3}$;

Таблиця 1.3:

N	Алгебра	Інваріантні змінні ω	Анзац
1°	$P_0 + K_0^{(1)}$	$\mathrm{arctg}(x_1 - x_0) + {}$ $+\mathrm{arctg}(x_1 + x_0)$	$u = ((x_0 - x_1)^2 + 1)^{1/2} \times$ $\times ((x_0 + x_1)^2 + 1)^{1/2} \varphi(\omega)$
2°	$P_0 + K_0^{(1)} + \alpha(K_1^{(1)} - P_1)$ $0 < \alpha < 1$	$(\alpha - 1)\mathrm{arctg}(x_0 - x_1) + {}$ $+(\alpha + 1)\mathrm{arctg}(x_1 + x_0)$	$u = ((x_0 - x_1)^2 + 1)^{1/2} \times$ $\times ((x_0 + x_1)^2 + 1)^{1/2} \varphi(\omega)$
3°	$P_0 + K_0^{(1)} + K_1^{(1)} - P_1$	$x_0 + x_1$	$u = ((x_0 - x_1)^2 + 1)^{1/2} \times$ $\times \varphi(\omega)$
4°	$2P_1 + K_0^{(1)} + K_1^{(1)}$	$x_0 + x_1 + {}$ $+\frac{1}{2} \ln \frac{1 + x_0 - x_1}{1 - x_0 + x_1}$	$u = ((x_0 - x_1)^2 + 1)^{1/2} \times$ $\times \varphi(\omega)$
5°	$2P_1 - K_0^{(1)} - K_1^{(1)}$	$x_0 + x_1 + {}$ $+\mathrm{arctg}(x_0 - x_1)$	$u = ((x_0 - x_1)^2 + 1)^{1/2} \times$ $\times \varphi(\omega)$
6°	$P_0 + K_0^{(1)} + K_1^{(1)} - P_1 -$ $- \beta(J_{01} + D^{(1)}),\ \beta > 0$	$\ln(x_0 + x_1) -$ $- \beta\mathrm{arctg}(x_1 - x_0)$	$u = ((x_0 - x_1)^2 + 1)^{1/2} \times$ $\times (x_0 + x_1)^{1/2} \varphi(\omega)$

4° $\qquad \varphi^{(4)} - \varphi^{(2)} = \dfrac{\lambda}{16}\varphi^{-3};$

5° $\qquad \varphi^{(4)} + \varphi^{(2)} = \dfrac{\lambda}{16}\varphi^{-3};$

6° $\qquad 4\beta^2\varphi^{(4)} + (4 - \beta^2)\varphi^{(2)} - \varphi = \dfrac{\lambda}{4}\varphi^{-3}.$

Оскільки загальний розв'язок рівняння 3° має вигляд:

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{(c_1\omega + c_2)^2}{c_1} + \frac{\lambda}{16c_1}}, \qquad c_1 \neq 0;$$

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\omega + c},$$

де c, c_1, c_2 – довільні сталі, то враховуючи анзац 3°, вирази

1. $u = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\lambda}{a_1}\right)^{1/4} \left|(x_0 + x_1 + a_2)^2 - a_1\right|^{1/2} \left|x_0 - x_1 + a_3\right|^{1/2},$

2. $u = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\lambda}{b_1}\right)^{1/4} \left|(x_0 - x_1 + b_2)^2 - b_1\right|^{1/2} \left|x_0 + x_1 + b_3\right|^{1/2},$

3. $u = \pm\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\lambda}{c_1c_2}\right)^{1/4} \left|(x_0 - x_1 + c_3)^2 + c_1\right|^{1/2} \left|(x_0 + x_1 + c_4)^2 + c_2\right|^{1/2},$

($a_i, b_i, c_j,\ i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4}$ довільні сталі) будуть розв'язками рівняння (1.33) [66, 87].

Крім того, як було доведено у попередньому пункті, рівняння (1.33) має ще такий розв'язок:

$$u = \pm\lambda^{1/4}\left|(x_0 + c_0)^2 - (x_1 + c_1)^2\right|^{1/2}$$

де c_0, c_1 – довільні сталі.

При перетвореннях з конформної групи $C(1,1)$:

$$x_0' = \frac{\rho x - \rho\gamma x^2}{1 - 2\gamma x + \gamma^2 x^2}e^a + b_1;$$

$$x_1' = \frac{\beta x - \beta\gamma x^2}{1 - 2\gamma x + \gamma^2 x^2}e^a + b_2;$$

$$u' = \frac{ue^a}{1 - 2\gamma x + \gamma^2 x^2},$$

($\rho^2 = -\beta^2 = 1$, $\rho\beta = 0$, a, b_1, b_2, γ_μ – довільні сталі), знайдені розв'язки переходять самі в себе, тобто не можуть бути розмножені за допомогою $C(1,1)$.

Слід зауважити, що такі ж самі розв'язки можуть бути отримані використовуючи анзац виду [87]:

$$u = \varphi_1(\omega_1)\varphi_2(\omega_2), \qquad \omega_1 = x_0 + x_1, \;\; \omega_2 = x_0 - x_1,$$

який зводить рівняння (1.33) до системи звичайних диференціальних рівнянь для функцій $\varphi_1(\omega_1)$ і $\varphi_2(\omega_2)$, а саме,

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{c}{4}\varphi_1^{-3}, \qquad \ddot{\varphi}_2 = \frac{\lambda}{4c}\varphi_2^{-3};$$

де c – довільна стала.

1.3 Редукція та точні розв'язки багатовимірних поліхвильових рівнянь з нелінійністю u^k

Розглянемо багатовимірне нелінійне біхвильове рівняння

$$\Box^2 u = \lambda u^k \tag{1.34}$$

і проведемо його редукцію до звичайних диференціальних рівнянь. Як випливає з теореми 1.1, рівняння (1.34) інваріантне відносно алгебри

Пуанкаре $AP(1,n)$. А отже, його розв'язки можна шукати у вигляді [34, 70]:

$$u = \varphi(\omega), \tag{1.35}$$

де ω – інврінти підалгебр рангу n алгебри $AP(1,n)$, які наведені у [36, 62]:

$$x_0, \quad x_n, \quad x_0 - x_n, \quad (x_0 - x_n)^2 - 4x_{n-1}, \quad \tau \ln(x_0 - x_n) + x_{n-1},$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2, \qquad x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_{m-1}^2, \qquad m = \overline{2, n},$$

(τ – довільна стала).

Оскільки, згідно з теоремою 1.2, рівняння (1.34) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре $A\widetilde{P}(1,n)$, то анзац (1.35) можна розмножити за допомогою перетворень відповідної групи:

$$x'_\mu = \beta_\mu x e^a + b_\mu;$$

$$u' = u \exp(4a/(1-k))$$

де β_μ – довільні $(n+1)$–компонентні коваріантні вектори, причому $\beta_{\mu\delta}\beta_\nu^\delta = g_{\mu\nu}$, a, b_μ – довільні сталі.

Тоді ми отримаємо, що якщо ω визначається однією з рівностей:

$$\begin{gathered} \omega = \beta x + \tau, \qquad \omega = \tau \ln(\alpha x) + \beta x + \tau_1, \\ \omega = \tau(\alpha x + \tau_1)^2 + \beta x + \tau_2, \qquad \alpha^2 = \alpha\beta = 0,\ \beta^2 = -1; \end{gathered} \tag{1.36}$$

$$\omega = \beta_0 x + b_0, \qquad \beta_0^2 = 1; \tag{1.37}$$

$$\begin{gathered} \omega = (\beta_1 x + b_1)^2 + (\beta_2 x + b_2)^2 + \ldots + (\beta_m x + b_m)^2, \\ \omega = (\beta_0 x + b_0)^2 - (\beta_1 x + b_1)^2 - \ldots - (\beta_{m-1} x + b_{m-1})^2, \\ m = \overline{2, n}, \qquad \beta_\mu \beta_\nu = g_{\mu\nu}, \end{gathered} \tag{1.38}$$

$$\omega = \alpha x, \qquad \alpha^2 = 0, \tag{1.39}$$

($\tau, \tau_1, \tau_2, b_\mu$ – довільні сталі), то анзац (1.35) редукує рівняння (1.34) до таких звичайних диференціальних рівнянь:

$$\varphi^{(4)} = \lambda \varphi^k, \tag{1.40}$$

якщо ω має вигляд (1.36) або (1.37);

$$16\varphi^{(4)}\omega^2 + 16(m+2)\varphi^{(3)}\omega + 4m(m+2)\varphi^{(2)} = \lambda\varphi^k, \tag{1.41}$$

якщо ω має вигляд (1.38);

$$0 = \lambda\varphi^k,$$

якщо ω має вигляд (1.39).

Частинні розв'язки рівнянь (1.40), (1.41) будемо шукти у вигляді

$$\varphi = c_1\omega^{c_2}, \tag{1.42}$$

де c_1, c_2 – деякі сталі.

Оскільки рівняння (1.40) має розв'язок (1.31), то біхвильове рівняння (1.34) має точні розв'язки

$$u = \left[\frac{8(k+1)(k+3)(3k+1)}{\lambda(k-1)^4}\right]^{1/(k-1)} \omega^{4/(1-k)}, \tag{1.43}$$

де ω визначається однією з формул (1.36), (1.37).

Частинний розв'язок рівняння (1.41) має вигляд:

$$\varphi = \left[\frac{8(k+1)(2+2k+m(1-k))(4k+m(1-k))}{\lambda(k-1)^4}\right]^{1/(k-1)} \omega^{2/(1-k)}.$$

Звідси рівняння (1.34) має такі точні розв'язки:

$$u = \left[\frac{8(k+1)(2+2k+m(1-k))(4k+m(1-k))}{\lambda(k-1)^4}\right]^{1/(k-1)} \omega^{2/(1-k)},$$

де ω визначається однією з рівностей (1.38).

Побудуємо точні розв'язки багатовимірного поліхвильового рівняння

$$\Box^l u = \lambda u^k. \tag{1.44}$$

Аналогічно попередньому, анзац (1.35) редукує рівняння (1.44) до звичайних диференціальних рівнянь порядку $2l$, розв'язки яких можна шукати у вигляді (1.42). Враховуючи це, ми не будемо проводити редукцію рівняння (1.44), а одразу будемо шукати його розв'язки у вигляді

$$u = c_1\omega^{c_2}, \tag{1.45}$$

де ω має вигляд (1.36) – (1.38). Підставляючи (1.45) до рівняння (1.44) отримаємо, що вирази

$$u = \left[(-1)^l \lambda^{-1} (k-1)^{-2l} \prod_{i=0}^{2l-1} (2l + i(k-1)) \right]^{1/(k-1)} \omega^{2l/(1-k)},$$

(ω має вигляд (1.36));

$$u = \left[\lambda^{-1} (k-1)^{-2l} \prod_{i=0}^{2l-1} (2l + i(k-1)) \right]^{1/(k-1)} \omega^{2l/(1-k)},$$

(ω має вигляд (1.37));

$$u = \left[2^l \lambda^{-1} (k-1)^{-2l} \prod_{i=0}^{l-1} (l + i(k-1)) \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{i=1}^{l} (2l + (2i-m)(k-1)) \right]^{1/(k-1)} \omega^{l/(1-k)},$$

(ω має вигляд (1.38)) будуть розв'язками рівняння (1.44).

Тепер побудуємо точні розв'язки поліхвильового рівняння (1.44), що містять довільні функції. Як і раніше, спочатку проведемо редукцію біхвильового рівняння (1.34) і побудуємо його точні розв'язки, а потім побудуємо розв'язки поліхвильового рівняння (1.44).

З цією метою дослідимо умови, при яких підстановка

$$u = \varphi(\alpha x, \omega), \qquad \omega = \omega(x), \tag{1.46}$$

зводить рівняння (1.34) до звичайного диференціального рівняння.

Підставляючи (1.46) до (1.34), одержимо:

$$\begin{aligned} &\varphi_{1111}(\alpha^2)^4 + 4\varphi_{1112}\alpha^2\alpha_\mu\omega^\mu + \varphi_{1122}(2\alpha^2\omega_\mu\omega^\mu + 4(\alpha_\mu\omega^\mu)^2) + \\ &+4\varphi_{1222}\alpha_\mu\omega^\mu\omega_\nu\omega^\nu + \varphi_{2222}(\omega_\mu\omega^\mu)^2 + \varphi_{112}(4\alpha^\mu\alpha^\nu\omega_{\mu\nu} + 2\Box\omega\alpha^2) + \\ &+\varphi_{122}(8\alpha^\mu\omega^\nu\omega_{\mu\nu} + 4\alpha_\mu\omega^\mu\Box\omega) + \varphi_{222}(4\omega^\mu\omega^\nu\omega_{\mu\nu} + 2\omega_\mu\omega^\mu\Box\omega) + \\ &+4\varphi_{12}\alpha_\mu\Box\omega^\mu + \varphi_{22}(4\omega^\mu\Box\omega_\mu + 2\omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} + (\Box\omega)^2) + \varphi_2\Box^2\omega = \lambda\varphi^k, \end{aligned} \tag{1.47}$$

де $\varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha x)}$; $\varphi_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega}$ і т.д.

Для того, аби (1.47) було звичайним дифференціальним рівнянням необхідно і досить, щоб виконувались такі умови:

$$\begin{aligned}
&\alpha^2 = 0, \qquad \alpha_\mu \omega^\mu = 0, \\
&\omega_\mu \omega^\mu = f(\omega, \alpha x), \qquad \Box\omega = g(\omega, \alpha x),
\end{aligned} \tag{1.48}$$

де f і g – довільні функції.

З другого рівняння (1.48) випливає, що

$$\omega = æ(\alpha x, \beta_1 x, \beta_2 x, \ldots, \beta_{n-1} x), \tag{1.49}$$

де æ – довільна функція, $\alpha^2 = \alpha\beta_i = \beta_i\beta_j = 0$, $\beta_i^2 = -1$, $i, j = \overline{1, n-1}$, $i \neq j$.

Враховуючи (1.49), останні два рівняння (1.48) перепишуться так:

$$\begin{aligned}
&æ_1^2 + æ_2^2 + \ldots + æ_{n-1}^2 = -f(æ, \alpha x); \\
&æ_{11} + æ_{22} + \ldots + æ_{n-1\, n-1} = -g(æ, \alpha x),
\end{aligned} \tag{1.50}$$

де $æ_i = \dfrac{\partial æ}{\partial(\beta_i x)}$, $i = \overline{1, n-1}$.

Тут $f(æ, \alpha x) \not\equiv 0$, оскільки у протилежному випадку $æ_i = 0$, $i = \overline{1, n-1}$ і анзац (1.46) зводиться до (1.35), де ω має вигляд (1.39).

Слід зауважити, що в системі (1.50) змінна αx виступає як параметр.

Оскільки æ – довільна функція, то за допомогою заміни змінних [70]

$$æ \to \int_0^{æ} \frac{dt}{\sqrt{-f(t, \alpha x)}}$$

систему (1.50) можна звести до системи

$$\begin{aligned}
&æ_1^2 + æ_2^2 + \ldots + æ_{n-1}^2 = 1; \\
&æ_{11} + æ_{22} + \ldots + æ_{n-1\, n-1} = h(æ, \alpha x),
\end{aligned} \tag{1.51}$$

де $h(æ, \alpha x)$ – довільна функція.

Знайшовши розв'язок (1.51) ми, враховуючи (1.49), побудуємо усі анзаци виду (1.46), які редукують рівняння (1.34) до звичайного диференціального рівняння з параметром αx, а саме, до рівняння

$$\begin{aligned}
&\varphi_{2222} + 2\varphi_{222} h(\omega, \alpha x) + \varphi_{22}(h^2(\omega, \alpha x) + 2h'(\omega, \alpha x)) + \\
&\qquad + \varphi_2(h'(\omega, \alpha x) h(\omega, \alpha x) + h''(\omega, \alpha x)) = \lambda \varphi^k.
\end{aligned} \tag{1.52}$$

де $h' = \dfrac{\partial h}{\partial \omega}$, $h'' = \dfrac{\partial^2 h}{\partial \omega^2}$.

Згідно з [39, 76], система (1.51) має загальний розв'язок в параметричній формі при $n < 6$. Розглянемо деякі частинні випадки:

Випадок 1: $\quad æ_1 \neq 0$, $æ_i = 0$, $i = \overline{2, n-1}$, $n \geq 2$.

У цьому випадку система (1.51) прийме вигляд

$$æ_1 = 1, \; æ_{11} = h(æ, \alpha x),$$

загальний розв'язок якої може бути записаний як

$$æ = \pm\beta_1 x + a(\alpha x); \; h(æ, \alpha x) = 0,$$

де $a(\alpha x)$ – довільна функція.

Отже, анзац (1.46) при умові, що

$$\omega = \beta_1 x + a(\alpha x), \qquad \alpha^2 = \alpha\beta_1 = 0; \; \beta_1^2 = -1, \tag{1.53}$$

редукує рівняння (1.34) до рівняння

$$\varphi_{2222} = \lambda\varphi^k, \tag{1.54}$$

частинний розв'язок якого виражається формулою (1.31).

Таким чином, рівняння (1.34) має такий розв'язок:

$$u = \left[\frac{8(k+1)(k+3)(3k+1)}{\lambda(k-1)^4}\right]^{1/(k-1)} (\beta_1 x + a(\alpha x))^{4/(1-k)},$$

де $a(\alpha x)$ – довільна функція, $\alpha^2 = \alpha\beta_1 = 0$; $\beta_1^2 = -1$.

Випадок 2: $\quad æ_1 \neq 0$, $æ_2 \neq 0$, $æ_i = 0$, $i = \overline{3, n-1}$, $n \geq 3$.

Тоді система (1.51), яка прийме такий вигляд:

$$æ_1^2 + æ_2^2 = 1; \qquad æ_{11} + æ_{22} = h(æ, \alpha x),$$

має загальний розв'язок:

- $h(æ, \alpha x) = 0$,
  $æ = \sin(a(\alpha x))\beta_1 x + \cos(a(\alpha x))\beta_2 x + b(\alpha x)$,;
- $h(æ, \alpha x) = (æ + c(\alpha x))^{-1}$
  $æ = \sqrt{(\beta_1 x + b_1(\alpha x))^2 + (\beta_2 x + b_2(\alpha x))^2} - c(\alpha x)$.

Тут $a(\alpha x)$, $b(\alpha x)$, b_1, b_2, $c(\alpha x)$ – довільні функції.

Звідси випливає, що анзац (1.46) редукує рівняння (1.34) до рівняння (1.54) якщо

$$\omega = \sin(a(\alpha x))\beta_1 x + \cos(a(\alpha x))\beta_2 x + b(\alpha x); \tag{1.55}$$

і до рівняння

$$\varphi_{2222} + \frac{2\varphi_{222}}{\omega + c(\alpha x)} - \frac{\varphi_{22}}{(\omega + c(\alpha x))^2} + \frac{\varphi_2}{(\omega + c(\alpha x))^3} = \lambda\varphi^k, \tag{1.56}$$

коли

$$\omega = \sqrt{(\beta_1 x + b_1(\alpha x))^2 + (\beta_2 x + b_2(\alpha x))^2} - c(\alpha x). \tag{1.57}$$

Оскільки розв'язок рівняння (1.54) має вигляд (1.31), то вираз

$$u = \left[\frac{8(k+1)(k+3)(3k+1)}{\lambda(k-1)^4}\right]^{1/(k-1)} \times$$

$$\times(\sin(a(\alpha x))\beta_1 x + \cos(a(\alpha x))\beta_2 x + b(\alpha x))^{4/(1-k)},$$

де $a(\alpha x)$, $b(\alpha x)$ – довільні функції, $\alpha^2 = \alpha\beta_1 = \alpha\beta_2 = 0$; $\beta_1^2 = \beta_2^2 = -1$, буде точним розв'язком рівняння (1.34).

Розв'язки рівняння (1.56) будемо шукати у вигляді

$$\varphi = c_1(\omega + c(\alpha x))^{c_2},$$

де c_1, c_2 – певні сталі. Звідси отримаємо, що рівняння (1.56) має частинний розв'язок

$$\varphi = \left(\frac{64}{\lambda}\frac{(k+1)^2}{(k-1)^4}\right)^{1/(k-1)} (\omega + c(\alpha x))^{4/(1-k)},$$

а отже, біхвильове рівняння (1.34) має такий точний розв'язок:

$$u = \left(\frac{64}{\lambda}\frac{(k+1)^2}{(k-1)^4}\right)^{1/(k-1)} \left[(\beta_1 x + b_1(\alpha x))^2 + (\beta_2 x + b_2(\alpha x))^2\right]^{2/(1-k)},$$

де $b_1(\alpha x), b_2(\alpha x)$ – довільні функції, $\alpha^2 = \alpha\beta_1 = \alpha\beta_2 = 0$; $\beta_1^2 = \beta_2^2 = -1$.

Оскільки знайдені нами розв'язки біхвильового рівняння (1.34), що залежать від довільних функцій, мають структуру (1.45), де ω визначається однією з формул:

$$\omega = a_1(\alpha x)\beta_1 x + a_2(\alpha x)\beta_2 x + \ldots + a_m(\alpha x)\beta_m x;$$

$$\omega = (\beta_1 x + b_1(\alpha x))^2 + (\beta_2 x + b_2(\alpha x))^2 + \ldots + (\beta_m x + b_m(\alpha x))^2,$$

то, аналогічно попередньому, можна одержати такі точні розв'язки поліхвильових рівнянь (1.44):

$$u = \left[(-1)^l \lambda^{-1}(k-1)^{-2l} \prod_{i=0}^{2l-1}(2l + i(k-1))\right]^{1/(k-1)} \times \\ \times (a_1(\alpha x)\beta_1 x + a_2(\alpha x)\beta_2 x + \ldots + a_m(\alpha x)\beta_m x)^{2l/(1-k)}, \qquad (1.58)$$

$$u = \left[2^l \lambda^{-1}(k-1)^{-2l} \prod_{i=0}^{l-1}(l + i(k-1)) \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{i=1}^{l}(2l + (2i - m)(k-1))\right]^{1/(k-1)} \left[\sum_{i=1}^{m}(\beta_i x + b_i(\alpha x))^2\right]^{l/(1-k)},$$

де $a(\alpha x)$, $a_i(\alpha x)$, $b_i(\alpha x)$ – деякі функції, причому $a_1^2(\alpha x) + a_2^2(\alpha x) + \ldots + a_n^2(\alpha x) = 1$, $m = \overline{2, n}$; $\alpha^2 = \alpha\beta_i = \beta_i\beta_j = 0$; $\beta_i^2 = -1$; $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$.

Одержані розв'язки з довільними функціями відповідають умовній симетрії поліхвильового рівняння, оскільки поліхвильові рівняння не допускають нескінченновимірну алгебру, а отже, ми не можемо побудувати ліївський анзац, який містить довільні функції.

Слід зауважити, що розв'язки нелінійного хвильового рівняння (1.32), що залежать від довільних функцій були одержані у [70] за допомогою підстановки

$$u = [f(v_1, v_2, \ldots) + g(\omega_1, \omega_2, \ldots)]^m,$$

(v_1, $v_2, \ldots, \omega_1, \omega_2, \ldots$ – деякі функції від x, $m = const$) та у [38] за допомогою пуанкаре-інваріантного анзацу

$$u = \varphi(x_0 - x_3, x_1, x_2)$$

Наприкінці цього параграфу ми знайдемо умови, при яких підстановка (1.46) редукує рівняння (1.34) до одновимірного біхвильововго рівняння,

$$\Box^2 \varphi \equiv \varphi_{1111} - 2\varphi_{1122} + \varphi_{2222} = \lambda \varphi^k, \qquad (1.59)$$

яке було розглянуто у попередньому параграфі.

Для того, аби (1.47) було біхвильовим рівнянням (1.59) досить, аби виконувались такі умови:

$$\alpha^2 = 1, \qquad \omega = \beta x, \qquad \alpha\beta = 0,\ \beta^2 = -1.$$

Тоді анзац

$$u = \varphi(\alpha x, \beta x), \qquad \alpha^2 = -\beta^2 = 1,\ \alpha\beta = 0,$$

редукує рівняння (1.34) до одновимірного біхвильового рівняння (1.59).

Враховуючи результати попереднього параграфу, де були знайдені розв'язки цього рівняння, ми отримаємо, що багатовимірне біхвильове рівняння (1.34) має, окрім вказаних раніше, такі розв'язки:

$$1.\quad u = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\lambda}{a_1}\right)^{1/4}\left|(\alpha x + \beta x + a_2)^2 - a_1\right|^{1/2}\left|\alpha x - \beta x + a_3\right|^{1/2},$$

$$2.\quad u = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\lambda}{b_1}\right)^{1/4}\left|(\alpha x - \beta x + b_2)^2 - b_1\right|^{1/2}\left|\alpha x + \beta x + b_3\right|^{1/2},$$

$$3.\quad u = \pm\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{c_1 c_2}\right)^{1/4}\left|(\alpha x - \beta x + c_3)^2 + c_1\right|^{1/2}\left|(\alpha x + \beta x + c_4)^2 + c_2\right|^{1/2},$$

у випадку, коли $k = 3$.

Тут $a_i, b_i, c_j, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$ – довільні сталі, $\alpha^2 = -\beta^2 = 1, \alpha\beta = 0$.

1.4 Симетрійна класифікація та точні розв'язки систем хвильових рівнянь

Біхвильове рівняння

$$\Box^2 u = F(u)$$

можна записати у вигляді системи хвильових рівнянь другого порядку, ввівши нову змінну $v = \Box u$:

$$\begin{cases} \Box u = v, \\ \Box v = F(u). \end{cases} \tag{1.60}$$

Симетрійні властивості системи (1.60) були досліджені у роботі [67], де було встановлено, що ця система інваріантна відносно розширеної алгебри Пуанкаре тоді і тільки тоді, коли $F(u) = \lambda u^k$ або $F(u) = \lambda e^u$ та неінваріантна відносно конформної алгебри $AC(1,n)$. З метою побудови конформно-інваріантних систем хвильових рівнянь, розглянемо більш загальну систему:

$$\begin{cases} \Box u = F(v), \\ \Box v = G(u) \end{cases} \tag{1.61}$$

і проведемо її повну симетрійну класифікацію. Зауважимо, що якщо функція F має обернену, то система (1.61) еквівалентна нелінійному біхвильовому рівнянню

$$\Box(F^{-1}(\Box u)) = G(u).$$

Справедливі такі твердження.

Теорема 1.4. *МАІ системи (1.61) для довільної функції $F(u)$ – алгебра Пуанкаре $P(1,n) =< P_\mu, J_{\mu\nu} >$.*

Теорема 1.5. *Система (1.61) інваріантна відносно розширеної алгебри Пуанкаре $A\widetilde{P}(1,n)$ тоді і тільки тоді, коли вона еквівалентна таким системам:*

1. $\begin{cases} \Box u = \lambda_1 e^v, \\ \Box v = \lambda_2 e^u, \end{cases} \quad MAI: \quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_1 \rangle,$

$$D_1 = x^\mu \partial_\mu - 2\partial_u - 2\partial_v;$$

2. $\begin{cases} \Box u = \lambda_1 v^m, \ m \neq 0, \\ \Box v = \lambda_2 e^u, \end{cases} \quad MAI: \quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_2 \rangle,$

$$D_2 = x^\mu \partial_\mu - (2/m) v\partial_v - (2(1+m)/m)\partial_u;$$

3. $\begin{cases} \Box u = \lambda_1 v^m, \\ \Box v = \lambda_2 u^k, \quad mk \neq 1 \end{cases} \quad MAI: \quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_3 \rangle,$

$$D_3 = x^\mu \partial_\mu + 2\frac{m+1}{1-mk} u\partial_u + 2\frac{k+1}{1-mk} v\partial_v;$$

4. $\begin{cases} \Box u = F(v), \\ \Box v = \lambda_2 / u, \end{cases} \quad MAI: \quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_4 \rangle,$

$$D_4 = x^\mu \partial_\mu + 2u\partial_u;$$

5. $\begin{cases} \Box u = \lambda_1 \ln v, \\ \Box v = \lambda_2, \end{cases} \quad MAI: \quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_5, Q_1, Q_2 \rangle, \qquad (1.62)$

$$D_5 = x^\mu \partial_\mu + 2u\partial_u + 2v\partial_v + 2(\lambda_1/\lambda_2) v\partial_u,$$

$$Q_1 = 2(n+1)v\partial_u - \lambda_2 x^2 \partial_u, \qquad Q_2 = q_1(x)\partial_u, \qquad \text{де} \Box q_1(x) = 0.$$

Зауважимо, що оператори D_i, $i=\overline{1,5}$ разом з операторами $P_\mu, J_{\mu\nu}$ задають 5 нееквівалентних зображеннь розширеної алгебри Пуанкаре $A\widetilde{P}(1,n)$.

