МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УКРАИНСКОЙ ССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ имени А.М.ГОРЬКОГО

САЛОГУБ Виктор Анатольевич

УРАВНЕНИЯ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ГАЛИЛЕЯ

Диссертация на соискание
ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
В.И.Фущич

КИЕВ 1977

Оглавление

Введение

Уже почти полвека ведутся интенсивные исследования, посвященные релятивистским уравнениям для частиц с произвольным спином. Решению этой проблемы посвящено огромное количество работ советских и зарубежных авторов. Такой большой поток статей на эту тему свидетельствуют о том, что исследования по уравнениям для частиц с высокими спинами, в связи с экспериментальным обнаружением резонансов с $s = 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{11}{2}$ вышли далеко за рамки чисто академического интереса и остаются актуальными по сей день.

Однако есть все основания считать, что до сих пор не найдено удовлетворительных уравнений движения для релятивистских частиц с $S > \frac{1}{2}$. Все известные в настоящее время релятивистские уравнения движения для невзаимодействующих частиц, за исключением уравнения Дирака [1], либо приводят к большим трудностям при обобщении на случай движения заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле, либо не могут служить основой для построения квантовой теории поля.

Явно ковариантные уравнения симметричны по пространственным и временной координатам. При этом волновая функция для частицы и античастицы с фиксированной массой m и спином s с необходимостью имеет компонент больше, чем число возможных состояний /равное $2(2s+1)$/. Для устранения "лишних" /нефизических/ компонент на волновую функцию приходится накладывать дополнительные условия.

Наличие нефизических компонетов и необходимость в дополнительных условиях, зависящих от импульса частицы, приводит к серьезным трудностям при обобщении явно ковариантных уравнений на случай движения заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле. Так все известные явно ковариантные уравнения первого порядка по $\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}$ для частиц с $S > 1$ приводят к сверхсветовым скоростям, если рассматривать движение заряженной частицы в произвольном внешнем поле [2].

Системы уравнений Дирака – Фирца – Паули, Баргмана – Вигнера, де Бройля становятся несовместимыми при замене $p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu$ где A_μ – вектор-потенциал электромагнитного поля

Уравнения Прока и Кеммера-Деффина для частиц со спином и аномальным магнитным моментом приводят к комплексным значениям энергии [5] – [9].

Большие трудности возникает и при вторичном квантовании явно ковариантных уравнений с "лишними" компонентами [10] – [12].

Известные в настоящее время релятивистские уравнения в форме Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x},t) = \mathcal{H} \Psi(\vec{x},t) \qquad (1)$$

предложенные в работах [13] – [18], наряду с их достоинствами /отсутствие "лишних" компонент, каноническая форма уравнений/, имеют тот недостаток, что гамильтониан $\mathcal{H}$ в общем случае является интегро-дифференциальным оператором. Это затрудняет обобщение уравнения /1/ на случай движения частицы во внешнем электромагнитном поле. Пока что такое обобщение осуществлено /в предположении, что импульсы частиц малы по сравнению с их энергией покоя/ [19], [20] лишь для уравнений/ предложенных в [18]. Такое предположение на самом деле означает, что рассматриваются частицы с невысокими /нерелятивистскими/ энергиями. Обобщая таким образом релятивистские уравнение на случай движения частицы во внешнем электромагнитном поле, мы, по существу, получаем описание движения нерелятивистской частицы. В связи с этим естественно возникает вопрос: возможно ли последовательно описать движение заряженной частицы в рамках нерелятивистской квантовой механики? Ясно, что такого описания получить нельзя, если уравнение каким-то образом не учитывает спин частицы. Известное нерелятивистское уравнение Шредингера не дает полного описания, так как не несет никакой информации о спине частицы. Поэтому для описания движения электрона во внешнем электромагнитном поле Паули [21] в 1927 году было предложено уравнение

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left\{ \frac{\vec{\pi}^2}{2m} + e\varphi - \frac{e\hbar}{2mc}(\vec{\sigma}\vec{H}) \right\}\varphi \qquad (2)$$

гамильтониан которого отличается от гамильтониана в уравнении Шредингера лишь наличием слагаемого

$$-\frac{e\hbar}{2mc}(\vec{\sigma}\vec{H})$$

Выражение /3/ можно интерпретировать как энергию взаимодействия с магнитным полем магнитного момента частицы, оператор которого имеет вид

$$\hat{\mu} = \mu_0 \vec{\sigma},$$

где $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$ - магнетон Бора.

Этот магнитный момент принято называть спиновым магнитным моментом, так как он имеется лишь у частиц, обладающих спином.

Заметим, что внутренний магнитный момент электрона был введен Паули чисто феноменологически. Он не следует из свободного уравнения Шредингера при обобщении его на случай движения частицы во внешнем электромагнитном поле посредством обычной замены $p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu$, как это имеет место в релятивистской теории для уравнения Дирака.

По этим причинам различные спиновые эффекты, в том числе и внутренний магнитный момент, считались чисто релятивистскими.

Сравнительно недавно в [22] - [24] было показано, что спин частицы в нерелятивистской квантовой механике можно последовательно ввести, если осуществить центральное расширение группы Галилея. В связи с этим результатом естественно возникла задача о нахождении уравнений движения инвариантных относительно расширенной группы Галилея $\widetilde{G}$. Такая задача в разных подходах рассматривалась рядом авторов [25] - [28] .

Основное достоинство уравнений, полученных в [25] - [28], заключается в том, что при обобщении свободного уравнения на случай движения частицы во внешнем электромагнитном поле внутренний магнитный момент появляется так же логично, как и в релятивистском уравнении Дирака. Уравнения Легена-Герли /Л-Г/ пригодны для описания невзаимодействующих нерелятивистских частиц произвольного спина $S \neq 0$, легко обобщаются на случай движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. При этом не возникает трудностей, присущих релятивистским уравнениям для частиц с $S > \frac{1}{2}$.

Однако, наряду с такими достоинствами, следует отметить и ряд недостатков, свойственных известным в настоящее время нерелятивистским уравнениям.

Среди них, в первую очередь, надо указать на тот, что, исходя из этих уравнений, нельзя описать спиновые эффекты порядка $\sim\left(\frac{v}{c}\right)^2$ во внешнем электромагнитном поле, т.е. спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействие заряженной частицы с полем. Некоторые авторы [27] считают, что эти эффекты в принципе нельзя описать в рамках нерелятивистской квантовой механики.

Кроме того, уравнения, полученные в [25] , [26] описывают частицу со спином $S = \frac{1}{2}$, и остается открытым основной вопрос: как обобщить их на случай произвольного спина? Уравнения, предлагаемые в [25] , хотя и приводят к правильному магнитному моменту, но не являются инвариантными относительно группы Галилея. Они инвариантны только относительно ее подгруппы, которую авторы называют "статической", и которая не включает чисто галилеевского преобразования.

Более детально остановимся на характеристике уравнений X-Γ [28], частным случаем которых являются уравнение Леви-Леблонда [27].

Уравнение X-Γ – дифференциальное уравнение первого порядка по $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ вида

$$[\beta_\mu p_\mu + (1-\beta_0)2m]\Psi(\vec{x},t)=0, \qquad /5/$$

$p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}$, $p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}$, β_μ числовые матрицы размерности $(6s+1)\times(6s+1)$, явный вид которых мы выпишем ниже. Уравнение /5/ инвариантно относительно группы Галилея G. При преобразованиях Галилея

$$\begin{aligned} \vec{x} \to \vec{x}\,' &= R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{a} \\ t \to t' &= t + b \end{aligned} \qquad /6/$$

волновая функция $\Psi(\vec{x},t)$ преобразуется по правилу [28]

$$\Psi(\vec{x},t) \to \Psi'(\vec{x}\,',t') = e^{if(\vec{x},t)}\mathcal{D}(R,\vec{v})\Psi(\vec{x},t), \qquad /7/$$

где

$$f(\vec{x},t) = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}t + m\vec{v}R\vec{x} + c$$

– фазовый множитель, $\mathcal{D}(R,\vec{v})$ – матрица размерности $(6s+1)\times(6s+1)$, зависящая лишь от параметров преобразования. Она неэрмитова в обычно принятом в квантовой механике скалярном произведении

$$(\Psi_1,\Psi_2) = \int d^3x\,\Psi_1^+(\vec{x},t)\Psi_2(\vec{x},t) \qquad /8/$$

R - постоянная ортогональная матрица, описывающая пространственные вращения, $\vec{V}$ - постоянный вектор, отвечающий собственно преобразованию Галилея, $\vec{a}$ - постоянный вектор сдвига начала координат в пространстве, b - постоянная, характеризующая сдвиг начала отсчета времени, c - постоянная интегрирования.

Физическая интерпретация решений уравнения /5/ вызывает определенные трудности, поскольку волновая функция $\Psi(\vec{x},t)$ имеет компонент /из которых 4 - "лишние"/ и преобразуется по неунитарному относительно скалярного произведения /8/ представлению группы Галилея. Генераторы этого представления неэрмитовы в скалярном произведении /8/. Скалярное произведение, в котором они были бы эрмитовыми, авторами [28] не построено. Среди недостатков уравнения /Х-Г/ следует отметить и то, что оператор энергии явно не выделен. Гамильтонова форма уравнений необходима при решении задач о стационарных состояниях квантовых систем, поэтому полезно было бы получить уравнения инвариантные относительно группы Галилея в гамильтоновой форме.

В связи с изложенным выше, естественно, возникает вопрос: существуют ли нерелятивистские уравнения свободные от перечисленных недостатков? Результаты, полученные в диссертации, позволяют ответить на этот вопрос положительно, если кроме инвариантности относительно расширенной группы Галилея $\tilde{G}$ потребовать, чтобы уравнения были инвариантны и относительно операции сильного отражения $\Theta = CPT$, которая включает инверсию времени T, отражение пространственных координат P и зарядовое сопряжение C. Это эквивалентно требованию, чтобы оператор энергии, так же как и в релятивистской теории, имел как положительные, так и отрицательные собственные значения.

Изложенные выше факты позволяют сформулировать следующие задачи, которые нам кажутся весьма актуальными.

1. Построение нерелятивистских уравнений без "лишних" компонент в форме Шредингера /1/ для частиц и античастиц с произвольным фиксированным спином и массой. Эти уравнения должны быть определены в пространстве $2(2s+1)$ - компонентных функций с обычным принятым в квантовой механике скалярным произведением, допускать обобщение на случай движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле и учитывать спиновые эффекты порядка $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ включительно. Иными словами эти уравнения должны быть свободными от недостатков, присущих релятивистским уравнениям для частиц с $s \geqslant 1$ и уравнениям Х-Г.

2. Изучение движения заряженной нерелятивистской частицы, описываемой построенными нами уравнениями, во внешних постоянных полях.

3. Исследование нерелятивистских уравнений Хагена-Герли, включающее:

а/ построение инвариантного скалярного произведения, в котором генераторы группы $\tilde{G}$, представление которых реализуется на решениях уравнения Х-Г, были бы эрмитовыми;

б/ преобразование уравнения Х-Г к гамильтоновой форме;

в/ обобщение уравнений Х-Г в гамильтоновой форме на случай движения заряженной нерелятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле.

Решению этих задач и посвящена настоящая диссертация.

При решении первой задачи используется единый подход, который мы называем алгебраическим или неспинорным. Суть его заключается в том, что по заданным операторам P_a, J_{ab}, G_a используя коммутационные соотношения алгебры $\mathcal{A}_u$ группы $\tilde{G}$ находится неизвестный гамильтониан $P_0 = \mathcal{H}$. Этот метод

тод использовался рядом авторов [14]-[18], [29] при построении релятивистских уравнений движения для частиц с произвольным спином.

В диссертации получены следующие результаты.

1. Исходя из определенного представления алгебры Ли расширенной группы Галилея $\tilde{G}$, найдены все возможные /с точностью до унитарной эквивалентности/ нерелятивистские уравнения вида /1/ без "лишних" компонент, описывающие частицу с произвольным спином s и массой m. Эти уравнения инвариантны относительно операции сильного отражения Θ и удовлетворяют всем требованиям, перечисленным выше.

2. Используя найденные уравнения, построено уравнение непрерывности, выписаны выражения для плотности вероятности и вектора плотности тока вероятности.

3. Найден унитарный оператор $\mathcal{U}$, преобразующий гамильтониан $\mathcal{H}$ к диагональному виду. Определены операторы динамических переменных.

4. Свободные уравнения обобщены на случай движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Показано, что такое обобщение позволяет описать, кроме дипольного, спин-орбитальное, дарвиновское и квадрупольное взаимодействие заряженной нерелятивистской частицы спина $s \leq \frac{3}{2}$ с внешним электромагнитным полем.

5. Найден изометрический оператор V, с помощью которого уравнения /5/ преобразованы к такому виду, что волновая функция имеет лишь $(2s+1)$ отличных от нуля компонент. Построено инвариантное скалярное произведение, где генераторы группы $\tilde{G}$, представление которых реализуется на решениях уравнения Х-Г, эрмитовы.

6. Путем обобщения уравнения Леви-Леблонда [27], получены

новые нерелятивистские дифференциальные уравнения второго порядка для $2(2s+1)$ - компонентной волновой функции, описывающие движение нерелятивистской частицы произвольного спина.

Такое же обобщение осуществлено и для релятивистского уравнения Дирака. При этом, получены релятивистские уравнения вида /1/, где $\Psi(t,\vec{x})$ — $2(2s+1)$ - компонентная волновая функция, а гамильтониан $\mathcal{H}$ - дифференциальный оператор второго порядка. Новые нерелятивистские и релятивистские уравнения, построенные путем обобщения, применены для описания движения заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле.

7. Установлена гамильтонова форма уравнений Х-Г и релятивистских уравнений Герли.

8. На основе полученных уравнений без "лишних" компонент точно решена задача о движении заряженной нерелятивистской частицы со спином $s=\frac{1}{2}$ и $s=1$ во внешнем постоянном однородном магнитном поле.

Исследовано движение электрона в кулоновском поле ядра. В первом приближении вычислены поправки к энергетическим состояниям атома водорода, обусловленные спиновыми эффектами.

Кратко опишем расположение материала. В I главе найдены уравнения движения без "лишних" компонент, инвариантные относительно расширенной группы Галилея $\tilde{G}$ и операции сильного отражения Θ.

В §1 дано определение исходного представления алгебры $\mathcal{A}u$ группы $\tilde{G}$ и операции сильного отражения Θ. Исходя из коммутационных соотношений алгебры $\mathcal{A}u$ группы $\tilde{G}$, найден явный вид оператора Θ и условия, которым должен удовлетворять гамильтониан $P_0 = \mathcal{H}$.

В §2 дается определение операторов ортогонального проектирования Λ_z. Выписан их явный вид для спинов $s=\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$

и соотношения, необходимые в дальнейшем. В §3 найдены все возможные /с точностью до преобразований эквивалентности, не зависящих от импульсов и координат/ гамильтонианы $\mathcal{H}$ для произвольных $s \neq 0$. В §4 осуществлена диагонализация операторов $\mathcal{H}$ с помощью унитарного оператора $\mathcal{U}$. В §5 построено уравнение непрерывности, выписаны выражения для плотности вероятности и вектора плотности тока вероятности. В §6 определены операторы динамических переменных: координаты, спина, скорости. §7 посвящен обобщению полученных уравнений на случай движения заряженной нерелятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле.

Вторая глава в основном посвящена изучению уравнений Хагена-Герли. Помимо того, в ней попутно получены некоторые результаты, касающиеся релятивистских уравнений движения.

В §8 уравнения Х-Г преобразованы к такому виду, что волновая функция в новом представлении имеет лишь $(2s+1)$ отличных от нуля компонент. Построено инвариантное скалярное произведение, где генераторы группы $\widetilde{G}$, представление которых реализуется на решениях уравнения /5/, эрмитовы. Путем обобщения уравнения Леви-Леблонда получены новые нерелятивистские уравнения. Они применены для описания заряженной частицы произвольного спина $s \neq 0$ во внешнем электромагнитном поле. В §9 установлена гамильтонова форма уравнений Х-Г и новых нерелятивистских уравнений, а в §10 уравнения в гамильтоновой форме обобщены на случай движения заряженной нерелятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле.

В §11 построены релятивистские уравнения в форме Фешбаха-Виллара...

В §12 к гамильтоновой форме приведены релятивистские уравнения Герли.

В главе II на основании уравнений, полученных в гл. I, изучено движение нерелятивистской частицы во внешних постоянных полях.

§13 посвящен исследованию движения заряженной нерелятивистской частицы со спином $S = \frac{1}{2}$ во внешнем постоянном однородном магнитном поле. При этом определены собственные значения и собственные функции оператора энергии $\mathcal{H}(\vec{x})$.

В §14 аналогичная задача решена для частицы со спином $S=1$
В §15 изучено движение нерелятивистского электрона в кулоновском поле ядра. В первом приближении вычислены поправки к энергетическим состояниям атома водорода, обусловленные спиновыми эффектами.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [70]-[73].

В диссертации использованы следующие обозначения:

$$[A,B] = AB - BA\ ,\ [A,B]_+ = AB + BA$$

Операции эрмитова и комплексного сопряжения обозначаются значками $\dagger$ и $*$ соответственно. Индексы, обозначенные греческими буквами $\mu, \nu, \rho, \ldots$, пробегают значения 0,1,2,3, а обозначенные латинскими а,в,с,..., принимают значения 1,2,3.

Пользуясь случаем выразить свою глубокую благодарность моему научному руководителю доктору физико-математических наук Вильгельму Ильичу Фущичу за постоянное внимание и всестороннюю помощь при выполнении данной работы. Я искренне благодарен кандидату физико-математических наук Анатолию Глебовичу Никитину за сотрудничество в получении некоторых вошедших в диссертацию результатов, а также Б.Н.Сегеде и С.П.Онуфрийчуку за по-

лезные обсуждения.

Глава I

Дифференциальные уравнения движения второго порядка для частиц со спином

В этой главе получены уравнения движения для свободной частицы с массой m и спином s в форме Шредингера, инвариантные относительно расширенной группы Галилея $\tilde{G}$ и операции сильного отражения Θ. Найден унитарный оператор $\mathcal{U}$, преобразующий гамильтониан к диагональному виду. Построено уравнение непрерывности, выписаны выражения для плотности вероятности и вектора плотности тока вероятности. Определены операторы динамических переменных.

Свободные уравнения обобщены на случай движения заряженной нерелятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле. Показано, что такое обобщение позволяет описать, кроме дипольного, спин-орбитальное, дарвиновское и квадрупольное взаимодействия заряженной нерелятивистской частицы спина $s \leq \frac{3}{2}$ с внешним электромагнитным полем.

Число компонент волновой функции в найденных уравнениях равно количеству степеней свободы описываемой системы.

§1. Постановка задачи

1.1 Уравнения, описывающие движение частицы со спином s и массой m, будем искать в виде

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t) = \mathcal{H}(\vec{p},\vec{S})\Psi(\vec{x},t), \qquad /1.1/$$

где $\mathcal{H}(\vec{p},\vec{S})$ - пока что неизвестная операторная функция /гамильтониан/, зависящая от операторов спина S и импульса $p_a = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_a}$, $\Psi(\vec{x},t)$ - $2(2s+1)$ -

- компонентная волновая функция.

Для произвольного спина s постулируем такой явный вид генераторов P_μ, J_{ab}, G_a расширенной группы Галилея

$$P_0 = \mathcal{H}, \; P_a = p_a = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_a}; \qquad /1.2а/$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}; \qquad /1.2б/$$

$$G_a = t p_a - \rho_3 m x_a + \lambda_a, \qquad /1.2в/$$

где

$\rho_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ - центральный элемент расширенной алгебры Ли группы $\widetilde{G}$, I - $(2s+1)$ - мерные единичные матрицы, $\lambda_a = \lambda_a(S_a, p_a)$ - в общем случае отличный от нуля оператор, такой, что генераторы /1.2/ удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли расширенной группы Галилея $\widetilde{G}$.

Матрицы S_{ab} имеют такую структуру

$$S_{ab} = S_c = \begin{pmatrix} \hat{S}_c & 0 \\ 0 & \hat{S}_c \end{pmatrix} \qquad /a,b,c/ \text{ - цикл } /1,2,3/. \quad /1.3/$$

$\hat{S}_c$ - генераторы неприводимого представления $D(s)$ группы $O(3)$ удовлетворяющие соотношениям

$$[\hat{S}_a, \hat{S}_b] = i\hat{S}_c, \qquad /1.4а/$$

$$\sum_{a=1}^{3} \hat{S}_a^2 = s(s+1). \qquad /1.4б/$$

Чтобы дать $\Psi(t,\vec{x})$ обычную квантовомеханическую интерпретацию, потребуем эрмитовости генераторов /1.2/ в таком скалярном произведении

$$(\Psi_1,\Psi_2)=\int d^3x\,\Psi_1^{\dagger}(t,\vec{x})\Psi_2(t,\vec{x}). \qquad /1.5/$$

Уравнение /1.1/ инвариантно относительно расширенной группы Галилея $\widetilde{G}$, если генераторы /1.2/ удовлетворяют коммутационным соотношениям [30], [31] :

$$[P_a,P_b]=0;\ [P_a,J_{bc}]=i(\delta_{ab}P_c-\delta_{ac}P_b); \qquad /1.6а/$$

$$[J_{ab},J_{dc}]=i(\delta_{ac}J_{bd}+\delta_{bd}J_{ac}-\delta_{ad}J_{bc}-\delta_{bc}J_{ad}); \qquad /1.6б/$$

$$[\mathcal{H},P_a]=[P_0,P_a]=0,\ [\mathcal{H},J_{ab}]=[P_0,J_{ab}]=0; \qquad /1.6в/$$

$$[P_a,G_b]=i\rho_3 m\,\delta_{ab}; \qquad /1.6г/$$

$$[\mathcal{H},G_a]=[P_0,G_a]=iP_a; \qquad /1.6д/$$

$$[J_{ab},G_c]=i(\delta_{ac}G_b-\delta_{bc}G_a); \qquad /1.6е/$$

$$[G_a,G_b]=0. \qquad /1.6ж/$$

Действительно, из явного вида операторов /1.2/ следует, что имеют место такие тождества

$$[i\frac{\partial}{\partial t}, P_a] = [i\frac{\partial}{\partial t}, J_{ab}] = 0, \qquad /1.7а/$$

$$[i\frac{\partial}{\partial t}, G_a] = i P_a \qquad /1.7б/$$

Сравнивая /1.6в/, /1.6д/ и /1.7а/, /1.7б/, видим, что выполняется такое соотношение

$$[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}, Q]\Psi(t,\vec{x}) = 0, \qquad /1.8/$$

где Q - любой из генераторов /1.2/ расширенной группы Галилея $\widetilde{G}$, а $\Psi(t,\vec{x})$ - волновая функция, удовлетворяющая уравнению /1.1/.

Но если выполняется /1.8/, то будет выполняться и такое соотношение

$$[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}, \exp(i\omega Q)]\Psi(t,\vec{x}) = 0, \qquad /1.9/$$

где ω - параметр преобразования из группы $\widetilde{G}$.

Из /1.9/ следует инвариантность уравнения /1.1/ относительно любых конечных преобразований расширенной группы Галилея $\widetilde{G}$. Используя коммутационные соотношения /1.6а - 1.6ж/, нетрудно показать, что величины

$$M = \rho_3 m, \qquad /1.10а/$$

$$W = \rho_3 \mathcal{H} - \frac{\vec{P}^2}{2m}, \qquad /1.10б/$$

$$\vec{S}^2 = (\vec{J} + \frac{1}{m}\rho_3 \vec{G}\times\vec{P})^2 \qquad /1.10в/$$

коммутируют со всеми генераторами /1.2а - 1.2в/ расширенной группы Галилея $\tilde{G}$. Следовательно, они являются инвариантами этой группы.

Из /1.10б/ видим, что

$$\mathcal{H}^2 = \left(W + \frac{\vec{P}^2}{2m} \right)^2 . \qquad /1.11/$$

В дальнейшем /1.11/ будем использовать как уравнение для искомого гамильтониана, положив для соответствия с релятивистской теорией $W = mc^2$.

На множестве решений уравнения /1.1/ определим операцию $\Theta = CPT$, которая включает инверсию времени T , отражение пространственных координат P и зарядовое сопряжение C

$$\Theta \Psi(\vec{x}, t) = \theta \Psi(-\vec{x}, -t), \qquad /1.12/$$

где θ - некоторая числовая унитарная матрица, явный вид которой найдем ниже.

Операторы P_μ, J_{ab}, G_a и Θ должны удовлетворять таким перестановочным соотношениям

$$\Theta J_{ab} = J_{ab} \Theta ; \qquad /1.13а/$$

$$\Theta G_a = G_a \Theta ; \qquad /1.13б/$$

$$\Theta P_a = - P_a \Theta ; \qquad /1.13в/$$

$$\Theta P_0 = - P_0 \Theta ; \qquad /1.13г/$$

$$\Theta^2 \sim 1 \qquad /1.13д/$$

Знак $\sim$ определяет равенство с точностью до фазового множителя, например

$$\Theta^2 \sim 1 \rightarrow \Theta^2 \Psi(t,\vec{x}) = e^{i\varphi} \Psi(t,\vec{x}). \qquad /1.14/$$

Потребуем, чтобы уравнение /1.1/ было CPT инвариантным. При этом к алгебре /1.6/ прибавятся соотношения /1.13а - 1.13г/.

Итак, задача о нахождении всех уравнений, инвариантных относительно расширенной группы Галилея $\widetilde{G}$ и операции сильного отражения Θ, сводится к отысканию операторов $\mathcal{H}$, удовлетворяющих соотношениям /1.6/, /1.11/, /1.13/.