Теорема 1.6. *Система (1.61), при $n \neq 1$, інваріантна відносно конформної алгебри тоді і лише тоді, коли вона еквівалентна системі*

$$\begin{cases} \Box u = \lambda_1 v^{(n+3)/(n-1)}, \\ \Box v = \lambda_2 u^{(n+3)/(n-1)}, \end{cases} \qquad MAI: \quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu \rangle, \tag{1.63}$$

$$D = x^\mu \partial_\mu + \frac{1-n}{2}(u\partial_u + v\partial_v), \qquad K_\mu = 2x_\mu D - (x_\nu x^\nu)\partial_\mu. \tag{1.64}$$

Теорема 1.7. *Система (1.61), при $n = 1$, інваріантна відносно конформної алгебри тоді і лише тоді, коли вона еквівалентна системі*

$$\begin{cases} \Box u = \lambda_1 e^v, \\ \Box v = \lambda_2 e^u, \end{cases} \qquad MAI: \quad \langle Z \rangle, \tag{1.65}$$

$$\begin{gathered} Z = [s_1(x^0+x^1) - s_2(x^0-x^1)]\partial_0 + [s_1(x^0+x^1) + s_2(x^0-x^1)]\partial_1 - \\ -2[s_1'(x^0+x^1) - s_2'(x^0-x^1)]\partial_u - 2[s_1'(x^0+x^1) - s_2'(x^0-x^1)]\partial_v, \end{gathered} \tag{1.66}$$

де s_1, s_2 – довільні функції.

З останньої теореми випливає, що MAI системи (1.65) – нескінченновимірна алгебра $\langle Z \rangle$, яка містить конформну алгебру $AC(1,1) = \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_1, K_{1\mu} \rangle$, $\mu, \nu = 0, 1$,

$$D_1 = x^\mu \partial_\mu - 2\partial_u - 2\partial_v, \qquad K_{1\mu} = 2x_\mu D_1 - (x_\nu x^\nu)\partial_\mu.$$

Теорема 1.8. *Система (1.61) допускає більш широку алгебру, ніж $A\widetilde{P}(1,n)$, тоді і тільки тоді, коли вона еквівалентна системам (1.62), (1.63), (1.65) або:*

1. $\begin{cases} \Box u = F(v), \\ \Box v = 0, \end{cases} \qquad MAI: \quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_4, Q_2, Q_3 \rangle, \quad Q_3 = v\partial_u;$

2. $\begin{cases} \Box u = \lambda_1 e^v, \\ \Box v = 0, \end{cases} \qquad MAI: \quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_1, D_4, Q_2, Q_3 \rangle;$

3. $\begin{cases} \Box u = \lambda_1 v^m, \\ \Box v = 0, \end{cases}$ $\quad MAI: \quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_2, D_4, Q_2, Q_3 \rangle;$

4. $\begin{cases} \Box u = \lambda_1 \ln v, \\ \Box v = 0, \end{cases}$ $\quad MAI: \quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_5, D_4, Q_2, Q_3, Q_4 \rangle;$

$$Q_4 = 2(n+1)v\partial_v + \lambda_1 x^2 \partial_u,$$

5. $\begin{cases} \Box u = \lambda_1 v, \\ \Box v = 0, \end{cases}$ $\quad MAI: \quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_4, Q_3, Q_5, Q_6 \rangle;$

$$Q_5 = u\partial_u + v\partial_v, \qquad Q_6 = q_1(x)\partial_v + q_2(x)\partial_u,$$

де $\Box q_1 = 0$, $\Box q_2 = \lambda_2 q_1$.

6. $\begin{cases} \Box u = \lambda_1 v^m, \\ \Box v = \lambda_2, \end{cases}$ $\quad MAI: \quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_6, Q_1, Q_2 \rangle;$

$$D_6 = x^\mu \partial_\mu + 2v\partial_v + 2(1+m)u\partial_u;$$

7. $\begin{cases} \Box u = \lambda_1 / v, \\ \Box v = \lambda_2 / u, \end{cases}$ $\quad MAI: \quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_4, Q_7 \rangle,$

$$Q_7 = u\partial_u - v\partial_v;$$

Теорема 1.9. *Система (1.61) допускає більш широку алгебру інваріантності ніж $AC(1,n)$ тоді і лише тоді, коли вона еквівалентна системі (1.65) або таким системам:*

1. $\begin{cases} \Box u = \lambda_1 v^{(n+3)/(n-1)}, \\ \Box v = 0, \end{cases}$ $\quad MAI: \quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu, D_4, Q_2, Q_3 \rangle.$

2. $\begin{cases} \Box u = \lambda_1 e^v, \\ \Box v = \lambda_2, \end{cases}$ $\quad n = 1, \quad MAI: \quad \langle Z, Q_1, Q_2, Q_{16} \rangle,$

$Q_{16} = u\partial_u + \partial_v$

3. $\begin{cases} \Box u = \lambda_1 e^v, \\ \Box v = 0, \end{cases}$ $\quad n = 1, \quad MAI: \quad \langle Z, D_4, Q_2, Q_3 \rangle,$

4. $\begin{cases} \Box u = 0, \\ \Box v = 0, \end{cases}$

$$MAI: \quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu, Q_2, Q_3, Q_8, Q_9, Q_{10}, Q_{11}\rangle, \quad n \neq 1$$
$$MAI: \quad \langle Z, Q_2, Q_3, Q_8, Q_9, Q_{10}, Q_{11}\rangle, \quad n = 1$$

$$Q_8 = u\partial_v, \quad Q_9 = u\partial_u, \quad Q_{10} = v\partial_v, \quad Q_{11} = q_2(x)\partial_v,$$

де $\Box q_2(x) = 0$.

Теорема 1.10. *Система (1.61) допускає більш широку алгебру, ніж $AP(1, n)$ лише у випадках, зазначених у теоремах 1.5 – 1.9 та:*

1. $\begin{cases} \Box u = \lambda_1 v^{1/k}, \\ \Box v = \lambda_2 u^k, \end{cases} \qquad MAI: \quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, Q_{12}\rangle,$

$$Q_{12} = u\partial_u + kv\partial_v$$

2. $\begin{cases} \Box u = \lambda_1 v, \\ \Box v = \lambda_2 u, \end{cases} \qquad MAI: \quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, Q_{13}, Q_{14}, Q_{15}\rangle,$

$$Q_{13} = u\partial_u + v\partial_v, \quad Q_{14} = \lambda_1 v\partial_u + \lambda_2 u\partial_v, \quad Q_{15} = q_1(x)\partial_u + q_2(x)\partial_v,$$

де $\Box q_1(x) = \lambda_1 q_2$, $\Box q_2(x) = \lambda_2 q_1$.

3. $\begin{cases} \Box u = \lambda_1 e^v, \\ \Box v = \lambda_2, \end{cases} \quad MAI: \quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, Q_1, Q_2, Q_{16}\rangle, \; Q_{16} = u\partial_u + \partial_v.$

4. $\begin{cases} \Box u = F(v), \\ \Box v = \lambda_2, \end{cases} \qquad MAI: \quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, Q_1, Q_2\rangle,$

Для **доведення** теорем 1.4 – 1.10 застосуємо алгоритм Лі, який детально викладений у вступі (див. також [17]). Згідно з теоремою 0.1, оператор алгебри інваріантності системи (1.61) будемо шукати у вигляді

$$X = \xi^\mu(x, u, v)\partial_\mu + \eta^1(x, u, v)\partial_u + \eta^2(x, u, v)\partial_v \tag{1.67}$$

де функції ξ^μ, η^1, η^2 визначаються з критерія інваріантності

$$\underset{2}{X}(\Box u - F(v))_{[\Sigma]} = 0,$$

$$\underset{2}{X}(\Box v - G(u))_{[\Sigma]} = 0,$$

де $[\Sigma]$ – диференціальний многовид, тобто

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \Box u = F(v) \\ \Box v = G(u) \end{bmatrix}.$$

Знайшовши друге продовження оператора (1.67) за формулами (0.7), ми можемо переписати критерій інваріантності у вигляді:

$$\begin{aligned} &\left[D_\mu D^\mu(\eta^1) - u_\nu D_\mu D^\mu(\xi^\nu) - 2u_{\mu\nu}D^\mu(\xi^\nu) - \eta^2 F'\right]_{[\Sigma]} = 0, \\ &\left[D_\mu D^\mu(\eta^2) - v_\nu D_\mu D^\mu(\xi^\nu) - 2v_{\mu\nu}D^\mu(\xi^\nu) - \eta^1 G'\right]_{[\Sigma]} = 0, \end{aligned} \tag{1.68}$$

Розщеплюючи умови (1.68) за старшими похідними:

$$\begin{aligned} &u_{\mu\nu},\ \mu \neq \nu : && D^\mu(\xi^\nu) + D^\nu(\xi^\mu) = 0; \\ &u_{\mu\nu},\ \mu = \nu,\ \mu, \nu \neq 0 : && D_0(\xi^0) = D_1(\xi^1) = \ldots D_n(\xi^n); \end{aligned}$$

ми одержимо, що функції ξ^μ мають задовольняти системі рівнянь Кіллінга (1.14) та рівнянням

$$\xi^\mu_u = 0, \qquad \xi^\mu_v = 0,$$

завдяки чого вирази (1.68) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} &\left[D_\mu D^\mu(\eta^1) + u_\nu(n-1)\xi^\nu_{00} - 2\Box u\xi^0_0 - \eta^2 F'\right]_{[\Sigma]} = 0, \\ &\left[D_\mu D^\mu(\eta^2) - v_\nu(n-1)\xi^\nu_{00} - 2\Box v\xi^0_0 - \eta^1 G'\right]_{[\Sigma]} = 0. \end{aligned}$$

Остаточно, розщеплюючи за змінними u_μ та v_μ ми одержимо, що

$$\begin{aligned} &\eta^i_{uu} = 0, \quad \eta^i_{uv} = 0, \quad \eta^i_{vv} = 0, \\ &2g^{\mu\nu}\eta^i_{\nu u} = (1-n)\xi^\mu_{00}, \quad \eta^1_{\mu v} = 0, \quad \eta^2_{\mu u} = 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \tag{1.69}$$

$$\begin{aligned} &\Box\eta^1 + \eta^1_u F(v) + \eta^1_v G(u) - 2F(v)\xi^0_0 - \eta^2 F'(v) = 0 \\ &\Box\eta^2 + \eta^2_u F(v) + \eta^2_v G(u) - 2G(u)\xi^0_0 - \eta^1 G'(u) = 0 \end{aligned} \tag{1.70}$$

Слід розглянути два випадки:

Випадок 1 $n = 1$.

Тоді розв'язок системи Кіллінга прийме вигляд

$$\xi^0 = s_1(x^0 + x^1) - s_2(x^0 - x^1) \qquad \xi^1 = s_1(x^0 + x^1) + s_2(x^0 - x^1)$$

і розв'язок рівнянь (1.69) прийме вигляд:

$$\eta^1 = A_1 u + B_1 v + w^1(x) \qquad \eta^2 = A_2 v + B_2 u + w^2(x)$$

де $s_1, s_2, æ^1, æ^2$ – довільні функції, A_1, A_2, B_1, B_2 – довільні параметри.

Підстановка цих результатів до класифікуючих рівнянь (1.70) дає слідуючі обмеження на функції F і G:

$$\begin{aligned} &A_1F + B_1G - 2F(s_1' - s_2') - (A_2v + B_2u + æ^2)F' + \Box æ^1 = 0, \\ &A_2G + B_2F - 2G(s_1' - s_2') - (A_1u + B_1v + æ^1)G' + \Box æ^2 = 0. \end{aligned} \tag{1.71}$$

Випадок 2 $n \neq 1$.

Тоді розв'язок системи Кіллінга прийме вигляд

$$\xi^\nu = 2x^\nu x_\mu c^\mu - x_\mu x^\mu c^\nu + b^{\nu\mu}x_\mu + dx^\nu + a^\nu, \tag{1.72}$$

з урахуванням чого, рівняня (1.69) будуть мати такий розв'язок:

$$\eta^1 = ((1-n)c^\mu x_\mu + A_1)u + B_1v + æ^1(x),$$

$$\eta^2 = ((1-n)c^\mu x_\mu + A_2)v + B_2u + æ^2(x),$$

де $æ^1, æ^2$ – довільні функції, c^μ, $b^{\nu\mu} = -b^{\mu\nu}$, d, a^ν, A_1, A_2, B_1, B_2 – довільні константи.

Підставляючи ці результати до класифікуючих рівнянь (1.70), маємо:

$$\begin{aligned} &\Box æ^1 - (((1-n)c^\mu x_\mu + A_2)v + B_2u + æ^2)F' + \\ &\qquad +((1-n)c^\mu x_\mu + A_1 - 2(2c^\mu x_\mu + d))F + B_1G = 0. \\ &\Box æ^2 - (((1-n)c^\mu x_\mu + A_1)u + B_1v + æ^1)G' + \\ &\qquad +((1-n)c^\mu x_\mu + A_2 - 2(2c^\mu x_\mu + d))G + B_2F = 0. \end{aligned} \tag{1.73}$$

Розв'язавши системи (1.71) та (1.73) ми одержимо твердження теорем 1.4 – 1.10.

Оскільки розв'язання цих систем вимагає досить громіздких обчислень, ми зупинимось на деяких частинних випадках.

а) F, G – довільні функції.

Тоді, очевидно, що $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0$; $c^\mu = d = 0$, коли $n \neq 1$ та $s_1' = s_2'$ коли $n = 1$. Звідси випливає твердження теореми 1.4.

б) $F'' \neq 0$, $G'' \neq 0$, n – довільне.

Диференцюючи перше рівняння (1.71) по v і x_μ, x_ν, а друге по u і x_μ, x_ν, ми одержимо:

$$æ^2_{\mu\nu}F'' = 0, \; æ^1_{\mu\nu}G'' = 0.$$

Звідси, $\text{æ}^1 = M^1_\mu x^\mu + h_1$, $\text{æ}^2 = M^2_\mu x^\mu + h_2$.

Диференціюючи перше рівняння (1.73) по u ми одержимо:

$$B_1 G' + B_2 F' = 0,$$

звідки $B_1 = B_2 = 0$.

Отже, система (1.73) перепишеться у вигляді:

$$\begin{aligned}
&(((1-n)c^\mu x_\mu + A_2)v + M^2_\mu x^\mu + h_2)F' - \\
&\qquad -((1-n)c^\mu x_\mu + A_1 - 2(2c^\mu x_\mu + d))F = 0. \\
&(((1-n)c^\mu x_\mu + A_1)u + M^1_\mu x^\mu + h_1)G' - \\
&\qquad -((1-n)c^\mu x_\mu + A_2 - 2(2c^\mu x_\mu + d))G = 0.
\end{aligned}$$

Розщеплюючи ці рівняння за змінними x_μ ми прийдемо до такої системи:

$$\begin{aligned}
&(3+n)c_\mu F + ((1-n)c_\mu v + M^2_\mu)F' = 0, \\
&(3+n)c_\mu G + ((1-n)c_\mu u + M^1_\mu)G' = 0, \\
&(A_1 - 2d)F - (A_2 v + h_2)F' = 0. \\
&(A_2 - 2d)G - (A_1 u + h_1)G' = 0.
\end{aligned}$$

Загальний розв'язок цієї системи приводить нас до тверджень теореми 1.6 (випадок $c_\mu \neq 0$) та пунктів 1 – 4 теореми 1.5 (випадок $c_\mu = 0$).

в) $F'' \neq 0$, $G'' \neq 0$, $n = 1$.

Диференціюючи перше рівняння (1.71) по u ми одержимо:

$$B_1 G' + B_2 F' = 0,$$

звідки $B_1 = B_2 = 0$.

Диференціюючи перше рівняння системи (1.71) по v, а потім по x_μ, ми одержимо:

$$2F'(s_1'' - s_2'') + \text{æ}_0^2 F'' = 0 \quad \text{або} \quad \left(\frac{2F'}{F''}\right)'(s_1'' - s_2'') = 0.$$

Якщо $s_1'' = s_2''$, то $s_1' = s_2' = \lambda = const$. Тоді ξ^μ мають вигляд (1.72), а цей випадок розглядався в пункті б). Таким чином $s_1'' \neq s_2''$, а отже,

$$\left(\frac{2F'}{F''}\right)' = 0 \quad \text{або} \quad F = \lambda_1 \exp(\sigma_1 v) + \sigma_2.$$

Аналогічно, $G = \lambda_2 \exp(\sigma_3 u) + \sigma_4$.

Тут σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, λ_1, λ_2 – довільні параметри.

Враховуючи заміну змінних $v \to \sigma_1 v$, $u \to \sigma_3 u$, яка зводить систему (1.61) до еквівалентної, ми можемо покласти $\sigma_1 = \sigma_3 = 1$.

Підставляючи F і G до системи (1.71) одержимо, що

$$\sigma_2 = \sigma_4 = A_1 = A_2 = 0;\ æ^1 = æ^2 = -2(s_1' - s_2').$$

Ми прийшли до твердження теореми 1.7.

Аналогічно досліджуються випадки, коли $F'' = 0$ або $G'' = 0$, які і завершують симетрійну класифікацію системи (1.61). **Теореми доведено.**

Як випливає з теореми 1.7, існують системи хвильових рівнянь, інваріантні відносно нескінченновимірної алгебри з оператором (1.66). Знайдемо інші системи хвильових рівнянь, інваріантні відносно цього оператора. З цією метою розглянемо систему

$$\begin{cases} \Box u = F(u, v), \\ \Box v = G(u, v). \end{cases} \tag{1.74}$$

Зауважимо, що в роботі [92] досліджено інваріантність системи (1.74) відносно розширеної алгебри Пуанкаре та конформної алгебри. Ми розглянемо цю систему з точки зору інваріантності відносно нескінченновимірної алгебри з оператором (1.66).

Теорема 1.11. *Система (1.74) при $n = 1$ інваріантна відносно нескінченновимірної алгебри з базисним оператором (1.70) тоді і тільки тоді, коли вона еквівалентна системі*

$$\begin{cases} \Box u = \widehat{F}(u - v)e^v, \\ \Box v = \widehat{G}(u - v)e^u, \end{cases} \tag{1.75}$$

де $\widehat{F}$, $\widehat{G}$ – довільні функції.

Для доведення цієї теореми досить знайти друге продовження оператора (1.66) за формулами (0.7) та подіяти ним на рівняння системи (1.74). Звідси і одержується твердження теореми 1.11.

Інваріантність системи (1.75) відносно нескінченновимірної алгебри надає можливість побудувати її точні розв'язки, які містять довільні функції [70].

Для зручності у системі (1.75) зробимо заміну змінних

$$q = u - v, \qquad w = v.$$

Тоді система (1.75) прийме вигляд

$$\begin{cases} \Box q = R(q)e^{w}, \\ \Box w = H(q)e^{w}, \end{cases} \tag{1.76}$$

де $R(q) = \widehat{F}(q) - \widehat{G}(q)e^{q}$, $H(q) = \widehat{G}(q)e^{q}$, причому оператор симетрії системи (1.76) перепишеться так:

$$\begin{aligned} Z = {} & [s_1(x^0 + x^1) - s_2(x^0 - x^1)]\partial_0 + [s_1(x^0 + x^1) + s_2(x^0 - x^1)]\partial_1 - \\ & -2[s_1'(x^0 + x^1) - s_2'(x^0 - x^1)]\partial_w, \end{aligned} \tag{1.77}$$

де s_1, s_2 – довільні функції.

Для знаходження інваріантних розв'язків цієї системи, побудуємо інваріанти цього оператора. Розв'язавши систему Ойлера–Лагранжа

$$\frac{\mathrm{d}\, x_0}{s_1 - s_2} = \frac{\mathrm{d}\, x_1}{s_1 + s_2} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\, w}{s_1' - s_2'},$$

ми одержимо такі інваріанти:

$$\varphi_1 + \varphi_2 \qquad \text{та} \qquad w - \ln \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2,$$

де $s_1 = \dfrac{1}{\dot{\varphi}_1}$, $s_2 = \dfrac{1}{\dot{\varphi}_2}$, $\varphi_1 = \varphi_1(x_0 + x_1)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x_0 - x_1)$ – довільні функції.

Звідси анзац, який відповідає оператору (1.77), має вигляд:

$$\begin{cases} q = f(\omega), \\ w = g(\omega) + \ln(\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2) \end{cases} \qquad \omega = \varphi_1 + \varphi_2 \tag{1.78}$$

Анзац (1.78) редукує систему (1.76) до системи звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку:

$$\begin{cases} 4\ddot{f} = R(f)e^{g}, \\ 4\ddot{g} = H(f)e^{g}, \end{cases} \tag{1.79}$$

Знайдемо частинний розв'язок цієї системи.
Підстановкою можна переконатись, що вираз

$$f = \lambda \ln \omega, \qquad \lambda = const$$

буде задовольняти (1.79) тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

$$g = \ln\left(-\frac{4\lambda}{\omega^2 R(f)}\right); \tag{1.80}$$

$$H = -\frac{2}{\lambda}R - \lambda\frac{R'}{R} + \lambda R'' - R'.$$

Таким чином, система

$$\begin{cases} \Box q = R(q)e^{w}, \\ \Box w = \left(-\frac{2}{\lambda}R(q) - \lambda\frac{R'(q)}{R(q)} + \lambda R''(q) - R'(q)\right)e^{w}, \end{cases}$$

має такий клас точних розв'язків:

$$\begin{cases} q = \lambda\ln(\varphi_1 + \varphi_2), \\ w = \ln\left(\frac{-4\lambda}{R(\varphi_1+\varphi_2)}\frac{\dot\varphi_1\dot\varphi_2}{(\varphi_1+\varphi_2)^2}\right) \end{cases},$$

де $\varphi_1 = \varphi_1(x_0 + x_1)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x_0 - x_1)$ – довільні функції.

1.5 Поліхвильові рівняння для комплексного скалярного поля, інваріантні відносно алгебр $A\widetilde{P}(1,n)$ та $AC(1,n)$

У цьому параграфі ми дослідимо симетрію поліхвильових рівняннь

$$\Box^l u = F(uu^*)u \tag{1.81}$$

для комплексної функції u, які є узагальненням одного з основних рівнянь релятивістської квантової фізики

$$\Box u = -m^2 u \tag{1.82}$$

Тут u^* комплексноспряжене від u.

Відомо, (див., наприклад, [41, 64]), що рівняння (1.82) інваріантне відносно зсувів та перетворень Лоренца (групи Пуанкаре), а у випадку $m = 0$, відносно конформних перетворень. Тут ми покажемо, що рівняння (1.81) для довільної функції u також інваріантне відносно перетворень Лоренца. Крім того, існують нелінійності $F(uu^*)$, для яких рівняння (1.81) буде інваріантне відносно операторів масштабних і конформних перетворень. Зокрема, якщо $F(uu^*) = 0$, то на розв'язках рівняння (1.81) реалізується лінійне зображення конформної групи, еквівалентне зображенню конформної групи для безмасового рівняння (1.82). Справедливі такі твердження [21].

Теорема 1.12. *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (1.81) з довільною функцією $F(uu^*)$ є алгебра $AP(1,n) \oplus Q = \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, Q \rangle$, де*

$$Q = u\partial_u - u^*\partial_{u^*}.$$

Теорема 1.13. *Рівняння (1.81), яке допускає більш широку алгебру, ніж $AP(1,n) \oplus Q = \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, Q \rangle$, еквівалентне одному з наступних диференціальних рівнянь:*

1. $\Box^l u = \lambda |u|^k u; \qquad k \neq 0$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D, Q \rangle$,

$$D = x^\mu \partial_\mu - \frac{2l}{k} u\partial_u - \frac{2l}{k} u^* \partial_{u^*};$$

2. $\Box^l u = \lambda |u|^{4l/(n+1-2l)} u; \qquad n+1 \neq 2l \qquad (1.83)$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(1)}, K_\mu^{(1)}, Q \rangle$,

$$D^{(1)} = x^\mu \partial_\mu + \frac{(2l-n-1)}{2} u\partial_u, + \frac{(2l-n-1)}{2} u^* \partial_{u^*},$$

$$K_\mu^{(1)} = 2x_\mu D^{(1)} - (x_\nu x^\nu)\partial_\mu,$$

3. $\Box^l u = \lambda u;$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, Q, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 \rangle$,

$$Q_1 = u\partial_u + u^*\partial_{u^*}, \quad Q_2 = u^*\partial_u, \quad Q_3 = u\partial_{u^*},$$

$$Q_4 = q_1(x)\partial_u, \quad Q_5 = q_2(x)\partial_{u^*},$$

де $\Box^l q_1(x) = \lambda q_1(x)$, $\Box^l q_2(x) = \lambda q_2(x)$;

4. $\Box^l u = 0, \qquad (1.84)$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(1)}, K_\mu^{(1)}, Q, Q_1, Q_2, Q_3, Q_6, Q_7 \rangle$,

$$Q_6 = q_1(x)\partial_u, \quad Q_7 = q_2(x)\partial_{u^*},$$

де $\Box^l q_1(x) = 0$, $\Box^l q_2(x) = 0$.

Наведемо схему **доведення** цих теорем. Для цього перепишемо рівняння (1.81) у вигляді системи

$$\Box^l u_1 = F(u_1^2 + u_2^2)u_1,$$
$$\Box^l u_2 = F(u_1^2 + u_2^2)u_2,$$

де u_1 і u_2 – дійсна і уявна частини змінної u: $u = u_1 + iu_2$.

Тоді, згідно з теоремою 0.1, оператор

$$X = \xi^\mu(x, u_1, u_2)\partial_\mu + \eta^1(x, u_1, u_2)\partial_{u_1} + \eta^2(x, u_1, u_2)\partial_{u_2}$$

буде оператором симетрії рівняння (1.81) якщо

$$\begin{aligned} &\underset{2l}{X}(\Box^l u_1 - F(u_1^2 + u_2^2)u_1)_{[\Sigma]} = 0, \\ &\underset{2l}{X}(\Box^l u_2 - F(u_1^2 + u_2^2)u_2)_{[\Sigma]} = 0, \end{aligned} \tag{1.85}$$

де $[\Sigma]$ – диференціальний многовид, тобто

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \Box^l u_1 = F(u_1^2 + u_2^2)u_1 \\ \Box^l u_2 = F(u_1^2 + u_2^2)u_2 \end{bmatrix}.$$

Розщеплюючи рівняння (1.85) за незалежними змінними ми прийдемо до системи визначальних рівнянь для функцій ξ^μ, η^1, η^2:

$$\begin{aligned} &\xi_0^i = \xi_i^0,\ \xi_j^i = -\xi_i^j,\ i \neq j,\ i,j = \overline{1,n}; \\ &\xi_0^0 = \xi_1^1 = \cdots = \xi_n^n; \qquad \xi_{u_1}^\mu = 0, \qquad \xi_{u_2}^\mu = 0 \\ &\eta_{u_1u_1}^i = 0, \quad \eta_{u_1u_2}^i = 0, \quad \eta_{u_2u_2}^i = 0, \quad i = 1,2 \\ &2g^{\mu\nu}\eta_{\nu u_1}^1 = (2l - n - 1)\xi_{00}^\mu, \qquad \eta_{\nu u_2}^1 = 0 \\ &2g^{\mu\nu}\eta_{\nu u_2}^2 = (2l - n - 1)\xi_{00}^\mu, \qquad \eta_{\nu u_1}^2 = 0 \end{aligned} \tag{1.86}$$

$$\begin{aligned} &\Box^l\eta^1 + F(\eta_{u_1}^1 u_1 + \eta_{u_2}^1 u_2 - 2l\xi_0^0 u_1 - \eta^1) - 2F'(\eta^1 u_1^2 + \eta^2 u_1 u_2) = 0, \\ &\Box^l\eta^2 + F(\eta_{u_1}^2 u_1 + \eta_{u_2}^2 u_2 - 2l\xi_0^0 u_2 - \eta^2) - 2F'(\eta^2 u_2^2 + \eta^1 u_1 u_2) = 0, \end{aligned} \tag{1.87}$$

Загальний розв'язок системи (1.86) має вигляд:

$$\begin{aligned} &\xi^\nu = 2x^\nu x_\mu c^\mu - x_\mu x^\mu c^\nu + b^{\nu\mu}x_\mu + dx^\nu + a^\nu, \\ &\eta^1 = (2l - n - 1)c^\mu x_\mu u_1 + A_1 u_1 + A_2 u_2 + æ^1(x), \\ &\eta^2 = (2l - n - 1)c^\mu x_\mu u_2 + B_1 u_1 + B_2 u_2 + æ^2(x), \end{aligned} \tag{1.88}$$

де $æ^1, æ^2$ – довільні функції, c^μ, $b^{\nu\mu} = -b^{\mu\nu}$, d, a^ν, A_1, A_2, B_1, B_2 – довільні константи.

Підставляючи вирази (1.88) до класифікуючої системи (1.87) і розщеплюючи її послідовно по x_μ, u_1 та u_2 ми отримаємо твердження теорем 1.12 і 1.13. **Теореми доведено**.

З теореми 1.13 випливає, що рівняння (1.81) допускає конформну алгебру $AC(1,n)$ тоді і тільки тоді, коли воно еквівалентне рівнянню (1.83) або (1.84). Слід зауважити, що лінійне поліхвильове рівняння (1.84) у випадку, коли $n+1=2l$, інваріантне відносно 2 нееквівалентних зображень конформної алгебри $AC(1,n)$:

$$
\begin{aligned}
1.\quad & P_\mu^{(1)} = P_\mu = \partial_\mu, && J_{\mu\nu}^{(1)} = J_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu,\\
& D^{(1)} = x^\mu\partial_\mu, && K_\mu^{(1)} = 2x_\mu D^{(1)} - (x_\nu x^\nu)\partial_\mu;\\
2.\quad & P_\mu^{(2)} = P_\mu = \partial_\mu, && J_{\mu\nu}^{(2)} = J_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu,\\
& D^{(2)} = x^\mu\partial_\mu + \partial_u, && K_\mu^{(2)} = 2x_\mu D^{(2)} - (x_\nu x^\nu)\partial_\mu.
\end{aligned}
$$

Аналогічне твердження справедливе для лінійних поліхвильових рівнянь (1.84), коли u – дійсна функція (див. параграф 1.1).

Розділ 2

Нелінійні хвильові рівняння для комплексного скалярного поля

Класичне скалярне поле, як відомо, (див, наприклад, [4]), описується лінійними хвильовими рівняннями другого порядку для комплексно-значної функції u:

$$\left(\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2c^2\Delta + m^2c^4\right)u = 0, \tag{2.1}$$

де $u = u(t, x^1, x^2, x^3)$ – хвильова функція, Δ – оператор Лапласа, c – швидкість світла, $\hbar$ – стала Планка, m – маса частинки.

Якщо ввести коваріантний вектор $\bar{x} = (x^0 \equiv ct, x^1, x^2, x^3)$ то це рівняння можна переписати в коваріантній формі:

$$\Box u = \lambda u, \tag{2.2}$$

де $\Box \equiv p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$ – оператор Д'аламбера, $p_\mu = i\hbar\partial/(\partial x^\mu)$, $\lambda = m^2c^2$ – довільна стала.

У цьому розділі ми розглянемо багатовимірне нелінійне узагальнення рівняння (2.2):

$$\Box u = F(|u|, (\nabla|u|)^2, \Box|u|)u. \tag{2.3}$$

Тут $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ – гладка дійсна функція, $u = u(x^0 \equiv ct, x^1, \ldots, x^n)$, $\Box \equiv p_\mu p^\mu$ – оператор д'Аламбера в $(n+1)$-вимірному псевдоевклідовому просторі $R(1, n)$ $\nabla \equiv (p_0, p_1, \ldots, p_n)$, $(\nabla|u|)^2 \equiv (\nabla|u|)(\nabla|u|) \equiv (p_\mu|u|)(p^\mu|u|)$, під повторними індексами розуміється сума від 0 до n, підняття та пониження індексів здійснюється за допомогою згортки з метричним тензором $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, \ldots, -1)$, тобто

$p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu$ $p^\mu = g^{\mu\nu}p_\nu$. Для зручності будемо використовувати систему одиниць Гевісайда ($\hbar = 1$).

Зауважимо, що клас рівнянь (2.3) містить, зокрема, добре відомі рівняння з вивченими симетрійними властивостями. Так, встановлено, [70, 37], що Пуанкаре інваріантне рівняння

$$\Box u = F(|u|)u \tag{2.4}$$

($|u| = \sqrt{uu^*}$, u^* – комплексно-спряжене, F – довільна гладка функція) допускає розширену алгебру Пуанкаре $A\widetilde{P}(1,n) = \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(2)}\rangle$ тоді і лише тоді, коли воно еквівалентне рівнянню

$$\Box u = \lambda_1 |u|^k u, \; k \neq 0, \tag{2.5}$$

і допускає конформну алгебру $AC(1,n) = \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(1)}, K_\mu^{(1)}\rangle$ тоді і лише тоді, коли воно еквівалентне рівнянню

$$\Box u = \lambda_2 |u|^{4/(n-1)} u, \quad n \neq 1. \tag{2.6}$$

Тут λ_1, λ_2, k – дійсні параметри,

$$P_\mu = p_\mu, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \tag{2.7}$$

$$D^{(1)} = x^\mu p_\mu + \frac{1-n}{2}[up_u + u^* p_{u^*}], \qquad K_\mu^{(1)} = 2x_\mu D^{(1)} - (x_\nu x^\nu)p_\mu,$$

$$D^{(2)} = x^\mu p_\mu - \frac{2}{k}up_u - \frac{2}{k}u^* p_{u^*};$$

$$p_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad p_u = i\frac{\partial}{\partial u}, \qquad p_{u^*} = i\frac{\partial}{\partial u^*}.$$

Деякі рівняння вигляду

$$\Box u = F(u, u^*, p_\mu u, p_\mu u^*),$$

які інваріантні відносно *лінійних* зображень $A\widetilde{P}(1,n)$ і $AC(1,n)$ для $n \geq 2$ описані в роботі [74]. В роботі [89] наведений повний опис рівнянь другого порядку, які інваріантні відносно лінійних зображень алгебр $A\widetilde{P}(1,n)$ і $AC(1,n)$ де для цих зображень у $(1+n)$ вимірному просторі ($n \geq 3$) побудовано функціональний базис диференціальних інваріантів. Слід зауважити, що рівняння (2.5) і (2.6) інваріантні відносно лінійних зображень $A\widetilde{P}(1,n)$ і $AC(1,n)$, відповідно.

Виникає природне питання: чи існують нелінійні зображення конформної алгебри та розширеної алгебри Пуанкаре для комплексного скалярного поля? Відповідь на це питання позитивна. Так, у цьому розділі показано, що існує широкий клас хвильових рівнянь, які інваріантні відносно нелінійних зображень розширеної алгебри Пуанкаре. Зокрема, у цьому класі міститься рівняння [55]

$$\Box u = \frac{\Box |u|}{|u|} u + m^2 c^2 u,$$

на множині розв'язків якого реалізується нелінійне зображення конформної алгебри $AC(1, n+1)$ (параграф 2.1). Слід зауважити, що це рівняння було запропоновано в теорії де Бройля подвійних розв'язків [78, 79, 60].

Вичерпний симетрійний аналіз рівняння (2.3) здійснено у першому параграфі. У другому параграфі проводиться редукція рівняння (2.3) і будуються його точні розв'язки. В третьому параграфі досліджується умовна симетрія хвильових рівнянь відносно нелінійних зображень розширеної алгебри Пуанкаре.

2.1 Симетрійна класифікація рівняння $\Box u = F(|u|, (\nabla |u|)^2, \Box |u|)u$

Проведемо симетрійну класифікацію рівняння (2.3).

Теорема 2.1. *МАІ рівняння (2.3) для довільної функції F є алгебра $AP(1, n) \oplus Q \equiv \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, Q \rangle$ з базисними операторами (2.7) та*

$$Q = i[up_u - u^* p_{u^*}].$$

Ми будемо використовувати такі позначення: символом R будемо позначати довільну гладку функцію своїх аргументів, λ, σ, k, l, r довільні дійсні параметри, причому λ, σ не дорівнюють нулеві.

2.1.1 Лінійні та нелінійні зображення розширеної алгебри Пуанкаре і конформної алгебри для комплексного скалярного поля

Теорема 2.2. *Рівняння (2.3) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре* $A\widetilde{P}(1,n)$ *тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$2.1. \qquad \Box u = \left\{ \frac{\Box|u|}{|u|} + \left(\frac{\Box|u|}{|u|}\right)^{1-2l} R\left(\frac{|u|\Box|u|}{(\nabla|u|)^2}, |u|^2\left(\frac{\Box|u|}{|u|}\right)^k\right)\right\} u,$$

MAI: $\quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D, Q\rangle$,

$$D = x^\mu p_\mu + l\ln(u/u^*)[up_u - u^*p_{u^*}] + k[up_u + u^*p_{u^*}].$$

Ми бачимо, що якщо $l \neq 0$, то рівняння 2.1 інваріантне відносно нелінійного опреатору D, який породжує нелінійні скінченні перетворення змінних x та u:

$$x'_\mu = x_\mu \exp(\tau) \qquad u' = |u|\exp(k\tau)(u/u^*)^{\exp(2l\tau)/2}$$

де τ – груповий параметр. Зауважимо, що нелінійні зображення виникли за рахунок того, що функція F рівняння (2.3) залежить від $\Box|u|$.

Теорема 2.3. *Рівняння (2.3) інваріантне відносно конформної алгебри тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд:*

$$3.1. \qquad \Box u = |u|^{4/(n-1)} R\left(|u|^{(3+n)/(1-n)}\Box|u|\right) u, \qquad n \neq 1, \qquad (2.8)$$

MAI: $\quad \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(1)}, K_\mu^{(1)}, Q\rangle$,

$$D^{(1)} = x^\mu p_\mu + \frac{1-n}{2}[up_u + u^*p_{u^*}], \qquad K_\mu^{(1)} = 2x_\mu D^{(1)} - x^2 p_\mu;$$

$$3.2. \qquad \Box u = \Box|u| R\left(\frac{\Box|u|}{(\nabla|u|)^2}, |u|\right) u, \qquad n = 1, \qquad (2.9)$$

MAI: $\quad \langle Z^{(1)}, Q\rangle$,

$$Z^{(1)} = [s_1^{(1)}(x^0 + x^1) + s_2^{(1)}(x^0 - x^1)]p_0 + [s_1^{(1)}(x^0 + x^1) - s_2^{(1)}(x^0 - x^1)]p_1.$$

$s_1^{(1)}$, $s_2^{(1)}$ – *дійсні гладкі функції;*

3.3.[55] $$\Box u = \frac{\Box|u|}{|u|}u + \lambda u, \tag{2.10}$$

MAI: $$\langle P_\mu, P_{n+1}, J_{\mu\nu}, J_{\mu n+1}, D^{(3)}, K_\mu^{(3)}, K_{n+1}^{(3)}, Q_3\rangle, \tag{2.11}$$

$$P_{n+1} = p_{n+1} \equiv i\frac{\partial}{\partial x^{n+1}} = i\sqrt{|\lambda|}[up_u - u^* p_{u^*}],$$

$$J_{\mu n+1} = x_\mu p_{n+1} - x_{n+1}p_\mu,$$

$$D^{(3)} = x^\mu p_\mu + x^{n+1}p_{n+1} - \frac{n}{2}[up_u + u^* p_{u^*}],$$

$$K_\mu^{(3)} = 2x_\mu D^{(3)} - (x_\nu x^\nu + x_{n+1}x^{n+1})p_\mu,$$

$$K_{n+1}^{(3)} = 2x_{n+1}D^{(3)} - (x_\nu x^\nu + x_{n+1}x^{n+1})p_{n+1},$$

$$Q_3 = [up_u + u^* p_{u^*}],$$

де додаткова змінна x^{n+1} визначається за формулою:

$$x^{n+1} = \frac{i}{2\sqrt{|\lambda|}}\ln(u^*/u), \tag{2.12}$$

і в просторі змінних $(x_0, x_1, ...x_n, x_{n+1})$ введено новий метричний тензор

$$\begin{array}{ll} g_{\mathrm{ij}} = \mathrm{diag}(1, -1, ..., -1, -1), & \lambda > 0 \\ g_{\mathrm{ij}} = \mathrm{diag}(1, -1, ..., -1, 1), & \lambda < 0, \qquad \mathrm{i, j} = \overline{0, n+1}. \end{array} \tag{2.13}$$

Пряма перевірка показує, що оператори

$$\langle P_\mu, P_{n+1}, J_{\mu\nu}, J_{\mu n+1}, D^{(3)}, K_\mu^{(3)}, K_{n+1}^{(3)}\rangle$$

задовольняють комутаційні співвідношення конформної алгебри $AC(1, n+1)$ коли $\lambda > 0$ та $AC(2, n)$ коли $\lambda < 0$, а саме, співвідношення (0.9), (0.10) і (0.11) при умові, що індекси змінюються від 0 до $n+1$.

Для того, щоб дати геометричну інтерпретацію нових операторів $P_{n+1}, J_{\mu n+1}, K_\mu^{(3)}, K_{n+1}^{(3)}$, перепишемо рівняння (2.10) у термінах амплітуди і фази. Якщо ввести амплітуду $A = |u| = \sqrt{uu^*}$ і фазу $\theta = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{u^*}{u}\right)$, тобто покласти

$$u = A\exp(i\theta), \tag{2.14}$$

то рівняння (2.10) прийме вигляд системи

$$A\Box\theta + 2(\nabla A)(\nabla\theta) = 0, \tag{2.15}$$

$$(\nabla\theta)^2 = -\lambda. \tag{2.16}$$

Максимальна алгебра інваріантності цієї системи має базисні оператори (2.11), де

$$\begin{gathered} P_{n+1} = \sqrt{|\lambda|}p_\theta, \qquad J_{\mu n+1} = \sqrt{|\lambda|}(x_\mu p_\theta + (\theta/\lambda)p_\mu), \\ D^{(3)} = x^\mu p_\mu + \theta p_\theta - (n/2)Ap_A, \\ K_\mu^{(3)} = 2x_\mu D^{(3)} - (x_\nu x^\nu - \theta^2/\lambda)p_\mu, \\ K_{n+1}^{(3)} = \sqrt{|\lambda|}\left(2(\theta/\lambda)D^{(3)} + (x_\nu x^\nu - \theta^2/\lambda)p_\theta\right), \\ Q_3 = Ap_A. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Тут ми ввели такі позначення: $p_A = i\frac{\partial}{\partial A}$, $p_\theta = i\frac{\partial}{\partial\theta}$.

З формул (2.17) ми бачимо, що в операторах симетрії системи (2.15), (2.16) фазова змінна θ, а точніше змінна $x^{n+1} = \theta/\sqrt{|\lambda|}$, додається до $(n+1)$-вимірного геометричного простору змінних $(x_0, x_1, \ldots x_n)$. При цьому вводиться новий метричний тензор (2.13). Аналогічний факт має місце для алгебри інваріантності рівняння ейконала ([70]). Симетрія рівняння (2.10) має таку властивість, оскільки (2.16) є рівняння ейконала для функції θ, а рівняння (2.15), яке є рівнянням неперервності, не зменшує симетрії ейконала (2.16).

Слід зауважити, що алгебра Лі операторів

$$\langle P_\mu, P_{n+1}, J_{\mu\nu}, J_{\mu n+1}, D^{(3)}, K_\mu^{(3)}, K_{n+1}^{(3)}\rangle$$

являється нелінійним зображенням конформної алгебри. Дійсно, розв'язавши систему рівнянь Лі (0.5), ми одержимо, що оператори $K_\mu^{(3)}, K_{n+1}^{(3)}$ генерують нелінійні скінченні перетворення:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \frac{x^\mu - b^\mu(x_\delta x^\delta - \theta^2/\lambda)}{1 - 2x_\nu b^\nu - 2b_{n+1}\theta/\sqrt{|\lambda|} + b\cdot b(x_\delta x^\delta - \theta^2/\lambda)}; \\ A' &= A[1 - 2x_\nu b^\nu - 2b_{n+1}\theta/\sqrt{|\lambda|} + b\cdot b(x_\delta x^\delta - \theta^2/\lambda)]^{n/2} \\ \theta' &= \frac{\theta - \sqrt{|\lambda|}b^{n+1}(x_\delta x^\delta - \theta^2/\lambda)}{1 - 2x_\nu b^\nu - 2b_{n+1}\theta/\sqrt{|\lambda|} + b\cdot b(x_\delta x^\delta - \theta^2/\lambda)} \end{aligned}$$

де b – вектор групових параметрів в $(n+2)$–вимірному просторі з метричним тензором (2.13).

Вирази для цих скінченних перетворень відрізняються від стандартних тим, що залежна змінна θ розглядається як геометрична змінна у тому ж сенсі, що і змінні x.

Зауважимо, що нам вдалося побудувати широкі класи рівнянь, інваріантних відносно стандартного зображення конформної алгебри $AC(1,n)$ та нелінійних зображень $AC(2,n)$, $AC(1,n+1)$, оскільки нелінійність класу рівнянь (2.3) містить квантово–потенціальний доданок $\dfrac{\Box|u|}{|u|}$.

2.1.2 Повний опис алгебр інваріантності рівняння $\Box u = F(|u|, (\nabla|u|)^2, \Box|u|)u$

Слід зауважити, що рівняння (2.8) та (2.9) містять довільну функцію R. Як буде показано далі, при деяких конкретних значеннях цієї функції відповідні рівняння будуть мати ширшу симетрію, ніж зазначену у теоремі 2.3.

Теорема 2.4. *Алгебра інваріантності рівняння (2.8), при $n \neq 1$ більш широка, ніж $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(1)}, K^{(1)}_\mu, Q\rangle$ тоді і тільки тоді, коли:*

$$4.1 \qquad \Box u = \frac{\Box|u|}{|u|}u,$$

$$MAI: \qquad \langle Z^{(2)}, Q_1, Q_2\rangle,$$

$$Z^{(2)} = a^\mu\,(i\ln(u/u^*))\,P_\mu + b^{\mu\nu}\,(i\ln(u/u^*))\,J_{\mu\nu} + d\,(i\ln(u/u^*))\,D^{(1)} + $$
$$+ f^\mu\,(i\ln(u/u^*))\,K^{(1)}_\mu,$$

$$Q_1 = q_1\,(i\ln(u/u^*))\,[up_u + u^*p_{u^*}],$$

$$Q_2 = iq_2\,(i\ln(u/u^*))\,[up_u - u^*p_{u^*}],$$

де a^μ, $b^{\mu\nu}$, d, f^μ, q_1, q_2 дійсні гладкі функції своїх аргументів;

$$4.2. \qquad \Box u = \left\{\frac{\Box|u|}{|u|} + \lambda|u|^{r(n+3)-1}\left(\Box|u|\right)^{r(1-n)+1}\right\}u,$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(1)}, K_\mu^{(1)}, Q, Q_4\rangle$,

$$Q_4 = up_u + u^* p_{u^*} + r\ln(u/u^*)[up_u - u^* p_{u^*}];$$

4.3. $$\Box u = \left\{\frac{\Box|u|}{|u|} + \lambda\frac{(\Box|u|)^n}{|u|^{n+4}}\right\}u,$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(1)}, K_\mu^{(1)}, Q, Q_4(r=-1), Q_5\rangle$,

$$Q_5 = i\left\{\ln^2(u/u^*)[up_u - u^* p_{u^*}] - 2\ln(u/u^*)[up_u + u^* p_{u^*}]\right\};$$

4.4. $$\Box u = (1+\lambda)\frac{\Box|u|}{|u|}u,$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(1)}, K_\mu^{(1)}, Q, Q_3, Q_6, Q_7, Q_8, Q_9\rangle$,

$$Q_6 = (u^*/u)^{i/\sqrt{\lambda}}[up_u + u^* p_{u^*} - i\sqrt{\lambda}(up_u - u^* p_{u^*})],$$

$$Q_7 = (u/u^*)^{i/\sqrt{\lambda}}[up_u + u^* p_{u^*} + i\sqrt{\lambda}(up_u - u^* p_{u^*})],$$

$$Q_8 = \frac{y_1(\bar{x})}{|u|}(u^*/u)^{i/(2\sqrt{\lambda})}[up_u + u^* p_{u^*} - i\sqrt{\lambda}(up_u - u^* p_{u^*})],$$

$$Q_9 = \frac{y_2(\bar{x})}{|u|}(u/u^*)^{i/(2\sqrt{\lambda})}[up_u + u^* p_{u^*} + i\sqrt{\lambda}(up_u - u^* p_{u^*})],$$

де $y_1(\bar{x}), y_2(\bar{x})$ *довільні гладкі функції, і* $\Box y_1(\bar{x}) = 0$, $\Box y_2(\bar{x}) = 0$;

4.5. $$((\lambda+1)u\Box|u| - |u|\Box u)^n = \sigma|u|^{n+3}u^{n-1}(u\Box|u| - |u|\Box u),$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(1)}, K_\mu^{(1)}, Q, Q_6, Q_7\rangle$.

Теорема 2.5. *Алгебра інваріантності рівняння (2.9), при* $n = 1$ *більш широка, ніж* $\langle Z^{(1)}, Q\rangle$ *тоді і тільки тоді, коли:*

5.1. $$\Box u = \frac{\Box|u|}{|u|}u,$$

MAI: $\langle Z^{(3)}, Q_1, Q_2\rangle$,

$$Z^{(3)} = \left\{s_1^{(3)}\left(x^0 + x^1, i\ln(u/u^*)\right) + s_2^{(3)}\left(x^0 - x^1, i\ln(u/u^*)\right)\right\}p_0 +$$

$$+\left\{s_1^{(3)}\left(x^0+x^1, i\ln(u/u^*)\right)-s_2^{(3)}\left(x^0-x^1, i\ln(u/u^*)\right)\right\}p_1,$$

$s_1^{(3)}$, $s_2^{(3)}$ – *дійсні гладкі функції;*

5.2. $$\Box u=\left\{\frac{\Box|u|}{|u|}+|u|^{4r-1}\Box|u|R\left(\frac{|u|\Box|u|}{(\nabla|u|)^2}\right)\right\}u,$$

MAI: $\langle Z^{(1)}, Q, Q_4\rangle$;

5.3. $$\Box u=\frac{\Box|u|}{|u|}\left(1+\frac{\lambda}{|u|^4}\right)u,$$

MAI: $\langle Z^{(1)}, Q, Q_4(r=-1), Q_5\rangle$;

5.4. $$\Box u=\left\{\frac{\Box|u|}{|u|}+\lambda\frac{\Box|u|}{|u|^3}-\lambda\frac{(\nabla|u|)^2}{|u|^4}\right\}u,$$

MAI: $\langle Z^{(1)}, Q, Q_4(r=-1/2), Q_{10}\rangle$;

$$Q_{10}=i\left\{\ln\left(\frac{u}{u^*}\right)[up_u+u^*p_{u^*}]+\left(\frac{\lambda}{|u|^2}-\frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{u}{u^*}\right)\right)[up_u-u^*p_{u^*}]\right\};$$

5.5. $$\Box u=(1+\lambda)\frac{\Box|u|}{|u|}u,$$

MAI: $\langle Z^{(1)}, Q, Q_3, Q_6, Q_7, Q_8, Q_9\rangle$;

5.6. $$\Box u=\frac{\Box|u|}{|u|}\left(1+\frac{\lambda}{1+\sigma|u|^4}\right)u,$$

MAI: $\langle Z^{(1)}, Q, Q_6, Q_7\rangle$;

5.7. $$\Box u=\left\{\frac{\Box|u|}{|u|}+\frac{\lambda\Box|u|}{|u|(\sigma+|u|^2)}-\frac{\lambda(\nabla|u|)^2}{(\sigma+|u|^2)^2}\right\}u,$$

MAI: $\langle Z^{(1)}, Q, Q_{11}, Q_{12}\rangle$,

$$Q_{11}=\left(\frac{\sigma+|u|^2}{|u|^2}\left(\frac{u^*}{u}\right)^{i\sqrt{\sigma/\lambda}}\right)^{1/2}\left\{up_u+u^*p_{u^*}-i\sqrt{\lambda/\sigma}(up_u-u^*p_{u^*})\right\},$$

$$Q_{12}=\left(\frac{\sigma+|u|^2}{|u|^2}\left(\frac{u}{u^*}\right)^{i\sqrt{\sigma/\lambda}}\right)^{1/2}\left\{up_u+u^*p_{u^*}+i\sqrt{\lambda/\sigma}(up_u-u^*p_{u^*})\right\}.$$

Зауваження 2.1 *За допомогою локальної заміни змінних*

$$\begin{cases} u' = A\left(\cosh\dfrac{\theta}{\sqrt{\lambda}} + i\sinh\dfrac{\theta}{\sqrt{\lambda}}\right), & \lambda > 0; \\ u' = A\left(\cos\dfrac{\theta}{\sqrt{-\lambda}} + i\sin\dfrac{\theta}{\sqrt{-\lambda}}\right), & \lambda < 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

рівняння

$$\Box u = (1+\lambda)\frac{\Box|u|}{|u|}u, \qquad \lambda \neq 0$$

зводиться до лінійного рівняння $\Box u' = 0$.

Результати симетрійної класифікації рівняння (2.3) не вичерпуються теоремами 2.1 –2.5. Фактично існують дилатаційно–інваріантні рівняння, наведені у теоремі 2.2, алгебра інваріантності яких містить додаткові оператори і не містить конформних операторів. Усі такі рівняння описані у наступному твердженні.

Теорема 2.6. *Всі рівняння типу (2.3), які допускають більш широку алгебру, ніж алгебра* $A\widetilde{P}(1,n)\oplus Q$, *мають вигляд, наведений у теоремах 2.3 – 2.5 та*

6.1. $$\Box u = \left\{\frac{\Box|u|}{|u|} + |u|^{4r}\left(\frac{\Box|u|}{|u|}\right)^{1-2l} R\left(\frac{|u|\Box|u|}{(\nabla|u|)^2}\right)\right\}u,$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D(k=0), Q, Q_4\rangle$;

6.2. $$\Box u = \left\{\frac{\Box|u|}{|u|} + \lambda\frac{\Box|u|}{|u|^3} - \lambda\frac{(\nabla|u|)^2}{|u|^4}\right\}u, \qquad n \neq 1,$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D(k=l=0), Q, Q_1(r=-1/2), Q_{10}\rangle$;

6.3. $$\Box u = \left\{\frac{\Box|u|}{|u|} + \frac{\lambda}{|u|^4}\left(\frac{\Box|u|}{|u|}\right)^{1-2l}\right\}u,$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D(k=0), Q, Q_1(r=-1), Q_5\rangle$;

6.4. $$\Box u = \frac{\Box|u|}{|u|}\left(1 + \frac{\lambda}{1+\sigma|u|^4}\right)u, \qquad n \neq 1,$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D(k=0, l=0), Q, Q_6, Q_7\rangle$;

6.5. $$\left((\lambda+1)u\Box|u| - |u|\Box u\right)^{1-2k} = \sigma|u|^{4-2k}u^{-2k}(u\Box|u| - |u|\Box u),$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D(l=0), Q, Q_6, Q_7\rangle$;

6.6. $$\Box u = \left\{\frac{\Box|u|}{|u|} + \frac{\lambda\Box|u|}{|u|(\sigma+|u|^2)} - \frac{\lambda(\nabla|u|)^2}{(\sigma+|u|^2)^2}\right\}u, \qquad n \neq 1,$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D(k=0, l=0), Q, Q_{11}, Q_{12}\rangle$;

6.7. $$\Box u = \left\{\frac{\Box|u|}{|u|} + \frac{\lambda}{|u|^4}\right\}u,$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D(k=1/2), Q, Q_{13}\rangle$,

$$Q_{13} = iz\left(i\ln(u/u^*)\right)[up_u - u^*p_{u^*}] + z'\left(i\ln(u/u^*)\right)[up_u + u^*p_{u^*}],$$

де z – довільна гладка функція, z' – перша похідна від функції z по відповідному аргументу, а саме, $z'\left(i\ln(u/u^*)\right) = dz/d\left(i\ln(u/u^*)\right)$.

Наступна теорема завершує симетрійну класифікацію рівняння (2.3), де вказані рівняння, які не допускають оператор дилатації.

Теорема 2.7. *Усі рівняння типу (2.3) MAI яких більш широка, ніж $AP(1,n)\oplus Q$ мають вигляд, указаний у теоремах 2.2 - 2.6 або:*

7.1. $$\Box u = \left\{\frac{\Box|u|}{|u|} + |u|^{4r}R\left(\frac{|u|\Box|u|}{(\nabla|u|)^2}, \frac{\Box|u|}{|u|}\right)\right\}u,$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, Q, Q_4\rangle$;

7.2. $$\Box u = \left\{\frac{\Box|u|}{|u|} + \frac{1}{|u|^4}R\left(\frac{\Box|u|}{|u|}\right)\right\}u,$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, Q, Q_4(r=-1), Q_5\rangle$;

7.3. $$\frac{\Box u}{u} - (\lambda+1)\frac{\Box|u|}{|u|} = R\left(\left(\frac{\Box u}{u} - \frac{\Box|u|}{|u|}\right)|u|^4\right),$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, Q, Q_6, Q_7\rangle$;

7.4. $$\Box u = \left\{(1+\lambda)\frac{\Box|u|}{|u|} - \sigma\lambda\right\}u,$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, Q, Q_3, Q_6, Q_7, Q_8(\Box y_1 = \sigma y_1), Q_9(\Box y_2 = \sigma y_2)\rangle$.

Зауваження 2.2 *В рівнянні 7.4 можна покласти* $\lambda = -1$, *оскільки за допомогою заміни змінних (2.18) рівняння 7.4 при* $\lambda \neq 0$ *зводиться до лінійного рівняння* $\Box u' = \sigma u'$.

Оператори Q, Q_3, Q_6, Q_7, $\lambda = -1$ відіграють важливу роль при редукції рівняння $\Box u' = \sigma u'$ до лінійного рівняння Шродінгера та рівняння теплопровідності [53, 54].

2.1.3 Доведення основних тверджень

Доведення сформульованих тверджень проводиться за однотипною схемою. Воно базується на застосуванні умови інваріантності Лі [70, 17, 84]. Трудноші при розв'язуванні цієї умови для рівняння (2.3) головним чином пов'язані з операцією переходу на многовид і знаходженням загального розв'язком визначальних рівнянь. Ми обійшли деякі з них за допомогою зображення комплексного поля у термінах амплітуди і фази (2.14). У цих термінах рівняння (2.3) прийме вигляд:

$$A\Box\theta + 2(\nabla A)(\nabla\theta) = 0, \tag{2.19}$$

$$\Box A - A(\nabla\theta)^2 = F(A, (\nabla A)^2, \Box A)A. \tag{2.20}$$

Симетрія системи (2.19), (2.20) досліджується значно легше, ніж рівняння (2.3).