В дальнейшем мы ограничимся лишь дифференциальными операторами $\mathcal{H}$, эрмитовыми в скалярном произведении /1.5/.

1.2 Явный вид матрицы θ.

Найдем явный вид матрицы θ, входящей в определение /1.12/ оператора сильного отражения Θ. С этой целью докажем такое утверждение.

<u>Лемма 1.1.</u> Общий вид матрицы θ, входящей в определение оператора Θ /1.12/, удовлетворяющего соотношениям /1.13а/, /1.13б/, /1.13д/, с точностью до унитарной эквивалентности задается формулой

$$\theta = \rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \qquad /1.15/$$

где $I - (2s+1)$ - мерные единичные матрицы.

<u>Доказательство</u>

Из формул /1.2б/, /1.2в/, /1.13а/, /1.13б/ следует, что матрица θ должна удовлетворять соотношениям

$$\rho_3 \theta = -\theta \rho_3 , \qquad /1.16а/$$

$$\theta S_{ab} = S_{ab} \theta . \qquad /1.16б/$$

Для анализа соотношений /1.16а/ и /1.16б/ представим θ в виде

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{pmatrix} , \qquad /1.17/$$

где θ_{ab} - неизвестные матрицы размерности $/2s+1/ \times /2s+1/$. Используя явный вид матрицы ρ_3 и общий вид θ /1.17/, убеждаемся, что /1.16а/ имеет место, если в /1.17/ положить $\theta_{11}=\theta_{22}=0$, т.е.

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta_{12} \\ \theta_{21} & 0 \end{pmatrix} \qquad /1.18/$$

Подставив /1.3/ и /1.18/ в /1.16б/, получаем

$$\begin{pmatrix} 0 & \hat{S}_{ab} \theta_{12} \\ \hat{S}_{ab} \theta_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \theta_{12} \hat{S}_{ab} \\ \theta_{21} \hat{S}_{ab} & 0 \end{pmatrix} \qquad /1.19/$$

Из /1.19/ видно, что θ_{12} и θ_{21} удовлетворяют условиям

$$\hat{S}_{ab} \theta_{12} = \theta_{12} \hat{S}_{ab} , \qquad /1.20а/$$

$$\hat{S}_{ab} \theta_{21} = \theta_{21} \hat{S}_{ab} . \qquad /1.20б/$$

Но $\hat{S}_c = \hat{S}_{ab}$ - генераторы неприводимого представления $\mathcal{D}(s)$ группы $O(3)$. Согласно лемме Шура из /1.20а/, /1.20б/ следует, что θ_{12} и θ_{21} кратны единичной матрице

$$\theta_{12} = k_{12} I\,, \quad \theta_{21} = k_{21} I, \qquad /1.21/$$

где k_{12} и k_{21} - числа, а I - /2s + 1/ - мерная единичная матрица.

Учитывая /1.21/, матрицу /1.18/ можно представить в виде

$$\theta = c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2 \qquad /1.22/$$

где

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}, \qquad /1.23/$$

а c_1 и c_2 связаны с k_{12} и k_{21} посредством таких формул

$$k_{12} = c_1 - i c_2\,, \quad k_{21} = c_1 + i c_2 \qquad /1.24/$$

Потребуем, чтобы выполнялось /1.13д/. Согласно /1.14/ это значит, что матрица θ должна удовлетворять условию

$$\theta^2 = e^{i\varphi} \qquad /1.25/$$

Подставив /1.22/ в /1.25/ и учитывая антикоммутативность матриц, получаем

$$C_1^2 + C_2^2 = e^{i\varphi} \qquad /1.26/$$

Величина фазового множителя не влияет на коммутационные соотношения /1.13/, поэтому, не умаляя общности , можно положить $e^{i\varphi}=1$.

Тогда из /1.26/ имеем

$$C_1^2 + C_2^2 = 1 \qquad /1.27/$$

Покажем, что C_1 и C_2 действительные числа. По определению матрица θ унитарна, т.е.

$$\theta\theta^{+} = 1, \ \theta^{+} = \theta^{-1} \qquad /1.28/$$

Но из /1.27/ видим, что

$$\theta\theta = 1, \quad \text{или} \quad \theta = \theta^{-1} \qquad /1.29/$$

Тогда, сравнивая /1.28/ и /1.29/, получаем

$$\theta^{+} = \theta \qquad /1.30/$$

Но /1.30/ есть условие эрмитовости матрицы θ . Поскольку матрица θ эрмитова, то из формулы /1.22/ следует, что числа C_1 и C_2 действительны как коэффициенты разложения эрмитовой матрицы θ по линейно независимым эрмитовым матрицам ρ_1 и ρ_2 .

С помощью чисто матричного унитарного преобразования

$$\theta \rightarrow U\theta U^{+}, \qquad /1.31/$$

где

$$\mathcal{U} = \sqrt{\frac{1+C_1}{2}} + i\rho_3 \frac{C_2}{\sqrt{2(1+C_1)}} \qquad /1.32/$$

учитывая /1.27/ и /1.22/, получаем /1.15/.

Лемма 1.1 доказана.

Таким образом, мы доказали, что, с точностью до унитарной эквивалентности, общий вид матрицы θ, удовлетворяющий соотношениям /1.13а/, /1.13б/, /1.13д/ задается формулой /1.15/.

Что же касается условий /1.13в/ и /1.13г/, то /1.13г/ будем рассматривать как уравнение для гамильтониана $\mathcal{H} = P_0$, а /1.13в/ выполняется автоматически, если имеет место /1.13г/.

Учитывая, что θ имеет вид /1.15/, а операторы J_{ab} и P_b удовлетворяют соотношениям /1.6а/, /1.6б/ тождественно, задача о нахождении уравнений /1.1/, инвариантных относительно расширенной группы Галилея $\widetilde{G}$ и операции сильного отражения Θ, сводится к отысканию дифференциального, эрмитового в скалярном произведении /1.5/ оператора $\mathcal{H}$, удовлетворяющего системе операторных соотношений:

$$[\mathcal{H}, P_a] = [P_0, P_a] = 0; \qquad /1.33а/$$

$$[\mathcal{H}, J_{ab}] = [P_0, J_{ab}] = 0; \qquad /1.33б/$$

$$[\mathcal{H}, G_a] = [P_0, G_a] = i P_a; \qquad /1.33в/$$

$$[P_a, G_b] = i\rho_3 m \delta_{ab}; \qquad /1.33г/$$

$$[J_{ab}, G_c] = i(\delta_{ac} G_b - \delta_{bc} G_a); \qquad /1.33д/$$

$$[G_a, G_b] = 0, \qquad /1.33е/$$

$$\mathcal{H}^2 = \left(mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\right) \qquad /1.33ж/$$

$$\Theta \mathcal{H} = -\mathcal{H}\, \Theta \qquad /1.33з/$$

§2. Операторы ортогонального проектирования

Чтобы решить задачу, поставленную в предыдущем параграфе, мы разложим искомые операторы $\mathcal{H}$ по полной системе операторов ортогонального проектирования. Это позволит свести операторные соотношения /1.33а - 1.33з/ к системе функциональных уравнений.

В этом параграфе мы дадим определение полного набора ортопроекторов [14], [18], [32]-[34] и укажем их основные свойства.

Покажем, что совокупность /$2s+1$/ операторов

$$\Lambda_\tau = \prod_{\substack{\tau' = -s \\ \tau' \neq \tau}}^{s} \frac{S_p - \tau'}{\tau - \tau'}, \qquad /2.1/$$

где

$$S_p = \frac{\vec{S}\vec{p}}{|\vec{p}|}$$ – оператор спиральности,

$$\tau, \tau' = -s, -s+1, \ldots, s-1, s, \quad |\vec{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

$$S_a = \begin{pmatrix} \hat{S}_a & 0 \\ 0 & \hat{S}_a \end{pmatrix},$$ $\hat{S}_a$ – спиновые матрицы /1.4/,

удовлетворяет условиям полноты

$$\sum_{\tau=-s}^{s} \Lambda_\tau = I \qquad /2.2/$$

и ортогональности

$$\Lambda_\tau \Lambda_{\tau_1} = \delta_{\tau\tau_1} \Lambda_{\tau_1} \qquad /2.3/$$

Сначала убедимся, что имеет место /2.2/. Оператор спиральности S_p эрмитов в пространстве 2/2 s + 1/ компонентных функций с скалярным произведением /1.5/. Произвольный вектор Ψ из этого пространства можно представить в виде линейной комбинации собственных функций оператора спиральности с собственным значением τ , т.е.

$$\Psi = \sum_{\tau=-s}^{s} a_\tau \Psi_\tau \qquad /2.4/$$

где

Ψ_τ - собственные функции оператора спиральности, a_τ - числовые коэффициенты.

$$S_p \Psi_\tau = \tau \Psi_\tau \qquad /2.5/$$

Из определения операторов Λ_τ /2.1/ и соотношения /2.5/ имеем

$$\Lambda_\tau \Psi_{\tau_1} = \delta_{\tau\tau_1} \Psi_{\tau_1} \qquad /2.6/$$

Принимая во внимание /2.6/, заключаем, что на произвольный вектор Ψ /2.4/ оператор Λ_τ действует так

$$\Lambda_\tau \Psi = a_\tau \Psi_\tau \qquad /2.7/$$

Просуммировав правую и левую часть /2.7/ по τ, получаем

$$\sum_{\tau=-s}^{s} \Lambda_\tau \Psi = \sum_{\tau=-s}^{s} a_\tau \Psi_\tau . \qquad /2.8/$$

Из соотношений /2.4/ и /2.8/ следует

$$\sum_{\tau=-s}^{s} \Lambda_\tau \Psi = \Psi \qquad /2.9/$$

А поскольку Ψ произвольный вектор из заданного пространства, то из /2.9/ и вытекает условие полноты /2.2/.

Докажем, что операторы /2.1/ удовлетворяют условию /2.3/ С этой целью подействуем на /2.7/ оператором Λ_{τ_1}

$$\Lambda_{\tau_1} \Lambda_\tau \Psi = a_\tau \Lambda_{\tau_1} \Psi_\tau \qquad /2.10/$$

Учитывая /2.6/, выражение /2.10/ можно переписать так

$$\Lambda_{\tau_1} \Lambda_\tau \Psi = \delta_{\tau_1,\tau}\, a_\tau \Psi_\tau \qquad /2.11/$$

Откуда, принимая во внимание /2.7/, получаем

$$\Lambda_{\tau_1} \Lambda_\tau \Psi = \delta_{\tau\tau_1} \Lambda_\tau \Psi . \qquad /2.12/$$

Ввиду произвольности вектора Ψ, из /2.12/ и следует условие ортогональности /2.3/.

Покажем, что операторы Λ_τ удовлетворяют такому соотношению

$$S_p^n = \sum_{\tau=-s}^{s} \tau^n \Lambda_\tau \qquad /2.13/$$

Для этого подействуем на /2.4/ оператором S_p^n и учтем /2.5/

$$S_p^n \Psi = \sum_{\tau=-s}^{s} a_\tau \tau^n \Psi_\tau \qquad /2.14/$$

Правую часть /2.14/, принимая во внимание /2.7/, можно записать так

$$\sum_{\tau=-s}^{s} a_\tau \tau^n \Psi_\tau = \sum_{\tau=-s}^{s} \tau^n \Lambda_\tau \Psi \qquad /2.15/$$

Из /2.14/, /2.15/, ввиду произвольности вектора Ψ, и следует /2.13/.

Итак, мы показали, что операторы /2.1/ удовлетворяют соотношениям полноты /2.2/ и ортогональности /2.3/. Из этого следует, что они являются операторами ортогонального проектирования на подпространства собственных функций оператора спиральности S_p с собственным значением τ $/ -s \leq \tau \leq s$ /.

В дальнейшем нам необходимо будет использовать их явный вид для низших спинов: $s = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$

$$s = \frac{1}{2} \qquad \begin{aligned} \Lambda_{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2(\vec{S}\vec{p})}{|\vec{p}|}\right); \\ \Lambda_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2(\vec{S}\vec{p})}{|\vec{p}|}\right) \end{aligned} \qquad /2.16/$$

$$\Lambda_{-1}=\frac{1}{2}\Big[\frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{\vec{p}^{\,2}}-\frac{(\vec{S}\vec{p})}{|\vec{p}|}\Big];$$

$$s=1\quad \Lambda_0=1-\frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{\vec{p}^{\,2}}; \qquad /2.17/$$

$$\Lambda_1=\frac{1}{2}\Big[\frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{\vec{p}^{\,2}}+\frac{(\vec{S}\vec{p})}{|\vec{p}|}\Big]$$

$$\Lambda_{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\Big[2\frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{\vec{p}^{\,2}}-\frac{1}{8}+\frac{1}{12}\frac{(\vec{S}\vec{p})}{|\vec{p}|}-\frac{1}{3}\Big(\frac{\vec{S}\vec{p}}{|\vec{p}|}\Big)^3\Big];$$

$$\Lambda_{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\Big[-2\frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{\vec{p}^{\,2}}+\frac{9}{8}-\frac{9}{4}\frac{(\vec{S}\vec{p})}{|\vec{p}|}+\Big(\frac{\vec{S}\vec{p}}{|\vec{p}|}\Big)^3\Big];$$

$$s=\frac{3}{2} \qquad /2.18/$$

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\Big[-2\frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{\vec{p}^{\,2}}+\frac{9}{8}+\frac{9}{4}\frac{(\vec{S}\vec{p})}{|\vec{p}|}-\Big(\frac{\vec{S}\vec{p}}{|\vec{p}|}\Big)^3\Big];$$

$$\Lambda_{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\Big[2\frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{\vec{p}^{\,2}}-\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\frac{(\vec{S}\vec{p})}{|\vec{p}|}+\frac{1}{3}\Big(\frac{\vec{S}\vec{p}}{|\vec{p}|}\Big)^3\Big].$$

Нами будут также использованы следующие утверждения, доказанные в [18], [34].

__Лемма 2.1.__ Оператор ортогонального проектирования /2.1/ удовлетворяет соотношениям

$$[\Lambda_\tau,\vec{x}]=\frac{\vec{p}\times\vec{S}}{2\,\vec{p}^{\,2}}\left(2\Lambda_\tau+\Lambda_{\tau+1}-\Lambda_{\tau-1}\right)+$$
$$+\frac{i}{2|\vec{p}|}\Big(\vec{S}-\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}S_p\Big)\left(\Lambda_{\tau+1}-\Lambda_{\tau-1}\right), \qquad /2.19/$$

$$[\Lambda_\tau,\vec{S}] = \frac{i}{2|\vec{P}|}\,\frac{\vec{P}\times S}{|\vec{P}|}\left(\Lambda_{\tau+1}-\Lambda_{\tau-1}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\vec{S}-\frac{\vec{P}}{|\vec{P}|}S_P\right)\left(2\Lambda_\tau-\Lambda_{\tau+1}-\Lambda_{\tau-1}\right), \qquad /2.19/$$

где $\vec{x}$ и $\vec{S}$ - операторы координаты и спина, соответственно.

Лемма 2.2. Векторы

$$\frac{\vec{P}\times\vec{S}}{|\vec{P}|}\Lambda_\tau \quad \text{и} \quad \left(\vec{S}-\frac{\vec{P}}{|\vec{P}|}S_P\right)\Lambda_\tau$$

линейно независимы при всех $\tau \neq \pm s$ и лишь в случае $\tau = \pm s$

$$\left(\pm i\,\frac{\vec{P}\times\vec{S}}{|\vec{P}|}+\vec{S}-\frac{\vec{P}}{|\vec{P}|}S_P\right)\Lambda_\tau = 0 \qquad /2.20/$$

§3. Определение явного вида гамильтонианов

3.1 Поскольку расширенная группа Галилея $\tilde{G}$ содержит в качестве подгруппы группу Евклида E_3, то из предложения инвариантности уравнения /1.1/ относительно группы $\tilde{G}$ с необходимостью следует, что оно должно быть инвариантным и относительно группы Евклида E_3. Поэтому мы уже частично решим задачу, поставленную в §1, если построим операторы $\mathcal{H}$, при которых уравнение /1.1/ инвариантно относительно E_3. Дальше мы покажем, что если уравнение /1.1/ инвариантно относительно группы E_3, операции сильного отражения Θ, а гамильтониан удовлетворяет условию /1.33x/, то оно будет инвариантным и относительно расширенной группы Галилея $\tilde{G}$.

3.2. Итак, построим оператор $\mathcal{H}$, удовлетворяющий соотношениям /1.33а/, /1.33б/, /1.33в/, /1.33г/.

Мы предположили, что гамильтониан $\mathcal{H}$ определен в пространстве 2/2s + 1/ - компонентных функций $\Psi(\vec{x}, t)$, следовательно, его можно представить в виде клеточной матрицы

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \qquad /3.1/$$

где H_{ab} - матрицы размерности /2s + 1/ × /2s + 1/. Используя набор линейно независимых матриц

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}, \rho_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad /3.2/$$

где I - единичная матрица размерности /2s + 1/ × /2s + 1/, удовлетворяющих таким соотношениям

$$\rho_i \rho_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\rho_k, \; (i, j, k - \text{цикл } 1,2,3), \qquad /3.3/$$

оператор $\mathcal{H}$ можно записать в виде

$$\mathcal{H} = \sum_{\tau=0}^{3} \rho_\tau h_\tau , \qquad /3.4/$$

где h_τ связаны с H_{ab} следующим образом

$$h_0 = \frac{1}{2}(H_{11} + H_{22}); \quad h_1 = \frac{1}{2}(H_{12} + H_{21});$$
$$h_2 = \frac{i}{2}(H_{12} - H_{21}); \quad h_3 = \frac{1}{2}(H_{11} - H_{22}). \qquad /3.5/$$

Потребуем, чтобы оператор $\mathcal{H}$ удовлетворял соотношениям /1.3а/ и /1.3б/. Подставив /1.2а/, /1.3б/ и /3.4/ в /1.3а/ и /1.3б/, учитывая тот факт, что ρ_τ коммутирует с P_a и J_{ab} и линейно независимы, получаем следующие условия для h_τ

$$[h_\tau, P_a] = [h_\tau, -i\frac{\partial}{\partial x_a}], \qquad /3.6а/$$

$$[h_\tau, J_{ab}] = [h_\tau, x_a P_b - x_b P_a + S_{ab}] = 0 \qquad /3.6б/$$

Из /3.6а/, /3.6б/ следует, что h_τ должны быть функциями от операторов Казимира группы E_3

$$\vec{P}^2 \quad и \sum_{a,b,c} J_{ab} P_c = \vec{S}\vec{P} \qquad /3.7/$$

Ясно, что соотношениям /3.6а/, /3.6б/ удовлетворяют произвольные функции от /3.7/. Мы же, как отмечалось в §1, ограничиваемся построением дифференциальных операторов $\mathcal{H}$. Из требования, чтобы $\mathcal{H}$ был дифференциальным оператором, следует, что и оператор h_τ тоже должен быть дифференциальным.

Наиболее общий вид дифференциального оператора h_τ, построенного из операторов Казимира группы E_3, такой

$$h_\tau = (a_\tau m + b_\tau \frac{\vec{P}^2}{2m} + c_\tau (\vec{S}\vec{P}) + d_\tau \frac{(\vec{S}\vec{P})^2}{2m} + \kappa_\tau \frac{\vec{P}^4}{m^3} + \ell_\tau \frac{\vec{P}^2(\vec{S}\vec{P})}{m^2} + \cdots) \qquad /3.8/$$

$a_\tau, b_\tau, c_\tau, d_\tau, \kappa_\tau, \ell_\tau$ - коэффициенты с соответствующей размерностью.

Поскольку мы ищем гамильтонианы $\mathcal{H}$ эрмитовы в скалярном произведении /1.5/, то из эрмитовости матриц ρ_μ следует, что h_τ должны быть эрмитовы в этом же скалярном произведении, т.е. коэффициенты a_τ, b_τ, c_τ .... должны быть действительными.

Из линейной независимости матриц ρ_τ, эрмитовости h_τ и соотношения /1.33к/ следует, что h_τ^2 /суммирования нет/ должен быть дифференциальным оператором не выше четвертого порядка. Возведя /3.8/ в квадрат, легко убедиться, что для того, чтобы h_τ удовлетворял этому требованию, необходимо положить в формуле /3.8/ k_τ, l_τ и последующие коэффициенты равными нулю, т.е. гамильтониан $\mathcal{H}$ следует искать в виде

$$\mathcal{H} = \sum_{\tau=0}^{3} \rho_\tau \left(a_\tau m + b_\tau \frac{\vec{P}^2}{2m} + c_\tau (\vec{S}\vec{P}) + d_\tau \frac{(\vec{S}\vec{P})^2}{2m} \right) \qquad /3.9/$$

3.3. Для упрощения дальнейших вычислений разложим оператор $\mathcal{H}$ по полной системе ортогональных операторов проектирования Λ_τ /2.1/. Положив $\tau = \nu$, подставляя /2.13/ в /3.9/ и учитывая /2.2/, гамильтониан /3.9/ можно записать так

$$\mathcal{H} = \sum_{\tau=0}^{3} \sum_{\nu=-s}^{s} \rho_\tau [a_\tau m + (b_\tau + \nu^2 d_\tau) \frac{\vec{P}^2}{2m} + \nu |\vec{P}| c_\tau] \Lambda_\nu \qquad /3.10/$$

Докажем такое утверждение.

<u>Лемма 3.1.</u> Оператор /3.10/ удовлетворяет соотношению /3.33а/, если коэффициенты

$$a_0 = b_0 = d_0 = a_1 = b_1 = d_1 = 0, \qquad /3.11/$$
$$c_2 = c_3 = 0.$$

<u>Доказательство</u>

Для доказательства леммы 3.1 рассмотрим такое выражение

$$\Theta\mathcal{H} = \sum_{\tau=0}^{3}\sum_{\nu=-s}^{s}\Theta\rho_\tau\left[a_\tau m + (b_\tau + \nu^2 d_\tau)\frac{\vec{P}^2}{2m} + \nu|\vec{P}|c_\nu\right]\Lambda_\nu \qquad /3.12/$$

Поскольку оператор Θ удовлетворяет соотношениям

$$\Theta\vec{P}^2 = \vec{P}^2\Theta, \quad \Theta|\vec{P}| = |\vec{P}|\Theta, \quad \Theta\Lambda_\nu = \Lambda_{-\nu}\Theta, \qquad /3.13/$$

правую часть /3.12/ можно переписать так

$$\Theta\mathcal{H} = \sum_{\tau=0}^{3}\sum_{\nu=-s}^{s}[\Theta,\rho_\tau]\left[a_\tau m + (b_\tau + \nu^2 d_\tau)\frac{\vec{P}^2}{2m} + \nu|\vec{P}|c_\tau\right]\Lambda_\nu + \sum_{\tau=0}^{3}\sum_{\nu=-s}^{s}\rho_\tau\left[a_\tau m + (b_\tau + \nu^2 d_\tau)\frac{\vec{P}^2}{2m} + \nu|\vec{P}|c_\tau\right]\Lambda_{-\nu}\Theta. \qquad /3.14/$$

Учитывая, что оператор Θ коммутирует с ρ_1 и ρ_0

$$[\Theta,\rho_1] = [\Theta,\rho_0] = 0 \qquad /3.15а/$$

и антикоммутирует с ρ_2 , ρ_3

$$[\Theta,\rho_\alpha]_+ = 0, \quad \alpha = 2,3 \qquad /3.15б/$$

из /3.14/ получаем

$$\Theta\mathcal{H} = \sum_{\alpha=2}^{3}\sum_{\nu=-s}^{s} -2\rho_\alpha\left[a_\alpha m + (b_\alpha + \nu^2 d_\alpha)\frac{\vec{P}^2}{2m} + \nu|\vec{P}|c_\alpha\right]\Lambda_{-\nu}\Theta + \sum_{\tau=0}^{3}\sum_{\nu=-s}^{s}\left[a_\tau m + (b_\tau + \nu^2 d_\tau)\frac{\vec{P}^2}{2m} + \nu|\vec{P}|c_\tau\right]\Lambda_{-\nu}\Theta. \qquad /3.16/$$

Сделаем в /3.16/ замену $\nu = -\mu$

$$\Theta \mathcal{H} = \sum_{\alpha=2}^{3} \sum_{\mu=-s}^{s} -2\rho_\alpha [a_\alpha m + (b_\alpha + \mu^2 d_\alpha) \frac{\vec{P}^2}{2m} - \mu |\vec{P}| c_\alpha] \Lambda_\mu \Theta + \sum_{\tau=0}^{3} \sum_{\mu=-s}^{s} [a_\tau m + (b_\tau + \mu^2 d_\tau) \frac{\vec{P}^2}{2m} - \mu |\vec{P}| c_\tau] \Lambda_\mu \Theta \qquad /3.17/$$

Из формул /3.10/, /3.17/ видим, что если имеет место /3.11/, то оператор $\mathcal{H}$ удовлетворяет /3.33а/ и имеет вид

$$\mathcal{H} = \sum_{\nu=-s}^{s} \{ \rho_0 c_0 \nu |\vec{P}| + \rho_1 c_1 \nu |\vec{P}| + \rho_2 [a_2 m + (b_2 + \nu^2 d_2) \frac{\vec{P}^2}{2m}] + \rho_3 [a_3 m + (b_3 + \nu^2 d_3) \frac{\vec{P}^2}{2m}] \} \Lambda_\nu \qquad /3.18/$$

Таким образом, лемма 3.1 доказана.