Нам необхідно розглянути два випадки.

Випадок 1. Рівняння (2.20) може бути розв'язано відносно $\Box A$. Тоді система (2.19), (2.20) переписується у вигляді:

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv A\Box\theta + 2(\nabla A)(\nabla\theta) = 0, \\ L_2 &\equiv \Box A + W(A, (\nabla A)^2, (\nabla\theta)^2) = 0, \end{aligned} \tag{2.21}$$

де W – довільна гладка функція, причому $\partial W/\partial((\nabla\theta)^2) \neq 0$.

Для дослідження симетрії системи (2.21) необхідно використовувати умову інваріантності [70, 17, 84]

$$\underset{2}{X}(L_1)|_{\Sigma_1} = 0, \qquad \underset{2}{X}(L_2)|_{\Sigma_1} = 0, \tag{2.22}$$

де X – інфінітезимальний оператор алгебри Лі

$$X = \xi^\mu(\bar{x}, A, \theta)p_\mu + \eta^1(\bar{x}, A, \theta)p_A + \eta^2(\bar{x}, A, \theta)p_\theta, \tag{2.23}$$

$\underset{2}{X}$ – його друге продовження, Σ_1 – диференціальний многовид, тобто

$$\Sigma_1 = \left[\begin{array}{l} A\Box\theta = -2(\nabla A)(\nabla\theta) \\ \Box A = -W(A, (\nabla A)^2, (\nabla\theta)^2) \end{array} \right].$$

Знайшовши друге продовження оператора (2.23) за формулами продовження (0.7), перепишемо систему (2.22) у вигляді:

$$\begin{aligned} &[\eta^1 g^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu} + A(D_\mu D^\mu \eta^2 - \theta_\nu D_\mu D^\mu \xi^\nu - 2\theta_{\mu\nu} D^\mu \xi^\nu) + \\ &+2\theta^\mu(D_\mu\eta^1 - A_\nu D_\mu \xi^\nu) + 2A^\mu(D_\mu\eta^2 - \theta_\nu D_\mu\xi^\nu)]\Big|_{\Sigma_1} = 0 \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} &[D_\mu D^\mu \eta^1 - A_\nu D_\mu D^\mu \xi^\nu - 2A_{\mu\nu} D^\mu \xi^\nu - \eta^1 W_A + \\ &+2A^\mu(D_\mu\eta^1 - A_\nu D_\mu\xi^\nu)W_{s_1} + 2\theta^\mu(D_\mu\eta^2 - \theta_\nu D_\mu\xi^\nu)W_{s_2}]\Big|_{\Sigma_1} = 0, \end{aligned} \tag{2.25}$$

де $s_1 = (\nabla A)^2$, $s_2 = (\nabla\theta)^2$, $W_{s_i} = \partial W/(\partial x^\mu)$, $i = 1, 2$, D_μ – оператори повного диференціювання, $\theta_\mu = \dfrac{\partial\theta}{\partial x^\mu}$, $A_\mu = \dfrac{\partial A}{\partial x^\mu}$ і т.д.

Розщепивши по другим похідним рівняння (2.24) і (2.25) ми одержимо, що функції ξ^μ задовольняють системі рівнянь Кіллінга (1.14) та рівнянням

$$\xi^\mu_A = 0, \qquad \xi^\mu_\theta = 0. \tag{2.26}$$

Враховуючи це і переходячи на многовид в системі (2.24), (2.25), записуємо:

$$\begin{aligned} &-2\eta^1\nabla A\nabla\theta + A^2(\Box\eta^2 + 2\nabla A\nabla\eta^2_A + 2\nabla\theta\nabla\eta^2_\theta + \eta^2_{AA}(\nabla A)^2 + \\ &+\eta^2_{\theta\theta}(\nabla\theta)^2 + 2\eta^2_{A\theta}\nabla A\nabla\theta - \eta^2_A W - (1-n)\nabla\theta\nabla\xi^0_0) + \\ &2A(\nabla\theta\nabla\eta^1 + \eta^1_\theta(\nabla\theta)^2 + \eta^1_A\nabla\theta\nabla A + \nabla A\nabla\eta^2 + \eta^2_A(\nabla A)^2) = 0 \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} &\Box\eta^1 + 2\nabla A\nabla\eta^1_A + 2\nabla\theta\nabla\eta^1_\theta + \eta^1_{AA}(\nabla A)^2 + 2\eta^1_{A\theta}\nabla A\nabla\theta + \eta^1_{\theta\theta}(\nabla\theta)^2 - \\ &-\eta^1_A W - (2/A)\eta^1_\theta\nabla A\nabla\theta - (1-n)\nabla A\nabla\xi^0_0 + 2W\xi^0_0 + \eta^1 W_A + \\ &+2W_{s_1}(\nabla A\nabla\eta^1 + \eta^1_A(\nabla A)^2 + \eta^1_\theta\nabla A\nabla\theta - \xi^0_0(\nabla A)^2) + \\ &+2W_{s_2}(\nabla\theta\nabla\eta^2 + \eta^2_A\nabla A\nabla\theta + \eta^2_\theta(\nabla\theta)^2 - \xi^0_0(\nabla\theta)^2) = 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Оскільки W залежить лише від A, $(\nabla A)^2$, $(\nabla\theta)^2$, то при решті змінних (тобто при ∇A, $\nabla\theta$, $(\nabla A)(\nabla\theta)$) слід прирівняти коефіцієнти до нуля:

$$
\begin{array}{lll}
(\nabla A)(\nabla\theta): & -2\eta^1 + 2A^2\eta^2_{A\theta} + 2A\eta^1_A = 0 & \\
& 2A\eta^1_{A\theta} - 2\eta^1_\theta + 2AW_{s_1}\eta^1_\theta + 2AW_{s_2}\eta^2_A = 0 & \\
\nabla A: & A\eta^2_{\mu A} + \eta^2_\mu = 0 & \\
& 2\eta^1_{\mu A} - (1-n)\xi^0_{0\mu} + 2W_{s_1}\eta^1_\mu = 0 & \\
\nabla\theta: & 2A\eta^2_{\mu\theta} - A(1-n)\xi^0_{0\mu} + 2\eta^1_\mu = 0 & \\
& \eta^1_{\mu\theta} + W_{s_2}\eta^2_\mu = 0, &
\end{array}
\qquad (2.29)
$$

звідки одержуємо такі класифікуючи рівняння:

$$
A(\Box\eta^2 + s_1\eta^2_{AA} + s_2\eta^2_{\theta\theta} - \eta^2_A W) + 2(\eta^1_\theta s_2 + \eta^2_A s_1) = 0 \qquad (2.30)
$$

$$
\begin{array}{l}
\eta^1_{AA}s_1 + \eta^1_{\theta\theta}s_2 - \eta^1_A W + 2W\xi^0_0 + \eta^1 W_A + \\
+2s_1W_{s_1}(\eta^1_A - \xi^0_0) + 2s_2W_{s_2}(\eta^2_\theta - \xi^0_0) = 0.
\end{array}
\qquad (2.31)
$$

При розв'язанні системи (2.29) – (2.31) необхідно враховувати, що $W_{s_2} \neq 0$.

Знайшовши загальний розв'язок системи рівнянь Кіллінга, рівнянь (2.26), (2.29) – (2.31), ми одержимо повну симетрійну класифікацію системи рівнянь (2.21). Тут ми зупинимось лише на деяких найбільш важливих випадках і будемо розглядати лише такі розв'язки системи визначальних рівнянь, для яких $\xi^0_0 \neq 0$. В протилежному разі система не буде допускати ні операторів дилатаціїї, ні конформних операторів.

I. W – довільна.

Тоді, очевидно, що

$$
\xi^\mu = b^{\mu\nu}x_\nu + a^\mu, \qquad \eta^1 = 0, \qquad \eta^2 = h,
$$

де $b^{\mu\nu} = -b^{\nu\mu}$, a^μ, h – довільні сталі. Це приводить нас до твердження теореми 2.1.

II. $W_{s_1s_2} \neq 0$ або $W_{s_1s_2} = 0$, $W_{s_1s_1} \neq 0$ або $W_{s_1s_2} = 0$, $W_{s_1s_1} = 0$, $W_{s_2s_2} \neq 0$, $W_{s_1} \neq 0$.

Тоді розщеплюючи систему рівнянь (2.29), (2.30) отримаємо:

$$
\eta^1_\mu = \eta^2_\mu = \eta^2_A = \eta^1_\theta = \eta^2_{\theta\theta} = 0,\ \xi^0_0 = d = const\ \eta^1 - A\eta^1_A = 0,
$$

загальний розв'язок яких, враховуючи (1.14), (2.26), має вигляд:

$$
\xi^\mu = dx^\mu + b^{\mu\nu}x_\nu + a^\mu,
$$

$$\eta^1 = h_1 A, \qquad \eta^2 = h_2\theta + h_3,$$

де d, $b^{\mu\nu} = -b^{\nu\mu}$, a^μ, h_1, h_2, h_3 – довільні параметри.

Підставляючи ці вирази до рівняння (2.31), одержимо таке класифікуюче рівняння:

$$(2d - h_1)W + h_1 A W_A + 2s_1 W_{s_1}(h_1 - d) + 2s_2 W_{s_2}(h_2 - d) = 0. \quad (2.32)$$

Параметри a^μ $b^{\mu\nu}$, h_3 відповідають операторам P_μ, $J_{\mu\nu}$, Q, які будуть операторами симетрії системи (2.21) для довільної функції W. Найбільш загальний вигляд оператора симетрії, який відповідає решті параметрів записується так:

$$X = dx^\mu p_\mu + h_1 A p_A + h_2\theta p_\theta.$$

Тепер задача класифікації зводиться до знаходження такої функції W, для якої система (2.21) буде інваріантна відносно однієї з алгебр:

$$\langle D\rangle,\ \ \langle D(k=0), Q_4\rangle,\ \langle D(l=0), \theta p_\theta\rangle,$$

$$\langle D(k=0, l=0), Q_4(r=0), \theta p_\theta\rangle,\ \langle Q_4\rangle,\ \langle Q_4(r=0), \theta p_\theta\rangle,\ \langle \theta p_\theta\rangle,$$

де k, l, r – певні параметри і

$$D = x^\mu p_\mu + kAp_A + 2l\theta p_\theta, \qquad Q_4 = Ap_A + 2r\theta p_\theta.$$

Тут ми розглянемо перші дві алгебри.

$\underline{\langle D\rangle}$.

В цьому випадку має справджуватись рівняння (2.32) для $d = 1$, $h_1 = k$, $h_2 = 2l$, тобто

$$(2 - k)W + kAW_A + 2s_1 W_{s_1}(k - 1) + 2s_2 W_{s_2}(2l - 1) = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння приводить нас до твердження, що рівняння 2.1 (теорема 2.2) інваріантне відносно оператора D.

$\underline{\langle D(k=0), Q_4\rangle}$. В цьому випадку рівняння (2.32) має справджуватись як і для параметрів $d = 1$, $h_1 = 0$, $h_2 = 2l$, так і для параметрів $d = 0$, $h_1 = 1$, $h_2 = h$, тобто має справджуватись система

$$2W - 2s_1 W_{s_1} + 2s_2 W_{s_2}(2l - 1) = 0.$$

$$-W + AW_A + 2s_1W_{s_1} + 2hs_2W_{s_2} = 0.$$

Загальний розв'язок цієї системи приводить нас до пункту 6.1 теореми 2.6.

Решта алгебр досліджується аналогічно.

III. $W_{s_1s_2} \neq 0$ або $W_{s_1s_2} = 0$, $W_{s_1s_1} \neq 0$ або $W_{s_1s_2} = 0$, $W_{s_1s_1} = 0$, $W_{s_2s_2} \neq 0$, $W_{s_1} \neq 0$, $n = 1$.

Тоді розщеплюючи систему рівнянь (2.29), (2.30) отримаємо:

$$\eta^1_\mu = \eta^2_\mu = \eta^2_A = \eta^1_\theta = \eta^2_{\theta\theta} = 0, \qquad \eta^1 - A\eta^1_A = 0,$$

звідки

$$\xi^0 = s_1^{(1)}(x^0 + x^1) - s_2^{(1)}(x^0 - x^1),\ \xi^1 = s_1^{(1)}(x^0 + x^1) + s_2^{(1)}(x^0 - x^1),$$

$$\eta^1 = h_1A, \qquad \eta^2 = h_2\theta + h_3.$$

де h_1, h_2, h_3 – довільні параметри, $s_1^{(1)}$, $s_2^{(1)}$ – довільні дійсні сталі.

Підставляючи ці вирази до рівняння (2.31) і проводячи класифікацію аналогічно попередньому пункту, ми прийдемо до твердження 3.2 теореми 2.3 і до 1.5 теореми 2.5.

IV. $W_{s_2s_2} \neq 0$, $W_{s_1} = 0$.

Тоді з системи рівнянь (2.29)–(2.31) отримаємо:

$$\begin{array}{ll} \eta^2_\mu = \eta^2_A = \eta^1_{\mu\theta} = 0, & A\eta^2_{\theta\theta} + 2\eta^1_\theta = 0, \\ \eta^1 - A\eta^1_A = 0, & 2\eta^1_\mu - A(1-n)\xi^0_{0\mu} = 0, \end{array} \tag{2.33}$$

$$\eta^1_{\theta\theta} + W(2\xi^0_0 - \eta^1_A) + \eta^1W_A + 2s_2W_{s_2}(\eta^2_\theta - \xi^0_0) = 0. \tag{2.34}$$

Тут ми дослідимо лише такі розв'язки системи (1.14), (2.26), (2.33), (2.34), для яких $\xi^0_{0\mu} \neq 0$, оскільки саме при такій умові система (2.21) буде інваріантна відносно конформної алгебри.

Диференцюємо рівняння (2.34) по x^μ. Тоді, враховуючи рівняння (2.33), одержимо:

$$W(n+3) + A(1-n)W_A - 4s_2W_{s_2} = 0.$$

Отже,

$$W = s_2^{(n+3)/4}R(s_2^{1-n}A^4). \tag{2.35}$$

Підставляючи цей вираз до класифікуючого рівняння (2.34) ми одержимо, що якщо R – довільна, то окрім (2.33) мають виконуватись ще такі умови на η^1 і η^2:

$$\eta^1_\theta = \eta^2_\theta = 0. \tag{2.36}$$

Загальний розв'язок системи (2.33), (2.36) приводить нас до твердження, що рівняння (2.8) інваріантне відносно конформної алгебри $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(1)}, K^{(1)}_\mu \rangle$.

Виявляється, що при деяких певних значеннях функції R виконання умов (2.36) не є обов'язковим. Усі такі значення функції R відповідають більш широкій симетрії, ніж конформна алгебра. Ми не будемо наводити детальні обчислення. Зауважимо лише, що усі такі рівняння з відповідними максимальними алгебрами інваріантності перелічені у теоремі 2.4 пунктах 4.2, 4.3, 4.5, та у теоремі 2.5 пунктах 5.3, 5.6.

V. $W_{s_1s_1} = W_{s_2s_1} = W_{s_2s_2} = 0.$

Оскільки дослідження цього випадку досить громіздке, ми його наводити не будемо. Зауважимо лише, що цей випадок не приводить до нових конформно і дилатаційно-інваріантних рівнянь.

Випадок 2. Рівняння (2.20) не може бути розв'язано відносно $\Box A$. Це можливо тоді і тільки тоді, коли

$$F(A, (\nabla A)^2, \Box A) \equiv \frac{\Box A}{A} + V(A, (\nabla A)^2),$$

де $V(\cdot, \cdot)$ довільні гладкі функції. Тоді система (2.19), (2.20) прийме вигляд:

$$L_1 \equiv A\Box\theta + 2(\nabla A)(\nabla\theta) = 0, \tag{2.37}$$
$$L_3 \equiv (\nabla\theta)^2 + V(A, (\nabla A)^2) = 0 \tag{2.38}$$

і її симетрія може бути знайдена з використанням критерію інваріантності

$$\underset{2}{X}(L_1)|_{\Sigma_2} = 0, \qquad \underset{1}{X}(L_3)|_{L_3=0} = 0. \tag{2.39}$$

Тут X – інфінітезимальний оператор (2.23), $\underset{1}{X}$ і $\underset{2}{X}$ – його перше та друге продовження, Σ_2 – диференціальний многовид, тобто

$$\Sigma_2 = \left[\begin{array}{l} A\Box\theta = -2(\nabla A)(\nabla\theta) = 0, \\ (\nabla\theta)^2 + V(A, (\nabla A)^2) = 0, \\ \nabla((\nabla\theta)^2) + V_A\nabla A + V_s\nabla((\nabla A)^2) = 0. \end{array} \right]$$

де $s = (\nabla A)^2$, $V_s = \partial V/(\partial s)$. Останній вираз в системі Σ_2 є не що інше, як диференціальні наслідки рівняння (2.38), які необхідно враховувати при обчисленні симетрії системи (2.37), (2.38), оскільки (2.37) – рівняння більш високого порядку, ніж (2.38). Звідси, зокрема, випливає, що на симетрію рівняння (2.38) не впливає рівняння (2.37).

Знайшовши перше і друге продовження оператора X, перепишемо вирази (2.39) у вигляді:

$$\begin{aligned}&[\eta^1 g^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu} + A(D_\mu D^\mu \eta^2 - \theta_\nu D_\mu D^\mu \xi^\nu - 2\theta_{\mu\nu} D^\mu \xi^\nu) + \\ &+2\theta^\mu (D_\mu \eta^1 - A_\nu D_\mu \xi^\nu) + 2A^\mu (D_\mu \eta^2 - \theta_\nu D_\mu \xi^\nu)]\Big|_{\Sigma_3} = 0\end{aligned}$$

$$[2\theta_\mu (D^\mu \eta^2 - \theta_\nu D^\mu \xi^\nu) - R_A \eta^1 + 2R_s A_\mu (D^\mu \eta^1 - A_\nu D^\mu \xi^\nu)]\Big|_{L_3=0} = 0$$

Розглянемо випадок, коли $V_s = V_A = 0$. Тоді перейшовши в останньому виразі на многовид і розщепивши по незалежних змінних, ми одержимо, що функції ξ_μ, η^1, η^2 мають задовольняти такій системі визначальних рівнянь:

$$\begin{aligned}&\eta^2_A = 0, \quad A\eta^1_A - \eta^1 = 0 \quad \xi^\mu_A = 0; \quad \xi^0_0 = \xi^1_1 = \cdots = \xi^n_n; \\ &\xi^i_0 = \xi^0_i, \qquad \xi^i_j = -\xi^j_i, \qquad i \neq j,\ i,j = \overline{1,n}; \qquad \frac{\partial \eta^2}{\partial x_\mu} = V\xi^\mu_\theta \\ &V(\eta^2_\theta - \xi^0_0) = 0, \quad V(An\xi^0_{0\theta} + 2\eta^1_\theta) = 0, \\ &V\xi^\mu_{\theta\theta} - (1-n)\frac{\partial \xi^0_0}{\partial x_\mu} + \frac{2}{A}\frac{\partial \eta^1}{\partial x_\mu} = 0.\end{aligned} \tag{2.40}$$

Якщо $V = 0$, то загальний розв'язок системи (2.40) буде:

$$\left.\begin{aligned}&\xi^0 = s_1^{(3)}(x^0 + x^1, \theta) - s_2^{(3)}(x^0 - x^1, \theta), \\ &\xi^1 = s_1^{(3)}(x^0 + x^1, \theta) + s_2^{(3)}(x^0 - x^1, \theta), \\ &\eta^1 = q_1(\theta)A, \qquad \eta^2 = q_2(\theta)\end{aligned}\right\} \qquad n = 1,$$

$$\left.\begin{aligned}&\xi^\nu = 2x^\nu x_\mu f^\mu(\theta) - x_\mu x^\mu f^\nu(\theta) + b^{\nu\mu}(\theta)x_\mu + d(\theta)x^\nu + a^\nu(\theta); \\ &\eta^1 = ((1-n)f^\mu(\theta)x_\mu + q_1(\theta))A, \qquad \eta^2 = q_2(\theta),\end{aligned}\right\} \quad n \neq 1,$$

де a^μ, $b^{\mu\nu}$, d, f^μ, q_1, q_2, $s_1^{(3)}$, $s_2^{(3)}$ – дійсні гладкі функції своїх аргументів.

Це приводить нас до тверджень 4.1 і 5.1 теорем 2.4 і 2.5, відповідно.

Якщо $V = \lambda \neq 0$, то загальний розв'язок системи (2.40) має вигляд:

$$\xi^\nu = 2x^\nu(x_\mu c^\mu + x_{n+1}c^{n+1}) - (x_\mu x^\mu + x_{n+1}x^{n+1})c^\nu +$$

$$+b^{\nu\mu}x_\mu + b^{\nu n+1}x_{n+1} + dx^\nu + h^\nu$$

$$\eta^1 = (-nc^\mu x_\mu - nc^{n+1}x_{n+1} + h)A,$$

$$\eta^2 = \sqrt{|\lambda|}[2x^{n+1}(x_\mu c^\mu + x_{n+1}c^{n+1}) - (x_\mu x^\mu + x_{n+1}x^{n+1})c^{n+1} +$$

$$+b^{n+1\,\mu}x_\mu + dx^{n+1} + h^{n+1}],$$

де додаткова змінна x^{n+1} визначається за формулою:

$$x^{n+1} = \theta/\sqrt{|\lambda|},$$

в просторі змінних $(x_0, x_1, ...x_n, x_{n+1})$ введено новий метричний тензор (2.13), c^i, $b^{ij} = -b^{ji}$, d, a^i, h^i h – довільні сталі, $i, j = \overline{1, n+1}$.

Це приводить нас до твердження пункту 3.3 теореми 2.3.

Випадки $V_s \neq 0$, $V_A \neq 0$ розглядаються аналогічно. Оскільки вони не приводять до нових дилатаційно і конформно – інваріантних рівнянь, ми не будемо наводити їх дослідження. **Теореми доведено.**

Наприкінці цього параграфу зауважимо, що деякі побудовані оператори, мають більш простий вигляд у термінах A і θ. Наведемо їх.

$$D = x^\mu p_\mu + kAp_A + 2l\theta p_\theta;$$

$$Q = p_\theta;$$

$$Q_1 = q_1(-2\theta)Ap_A;$$

$$Q_2 = q_2(-2\theta)p_\theta;$$

$$Q_3 = Ap_A;$$

$$Q_4 = Ap_A + 2r\theta p_\theta;$$

$$Q_5 = 4(\theta Ap_A - \theta^2 p_\theta);$$

$$Q_6 = \exp\left(\frac{2\theta}{\sqrt{\lambda}}\right)[Ap_A - \sqrt{\lambda}p_\theta];$$

$$Q_7 = \exp\left(-\frac{2\theta}{\sqrt{\lambda}}\right)[Ap_A + \sqrt{\lambda}p_\theta];$$

$$Q_8 = \frac{y_1(\bar{x})}{A}\exp\left(\frac{\theta}{\sqrt{\lambda}}\right)[Ap_A - \sqrt{\lambda}p_\theta];$$

$$Q_9 = \frac{y_2(\bar{x})}{A}\exp\left(-\frac{\theta}{\sqrt{\lambda}}\right)[Ap_A + \sqrt{\lambda}p_\theta];$$

$$Q_{10} = -2\theta Ap_A + (\lambda/A^2 + \theta^2)p_\theta;$$

$$Q_{11} = \exp\left(\theta\sqrt{\frac{\sigma}{\lambda}}\right)\frac{\sqrt{\sigma + A^2}}{A}[Ap_A - \sqrt{\lambda/\sigma}p_\theta];$$

$$Q_{12} = \exp\left(-\theta\sqrt{\frac{\sigma}{\lambda}}\right)\frac{\sqrt{\sigma + A^2}}{A}[Ap_A + \sqrt{\lambda/\sigma}p_\theta];$$

$$Q_{13} = z(-2\theta)p_\theta + z'(-2\theta)Ap_A.$$

2.2 Точні розв'язки нелінійних конформно–інваріантних хвильових рівнянь

Розглянемо одне з описаних нами нелінійних хвильових рівняннь

$$\Box u = \left\{\frac{\Box|u|}{|u|} + \lambda_1|u|^{6r-1}(\lambda_2\Box|u|)^{1-2r}\right\}u \qquad \lambda_1, \lambda_2 = const. \tag{2.41}$$

Як свідчить теорема 2.4, коли $n = 3$, рівняння (2.41) інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,3)= \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(1)}, K_\mu^{(1)}\rangle$ та операторів Q і Q_4. За допомогою цієї симетрії і методу анзаців побудуємо точні розв'язки рівняння (2.41). Для цього, перепишемо рівняння (2.41) у термінах амплітуди і фази:

$$\begin{cases} A\Box\theta + 2(\nabla A)(\nabla\theta) = 0, \\ (\nabla\theta)^2 + \lambda_1 A^{6r-1}(\lambda_2\Box A)^{1-2r} = 0. \end{cases} \tag{2.42}$$

Одразу обмежемось випадком, коли $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ та $r \neq 0$, оскільки, якщо $\lambda_1\lambda_2 = 0$, то друге рівняння системи (2.42) буде мати загальний розв'язок [39, 90], а якщо $r = 0$, то, згідно з зауваженням 2.1, рівняння (2.41) буде еквівалентне безмасовому рівнянню $\Box u = 0$.

2.2.1 Узагальненні пуанкаре–інваріантні анзаци

Оскільки система (2.42) інваріантна відносно алгебри Пуанкаре $AP(1,3) = \langle P_\mu, J_{\mu\nu} \rangle$, то її розв'язки можна шукати у вигляді [70]:

$$\begin{cases} A = \varphi(\omega) \\ \theta = \psi(\omega), \end{cases} \tag{2.43}$$

де $\omega = \omega(x)$ – інваріанти підалгебр $AP(1.3)$ [36, 85].

У цьому пункті ми будемо проводити редукцію використовуючи лише загальну форму анзацу (2.43) і не використовуючи симетрію відносно $AP(1.3)$, тобто ми не будемо вимагати, що ω, нова незалежна змінна, була інваріантом підалгебр алгебри $AP(1.3)$ [34, 70].

Підставляючи (2.43) у (2.42) ми прийдемо до системи:

$$\begin{cases} \omega_\mu \omega^\mu (\varphi \psi'' + 2\varphi' \psi') + \Box\omega \varphi' \psi' = 0 \\ \omega_\mu \omega^\mu \psi'^2 + \lambda_1 (\lambda_2 (\omega_\mu \omega^\mu \varphi'' + \Box\omega \varphi'))^{1-2r} \varphi^{6r-1} = 0. \end{cases} \tag{2.44}$$

Для того, аби підстановка (2.43) зводила (2.42) до системи звичайних диференціальних рівнянь необхідно і досить, щоб ω задовольняло системі Д'аламбера–Гамільтона:

$$\begin{cases} \omega_\mu \omega^\mu = f_1(\omega) \\ \Box\omega = f_2(\omega), \end{cases} \tag{2.45}$$

де $f_1(\omega)$ та $f_2(\omega)$ – довільні функції. Сисема (2.45) є не що інше, як умова розщеплення змінних для рівняння (2.44) [70].

Зауважимо, що за допомогою розв'язків системи Д'аламбера–Гамільтона (2.45) було знайдено розв'язки нелінійних хвильових рівнянь (2.4) для комплексного скалярного поля [43, 77, 61].

Перевизначена система (2.45) була детально вивчена у роботах [38, 76, 90, 77], де, по–перше, встановлено, що (2.45) сумісна тоді і тільки тоді, коли вона еквівалентна системі

$$\begin{cases} \omega_\mu \omega^\mu = \sigma \\ \Box\omega = \sigma N \omega^{-1}, \qquad N = 0, 1, 2, 3; \quad \sigma = const, \end{cases} \tag{2.46}$$

і, по друге, побудовано загальний розв'язок системи (2.46).