3.4. Для удобства дальнейших вычислений, но не умаляя общности, преобразуем гамильтониан /3.18/ по закону

$$\mathcal{H} \to \mathcal{H}' = \mathcal{U} \mathcal{H} \mathcal{U}^+, \qquad /3.19/$$

где $\mathcal{U}$ - унитарный, не зависящий от импульса оператор, удовлетворяющий условиям

$$[\mathcal{U}, \Theta] = 0, \qquad /3.20а/$$

$$\mathcal{U}\mathcal{U}^+ = \mathcal{U}^+\mathcal{U} = 1, \qquad /3.20б/$$

$$\mathcal{U}(\rho_2 a_2 + \rho_3 a_3)\mathcal{U}^+ = \rho_3 a_3' \qquad /3.20в/$$

где $a_3' = \sqrt{a_2^2 + a_3^2}$.

Найдем явный вид оператора $\mathcal{U}$, удовлетворяющего /3.20а - 3.20в/.

Из /3.20а/ следует, что оператор $\mathcal{U}$ не зависит от ρ_2, ρ_3, следовательно, его можно искать в виде:

$$\mathcal{U} = \rho_0 u_0 + i\rho_1 u_1, \quad \mathcal{U}^+ = \rho_0 u_0 - i\rho_1 u_1 \qquad /3.21/$$

Из условий /3.20б/ и /3.20в/ определим u_0 и u_1. Подставляя /3.21/ в /3.20б/ и /3.20в/, получаем

$$u_0^2 + u_1^2 = 1$$

$$(\rho_0 u_0 - i\rho_1 u_1)\rho_3(\rho_0 u_0 + i\rho_1 u_1) = \rho_2 \frac{a_2}{a_3'} + \rho_3 \frac{a_3}{a_3'}. \qquad /3.22/$$

Из /3.22/ следует такая система уравнений для u_0 и u_1

$$u_0^2 + u_1^2 = 1,$$

$$u_0^2 - u_1^2 = \frac{a_3}{a_3'}, \qquad /3.23/$$

$$u_0 u_1 = -\frac{a_2}{2a_3'}.$$

Решив /3.23/, находим явное выражение для u_0 и u_1

$$u_0 = \pm\sqrt{\frac{a_3 + a_3'}{2a_3'}}, \quad u_1 = \mp \frac{a_2}{\sqrt{2a_3'(a_3' + a_3)}}.$$

Следовательно, оператор $\mathcal{U}$, удовлетворяющий условиям /3.20а/ - /3.20в/, имеет вид

$$\mathcal{U} = \pm\sqrt{\frac{a_3 + a_3'}{2a_3'}} \mp i\rho_1 \frac{a_2}{\sqrt{2a_3'(a_3 + a_3')}}, \qquad /3.24/$$

$$\mathcal{U}^{+}=\sqrt{\frac{a_3+a_3'}{2a_3'}}\pm i\rho_1\frac{a_2}{\sqrt{2a_3'(a_3+a_3')}} \qquad /3.24/$$

Преобразованный гамильтониан, как и исходный, будет удовлетворять условию /1.33а/, поскольку имеет место /3.20а/, он будет эрмитовым в скалярном произведении /1.5/, ибо $\mathcal{U}$ - унитарный оператор. Таким образом, после преобразования /3.19/ получаем такой гамильтониан

$$\mathcal{H}'=\sum_{\nu=-s}^{s}\{\rho_0 c_0\nu|\vec{p}|+\rho_1 c_1\nu|\vec{p}|+\rho_2(b_2'+ +\nu^2 d_2')\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}+\rho_3[a_3'm+ +(b_3'+\nu^2 d_3')\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}]\}\Lambda_\nu, \qquad /3.25/$$

где

$$\begin{aligned} b_2'&=(u_0^2-u_1^2)b_2+2u_0u_1b_3,\\ b_3'&=(u_0^2-u_1^2)b_3-2u_0u_1b_2,\\ d_2'&=(u_0^2-u_1^2)d_2+2u_0u_1d_3,\\ d_3'&=(u_0^2-u_1^2)d_3-2u_0u_1d_2 \end{aligned} \qquad /3.26/$$

Потребуем, чтобы $\mathcal{H}'$ удовлетворял условию /1.33а/, которое, учитывая /2.2/, запишем так

$$(\mathcal{H}')^2=\sum_{\nu=-s}^{s}(mc^2+\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m})^2\Lambda_\nu \qquad /3.27/$$

Подставив вместо $\mathcal{H}'$ в /3.27/ выражение /3.25/, имеем

$$\sum_{\nu=-s}^{s}\Big\{ C_0^2\nu^2\vec{P}^2 + C_1^2\nu^2\vec{P}^2 + (b_2'+\nu^2 d_2')^2\frac{\vec{P}^4}{4m^2} +$$

$$+ [a_3'm + (b_3'+\nu^2 d_3')\frac{\vec{P}^2}{2m}]^2 +$$

$$+ 2C_0\nu|\vec{P}|\underline{[\rho_1 C_1\nu|\vec{P}| + \rho_2(b_2'+\nu^2 d_2')\frac{\vec{P}^2}{2m} +}$$

$$\underline{+\rho_3[a_3'm + (b_3'+\nu^2 d_3')\frac{\vec{P}^2}{2m}]]}\Big\}\Lambda_\nu = \qquad /3.28/$$

$$= \sum_{\nu=-s}^{s}(mc^2 + \frac{\vec{P}^2}{2m})^2\Lambda_\nu.$$

Проанализируем соотношение /3.28/. Поскольку матрицы линейно независимы, то последнее слагаемое под знаком суммы в левой части /3.28/ должно равняться нулю, а это имеет место тогда и только тогда, когда либо подчеркнутый многочлен тождественно равен нулю, либо $C_0 \equiv 0$.

Если потребовать, чтобы подчеркнутое выражение было равным нулю, то ввиду линейной независимости ρ_i - матриц и различных ~~степеней~~ $\vec{P}$ получаем

$$C_1 = 0, \quad b_2' + \nu^2 d_2' = 0,$$

$$a_3' = 0, \quad b_3' + \nu^2 d_3' = 0. \qquad /3.29/$$

Но если выполняется /3.29/, то /3.25/ не удовлетворяет условию /3.27/. Следовательно, подчеркнутое выражение отлично от нуля. Тогда в /3.25/ необходимо положить $C_0 \equiv 0$. Учитывая линейную независимость различных степеней $\vec{P}$ и тот факт, что $C_0 = 0$, получаем из /3.28/ следующую систему уравнений для коэффициентов $a_3', C_1, b_2', b_3', d_2', d_3'$

$$(a_3')^2 = c^4, \qquad /3.30/$$

$$C_1^2 \nu^2 + a_3'(b_3' + \nu^2 d_3') = C^2, \qquad /3.30б/$$

$$(b_2' + \nu^2 d_2')^2 + (b_3' + \nu^2 d_3')^2 = 1 \qquad /3.30в/$$

3.5. Решение системы /3.30/

Из /3.30а/ следует, что

$$a_3' = \pm C^2 \qquad /3.31/$$

В дальнейшем ограничимся случаем

$$a_3' = C^2 \qquad /3.32/$$

Подставив /3.32/ в /3.30б/, получаем

$$C_1^2 \nu^2 + C^2(b_3' + \nu^2 d_3') = C^2 \qquad /3.33/$$

Если $S > \frac{1}{2}$ /т.е. ν имеет больше чем одно значение/, то из /3.33/ следует

$$b_3' = 1, \quad d_3' = -\frac{C_1^2}{C^2} \qquad /3.34/$$

а для $S = \frac{1}{2}$, $d_3' = 0$

и

$$b_3' = 1 - \frac{C_1^2}{C^2}\nu^2 \qquad /3.35/$$

Подставив /3.34/ в /3.30в/, имеем

$$(b_2' + \nu^2 d_2')^2 + \left(1 - \frac{C_1^2}{C^2}\nu^2\right)^2 = 1, \qquad /3.36/$$

Поскольку b_2', d_2', c_1 – действительные числа, то из /3.36/ получаем такое неравенство

$$2 - \frac{\nu^2 c_1^2}{c^2} \geqslant 0 \qquad /3.37/$$

или

$$\nu^2 c_1^2 \leqslant 2c^2 \qquad /3.38/$$

Но поскольку $-s \leqslant \nu \leqslant s$, то должно иметь место и такое соотношение

$$s^2 c_1^2 \leqslant 2c^2 \qquad /3.39/$$

Из /3.39/ видно, что c_1 можно представить в виде

$$c_1 = \frac{\sqrt{2}\, c}{s} \sin\theta \qquad /3.40/$$

где θ – некоторый параметр, физический смысл которого мы раскроем ниже.

Если же $s = \frac{1}{2}$, то подставив /3.35/ в /3.30в/, имеем

$$\left(1 - \frac{c_1^2}{c^2}\nu^2\right)^2 + \left(b_2'\right)^2 = 1 \qquad /3.41/$$

Из /3.41/ сначала получаем /3.38/, а затем и /3.40/. Подставив /3.40/ в /3.34/, находим выражение для d_3' в случае $s > \frac{1}{2}$

$$d_3' = -\frac{2\sin^2\theta}{s^2} \qquad /3.42/$$

а в случае $s = \frac{1}{2}$ подстановка /3.40/ в /3.35/ дает возможность определить b_3'

$$b_3' = 1 - \frac{2\sin^2\theta}{s^2}\nu^2,$$

но для $s = \frac{1}{2}$, $\nu^2 = s^2$, поэтому

$$b_3' = \cos 2\theta. \qquad /3.43/$$

Найдем другие коэффициенты для случая $s = \frac{1}{2}$

При этом $d_2' = 0$, b_2' определим из формулы /3.30в/, подставив в нее значение b_3' /3.43/

$$(b_2')^2 + \cos^2 2\theta = 1, \qquad /3.44/$$

откуда

$$b_2' = \pm \sin 2\theta \qquad /3.45/$$

Подставив /3.32/, /3.40/ и /3.45/ в формулу /3.25/, учитывая, что $c_0 = d_3' = d_2' = 0$, находим явное выражение для гамильтониана в случае $s = \frac{1}{2}$.

$$\mathcal{H} = \sum_{\nu=-s}^{s} \Big\{ \rho_1 \frac{\sqrt{2}c}{s} |\vec{p}|\, \nu \sin\theta \pm \rho_2 \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} \sin 2\theta + \rho_3 \Big(mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} \cos 2\theta\Big)\Big\} \Lambda_\nu \qquad /3.45/$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение

<u>Теорема 3.1.</u> Наиболее общий вид дифференциального оператора $\mathcal{H}$, эрмитового в скалярном произведении /1.5/, удовлет-

воряющего соотношениям /1.33а/, /1.33б/, /1.33в/, /1.33е/, в случае $S=\frac{1}{2}$ задается формулой /3.45/.

Учитывая свойства ортопроекторов /2.2/ и /2.13/, гамильтониан /3.45/ можно записать так

$$\mathcal{H}=\rho_1\sqrt{2}\,c(\vec{\sigma}\vec{p})\sin\theta\pm\rho_2\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\sin 2\theta+ \qquad /3.46/$$

$$\rho_3\left(mc^2+\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\cos 2\theta\right),$$

где

$$\sigma_a=\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_a & 0\\ 0 & \hat{\sigma}_a\end{pmatrix} \qquad /3.47/$$

а $\hat{\sigma}_a$ - обычные матрицы Паули.

В случае $\theta=\frac{\pi}{4}$ гамильтониан /3.46/ имеет вид

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_D\pm\rho_2\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}, \qquad /3.48/$$

где

$$\mathcal{H}_D=\rho_3 mc^2+\rho_1(\vec{\sigma}\vec{p})c \qquad /3.49/$$

- релятивистский гамильтониан Дирака [1] .

Уравнение движения /1.1/ для частиц со спином можно записать при этом в компактной форме

$$[\gamma_\mu P^\mu+mc^2]\,\Psi(t,\vec{x})=\pm\gamma_4\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\Psi(t,\vec{x}), \qquad /3.50/$$

где

$$\gamma_0=\rho_3,\ \gamma_a=i\rho_2\sigma_a,\ \gamma_4=-i\rho_3 \qquad /3.51/$$

Теперь найдем гамильтониан для случая $S > \frac{1}{2}$. Для этого необходимо определить коэффициенты b_2' и d_2'. Подставив значения $b_3' = 1$ и d_3' /3.42/ в уравнение /3.30в/, имеем

$$(b_2' + \nu^2 d_2')^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{S^2} \cdot 2 \sin^2\theta\right)^2 = 1. \qquad /3.52/$$

Поскольку $-S \leqslant \nu \leqslant S$, то положив в /3.52/ $\nu = S$ и $\nu = S-1$, получим систему двух уравнений для коэффициентов

$$(b_2' + S^2 d_2')^2 = 1 - \cos^2 2\theta, \qquad /3.53а/$$

$$[b_2' + (S-1)^2 d_2']^2 = 1 - \left[1 - \left(\frac{S-1}{S}\right)^2 2 \sin^2\theta\right]^2 \qquad /3.53б/$$

или

$$(b_2' + S^2 d_2') = \pm \sin 2\theta \qquad /3.54а/$$

$$b_2' + (S-1)^2 d_2' = \pm 2\left(\frac{S-1}{S}\right) \sin\theta \sqrt{1 - \left(\frac{S-1}{S}\right)^2 \sin^2\theta} \qquad /3.54б/$$

Решив систему уравнений /3.54/, определяем коэффициенты b_2' и d_2'

$$b_2' = \mp \frac{(S-1)^2}{2S-1} \sin 2\theta \pm \frac{2S(S-1)}{2S-1} \sin\theta \sqrt{1 - \left(\frac{S-1}{S}\right)^2 \sin^2\theta} \qquad /3.55/$$

$$d_2' = \pm \frac{\sin 2\theta}{(2S-1)} \mp 2 \frac{(S-1)}{S(2S-1)} \sin\theta \sqrt{\frac{S^2 - (S-1)^2 \sin^2\theta}{S^2}} \qquad /3.56/$$

Подставляя $C_0=0$, $b_3'=1$, $a_3'=c^2$, c_1, d_3', b_2', d_2' определенные по формулам /3.40/, /3.42/, /3.55/ и /3.56/, соответственно, в /3.25/, получаем гамильтониан в явном виде для случая $S > \frac{1}{2}$

$$\mathcal{H} = \sum_{\nu=-S}^{S} \Big\{ \rho_1 \frac{\sqrt{2}\, c \sin\theta}{S} |\vec{P}|\, \nu + \rho_2 \Big[\mp \frac{(S-1)^2}{2S-1} \sin 2\theta \pm$$
$$\pm \frac{2S(S-1)}{2S-1} \sin\theta \sqrt{1-\left(\frac{S-1}{S}\right)^2 \sin^2\theta} + \qquad /3.57/$$
$$+ \nu^2 \left(\pm \frac{\sin 2\theta}{(2S-1)} \mp 2 \frac{(S-1)}{S(2S-1)} \sin\theta \sqrt{1-\left(\frac{S-1}{S}\right)^2 \sin^2\theta} \right] \times$$
$$\times \frac{\vec{P}^2}{2m} + \rho_3 \Big[mc^2 + \left(1 - \frac{2\sin^2\theta}{S^2} \nu^2\right) \frac{\vec{P}^2}{2m} \Big] \Big\} \Lambda_\nu .$$

Из формул /3.45/, /3.57/ видно, что в случае $\theta = \pi n$ для любого $S \neq 0$ гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H}^c = \sum_{\nu=-S}^{S} \rho_3 \left(mc^2 + \frac{\vec{P}^2}{2m} \right) \Lambda_\nu . \qquad /3.58/$$

Если $\sin\theta = 0$, то из формул /3.40/, /3.42/, /3.45/, /3.55/, /3.56/ следует, что $b_2' = c_1 = d_2' = d_3' = 0$.

В случае $S = \frac{1}{2}$ существует гамильтониан /3.45/ при $\theta \neq \pi n$ отличный от /3.58/, удовлетворяющий коммутационным соотношениям /1.33а/, /1.33б/, /1.33г/, /1.33в/.

Выясним, для каких спинов $S > \frac{1}{2}$ существуют гамильтонианы $\mathcal{H}$, удовлетворяющие выше перечисленным условиям, отличные от /3.58/.

Докажем такую теорему.

<u>Теорема 3.2</u>

В случае $S > \frac{3}{2}$ не существует дифференциальных гамильтонианов $\mathcal{H}$, эрмитовых в скалярном произведении /1.3/ к удовлетворяющих условию /1.33а/, отличных от /3.58/, при которых уравнение /1.1/ было бы инвариантным относительно группы Евклида E_3 и операции сильного отражения Θ /1.12/.

Доказательство

Прежде всего отметим, что гамильтониан $\mathcal{H}$ будет отличным от /3.58/, если хотя бы один из коэффициентов b_2', c_1, d_2', d_3' не равен нулю.

Из формул /3.40/, /3.42/, /3.55/ и /3.56/ видно, что если $d_3' \equiv 0$, то $c_1 = d_2' = b_2' = 0$.

Следовательно, если мы покажем, что в случае

то этим самым докажем и теорему 3.2.

Рассмотрим уравнение /3.30в/.

Перепишем его так

$$\nu^4 K + \nu^2 L + M = 1, \qquad /3.59/$$

где

$$K = (d_2')^2 + (d_3')^2, \qquad /3.60а/$$

$$L = 2\left(b_2' d_2' + b_3' d_3'\right), \qquad /3.60б/$$

$$M = (b_2')^2 + (b_3')^2. \qquad /3.60в/$$

Уравнение /3.59/ должно выполняться при любых ν, удовлетворяющих такое неравенство

$$-s \leq \nu \leq s \qquad /3.61/$$

Из /3.59/ и /3.61/ следует, что K, L, M должны при любом удовлетворять такой системе уравнений

$$\begin{aligned} & s^4K + s^2L + M = 1, \\ & (s-1)^4K + (s-1)^2L + M = 1, \\ & (s-2)^4K + (s-2)^2L + M = 1 \end{aligned} \qquad /3.62/$$

Система /3.62/ должна быть совместимой, а K, L, M — ее решениями.

Воспользовавшись методом Гаусса, преобразуем систему /3.62/, исключив неизвестное M во всех уравнениях, кроме первого. Записав первое уравнение без изменений, а вместо второго и третьего - уравнения, получающиеся в результате вычета первого из второго и второго из третьего, соответственно, приходим к системе, эквивалентной /3.62/

$$\begin{aligned} & s^4K + s^2L + M = 1, \\ & [s^4-(s-1)^4]K + [s^2-(s-1)^2]L = 0, \\ & [(s-1)^4-(s-2)^4]K + [(s-1)^2-(s-2)^2]L = 0 \end{aligned} \qquad /3.63/$$

Систему /3.63/, в свою очередь, преобразуем таким образом, чтобы из тертьего уравнения исключить неизвестное L.

Положив, что

$$s^2-(s-1)^2 \neq 0 \qquad /3.64/$$

и умножив второе уравнение на

$$\frac{(s-1)^2-(s-2)^2}{s^2-(s-1)^2}, \qquad /3.65/$$

затем вычитая из третьего /первые два оставив без изменений/ получаем систему, эквивалентную /3.62/ и /3.63/

$$S^4 K + S^2 L + M = 1,$$

$$[S^4-(S-1)^4]K + [S^2-(S-1)^2]L = 0, \qquad /3.66/$$

$$\{[S^4-(S-1)^4]\cdot[(S-1)^2-(S-2)^2]-[(S-1)^4-(S-2)^4]\cdot[S^2-(S-1)^2]\}K=0$$

Из теории систем линейных уравнений известно [36] , что система /3.66/, равно, как и эквивалентная ей исходная система /3.62/, будет несовместимой, если при $K \neq 0$ выражение

$$\{[S^4-(S-1)^4]\cdot[(S-1)^2-(S-2)^2]-[(S-1)^4-(S-2)^4][S^2-(S-1)^2]\} \qquad /3.67/$$

отлично от нуля.

Покажем, что в случае $S > \frac{3}{2}$ выражение /3.67/ отлично отнуля. Для этого приравняем /3.67/ к нулю и перепишем в виде

$$[S^2-(S-1)^2]\cdot[(S-1)^2-(S-2)^2]\cdot[S^2-(S-2)^2] = 0 \qquad /3.68/$$

Учитывая /3.64/, видим, что /3.68/ выполняется, если имеет место

$$(S-1)^2-(S-2)^2 = 0, \qquad /3.69/$$

или

$$S^2-(S-2)^2=0. \qquad /3.70/$$

Откуда следует, что выражение /3.67/ равно нулю лишь в случае $S=1$ или $S=\frac{3}{2}$, если же $S>\frac{3}{2}$, то оно отлично от нуля и при $K\neq 0$ система /3.66/, и, следовательно, и /3.62/ несовместима.

Если же $K=0$, то система /3.66/ совместима, а ее решения имеют вид

$$K=L=0, \quad M=1 \qquad /3.71/$$

Действительно, если $K=0$, то из /3.60а/, поскольку d_2' и d_3' действительные числа, имеем

$$d_2'=d_3'=0 \qquad /3.72/$$

Подставляя /3.72/ в формулу /3.60б/, убеждаемся, что

$$L=0.$$

Тогда при любых значениях S последние два уравнения системы /3.66/ выполняются тождественно, а из первого уравнения получаем

$$M=1. \qquad /3.73/$$

Но, как мы отметили выше, при $d_3'=0$ и $b_2'=0$. Поэтому из формул /3.60в/ и /3.73/ следует, что

$$b_3'=\pm 1 \qquad /3.74/$$

а гамильтониан $\mathcal{H}$ имеет вид /3.58/ и существует при любом S

Теорема 3.2 доказана.

Доказав теорему 3.2, мы, тем самым, показали, что для спинов $S > \frac{3}{2}$ не существует гамильтонианов, удовлетворяющих условиям /1.33а/, /1.33б/, /1.33г/, /1.33е/ отличных от /3.58/, но не ответили на вопрос: существуют ли такие гамильтонианы для $S < \frac{3}{2}$?

Выше мы уже отмечали, что в случае $S = \frac{1}{2}$ существует гамильтониан /3.45/, отличный при $\theta \neq n\pi$ от /3.58/, удовлетворяющий условиям /1.33а/, /1.33б/, /1.33г/, /1.33е/.

Покажем, что и в случае $S = 1$, $S = \frac{3}{2}$ существуют гамильтонианы при $\theta \neq n\pi$, отличные от /3.58/ и удовлетворяющие тем же условиям. Для этого вычислим коэффициенты b_2' и d_2' по формулам /3.55/, /3.56/. Они равны

$$b_2' = 0, \qquad \text{при} \quad S = 1 \qquad /3.75/$$
$$d_2' = \pm \sin 2\theta$$

и

$$b_2' = \mp \frac{1}{8} \sin 2\theta \pm \frac{1}{4} \sin\theta \sqrt{9 - \sin^2\theta},$$

$$d_2' = \pm \frac{1}{2} \sin 2\theta \mp \frac{1}{9} \sin\theta \sqrt{9 - \sin^2\theta}, \qquad /3.76/$$
$$\text{при} \quad S = \frac{3}{2}$$

Подставляя значения коэффициентов $a_3', b_3', c_1, d_3', b_2', d_2'$ по формулам /3.32/, /3.34/, /3.40/, /3.42/, /3.75/ для $S = 1$, и /3.32/, /3.34/, /3.40/, /3.42/, /3.76/ для $S = \frac{3}{2}$ в /3.25/ и учитывая, что $C_0 = 0$, получаем гамильтонианы $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_{3/2}$ для спинов $S = 1$ и $S = \frac{3}{2}$, соответственно.

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{\nu=-s}^{s} \{ \rho_1 \frac{\sqrt{2}c}{s} |\vec{p}| \nu \sin\theta \pm \rho_2 \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} \nu^2 \sin^2\theta +$$

$$+ \rho_3 \left(mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{\vec{p}^{\,2}}{m} - \frac{\nu^2}{s^2} \sin^2\theta \right) \} \Lambda_\nu . \qquad /3.77/$$

$$\mathcal{H}_{3/2} = \sum_{\nu=-s}^{s} \{ \rho_1 \frac{\sqrt{2}c}{s} |\vec{p}| \nu \cdot \sin\theta +$$

$$+ \rho_2 \left[\left(\mp \frac{1}{8} \sin 2\theta \pm \frac{1}{4} \sin\theta \sqrt{9 - \sin^2\theta} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\pm \frac{\sin 2\theta}{2} \mp \frac{1}{9} \sin\theta \sqrt{9 - \sin^2\theta} \right) \nu^2 \right] \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} +$$

$$+ \rho_3 \left(mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{\vec{p}^{\,2}}{m} \frac{\nu^2}{s^2} \sin^2\theta \right) \} \Lambda_\nu \qquad /3.78/$$

Учитывая свойства ортопроекторов /2.2/ и /2.13/, выражения /3.77/ и /3.78/ можно переписать так

$$\mathcal{H}_1 = \rho_3 \left(mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{ms^2} \sin^2\theta \right) \pm$$

$$\pm \rho_2 \frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{2ms^2} \sin 2\theta + \rho_1 \frac{\sqrt{2}c}{s} (\vec{S}\vec{p}) \sin\theta . \qquad /3.79/$$

$$\mathcal{H}_{3/2} = \rho_3 \left(mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{ms^2} \sin^2\theta \right) + \rho_2 \{ [\mp \frac{1}{8} \sin 2\theta \pm$$

$$\pm \frac{1}{4} \sin\theta \sqrt{9 - \sin^2\theta}] \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + [\pm \frac{9}{8} \sin 2\theta \mp$$

$$\mp \frac{1}{4} \sin\theta \sqrt{9 - \sin^2\theta}] \frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{2ms^2} \} + \rho_1 c \sqrt{2} \frac{(\vec{S}\vec{p})}{s} \sin\theta \qquad /3.80/$$

Операторы /3.79/ и /3.80/ удовлетворяют соотношениям /1.33а/, /1.33б/, /1.33в/ по построению.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\mathcal{H}_s^2 = \left(mc^2 + \frac{\vec{P}^2}{2m}\right)^2 \qquad /3.81/$$

Действительно, возводя в квадрат правые части выражений /3.79/ и /3.80/ и учитывая соотношения

$$(\vec{S}\vec{P})^3 = \vec{P}^2(\vec{S}\vec{P}), \quad \text{при} \quad S = 1 \qquad /3.82/$$

$$(\vec{S}\vec{P})^4 = \frac{5}{2}\vec{P}^2(\vec{S}\vec{P})^2 - \frac{9}{16}|\vec{P}|^4, \quad \text{при} \quad S = \frac{3}{2} \qquad /3.83/$$

убеждаемся, что /3.81/ имеет место.