При умові, що ω задовольняє (2.46), система (2.44) прийме вигляд:

$$\begin{cases} \varphi\psi'' + 2\varphi'\psi' + \varphi\psi' N \omega^{-1} = 0 \\ \psi'^2 + \lambda_1 \sigma^{-2r} \varphi^{6r-1} (\lambda_2 (\varphi'' + \varphi' N \omega^{-1}))^{1-2r} = 0. \end{cases} \tag{2.47}$$

З першого рівняння системи (2.47) знаходимо, що

$$\psi' = \frac{c}{\omega^N \varphi^2}, \qquad c = const, \tag{2.48}$$

а, з врахуванням цього, друге рівняння (2.47) прийме вигляд:

$$\varphi^{6r+3}\left[\lambda_2\left(\varphi'' + \varphi'\frac{N}{\omega}\right)\right]^{1-2r} = -\frac{c^2\sigma^{2r}}{\lambda_1\omega^{2N}}. \tag{2.49}$$

В залежності від r, знайдемо розв'язок системи (2.48), (2.49):
1. $r = 1/2$.

$$\begin{cases} \varphi = a\omega^{-N/3} \\ \psi = 3/(3-N)a\omega^{(3-N)/N} + b, \qquad \sigma = -\lambda_1,\ N = 0,1,2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = a\omega^{-1}, \\ \psi = a\ln\omega + b, \qquad \sigma = -\lambda_1,\ N = 3. \end{cases}$$

2. $r = -1/2$

$$\begin{cases} \varphi = a(\omega^2 + b^2) \\ \psi = \dfrac{\omega}{ab^2(\omega^2+b^2)} + \dfrac{1}{ab^3}\arctan\dfrac{\omega}{b} + c, \qquad \sigma = -\dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2^2},\ N = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = a(\omega^2 - b^2) \\ \psi = -\dfrac{\omega}{ab^2(\omega^2-b^2)} + \dfrac{1}{ab^3}\mathrm{arcth}\,\dfrac{\omega}{b} + c, \qquad \sigma = -\dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2^2},\ N = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = a\omega^2 \\ \psi = \dfrac{2}{3a\omega^3} + b \qquad \sigma = -\dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2^2},\ N = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = a\omega + b\ln\omega + c \\ \psi = \displaystyle\int \frac{a\,d\omega}{\omega(a\omega + b\ln\omega + c)^2}, \qquad \sigma = -\dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2^2},\ N = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = a\ln\omega + \dfrac{b}{\omega} + c \\ \psi = \displaystyle\int \frac{a\,d\omega}{(a\omega\ln\omega + b + c\omega)^2}, \qquad \sigma = -\dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2^2},\ N = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = a\omega^{-1} + b\omega^{-2} + c, \\ \psi = \displaystyle\int \frac{a\omega \mathrm{d}\omega}{(c\omega^2 + a\omega + b)^2}, \qquad \sigma = -\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2^2}, \ N = 3; \end{cases}$$

3. $r = -1$

$$\begin{cases} \varphi = a\sin(c\omega) + b\cos(c\omega), \\ \psi = -\dfrac{c^2}{a^2 \tan c\omega + ab} + d, \qquad \sigma = \pm|\lambda_1 \lambda_2^3|^{-1/2}, \ N = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = aJ_0(t) + bY_0(t) \equiv Z_0(t), \qquad t = c\omega^{2/3}, \\ \psi = \dfrac{4}{9}c^3 \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(Z_0(t))^2 t}, \qquad \sigma = \pm|\lambda_1 \lambda_2^3|^{-1/2}, \ N = 1, \end{cases}$$

де J_0 і Y_0 – функції Бесселя першого та другого рода, відповідно [12].

$$\begin{cases} \varphi = [(a + bt)\sin(c\omega^{1/3}) + (b - at)\cos(c\omega^{1/3})]\omega^{-1}, \ \sigma = \pm|\lambda_1 \lambda_2^3|^{-1/2}; \\ \psi = \dfrac{1}{9a} \dfrac{c\omega^{1/3}\sin(c\omega^{1/3}) + \cos(c\omega^{1/3})}{(a + bt)\sin(c\omega^{1/3}) + (b - at)\cos(c\omega^{1/3})} + d, \ N = 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{b}{\omega}(c\omega^{1/3}\sin(c\omega^{1/3}) + \cos(c\omega^{1/3}), \qquad N = 2, \\ \psi = \dfrac{1}{9b^2} \dfrac{\sin(c\omega^{1/3}) - c\omega^{1/3}\cos(c\omega^{1/3})}{c\omega^{1/3}\sin(c\omega^{1/3}) + \cos(c\omega^{1/3})} + d, \quad \sigma = \pm|\lambda_1 \lambda_2^3|^{-1/2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = a\omega^{c-1} + b\omega^{-c-1}, \\ \psi = \dfrac{(1 - c^2)^{3/2}}{2ac(a\omega^{2c} + b)} + d; \qquad \sigma = \pm|\lambda_1 \lambda_2^3|^{-1/2}, \ N = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{a + b\ln\omega}{\omega} \\ \psi = \dfrac{1}{b^2 \ln\omega + ab} + d, \qquad \sigma = \pm|\lambda_1 \lambda_2^3|^{-1/2}, \ N = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = a\omega^{-1} \\ \psi = a^{-2}\ln\omega + d, \qquad \sigma = \pm|\lambda_1 \lambda_2^3|^{-1/2}, \ N = 3; \end{cases}$$

4. r – довільна стала.

$$\begin{cases} \varphi = a\omega^{(1-2r-N)/(2r+2)} \\ \psi = \dfrac{c}{a^2} \dfrac{r + 1}{r(3 - N)} \omega^{r(3-N)/(r+1)} + d, \\ a^{4(r+1)} = -\frac{c^2\sigma^{2r}}{\lambda_1 \lambda_2^{1-2r}} \left[\frac{4(r+1)^2}{(1-2r-N)(2rN+N-1-4r)}\right]^{1-2r}, \ N = 0, 1, 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = a\omega^{-1} \\ \psi = (c/a^2)\ln\omega + D \qquad a^{4(r+1)} = c^2(-\sigma)^{2r}/(\lambda_1\lambda_2^{1-2l}), \ N = 3; \end{cases}$$

У цих формулах a, b, c, d – довільні сталі.

Підставивши у вирази для φ та ψ замість ω розв'язки відповідної системи Д'аламбера–Гамільтона (2.46), які наведені у [38, 39, 90], ми, згідно з (2.43) отримаємо розв'язок системи (2.42), а, отже, і розв'язок рівняння (2.41). Слід зауважити, що серед розв'язків системи (2.46) містяться інваріанти трьохвимірних підалгебр алгебри $AP(1,3)$.

2.2.2 Розв'язки хвильових рівнянь що містять довільні функції

У цьому пункті ми побудуємо точні розв'язки, які залежать від довільних функцій. З цією метою розглянемо пуанкаре–інваріантний анзац

$$\begin{array}{l} A = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ \theta = \psi(\omega_1, \omega_2, \omega_3); \end{array} \qquad \omega_1 = \beta x; \ \omega_2 = \gamma x; \ \omega_3 = \alpha x; \tag{2.50}$$

$$\alpha^2 = \alpha\beta = \alpha\gamma = \beta\gamma = 0; \quad \beta^2 = \gamma^2 = -1. \tag{2.51}$$

Підстановка (2.50) до системи (2.42) дає систему

$$\begin{cases} \varphi(\psi_{11} + \psi_{22}) + 2(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2) = 0 \\ -\varphi_1^2 - \varphi_2^2 + \lambda_1\varphi^{6r-1}(\lambda_2(-\varphi_{11} - \varphi_{22}))^{1-2r} = 0. \end{cases} \tag{2.52}$$

У системі (2.52) змінна ω_3 відіграє роль параметра. Отже, як випливає з теореми 2.2, МАІ системи (2.52) генерується оператором:

$$\widehat{X} = \tau_1\widehat{P}_1 + \tau_2\widehat{P}_2 + \tau_3\widehat{J}_{12} + \tau_4\widehat{D}_1 + \tau_5\widehat{D}_2 + \tau_6\widehat{Q}, \tag{2.53}$$

де $\tau_1 \ldots \tau_6$ – довільні гладкі функції від ω_3, і

$$\widehat{P}_1 = \frac{\partial}{\partial\omega_1}; \qquad \widehat{P}_2 = \frac{\partial}{\partial\omega_2}; \qquad \widehat{J}_{12} = \omega_1\frac{\partial}{\partial\omega_2} - \omega_2\frac{\partial}{\partial\omega_1}; \qquad \widehat{Q} = \frac{\partial}{\partial\psi};$$

$$\widehat{D}_1 = \omega_1\frac{\partial}{\partial\omega_1} + \omega_2\frac{\partial}{\partial\omega_2} - \varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}; \qquad \widehat{D}_2 = \omega_1\frac{\partial}{\partial\omega_1} + \omega_2\frac{\partial}{\partial\omega_2} + 2r\psi\frac{\partial}{\partial\psi}.$$

Проведемо редукцію системи (2.52) до звичайних диференціальних рівнянь і знайдемо її точні розв'язки. Алгебра (2.53) має такі нееквівалентні одновимірні підалгебри:

$$\begin{aligned} &A_1 =< \widehat{P}_1 >;\ A_2 =< \widehat{D}_1 >;\ A_3 =< \widehat{D}_2 >; \\ &A_4 =< \widehat{J}_{12} + a(\alpha x)\widehat{D}_1 >;\ A_5 =< \widehat{J}_{12} + a(\alpha x)\widehat{D}_2 >; \\ &A_6 =< \widehat{D}_1 + 2\widehat{Q} >;\ A_7 =< \widehat{J}_{12} + a(\alpha x)(\widehat{D}_1 + 2\widehat{Q}) > . \end{aligned} \tag{2.54}$$

Анзаци, інваріантні відносно однопараметричних груп (2.54) записуються, відповідно, у вигляді:

$$\begin{aligned}
&1.\ \begin{cases} \varphi = v(\omega), \\ \psi = w(\omega), \end{cases} \qquad \omega = \gamma x; \\
&2.\ \begin{cases} \varphi = [(\beta x)^2 + (\gamma x)^2]^{-1/2} v(\omega), \\ \psi = w(\omega), \end{cases} \qquad \omega = \arctan \tfrac{\beta x}{\gamma x}; \\
&3.\ \begin{cases} \varphi = v(\omega); \\ \psi = [(\beta x)^2 + (\gamma x)^2]^r w(\omega), \end{cases} \qquad \omega = \arctan \tfrac{\beta x}{\gamma x}; \\
&4.\ \begin{cases} \varphi = [(\beta x)^2 + (\gamma x)^2]^{-1/2} v(\omega), \\ \psi = w(\omega), \end{cases} \\
&\quad \omega = 2a(\alpha x) \arctan \tfrac{\beta x}{\gamma x} - \ln[(\beta x)^2 + (\gamma x)^2]; \\
&5.\ \begin{cases} \varphi = v(\omega), \\ \psi = [(\beta x)^2 + (\gamma x)^2]^r w(\omega), \end{cases} \\
&\quad \omega = 2a(\alpha x) \arctan \tfrac{\beta x}{\gamma x} - \ln[(\beta x)^2 + (\gamma x)^2]; \\
&6.\ \begin{cases} \varphi = [(\beta x)^2 + (\gamma x)^2]^{-1/2} v(\omega), \\ \psi = w(\omega) + \ln[(\beta x)^2 + (\gamma x)^2], \end{cases} \qquad \omega = \arctan \tfrac{\beta x}{\gamma x}; \\
&7.\ \begin{cases} \varphi = [(\beta x)^2 + (\gamma x)^2]^{-1/2} v(\omega), \\ \psi = w(\omega) + \ln[(\beta x)^2 + (\gamma x)^2], \end{cases} \\
&\quad \omega = 2a(\alpha x) \arctan \tfrac{\beta x}{\gamma x} - \ln[(\beta x)^2 + (\gamma x)^2].
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Тут a — довільна дійсна функція від αx.

Групові параметри групи з генератором (2.53) являють собою довільні гладкі функції від ω_3. Отже, розмножуючи вирази (2.55) за допомогою скінченних перетворень з цієї групи, ми отримаємо 7 класів анзаців, які, у своєму складі, містять довільні функції від $\omega_3 = \alpha x$:

$$1.\ \left\{\begin{array}{l}\varphi = \rho_1 v(\omega),\\ \psi = \rho_4^{-2r} w(\omega) + \rho_5,\end{array}\right.$$
$$\omega = \rho_1\rho_4(\gamma x\cos\rho_2 - \beta x\sin\rho_2) + \rho_3;$$

$$2.\ \left\{\begin{array}{l}\varphi = \rho_4[(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2]^{-1/2} v(\omega),\\ \psi = \rho_4^{2r} w(\omega) + \rho_5,\end{array}\right.$$
$$\omega = \arctan\frac{(\beta x + \rho_1)\cos\rho_3 + (\gamma x + \rho_2)\sin\rho_3}{(\gamma x + \rho_2)\cos\rho_3 - (\beta x + \rho_1)\sin\rho_3};$$

$$3.\ \left\{\begin{array}{l}\varphi = \rho_4 v(\omega),\\ \psi = \rho_4^{2r}[(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2]^r w(\omega) + \rho_5,\end{array}\right.$$
$$\omega = \arctan\frac{(\beta x + \rho_1)\cos\rho_3 + (\gamma x + \rho_2)\sin\rho_3}{(\gamma x + \rho_2)\cos\rho_3 - (\beta x + \rho_1)\sin\rho_3};$$

$$4.\ \left\{\begin{array}{l}\varphi = \rho_4[(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2]^{-1/2} v(\omega),\\ \psi = \rho_4^{2r} w(\omega) + \rho_6,\end{array}\right.$$
$$\omega = 2a(\alpha x)\arctan\frac{(\beta x + \rho_1)\cos\rho_3 + (\gamma x + \rho_2)\sin\rho_3}{(\gamma x + \rho_2)\cos\rho_3 - (\beta x + \rho_1)\sin\rho_3} -$$
$$-\ln[(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2] + \rho_5;$$

$$5.\ \left\{\begin{array}{l}\varphi = \rho_4 v(\omega),\\ \psi = \rho_4^{2r}[(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2]^r w(\omega) + \rho_6,\end{array}\right.$$
$$\omega = 2a(\alpha x)\arctan\frac{(\beta x + \rho_1)\cos\rho_3 + (\gamma x + \rho_2)\sin\rho_3}{(\gamma x + \rho_2)\cos\rho_3 - (\beta x + \rho_1)\sin\rho_3} -$$
$$-\ln[(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2] + \rho_5;$$

$$6.\ \left\{\begin{array}{l}\varphi = \rho_4[(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2]^{-1/2} v(\omega),\\ \psi = \rho_4^{2r} w(\omega) + \rho_4^{2r}\ln[(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2] + \rho_6,\end{array}\right.$$
$$\omega = \arctan\frac{(\beta x + \rho_1)\cos\rho_3 + (\gamma x + \rho_2)\sin\rho_3}{(\gamma x + \rho_2)\cos\rho_3 - (\beta x + \rho_1)\sin\rho_3};$$

$$7. \begin{cases} \varphi = \rho_4[(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2]^{-1/2} v(\omega), \\ \psi = \rho_4^{2r} w(\omega) + \rho_4^{2r} \ln[(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2] + \rho_6, \end{cases}$$
$$\omega = 2a(\alpha x) \arctan \frac{(\beta x + \rho_1)\cos\rho_3 + (\gamma x + \rho_2)\sin\rho_3}{(\gamma x + \rho_2)\cos\rho_3 - (\beta x + \rho_1)\sin\rho_3} -$$
$$- \ln[(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2] + \rho_5;$$

Тут $\rho_1, ..., \rho_6$ – довільні дійсні функції від αx. Ці анзаци редукують систему (2.52) до систем звичайних диференціальних рівнянь:

$$1. \begin{cases} vw'' + 2v'w' = 0, \\ w'^2 = \lambda_1 v^{6r-1}[-\lambda_2 v'']^{1-2r}; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} vw'' + 2v'w' = 0, \\ w'^2 = \lambda_1 v^{6r-1}[\lambda_2(-v - v'')]^{1-2r}; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4vwr^2 + vw'' + 2v'w' = 0, \\ 4r^2w^2 + w'^2 = \lambda_1 v^{6r-1}[-\lambda_2 v'']^{1-2r}; \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} (a^2+1)(vw'' + 2v'w') + w'v = 0, \\ 4(a^2+1)w'^2 = \lambda_1 v^{6r-1}[\lambda_2(-v - 4v' - 4(a^2+1)v'']^{1-2r}; \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} v(wr^2 - 2rw' + (a^2+1)w'') + 2((a^2+1)v'w' - rv'w) = 0, \\ 4r^2w^2 + 4(a^2+1)w'^2 - 8rw'w = \lambda_1 v^{6r-1}[-4\lambda_2(a^2+1)v'']^{1-2r}; \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} -vw'' + 4v - 2v'w' = 0, \\ w'^2 + 4 = \lambda_1 v^{6r-1}[\lambda_2(-v - v'')]^{1-2r}; \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} -vw''(a^2+1) - w'v + v - 2v'w'(a^2+1) + 2v' = 0, \\ 4(a^2+1)w'^2 - 8w' + 4 = \lambda_1 v^{6r-1}[\lambda_2(-v - 4v' - 4(a^2+1)v'']^{1-2r}. \end{cases}$$

Розв'язавши редуковані системи відносно функцій v і w, підставивши їх у відповідні анзаци (2.55), а, далі у (2.50), ми отримаємо шукані розв'язки системи (2.42). Наведемо розв'язки редукованих рівнянь, та відповідні розв'язки рівняння (2.41) для випадку $r = \pm 1/2$.

А. Розв'язки редукованих систем для випадку $r = 1/2$:

$$1. \quad \begin{cases} v = \pm c_1, \\ w = \sqrt{\lambda_1} c_1 \omega + c_2; \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} v = \pm c_1, \\ w = \sqrt{\lambda_1} c_1 \omega + c_2; \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} v = \pm\sqrt{\dfrac{c_1^2 + c_2^2}{\lambda_1}}, \\ w = c_1 \cos\omega + c_2 \sin\omega; \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} v = \pm 2c_1 \exp\left\{-\dfrac{\omega}{3(a^2+1)}\right\}, \\ w = 3\sqrt{\lambda_1} c_1 \sqrt{a^2+1} \exp\left\{-\dfrac{\omega}{3(a^2+1)}\right\} + c_2; \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} v = \pm 2\sqrt{\dfrac{t^2+1}{\lambda_1}}, \\ w = \dfrac{3}{2}t^2 - \ln(t^2+1) + c_1, \end{cases}$$

$$\omega = \frac{3}{2}t - \arctan t + c_2.$$

Тут c_1, c_2, c_3 – довільні дійсні сталі.

B. Розв'язки редукованих систем для випадку $r = -1/2$:

1. $$\begin{cases} v = \pm c_1((\omega + c_2)^2 + c_3^2), \\ w = \dfrac{2\sqrt{\lambda_1}\lambda_2}{c_1}\left(\dfrac{\omega + c_2}{2c_3^2((\omega + c_2)^2 + c_3^2)} + \dfrac{1}{2c_3^3}\arctan\dfrac{\omega + c_2}{c_3}\right) + c_4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \pm c_1((\omega + c_2)^2 - c_3^2), \\ w = \dfrac{2\sqrt{\lambda_1}\lambda_2}{c_1}\left(\dfrac{\omega + c_2}{2c_3^2((\omega + c_2)^2 - c_3^2)} - \dfrac{1}{4c_3^3}\ln\dfrac{\omega + c_2 + c_3}{\omega + c_2 - c_3}\right) + c_4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \pm c_1(\omega + c_2)^2, \\ w = \dfrac{2\sqrt{\lambda_1}\lambda_2}{3c_1}(\omega + c_2)^{-3} + c_3; \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} v = \pm c_1, \\ w = \dfrac{\sqrt{\lambda_1}\lambda_2}{c_1}\omega; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \pm c_1(1 + \cos\omega), \\ w = \dfrac{\sqrt{\lambda_1}\lambda_2}{2c_1}\left(\tan\dfrac{\omega}{2} + \dfrac{1}{3}\tan^3\dfrac{\omega}{2}\right) + c_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \pm c_1 \cos^2 \dfrac{\omega}{2} \left(\tan \dfrac{\omega}{2} + c_2\right)^2, \\ w = \dfrac{\sqrt{\lambda_1}\lambda_2(c_2^2+1)}{c_1} \left(\dfrac{\tan \frac{\omega}{2}}{\left(\tan \frac{\omega}{2} + c_2\right)^2} + \dfrac{c_2^2+1}{3\left(\tan \frac{\omega}{2} + c_2\right)^3} \right) + c_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \pm c_1 \cos^2 \dfrac{\omega}{2} \left(\left(\tan \dfrac{\omega}{2} + c_2\right)^2 + c_3^2 \right), \\ w = \dfrac{\sqrt{\lambda_1}\lambda_2(c_3^2+c_2^2+1)}{c_1} \left(\tan \dfrac{\omega}{2} + \dfrac{(1+c_2^2)\left(\tan \frac{\omega}{2} + c_2\right) + 2c_2c_3^2}{2c_3^2\left(\left(\tan \frac{\omega}{2} + c_2\right)^2 + c_3^2\right)} + \right. \end{cases}$$
$$\left. + \frac{c_2^2 - 2c_3^4 + 1}{2c_3^3} \arctan \frac{\tan \frac{\omega}{2} + c_2}{c_3} \right);$$

$$\begin{cases} v = \pm c_1 \cos^2 \dfrac{\omega}{2} \left(\left(\tan \dfrac{\omega}{2} + c_2\right)^2 - c_3^2 \right), \\ w = \dfrac{\sqrt{\lambda_1}\lambda_2(c_2^2-c_3^2+1)}{c_1} \left(\tan \dfrac{\omega}{2} - \dfrac{(1+c_2^2)\left(\tan \frac{\omega}{2} + c_2\right) - 2c_2c_3^2}{2c_3^2\left(\left(\tan \frac{\omega}{2} + c_2\right)^2 - c_3^2\right)} + \right. \end{cases}$$
$$\left. + \frac{2c_3^4 - c_2^2 - 1}{4c_3^3} \ln \frac{\tan \frac{\omega}{2} + c_2 + c_3}{\tan \frac{\omega}{2} + c_2 - c_3} \right);$$

4. $$\begin{cases} v = \pm c_1 \exp\left\{ -\dfrac{\omega}{a^2+1} \right\}, \\ w = \dfrac{\lambda_2\sqrt{\lambda_1}\sqrt{a^2+1}}{2c_1} \exp\left\{ \dfrac{\omega}{a^2+1} \right\} + c_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = c_1 \exp\left\{ -\dfrac{\omega}{a^2+1} \right\} + t \exp\left\{ -\dfrac{\omega}{2(a^2+1)} \right\}, \\ w = \pm \dfrac{\lambda_2\sqrt{\lambda_1}c_1}{\sqrt{a^2+1}} \displaystyle\int \left(c_1 \exp\left\{ -\dfrac{\omega}{2(a^2+1)} \right\} + t \right)^{-2} d\omega \end{cases}$$

де $t = c_2 \sin \dfrac{a\omega}{2(a^2+1)} + c_3 \cos \dfrac{a\omega}{2(a^2+1)}$.

Тут c_1, c_2, c_3 – довільні сталі.

С. Розв'язки рівняння (2.41) для випадку $r = 1/2$:

1. $u = \pm\sigma \exp\left\{ i\sqrt{\lambda_1}|\sigma|(\gamma x \cos \rho_2 - \beta x \sin \rho_2) \right\}$

2. $u = \pm\sigma[(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2]^{-1/2} \times$

$$\times \exp\left\{ i\sqrt{\lambda_1}|\sigma| \arctan \frac{(\beta x+\rho_1)\cos\rho_3 + (\gamma x+\rho_2)\sin\rho_3}{(\gamma x+\rho_2)\cos\rho_3 - (\beta x+\rho_1)\sin\rho_3} \right\};$$

4. $u = \pm 2\sigma[(\beta x+\rho_1)^2 + (\gamma x+\rho_2)^2]^{(-1-3a^2)/(6a^2+6)}\times$

$$\times \exp\left\{ -\frac{2a}{3(a^2+1)} \arctan \frac{(\beta x+\rho_1)\cos\rho_3 + (\gamma x+\rho_2)\sin\rho_3}{(\gamma x+\rho_2)\cos\rho_3 - (\beta x+\rho_1)\sin\rho_3} + \right.$$

$$+3i\sqrt{\lambda_1}\sqrt{a^2+1}|\sigma|[(\beta x+\rho_1)^2 + (\gamma x+\rho_2)^2]^{1/(3a^2+3)}\times$$

$$\left.\times \exp\left\{ -\frac{2a}{3(a^2+1)} \arctan \frac{(\beta x+\rho_1)\cos\rho_3 + (\gamma x+\rho_2)\sin\rho_3}{(\gamma x+\rho_2)\cos\rho_3 - (\beta x+\rho_1)\sin\rho_3} \right\}\right\};$$

6. $u = \pm 2\sigma\sqrt{t^2+1}[(\beta x+\rho_1)^2 + (\gamma x+\rho_2)^2]^{-1/2}\times$

$$\times \exp\left\{ i|\sigma|\sqrt{\lambda_1}\left(\frac{3}{2}t^2 - \ln(t^2+1) + \ln[(\beta x+\rho_1)^2 + (\gamma x+\rho_2)^2]\right)\right\},$$

де

$$\arctan \frac{(\beta x+\rho_1)\cos\rho_3 + (\gamma x+\rho_2)\sin\rho_3}{(\gamma x+\rho_2)\cos\rho_3 - (\beta x+\rho_1)\sin\rho_3} = \frac{3}{2}t - \arctan t + q.$$

У цих виразах $\rho_1, \rho_2, \rho_3, a, q$ – довільні дійсні функції від αx, а σ – довільна, не рівна нулеві, комплексна функція від αx.

Зауважимо, що розв'язок, інваріантний відносно підалгебри A_3 співпадає з розв'язком, інваріантним відносно підалгебри A_1, а розв'язок, інваріантний відносно підалгебри A_5 співпадає з розв'язком, інваріантним відносно підалгебри A_4.

D. Розв'язки рівняння (2.41) для випадку $r = -1/2$:

1. $u = \pm\sigma((\gamma x q_1 + \beta x q_2 + q_3)^2 + 1)\exp\left\{ i\frac{\sqrt{\lambda_1}\lambda_2}{|\sigma|}\sqrt{q_1^2+q_2^2}\times\right.$

$$\left.\times\left(\frac{q_1\gamma x + q_2\beta x + q_3}{(q_1\gamma x + q_2\beta x + q_3)^2+1} + \arctan(q_1\gamma x + q_2\beta x + q_3)\right)\right\};$$

$$u = \pm\sigma((\gamma x q_1 + \beta x q_2 + q_3)^2 - 1)\exp\left\{ i\frac{\sqrt{\lambda_1}\lambda_2}{|\sigma|}\sqrt{q_1^2+q_2^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{q_1\gamma x + q_2\beta x + q_3}{(q_1\gamma x + q_2\beta x + q_3)^2-1} - \frac{1}{2}\ln\frac{q_1\gamma x + q_2\beta x + q_3 + 1}{q_1\gamma x + q_2\beta x + q_3 - 1}\right)\right\};$$

$$u = \pm\sigma(\gamma x q_1 + \beta x q_2 + q_3)^2 \times$$

$$\times \exp\left\{ i\frac{2\sqrt{\lambda_1}\lambda_2}{3|\sigma|}\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\,(q_1\gamma x + q_2\beta x + q_3)^{-3} \right\};$$

2. $$u = \pm\sigma[(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2]^{-1/2} \times$$

$$\times \exp\left\{ i\frac{\lambda_2\sqrt{\lambda_1}}{|\sigma|}\arctan\frac{(\beta x + \rho_1)\cos\rho_3 + (\gamma x + \rho_2)\sin\rho_3}{(\gamma x + \rho_2)\cos\rho_3 - (\beta x + \rho_1)\sin\rho_3} \right\};$$

$$u = \pm\sigma\left(\frac{(\gamma x + \rho_2)\cos\rho_3 - (\beta x + \rho_1)\sin\rho_3}{(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2} + \right.$$

$$\left. + [(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2]^{-1/2} \right) \exp\left\{ i\frac{\lambda_2\sqrt{\lambda_1}}{2|\sigma|}\left(t + \frac{1}{3}t^3 \right) \right\};$$

$$u = \pm\sigma[(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2]^{-1/2}\frac{(t + q_1)^2}{t^2 + 1} \times$$

$$\times \exp\left\{ i\frac{\lambda_2\sqrt{\lambda_1}}{|\sigma|}\left(\frac{t(q_1^2 + 1)}{(t + q_1)^2} + \frac{(q_1^2 + 1)^2}{3(t + q_1)^3} \right) \right\};$$

$$u = \pm\sigma[(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2]^{-1/2}\frac{(t + q_1)^2 + q_2^2}{t^2 + 1} \times$$

$$\times \exp\left\{ i\frac{\lambda_2\sqrt{\lambda_1}(q_1^2 + q_2^2 + 1)}{|\sigma|}\left(t + \frac{(t + q_1)(q_1^2 + 1) + 2q_1q_2^2}{2q_2^2\left((t + q_1)^2 + q_2^2\right)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{q_1^2 + 1 - 2q_2^4}{2q_2^3}\arctan\frac{t + q_1}{q_2} \right) \right\};$$

$$u = \pm\sigma[(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2]^{-1/2}\frac{(t + q_1)^2 - q_2^2}{t^2 + 1} \times$$

$$\times \exp\left\{ i\frac{\lambda_2\sqrt{\lambda_1}(q_1^2 - q_2^2 + 1)}{|\sigma|}\left(t - \frac{(t + q_1)(q_1^2 + 1) - 2q_1q_2^2}{2q_2^2\left((t + q_1)^2 - q_2^2\right)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2q_2^4 - 1 - q_1^2}{4q_2^3}\ln\frac{t + q_1 + q_2}{t + q_1 - q_2} \right) \right\};$$

де у попередніх формулах

$$t = \frac{(\beta x + \rho_1)\cos\rho_3 + (\gamma x + \rho_2)\sin\rho_3}{[(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2]^{1/2} + (\gamma x + \rho_2)\cos\rho_3 - (\beta x + \rho_1)\sin\rho_3}. \qquad (2.56)$$

4. $u = \pm\sigma[(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2]^{(1-a^2)/(a^2+1)}\times$

$$\times \exp\left\{-\frac{2a}{a^2+1}\arctan\frac{(\beta x + \rho_1)\cos\rho_3 + (\gamma x + \rho_2)\sin\rho_3}{(\gamma x + \rho_2)\cos\rho_3 - (\beta x + \rho_1)\sin\rho_3} + \right.$$

$$+ i\frac{\lambda_2\sqrt{\lambda_1}\sqrt{a^2+1}}{2|\sigma|}[(\beta x + \rho_1)^2 + (\gamma x + \rho_2)^2]^{-1/(a^2+1)}\times$$

$$\left.\times \exp\left\{\frac{2a}{a^2+1}\arctan\frac{(\beta x + \rho_1)\cos\rho_3 + (\gamma x + \rho_2)\sin\rho_3}{(\gamma x + \rho_2)\cos\rho_3 - (\beta x + \rho_1)\sin\rho_3}\right\}\right\};$$

У цих виразах $q_1, q_2, q_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3, a$ – довільні дійсні функції від αx, а σ – довільна, не рівна нулеві, комплексна функція від αx.