Следовательно, для $S = \frac{1}{2}$, $S = 1$, $S = \frac{3}{2}$ существуют гамильтонианы $\mathcal{H}$, удовлетворяющие соотношениям /1.33а/, /1.33б/, /1.33г/, /1.33д/, отличные от /3.58/. Эти гамильтонианы имеют вид /3.46/, /3.79/, /3.80/.

Учитывая, что в случае $S = \frac{1}{2}$ справедливо такое равенство

$$\sum_{\nu=-S}^{S} \vec{P}^2 \frac{\nu^2}{S^2} \Lambda_\nu = \sum_{\nu=-S}^{S} \vec{P}^2 \Lambda_\nu \qquad /3.84/$$

гамильтониан /3.45/ можно переписать в виде

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{2}} = \sum_{\nu=-S}^{S} \Big\{ \rho_1 \frac{\sqrt{2}c}{S} |\vec{P}| \nu \sin\theta \pm \rho_2 \frac{\vec{P}^2}{2m} \sin 2\theta +$$
$$+ \rho_3 \Big(mc^2 + \frac{\vec{P}^2}{2m} - \frac{\vec{P}^2}{m}\frac{\nu^2}{S^2}\sin^2\theta\Big)\Big\} \Lambda_\nu \qquad /3.85/$$

Сравнивая /3.77/, /3.78/, /3.85/, видим, что можно записать формулу для гамильтониана, общую для всех спинов

$$\mathcal{H}_s = \sum_{\nu=-s}^{s} \{ \rho_1 \frac{\sqrt{2}c}{s} |\vec{p}| \nu \sin\theta +$$

$$+ \rho_2 \left(a_s + b_s \frac{\nu^2}{s^2} \right) \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} +$$

$$+ \rho_3 \left(mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{\vec{p}^{\,2}}{m} \frac{\nu^2}{s^2} \sin^2\theta \right) \} \Lambda_\nu, \qquad /3.86/$$

или

$$\mathcal{H}_s = \rho_3 \left(mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{ms^2} \sin^2\theta \right) +$$

$$+ \rho_2 \left[a_s \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + b_s \frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{2ms^2} \right] +$$

$$+ \rho_1 \, c\sqrt{2} \, \frac{(\vec{S}\vec{p})}{s} \sin\theta, \qquad /3.87/$$

где

$$a_s = a_{\frac{1}{2}} = \pm \sin 2\theta, \; b_s = b_{\frac{1}{2}} = 0, \text{ если } s = \frac{1}{2} \qquad /3.88а/$$

$$a_s = a_1 = 0, \; b_s = b_1 = \pm \sin 2\theta, \text{ если } s = 1 \qquad /3.88б/$$

$$\left. \begin{aligned} a_s = a_{\frac{3}{2}} &= \mp \frac{1}{8} \sin 2\theta \pm \frac{1}{4} \sin\theta \sqrt{9 - \sin^2\theta} \\ b_s = b_{\frac{3}{2}} &= \pm \frac{9}{8} \sin 2\theta \mp \frac{1}{4} \sin\theta \sqrt{9 - \sin^2\theta} \end{aligned} \right\}, \text{ если } s = \frac{3}{2} \qquad /3.88в/$$

Заметим, что выражение /3.58/ является частным случаем $(\theta = n\pi)$ /3.86/.

Таким образом, нами доказано следующее утверждение

Теорема 3.3 Наиболее общий вид дифференциального оператора $\mathcal{H}$, эрмитового в скалярном произведении /1.5/ и удовлетворяющего соотношениям /1.33а/, /1.33б/, /1.33г/, /1.33д/ в случае спинов: $s=\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ задается формулой /3.87/. Если же $s > \frac{3}{2}$, то гамильтониан имеет вид /3.58/.

При этом уравнение /1.1/ инвариантно относительно группы E_3 и операции сильного отражения Θ.

Докажем теперь такое утверждение

Теорема 3.4.

Если уравнение

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t)=\mathcal{H}\Psi(\vec{x},t), \qquad /3.89/$$

где гамильтониан $\mathcal{H}$ - дифференциальный, эрмитовый в скалярном произведении /1.5/, удовлетворяющий условию

$$\mathcal{H}^2=\left(mc^2+\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\right)^2$$

оператор, инвариантно относительно группы E_3 и операции сильного отражения Θ, то оно инвариантно и относительно расширенной группы Галилея $\tilde{G}$.

Доказательство. В этом параграфе мы докажем теорему 3.4 для уравнений, где гамильтониан имеет вид /3.58/. Более сложный случай, когда $\mathcal{H}$ задается формулой /3.86/ будет рассмотрен в следующем параграфе.

В §1 мы установили, что уравнение /3.89/ будет инвариантно относительно расширенной группы Галилея $\tilde{G}$, если генераторы /1.2/ удовлетворяют коммутационным соотношениям /1.6а/ - /1.6к/. Следовательно, теорема /3.4/ будет доказана, если мы покажем, что генераторы $P_0=\mathcal{H}^c=\rho_3\sum\limits_{r}'\left(mc^2+\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\right)\Lambda_r, P_a,$ J_{ab}, G_a удовлетворяют соотношениям /1.6а/ - /1.6к/. Поскольку

/3.89/ инвариантно относительно группы E_3, то соотношения /1.6а/ - /1.6в/ выполнятся заведомо.

Положив в /1.2в/ $\lambda_a \equiv 0$, вычислим также коммутаторы

$$[P_a, G_b],\ [\mathcal{H}, G_a],\ [J_{ab}, G_a],\ [G_a, G_b]$$

$$[P_a, G_b] = [p_a, t p_b - \rho_3 m x_b] = -\rho_3 m [p_a, x_b] = \quad /3.90/$$

$$= i \rho_3 m \delta_{ab}$$

$$[\mathcal{H}, G_a] = [\rho_3 (mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}), t p_a - \rho_3 m x_a] = \quad /3.91/$$

$$= -\frac{1}{2} [\vec{p}^{\,2}, x_a] = i p_a.$$

$$[J_{ab}, G_c] = [x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, t p_c - \rho_3 m x_c] =$$

$$= t [x_a, p_c] p_b - t [x_b, p_c] p_a - \rho_3 m x_a [p_b, x_c] +$$

$$+ \rho_3 m x_b [p_a, x_c] = i \delta_{ac} t p_b - i \delta_{bc} t p_a + \quad /3.92/$$

$$+ i \delta_{bc} \rho_3 m x_a - i \delta_{ac} \rho_3 m x_b =$$

$$= i (\delta_{ac} G_b - \delta_{bc} G_a)$$

$$[G_a, G_b] = [t p_a - \rho_3 m x_a, t p_b - \rho_3 m x_b] =$$

$$= -t \rho_3 m [x_a, p_b] - \rho_3 m t [p_a, x_b] = \quad /3.93/$$

$$= -i t \rho_3 m \delta_{ab} + i \rho_3 m t \delta_{ab} = 0.$$

Из формул /3.90/ - /3.93/ видим, что соотношения /1.6г/ - /1.6л/ выполняются, следовательно, уравнение /3.89/ инвариантно относительно группы $\widetilde{G}$. Таким образом, для случая, когда $\mathcal{H}$ имеет вид /3.58/, теорема 3.4 доказана.

§ 4 Переход к каноническому представлению

В §3 мы построили уравнения вида /1.1/

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t)=\mathcal{H}\Psi(\vec{x},t) \qquad /4.1/$$

инвариантные относительно группы Евклида E_3 и операции сильного отражения /1.12/. При этом оператор $\mathcal{H}$ удовлетворяет условию

$$\mathcal{H}^2=E^2, \qquad /4.2/$$

где

$$E=mc^2+\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$$

Выше мы доказали теорему 3.4. о том, что если гамильтониан $\mathcal{H}$ имеет вид /3.58/, то уравнение /4.1/ инвариантно относительно расширенной группы Галилея $\widetilde{G}$.

При этом на решениях /4.1/ реализуется следующее представление генераторов группы $\widetilde{G}$

$$P_0^c=\mathcal{H}^c=\rho_3 E, \qquad /4.3а/$$

$$P_a^c=p_a=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad /4.3б/$$

$$J_{ab}^c=x_a p_b-x_b p_a+S_{ab}, \qquad /4.3в/$$

$$G_a^c=tp_a-\rho_3 m x_a. \qquad /4.3г/$$

В случае $s\le\frac{3}{2}$, кроме /3.58/, существуют гамильтонианы /3.86/, удовлетворяющие /4.2/, при которых уравнение /4.1/ инвариатно относительно E_s и операции сильного отражения Θ.

В этом параграфе мы покажем, что гамильтонианы $\mathcal{H}_s$ /3.86/ посредством унитарного преобразования

$$\mathcal{H}_s \to \mathcal{H}_s' = \mathcal{U}\,\mathcal{H}_s\,\mathcal{U}^+ = \mathcal{H}^c \qquad /4.4/$$

можно преобразовать к виду /3.58/

Итак, найдем оператор $\mathcal{U}$, удовлетворяющий условиям

$$\mathcal{U}\,\mathcal{U}^+ = \mathcal{U}^+\mathcal{U} = 1, \qquad /4.5/а$$

$$\mathcal{U}\,\mathcal{H}_s\,\mathcal{U}^+ = \mathcal{H}^c \qquad /4.5б/$$

Для решения этой задачи воспользуемся методом, предложенным Эриксеном [38], [39] при диагонализации гамильтониана Дирака.

Определим операторы $\Gamma_\pm$ и $B_\pm$ следующим образом

$$\Gamma_\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm \lambda\right) \qquad /4.6/$$

$$B_\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm \rho_3\right), \qquad /4.7/$$

где

$$\lambda = \frac{\mathcal{H}_s}{\left(\mathcal{H}_s^2\right)^{1/2}}$$ - оператор знака энергии,

$\Gamma_\pm$ - оператор проектирования на подпространства волновых функций, соответствующих положительным или отрицательным значениям энергии, $B_\pm$ - оператор проектирования на подпространства "верхних" и нижних компонент волновой функции Ψ.

Потребуем, чтобы оператор $\mathcal{U}$ удовлетворял условию

$$\Gamma_{\pm}' = \mathcal{U} \Gamma_{\pm} \mathcal{U}^{+} = B_{\pm} \qquad /4.8/$$

Покажем, что в случае отсутствия внешних электромагнитных полей из /4.8/ следует /4.5б/.

Поскольку оператор $\mathcal{U}$ унитарный, то имеет место /4.5а/. Подставив в формулу /4.8/ $\Gamma_{\pm}$ и $B_{\pm}$ по формулам /4.6/ и /4.7/ и учитывая /4.5а/, получаем

$$\mathcal{U} \lambda \mathcal{U}^{+} = \rho_3 \qquad /4.9/$$

но

$$\lambda = \frac{\mathcal{H}_s}{(\mathcal{H}_s^2)^{1/2}} = \frac{\mathcal{H}_s}{E}. \qquad /4.10/$$

Из формул /4.9/, /4.10/ и следует /4.5б/.

Учитывая /4.5а/, соотношение /4.9/ можно переписать так

$$\lambda \, \mathcal{U}^{+}_{\rho_3} \mathcal{U} \qquad /4.11/$$

Так же, как и в [38] , потребуем, чтобы оператор удовлетворял условию

$$\mathcal{U}^{+} \rho_3 = \rho_3 \mathcal{U} \qquad /4.12/$$

Принимая во внимание /4.12/, выражение /4.11/ можно записать так

$$\lambda = \rho_3 \, \mathcal{U}^2, \qquad /4.13/$$

или

$$\mathcal{U}^2 = \rho_3 \lambda. \qquad /4.14/$$

Следовательно, искомый оператор $\mathcal{U}$ будет корнем квадратным из $\rho_3\lambda$

$$\mathcal{U} = \sqrt{\rho_3 \lambda} \qquad /4.15/$$

Воспользовавшись тождеством Эриксена [38]

$$\sqrt{\rho_3 \lambda} \equiv (1+\rho_3\lambda)(2+\rho_3\lambda+\lambda\rho_3)^{-\frac{1}{2}}, \qquad /4.16/$$

находим, что оператор $\mathcal{U}$ имеет вид

$$\mathcal{U} = (1+\rho_3\lambda)(2+\rho_3\lambda+\lambda\rho_3)^{-\frac{1}{2}},$$
$$\mathcal{U}^{+} = (1+\lambda\rho_3)(2+\rho_3\lambda+\lambda\rho_3)^{-\frac{1}{2}} \qquad /4.17/$$

Запишем оператор /4.17/ в явном виде.

По определению

$$\lambda = \frac{\mathcal{H}_s}{(\mathcal{H}_s^2)^{1/2}} = \frac{\mathcal{H}_s}{E} = \frac{1}{E}\Big\{\sum_{\nu=-s}^{s}\rho_3\Big[mc^2 + \frac{\vec{P}^2}{2m} - \frac{\vec{P}^2}{m}\frac{\nu^2}{s^2}\sin^2\theta\Big) + \rho_2\Big[a_s + b_s\frac{\nu^2}{s^2}\Big]\frac{\vec{P}^2}{2m} + \rho_1\frac{c\sqrt{2}}{s}|\vec{P}|\nu\sin\theta\Big\}\Lambda_\nu,$$

тогда

$$\rho_3\lambda + \lambda\rho_3 = \sum_{\nu=-s}^{s}\Big(2 - \frac{2\vec{P}^2}{mE}\frac{\nu^2}{s^2}\sin^2\theta\Big)\Lambda_\nu$$

$$(2+\rho_3\lambda+\lambda\rho_3) = 4\sum_{\nu=-s}^{s}\Big(1 - \frac{\vec{P}^2}{2mE}\frac{\nu^2}{s^2}\sin^2\theta\Big)\Lambda_\nu$$

$$(2+\rho_3\lambda+\lambda\rho_3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=-s}^{s}\Big(1+\frac{\vec{P}^2}{2mE}\frac{\nu^2}{s^2}\times \sin^2\theta\Big)^{-1/2}\Lambda_\nu \qquad /4.18/$$

$$(1+\rho_3\lambda) = 1 + \frac{1}{E}\sum_{\nu=-s}^{s}\{mc^2+\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}-\frac{\vec{p}^{\,2}}{m}\frac{\nu^2}{s^2}\sin^2\theta)-$$
$$- i\rho_1[a_s+b_s\frac{\nu^2}{s^2}]\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}+i\rho_2\sqrt{2}\,c|\vec{p}|\frac{\nu}{s}\sin\theta\}\Lambda_\nu. \quad /4.19/$$

Подставляя /4.18/ и /4.19/ в формулу /4.17/, получаем оператор в явном виде

$$\mathcal{U}=\sum_{\nu=-s}^{s}\frac{(2E-\frac{\vec{p}^{\,2}}{m}\frac{\nu^2}{s^2}\sin^2\theta)-i\rho_1[a_s+b_s\frac{\nu^2}{s^2}]\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}+i\rho_2\sqrt{2}c|\vec{p}|\frac{\nu}{s}\sin\theta}{2E\sqrt{1-\frac{\vec{p}^{\,2}}{2mE}\frac{\nu^2}{s^2}\sin^2\theta}}\Lambda_\nu \quad /4.20/$$

$$\mathcal{U}^{+}=\sum_{\nu=-s}^{s}\frac{(2E-\frac{\vec{p}^{\,2}}{m}\frac{\nu^2}{s^2}\sin^2\theta)+i\rho_1[a_s+b_s\frac{\nu^2}{s^2}]\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}-i\rho_2\sqrt{2}c|\vec{p}|\frac{\nu}{s}\sin\theta}{2E\sqrt{1-\frac{\vec{p}^{\,2}}{2mE}\frac{\nu^2}{s^2}\sin^2\theta}}\Lambda_\nu \quad /4.21/$$

В частности, для случая $s=\frac{1}{2}$, учитывая /2.13/ и /3.86/, операторы /4.20/, /4.19/ можно записать так

$$\mathcal{U}=\frac{1}{2E}(E+\rho_3\mathcal{H}_{\frac{1}{2}})\sqrt{\frac{2mE}{2m^2c^2+\vec{p}^{\,2}\cos^2\theta}}, \quad /4.22/$$

$$\mathcal{U}^{+}=\frac{1}{2E}(E+\mathcal{H}_{\frac{1}{2}})\sqrt{\frac{2mE}{2m^2c^2+\vec{p}^{\,2}\cos^2\theta}}, \quad /4.23/$$

где $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ имеет вид /3.46/

Таким образом, нами доказано следующее утверждение

Теорема 4.1. Гамильтонианы $\mathcal{H}^c$ и $\mathcal{H}_s$ унитарно эквивалентны и связаны посредством унитарного оператора /4.20/.

Замечание. Из того факта, что такая связь существует непосредственно следует доказательство теоремы 3.4. для случая, когда $\mathcal{H}$ имеет вид /3.86/.

Действительно, посредством унитарного преобразования

$$\Psi \to \Psi' = \mathcal{U}\Psi,$$
$$\mathcal{H}_s \to \mathcal{H}^c = \mathcal{U}\mathcal{H}_s\mathcal{U}^{\dagger} \qquad /4.24/$$

уравнение /4.1/, где $\mathcal{H}$ определяется формулой /3.86/, приводятся к виду

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi' = \mathcal{H}^c\Psi' \qquad /4.25/$$

Но уравнение /4.25/, как мы показали в §3, инвариантно относительно группы $\widetilde{G}$, а на его решениях реализуется представление ее генераторов /4.3/.

Следовательно, и исходное уравнение /4.1/ инвариантно относительно группы $\widetilde{G}$, а ее генераторы в этом представлении имеют вид

$$P_0 = \mathcal{U}^{\dagger}P_0^c\mathcal{U} = \mathcal{H}_s; \qquad /4.26а/$$

$$P_a = \mathcal{U}^{\dagger}P_a^c\mathcal{U} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_a}; \qquad /4.26б/$$

$$J_{ab} = \mathcal{U}^{\dagger}J_{ab}\mathcal{U} = J_{ab}^c = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}; \qquad /4.26в/$$

$$G_a = \mathcal{U}^{\dagger}G_a^c\mathcal{U} = tp_a - \rho_3 m x_a + \lambda_a \qquad /4.26г/$$

где

$$\lambda_a = [\mathcal{U}^{\dagger}, G_a^c]\mathcal{U}. \qquad /4.27/$$

В дальнейшем представление, в котором генераторы группы $\widetilde{G}$

имеют вид /4.3а - 4.3г/, будем называть каноническими.

Таким образом, задача, поставленная в §1, полностью решена. Построены уравнения в форме Шредингера /1.1/ для нерелятивистской частицы с произвольным спином S, инвариантные относительно расширенной группы Галилея $\tilde{G}$ и операции сильного отражения Θ.

При этом гамильтониан $\mathcal{H}$ - дифференциальный оператор второго порядка, эрмитовый в скалярном произведении /1.5/ и удовлетворяющий условию /4.2/.

Явный вид $\mathcal{H}$ в случае произвольного спина задается формулой /3.58/. При $S \leq \frac{3}{2}$, кроме того, существуют операторы $\mathcal{H}_S$ /3.86/ в свободном случае унитарно эквивалентные /3.58/, но, как мы покажем ниже, совершенно отличные при введении минимального взаимодействия посредством стандартной замены $p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu$

§ 5 Операторы динамических переменных

В этом параграфе мы найдем операторы динамических переменных: координаты X_a, скорости $\dot{X}_a$, спина $\tilde{S}_{ab}$ для частиц со спином $S \leq \frac{3}{2}$, описываемых уравнениями /1.1/, где гамильтониан $\mathcal{H}_S$ имеет вид /3.86/. Если гамильтониан имеет вид /3.58/ /каноническое представление/, то, как и в релятивистском случае [40], операторы x_a, $\dot{x}_a$, S_{ab} имеют четкий физический смысл

x_a - оператор умножения на число x_a,

$$\dot{x}_a = [-i x_a, \mathcal{H}^c] = \frac{p_a}{m} \rho_3 = \frac{p_a \mathcal{H}^c}{m E}, \qquad /5.1/$$

$$S_{ab} = S_c,$$

а, в, с, - цикл /1,2,3/

При этом оператор спина S_c коммутирует с $\mathcal{H}^c$. В случае, если гамильтониан имеет вид /3.86/, величины x_a и S_{ab} не могут служить операторами соответствующих динамических переменных, поскольку S_{ab} не коммутирует с $\mathcal{H}_s$, хотя спин свободной частицы - сохраняющаяся величина.

Так как гамильтонианы $\mathcal{H}_s$ и $\mathcal{H}^c$ связаны между собой посредством унитарного оператора $\mathcal{U}$

$$\mathcal{H}_s = \mathcal{U}^+ \mathcal{H}^c \mathcal{U} \qquad /5.2/$$

то операторы динамических переменных в неканоническом представлении можно определить следующим образом

$$X_a = \mathcal{U}^+ x_a \mathcal{U}, \quad \tilde{S}_{ab} = \mathcal{U}^+ S_{ab} \mathcal{U},$$
$$\dot{X}_a = \mathcal{U}^+ \dot{x}_a \mathcal{U}, \qquad /5.3/$$

где оператор $\mathcal{U}$ имеет вид /4.20/.

Определенные таким образом X_a и $\tilde{S}_{ab}$ являются нерелятивистским аналогом оператора "средней координаты" и среднего спина" [34], [40] в релятивистской механике.