Підкреслимо, що усі побудованя розв'язки мають залежність від довільних функцій. А отже, вони можуть бути використані при розв'язанні задач Коші з певними початковими умовами.

2.2.3 Дилатаційно та конформно–інваріантні анзаци

Для подальшої побудови розв'язків застосуємо інваріантність рівняння (2.41) відносно конформної алгебри $AC(1,3) = \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(1)}, K_\mu^{(1)}\rangle$. Всі оператори цієї алгебри мають вигляд:

$$X = \xi^\mu(x)p_\mu + \eta(x)Ap_A$$

з певними значеннями функцій $\xi^\mu(x)$ та $\eta(x)$. Анзац, який відповідає оператору X, згідно з [70], буде мати вигляд

$$\begin{cases} A = f(x)\varphi(\omega) \\ \theta = \psi(\omega), \end{cases} \qquad (2.57)$$

де $f(x)$ та ω задовольняють системі [70]:

$$\begin{aligned} &\xi^\mu(x)p_\mu\omega(x) = 0, \\ &(\xi^\mu(x)p_\mu - \eta(x))f = 0. \end{aligned} \qquad (2.58)$$

Якщо $f(x)$ і $\omega(x)$ задовольняють (2.58), то анзац (2.57) редукує рівняння (2.42) до системи звичайних диференціфльних рівнянь. Використовуючи класифікацію одновимірних підалгебр розширеної алгебри Пуанкаре $A\widetilde{P}(1,3)$, та конформної алгебри $AC(1,3)$, наведену в [36], запишемо явні вигляди функцій $f(x)$ і $\omega(x)$, попередньо розмноживши їх за допомогою перетворень Лоренца, що відповідають операторам $J_{\mu\nu}$:

1. $$\begin{cases} f = (\beta x)^{-1} \\ \omega = \dfrac{\rho x}{\beta x}, \end{cases} \qquad \rho^2 = -\beta^2 = 1, \quad \rho\beta = 0;$$

2. $$\begin{cases} f = (\alpha x \cdot \delta x)^{-1/2} \\ \omega = \dfrac{\alpha x}{(\delta x)^k}, \end{cases} \qquad \alpha^2 = \delta^2 = 0, \quad \alpha\delta = 2;$$

3. $$\begin{cases} f = (x^2)^{-1/2} \\ \omega = \dfrac{\alpha x}{(x^2)^k}, \end{cases} \qquad \alpha^2 = 0;$$

4. $$\begin{cases} f = (\alpha x)^{-1/2} \\ \omega = \dfrac{x^2}{\alpha x} + \ln \alpha x, \end{cases} \qquad \alpha^2 = 0;$$

5. $$\begin{cases} f = (\alpha x)^{-1/2} \\ \omega = \delta x + k \ln \alpha x, \end{cases} \qquad \alpha^2 = \delta^2 = 0, \quad \alpha\delta = 2;$$

6. $$\begin{cases} f = (\alpha x)^{-1/2} \\ \omega = \dfrac{x^2 + (\beta x)^2}{\alpha x} + \ln \alpha x, \end{cases} \qquad \alpha^2 = \alpha\beta = 0, \quad \beta^2 = -1;$$

7. $$\begin{cases} f = (x^2 + (\beta x)^2)^{-1/2} \\ \omega = \dfrac{\alpha x}{(x^2 + (\beta x)^2)^k}, \end{cases} \qquad \alpha^2 = \alpha\beta = 0, \quad \beta^2 = -1;$$

8. $$\begin{cases} f = (\alpha x \cdot \delta x)^{-1/2} \\ \omega = \dfrac{x^2}{\alpha x \cdot \delta x}, \end{cases} \qquad \alpha^2 = \delta^2 = 0, \quad \alpha\delta = 2;$$

$$9. \quad \begin{cases} f = ((\beta x)^2 + (\gamma x)^2)^{-1/2}, \\ \omega = \dfrac{\rho x}{((\beta x)^2 + (\gamma x)^2)^{1/2}}, \end{cases} \tag{2.59}$$

$$\rho^2 = -\beta^2 = -\gamma^2 = 1, \ \rho\beta = \rho\gamma = \beta\gamma = 0,$$

$$10. \quad \begin{cases} f = ((\beta x)^2 + (\gamma x)^2)^{-1/2}, \\ \omega = \dfrac{\tau x}{((\beta x)^2 + (\gamma x)^2)^{1/2}}, \end{cases}$$

$$\tau^2 = \beta^2 = \gamma^2 = -1, \ \tau\beta = \tau\gamma = \beta\gamma = 0,$$

$$11. \quad \begin{cases} f = ((\rho x)^2 - x^2)^{-1/2} \\ \omega = \dfrac{\rho x}{((\rho x)^2 - x^2)^{1/2}}, \end{cases} \qquad \rho^2 = 1;$$

$$12. \quad \begin{cases} f = (x^2 + (\beta x)^2)^{-1/2} \\ \omega = \dfrac{\beta x}{(x^2 + (\beta x)^2)^{1/2}}, \end{cases} \qquad \beta^2 = -1;$$

$$13. \quad \begin{cases} f = (\alpha x \cdot \delta x)^{-1/2} \\ \omega = \dfrac{\beta x}{(\alpha x \cdot \delta x)^{1/2}}, \end{cases}$$

$$\alpha^2 = \delta^2 = \alpha\beta = \delta\beta = 0, \quad \beta^2 = -1, \quad \alpha\delta = 2;$$

$$14. \quad \begin{cases} f = ((\beta x)^2 + (\gamma x)^2)^{-1/2}, \\ \omega = \dfrac{\delta x(1 + (\alpha x)^2)}{(\beta x)^2 + (\gamma x)^2} - \alpha x, \end{cases} \qquad \beta^2 = \gamma^2 = -1,$$

$$\alpha^2 = \delta^2 = \alpha\beta = \alpha\gamma = \delta\beta = \delta\gamma = \beta\gamma = 0, \ \alpha\delta = 2,$$

$$15. \quad \begin{cases} f = ((\beta x)^2 + (\gamma x)^2)^{-1/2}, \\ \omega = \dfrac{4(\rho x)^2 + (x^2 - 1)^2}{(\beta x)^2 + (\gamma x)^2}, \end{cases}$$

$$\rho^2 = 1, \ \beta^2 = \gamma^2 = -1, \ \rho\beta = \rho\gamma = \beta\gamma = 0,$$

$$16. \quad \begin{cases} f = (\rho x)^{-1}, \\ \omega = \dfrac{x^2 - 1}{\rho x}. \end{cases} \qquad \rho^2 = 1.$$

При цих умовах на $f(x)$ і $\omega(x)$ анзац (2.57) редукує (2.42) до таких систем:

1. $\begin{cases} (1-\omega^2)(\varphi\psi''+2\varphi'\psi')-4\omega\psi'\varphi=0, \\ (\omega^2-1)\psi'^2=\lambda_1\varphi^{6r-1}[\lambda_2((1-\omega^2)\varphi''-4\omega\varphi'-2\varphi)]^{1-2r}; \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2k\omega(\varphi\psi''+2\varphi'\psi')+(k+1)\psi'\varphi=0, \\ 4k\omega^2\psi'^2=\lambda_1\varphi^{6r-1}[\lambda_2(\varphi-2\omega(k+1)\varphi'-4k\omega^2\varphi'')]^{1-2r}; \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2k(k-1)\omega(\varphi\psi''+2\varphi'\psi')+(2k^2-2k-1)\psi'\varphi=0, \\ 4k(1-k)\omega^2\psi'^2=\lambda_1\varphi^{6r-1}[\lambda_2(-\varphi+ \\ \quad +(4k^2-4k-2)\omega\varphi'+4k(k-1)\omega^2\varphi'')]^{1-2r}; \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2(\varphi\psi''+2\varphi'\psi')+\psi'\varphi=0, \\ -4\psi'^2=\lambda_1\varphi^{6r-1}[\lambda_2(2\varphi'+4\varphi'')]^{1-2r}; \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2k(\varphi\psi''+2\varphi'\psi')-\psi'\varphi=0, \\ -4k\psi'^2=\lambda_1\varphi^{6r-1}[\lambda_2(-2\varphi'+4k\varphi'')]^{1-2r}; \end{cases}$

6. $\begin{cases} \varphi\psi''+2\varphi'\psi'=0, \\ -4\psi'^2=\lambda_1\varphi^{6r-1}[4\lambda_2\varphi'']^{1-2r}; \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2k\omega(\varphi\psi''+2\varphi'\psi')+(2k+1)\psi'\varphi=0, \\ 4k(1-k)\omega^2\psi'^2=\lambda_1\varphi^{6r-1}[\lambda_2(k-1)((4k+2)\omega\varphi'+4k\omega^2\varphi'')]^{1-2r}; \end{cases}$

8. $\begin{cases} (\omega-\omega^2)(\varphi\psi''+2\varphi'\psi')+(1-2\omega)\psi'\varphi=0, \\ 4(\omega-\omega^2)\psi'^2=\lambda_1\varphi^{6r-1}[\lambda_2(\varphi+(8\omega-4)\varphi'+4(\omega^2-\omega)\varphi'')]^{1-2r}; \end{cases}$

9. $\begin{cases} (\omega^2-1)(\varphi\psi''+2\varphi'\psi')+3\omega\psi'\varphi=0, \\ (\omega^2-1)\psi'^2=\lambda_1\varphi^{6r-1}[\lambda_2(-\varphi-3\omega\varphi'+(1-\omega^2)\varphi'')]^{1-2r}; \end{cases}$

10. $\begin{cases} (\omega^2+1)(\varphi\psi''+2\varphi'\psi')+3\omega\psi'\varphi=0, \\ (\omega^2+1)\psi'^2=\lambda_1\varphi^{6r-1}[\lambda_2(-\varphi-3\omega\varphi'-(1+\omega^2)\varphi'')]^{1-2r}; \end{cases}$

11. $\begin{cases} (\omega^2-1)(\varphi\psi''+2\varphi'\psi')+2\omega\psi'\varphi=0, \\ (\omega^2-1)\psi'^2=\lambda_1\varphi^{6r-1}[\lambda_2(-2\omega\varphi'+(1-\omega^2)\varphi'')]^{1-2r}; \end{cases}$

12. $\begin{cases} (1-\omega^2)(\varphi\psi''+2\varphi'\psi')-2\omega\psi'\varphi=0, \\ (1-\omega^2)\psi'^2=\lambda_1\varphi^{6r-1}[\lambda_2(2\omega\varphi'+(\omega^2-1)\varphi'')]^{1-2r}; \end{cases}$

13. $\begin{cases} (1-\omega^2)(\varphi\psi'' + 2\varphi'\psi') - 3\omega\psi'\varphi = 0, \\ (1-\omega^2)\psi'^2 = \lambda_1\varphi^{6r-1}[\lambda_2(\varphi + 3\omega\varphi' + (\omega^2-1)\varphi'')]^{1-2r}; \end{cases}$

14. $\begin{cases} (1+\omega^2)(\varphi\psi'' + 2\varphi'\psi') + 2\omega\psi'\varphi = 0, \\ 4(1+\omega^2)\psi'^2 = \lambda_1\varphi^{6r-1}[\lambda_2(-\varphi - 8\omega\varphi' - 4(1+\omega^2)\varphi'')]^{1-2r}. \end{cases}$

15. $\begin{cases} (4\omega-\omega^2)(\varphi\psi'' + 2\varphi'\psi') + (4-2\omega)\psi'\varphi = 0, \\ 4(\omega^2-4\omega)\psi'^2 = \lambda_1\varphi^{6r-1}[\lambda(-\varphi+ \\ \qquad (16-8\omega)\varphi' + (16\omega - 4\omega^2)\varphi'')]^{1-2r}; \end{cases}$

16. $\begin{cases} (4+\omega^2)(\varphi\psi'' + 2\varphi'\psi') + 4\omega\psi'\varphi = 0, \\ -(4+\omega^2)\psi'^2 = \lambda_1\varphi^{6r-1}[\lambda_2(2\varphi + 4\omega\varphi' + (4+\omega^2)\varphi'')]^{1-2r}; \end{cases}$

Розв'яжемо редуковані системи для випадку $r = 1/2$:

1. $\begin{cases} \varphi = \pm\dfrac{2c_1}{\sqrt{\lambda_1(\omega^2-1)}}, \\ \psi = c_1 \ln\left|\dfrac{1-\omega}{1+\omega}\right| + c_2; \end{cases}$

2. $\begin{cases} \varphi = \pm c_1\omega^{(k-1)/(6k)}, \\ \psi = \dfrac{3c_1\sqrt{\lambda_1 k}}{k-1}\omega^{(k-1)/(6k)} + c_2; \end{cases}$

3. $\begin{cases} \varphi = \pm c_1\omega^{1/(6k(k-1))}, \\ \psi = 3c_1\sqrt{\lambda_1 k(1-k)}\omega^{1/(6k(k-1))} + c_2; \end{cases}$

4. $\begin{cases} \varphi = \pm c_1 e^{-\omega/6}, \\ \psi = 3c_1\sqrt{-\lambda_1}e^{-\omega/6} + c_2; \end{cases}$

5. $\begin{cases} \varphi = \pm c_1 e^{\omega/(6k)}, \\ \psi = 3c_1\sqrt{-\lambda_1 k}e^{\omega/(6k)} + c_2; \end{cases}$

6. $\begin{cases} \varphi = \pm 2c_1, \\ \psi = c_1\sqrt{-\lambda_1}\omega + c_2; \end{cases}$

7. $\begin{cases} \varphi = \pm c_1\omega^{-1/(6k)}, \\ \psi = 3c_1\sqrt{\dfrac{\lambda_1 k}{1-k}}\omega^{-1/(6k)} + c_2; \end{cases}$

8. $\begin{cases} \varphi = \pm 2c_1(\lambda_1^3(\omega - \omega^2))^{-1/6}, \\ \psi = c_1 \int \dfrac{d\omega}{(\omega - \omega^2)^{2/3}} + c_2; \end{cases}$

9. $\begin{cases} \varphi = \pm c_1(\omega^2 - 1)^{-1/3}, \\ \psi = c_1 \int \sqrt{\dfrac{\lambda_1}{\omega^2 - 1}}(\omega^2 - 1)^{-1/3} d\omega + c_2; \end{cases}$

10. $\begin{cases} \varphi = \pm c_1(\omega^2 + 1)^{-1/3}, \\ \psi = c_1\sqrt{\lambda_1} \int \dfrac{d\omega}{(\omega^2 + 1)^{5/6}} + c_2; \end{cases}$

11. $\begin{cases} \varphi = \pm c_1(\lambda_1^3(\omega^2 - 1)^{-1/6}, \\ \psi = c_1 \int \dfrac{d\omega}{(\omega^2 - 1)^{2/3}} + c_2; \end{cases}$

12. $\begin{cases} \varphi = \pm c_1(\lambda_1^3(1 - \omega^2)^{-1/6}, \\ \psi = c_1 \int \dfrac{d\omega}{(1 - \omega^2)^{2/3}} + c_2; \end{cases}$

13. $\begin{cases} \varphi = \pm c_1(1 - \omega^2)^{-1/3}, \\ \psi = c_1 \int \sqrt{\dfrac{\lambda_1}{1 - \omega^2}}(1 - \omega^2)^{-1/3} d\omega + c_2; \end{cases}$

14. $\begin{cases} \varphi = \pm 2c_1(\omega^2 + 1)^{-1/6}, \\ \psi = c_1\sqrt{\lambda_1} \int (\omega^2 + 1)^{-2/3} d\omega + c_2; \end{cases}$

15. $\begin{cases} \varphi = \pm 2c_1(\lambda_1^3(\omega^2 - 4\omega))^{-1/6}, \\ \psi = c_1 \int \dfrac{d\omega}{(\omega^2 - 4\omega)^{2/3}} + c_2; \end{cases}$

16. $\begin{cases} \varphi = \pm 2c_1(4 + \omega^2)^{-1/2}, \\ \psi = c_1\sqrt{-\lambda_1} \arctan \dfrac{\omega}{2} + c_2; \end{cases}$

Тут c_1, c_2 – довільні сталі.

Звідси знаходимо розв'язки системи (2.42), а отже, розв'язки рівняння (2.41):

1. $u = \pm 2\sigma[\lambda_1((\rho x)^2 - (\beta x)^2)]^{-1/2} \exp\left\{ i|\sigma| \ln\left|\dfrac{\beta x - \rho x}{\beta x + \rho x}\right|\right\}$

2. $u = \pm\sigma(\alpha x)^{-(2k+1)/(6k)}(\delta x)^{-(k+2)/6}\times$

$$\times\exp\left\{i\frac{3\sqrt{\lambda_1 k}|\sigma|}{k-1}(\alpha x)^{(k-1)/(6k)}(\delta x)^{(1-k)/6}\right\}$$

3. $u = \pm\sigma(\alpha x)^{1/(6k(k-1))}(x^2)^{(3k-2)/(6(1-k))}\times$

$$\times\exp\left\{3i\sqrt{\lambda_1 k(1-k)}|\sigma|(\alpha x)^{1/(6k(k-1))}(x^2)^{1/(6(1-k))}\right\}$$

4. $u = \pm\sigma(\alpha x)^{-2/3}\exp\left\{-\frac{1}{6}\frac{x^2}{\alpha x} + 3i\sqrt{-\lambda_1}|\sigma|(\alpha x)^{-1/6}\exp\left\{-\frac{1}{6}\frac{x^2}{\alpha x}\right\}\right\}$

5. $u = \pm\sigma(\alpha x)^{-1/3}\exp\left\{\frac{\delta x}{6k} + 3i\sqrt{-\lambda_1 k}|\sigma|(\alpha x)^{1/6}\exp\left\{\frac{\delta x}{6k}\right\}\right\}$

6. $u = \pm 2\sigma(\alpha x)^{-1/2}\exp\left\{i\sqrt{-\lambda_1}|\sigma|\left(\frac{x^2+(\beta x)^2}{\alpha x} + \ln\alpha x\right)\right\}$

7. $u = \pm\sigma(\alpha x)^{-1/(6k)}(x^2+(\beta x)^2)^{-1/3}\times$

$$\exp\left\{3i\sqrt{\frac{\lambda_1 k}{1-k}}|\sigma|(\alpha x)^{-1/(6k)}(x^2+(\beta x)^2)^{1/6}\right\}$$

8. $u = \pm 2\sigma(\alpha x\cdot\delta x)^{-1/6}(\lambda_1^3 x^2(\alpha x\cdot\delta x - x^2))^{-1/6}\times$

$$\times\exp\left\{i|\sigma|\int(\omega-\omega^2)^{-2/3}d\omega\right\},$$

9. $u = \pm\sigma((\beta x)^2+(\gamma x)^2)^{-1/6}((\rho x)^2-(\beta x)^2-(\gamma x)^2)^{-1/3}\times$

$$\times\exp\left\{i|\sigma|\int\sqrt{\frac{\lambda_1}{\omega^2-1}}(\omega^2-1)^{-1/3}d\omega\right\},$$

10. $u = \pm\sigma((\beta x)^2+(\gamma x)^2)^{-1/6}((\tau x)^2+(\beta x)^2+(\gamma x)^2)^{-1/3}\times$

$$\times\exp\left\{i|\sigma|\sqrt{\lambda_1}\int\frac{d\omega}{(\omega^2+1)^{5/6}}\right\},$$

11. $u = \pm\sigma(\lambda_1^3 x^2)^{-1/6}((\rho x)^2 - x^2)^{-1/3}\exp\left\{i|\sigma|\int\frac{d\omega}{(\omega^2-1)^{2/3}}\right\}$

12. $u = \pm\sigma(\lambda_1^3 x^2)^{-1/6}(x^2 + (\beta x)^2)^{-1/3} \exp\left\{ i|\sigma| \int \frac{d\omega}{(1-\omega^2)^{2/3}} \right\}$

13. $u = \pm\sigma(\alpha x \cdot \delta x)^{-1/6}(\alpha x \cdot \delta x - (\beta x)^2)^{-1/3} \times$

$$\times \exp\left\{ i|\sigma| \int \sqrt{\frac{\lambda_1}{1-\omega^2}}(1-\omega^2)^{-1/3} d\omega \right\}$$

14. $$u = \pm 2\sigma((\beta x)^2 + (\gamma x)^2)^{-1/2}(\omega^2+1)^{-1/6} \times$$

$$\times \exp\left\{ |\sigma|\lambda_1^{1/2} \int (\omega^2+1)^{-2/3} d\omega \right\},$$

15. $$u = \pm 2\sigma((\beta x)^2 + (\gamma x)^2)^{-1/2}(\lambda_1^3(\omega^2 - 4\omega))^{-1/6} \times$$

$$\times \exp\left\{ i|\sigma| \int (\omega^2 - 4\omega)^{-2/3} d\omega \right\},$$

16. $u = \pm 2\sigma(4(\rho x)^2 + (x^2-1)^2)^{-1/2} \exp\left\{ i|\sigma|\sqrt{-\lambda_1} \arctan \frac{x^2-1}{2\rho x} \right\};$

Тут σ – не рівна нулеві комплексна стала, у формулах 8. – 15. замість ω слід підставити відповідний інваріант з виразів (2.59).

Зауважимо, що більшість побудованих розв'язків мають нерухому по параметрам сингулярність.

2.3 Умовна симетрія хвильових рівнянь для комплексного скалярного поля

Розглянемо нелінійне рівняння Клейна – Гордона

$$\Box u = F(|u|, (\nabla |u|)^2) u. \tag{2.60}$$

Як випливає з теореми 2.2, серед цього класу рівнянь не існує інваріантних відносно нелінійних зображень розширеної алгебри Пуанкаре $A\widetilde{P}(1,n)$ з базисними операторами (2.7) та

$$D = x^\mu p_\mu + l \ln(u/u^*)[up_u - u^* p_{u^*}] + k[up_u + u^* p_{u^*}], \tag{2.61}$$

де $l \neq 0$. Дослідимо умовну симетрію рівняння (2.60) відносно цього зображення розширеної алгебри Пуанкаре.

Теорема 2.8. *Рівняння (2.60) умовно інваріантне відносно нелінійного зображення розширеної алгебри Пуанкаре $A\widetilde{P}(1,n)$ з базисними операторами (2.7) та (2.61) ($l \neq 0$) тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$\Box u = \frac{(\nabla|u|)^2}{|u|^2}\left[R_1\left\{|u|^2\left(\frac{(\nabla|u|)^2}{|u|^2}\right)^k\right\} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{(\nabla|u|)^2}{|u|^2}\right)^{-2l} R_2\left\{|u|^2\left(\frac{(\nabla|u|)^2}{|u|^2}\right)^k\right\}\right] u \qquad (2.62)$$

і функція u задовольняє додатковій умові

$$\Box|u| = \frac{(\nabla|u|)^2}{|u|} R_1\left\{|u|^2\left(\frac{(\nabla|u|)^2}{|u|^2}\right)^k\right\}. \qquad (2.63)$$

У цій теоремі і надалі через R_1 та R_2 ми будемо позначати довільні функції від відповідних аргументів.

Доведення

Згідно з визначенням умовної інваріантності (визначення 4), оператор (2.61) буде оператором умовної симетрії рівняння (2.60) з певною функцією F, якщо існує додаткова умова типу (0.8), разом із якою рівняння (2.60) буде інваріантне відносно оператора (2.61). У теоремі стверджується, що ця додаткова умова існує і має вигляд (2.63) тоді і тільки тоді, коли рівняння (2.60) має вигляд (2.62). Доведемо це.

З цією метою перепишемо у термінах амплітуди і фази рівняння (2.60):

$$\begin{cases} L_1(x, A, \theta) \equiv A\Box\theta + 2\nabla A\nabla\theta = 0, \\ L_2(x, A, \theta) \equiv \Box A - A(\nabla\theta)^2 - AF(A, (\nabla A)^2 = 0. \end{cases} \qquad (2.64)$$

і оператор (2.61):

$$D = x^\mu p_\mu + kAp_A + 2l\theta p_\theta. \qquad (2.65)$$

Друге продовження оператора (2.65), згідно формул продовження (0.7), може бути записане у вигляді:

$$\begin{aligned} \underset{2}{D} = D + i(k-1)\nabla A\tfrac{\partial}{\partial(\nabla A)} + i(2l-1)\nabla\theta\tfrac{\partial}{\partial(\nabla\theta)} + \\ + i(k-2)\Box A\tfrac{\partial}{\partial(\Box A)} + i(2l-2)\Box\theta\tfrac{\partial}{\partial(\Box\theta)}. \end{aligned} \qquad (2.66)$$

Подіємо оператором $\underset{2}{D}$ на оператори L_1 і L_2:

$$\underset{2}{D}(L_1) = i(k + 2l - 2)(\Box\theta A + 2\nabla\theta\nabla A), \tag{2.67}$$

$$\begin{gathered}\underset{2}{D}(L_2) = i\left((k-2)\Box A - kA(\nabla\theta)^2 - \right.\\ -2(2l-1)A(\nabla\theta)^2 - kAF - kA^2F_{s_1} - 2A(\nabla A)^2(k-1)F_{s_2}\,,\end{gathered} \tag{2.68}$$

де $s_1 = A,\ s_2 = (\nabla A)^2$.

З очевидного факту, що $\underset{2}{D}(L_1)\Big|_{L_1=0} = 0$, випливає, що оператор D буде оператором лiївської симетрії першого рівняння системи (2.64). Отже, для доведення теореми залишається знайти умови, при яких оператор D буде оператором симетрії другого рівняння системи (2.64), тобто знайти умови, при яких вираз

$$\underset{2}{D}(L_2)\Big|_{L_1=0,\ L_2=0}$$

буде рівним нулеві.

Виключаючи з другого рівняння системи (2.64) вираз $A(\nabla\theta)^2$, одержимо:

$$\underset{2}{D}(L_2)\Big|_{L_1=0,\ L_2=0} = i\left(2(2l-1)s_1F - 4l\Box A - ks_1^2F_{s_1} - 2s_1s_2(k-1)F_{s_2}\right).$$

Останній вираз дорівнює нулеві лише в одному з двох випадків:

$$l = 0, \qquad -2F - ks_1F_{s_1} - 2(k-1)s_2F_{s_2} = 0, \tag{2.69}$$

або

$$\Box A = G(s_1, s_2) \equiv G(A, (\nabla A)^2), \tag{2.70}$$

$$2(2l-1)s_1F - 4lG - ks_1^2F_{s_1} - 2s_1s_2(k-1)F_{s_2} = 0. \tag{2.71}$$

Умови (2.69) визначають лiївську інваріантність рівняння (2.60) відносно оператора $D, (l = 0)$. Усі такі рівняння наведені у теоремі 2.2.

Додаткова умова (2.70) і умова на функцію F (2.71) визначають умовну симетрію рівняння (2.60) відносно оператора D, якщо система рівнянь (2.64), (2.70) буде інваріантною відносно D. Отже, згідно з критерієм інваріантності [84, 17], має виконуватись рівність:

$$\underset{2}{D}(L_2)\Big|_{\Box A=0,\ L_1=0,\ L_2=0} = 0,$$

або

$$(k-2)G = ks_1 G_{s_1} + 2(k-1)s_2 G_{s_2}. \tag{2.72}$$

Таким чином, для визначення функцій F і G ми отримали систему рівнянь (2.71), (2.72), загальний розв'язок якої записується так:

$$G = \frac{s_2}{s_1} R_1 \left\{ s_1^2 \left(\frac{s_2}{s_1^2} \right)^k \right\}, \tag{2.73}$$

$$F = \frac{s_2}{s_1^2} R_1 \left\{ s_1^2 \left(\frac{s_2}{s_1^2} \right)^k \right\} + \left(\frac{s_2}{s_1^2} \right)^{1-2l} R_2 \left\{ s_1^2 \left(\frac{s_2}{s_1^2} \right)^k \right\}, \tag{2.74}$$

де R_1 і R_2 – довільні дійсні гладкі функції.