Из формул /5.3/ имеем

$$X_a = x_a - [x_a, \mathcal{U}^+]\mathcal{U} \qquad /5.4/$$

Вычислим выражение

$$[x_a, \mathcal{U}^+]\mathcal{U}. \qquad /5.4/$$

Чтобы упростить дальнейшие выкладки, оператор $\mathcal{U}$ /4.20/ и $\mathcal{U}^+$ /4.21/ запишем в виде

$$\mathcal{U} = \sum_{\tau=0}^{3} \sum_{\nu=-s}^{s} i \rho_\tau u_{\tau\nu} \Lambda_\nu \qquad /5.5/$$

$$\mathcal{U}^{+} = \sum_{\tau=0}^{3} \sum_{\nu=-s}^{s} -i \rho_\tau \, U^{*}_{\tau\nu} \Lambda_\nu \qquad /5.6/$$

где $U_{\tau\nu}$ имеют вид

$$U_{0\nu} = -i \, \frac{\left(2E - \frac{\vec{P}^2}{2m} \frac{\nu^2}{s^2} \sin^2\theta \right)}{2E\sqrt{1 - \frac{\vec{P}^2}{2mE} \frac{\nu^2}{s^2} \sin^2\theta}}, \qquad /5.7а/$$

$$U_{1\nu} = - \frac{\left[a_s + b_s \frac{\nu^2}{s^2}\right] \vec{P}^2}{4mE\sqrt{1 - \frac{\vec{P}^2}{2mE} \frac{\nu^2}{s^2} \sin^2\theta}}, \qquad /5.7б/$$

$$U_{2\nu} = \frac{\sqrt{2}\, c \, |\vec{P}| \frac{\nu}{s} \sin\theta}{2E\sqrt{1 - \frac{\vec{P}^2}{2mE} \frac{\nu^2}{s^2} \sin^2\theta}} \qquad /5.7в/$$

$$U_{3\nu} = 0 \qquad /5.7г/$$

Тогда

$$[x_a, \mathcal{U}^{+}] = [x_a, -i \sum_{\tau=0}^{3} \sum_{\nu=-s}^{s} \rho_\tau U^{*}_{\tau\nu} \Lambda_\nu] =$$

$$= -i \sum_{\tau=0}^{3} \sum_{\nu=-s}^{s} \rho_\tau [x_a, U^{*}_{\tau\nu}] \Lambda_\nu -$$

$$- i \sum_{\tau=0}^{3} \sum_{\nu=-s}^{s} \rho_\tau U^{*}_{\tau\nu} [x_a, \Lambda_\nu]. \qquad /5.8/$$

Учитывая соотношение /2.19/ и обозначив $U^{a}_{\tau\nu} = \frac{\partial U_{\tau\nu}}{\partial \rho_a}$, выражение /5.8/ можно переписать так

$$[x_a, U^+] = \sum_{\tau=0}^{3} \sum_{\nu=-s}^{s} \rho_\tau (U^a_{\tau\nu})^* \Lambda_\nu -$$

$$- \frac{i}{2|\vec{P}|} \frac{(\vec{P}\times\vec{S})_a}{|\vec{P}|} \sum_{\tau=0}^{3} \sum_{\nu=-s}^{s} \rho_\tau U^*_{\tau\nu} (\Lambda_{\nu-1} + \Lambda_{\nu+1} - 2\Lambda_\nu) +$$

$$+ \frac{1}{2|\vec{P}|} \left(S_a - \frac{P_a}{|\vec{P}|} S_p \right) \times$$

$$\times \sum_{\tau=0}^{3} \sum_{\nu=-s}^{s} \rho_\tau U^*_{\tau\nu} (\Lambda_{\nu-1} - \Lambda_{\nu+1}) \qquad /5.9/$$

Подставив /5.9/ и /5.5/ в формулу /5.4'/, получаем

$$[x_a, U^+] U = \sum_{\tau=0}^{3} \sum_{\omega=0}^{3} \sum_{\nu=-s}^{s} \sum_{\mu=-s}^{s} i \rho_\tau \rho_\omega (U^a_{\tau\nu})^* U_{\omega\mu} \Lambda_\nu \Lambda_\mu^+$$

$$+ \frac{1}{2|\vec{P}|} \frac{(\vec{P}\times\vec{S})_a}{|\vec{P}|} \sum_{\tau=0}^{3} \sum_{\omega=0}^{3} \sum_{\nu=-s}^{s} \sum_{\mu=-s}^{s} \rho_\tau \rho_\omega U^*_{\tau\nu} U_{\tau\mu} \times$$

$$\times (\Lambda_{\nu-1} + \Lambda_{\nu+1} - 2\Lambda_\nu) \Lambda_\mu + \frac{i}{2|\vec{P}|} \left(S_a - \frac{P_a}{|\vec{P}|} S_p \right) \times$$

$$\times \sum_{\tau=0}^{3} \sum_{\omega=0}^{3} \sum_{\nu=-s}^{s} \sum_{\mu=-s}^{s} \rho_\tau \rho_\omega U^*_{\tau\nu} U_{\omega\mu} (\Lambda_{\nu-1} - \Lambda_{\nu+1}) \Lambda_\mu . \qquad /5.10/$$

Учитывая свойство ортопроекторов /2.3/, выражение /5.10/ приводим к виду

$$[x_a, U^+] U = i \sum_{\tau=0}^{3} \sum_{\omega=0}^{3} \sum_{\mu=-s}^{s} \rho_\tau \rho_\omega (U^a_{\tau\mu})^* U_{\tau\mu} \Lambda_\mu +$$

$$+ \frac{1}{2|\vec{P}|} \frac{(\vec{P}\times\vec{S})_a}{|\vec{P}|} \sum_{\tau=0}^{3} \sum_{\omega=0}^{3} \sum_{\mu=-s}^{s} \rho_\tau \rho_\omega \left(U^*_{\tau(\mu+1)} + U^*_{\tau(\mu-1)} - \right.$$

$$\left. - 2 U^*_{\tau\mu} \right) U_{\omega\mu} \Lambda_\mu + \frac{i}{2|\vec{P}|} \left(S_a - \frac{P_a}{|\vec{P}|} S_p \right) \times$$

$$\sum_{\tau=0}^{3} \sum_{\omega=0}^{3} \sum_{\mu=-s}^{s} \rho_\tau \rho_\omega \left(U^*_{\tau(\mu+1)} - U^*_{\tau(\mu-1)} \right) \Lambda_\mu \qquad /5.11/$$

Подставляя /5.11/ в формулу /5.4/, получаем выражение для оператора координаты в неканоническом представлении

$$X_a = x_a + \frac{(\vec{P}\times\vec{S})_a}{\vec{P}^2} - i\sum_{\tau=0}^{3}\sum_{\omega=0}^{3}\sum_{\mu=-s}^{s}\rho_\tau\rho_\omega(U^a_{\tau\mu})^* \times$$

$$\times U_{\omega\mu}\Lambda_\mu - \frac{1}{2|\vec{P}|}\frac{(\vec{P}\times\vec{S})_a}{|\vec{P}|}\sum_{\tau=0}^{3}\sum_{\omega=0}^{3}\sum_{\mu=-s}^{s}\rho_\tau\rho_\omega\Big(U^*_{\tau(\mu+1)} +$$

$$+ U^*_{\tau(\mu-1)}\Big)U_{\omega\mu}\Lambda_\mu - \frac{i}{2|\vec{P}|}\Big(S_a -$$

$$- \frac{P_a}{|\vec{P}|}S_p\Big)\sum_{\tau=0}^{3}\sum_{\omega=0}^{3}\sum_{\mu=-s}^{s}\rho_\tau\rho_\omega\Big(U^*_{\tau(\mu+1)} -$$

$$- U^*_{\tau(\mu-1)}\Big)\Lambda_\mu. \qquad /5.12/$$

Исходя из формул /5.12/, используя явный вид $U_{\omega\mu}$, $U^*_{\tau(\mu-1)}$, $U^*_{\tau\mu}$, $U^*_{\tau(\mu+1)}$ /5.7а - 5.7г/, соотношения /2.21/ и явный вид операторов ортогонального проектирования /2.16 - 2.18/, можно вычислить конкретный вид оператора X_a для $S \leq \frac{3}{2}$.

В случае $S=\frac{1}{2}$ и $S=1$ операторы и выглядят так

$$X_a^{(\frac{1}{2})} = x_a - \frac{(\vec{\sigma}\times\vec{P})_a mc^2 \sin^2\theta}{E(2m^2c^2+\vec{P}^2\cos^2\theta)} +$$

$$+\rho_1\frac{mc^2 p_a \sin 2\theta}{E(2mc^2+\vec{P}^2\cos^2\theta)} -$$

$$-\rho_2\frac{\sqrt{2}\{2m^2c^2\sigma_a + [\vec{P}^2 c\,\sigma_a - 2c(\vec{\sigma}\vec{P})p_a]\cos^2\theta\}\sin\theta}{2E(2m^2c^2+\vec{P}^2\cos^2\theta)} \qquad /5.13/$$

$$+\rho_3\frac{\sqrt{2}[\vec{P}^2 c\,\sigma_a - 2(\vec{\sigma}\vec{P})p_a c]\sin\theta\sin 2\theta}{4E(2m^2c^2+\vec{P}^2\cos^2\theta)}.$$

$$X_a^{(1)} = x_a + \frac{(\vec{S}\times\vec{P})_a}{\vec{P}^2}\cdot\frac{\sqrt{2m^2c^2+\vec{P}^2\cos^2\theta} - \sqrt{2m^2c^2+\vec{P}^2}}{\sqrt{2m^2c^2+\vec{P}^2}} +$$

$$+ \rho_1\Big\{\frac{mc^2(\vec{S}\vec{P})^2 p_a \sin 2\theta}{\vec{P}^2 E(2mc^2+\vec{P}^2\cos^2\theta)} -$$

$$- \frac{[2p_1(\vec{S}\vec{P})^2 - \vec{P}^2[S_a(\vec{S}\vec{P})]_+]\sin 2\theta}{4mE\vec{P}^2}\sqrt{\frac{2mE}{2m^2c^2+\vec{P}^2\cos^2\theta}}\Big\} -$$

$$-\rho_2\Big\{\frac{\sqrt{2}c(\vec{S}\vec{P})p_a\sin\theta}{2E\vec{P}^2} - \frac{\sqrt{2}c(\vec{S}\vec{P})p_a\sin\theta}{2mE^2} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}m^3c^3(\vec{S}\vec{P})p_a\sin^3\theta}{mE^2(2m^2c^2+\vec{P}^2\cos^2\theta)} + \frac{\sqrt{2}c\sin\theta}{2E}\times$$

$$\times\Big(S_a - \frac{p_a}{|\vec{P}|}S_p\Big)\sqrt{\frac{2mE}{2m^2c^2+\vec{P}^2\cos^2\theta}}\Big\} - \rho_3\frac{\sqrt{2}c(\vec{S}\vec{P})p_a\sin\theta\sin 2\theta}{4E(2m^2c^2+\vec{P}^2\cos^2\theta)} \qquad /5.14/$$

Найдем теперь оператор спина в неканоническом представлении по формуле

$$\tilde{S}_{ab} = U^+ S_{ab} U = S_{ab} - [S_{ab}, U^+]U \qquad /5.15/$$

Для вычисления входящего в /5.15/ коммутатора используем тот факт, что оператор U^+ коммутирует с J_{ab} /4.26в/

$$[J_{ab}, U^+] = [x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, U^+] = 0 \qquad /5.16/$$

Из /5.16/ следует, что

$$[S_{ab}, U^+] = [x_b p_a - x_a p_b, U^+] \qquad /5.17/$$

Тогда выражение $[S_{ab}, U^+]U$ можно записать так

$$[S_{ab}, U^+]U = [x_b, U^+]p_a U - [x_a, U^+]p_b U$$

или, учитывая /5.4/,

$$[S_{ab}, U^{+}]U = p_b(X_a - x_a) - p_a(X_b - x_b) \qquad /5.18/$$

Подставляя /5.18/ в /3.15/, получаем оператор спина $\tilde{S}_c = \tilde{S}_{ab}$ в неканоническом представлении

$$\tilde{S}_c = \tilde{S}_{ab} = S_{ab} + p_a(X_b - x_b) - p_b(X_a - x_a) \qquad /5.19/$$

Или, учитывая /5.12/

$$\tilde{S}_c = S_c + \frac{p_a(\vec{p}\times\vec{S})_b}{\vec{p}^{\,2}} - \sum_{\tau=0}^{3}\sum_{\omega=0}^{3}\sum_{\mu=-s}^{s} p_\tau p_\omega p_a \frac{\partial U^{*}_{\tau\mu}}{\partial p_b} U_{\omega\mu}\Lambda_\mu -$$
$$- \frac{p_a}{2|\vec{p}|}\frac{(\vec{p}\times\vec{S})_b}{|\vec{p}|}\sum_{\tau=0}^{3}\sum_{\omega=0}^{3}\sum_{\mu=-s}^{s} p_\tau p_\omega \big(U^{*}_{\tau(\mu+1)} +$$
$$+ U^{*}_{\tau(\mu-1)}\big)U_{\omega\mu}\Lambda_\mu - \frac{i p_a}{2|\vec{p}|}\Big(S_b - \frac{p_b}{|\vec{p}|}S_p\Big)\times$$
$$\times\sum_{\tau=0}^{3}\sum_{\omega=0}^{3}\sum_{\mu=-s}^{s} p_\tau p_\omega\big(U^{*}_{\tau(\mu+1)} - U^{*}_{\tau(\mu-1)}\big)U_{\omega\mu}\Lambda_\mu -$$
$$- \frac{p_b(\vec{p}\times\vec{S})_a}{\vec{p}^{\,2}} + i\sum_{\tau=0}^{3}\sum_{\omega=0}^{3}\sum_{\mu=-s}^{s} p_\tau p_\omega p_b \frac{\partial U^{*}_{\tau\mu}}{\partial p_a} U_{\omega\mu}\Lambda_\mu +$$
$$+ \frac{p_b}{2|\vec{p}|}\frac{(\vec{p}\times\vec{S})_a}{|\vec{p}|}\sum_{\tau=0}^{3}\sum_{\omega=0}^{3}\sum_{\mu=-s}^{s} p_\tau p_\omega\big(U^{*}_{\tau(\mu+1)} + U^{*}_{\tau(\mu-1)}\big)U_{\omega\mu}\Lambda_\mu +$$
$$+ \frac{i p_b}{2|\vec{p}|}\Big(S_a - \frac{p_a}{|\vec{p}|}S_p\Big)\sum_{\tau=0}^{3}\sum_{\omega=0}^{3}\sum_{\mu=-s}^{s} p_\tau p_\omega\big(U^{*}_{\tau(\mu+1)} - U^{*}_{\tau(\mu-1)}\big)U_{\omega\mu}\Lambda_\mu \qquad /5.20/$$

Используя формулы /5.7а/ - /5.7г/, непосредственной проверкой легко убедиться, что имеют место такие соотношения

$$p_a \frac{\partial U^{*}_{\tau\mu}}{\partial p_b} - p_b \frac{\partial U^{*}_{\tau\mu}}{\partial p_a} = 0 \qquad /5.21/$$

$$\rho_a(\vec{p}\times\vec{S})_b-\rho_b(\vec{p}\times\vec{S})_a=\vec{p}^{\,2}\left(S_c-\frac{p_c}{|\vec{p}|}S_p\right) \qquad /5.22/$$

а, в, с, - цикл 1,2,3

Если учесть /5.21/ и /5.22/, то /5.20/ можно переписать так

$$\tilde{S}_c=S_c-\left(S_c-\frac{p_c}{|\vec{p}|}S_p\right)+\frac{1}{2}\left(S_c-S_p\frac{p_c}{|\vec{p}|}\right)\times$$

$$\times\sum_{\tau=0}^{3}\sum_{\omega=0}^{3}\sum_{\mu=-s}^{s}p_\tau p_\omega\left(U^*_{\tau(\mu+1)}+U^*_{\tau(\mu-1)}\right)U_{\omega\mu}\Lambda_\mu-$$

$$-\frac{i\,(\vec{p}\times\vec{S})_c}{2|\vec{p}|}\sum_{\tau=0}^{3}\sum_{\omega=0}^{3}\sum_{\mu=-s}^{s}p_\tau p_\omega\left(U^*_{\tau(\mu+1)}-U^*_{\tau(\mu-1)}\right)U_{\omega\mu}\Lambda_\mu,$$

или

$$\tilde{S}_c=\frac{S_p\,p_c}{|\vec{p}|}+\frac{1}{2}\left(S_c-S_p\frac{p_c}{|\vec{p}|}\right)\sum_{\tau=0}^{3}\sum_{\omega=0}^{3}\sum_{\mu=-s}^{s}p_\tau p_\omega\times$$

$$\times\left(U^*_{\tau(\mu+1)}+U^*_{\tau(\mu-1)}\right)U_{\omega\mu}\Lambda_\mu-$$

$$-\frac{i(\vec{p}\times\vec{S})_c}{2|\vec{p}|}\sum_{\tau=0}^{3}\sum_{\omega=0}^{3}\sum_{\mu=-s}^{s}p_\tau p_\omega\left(U^*_{\tau(\mu+1)}-\right. \qquad /5.23/$$

$$\left.-U^*_{\tau(\mu-1)}\right)U_{\omega\mu}\Lambda_\mu.$$

Исходя из формул /5.23/, учитывая явный вид $U^*_{\tau(\mu-1)}$, $U^*_{\tau\mu}$, $U^*_{\tau(\mu+1)}$/5.7а - 5.7г/, соотношения /2.22/ и явный вид операторов ортогонального проектирования /2.16 - 2.18/, можно вычислить конкретный вид оператора S_a для $s\leq\frac{3}{2}$

В случае $s=\frac{1}{2}$ и $s=1$ операторы $\tilde{S}_a^{(\frac{1}{2})}$ и $\tilde{S}_a^{(1)}$ выглядят так

$$\tilde{S}_a^{(\frac{1}{2})} = S_a - \rho_2 \sqrt{2}\, \frac{c(\vec{P}\times\vec{S})_a}{E} \sin\theta - \\ - \frac{2[\vec{P}^2 S_a - (\vec{S}\vec{P})P_a]}{E(2m^2c^2+\vec{P}^2\cos^2\theta)}\, mc^2 \sin^2\theta - \\ - \rho_3 \frac{\sqrt{2}\,(\vec{P}\times\vec{S})_a \vec{P}^2 c \sin\theta \sin 2\theta}{2E(2m^2c^2+\vec{P}^2\cos^2\theta)} \qquad /5.24/$$

$$\tilde{S}_a^{(1)} = S_a - \frac{\vec{P}^2 S_a - P_a(\vec{S}\vec{P})}{\vec{P}^2}\, \frac{\sqrt{2m^2c^2+\vec{P}^2\cos^2\theta} - \sqrt{2mE}}{\sqrt{2mE}} + \\ + \rho_1 \frac{[(\vec{P}\times\vec{S})_a, (\vec{S}\vec{P})]_+ \sin 2\theta}{4mE} \sqrt{\frac{2mE}{2m^2c^2+\vec{P}^2\cos^2\theta}} - \\ - \rho_2 \frac{(\vec{P}\times\vec{S})_a \sqrt{2}\, c \sin\theta}{2E} \sqrt{\frac{2mE}{2m^2c^2+\vec{P}^2\cos^2\theta}} \qquad /5.25/$$

Наконец, определим оператор скорости

$$\dot{X}_a = i[\mathcal{H}_s, X_a] \qquad /5.26/$$

В каноническом представлении соответствующий оператор имеет вид

$$\dot{x}_a = i[\mathcal{H}^c, x_a] = i[\rho_3(mc^2 + \frac{\vec{P}^2}{2m}), x_a] = \rho_3 \frac{P_a}{m} \qquad /5.27/$$

Подставив /5.27/ в формулу

$$\dot{X}_a = \mathcal{U}^+ \dot{x}_a \mathcal{U}$$

находим, что оператор скорости $\dot{X}_a$ в неканоническом представлении задаётся формулой

$$\dot{X}_a = \frac{\mathcal{H}_s}{E} \cdot \frac{P_a}{m} \qquad /5.28/$$

Таким образом, мы нашли явный вид операторов координаты, спина и скорости в неканоническом представлении для частиц со спином $S \leq \frac{3}{2}$.

§ 6. Плотность и вектор плотности тока вероятности. Уравнение непрерывности.

В этом параграфе, исходя из уравнений /1.1/, мы построим уравнение непрерывности, найдем явные выражения для плотности вероятности и вектора плотности тока вероятности.

6.1. Рассмотрим случай, когда $\mathcal{H}$ имеет вид /3.58/. Тогда, учитывая явный вид оператора $p_a = -i\hbar\nabla_a$, уравнение /1.1/ можно записать так

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \rho_3\left(mc^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_a\right)\Psi, \qquad /6.1/$$

где по повторяющимся индексам а подразумевается суммирование от 1 до 3.

Уравнение /6.1/, умножив на $-\frac{i}{\hbar}$, перепишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi = -\frac{i}{\hbar}mc^2\rho_3\Psi + \frac{i\hbar}{2m}\rho_3\left(\nabla_a^2\Psi\right) \qquad /6.2/$$

Из /6.2/ следует, что эрмитово сопряженная функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi^{+}=\frac{i}{\hbar}mc^{2}\Psi^{+}\rho_{3}-\frac{i\hbar}{2m}(\nabla_{a}^{2}\Psi^{+})\rho_{3} \qquad /6.3/$$

Умножив /6.2/ на Ψ^{+} слева, а /6.3/ на Ψ справа и сложив их почленно, приходим к такому уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^{+}\Psi)=\frac{i\hbar}{2m}[\Psi^{+}\rho_{3}(\nabla_{a}^{2}\Psi)-(\nabla_{a}^{2}\Psi^{+})\rho_{3}\Psi]. \qquad /6.4/$$

Плотность вероятности обозначим, как это принято в квантовой механике, следующим образом

$$\rho=\Psi^{+}\Psi \qquad /6.5/$$

Тогда /6.4/ можно рассматривать как уравнение непрерывности

$$\frac{d\rho}{dt}+div\vec{j}=0 \qquad /6.6/$$

если вектор плотности тока вероятности определить так:

$$\vec{j}=\frac{i\hbar}{2m}(\vec{\nabla}\Psi^{+}\rho_{3}\Psi-\Psi^{+}\rho_{3}\vec{\nabla}\Psi) \qquad /6.7/$$

/6.7/ отличается от нерелятивистского вектора плотности тока вероятности, характерного для обычного уравнения Шредингера

$$\vec{j}=\frac{i\hbar}{2m}(\vec{\nabla}\psi^{*}\psi-\psi^{*}\vec{\nabla}\psi) \qquad /6.8/$$

лишь соответствующей размерностью волновой функции и наличием матрицы ρ_3 . Это обусловлено тем, что мы описываем с помощью уравнения /1.1/ частицу с двумя знаками энергии.

6.2 Рассмотрим случай $S=\frac{1}{2}$, когда гамильтониан имеет вид /3.87/.

Мы отдельно рассматриваем случай $S=\frac{1}{2}$, чтобы полученные результаты сравнить с результатами, вытекающими из теории Дирака [1]

Из формул /1.1/ и /3.46/ следует, что уравнение движения при этом имеет вид

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi=-\frac{i}{\hbar}mc^2\rho_3\Psi+\frac{i\hbar}{2m}\cos 2\theta\rho_3\left(\nabla_a^2\Psi\right)+$$

$$+\frac{i\hbar}{2m}\sin 2\theta\rho_2\left(\nabla_a^2\Psi\right)-c\sqrt{2}\sin\theta\rho_1\sigma_a\left(\nabla_a\Psi\right) \qquad /6.8/$$

Используя /6.8/, нетрудно получить уравнение для эрмитово сопряженной волновой функции Ψ^+

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi^+=\frac{i}{\hbar}mc^2\Psi^+\rho_3-\frac{i\hbar}{2m}\cos 2\theta\left(\nabla_a^2\Psi^+\right)\rho_3-$$

$$-\frac{i\hbar}{2m}\sin 2\theta\left(\nabla_a^2\Psi^+\right)\rho_2-c\sqrt{2}\sin\theta\left(\nabla_a\Psi^+\right)\rho_1\sigma_a \qquad /6.9/$$

Сложив почленно /6.8/ и /6.9/, предварительно умноженные на Ψ^+ справа и Ψ слева, соответственно, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^+\Psi\right)+\Big\{\frac{i\hbar}{2m}\cos 2\theta\left[\left(\nabla_a^2\Psi^+\right)\rho_3\Psi-\Psi^+\rho_3\left(\nabla_a^2\Psi\right)\right]+$$
$$\frac{i\hbar}{2m}\sin 2\theta\left[\left(\nabla_a^2\Psi^+\right)\rho_2\Psi-\Psi^+\rho_2\left(\nabla_a^2\Psi\right)\right]+$$
$$+c\sqrt{2}\sin\theta\left[\Psi^+\rho_1\sigma_a\left(\nabla_a\Psi\right)+\left(\nabla_a\Psi^+\right)\rho_1\sigma_a\Psi\right]\Big\} \qquad /6.10/$$

Если, как и прежде, за плотность вероятности принять выражение /6.5/, то /6.10/ можно рассматривать как уравнение непрерывности, если положить, что вектор плотности тока вероятности имеет вид

$$\vec{J} = \frac{i\hbar}{2m}\cos 2\theta\left[(\vec{\nabla}\Psi^{+})\rho_3\Psi - \Psi^{+}\rho_3(\vec{\nabla}\Psi)\right] + \frac{i\hbar}{2m}\sin 2\theta\left[(\vec{\nabla}\Psi^{+})\rho_2\Psi - \Psi^{+}\rho_2(\vec{\nabla}\Psi)\right] + c\sqrt{2}\sin\theta\,\Psi^{+}\rho_1\vec{\sigma}\Psi \qquad /6.11/$$

При $\theta = n\pi$ / = 0, 1, 2, .../ выражение /6.11/, как и следовало ожидать, совпадает с /6.7/

Рассмотрим случай $\theta = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$

Обозначив $\rho_1\vec{\sigma} = \vec{\alpha}$, выражение /6.11/ можно переписать так

$$\vec{J} = \vec{J}_{рел.} + \vec{J}_{нерел.} \qquad /6.12/$$

где $\vec{J}_{рел.}$ - вектор плотности тока вероятности, построенный Дираком [1]

$$\vec{J}_{рел.} = c\,\Psi^{+}\vec{\alpha}\,\Psi, \qquad /6.13/$$

а $\vec{J}_{нерел.}$ отличается от /6.7/ лишь ρ -матрицей

$$\vec{J}_{нерел.} = \frac{i\hbar}{2m}\left[\vec{\nabla}\Psi^{+}\rho_2\Psi - \Psi^{+}\rho_2\vec{\nabla}\Psi\right] \qquad /6.14/$$

6.3. Рассмотрим общий случай, когда гамильтониан имеет вид /3.87/. При этом запишем уравнение непрерывности, плотность вероятности и вектор плотности тока вероятности.

Поскольку мы рассматриваем движение частицы при отсутствии внешних электромагнитных полей, то вследствие соотношения

$$[\rho_a, \rho_b] = 0,$$

имеет место такое тождество

$$(\vec{S}\vec{p})^2 \equiv p_a p_b [\dot{S}_a, \dot{S}_b]_+ - \dot{S}_a^2 p_a^2, \qquad /6.15/$$

где

$$\dot{S}_a = \frac{S_a}{S}$$

Учитывая /6.15/, уравнение /1.1/ с гамильтонианом /3.87/ можно записать так

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi = -\frac{i}{\hbar} mc^2 \rho_3 \Psi + \frac{i\hbar}{2m}\rho_3 (\nabla_a^2 \Psi) - \frac{i\hbar}{m}\sin^2\theta \cdot$$
$$\cdot \rho_3 [\dot{S}_a, \dot{S}_b]_+ (\nabla_a \nabla_b \Psi) + \frac{i\hbar}{m}\sin^2\theta \rho_3 \dot{S}_a^2 (\nabla_a^2 \Psi) +$$
$$+ \frac{i\hbar a_s}{2m}\rho_2 (\nabla_a^2 \Psi) + \frac{i\hbar b_s}{2m}\rho_2 [\dot{S}_a, \dot{S}_b]_+ (\nabla_a \nabla_b \Psi) -$$
$$- \frac{i\hbar b_s}{2m}\rho_2 \dot{S}_a^2 (\nabla_a^2 \Psi) - c\sqrt{2}\sin\theta \rho_1 \dot{S}_a (\nabla_a \Psi). \qquad /6.16/$$

Уравнение для эрмитово сопряженной волновой функции Ψ^+ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi^{+}=\frac{i}{\hbar}mc^{2}\Psi^{+}\rho_{3}-\frac{i\hbar}{2m}(\nabla_a^2\Psi^{+})\rho_3+$$
$$+\frac{i\hbar}{m}\sin^2\theta(\nabla_a\nabla_b\Psi^{+})[\dot{S}_a,\dot{S}_b]_+\rho_3-$$
$$-\frac{i\hbar}{m}\sin^2\theta(\nabla_a^2\Psi^{+})\dot{S}_a^2\rho_3-\frac{i\hbar a_s}{2m}(\nabla_a^2\Psi^{+})\rho_2-$$
$$-\frac{i\hbar b_s}{2m}(\nabla_a\nabla_b\Psi^{+})[\dot{S}_a,\dot{S}_b]_+\rho_2+$$
$$+\frac{i\hbar b_s}{2m}(\nabla_a^2\Psi^{+})\dot{S}_a^2\rho_2-c\sqrt{2}\sin\theta(\nabla_a\Psi^{+})\dot{S}_a\rho_1 \qquad /6.17/$$

Умножив /6.16/ на Ψ^{+} слева, а /6.17/ на Ψ справа и сложив их почленно, приходим к такому уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^{+}\Psi)+\Big\{\frac{i\hbar}{2m}\big[(\nabla_a^2\Psi^{+})\rho_3\Psi-\Psi^{+}\rho_3(\nabla_a^2\Psi)\big]-$$
$$-\frac{i\hbar}{m}\sin^2\theta\big[(\nabla_a\nabla_b\Psi^{+})[\dot{S}_a,\dot{S}_b]_+\rho_3\Psi-\Psi^{+}\rho_3[\dot{S}_a,\dot{S}_b]_+\times$$
$$(\nabla_a\nabla_b\Psi)\big]+\frac{i\hbar}{m}\sin^2\theta\big[(\nabla_a^2\Psi^{+})\dot{S}_a^2\rho_3\Psi-$$
$$-\Psi^{+}\rho_3\dot{S}_a^2(\nabla_a^2\Psi)\big]+\frac{i\hbar a_s}{2m}\big[(\nabla_a^2\Psi^{+})\rho_2\Psi-$$
$$-\Psi^{+}\rho_2(\nabla_a^2\Psi)\big]+\frac{i\hbar b_s}{2m}\big[(\nabla_a\nabla_b\Psi^{+})[\dot{S}_a,\dot{S}_b]_+\rho_2\Psi- \qquad /6.18/$$
$$-\Psi^{+}\rho_2[\dot{S}_a,\dot{S}_b]_+(\nabla_a\nabla_b\Psi)\big]-\frac{i\hbar b_s}{2m}\big[(\nabla_a^2\Psi^{+})\dot{S}_a^2\rho_2\Psi-$$
$$-\Psi^{+}\rho_2\dot{S}_a^2(\nabla_a^2\Psi)\big]+c\sqrt{2}\sin\theta\big[(\nabla_a\Psi^{+})\dot{S}_a\rho_1\Psi+$$
$$+\Psi^{+}\rho_1\dot{S}_a(\nabla_a\Psi)\big]\Big\}=0$$

Когда плотность вероятности задается формулой /6.5/, то /6.18/ можно рассматривать как уравнение непрерывности, если опреде-

лить вектор плотности тока вероятности следующим образом:

$$\vec{J} = \frac{i\hbar}{2m}[(\nabla_a \Psi^+)\rho_3\Psi - \Psi^+\rho_3(\nabla_a\Psi)] -$$
$$- \frac{i\hbar}{m}\sin^2\theta[(\nabla_b\Psi^+)[\dot{S}_a,\dot{S}_b]_+\rho_3\Psi -$$
$$- \Psi^+\rho_3[\dot{S}_a,\dot{S}_b]_+(\nabla_b\Psi)] + \frac{i\hbar}{m}\sin^2\theta[(\nabla_a\Psi^+)\times$$
$$\dot{S}_a^2\rho_3\Psi - \Psi^+\rho_3 S_a^2(\nabla_a\Psi)] +$$
$$+ \frac{i\hbar a_s}{2m}[(\nabla_a\Psi^+)\rho_2\Psi - \Psi^+\rho_2(\nabla_a\Psi)] + \qquad /6.19/$$
$$+ \frac{i\hbar b_s}{2m}[(\nabla_a\Psi^+)[\dot{S}_a,\dot{S}_b]_+\rho_2\Psi - \Psi^+\rho_2[\dot{S}_a,\dot{S}_b]_+(\nabla_b\Psi)] -$$
$$- \frac{i\hbar b_s}{2m}[(\nabla_a\Psi^+)\dot{S}_a^2\rho_2\Psi - \Psi^+\rho_2\dot{S}_a^2(\nabla_a\Psi)] +$$
$$+ c\sqrt{2}\sin\theta\,\Psi^+\rho_1 S_a^2\Psi.$$

В случае $s = \frac{1}{2}$ ($\dot{S}_a = \frac{S_a}{s} = \sigma_a$, $\dot{S}_a^2 = 1$, $[\dot{S}_a, \dot{S}_b]_+ = \delta_{ab}$ выражение /6.19/ совпадает с /6.11/, а при $\theta = n\pi$ — с /6.7/.

Таким образом, исходя из уравнения /1.1/ с гамильтонианами /3.58/ и /3.87/, построены уравнения непрерывности /6.4/ и /6.18/, соответственно. Для каждого случая выписаны выражения для плотности вероятности /6.5/ и вектора плотности тока вероятности /6.7/ и /6.19/

§ 7. Уравнение для заряженной нерелятивистской частицы со спином $s \leq \frac{3}{2}$ во внешнем электромагнитном поле.

В этом параграфе уравнения /1.1/ с гамильтонианом /3.87/ будут обобщены на случай движения заряженной нерелятивистской частицы со спином $s \leq \frac{3}{2}$ во внешнем электромагнитном поле.

Согласно общему правилу, переход от уравнений свободного движения к уравнениям, описывающим движение этой же частицы во внешнем электромагнитном поле с потенциалами $(A_0, \vec{A})$ осуществляется с помощью стандартной замены

$$\vec{p} = \vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}, \; p_0 \to \pi_0 = p_0 - \frac{e}{c}A_0, \; A_0 = \varphi \qquad /7.1/$$

Прежде, чем сделать замену /7.1/, в гамильтониане /8.87/ члены, содержащие $(\vec{S}\vec{P})^2$, запишем в таком симметричном виде

$$(\vec{S}\vec{P})^2_c \equiv (\vec{S}\vec{P})^2 \equiv \frac{1}{2}[S_a, S_b]_+ [p_a, p_b]_+ \qquad /7.2/$$

Этим мы обеспечим эрмитовость гамильтониана относительно скалярного произведения /1.5/ и после замены /7.1/. При этом уравнение движения для заряженной нерелятивистской частицы со спином $S \leq \frac{3}{2}$ имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \mathcal{H}_s(\vec{\pi})\Psi \qquad /7.3/$$

где

$$\mathcal{H}_s(\vec{\pi}) = \rho_3\left[mc^2 + \frac{\vec{\pi}^2}{2m} - \frac{(\vec{S}\vec{\pi})^2}{ms^2}\sin^2\theta - \right.$$
$$\left. - \frac{e\hbar(\vec{S}\vec{H})}{2mcs^2}\sin^2\theta\right] + \rho_2\left[a_s\frac{\vec{\pi}^2}{2m} + b_s\frac{(\vec{S}\vec{\pi})^2}{2ms^2} + \right. \qquad /7.4/$$
$$\left. + b_s\frac{e\hbar(\vec{S}\vec{H})}{4mcs^2}\right] + \rho_1\sqrt{2}\,c\frac{(\vec{S}\vec{\pi})}{s}\sin\theta + e\varphi$$

– гамильтониан, а $\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}$ напряженность магнитного поля.

Как и в случае релятивистского уравнения Дирака [40] оператор /7.4/ можно представить в виде

$$\mathcal{H}_s(\vec{\pi}) = \rho_3 mc^2 + \mathcal{E} + \mathcal{O}, \qquad /7.5/$$

где

$\mathcal{E}$ - так называемая "четная" часть гамильтониана, коммутирующая с матрицей ρ_3

$$[\mathcal{E}, \rho_3] = 0,$$

а $\mathcal{O}$ - "нечетная" часть, антикоммутирующая с ρ_3

$$[\mathcal{O}, \rho_3]_+ = 0.$$

Для нашего случая

$$\mathcal{E} = \rho_3 \left[\frac{\vec{\pi}^2}{2m} - \frac{(\vec{S}\vec{\pi})^2}{mS^2} \sin^2\theta - \frac{e\hbar(\vec{S}\vec{H})}{2mcS^2} \sin^2\theta \right] + e\varphi, \qquad /7.6/$$

$$\mathcal{O} = \rho_2 \left[a_s \frac{\vec{\pi}^2}{2m} + b_s \frac{(\vec{S}\vec{\pi})^2}{2mS^2} + b_s \frac{e\hbar(\vec{S}\vec{H})}{4mS^2c} \right] + \rho_1 \sqrt{2}\, c \frac{(\vec{S}\vec{\pi})}{S} \sin\theta. \qquad /7.7/$$

Точно диагонализировать /привести к виду, содержащему лишь "четные" операторы/ гамильтониан /7.4/ нельзя. Его можно диагонализировать лишь приближенно, аналогично тому, как это сделали Фолди и Воутхайзен [40] для уравнения Дирака.

Диагонализируем приближенно гамильтониан /7.4/ с помощью серии унитарных преобразований.

С этой целью преобразуем волновую функцию Ψ, удовлетворяющую /7.3/

$$\Psi \to \Psi' = e^{iS}\Psi, \qquad /7.8/$$

где S - оператор, в общем случае зависящий от времени. Тогда

$$i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t} = i\hbar e^{iS} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + i\hbar \frac{\partial e^{iS}}{\partial t}\Psi = e^{iS}\mathcal{H}\Psi + i\hbar \frac{\partial e^{iS}}{\partial t}\Psi = \left[e^{iS}\mathcal{H}e^{-iS} + i\hbar \frac{\partial e^{iS}}{\partial t} \cdot e^{-iS} \right]\Psi' = \mathcal{H}_s'(\vec{\pi})\Psi' \qquad /7.9/$$

где

$$\mathcal{H}_s'(\vec{\pi}) = e^{iS}\mathcal{H}e^{-iS} + i\hbar\frac{\partial e^{iS}}{\partial t}\cdot e^{-iS} \qquad /7.10/$$

Разложение $\mathcal{H}_s'(\vec{\pi})$ по степеням S имеет вид

$$\mathcal{H}_s'(\vec{\pi}) = \mathcal{H}_s(\vec{\pi}) - \hbar\frac{\partial S}{\partial t} + i[S, \mathcal{H}_s(\vec{\pi}) - \frac{\hbar}{2}\frac{\partial S}{\partial t}] +$$
$$+ \frac{i^2}{2!}[S,[S, \mathcal{H}_s(\vec{\pi}) - \frac{\hbar}{3}\frac{\partial S}{\partial t}]] +$$
$$+ \frac{i^3}{3!}[S,[S,[S, \mathcal{H}_s(\vec{\pi}) - \frac{\hbar}{4}\frac{\partial S}{\partial t}]]] + \dots \qquad /7.11/$$

При вычислении $\mathcal{H}_3'(\vec{\pi})$ по формуле /7.11/ каждый раз будем учитывать лишь члены разложения порядка C^{-2} включительно /членами, содержащими C^{-3} ввиду их малости, будем пренебрегать/.

Чтобы устранить из гамильтониана "нечетный" член порядка $\sim C$, подвергнем волновую функцию преобразованию /7.8/, выбрав S при этом таким

$$S^{(1)} = \rho_2\frac{\sqrt{2}}{2mcS}(\vec{S}\vec{\pi})\sin\theta \qquad /7.12/$$

После этого преобразования гамильтониан $\mathcal{H}_s^{(1)}(\vec{\pi})$, вычисленный по формуле /7.11/ с точностью до членов порядка включительно, имеет вид

$$\mathcal{H}_s^{(1)}(\vec{\pi}) = \rho_3\{mc^2 + \frac{\vec{\pi}^2}{2m} - \frac{e\hbar(\vec{S}\vec{H})}{2mcS^2}\sin^2\theta -$$
$$- \frac{\sin^2\theta}{8m^3c^2S^2}[(\vec{S}\vec{\pi}),[(\vec{S}\vec{\pi}),\vec{\pi}^2]_+]_+ + \frac{\sin^4\theta}{2m^3c^2S^4}(\vec{S}\vec{\pi})^4\} + e\varphi +$$

$$+\rho_2\Big\{a_s\frac{\pi^2}{2m}+b_s\frac{(\vec{S}\vec{\pi})^2}{2ms^2}+b_s\frac{e\hbar(\vec{S}\vec{H})}{4mcs^2}-$$

$$-\frac{\hbar\sqrt{2}}{2mcs}\sin\theta\frac{\partial(\vec{S}\vec{\pi})}{\partial t}+\frac{e\sqrt{2}\sin\theta}{2mcs}S_a\nabla_a\varphi-\frac{a_s\sin\theta}{8m^2c^2s^2}\times$$

$$[(\vec{S}\vec{\pi}),[(\vec{S}\vec{\pi}),\vec{\pi}^2]]\Big\}+\rho_1\Big\{\frac{\sqrt{2}\sin^3\theta}{3m^2cs^3}(\vec{S}\vec{\pi})^3+$$

$$+\frac{e\hbar\sqrt{2}\sin^3\theta}{4m^2c^2s^3}[(\vec{S}\vec{\pi}),(\vec{S}\vec{H})]_+-\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{4m^2cs}[(\vec{S}\vec{\pi}),\vec{\pi}^2]_+\Big\}+$$

$$+\frac{\sqrt{2}a_s\sin\theta}{4m^2cs}[(\vec{S}\vec{\pi}),\vec{\pi}^2]+i\frac{e\hbar\sqrt{2}b_s\sin\theta}{8m^2c^2s^3}[(\vec{S}\vec{\pi}),(\vec{S}\vec{H})]-$$

$$-\frac{ie\sin^2\theta}{4m^2c^2s^2}[(\vec{S}\vec{\pi}),(\vec{S}\vec{E})]+O\left(\frac{1}{c^3}\right), \qquad /7.13/$$

где $E=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{\hbar}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$ - вектор напряженности электрического поля, $O\left(\frac{1}{c^3}\right)$ - слагаемые порядка $\sim c^{-3}$.

С целью исключения из гамильтониана /7.13/ "нечетных" членов порядка c^0 осуществим унитарное преобразование вида /7.8/, выбрав S в виде

$$S^{(2)}=-\frac{\rho_1}{4m^2c^2}\left[a_s\vec{\pi}^2+b_s\frac{(\vec{S}\vec{\pi})^2}{s^2}\right] \qquad /7.14/$$

После этого преобразования получаем оператор $\mathcal{H}_s^{(2)}(\vec{\pi})$, содержащий "нечетные" члены порядка не выше $\sim c^{-1}$

$$\mathcal{H}_s^{(2)}(\vec{\pi})=\rho_3\Big\{mc^2+\frac{\vec{\pi}^2}{2m}-\frac{e\hbar(\vec{S}\vec{H})}{2mcs^2}\sin^2\theta-$$

$$-\frac{\sin^2\theta}{8m^3c^2s^2}[(\vec{S}\vec{\pi}),[(\vec{S}\vec{\pi}),\vec{\pi}^2]_+]_++\frac{\sin^4\theta}{2m^3c^2s^4}(\vec{S}\vec{\pi})^4+$$

$$+\frac{1}{8m^3c^2}\left[a_s\vec{\pi}^2+b_s\frac{(\vec{S}\vec{\pi})^2}{s^2}\right]^2\Big\}+e\varphi+$$

$$+i\frac{\sqrt{2}a_s\sin\theta}{4m^2cs}[(\vec{S}\vec{\pi}),\vec{\pi}^2]+$$

$$+ i\frac{e\hbar\sqrt{2}\,b_s\sin\theta}{8m^2c^2s^3}[(\vec{S}\vec{\pi}),(\vec{S}\vec{H})] - \frac{ie\sin^2\theta}{4m^2c^2s^2}\times$$

$$\times[(\vec{S}\vec{\pi}),(\vec{S}\vec{E})] + \rho_2\Big\{b_s\frac{e\hbar(\vec{S}\vec{H})}{4mcs^2} - \frac{\hbar\sqrt{2}}{2mcs}\sin\theta\frac{\partial(\vec{S}\vec{\pi})}{\partial t} +$$

$$+ \frac{e\sqrt{2}\sin\theta}{2mcs}S_a\nabla_a\varphi - \frac{a_s\sin\theta}{8m^3c^2s^2}[(\vec{S}\vec{\pi}),[(\vec{S}\vec{\pi}),\vec{\pi}^2]] -$$

$$- \frac{a_s\vec{\pi}^4}{4m^3c^2} - \frac{b_s}{8m^3c^2s^2}[(\vec{S}\vec{\pi})^2,\vec{\pi}^2]_+\Big\} + \rho_1\Big\{\frac{\sqrt{2}\sin^3\theta}{3m^2cs^3}(\vec{S}\vec{\pi})^3_+$$

$$+ \frac{e\hbar\sqrt{2}\sin^3\theta}{4m^2c^2s^3}[(\vec{S}\vec{\pi}),(\vec{S}\vec{H})]_+ - \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{4m^2cs}[(\vec{S}\vec{\pi}),\vec{\pi}^2]_+ -$$

$$- \frac{ie}{4m^2c^2}\Big[a_s\vec{\pi}^2 + b_s\frac{(\vec{S}\vec{\pi})^2}{s^2},\varphi\Big] + \frac{\hbar}{4m^2c^2}\Big[a_s\frac{\partial(\vec{\pi}^2)}{\partial t} +$$

$$+ \frac{b_s}{s^2}\frac{\partial(\vec{S}\vec{\pi})^2}{\partial t}\Big]\Big\} + O\Big(\frac{1}{c^3}\Big) \qquad /7.15/$$

Теперь исключим из /7.15/ "нечетные" члены порядка c^{-1}, c^{-2} /подчеркнутые слагаемые/. Для этого снова подвергнем волновую функцию унитарному преобразованию виде /7.8/, выбрав S в виде

$$S^{(3)} = -\frac{\rho_1}{2mc^2}\Big\{b_s\frac{e\hbar(\vec{S}\vec{H})}{4mcs^2} - \frac{\hbar\sqrt{2}}{2mcs}\frac{\partial(\vec{S}\vec{\pi})}{\partial t}\sin\theta +$$

$$+ \frac{e\sqrt{2}\sin\theta}{2mcs}S_a\nabla_a\varphi - \frac{a_s\sin\theta}{8m^3c^2s^2}[(\vec{S}\vec{\pi}),[(\vec{S}\vec{\pi}),\vec{\pi}^2]] -$$

$$- \frac{a_s\vec{\pi}^4}{4m^3c^2} + \frac{b_s}{8m^3c^2s^2}[(\vec{S}\vec{\pi})^2,\vec{\pi}^2]_+\Big\} + \frac{\rho_2}{2mc^2}\Big\{\frac{\sqrt{2}\sin^3\theta}{3m^2cs^3}(\vec{S}\vec{\pi})^3_+$$

$$+ \frac{e\hbar\sqrt{2}\sin^3\theta}{4m^2c^2s^3}[(\vec{S}\vec{\pi}),(\vec{S}\vec{H})]_+ - \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{4m^2cs}[(\vec{S}\vec{\pi}),\vec{\pi}^2]_+ -$$

$$- \frac{ie}{4m^2c^2}\Big[a_s\vec{\pi}^2 + b_s\frac{(\vec{S}\vec{\pi})^2}{s^2},\varphi\Big] + \frac{\hbar}{4m^2c^2}\Big[a_s\frac{\partial(\vec{\pi}^2)}{\partial t} + \qquad /7.16/$$

$$+ \frac{b_s}{s^2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{S}\vec{\pi})^2\Big]\Big\}$$

Исключив "нечетные" члены порядка c^{-1} и c^{-2} наконец, получаем гамильтониан $\mathcal{H}^{(3)}(\vec{\pi})$ "четный" с точностью до членов порядка c^{-2} включительно

$$\mathcal{H}_s^{(3)}(\vec{\pi}) = \rho_3 \{ mc^2 + \frac{\vec{\pi}^2}{2m} - \frac{e\hbar(\vec{S}\vec{H})}{2mcS^2}\sin^2\theta -$$

$$- \frac{\sin^2\theta}{8m^3c^2S^2}[(\vec{S}\vec{\pi}),[(\vec{S}\vec{\pi}),\vec{\pi}^2]_+]_+ + \frac{\sin^4\theta}{2m^3c^2S^4}(\vec{S}\vec{\pi})^4 +$$

$$+ \frac{1}{8m^3c^2}[a_s\vec{\pi}^2 + b_s\frac{(\vec{S}\vec{\pi})^2}{S^2}]^2\} + e\varphi +$$

$$+ \frac{i\sqrt{2}\,a_s\sin\theta}{4m^2cS}[(\vec{S}\vec{\pi}),\vec{\pi}^2] +$$

$$+ \frac{ie\hbar\sqrt{2}\,b_s\sin\theta}{8m^2c^2S^3}[(\vec{S}\vec{\pi}),(\vec{S}\vec{H})] -$$

$$- i\frac{e\sin^2\theta}{4m^2c^2S^2}[(\vec{S}\vec{\pi}),(\vec{S}\vec{E})] + O(\tfrac{1}{c^2}). \qquad /7.17/$$

Покажем, что алгебраическая сумма подчеркнутых слагаемых в /7.17/ имеет порядок c^{-3}, следовательно, в результирующем выражении для гамильтониана их можно опустить.

Поскольку $\pi_a = p_a - \frac{e}{c}A_a$, то имеет место

$$\Omega = - \frac{\sin^2\theta}{8m^3c^2S^2}[(\vec{S}\vec{\pi}),[(\vec{S}\vec{\pi}),\vec{\pi}^2]_+]_+ +$$

$$+ \frac{\sin^4\theta}{2m^3c^2S^4}(\vec{S}\vec{\pi})^4 + \frac{1}{8m^3c^2}[a_s\vec{\pi}^2 + b_s\frac{(\vec{S}\vec{\pi})^2}{S^2}]^2 =$$

$$= - \frac{\sin^2\theta}{2m^3c^2S^2}\vec{p}^2(\vec{S}\vec{p})^2 + \frac{\sin^4\theta}{2m^3c^2S^4}(\vec{S}\vec{p})^4 +$$

$$+ \frac{1}{8m^3c^2}[a_s\vec{p}^2 + b_s\frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{S^2}]^2 + O(\tfrac{1}{c^3}) \qquad /7.18/$$

Покажем, что сумма последних трех членов равна 0, а $\Omega \sim c^{-3}$

а/ $s = \frac{1}{2}$

$$a_s = \sin 2\theta \ , \ b_s = 0 \qquad /7.19/$$

Для $s = \frac{1}{2}$ выполняется такое соотношение

$$(\vec{\sigma}\vec{P})^2 = \vec{P}^2 \ , \ \vec{\sigma} = \frac{\vec{S}}{s} \qquad /7.20/$$

Учитывая /7.19/ и /7.20/, выражение /7.18/ запишем так

$$\Omega = -\frac{\sin^2\theta}{2m^3c^2}\vec{P}^4 + \frac{\sin^4\theta}{2m^3c^2}\vec{P}^4 + \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{2m^3c^2}\vec{P}^4 + O\left(\frac{1}{c^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2m^3c^2}\left(-1 + \sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\vec{P}^4 + O\left(\frac{1}{c^3}\right) = O\left(\frac{1}{c^3}\right),$$

$$\Omega = O\left(\frac{1}{c^3}\right)$$

б/ $s = 1$

Согласно /3.886/

$$a_s = 0 \ , \ b_s = \pm \sin 2\theta \qquad /7.21/$$

а спиновые матрицы при $s = 1$ обладают такими свойствами /3.82/

$$(\vec{S}\vec{P})^3 = \vec{P}^2(\vec{S}\vec{P}) \qquad /7.22/$$

Подставив /7.21/ в /7.18/ и используя /7.22/, получаем

$$\Omega = -\frac{\sin^2\theta}{2m^3c^2}\vec{P}^2(\vec{S}\vec{P})^2 + \frac{\sin^4\theta}{2m^3c^2}\vec{P}^2(\vec{S}\vec{P})^2 +$$

$$+ \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{2m^3c^2}\vec{P}^2(\vec{S}\vec{P})^2 + O\left(\frac{1}{m^3}\right) = \frac{1}{2m^3c^2}(-1 +$$

$$+ \sin^2\theta + \cos^2\theta)\vec{P}^2(\vec{S}\vec{P})^2 + O\left(\frac{1}{c^3}\right) = O\left(\frac{1}{c^3}\right). \qquad /7.22/$$

в/ Наконец, в случае $s=\frac{3}{2}$, подставив в /7.18/ значение коэффициентов a_s и b_s по формулам /3.88в/, имеем

$$\Omega = -\frac{2\sin^2\theta}{9m^3c^2}\vec{P}^2(\vec{S}\vec{P})^2 + \frac{8}{81}\frac{\sin^2\theta}{m^3c^2}(\vec{S}\vec{P})^4 +$$

$$+\frac{1}{8m^3c^2}\Big\{\Big[\frac{1}{64}\sin^2 2\theta - \frac{1}{16}\sin\theta\sin 2\theta\sqrt{9-\sin^2\theta} +$$

$$+\frac{1}{16}\sin^2\theta(9-\sin^2\theta)\Big]\vec{P}^4 + \Big[-\frac{1}{8}\sin^2 2\theta + \frac{5}{18}\sin\theta\times$$

$$\times\sin 2\theta\sqrt{9-\sin^2\theta} - \frac{1}{18}\sin^2\theta(9-\sin^2\theta)\Big]\vec{P}^2(\vec{S}\vec{P})^2 +$$

$$+\Big[\frac{1}{4}\sin^2 2\theta - \frac{1}{9}\sin\theta\sin 2\theta\sqrt{9-\sin^2\theta} +$$

$$+\frac{1}{81}\sin^2\theta(9-\sin^2\theta)\Big](\vec{S}\vec{P})^4\Big\} + O\left(\frac{1}{c^3}\right) \qquad /7.23/$$