Отже, рівняння (2.60) умовно інваріантне відносно оператора D тоді і тільки тоді, коли функція F має вигляд (2.74), при додатковій умові (2.70), де функція G має вигляд (2.73). **Теорему доведено.**

Зауваження 2.3 *З теореми 2.2 випливає, що якщо в операторі (2.61) покласти $l = 0$, то цей оператор буде оператором симетрії рівняння (2.62) без додаткової умови (2.63), тобто буде оператором ліївської симетрії. Якщо $l \neq 0$, то (2.61) буде оператором симетрії цього рівняння лише при виконанні умови (2.63), тобто буде оператором умовної симетрії.*

Як наслідок цієї теореми, сформулюємо таке твердження.

Теорема 2.9. *Хвильове рівняння*

$$\Box u = F(|u|)u$$

умовно інваріантне відносно нелінійного зображення розширеної алгебри Пуанкаре $A\widetilde{P}(1,n)$ з базисними операторами (2.7) та (2.61)

($l \neq 0$) тоді і тільки тоді, коли це рівняння і додаткова умова мають вигляд:

$$1.\ \begin{cases} \Box u = \left(\lambda_1|u|^{-2/k} + \lambda_2|u|^{(4l-2)/k}\right) u \\ \Box|u| = \lambda_1|u|^{(k-2)/k}, \qquad k \neq 0. \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} \Box u = F(|u|)u, \\ \Box|u| = 0, \qquad l = 1/2, \quad k = 0. \end{cases}$$

Досить цікавим є факт, що при деяких конкретних значеннях функцій R_1 та R_2 рівняння (2.62) разом з умовою (2.63) буде інваріантне відносно більш широкої алгебри ніж розширена алгебра Пуанкаре. Для того, аби це показати, проведемо симетрійну класифікацію рівняння (2.62) при умові (2.63).

Зауважимо, що ми будемо використовувати позначення для операторів, введені в першому параграфі цього розділу.

Справедливі такі твердження.

Теорема 2.10. *Рівняння (2.62) при $n \neq 1$ умовно інваріантне відносно конформної алгебри, доповненої оператором дилатації (2.61) тоді і тільки тоді, коли рівняння (2.62) та додаткова умова (2.63) приймають вигляд:*

$$1.\qquad \begin{cases} \Box u = \lambda|u|^{4/(n-1)}u \\ \Box|u| = \lambda|u|^{(n+3)/(n-1)} \end{cases}$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(1)}, K_\mu^{(1)}, Q_2\rangle$,

$$2.\qquad \begin{cases} \Box u = \lambda|u|^{4/(n-1)}u \\ \Box|u| = 0 \end{cases}$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(1)}, K_\mu^{(1)}, D(l = 1/2, k = 0), Q\rangle$,

$$3.\qquad \begin{cases} \Box u = 0 \\ \Box|u| = 0 \end{cases}$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D^{(1)}, K_\mu^{(1)}, Q_1, Q_2\rangle$,

Теорема 2.11. *Рівняння (2.62) при $n = 1$ умовно інваріантне відносно конформної алгебри, доповненої оператором дилатації (2.61) тоді і тільки тоді, коли рівняння (2.62) та додаткова умова (2.63) приймають вигляд:*

1. $$\begin{cases} \Box u = R(|u|)(\nabla|u|)^2 u \\ \Box|u| = R(|u|)(\nabla|u|)^2|u| \end{cases}$$

MAI: $\langle Z^{(1)}, Q_2\rangle;$

2. $$\begin{cases} \Box u = \dfrac{\lambda}{|u|^2}(\nabla|u|)^2 u \\ \Box|u| = \dfrac{\lambda}{|u|}(\nabla|u|)^2 \end{cases}$$

MAI: $\langle Z^{(1)}, Q_2, Q_3\rangle;$

3. $$\begin{cases} \Box u = \dfrac{(\nabla|u|)^2}{|u|^2}(\sigma - \lambda|u|^{4r})u \\ \Box|u| = \sigma\dfrac{(\nabla|u|)^2}{|u|} \end{cases}$$

MAI: $\langle Z^{(1)}, Q, Q_4\rangle;$

4. $$\begin{cases} \Box u = -\lambda\dfrac{(\nabla|u|)^2}{|u|^4}u \\ \Box|u| = 0 \end{cases}$$

MAI: $\langle Z^{(1)}, Q, Q_4(r = -1/2), Q_{10}\rangle;$

5. $$\begin{cases} \Box u = 0 \\ \Box|u| = 0 \end{cases}$$

MAI: $\langle Z^{(1)}, Q_1, Q_2\rangle;$

Теорема 2.12. *Всі системи (2.62), (2.63) які допускають більш широку алгебру, ніж алгебра $A\widetilde{P}(1,n) \oplus Q = \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D, Q\rangle$ мають вигляд, наведений у теоремах 2.10, 2.11 та*

1. $$\begin{cases} \Box u = \dfrac{(\nabla|u|)^2}{|u|^2}\left[\sigma - \lambda|u|^{4r}\left(\dfrac{(\nabla|u|)^2}{|u|^2}\right)^{-2l}\right]u \\ \Box|u| = \dfrac{\sigma}{|u|}(\nabla|u|)^2 \end{cases}$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D(k=0), Q, Q_4 \rangle$;

2. $$\begin{cases} \Box u = -\lambda \dfrac{(\nabla|u|)^2}{|u|^4} u \\ \Box |u| = 0 \end{cases}$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D(k=l=0), Q, Q_4(r=-1/2), Q_{10} \rangle$;

3. $$\begin{cases} \Box u = \dfrac{1}{|u|^2} R_1 \left\{ |u|^2 \left(\dfrac{(\nabla|u|)^2}{|u|^2} \right)^k \right\} u \\ \Box |u| = \dfrac{1}{|u|} R_1 \left\{ |u|^2 \left(\dfrac{(\nabla|u|)^2}{|u|^2} \right)^k \right\} \end{cases}$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D(l=0), Q_2 \rangle$,

4. $$\begin{cases} \Box u = \dfrac{\lambda}{|u|^2} (\nabla|u|)^2 u \\ \Box |u| = \dfrac{\lambda}{|u|} (\nabla|u|)^2 \end{cases}$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D(l=0, k=0), Q_2, Q_3 \rangle$;

5. $$\begin{cases} \Box u = \dfrac{\lambda}{|u|^4} u \\ \Box |u| = 0 \end{cases}$$

MAI: $\langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D(k=0, l=1/2), Q, Q_4(r=-1), Q_5 \rangle$,

Доведення теорем 2.10 – 2.12 здійснюється за аналогією з доведенням теорем першого параграфу цього розділу.

Зауважимо, що оператори, які містять нелінійність $i\ln(u/u^*)$ (тобто $Q_1, Q_2, Q_4(l \neq 0), Q_5, Q_{10}$) відповідають умовній симетрії хвильових рівнянь.

Отже, в цьому параграфі показано, що за рахунок певної додаткової умови можна значно розширити симетрію нелінійних хвильових рівнянь.

Додаток A

Антиредукція та неліївська редукція нелінійних лоренц–інваріантних хвильових рівняннь

У роботі ми, головним чином, знаходили точні розв'язки хвильових рівнянь використовуючи їх симетрійні властивості. У цьому додатку ми, користуючись методом розширення симетрії [29], побудуємо точні розв'язки n-вимірного хвильового рівняння для дійсного поля

$$\Box u = F(x^2, u) \tag{A.1}$$

за допомогою додаткової умови, запропонованої в [20]

$$D^2 u = 0, \tag{A.2}$$

де $D = x^\mu \partial_\mu$, $D^2 = D(D)$. Іншими словами, будемо шукати тільки такі розв'язки (A.1), які задовольняють додатковій умові (A.2).

Оскільки рівняння (A.2) за допомогою локальної заміни змінних

$$z = \ln x^2, \ \omega_1 = \frac{x_1}{x_0}, \ \omega_2 = \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \omega_n = \frac{x_n}{x_0} \tag{A.3}$$

зводиться до рівняння Ньютона

$$u_{zz} = 0,$$

а отже має загальний розв'язок

$$u = \ln x^2 \varphi\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) + \psi\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right), \tag{A.4}$$

то поставлена задача може бути переформульована так:

- знайти умови, при яких підстановка (A.4) буде анзацем для рівняння (A.1) (необхідні умови сумісності системи (A.1),(A.2));

- згідно з цими умовами провести редукцію та антиредукцію рівняння (A.1)

- знайти розв'язки редукованих рівнянь (систем), використовуючи які знайти розв'язки рівняння (A.1).

Сформулюємо основні результати у вигляді теореми.

Теорема A.1. *Є лише 4 умови, при яких підстановка (A.4) буде анзацем для рівняння (A.1):*

1. *(умови антиредукції)*
   рівняння

$$\Box u = \frac{1}{x^2}\left(\lambda_1 u + \lambda_2 \ln x^2 + \lambda_3\right) \tag{A.5}$$

за допомогою анзацу

$$u = \ln x^2 \varphi(\omega) + \psi(\omega) \tag{A.6}$$

редукується до системи рівнянь

$$\begin{cases} (1-\omega_a\omega_a)(\omega_a\omega_b\varphi_{ab} + 2\omega_a\varphi_a - \varphi_{aa}) = \lambda_1\varphi + \lambda_2 \\ (1-\omega_a\omega_a)(\omega_a\omega_b\psi_{ab} + 2\omega_a\psi_a - \psi_{aa}) = \\ \qquad = \lambda_1\psi + \lambda_3 + 2(1-n)\varphi; \end{cases} \tag{A.7}$$

2. *(умови лiївської редукції)*
   рівняння

$$\Box u = \frac{1}{x^2} R(u - \lambda \ln x^2) \tag{A.8}$$

за допомогою анзацу

$$u = \lambda \ln x^2 + \psi(\omega) \tag{A.9}$$

редукується до рівняння

$$(1-\omega_a\omega_a)(\omega_a\omega_b\psi_{ab} + 2\omega_a\psi_a - \psi_{aa}) = R(\psi) + 2\lambda(1-n); \tag{A.10}$$

3. (умови неліївської редукції) рівняння

$$\Box u = \frac{1}{x^2}\left((\ln x^2+\lambda_1)R\left(\frac{u-\lambda_2}{\ln x^2+\lambda_1}\right)+ +2(n-1)\frac{u-\lambda_2}{\ln x^2+\lambda_1}\right) \tag{A.11}$$

за допомогою анзацу

$$u = (\ln x^2+\lambda_1)\varphi(\omega)+\lambda_2 \tag{A.12}$$

редукується до рівняння

$$(1-\omega_a\omega_a)(\omega_a\omega_b\varphi_{ab}+2\omega_a\varphi_a-\varphi_{aa}) = R(\varphi); \tag{A.13}$$

4. (умови неліївської редукції) рівняння

$$\Box u = \frac{1}{x^2}(\ln x^2 R_1(t)+R_2(t)), \tag{A.14}$$

де параметр t визначається з умови

$$u - t\ln x^2 - \Phi(t) = 0, \qquad \Phi''(t)\neq 0, \tag{A.15}$$

($\Phi(t)$ – довільна фіксована гладка функція), за допомогою анзацу

$$u = \ln x^2\varphi(\omega)+\Phi(\varphi(\omega)) \tag{A.16}$$

редукується до перевизначеної системи рівнянь

$$\left\{\begin{array}{l}(1-\omega_a\omega_a)(\omega_a\omega_b\varphi_{ab}+2\omega_a\varphi_a-\varphi_{aa}) = R_1(\varphi),\\ (1-\omega_a\omega_a)((\varphi_a\omega_a)^2-\varphi_a\varphi_a) = \\ \qquad = \frac{1}{\Phi''(\varphi)}(R_2(\varphi)+2(1-n)\varphi-\Phi' R_1(\varphi)).\end{array}\right. \tag{A.17}$$

Тут і надалі $\omega = (\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)$ визначаються з формул (А.3), латинські індекси a і b змінюються від 1 до n, під повторними індексами розуміється сума від 1 до n ($\omega_a\omega_a = \omega_1^2+\omega_2^2+\ldots+\omega_n^2$), λ, λ_1, λ_2, λ_3 довільні сталі, R, R_1, R_2 довільні гладкі функції.

Для **доведення** цієї теореми перепишемо рівняння (A.1) у вигляді

$$\Box u = \frac{1}{x^2}\widehat{F}(\ln x^2, u). \tag{A.18}$$

Підставляючи (A.4) до рівняння (A.18) отримаємо такий вираз:

$$\begin{gathered}2(n-1)\varphi + (1-\omega_a\omega_a)(z\omega_a\omega_b\varphi_{ab} + 2z\omega_a\varphi_a - z\varphi_{aa} + \\ +\omega_a\omega_b\psi_{ab} + 2\omega_a\psi_a - \psi_{aa}) = \widehat{F}(z, z\varphi+\psi).\end{gathered} \tag{A.19}$$

Двічи диференцюючи це рівняння по z, можна записати, що

$$(1-\omega_a\omega_a)(\omega_a\omega_b\varphi_{ab} + 2\omega_a\varphi_a - \varphi_{aa}) = \widehat{F}_1 + \widehat{F}_2\varphi, \tag{A.20}$$

$$\widehat{F}_{11} + 2\widehat{F}_{12}\varphi + \widehat{F}_{22}\varphi^2 = 0, \tag{A.21}$$

де $\widehat{F}_1$ – диференціювання функції $\widehat{F}$ по першому аргументу, $\widehat{F}_2$ – по другому.

Якщо виконуються умови (A.20) і (A.21), то до рівняння (A.19) змінна z не буде входити. Отже, (A.19) буде диференціальним рівнянням в частинних похідних для функцій φ і ψ. Таким чином, умови (A.20) і (A.21) – необхідні і достатні умови редукції рівняння (A.18) за допомогою підстановки (A.4).

Розв'яжемо систему (A.20),(A.21). Оскільки $\widehat{F} = \widehat{F}(z, z\varphi+\psi)$, то необхідно розглянути окремо два випадки: коли змінні z, $z\varphi+\psi$, φ – функціонально незалежні, і коли – функціонально залежні. Змінні z, $z\varphi+\psi$, φ – функціонально незалежні тоді і тільки тоді, коли

$$\operatorname{rank}\left[\frac{D(z, z\varphi+\psi, \varphi)}{D(z,\omega)}\right] = 3.$$

Остання умова еквівалентна здійсненню таких двох умов:

$$\varphi \neq const \quad \text{та} \quad \psi \neq \Phi(\varphi), \tag{A.22}$$

де $\Phi(\varphi)$ – довільна гладка функція.

1. Нехай справджуються обидві умови (A.22). Оскільки у цьому випадку змінні z, $z\varphi+\psi$, φ – функціонально незалежні, то з (A.21) випливає, що

$$\widehat{F}_{11} = 0, \ \widehat{F}_{12} = 0, \ \widehat{F}_{22} = 0,$$

тобто

$$\widehat{F} = \lambda_1(z\varphi + \psi) + \lambda_2 z + \lambda_3. \tag{A.23}$$

Підставляючи (A.23) до (A.19) і (A.20) ми отримаємо систему рівнянь (A.7). Таким чином, якщо $\widehat{F}$ задовольняє (A.23), то, за допомогою анзацу (A.4) можна провести антиредукцію рівняння (A.18), а отже і (A.5), до системи рівнянь (A.7), що і стверджується в пункті 1 теореми.

2. $\varphi = \lambda = const$, тобто замість (A.4) розглянемо підстановку (A.9).

Підставляючи $\varphi = \lambda$ до рівняння (A.20), отримаємо, що

$$\widehat{F}_1 + \widehat{F}_2\lambda = 0$$

або

$$\widehat{F} = R(\lambda z + \psi - \lambda z) = R(\psi) = R(u - \lambda \ln x^2). \tag{A.24}$$

Умова (A.21) справжнюється автоматично.

Отже, якщо $\widehat{F}$ зодовольняє (A.24), то анзац (A.9) редукує (A.18), а, отже, і рівняння (A.8) до рівняння (A.10), що стверджується у пункті 2 теореми. У цьому випадку анзац (A.9) – ліївський, оскільки він відповідає операторові

$$Q = x^\mu \partial_\mu + 2\lambda\partial_u,$$

який є оператором ліївської симетрії рівняння (A.8). Дійсно, знайшовши друге продовження оператора Q, можна переконатись, що справжнюється умова

$$\underset{2}{Q}\left(\Box u - \frac{1}{x^2}R(\lambda \ln x^2 - u)\right)\Big|_{\Box u = \frac{1}{x^2}R(\lambda\ln x^2 - u)} = 0.$$

3. $\psi = \Phi(\varphi)$, тобто розглянемо підстановку (A.16).

Тоді рівняння (A.21) являє собою диференціальне рівняння в частинних похідних з двома незалежними змінними z і $z\varphi + \Phi(\varphi)$, яке при переході до нових незалежних змінних z і φ, перетворюється у рівняння Ньютона

$$\widehat{F}_{zz} = 0.$$

Отже, необхідно, аби

$$\widehat{F} = R_1(\varphi)z + R_2(\varphi). \tag{A.25}$$

Підставимо $\psi = \Phi(\varphi)$ до рівняння (A.19). Розщеплюючи по z отримаємо систему для функцій φ:

$$\begin{cases} (1-\omega_a\omega_a)(\omega_a\omega_b\varphi_{ab} + 2\omega_a\varphi_a - \varphi_{aa}) = R_1(\varphi), \\ \Phi''(\varphi)(1-\omega_a\omega_a)((\varphi_a\omega_a)^2 - \varphi_a\varphi_a) = \\ \qquad = R_2(\varphi) + 2(1-n)\varphi - \Phi' R_1(\varphi), \end{cases} \tag{A.26}$$

перше рівняння якої є не що інше, як рівняння (A.20), якщо до нього підставити (A.25).

Розглянемо два випадки.

а) $\Phi''(\varphi) = 0$ або $\Phi(\varphi) = \lambda_1\varphi + \lambda_2$, тобто розглянемо підстановку (A.12).

З другого рівняння системи (A.26) випливає, що

$$R_2(\varphi) = \lambda_1 R_1(\varphi) + 2(n-1)\varphi$$

або, враховуючи (A.25),

$$\widehat{F} = R_1(\varphi)z + \lambda_1 R_1(\varphi) + 2(n-1)\varphi.$$

Переходячи до змінних u і $\ln x^2$ отримаємо, що

$$\widehat{F} = (\ln x^2 + \lambda_1) R\left(\frac{u-\lambda_2}{\ln x^2 + \lambda_1}\right) + 2(n-1)\frac{u-\lambda_2}{\ln x^2+\lambda_1}.$$

Перше рівняння системи (A.26) буде рівнянням, до якого анзац (A.12) редукує рівняння (A.11), що і стверджується у пункті 3 теореми.

Той факт, що цей анзац – неліївський випливає з теореми A.2, яка наведена нижче.

б) $\Phi''(\varphi) \neq 0$.

Якщо у виразі (A.25) перейти до змінних u і $\ln x^2$, то, одержимо, що

$$\widehat{F} = R_1(t)\ln x^2 + R_2(t),$$

де параметр t визначається з умови (A.15). Отже, з системи (A.26) випливає, що рівняння (A.14) за допомогою анзацу (A.16) редукується до системи (A.17), що і стверджується в останньому пункті теореми.

Слід зауважити, що анзац (А.16) – неліївський, оскільки, за означенням, ліївські анзаци редукують рівняння до іншого рівняння з меншою кількістю незалежних змінних. У нашому випадку, анзац (А.16) редукує рівняння (А.14) до *системи* рівнянь.

Теорему доведено.

Підсумовуючи сказане вище, зазначимо, що, на відміну від ліївських анзаців, анзаци, які тут побудовані, відповідають додатковій умові *другого* порядку. Дякуючи цьому, нам вдалося провести антиредукцію та неліївську редукцію рівнянь з класу (А.1).

Для того, аби довести, що анзац (А.12) – неліївський для рівняння (А.11), дослідимо симетрію цього рівняння.

Перш, ніж наводити відповідні теореми, зауважимо, що за допомогою заміни змінних

$$u \to u + \lambda_2, \qquad x_\mu \to x_\mu e^{-\lambda_1/2}$$

рівняння (А.11) зводиться до рівняння

$$\Box u = \frac{1}{x^2}\left(\ln x^2 R\left(\frac{u}{\ln x^2}\right) + 2(n-1)\frac{u}{\ln x^2}\right), \tag{A.27}$$

а анзац (А.12) зводиться до

$$u = \ln x^2 \varphi(\omega). \tag{A.28}$$

У наступних теоремах досліджено симетрію рівняння (А.27).

Теорема А.2. *Максимальна алгебра інваріантності рівняння (А.27) для довільної функції R – алгебра Лоренца з базисними операторами*

$$J_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu.$$

Теорема А.3. *Всі рівняння типу (А.27), для яких алгебра інваріантності більш широка, ніж алгебра Лоренца, записуються так:*

1. $$\Box u = \frac{1}{x^2}\left(\lambda_1 u + \lambda_2 \ln x^2 + \frac{2u(n-1)}{\ln x^2}\right), \tag{A.29}$$

$$MAI: \qquad < J_{\mu\nu}, Q >. \tag{A.30}$$

$$Q = (s(x) - u)\partial_u.$$

де $s(x)$ *– розв'язок рівняння (A.29);*

2. $$\Box u = \lambda \frac{\ln x^2}{x^2}\left(\frac{u}{\ln x^2}\right)^k, \quad n=1, \quad k\neq 1,$$

$$MAI: \qquad < J_{\mu\nu}, Q_1 >, \tag{A.31}$$

$$Q_1 = \Big((x_0+x_1)\ln(x_0+x_1) + (x_0-x_1)\ln(x_0-x_1)\Big)\partial_0 +$$

$$+\Big((x_0+x_1)\ln(x_0+x_1) - (x_0-x_1)\ln(x_0-x_1)\Big)\partial_1 + 2\frac{k-3}{k-1}u\partial_u;$$

3. $$\Box u = \lambda \frac{\ln x^2}{x^2}\left(\frac{u}{\ln x^2}\right)^3, \quad n=1,$$

$$MAI: \qquad < J_{\mu\nu}, Q_1, Q_2 >, \tag{A.32}$$

$$Q_1 = \Big((x_0+x_1)\ln(x_0+x_1) + (x_0-x_1)\ln(x_0-x_1)\Big)\partial_0 +$$

$$+\Big((x_0+x_1)\ln(x_0+x_1) - (x_0-x_1)\ln(x_0-x_1)\Big)\partial_1,$$

$$Q_2 = \Big((x_0+x_1)\ln^2(x_0+x_1) - (x_0-x_1)\ln^2(x_0-x_1)\Big)\partial_0 +$$

$$+\Big((x_0+x_1)\ln^2(x_0+x_1) + (x_0-x_1)\ln^2(x_0-x_1)\Big)\partial_1,$$

4. $$\Box u = \lambda \frac{\ln x^2}{x^2}\exp\left(\frac{u}{\ln x^2}\right), \quad n=1,$$

$$MAI: \qquad < J_{\mu\nu}, Q_3 >, \tag{A.33}$$

$$Q_3 = \Big((x_0+x_1)\ln(x_0+x_1) + (x_0-x_1)\ln(x_0-x_1)\Big)\partial_0 +$$

$$+\Big((x_0+x_1)\ln(x_0+x_1) - (x_0-x_1)\ln(x_0-x_1)\Big)\partial_1 +$$

$$+(2u - 2\ln x^2)\partial_u;$$

5. $$\Box u = \lambda \frac{u}{x^2}, \quad n=1, \tag{A.34}$$

$$MAI: \qquad < J_{\mu\nu}, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7 >,$$

$$Q_4 = \Big((x_0+x_1)\ln(x_0+x_1) - (x_0-x_1)\ln(x_0-x_1)\Big)\partial_0 +$$

$$+\Big((x_0+x_1)\ln(x_0+x_1) + (x_0-x_1)\ln(x_0-x_1)\Big)\partial_1$$

$$Q_5 = x_0\partial_0 + x_1\partial_1, \qquad Q_6 = u\partial_u, \qquad Q_7 = s(x)\partial_u,$$

де $s(x)$ – розв'язок рівняння (A.34).

Для **доведення** цієї теореми застосуємо умову інваріантності рівняння (A.27) відносно оператора

$$X = \xi^\mu(x,u)\partial_\mu + \eta(x,u)\partial u$$

у вигляді

$$\underset{2}{X} L(u)\Big|_{L(u)=0} = 0, \tag{A.35}$$

де $\underset{2}{X}$ – друге продовження оператора X і

$$L(u) = \Box u - \frac{1}{x^2}\left(\ln x^2 R\left(\frac{u}{\ln x^2}\right) + 2(n-1)\frac{u}{\ln x^2}\right).$$

Проводячи розщеплення рівняння (A.35) за незалежними змінними, ми прийдемо до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно функцій $\xi^\mu(x,u)$ і $\eta(x,u)$:

$$\begin{array}{lll} \xi^\mu_u = 0; & \eta_{uu} = 0; & \xi^0_0 = \xi^1_1 = \cdots = \xi^n_n; \\ \xi^i_0 = \xi^0_i, & \xi^i_j = -\xi^j_i, & i \neq j,\ i,j = \overline{1,n}; \\ 2\eta_{\nu u} = (1-n)\xi^\nu_{00}; & & \end{array} \tag{A.36}$$

$$\begin{aligned} &(\eta_u - 2\xi^0_0)\left(R\ln x^2 + \frac{2(n-1)u}{\ln x^2}\right) - \eta\left(R' + \frac{2(n-1)}{\ln x^2}\right) + \\ &+ x^2\Box\eta + \frac{2x_\mu\xi^\mu}{x^2}\left(R\ln x^2 + \frac{2(n-1)u}{\ln x^2} - R + \right. \\ &\left. + R'\frac{u}{\ln x^2} + \frac{2(n-1)u}{\ln^2 x^2}\right) = 0. \end{aligned} \tag{A.37}$$

Розглянемо 2 випадки:

1. $n \neq 1$

Тоді підставляючи загальний розв'язок системи Кіллінга (А.36)

$$\xi^\nu = 2x^\nu x_\mu c^\mu - x_\mu x^\mu c^\nu + r^{\nu\mu} x_\mu + dx^\nu + h^\nu,$$
$$\eta = ((1-n)c^\mu x_\mu + h)u + æ(x),$$

до класифікуючого рівняння (А.37), одержимо:

$$\left(R'\frac{u}{\ln x^2} - R\right)\left(c_\mu x^\mu (n-1)\ln x^2 - h\ln x^2 + 2c_\mu x^\mu + 2d + \frac{2h_\mu x^\mu}{x^2}\right) +$$

$$+\frac{4(n-1)u}{\ln x^2}\left(\frac{c_\mu x^\mu}{\ln x^2} - c_\mu x^\mu + \frac{d}{\ln x^2} + \frac{a_\mu x^\mu}{x^2} + \frac{a_\mu x^\mu}{x^2 \ln x^2}\right) - æ(x)R' +$$

$$+x^2\Box æ(x) - 2æ(x)\frac{n-1}{\ln x^2} + R\left(\frac{2a_\mu x^\mu}{x^2}\ln x^2 - 2c_\mu x^\mu \ln x^2\right) = 0.$$

Тут c_μ, $r^{\nu\mu} = -r^{\mu\nu}$, d, h^ν, h – довільні сталі, $æ(x)$ – довільна гладка функція.

З цього виразу випливає, що якщо R - довільна функція, то c_μ, d, h_ν, h, $æ(x)$ дорівнюють нулеві, а отже, операторами симетрії у цьому випадку будуть оператори $J_{\mu\nu}$, які відповідаіть структуровим сталим $r^{\mu\nu}$.

Остаточно, розщеплюючи останній вираз за незалежними змінними, одержимо, що єдиною умовою, коли хоча б ще одна з сталих не дорівнює нулеві є умова

$$R = \lambda_1 \frac{u}{\ln x^2} + \lambda_2.$$

У цьому випадку до операторів $J_{\mu\nu}$ додається ще оператори Q (перший пункт теореми А.3).

2. $n = 1$.

Підставляючи загальний розв'язок системи Кіллінга (А.36)

$$\xi^0 = æ_1(x_0 + x_1) - æ_2(x_0 - x_1), \qquad \xi^1 = æ_1(x_0 + x_1) + æ_2(x_0 - x_1),$$
$$\eta = hu + æ(x_0, x_1)$$

до класифікуючого рівняння (А.37), одержимо:

$$\left(R'\frac{u}{\ln x^2} - R\right)\left(\frac{2æ_1}{x_0 + x_1} - \frac{2æ_2}{(x_0 - x_1)} - h\ln x^2\right) - R'æ + x^2\Box æ +$$

$$+2\ln x^2 R\left(æ_2' - æ_1' + \frac{æ_1}{x_0+x_1} - \frac{æ_2}{x_0-x_1}\right) = 0.$$

Тут $æ_1(x_0+x_1)$, $æ_2(x_0-x_1)$, $æ(x_0,x_1)$ - довільні гладкі функції, h - довільна стала.