Используя тождество /3.83/, выражение /7.23/ можно переписать в виде

$$\Omega = \frac{1}{8m^3c^2}\Big\{\Big[2\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\sin^2\theta +$$

$$2\sin^4\theta\Big]\vec{P}^2(\vec{S}\vec{P})^2 + \frac{1}{2}\Big[-\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^2\theta -$$

$$-\sin^4\theta\Big]\vec{P}^4\Big\} + O\left(\frac{1}{c^3}\right) = O\left(\frac{1}{c^3}\right) \qquad /7.24/$$

Из формулы /7.24/ видим, что и в этом случае $\Omega \sim c^{-3}$

Таким образом, мы показали, что подчеркнутыми слагаемыми в выражении /7.17/ можно пренебречь, поскольку их суммарный вклад имеет порядок $\sim c^{-3}$

Следовательно, "четный" с точностью до членов порядка $\sim c^{-2}$ включительно оператор гамильтона имеет вид

$$\mathcal{H}_s^{(3)}(\vec{\pi}) = \rho_3\left\{ mc^2 + \frac{\vec{\pi}^2}{2m} - \frac{e\hbar(\vec{S}\vec{H})}{2mcs}\sin^2\theta\right\} + e\varphi +$$

$$+ \frac{i a_s\sqrt{2}\sin\theta}{4m^2cs}[(\vec{S}\vec{\pi}), \vec{\pi}^2] + i\frac{e\hbar\sqrt{2}\, b_s\sin\theta}{8m^2c^2s^3}\times$$

$$\times[(\vec{S}\vec{\pi}),(\vec{S}\vec{H})] - i\frac{e\sin^2\theta}{4m^2c^2s^2}[(\vec{S}\vec{\pi}),(\vec{S}\vec{E})] + O\left(\frac{1}{c^3}\right) \qquad /7.25/$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что имеют место такие соотношения

$$[(\vec{S}\vec{P}),(\vec{S}\vec{E})] = -\frac{i\hbar}{6}\{3[S_i;S_j]_+ -$$
$$- 2\delta_{ij}\vec{S}^2\}\nabla_i E_j - \frac{i\hbar}{3}\vec{S}^2\vec{\nabla}\vec{E} -$$
$$- \frac{i}{2}\vec{S}(\vec{E}\times\vec{P} - \vec{P}\times\vec{E}) \qquad /7.26/$$

$$[(\vec{S}\vec{P}),(\vec{S}\vec{H})] = -\frac{i\hbar}{6}\{3[S_i;S_j]_+ -$$
$$- 2\delta_{ij}\vec{S}^2\}\nabla_i H_j - \frac{i\hbar}{3}\vec{S}^2\vec{\nabla}\vec{H} -$$
$$- \frac{i}{2}\vec{S}(\vec{H}\times\vec{P} - \vec{P}\times\vec{H}) \qquad /7.27/$$

Выражение $[(\vec{S}\vec{\pi}), \vec{\pi}^2]$ согласно [41] может быть переписано так

$$[(\vec{S}\vec{\pi}), \vec{\pi}^2] = \frac{ie\hbar}{c}\vec{S}(\vec{\pi}\times\vec{H} - \vec{H}\times\vec{\pi}) \qquad /7.28/$$

Вводя тензор квадрупольной напряженности [41]

$$Q_{ij} = \frac{e}{8m^2c^2s^2}\left(3[S_i,S_j]_+ - 2\delta_{ij}\vec{S}^2\right) \qquad /7.29/$$

и учитывая соотношения /7.26/, /7.27/, /7.28/, гамильтониан /7.25/ можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_s^{(3)}(\vec{\pi}) &= \rho_3\{mc^2 + \frac{\vec{\pi}^2}{2m} - \frac{e\hbar(\vec{S}\vec{H})}{2mcS^2}\sin^2\theta\} + e\varphi + \\
&+ \left(\frac{b_s}{4S^2} - a_s\right)\frac{e\hbar\sqrt{2}\sin\theta}{4m^2c^2S}\vec{S}(\vec{H}\times\vec{\pi} - \vec{\pi}\times\vec{H}) + \\
&+ \frac{\sqrt{2}\hbar^2 b_s \sin\theta}{6S} Q_{ij}\nabla_i H_j + \\
&+ \frac{e\hbar^2\sqrt{2}b_s\sin\theta}{24m^2c^2S^2}(S+1)\,\mathrm{div}\,H - \\
&- \frac{\hbar\sin^2\theta}{3}Q_{ij}\nabla_i E_j - \frac{e\hbar\sin^2\theta}{12m^2c^2S}(S+1)\,\mathrm{div}\,E - \\
&- \frac{e\sin^2\theta}{8m^2c^2S^2}\vec{S}(\vec{E}\times\vec{\pi} - \vec{\pi}\times\vec{E}) + O\left(\frac{1}{c^3}\right)
\end{aligned}
\qquad /7.30/
$$

Проанализируем выражение /7.30/.

Рассмотрим более подробно случай $S = \frac{1}{2}$. Из формул /3.88а/, /7.29/ видим, что

$$
a_s = a_{\frac{1}{2}} = \sin 2\theta\,,\quad b_s = b_{\frac{1}{2}} = 0\,,\qquad Q_{ij} = 0 \qquad /7.31/
$$

Подставив /7.31/ в /7.30/, получаем

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}^{(3)}(\vec{\pi}) &= \rho_3\{mc^2 + \frac{\vec{\pi}^2}{2m} - \frac{e\hbar(\vec{\sigma}\vec{H})}{mc}\sin^2\theta\} + e\varphi - \\
&- \frac{e\hbar\sqrt{2}\sin\theta\sin 2\theta}{4m^2c^2}\vec{\sigma}(\vec{H}\times\vec{\pi} - \vec{\pi}\times\vec{H}) - \\
&- \frac{e\hbar\sin^2\theta}{4m^2c^2}\,\mathrm{div}\,E - \frac{e\sin^2\theta}{4m^2c^2}\vec{\sigma}(\vec{E}\times\vec{\pi} - \vec{\pi}\times\vec{E}) + O\left(\frac{1}{c^3}\right).
\end{aligned}
\qquad /7.32/
$$

Оператор /7.32/ можно представить так

$$\mathcal{H}^{(3)}_{\frac{1}{2}}(\vec{\pi}) = \mathcal{H}^{F-W} + \mathcal{H}', \qquad /7.33/$$

где

$\mathcal{H}^{F-W}$ - гамильтониан, полученный Фолди и Воутхойзеном [40] при диагонализации уравнения Дирака [1].

$$\mathcal{H}^{F-W} = \rho_3 \left\{ mc^2 + \frac{\vec{\pi}^2}{2m} - \frac{e\hbar(\vec{\sigma}\vec{H})}{2mc} \right\} + e\varphi - \frac{e\hbar}{8m^2c^2}\, \mathrm{div}\, E - \frac{e}{8m^2c^2}\vec{\sigma}(\vec{E}\times\vec{\pi} - \vec{\pi}\times\vec{E}) + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \qquad /7.34/$$

а $\mathcal{H}'$ имеет вид

$$\mathcal{H}' = \rho_3 \frac{e\hbar(\vec{\sigma}\vec{H})}{2mc}\cos 2\theta + \frac{e\hbar\cos 2\theta}{8m^2c^2}\, \mathrm{div}\, E - \frac{e\hbar\sqrt{2}\,\sin\theta\sin 2\theta}{4m^2c^2}\vec{\sigma}(\vec{H}\times\vec{\pi} - \vec{\pi}\times\vec{H}) + \frac{e\cos 2\theta}{8m^2c^2}\vec{\sigma}(\vec{E}\times\vec{\pi} - \vec{\pi}\times\vec{E}) \qquad /7.35/$$

Сравнивая формулы /7.32/, /7.34/, /7.35/, видим, что параметр $\cos 2\theta$ можно интерпретировать, как величину аномального магнитного момента.

Если же $\cos 2\theta = 0,\ \theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$, то

$$\mathcal{H}' = -\frac{e\hbar}{4m^2c^2}\vec{\sigma}(\vec{H}\times\vec{\pi} - \vec{\pi}\times\vec{H}) \qquad /7.36/$$

и гамильтониан /7.32/ отличается от релятивистского оператора /7.34/, как видно из формулы /7.33/, лишь слагаемыми /7.36/.

Таким образом, в рамках нерелятивистской квантовой механики, с помощью уравнения /1.1/, получено последовательное описание заряженной частицы со спином $S \leq \frac{3}{2}$ во внешних электромагнитных полях.

Такое описание позволяет учесть, кроме дипольного $-\frac{e\hbar(\vec{S}\vec{H})}{2mcS^2}\sin^2\theta$, спин-орбитальное $-\frac{e\sin^2\theta}{8m^2c^2S^2}\vec{S}(\vec{E}\times\vec{\pi}-\vec{\pi}\times\vec{E})$, дарвиновское $-\frac{e\hbar\sin^2\theta}{12m^2c^2S}(S+1)\,\mathrm{div}\,E$, а для $S>\frac{1}{2}$ и квадрупольное $-\frac{\hbar\sin^2\theta}{3}Q_{ij}\nabla_i E_j$ взаимодействие заряженной нерелятивистской частицы с внешним электромагнитным полем.

Кроме того, выражение /7.30/ содержит такие слагаемые

$$\left(\frac{b_s}{4S^2}-a_s\right)\frac{e\hbar\sqrt{2}\sin\theta}{4m^2c^2S}\vec{S}(\vec{H}\times\vec{\pi}-\vec{\pi}\times\vec{H}),\quad \frac{\sqrt{2}\hbar^2 b_s\sin\theta}{6S}Q_{ij}\nabla_i H_j$$

которые можно интерпретировать как магнитную спин-орбитальную и квадрупольную связь.

Глава II

Гамильтонова форма системы дифференциальных уравнений, описывающих частицу с произвольным спином

В настоящей главе уравнения Хагена-Герли преобразованы к такому виду, что волновая функция имеет лишь $(2s+1)$ отличных от нуля компонент.

Построено инвариантное скалярное произведение, в котором генераторы группы Галилея G, представление которых реализуется на решениях уравнения Х-Г, эрмитовы.

Получены дифференциальные волновые уравнения, инвариантные относительно группы Пуанкаре $\mathcal{P}$ (1.3), допускающие непротиворечивое обобщение на случай движения заряженных частиц во внешних электромагнитных полях.

Установлена гамильтонова форма уравнений Х-Г и релятивистских уравнений Герли.

Нерелятивистские уравнения в гамильтоновой форме, полученные из уравнений Х-Г, обобщены на случай движения заряженной нерелятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле. В главе используется естественная система единиц: $\hbar = c = 1$.

§ 6. Преобразование системы уравнений Хагена-Герли к каноническому виду

В работах [28] предложены волновые уравнения, описывающие движение нерелятивистской частицы с произвольным спином s и массой m. Эти уравнения можно записать в виде

$$A\Psi(\vec{x},t)=0, \qquad /8.1/$$

где

$$A=\begin{pmatrix} \vec{S}\vec{p} & 2msI & 0 \\ -p_0 sI & -\vec{S}\vec{p} & -\vec{K}^{+}\vec{p} \\ \vec{K}\vec{p} & 0 & 2ms\hat{I} \end{pmatrix}, \qquad /8.2/$$

$$p_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad p_0=i\frac{\partial}{\partial t},$$

I и $\hat{I}$ - $(2s+1)\times(2s+1)$ и $(2s-1)\times(2s-1)$ - мерные единичные матрицы соответственно, $S_a - (2s+1)$ - мерные матрицы представления $D(s)$ алгебры $O(3)$, K_a - матрицы размерности $(2s+1)\times(2s-1)$, удовлетворяющие таким соотношениям [28]

$$S_a S_b + K_a^{+} K_b = is\varepsilon_{abc} S_c + s^2\delta_{ab} \qquad /8.3/$$

Физическая интерпретация решений уравнения /8.1/ вызывает определенные трудности, поскольку волновая функция $\Psi(\vec{x},t)$ имеет $(6s+1)$ компонент, из которых $4s$ - "лишние" /нефизические/ и преобразуется по представлению группы Галилея G неунитарному относительно обычно принятого в квантовой механике скалярного произведения

$$(\Psi_1,\Psi_2)=\int d^3x\, \Psi_1^{+}\Psi_2 \qquad /8.4/$$

Генераторы этого представления имеют вид

$$P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad P_0 = p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \tag{8.5а}$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \tag{8.5б}$$

$$G_a = t p_a - m x_a + \lambda_a, \tag{8.5в}$$

где

$$\lambda_a = -\frac{i}{2s}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ S_a & 0 & 0 \\ K_a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.6}$$

а матрицы S_{ab} реализуют прямую сумму $D(s)\oplus D(s)\oplus D(s-1)$ представлений алгебры $O(3)$

8.1. В этом параграфе мы преобразуем уравнение /8.1/ и генераторы /8.5/ таким образом, чтобы в новом представлении /в дальнейшем будем называть его каноническим/ P_μ, J_{ab}, G_a были эрмитовыми относительно скалярного произведения /8.4/ и имели вид

$$\begin{aligned} P_0' &= p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a' = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a} \\ J_{ab}' &= J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab} \\ G_a' &= t p_a - m x_a, \end{aligned} \tag{8.7}$$

а волновая функция содержала лишь $(2s+1)$ отличных от нуля компонент.

С этой целью подвергнем волновую функцию Ψ преобразованию

$$\Psi \to \Psi' = V\Psi \qquad /8.8/$$

Ясно, что для того, чтобы генераторы группы Галилея G в новом представлении имели вид /8.7/, необходимо, чтобы оператор V удовлетворял условиям

$$VV^{-1} = V^{-1}V = \hat{1} \qquad /8.9а/$$

$$P_0' = V P_0 V^{-1} = P_0 \qquad /8.9б/$$

$$P_a' = V P_a V^{-1} = P_a \qquad /8.9в/$$

$$J_{ab}' = V J_{ab} V^{-1} = J_{ab} \qquad /8.9г/$$

$$G_a' = V G_a V^{-1} \qquad /8.9д/$$

где $\hat{1}$ - единичная матрица размерности $(6s+1)\times(6s+1)$
Из /8.9б/, /8.9в/ следует, что оператор V и обратный к нему V^{-1} не зависят от t и x_a

Будем требовать, чтобы он не зависел от P_0 и был дифференциальным оператором не выше первого порядка.

Наиболее общий вид такого оператора можно задать формулой

$$V = a + \frac{\vec{b}\vec{p}}{m}, \qquad /8.10а/$$

$$V^{-1} = a' + \frac{\vec{b}'\vec{p}}{m}, \qquad /8.10б/$$

где a, a', b, b' - пока что неизвестные матрицы. Операторы

/8.10а/, /8.10б/ удовлетворяют соотношениям /8.9б/, /8.9в/ тождественно.

Условия /8.8а/, /8.8г/ накладывают на матрицы a, a' b, b' следующие требования

$$aa' = a'a = 1 \qquad /8.11а/$$

$$a\vec{b}' + \vec{b}a' = a'\vec{b} + \vec{b}'a = 0 \qquad /8.11б/$$

$$b_k b_m' + b_m' b_k = 0 \qquad /8.11в/$$

и

$$[a, S_c] = [a', S_c] = 0, \qquad /8.12а/$$

$$[b_a, S_b] = i\varepsilon_{abc} b_c \qquad /8.12б/$$

$$[b_a', S_b] = i\varepsilon_{abc} b_c' \qquad /8.12в/$$

Из /8.12а/ следует, что матрицы a и a' должны иметь такую структуру

$$a = \begin{pmatrix} a_{11}I & a_{12}I & 0 \\ a_{21}I & a_{22}I & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}\hat{I} \end{pmatrix}, \quad a' = \begin{pmatrix} a'_{11}I & a'_{12}I & 0 \\ a'_{21}I & a'_{22}I & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33}\hat{I} \end{pmatrix} \qquad /8.13/$$

где a_{ij} и a'_{ij} - некоторые числовые коэффициенты.

Потребуем, чтобы операторы V и V^{-1} удовлетворяли условию /8.9д/, которое перепишем так

$$G_a = V^{-1} G_a' V \equiv [V^{-1}, G_a'] V + G_a' \qquad /8.14/$$

Из /8.5в/ и /8.14/ находим, что

$$\lambda_a = [V^{-1}, G_a'] V \qquad /8.15/$$

Подставив в /8.15/ явный вид оператора G_a' /8.7/ и общее выражение для V и V^{-1} /8.10а/, /8.10б/, получаем

$$i\, b_a' = \left(a + \frac{\vec{b}\vec{p}}{m}\right) = \lambda_a \qquad /8.16/$$

Или, учитывая /8.11в/, /8.16/ перепишем так

$$\lambda_a = i\, b_a' a \qquad /8.17/$$

Отсюда, принимая во внимание /8.11а/, /8.11б/, находим

$$b_a' = -i \lambda_a a' \qquad /8.18а/$$

$$b_a = i a \lambda_a \qquad /8.18б/$$

Матрицы λ_a удовлетворяют соотношению [27], [28]

$$[\lambda_a, S_b] = i \varepsilon_{abc} \lambda_c \qquad /8.19/$$

Тогда из формул /8.12а/, /8.18а/, /8.18б/ и /8.19/ следует, что для матриц b_a и b_a' действительно имеет место /8.12б/ и /8.12в/.

Подставив /8.18а/ и /8.18б/ в /8.10б/ и /8.10а/, соответственно, находим явный вид операторов V и V^{-1}, удовлетворяющих системе операторных уравнений /8.9а - 8.9д/

$$V = a + i a \frac{\vec{\lambda}\vec{p}}{m}, \qquad /8.20а/$$

$$V^{-1} = a' - i \frac{\vec{\lambda}\vec{p}}{m} a' \qquad /8.20б/$$

где a и a' - матрицы вида /8.13/ с произвольными числовыми коэффициентами a_{ij}, a'_{ij} но такими, чтобы выполнялось /8.11а/. Ясно, что поскольку выбор коэффициентов a_{ij}, a'_{ij} в /8.13/ ограничен лишь условием /8.11а/, то имеется целое семейство операторов /8.20а/, /8.20б/, для которых выполняется /8.9а/ - /8.9д/. В дальнейшем ограничимся лишь операторами V коммутирующими с матрицей a, т.е.

$$[a, V] = i a \left[a, \frac{\vec{\lambda}\vec{p}}{m}\right] = 0. \qquad /8.21/$$

Как следствие /8.21/, получаем такое соотношение

$$[a, \lambda] = 0 \qquad /8.22/$$

Подставив в /8.22/ a и λ по формулам /8.6/ и /8.13/, убеждаемся, что /8.22/ выполняется, если в /8.13/ положить

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{22} = a_{33} = K, \\ a_{12} = a_{21} = 0 \end{aligned} \qquad /8.23/$$

где K - некоторое не равное нулю число, которое не умаляя общности можно положить равным единице.

Тогда оператор V имеет вид

$$V = \hat{1} + i\,\frac{\vec{\lambda}\vec{p}}{m}\,. \qquad /8.24/$$

или в экспоненциальной форме

$$V = exp\left\{ i\,\frac{(\vec{\lambda}\vec{p})}{m} \right\}. \qquad /8.25/$$

Оператор V^{-1} обратный к V выглядит так

$$V^{-1} = exp\left\{ -i\,\frac{(\vec{\lambda}\vec{p})}{m} \right\} \qquad /8.26/$$

Преобразованная волновая функция

$$\Psi' = V\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \qquad /8.27/$$

где V задается формулой /8.25/, а φ и χ - $(2s+1)$ и $4s$ - компонентные волновые функции, соответственно, удовлетворяет уравнению

$$A'\Psi' = 0, \qquad /8.28/$$

где

$$A' = VAV = \begin{pmatrix} 0 & 2msI & 0 \\ -p_0 sI + \frac{s\vec{p}^{\,2}}{2m} & 0 & -\vec{K}^{+}\vec{p} \\ 0 & \vec{K}\vec{p} & 2ms\hat{I} \end{pmatrix} \qquad /8.29/$$

Из уравнения /8.28/ и формул /8.27/ и /8.29/ следует, что $(2s+1)$ - компонентная волновая функция φ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \frac{\vec{P}^2}{2m}\varphi \qquad /8.30/$$

а все 4_s компонент волновой функции χ тождественно равны нулю.

Таким образом, именно φ является адекватной волновой функцией нерелятивистской частицы с произвольным спином s

Уравнение движения для заряженной нерелятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле получается с /8.1/ посредством стандартной замены [27],[28] $p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$ в операторе /8.2/.

Как и в свободном случае, это уравнение можно преобразовать к такому виду, где $4s$ "лишних" /нефизических/ компонент тождественно равны нулю. При этом оператор преобразования имеет вид

$$V_{int} = \exp i\left(\frac{\vec{\lambda}\vec{\pi}}{m}\right), \qquad /8.31/$$

а $(2s+1)$ - компонентная волновая функция, содержащая лишь физические компоненты, удовлетворяет обобщенному уравнению Паули.

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left(\frac{\vec{\pi}^2}{2m} - \frac{(\vec{S}\vec{H})}{2ms} + eA_0\right)\varphi \qquad /8.32/$$

Оператор /8.25/ можно использовать и для построения инвариантного скалярного произведения, в котором операторы /8.5/ будут эрмитовыми.

Действительно, поскольку представления генераторов группы Галилея G /8.5/ и /8.7/ связаны посредством преобразования /8.9б - 8.9д/, то из эрмитовости генераторов /8.7/ в скалярном произведении /8.4/ следует, что генераторы /8.5/

эрмитовы в таком скалярном произведении

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\, \Psi_1^{+} M \Psi_2 , \qquad /8.33/$$

где

$$M = (V^{-1})^{+} V^{-1} = exp\, i\left(\frac{\vec{\lambda}^{+}\vec{p}}{m}\right) exp\, -i\left(\frac{\vec{\lambda}\vec{p}}{m}\right). \qquad /8.34/$$

В случае $s = \frac{1}{2}$ уравнение /8.1/ совпадает с уравнением Леви-Леблонда [24] , а оператор преобразования V и метрический оператор M имеют вид

$$V = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \frac{\hat{\vec{\sigma}}\vec{p}}{2m} & I \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} I\left(1 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{4m^2}\right) & -\frac{\hat{\vec{\sigma}}\vec{p}}{2m} \\ -\frac{\hat{\vec{\sigma}}\vec{p}}{2m} & I \end{pmatrix}, \qquad /8.35/$$

где $\hat{\sigma}_a$ - обычные матрицы Паули.

Таким образом, мы нашли оператор V /8.25/, с помощью которого уравнения Хагена-Герли можно преобразовать к такому виду /8.28/ что "лишние" /нефизические/ компоненты волновой функции Ψ' тождественно равны нулю, а $(2s+1)$ - компонентная волновая функция, содержащая лишь физические компоненты удовлетворяет уравнению Шредингера /8.30/, если отсутствует внешнее электромагнитное поле и обобщенному уравнению Паули /8.32/, в случае движения заряженной нерелятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле. Генераторы группы Галилея в этом представлении эрмитовы относительно скалярного произведения /8.4/ и имеют вид /8.5/.

8.2. Теперь покажем, что найденный нами оператор /8.25/ можно использовать для построения галилеевски-инвариантных уравнений движения, отличных от /8.1/ при всех $s \neq \frac{1}{2}$. Отличичтельной особенностью новых уравнений является то, что волновая функция, в отличие от Ψ имеет $2(2s+1)$ компонент.

Новые уравнения получим посредством обобщения уравнения Леви-Леблонда [27] на случай произвольного спина s. Из /8.28/ видим, что в каноническом представлении уравнение Леви-Леблонда имеет вид

$$A'\Phi' = 0, \qquad /8.36/$$

где

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & m \\ -p_0 s + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} s & 0 \end{pmatrix} \qquad /8.37/$$

а φ' и χ' – $(2s+1)$ - компонентные волновые функции.

Оператор перехода к неканоническому представлению, как видно из /8.24/, можно записать так

$$V_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \frac{\vec{S}\vec{p}}{m} & I \end{pmatrix}. \qquad /8.38/$$

Будем постулировать, что уравнение, описывающее движение нерелятивистской частицы с произвольным спином $s \neq 0$, в случае отсутствия внешнего электромагнитного поля, в каноническом представлении имеют вид /8.36/, а оператор перехода к исходному представлению - /8.38/. При этом φ' и χ' - $(2s+1)$ - компонентные волновые функции.

Для того, чтобы получить уравнение в исходном представлении, преобразуем волновую функцию Φ' по закону

$$\Phi' \to \Phi = V_s^{-1}\Phi' \qquad /8.39/$$

В результате находим, что $2(2s+1)$ - компонентная волновая функция Φ удовлетворяет уравнению

$$A\,\Phi = 0, \qquad /8.40/$$

где

$$A = V_s^{-1} A V_s = \begin{pmatrix} \vec{S}\vec{p} & m \\ -p_0 s + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}s - \frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{m} & -\vec{S}\vec{p} \end{pmatrix} \qquad /8.41/$$

Если $S = \frac{1}{2}$, то /8.40/ совпадает с оригинальным уравнением Леви-Леблонда [27]. В общем случае /8.40/ является обобщением уравнения Леви-Леблонда на случай произвольного спина.