Аналогічно попередньому, якщо R - довільна функція, то

$$æ_1 = \tau(x_0+x_1), \quad æ_2 = \tau(x_0-x_1), \quad æ = 0, \quad h = 0, \quad \tau = const.$$

Єдиний оператор симетрії у цьому випадку - оператор Лоренца J_{01}.

Проводячи подальші розщеплення по незалежним змінним $\frac{u}{\ln x^2}$, x_0+x_1, x_0-x_1, одержуємо пункти 2-5 теореми А.3.

Теорему доведено.

З теореми А.2 можна зробити висновок, що анзац (А.28) не можна отримати з ліівської симетрії рівняння (А.27) для довільної функції R. Крім того, з теореми А.3 випливає, що не існує жодної нелінійної функції R, для якої анзац (А.27) відповідав би операторові симетрії рівняння (А.27), оскільки змінна x_1/x_0 не є інваріантом жодної одновимірної підалгебри алгебр (А.30) - (А.33).

Використовуючи знайдені анзаци, побудуємо точні розв'язки одновимірних хвильових рівнянь.

$$1. \qquad \Box u = \lambda\frac{u}{x_0^2 - x_1^2}, \qquad u = u(x_0,x_1). \tag{А.38}$$

Згідно з теоремою А.1, рівняння (А.38) за допомогою анзацу

$$u = \ln(x_0^2 - x_1^2)\varphi(\omega) + \psi(\omega), \qquad \omega = x_1/x_0 \tag{А.39}$$

редукується до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} (\omega^2-1)^2\varphi'' + 2\omega(\omega^2-1)\varphi' = -\lambda\varphi \\ (\omega^2-1)^2\psi'' + 2\omega(\omega^2-1)\psi' = -\lambda\psi, \end{cases}$$

загальний розв'язок якої має вигляд:

а) $\lambda > 0$,

$$\varphi = c_1\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln\left|\frac{\omega-1}{\omega+1}\right|\right) + c_2\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln\left|\frac{\omega-1}{\omega+1}\right|\right),$$
$$\psi = c_3\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln\left|\frac{\omega-1}{\omega+1}\right|\right) + c_4\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln\left|\frac{\omega-1}{\omega+1}\right|\right);$$

б) $\quad \lambda < 0,$

$$\varphi = c_1\left|\frac{\omega-1}{\omega+1}\right|^{\sqrt{-\lambda}/2} + c_2\left|\frac{\omega-1}{\omega+1}\right|^{-\sqrt{-\lambda}/2},$$
$$\psi = c_3\left|\frac{\omega-1}{\omega+1}\right|^{\sqrt{-\lambda}/2} + c_4\left|\frac{\omega-1}{\omega+1}\right|^{-\sqrt{-\lambda}/2},$$

Враховуючи (А.39), розв'язки рівняння (А.38) мають вигляд:

а) $\quad \lambda > 0,$

$$u = \ln(x_0^2 - x_1^2)\times$$
$$\times\left[c_1\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln\left|\frac{x_1-x_0}{x_1+x_0}\right|\right) + c_2\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln\left|\frac{x_1-x_0}{x_1+x_0}\right|\right)\right]+,$$
$$+c_3\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln\left|\frac{x_1-x_0}{x_1+x_0}\right|\right) + c_4\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln\left|\frac{x_1-x_0}{x_1+x_0}\right|\right);$$

б) $\quad \lambda < 0,$

$$u = \ln(x_0^2 - x_1^2)\left[c_1\left|\frac{x_1-x_0}{x_1+x_0}\right|^{\sqrt{-\lambda}/2} + c_2\left|\frac{x_1-x_0}{x_1+x_0}\right|^{-\sqrt{-\lambda}/2}\right]+,$$
$$+c_3\left|\frac{x_1-x_0}{x_1+x_0}\right|^{\sqrt{-\lambda}/2} + c_4\left|\frac{x_1-x_0}{x_1+x_0}\right|^{-\sqrt{-\lambda}/2}.$$

2. $$\Box u = \lambda\frac{u^k}{x_0^2 - x_1^2}, \qquad k \neq \pm 1, \qquad u = u(x_0, x_1). \tag{А.40}$$

Згідно з пунктом 2 теореми А.1 рівняння (А.40) за допомогою анзацу

$$u = \varphi(\omega), \qquad \omega = x_1/x_0 \tag{А.41}$$

редукується до звичайного диференціального рівняня

$$(\omega^2-1)^2\varphi'' + 2\omega(\omega^2-1)\varphi' = -\lambda\varphi^k, \tag{А.42}$$

загальний розв'язок якого має вигляд:

$$\int\sqrt{\frac{k+1}{c_1(k+1) - 2\lambda\varphi^{k+1}}}d\varphi = \pm\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\omega-1}{\omega+1}\right| + c. \tag{А.43}$$

Поклавши $c_1 = 0$, отримаємо такий частинний розв'язок рівняння (A.42):

$$\varphi = \left(\pm \frac{1-k}{4} \sqrt{-\frac{2\lambda}{k+1}} \ln \left| \frac{\omega - 1}{\omega + 1} \right| + c \right)^{2/(1-k)}. \tag{A.44}$$

Враховуючи (A.41), вираз

$$u = \left(\pm \frac{1-k}{4} \sqrt{-\frac{2\lambda}{k+1}} \ln \left| \frac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0} \right| + c \right)^{2/(1-k)}.$$

буде точним розв'язком рівняння (A.40).

Якщо $k = -3$, то, з (A.43) випливає, що рівняння (A.42) має ще розв'язок

$$\varphi = \pm \left| \frac{1}{c_1} \left(\frac{c_1}{2} \ln \left| \frac{\omega - 1}{\omega + 1} \right| + c \right)^2 - \frac{\lambda}{c_1} \right|^{1/2}. \tag{A.45}$$

Відповідний точний розв'язок рівняння (A.40) коли $k = -3$ має вигляд:

$$u = \pm \left| \frac{1}{c_1} \left(\frac{c_1}{2} \ln \left| \frac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0} \right| + c \right)^2 - \frac{\lambda}{c_1} \right|^{1/2}.$$

3. $$\Box u = \lambda \frac{\ln^{1-k}(x_0^2 - x_1^2)}{x_0^2 - x_1^2} u^k, \quad k \neq \pm 1, \quad u = u(x_0, x_1). \tag{A.46}$$

Як випливає з теореми A.1, рівняння (A.46) за допомогою анзаца

$$u = \ln(x_0^2 - x_1^2)\varphi(\omega), \qquad \omega = x_1/x_0$$

редукується до звичайного диференціального рівняння (A.42) з частинним розв'язком (A.44). Отже, рівняння (A.46) має такий точний розв'язок:

$$u = \ln(x_0^2 - x_1^2) \left(\pm \frac{1-k}{4} \sqrt{-\frac{2\lambda}{k+1}} \ln \left| \frac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0} \right| + c \right)^{2/(1-k)}. \tag{A.47}$$

Крім того, враховуючи, що (A.45) є розв'язком рівняння (A.42) при $k = -3$, отримаємо, що вираз

$$u = \pm \ln(x_0^2 - x_1^2) \left| \frac{1}{c_1} \left(\frac{c_1}{2} \ln \left| \frac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0} \right| + c \right)^2 - \frac{\lambda}{c_1} \right|^{1/2} \tag{A.48}$$

буде розв'язком рівняння (A.46) при $k = -3$.

4. $$\Box u = \frac{1}{x^2}\left(\lambda t^k \ln(x_0^2 - x_1^2) + \lambda_1 t^m\right), \qquad (A.49)$$

де t визначається з умови (A.15), $u = u(x_0, x_1)$.

Тут ми розглянемо випадок, коли

$$\Phi(t) = \lambda_2/t, \qquad \lambda_2 \neq 0.$$

Тоді, в явному вигляді, рівняння (A.49) можна переписати так:

$$\Box u = \frac{1}{x^2}\left(\lambda \ln(x_0^2 - x_1^2)\left(\frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4\lambda_2 \ln(x^2)}}{2\ln(x^2)}\right)^k + \right. \qquad (A.50)$$

$$\left. +\lambda_1\left(\frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4\lambda_2 \ln(x^2)}}{2\ln(x^2)}\right)^m\right),$$

З теореми A.1 випливає, що рівняння (A.50) за допомогою анзацу

$$u = \ln x^2 \varphi(\omega) + \frac{\lambda_2}{\varphi(\omega)}, \qquad \omega = x_1/x_0 \qquad (A.51)$$

редукується до перевизначеної системи

$$\begin{cases} (\omega^2 - 1)^2\varphi'' + 2\omega(\omega^2 - 1)\varphi' = -\lambda\varphi^k \\ 2(\varphi'(\omega^2 - 1))^2 = -\lambda\varphi^{k+1} - (\lambda_1/\lambda_2)\varphi^{m+3}, \end{cases} \qquad (A.52)$$

З першого рівняння системи (A.52) випливає, що

$$(\varphi'(\omega^2 - 1))^2 = -2\lambda\int \varphi^k d\varphi + c_1.$$

Підставляючи цей вираз у друге рівняння, одержимо умову сумісності системи (A.52):

$$-4\lambda\int \varphi^k d\varphi + 2c_1 = -\lambda\varphi^{k+1} - (\lambda_1/\lambda_2)\varphi^{m+3},$$

звідки мають виконуватись такі співвідношення:

- $m = -3$, $k = 3$, $c_1 = -\lambda_1/(2\lambda_2)$;
- $k \neq -1$, $m = k - 2$, $c_1 = 0$, $\lambda_1 = \lambda\lambda_2\left(\frac{3-k}{k+1}\right)$

При виконанні цих умов загальний розв'язок системи (A.52) має вигляд (A.43). Отже, враховуючи (A.51), рівняння (A.50) має такі розв'язки:

а) $\quad k = 3, \ \lambda_1 = 0$

$$u = \ln(x^2)\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\lambda}{2}}\ln\left|\frac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0}\right| + c\right)^{-1} \pm \frac{\lambda_2}{2}\sqrt{-\frac{\lambda}{2}}\ln\left|\frac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0}\right| + c\lambda_2,$$

б) $\quad k = 3, \ m = -3$

$$\begin{cases} u = s\ln x^2 + \lambda_2/s, \\ \dfrac{x_1}{x_0} = \pm\tanh\left[\displaystyle\int\sqrt{\frac{-2\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda\lambda_2 s^4}}\,ds + c\right], \end{cases}$$

в) $\quad k \neq \pm 1, \ m = k - 2, \ \lambda_1 = \lambda\lambda_2\left((3-k)/(k+1)\right)$

$$u = \ln(x^2)\left(\pm\frac{1-k}{4}\sqrt{-\frac{2\lambda}{k+1}}\ln\left|\frac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0}\right| + c\right)^{2/(1-k)} +$$

$$+\lambda_2\left(\pm\frac{1-k}{4}\sqrt{-\frac{2\lambda}{k+1}}\ln\left|\frac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0}\right| + c\right)^{2/(k-1)},$$

г) $\quad k = -3, \ m = -5, \ \lambda_1 = -3\lambda\lambda_2$

$$u = \pm\ln(x^2)\left|\frac{1}{c_1}\left(\frac{c_1}{2}\ln\left|\frac{x_0 - x_1}{x_0 + x_1}\right| + c\right)^2 - \frac{\lambda}{c_1}\right|^{1/2} +$$

$$+\lambda_2\left|\frac{1}{c_1}\left(\frac{c_1}{2}\ln\left|\frac{x_0 - x_1}{x_0 + x_1}\right| + c\right)^2 - \frac{\lambda}{c_1}\right|^{-1/2}.$$

Зауважимо, що серед отриманих нами розв'язків є неліївські. Зокрема, використовуючи результати теореми A.3 можна переконатись, що вираз (A.48) є неліївським розв'язком рівняння (A.46) при $k = -3$.

Висновки

Дисертація присвячена дослідженню симетрійних властивостей диференціальних рівнянь та систем, що задовольняють принцип Лоренца–Пуанкаре–Айнштайна, редукції та знаходженню їх точних розв'язків, побудові хвильових рівнянь, інваріантних відносно нових нелінійних зображень конформної алгебри та розширеної алгебри Пуанкаре.

Дисертація складається з вступу, двох розділів, додатку, висновків та списку літератури.

Перший розділ присвячений дослідженню рівнянь гіперболічного типу високого порядку. В першому параграфі проведена вичерпна симетрійна класифікація поліхвильові рівняннь $\Box^l u = F(u)$. Вказано на одну важливу властивість лінійного поліхвильового рівняння $\Box^l u = 0$, яке, при деяких умовах допускає два нееквівалентних зображення конформної алгебри. У другому параграфі проведено симетрійну редукцію та побудовано багатопараметричні класи точних розв'язків одновимірних дилатаційно та конформно–інваріантних біхвильових рівнянь. У третьому параграфі досліджено умови редукції багатовимірних біхвильових рівнянь до звичайних диференціальних рівнянь та до одновимірних біхвильових рівнянь. Побудовано їх точні розв'язки, серед яких є такі, що містять довільні функції. Ці розв'язки узагальнено на випадок багатовимірних поліхвильових рівнянь. Четвертий параграф присвячений симетрійній класифікації систем хвильових рівнянь, що еквівалентні нелінійним біхвильовим рівнянням. Знайдено системи, які інваріантні відносно нескінченновимірної алгебри та побудовано деякі точні розв'язки таких систем. В останньому параграфі цього розділу досліджується інваріантність багатовимірних поліхвильових рівнянь для комплексного скалярного поля відносно розширеної алгебри Пуанкаре та конформної алгебри.

В другому розділі розглядається узагальнене хвильове рівняння для комплексного скалярного поля $\Box u = F(|u|, (\nabla |u|)^2, \Box |u|)u$. У першому параграфі проведена його повна симетрійна класифікація. Побудовано нові нелінійні зображення конформної алгебри та розширеної алгебри Пуанкаре, які раніше не зустрічались у літературі. Знайдено нові класи конформно–інваріантних хвильових рівнянь. У другому параграфі побудовано точні розв'язки конформно–інваріантних рівнянь. З цією метою розглядалися 3 класи анзаців: узагальнені пуанкаре–інваріантні анзаци; анзаци, які дозволяють побудувати точні розв'язки, що залежать від довільних функцій; дилатаційно та конформно–інваріантні анзаци, які редукують хвильові рівняння для комплексного скалярного поля до систем звичайних диференціальних рівнянь. У третьому параграфі досліджено умовну симетрію хвильових рівнянь. Зокрема, встановлено умови, при яких хвильові рівняння допускають нелінійні зображення розширеної алгебри Пуанкаре.

В додатку досліджується питання неліївської редукції нелінійних лоренц-інваріантних хвильових рівнянь. Для таких рівнянь запропоновано ряд анзаців, що відповідають додатковій умові другого порядку. Побудовано точні розв'язки, серед яких є такі, що не можуть бути одержані за допомогою класичного методу Лі.

Результати, отримані в дисертації, є новими і можуть бути використані при розв'язанні ряду конкретних задач нелінійної математичної фізики та нелінійної квантової теорії поля.

Література

[1] Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Приближенные группы преобразований// Дифференц. уравнения.— 1993.— **29**, N 10.— С.1712– 1732.

[2] Бейтмен Г. Математическая теория распространения электромагнитных волн.— М.: Мир, 1958.— 179с.

[3] Биркгоф Г. Гидродинамика. – М.: Изд–во ин. литературы, 1963.— 244с.

[4] Боголюбов Н.Н. Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей.— М.: Наука, 1973.— 588с.

[5] Владимиров В.С. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1988.— 512с.

[6] Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Об одной параболической системе нелинейных уравнений. II.// Дифференц. уравнения.— 1985.— **21**, N 9.— С.1544–1558.

[7] Жданов Р.З., Цифра І.М. Редукція диференціальних рівнянь та умовна симетрія// Укр. мат. журн.— 1996.— **48**, N 5.— С.595–602.

[8] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложение в механике, точные решения.— М.: Наука,1993.— 462с.

[9] Ибрагимов Н.Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики. Новосибирск: Издательство Новосиб. ун та, 1972. 200с.

[10] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике.— М.: Наука, 1983.— 278с.

[11] Ибрагимов Н.Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений.— Новосибирск: Наука, 1967.— 57с.

[12] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям,— М.: Наука, 1976.— 576с.

[13] Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа.— М.: Гос. физ. –мат. издат., 1962.— 708с.

[14] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики.— М.: Гостехиздат, 1951.— Т.1.— 476с.; Т.2.— 544с.

[15] Миллер У. Симметрия и разделение переменных. — М.: Мир, 1981.— 342с.

[16] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям.— М.: Мир, 1989.— 581с.

[17] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.— 400с.

[18] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики.— М.: Наука, 1981.— 368с.

[19] Роман О. Груповий аналіз біхвильового рівняння// Праці Всеукраїнської конференції молодих вчених (математика).— Київ, 1994.— Ч.1.— С.144–148.

[20] Роман О. Деякі точні розв'язки нелінійних лоренц–інваріантних хвильових рівнянь в одновимірному просторі// Всеукр. конф. "Розробка та застосування математичних методів в науково технічних дослідженнях": Тези доп., Львів, 5–7 жовт., 1995. Львів, 1995.— Ч.2.— С.91–92.

[21] Роман О. Симетрійна класифікація поліхвильових рівнянь для комплекснозначних функцій// Тези Четвертої міжнародної наукової конференції ім. акад. Кравчука., Київ, 11–13 трав., 1995. Київ, 1995.— С.211.

[22] Роман О. Симетрія і точні розв'язки нелінійного біхвильового рівняння// Доп. НАН України.— 1995.— N 5.— С.33–34.

[23] Свирщевский С.Р. Групповая классификация и инвариантные решения нелинейных полигармонических уравнений // Дифференц. уравнения, 1993.— **29**, N 10.— С.1772–1780.

[24] Серов Н.И. О некоторых условно–инвариантных решениях уравнения Борна–Инфельда// Симметрия и решения уравнений математической физики.— Киев: Ин-т математики, 1989.— С.74–76.

[25] Серов Н.И. Условная инвариантность и точные решений нелинейного уравнения теплопроводности// Укр. мат. журн., 1990.— **42**, N 10.— С.1370–1376.

[26] Серов Н.И. Конформная инвариантность нелинейных волновых уравнений// Теорет.–алгебраические исследования в математической физике.— Киев, Ин–т математики, 1981.— С.59

[27] Теория солитонов. Метод обратной задачи (Под ред. С.П. Новикова).— М.: Наука, 1980.— 320с.

[28] Федорчук В.М. О редукции и некоторых точных решениях нелинейного волнового уравнения // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики.— Киев: Ин–т математики, 1987.— С.73–76.

[29] Фущич В.И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений?// Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики.— Киев, Ин–т математики, 1987.— С.4–16.

[30] Фущич В.И. О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения// Теорет. и матем. физика, 1971.— **7**, N 1.— с.3–12.

[31] Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики// Докл. Акад. Наук СССР.— 1979.— **246**, N 3.— С.846–850.

[32] Фущич В.И. О пуакаре–, галилеево–инвариантных нелинейных уравнениях и методах их решений// Теоретико–груповые исследования уравнений математической физики.— Киев, Ин–т математики, 1985.— С.4–19.

[33] Фущич В.И. О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений// Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, N 1, С.116–123

[34] Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики// Теоретико–алгебраические исследования в математической физике.— Киев, Ин–т математики, 1981.— С.6–28.

[35] Фущич В.И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики// Укр. мат. журн.— 1991.— N 11.— С.1456–1470

[36] Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгрупповой анализ групп Галлилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений.— Киев: Наукова думка, 1991.— 304с.

[37] Фущич В.И., Егорченко И.А. О симметрийных свойствах комплекснозначных нелинейных волновых уравнений// Докл. АН СССР.— 1988.— **298**, N 7.— С.347–351.

[38] Фущич В.И., Жданов Р.З. Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения.— Киев, Наукова думка, 1992.— 287с.

[39] Фущич В.И.,Жданов Р.З.,Ревенко И.В. Общие решение нелинейного волнового уравнения и уравнения эйконала// Укр. мат. журн.— 1991.— N 11, С.1471–1487

[40] Фущич В.И., Миронюк П.И. Условная симметрия и точные решения уравнения нелинейной акустики// Докл. АН УССР.— 1991.— N 6.— С.23–29.

[41] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики.— М.: Наука, 1990.— 400с.

[42] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвела.— Киев: Наукова думка, 1983.— 199с.

[43] Фущич В.И., Ревенко И.В., Жданов Р.З. Несимметрийный подход к построению точных решений одного нелинейного волнового уравнения// Докл. АН СССР.— 1991.— N 7.— С.15–19.

[44] Фущич В.И., Репета В.К., Серов Н.И. Условная симметрия, редукция и точные решения нелинейного волнового уравнения// Докл. АН УССР.— 1991.— N 5.— С.29–36.

[45] Фущич В.И., Селехман Н.А. Интегро–дифференциальные уравнения, иварнантные относительно групп Галилея, Пуанкаре, Шредиенгера и конформной группы// Докл. АН УССР.— 1983.— Сер.А, **5**.— С.21–24.

[46] Фущич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности// Докл. АН УССР.— 1990.— N 7.— С.24–27.

[47] Фущич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность нелинейного волнового уравнения// Укр. мат. журн.— 1991.— **43**, N 3.— С.394–399.

[48] Фущич В.И., Серов Н.И. Амеров Т.К. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности// Докл. АН УССР.— 1990.— А. N 11.— С.15–18.

[49] Фущич В.И., Серов Н.И., Чопик Н.И. Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности// Докл. АН УССР.— 1988.— Сер. А., N 9.— С.17–20.

[50] Фущич В.І., Чопик В.І. Умовна симетрія і нові зображення алгебри Галілея для нелінійних параболічних рівнянь// Укр. мат. журн.— 1993.— **45**, N 10, С.1433–1443

[51] Фущич В.И., Чопик В.И. Условная инвариантность нелинейного уравнения Шредингера// Докл. АН УССР.— 1990.— сер."А", N 4, С.30-33.

[52] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики.— Киев: Наукова думка, 1989.— 336с.

[53] Basarab-Horwath P. A symmetry connection between hyperbolic and parabolic equations// J. Nonlin. Math. Phys.— 1996, **3**, N 3-4.— 311–318.

[54] Basarab-Horwath P., Barannyk L.F. and Fushchych W.I. Exact solutions of the wave equation by reduction to the heat equation// J.Phys.A: Math.Gen.— 1995.— **28**.— P.5291–5304.

[55] Basarab-Horwath P., Fushchych W., Roman O. On a new conformal symmetry for a complex scalar field// Phys.Lett.A.— 1997.— **226**.— P.150–154.

[56] Bateman H. The transformations of electrodynamical equations// Proc. London Math. Soc.— 1909.— **8**.— P.223–264.

[57] Bluman G.W., Cole I.D. Similarity methods for differential equations.— Berlin: Springer, 1974.— 332p.

[58] Bluman G.W., Kumei S. Symmetries and differential equations.— New York: Springer–Verlag, 1989.

[59] Bollini C.G., Giambia J.J. Arbitrary powers of d'Alembertians and the Huygens' principle// J.Math. Phys.— 1993.— **34**, N 2.— P.610–621.

[60] L. de Broglie, Nonlinear wave Mechanics.— Elsevier Publishing Company, 1960.— 340p.

[61] Euler N., Euler M. Madelung Representation for Complex Nonlinear D'Alembert Equations in n-Dimensional Minkowski Space// J. Nonlin. Math. Phys.— 1995.— **2**, N 3–4.— P.292–300.

[62] Fushchych W.I., Barannyk A.F. Maximal subalgebras of the rank $n-1$ of the algebra $AP(1,n)$ and reduction of nonlinear wave equations// Ukr. Math.J.— 1990.— **42**, N 11.— P.1250–1256; N 12.— P.1693–1700.

[63] Fushchych W.I. and Cherniha R.M. Galilei-invariant nonlinear equations of Schrödinger-type and their exact solutions II.// Ukrain. Math. J.— 1989.— **41**, P.1687–1694.

[64] Fushchych W.I. and Nikitin A.G. Symmetry of equation of quantum mechanics.— New York: Allerton Press, 1994.— 460p.

[65] Fushchych W.I. and Nikitin A.G. Symmetries of Maxvell's equations.— Dordrecht: D.Riedel Publishing Company, 1987.— 214p.

[66] Fushchych W.I., Roman O.V., Zhdanov R.Z. Symmetry and some exact solutions of nonlinear polywave equations// Europhysics Letters.— 1995.— **31**, N 2.— P.75–79.

[67] Fushchych W.I., Roman O.V., Zhdanov R.Z. Symmetry reduction and some exact solutions of nonlinear biwave equations// Reports on Math. Phys.— 1996.— **37**, N 2.— P.267-281.

[68] Fushchych W.I., Serov N.I. The symmetry and some exact solutions of the nolinear many–dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations // J. Phys. A: Math. Gen.— 1983.— **16**.— P.3645–3658.

[69] Fushchych W., Shtelen W. On approximate symmetry and approximate solutions of nonlinear wave equations with a small parameter// J.Phys.A: Math.Gen.— 1989.— **22**. N 16.— P.887–890.

[70] Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I. Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics.— Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.— 430p.

[71] Fushchych W. and Symenoh Z. High–Order Equations of Motion in Quantum Mechanics and Galilean Relativity// J. Phys. A: Math. Gen.— 1997.— **30**, N 6.— P.L131–L135.

[72] Fushchych W.I., Tsifra I.M. On reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry// J.Phys.A.— 1987.— **20**, N 2.— P.L45–47.

[73] Fushchych W. Tsyfra I. and Boyko V. Nonlinear representations for Poincaré and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic fields// J. Nonlin. Math. Phys.— 1994.— **1**, N 2. P.210–221.

[74] Fushchych W.I. and Yegorchenko I.A. The symmetry and exact solutions of the non-linear d'Alembert equations for complex fields// J.Phys. A: Math. Gen.— 1989.— **22**.— P.2643–2652.

[75] Fushchych W., Zhdanov R. and Lahno V. On linear and nonlinear representations of the generalized Poincaré groups in the class of Lie vector fields// J. Nonlin. Math. Phys.— 1994.— **1**, N 3.— P.295–308.

[76] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. and Revenko I.V. General solution of the nonlinear wave equation and of the eikonal equation// Proc. Acad. of Sci. Ukraine.— 1991.— N 10A.— P.29–31.

[77] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. and Yehorchenko I.A. On the reduction of the nonlinear multi-dimensional wave equations and compatibility of the d'Alembert-Hamilton system// J. Math. Anal. Appl.— 1991.— **161**, N 2.— P.352–360.

[78] Guéret Ph., Vigier J.-P. Relativistic wave equations with quantum potential nonlinearity// Lett. Nuovo Cimento, 1983.— **38**.— P.125–128.

[79] Guerra F., Pusterla M. A nonlinear Schrödinger equation and its relativistic generalization from basik principles// Lett. Nuovo Cimento.— 1982.— **34**.— P.351–356.

[80] Lie S., Über Differentialinvarianten// Math. Ann.— 1984.— **24**, N 1.— P.52–89.

[81] Lie S.,Engel F. Theorie der Transformationsgruppen// Bd. 1–3.— Leipzig: Teubner.— 1888, 1990, 1893.— 623s., 554s., 830s.

[82] Liu Q.N., Fokas A.S. Exact interaction of solitary waves for certain nonintegrable equations// J. Math. Phys.— 1995.— **37**, N 1.— P.324–345.

[83] Morgan A.G.A. The reduction by one of the number ofidependent variables in some systems of partial differential equations// Quart.J.Math. Oxford.— 1952.— **3**, N 12.— P.250—259.

[84] Olver P. Applications of Lie Groups to Differential Equations.— New York: Springer, 1986.— 497p.

[85] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. 1. General method and the poincare group// J. Math. Phys.— 1975.— **16**, N 8.— P.1597–1624.

[86] Rideau G., Winternitz P. Nonlinear equations invariant under the Poincare, similitude and conformal groups in two–dimensional spase–time.— J. Math. Phys.— 1990.— **31**.— P.1095–1105.

[87] Roman O. Symmetry Analysis of the Multidimensional Polywave Equation// J. Nonlin. Math. Phys.— 1996.— **3**, N 3-4.— P.435–440.

[88] Winternitz P., Grundland A.M. and Tuszynski J.A. Exact solutions of the multidimensional classical Φ^6 field equations obtained by symmetry reduction// J. Math. Phys.— 1987.— **28**, N 9.— P.2194–2212.

[89] Yegorchenko I. Second-Order Differential Invariants for Some Extantions of the Poincaré Group and Invariant Equations// J. Nonlin. Math. Phys.— 1996.— **3**, N 1–2.— P.186–195.

[90] Zhdanov R.Z. Compatibility criteria and general solutions of the nonlinear d'Alembert–eikonal system// Reports on Math. Phys.— 1995.— **36**, N 213.— P.483–487.

[91] Zhdanov R.Z. Conditional Lie–Bäclund symmetry and reduction of evolution equations// J. Phys. A: Math. Gen.— 1995.— **28**, N 13.— P.3841–3850.

[92] Zhdanov R.Z., Fushchych W.I., Marko P.V. New scale–invariant nonlinear differential equations for a complex scalar field// Physika D.— 1996.— **95**.— P.158—162.