Уравнение /8.40/ инвариантно относительно группы $G_{1,3}$ и на его решениях реализуется следующее представление ее генераторов

$$\begin{aligned} P_0 &= p_0 = i\frac{\partial}{\partial t} \quad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a} \\ J_{ab} &= x_a p_b - x_b p_a + \tilde{S}_{ab} \\ G_a &= t p_a - m x_a + \tilde{\lambda}_a, \end{aligned} \qquad /8.42/$$

где матрицы $\tilde{S}_{ab}$ реализуют прямую сумму $\mathcal{D}(s)\oplus\mathcal{D}(s)$ представлений алгебры $O(3)$, а $\tilde{\lambda}_a$ имеет вид

$$\tilde{\lambda}_a = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S_a & 0 \end{pmatrix} . \qquad /8.43/$$

Генераторы /8.42/ эрмитовы в таком скалярном произведении

$$(\Phi_1 \Phi_2) = \int d^3x\, \Phi_1^{+} M_s \Phi_2 \qquad /8.44/$$

где

$$M_s = \exp i\left(\frac{\vec{\tilde{\lambda}}^{+}\vec{p}}{m}\right)\exp\left(-i\,\frac{\vec{\tilde{\lambda}}\vec{p}}{m}\right) \qquad /8.45/$$

Уравнение /8.40/ можно обобщить на случай движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Для этого члены с $(\vec{S}\vec{p})^2$ в /8.41/ запишем в виде /7.2/ и сделаем обычную замену $p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$

$$\begin{pmatrix} (\vec{S}\vec{p}) & m \\ -\pi_0 s + \frac{\vec{\pi}^2}{2m}s - \frac{(\vec{S}\vec{\pi})^2}{m} - \frac{e(\vec{S}\vec{H})}{2m} & -(\vec{S}\vec{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \qquad /8.46/$$

Подвергнув волновую функцию

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

преобразованию

$$\Phi \to \Phi' = V_s(\vec{\pi})\,\Phi = \begin{pmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{pmatrix},$$

где

$$V_s(\vec{\pi}) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \frac{\vec{S}\vec{\pi}}{m} & I \end{pmatrix} \qquad /8.47/$$

убеждаемся, что Φ' удовлетворяет уравнению

$$A'\Phi' = 0, \qquad /8.48/$$

где

$$A'(\vec{\pi}) = V_s(\vec{\pi})\,A(\vec{\pi})\,V_s(\vec{\pi}) = \begin{pmatrix} 0 & m \\ -\pi_0 s + \frac{\vec{\pi}^2}{2m}s - \frac{e(\vec{S}\vec{H})}{2m} & 0 \end{pmatrix} \qquad /8.49/$$

Из /8.48/ и /8.49/ видим, что все $(2s+1)$ компонент волновой функции χ' тождественно равны нулю, а $(2s+1)$ - компонентная волновая функция φ' удовлетворяет обобщенному уравнению Паули /8.32/.

Из выше изложенного следует, что движение нерелятивистской частицы с произвольным спином s можно описывать как уравнениями Хагена-Герли /8.1/, так и уравнениями /8.40/. Преимущество последних заключается в том, что волновая функция имеет $2(2s+1)$ компонент, т.е. на $(2s-1)$ меньше, чем /8.1/. Правда, оператор /8.41/ в уравнении /8.40/ является дифференциальным оператором второго порядка /за исключением случая $s=\frac{1}{2}$ /, тогда как /8.2 - дифференциальный оператор первого порядка.

Отметим, что увеличение порядка дифференциального оператор при требовании минимального числа компонент волновой функции характерно при $s>\frac{1}{2}$ и для релятивистских уравнений [42]-[44]

§ 9. Гамильтонова форма уравнений Хагена-Герли

Уравнение /Х-Г/ имеет такую структуру, что оператор энергии явно не выделен. Это усложняет исследование стационарных состояний квантовых систем, ибо для этой цели наиболее удобна гамильтонова форма волновых уравнений

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \mathcal{H}\Psi \qquad /9.1/$$

Поэтому было бы весьма полезным выделить оператор энергии в уравнении /8.1/.

Такая задача решена для релятивистских явно ковариантных уравнений Кеммера-Даффина [45]-[50] и Прока [51]

Если при производной по времени стоит несингулярная матрица, то получение уравнений в гамильтоновой форме не вызывает каких-либо трудностей, в противном же случае [45]-[50],[51] выделить гамильтониан намного сложнее.

В этом параграфе, воспользовавшись методикой работ [45], [47],[50] мы установим гамильтонову форму уравнений Х-Г и нерелятивистских уравнений /8.40/.

а/ Для наших целей удобно записать уравнение Х-Г /8.1/ в виде

$$[\beta_\mu p_\mu + (1-\beta_0)2m]\Psi(t,\vec{x}) = 0, \qquad /9.2/$$

где матрицы β_μ имеют такую структуру

$$\beta_0 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_a = \begin{pmatrix} 0 & \frac{S_a}{s} & \frac{K_a^+}{s} \\ \frac{S_a}{s} & 0 & 0 \\ \frac{K_a}{s} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad /9.3/$$

Аналогично как и в [45],[47],[50] построим проекторы на подпространства "верхних" и "нижних" компонент волновой функции Ψ

Такими проекторами, как видно из /9.3/, являются операторы β_0 и $(1-\beta_0)$. Матрицы β_0 и $(1-\beta_0)$ обладают свойствами

$$\beta_0 + (1-\beta_0) = 1, \quad \beta_0^2 = \beta_0, \quad (1-\beta_0)^2 = (1-\beta_0), \quad (-\beta_0+1)\beta_0 = 0 \qquad /9.4/$$

Проекторы β_0 и $(1-\beta_0)$ кроме того, удовлетворяют таким соотношениям

$$\beta_0\beta_a = \beta_a(1-\beta_0), \quad (1-\beta_0)\beta_a = \beta_a\beta_0 \qquad /9.5/$$

Умножив уравнение /9.2/ слева на проектор $(1-\beta_0)$, имеем

$$[(1-\beta_0)\beta_a p_a + (1-\beta_0)2m]\Psi(\vec{x},t) = 0. \qquad /9.6/$$

Из /9.6/, учитывая /9.5/, получаем

$$(1-\beta_0)\Psi(\vec{x},t) = -\frac{\beta_a p_a}{2m}\beta_0\Psi(\vec{x},t) \qquad /9.7/$$

Подействовав оператором $p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}$ на /9.7/ слева, приходим к такому уравнению

$$(1-\beta_0)p_0\Psi(\vec{x},t) = -\frac{\beta_a p_a}{2m}\beta_0 p_0\Psi(\vec{x},t) \qquad /9.8/$$

С другой стороны, умножив /9.2/ слева на β_0 находим, что

$$\beta_0 p_0 \Psi(\vec{x},t) = -\beta_0 \beta_a p_a \Psi(\vec{x},t) \qquad /9.9/$$

Из /9.8/ и /9.9/ следует такое уравнение

$$(1-\beta_0) p_0 \Psi(\vec{x},t) = (1-\beta_0) \frac{(\beta_a p_a)^2}{2m} \Psi(\vec{x},t). \qquad /9.10/$$

Складывая правые и левые части уравнений /9.2/ и /9.10/, получаем

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x},t) = \mathcal{H} \Psi(\vec{x},t), \qquad /9.11/$$

где

$$\mathcal{H} = \left\{ (1-\beta_0) \frac{(\beta_a p_a)^2}{2m} - \beta_a p_a - 2m(1-\beta_0) \right\} \qquad /9.12/$$

Оператор эрмитов в обычно принятом в квантовой механике скалярном произведении

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \, \Psi_1^+ \Psi_2, \qquad /9.13/$$

значит $\Psi(\vec{x},t)$ может быть дана обычная квантово-механическая интерпретация.

Из требования инвариантности уравнения /9.12/ относительно группы Галилея G следует, что волновая функция $\Psi(\vec{x},t)$ должна удовлетворять дополнительному условию

$$B\Psi(\vec{x},t) = 0. \qquad /9.14/$$

Если требовать эрмитовости оператора B в скалярном произведении /9.13/, то его можно выбрать в виде

$$B = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[\mathcal{H} - \frac{(\beta_a p_a)^2}{4m} + m, \left[\left(\mathcal{H} - \frac{(\beta_a p_a)^2}{4m} + m\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right]_+\right\} \qquad /9.15/$$

Интегральный оператор в /9.15/ следует понимать, как ряд Маклорена по степеням $\left(\frac{1}{m}\right)$

Покажем, что уравнение /9.11/ инвариантно относительно группы Галилея G, если волновая функция $\Psi(\vec{x},t)$ удовлетворяет дополнительному условию /9.14/.

Наиболее просто это сделать в том представлении, где операторы $\mathcal{H}$ и B диагональны. Поэтому посредством перехода к новой волновой функции /новому представлению/

$$\Psi \rightarrow \Psi^{\kappa} = \mathcal{U}\Psi \qquad /9.16/$$

где $\mathcal{U}$ - унитарный оператор вида

$$\mathcal{U} = \frac{2m - \beta_4(\vec{\beta}\vec{p})}{\sqrt{4m^2 + (\vec{\beta}\vec{p})^2}}, \quad \mathcal{U}^{+} = \frac{2m - (\vec{\beta}\vec{p})\beta_4}{\sqrt{4m^2 + (\vec{\beta}\vec{p})^2}}, \quad \beta_4 \equiv 2\beta_0 - 1, \qquad /9.17/$$

диагонализируем операторы $\mathcal{H}$ и B.

В новом представлении уравнение /9.11/ и дополнительное условие /9.14/ выглядят так

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi^{\kappa} = \mathcal{H}^{\kappa}\Psi^{\kappa}, \qquad /9.18/$$

$$B^{\kappa}\Psi^{\kappa} = 0, \qquad /9.19/$$

где $\mathcal{H}^{\kappa}$ и B^{κ} диагональны и имеют вид

$$\mathcal{H}^{\kappa} = \mathcal{U}\mathcal{H}\mathcal{U}^{+} = (1+\beta_4)\frac{(\vec{\beta}\vec{p})^2}{4m} - (1-\beta_4)m, \qquad /9.20/$$

$$B^{\kappa} = \mathcal{U}B\mathcal{U}^{+} = \frac{1}{2}(1-\beta_4).$$

Из явного вида операторов $\mathcal{H}^{\kappa}$ и B^{κ}, матриц β_a и β_4 и уравнений /9.18/, /9.19/ следует, что в этом представлении $4s$ "лишних" /нефизических/ компонент волновой функции Ψ^{κ} тождественно равны нулю, а ненулевые /физические/ компоненты удовлетворяют уравнению Шредингера.

Чтобы доказать инвариантность уравнения /9.18/ относительно группы Галилея, необходимо показать, что выполняется такое соотношение

$$[i\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}^{\kappa}, Q_A']\Psi^{\kappa} = 0, \qquad /9.21/$$

где Q_A' - любой из генераторов группы G /8.7/, а Ψ^{κ} - волновая функция, удовлетворяющая уравнениям /9.18/ и /9.19/.

Из явного вида гамильтониана $\mathcal{H}^{\kappa}$ и операторов P_μ' и J_{ab}' видим, что

$$[i\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}^{\kappa}, P_\mu'] = [i\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}^{\kappa}, J_{ab}'] = 0 \qquad /9.22/$$

Осталось показать, что оператор

$$G'_a = tp_a - mx_a$$

удовлетворяет /9.21/

Рассмотрим такое выражение

$$[i\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}^K, tp_a - mx_a]\Psi^K = ip_a\Psi^K + m[\mathcal{H}^K, x_a]\Psi^K \qquad /9.23/$$

из /9.23/, учитывая /9.19/ и такое тождество

$$\Psi^K \equiv \frac{1}{2}(1+\beta_4)\Psi^K + \frac{1}{2}(1-\beta_4)\Psi^K \equiv \beta_0\Psi^K + \frac{1}{2}(1-\beta_4)\Psi^K, \qquad /9.24/$$

получаем

$$[i\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}^K, tp_a - mx_a]\Psi^K = ip_a\beta_0\Psi^K + m[\mathcal{H}^K, x_a]\beta_0\Psi^K, \qquad /9.25/$$

или

$$[i\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}^K, tp_a - mx_a]\Psi^K = ip_a\beta_0\Psi^K + m[\mathcal{H}^K\beta_0, x_a]\beta_0\Psi^K$$

Из явного вида операторов $\mathcal{H}^K$ /9.20/ и β_0 /9.3/ следует, что

$$\mathcal{H}^K\beta_0 = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\beta_0, \qquad /9.26/$$

поэтому

$$ip_a\beta_0\Psi^K + m[\mathcal{H}^K\beta_0, x_a]\beta_0\Psi^K = ip_a\beta_0\Psi^K +$$
$$+ m[\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\beta_0, x_a]\beta_0\Psi^K = ip_a\beta_0\Psi^K - ip_a\beta_0\Psi^K = 0$$

Следовательно,

$$[i\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}^K, tp_a - mx_a]\Psi^K = 0 \qquad /9.27/$$

Таким образом, мы показали, что уравнение /9.18/ инвариантно относительно группы Галилея G, если волновая функция Ψ^K удовлетворяет дополнительному условию /9.19/. А поскольку уравнения /9.18/ и /9.19/ получены из /9.11/ и /9.14/ посредством унитарного преобразования /9.16/, то уравнение /9.11/ также инвариантно относительно группы G, если волновая функция Ψ удовлетворяет дополнительному условию /9.14/.

Явный вид генераторов группы Галилея G в исходном представлении можно найти по формуле

$$Q_A = \mathcal{U}^+ Q_A' \mathcal{U} \qquad /9.28/$$

Q_A' – любой из генераторов /8.7/

Так в случае $s = \frac{1}{2}$ на решениях уравнения /9.11/, если имеет место /9.14/, реализуется следующее представление генераторов группы Галилея G

$$P_0 = p_0 = i\frac{\partial}{\partial t},\; P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a},\; J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab},$$

$$G_a = t p_a - m x_a + m\,\frac{(\vec{\sigma}\times\vec{p})_a - 2\rho_2 m \sigma_a}{\vec{p}^{\,2} + 4m^2}, \qquad /9.29/$$

где S_{ab} реализуют прямую сумму представления $\mathcal{D}(1/2)\oplus\mathcal{D}(1/2)$, а ρ_2 имеет вид /3.2/.

Таким образом, исходя из нерелятивистских уравнений Х-Г /3.1/, мы получили уравнения в гамильтоновой форме /9.11/. При этом волновая функция $\Psi(\vec{x},t)$ удовлетворяет дополнительному условию /9.14/.

б/ Теперь установим гамильтонову форму уравнения /8.40/. Определим проекторы Π_1 и Π_2 следующим образом

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}(1+\rho_3),\quad \Pi_2 = \frac{1}{2}(1-\rho_3) \qquad /9.30/$$

Проекторы Π_1 и Π_2 выделяют подпространства "верхних" и "нижних" компонент волновой функции Φ соответственно и удовлетворяют таким соотношениям:

$$\Pi_1 + \Pi_2 = 1,\; \Pi_1^2 = \Pi_1,\; \Pi_2^2 = \Pi_2,\; \Pi_1\Pi_2 = 0 \qquad /9.31/$$

и

$$\Pi_1 - \Pi_2 = \rho_3,\; \rho_3\Pi_1 = \Pi_1,\; \rho_3\Pi_2 = -\Pi_2,\; \Pi_1\rho_a = \rho_a\Pi_2,\quad a=1,2 \qquad /9.32/$$

Используя операторы /9.30/, уравнение /8.40/ можно записать в виде

$$\Pi_1 K\,\Phi(\vec{x},t) = -[\rho_1 \frac{\vec{S}\vec{p}}{s} + \Pi_2\frac{m}{s}]\Phi(\vec{x},t), \qquad /9.33/$$

где

$$K = p_0 - \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{ms}.$$

Подействовав слева на уравнение /9.33/ оператором $\Pi_2 K$ и учитывая соотношения /9.31/, /9.32/, получим

$$\Pi_2 K \Phi(\vec{x},t) = -\rho_1 \frac{\vec{S}\vec{P}}{m} \Pi_1 K \Phi(\vec{x},t). \qquad /9.34/$$

Умножив уравнение /9.33/ слева на оператор Π_1 имеем

$$\Pi_1 K \Phi(\vec{x},t) = -\Pi_1 \rho_1 \frac{(\vec{S}\vec{P})}{S} \Phi(\vec{x},t) \qquad /9.35/$$

Из уравнений /9.34/ и /9.35/ следует, что

$$\Pi_2 K \Phi(\vec{x},t) = \Pi_2 \frac{(\vec{S}\vec{P})^2}{mS} \Phi(\vec{x},t). \qquad /9.36/$$

Сложив правые и левые части уравнений /9.33/ и /9.34/, получаем уравнение в гамильтоновой форме

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{x},t) = \mathcal{H} \Phi(\vec{x},t), \qquad /9.37/$$

где гамильтониан $\mathcal{H}$ имеет следующий вид

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{P}^2}{2m} - \Pi_1 \frac{(\vec{S}\vec{P})^2}{mS} - \rho_1 \frac{(\vec{S}\vec{P})}{S} - \Pi_2 \frac{m}{S} \qquad /9.38/$$

Оператор $\mathcal{H}$ /9.38/ эрмитов в скалярном произведении

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \int d^3x \, \Phi_1^{+} \Phi_2 \qquad /9.39/$$

следовательно, волновой функции $\Phi(\vec{x},t)$ может быть дана обычная квантовомеханическая интерпретация. В случае $S = \frac{1}{2}$, как и следовало ожидать, гамильтониан /9.38/ совпадает с /9.12/. Как и в предидущем случае, нетрудно показать, что уравнение /9.37/ инвариантно относительно группы Галилея, если волновая функция $\Phi(\vec{x},t)$ удовлетворяет такому дополнительному условию

$$B \Phi(\vec{x},t) = 0, \qquad /9.40/$$

где

$$B = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[\mathcal{H} - \frac{1}{2}\rho_2[\mathcal{H},\rho_2]_+ , [(\mathcal{H} - \frac{1}{2}\rho_2[\mathcal{H},\rho_2]_+)^2]^{-1/2}\right]_+\right\} \qquad /9.41/$$

Если $S = \frac{1}{2}$, то операторы /9.15/ и /9.41/ совпадают. Преобразуем уравнение /9.37/ и дополнительное условие /9.40/ к такому виду, чтобы операторы $\mathcal{H}$ и B были диагональными.

Это достигается посредством унитарного преобразования

$$\Phi \to \Phi^{\kappa} = \mathcal{U}\Phi, \qquad /9.42/$$

где

$$\mathcal{U} = (1+\rho_3\lambda)(2+\rho_3\lambda+\lambda\rho_3)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\mathcal{U}^{+} = (2+\rho_3\lambda+\lambda\rho_3)^{-\frac{1}{2}}(1+\lambda\rho_3) \qquad /9.43/$$

а

$$\lambda = \frac{1}{2}\{[\mathcal{H}-\tfrac{1}{2}\rho_2[\mathcal{H},\rho_2]_+, [(\mathcal{H}-\tfrac{1}{2}[\mathcal{H},\rho_2]_+)^2]^{-1/2}]_+\} \qquad /9.44/$$

В новом представлении уравнение /9.37/ и дополнительное условие /9.40/ выглядят так

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi^{\kappa} = \mathcal{H}^{\kappa}\Phi^{\kappa}, \qquad /9.45/$$

$$B^{\kappa}\Phi^{\kappa} = 0, \qquad /9.46/$$

где

$$\mathcal{H}^{\kappa} = \mathcal{U}\mathcal{H}\mathcal{U}^{+} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \Pi_2\frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{ms} - \Pi_2\frac{m}{s}, \qquad /9.47/$$

$$B^{\kappa} = \mathcal{U}B\mathcal{U}^{+} = \Pi_2 \qquad /9.48/$$

Как видно из /9.48/, дополнительное условие /9.46/ означает, что "лишние" /нефизические/ компоненты волновой функции Φ^{κ} тождественно равны нулю.

Учитывая это и используя /9.45/, нетрудно убедиться, что отличные от нуля физические компоненты волновой функции удовлетворяют уравнению Шредингера.

Если имеет место /9.46/, то выполняется такое соотношение

$$[i\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}^{\kappa}, Q_A']\Phi^{\kappa} = 0, \qquad /9.49/$$

Q_A' - любой из генераторов группы Галилея G, явный вид которых задается формулами

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \qquad /9.50/$$
$$G_a = tp_a - mx_a,$$

а $S_{ab} = S_c$ – реализуют прямую сумму представлений $\mathcal{D}(s)\oplus\mathcal{D}(s)$ алгебры $SO(3)$

Из /9.49/ следует, что уравнение /9.45/ инвариантно относительно группы G, если волновая функция Φ^K удовлетворяет дополнительному условию /9.46/. Явный вид генераторов группы G, представление которых реализуется на решениях уравнения /9.37/ с дополнительным условием /9.40/, можно найти по формуле

$$Q_A = \mathcal{U}^+ Q_A' \mathcal{U} \qquad /9.51/$$

Таким образом, из нерелятивистских уравнений /8.40/ мы получили уравнения в гамильтоновой форме /9.37/ с дополнительным условием /9.40/.

§ 10. Нерелятивистская заряженная частица во внешнем электромагнитном поле

Из теории релятивистских уравнений известно, что математически эквивалентные уравнения движения для заряженных частиц при отсутствии внешнего электромагнитного поля, после введения в них взаимодействия, как правило, приводят к различным физическим следствиям. Это означает, что различные математически эквивалентные представления для уравнений на самом деле физически неэквивалентны. Выше сказанное легко проиллюстрировать на примере уравнения Дирака. Действительно, если ввести взаимодействие минимальным образом в свободное уравнение в представлении Дирака, то получим результаты прекрасно согласующиеся с экспериментом [40]. Введение взаимодействия в то же уравнение в представлении Фолди-Воутхойзена приводит к совершенно иным результатам.

Другим примером такой ситуации является тот факт, что введение минимального взаимодействия в уравнение Кеммера-Дэффина и в уравнение в гамильтоновой форме, полученное из него, приводит к различным результатам [52]

В этом параграфе мы покажем, что аналогичная ситуация имеет место и для некоторых уравнений движения в нерелятивистской квантовой механике.

В §8 мы убедились, что если ввести в уравнения Х-Г или /8.40/ взаимодействие минимальным образом, а затем перейти к представлению, в котором "лишние" /нефизические/ компоненты волновой функции тождественно равны нулю, то получим, что $(2s+1)$- компонентная волновая функция, содержащая лишь физические компоненты, удовлетворяет обобщенному уравнению Паули /832/. В предидущем параграфе, исходя из уравнений Х-Г и уравнений /8.40/, мы получили уравнения в гамильтоновой форме /9.11/ и /9.37/. При этом волновые функции $\Psi(\vec{x},t)$ и $\Phi(\vec{x},t)$ удовлетворяют дополнительным условиям /9.14/ и /9.40/ соответственно. При отсутствии внешнего электромагнитного поля, система уравнений /9.11/, /9.14/ эквивалентна уравнению Х-Г /8.1/, а система /9.37/, /9.40/ - уравнению /8.40/.

Введем минимальное взаимодействие в уравнения /9.11/, /9.14/ посредством стандартной замены $p_\mu \to \pi_\mu$ и перейдем к представлению, где "лишние" /нефизические/ компоненты волновой функции тождественно равны нулю.

После замены $p_\mu \to \pi_\mu$ уравнение /9.11/ и дополнительное условие /9.14/ имеют вид

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t)=\mathcal{H}(\vec{\pi})\Psi(\vec{x},t), \qquad /10.1/$$

$$B(\vec{\pi})\Psi(\vec{x},t)=0, \qquad /10.2/$$

где

$$\mathcal{H}(\vec{\pi})=\frac{(\vec{\beta}\vec{\pi})^2}{4m}-\beta_4\frac{(\vec{\beta}\vec{\pi})^2}{4m}-(\vec{\beta}\vec{\pi})-m+\beta_4 m+e\varphi \qquad /10.3/$$

$$B(\vec{\pi})=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{2}\left[\mathcal{H}(\vec{\pi})-\frac{(\vec{\beta}\vec{\pi})^2}{4m}+m,\left[\left(\mathcal{H}(\vec{\pi})-\frac{(\vec{\beta}\vec{\pi})^2}{4m}+m\right)^2\right]^{-1/2}\right]_+\right\} \qquad /10.4/$$

Из предидущего параграфа мы знаем, что "лишние" /нефизические/

компоненты волновой функции тождественно равны нулю в том представлении, где операторы $\mathcal{H}$ и B диагональны. Как видим из /10.3/, /10.4/ гамильтониан $\mathcal{H}(\vec{\pi})$ и оператор $B(\vec{\pi})$ недиагональны. При наличии электромагнитного поля, как и в релятивистском случае [40] , их диагонализировать точно нельзя.

Мы диагонализируем их приближенно, посредством серии унитарных преобразований, с точностью до членов порядка $\sim\frac{1}{m^2}$ включительно, ради простоты предположив, что потенциал A_μ не меняется со временем.

Подвергнем волновую функцию $\Psi(\vec{x},t)$ унитарному преобразованию

$$\Psi \to \Psi^{(1)} = e^{iS_1}\Psi, \qquad /10.5/$$

$$S_1 = i\frac{\beta}{2m}(\vec{\beta}\vec{\pi}). \qquad /10.6/$$

В новом представлении уравнения /10.1/ и /10.2/ будут иметь вид

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi^{(1)} = \mathcal{H}^{(1)}(\vec{\pi})\Psi^{(1)}; \qquad /10.7/$$

$$B^{(1)}(\vec{\pi})\Psi^{(1)} = 0, \qquad /10.8/$$

где

$$\mathcal{H}^{(1)}(\vec{\pi}) = e^{iS_1}\mathcal{H}(\vec{\pi})e^{-iS_1} = \mathcal{H}(\vec{\pi}) + i[S_1,\mathcal{H}(\vec{\pi})] + \frac{i^2}{2!}[S_1,[S_1,\mathcal{H}(\vec{\pi})]] + \frac{i^3}{3!}[S_1,[S_1,[S_1,\mathcal{H}(\vec{\pi})]]] + \cdots \qquad /10.9/$$

$$B^{(1)}(\vec{\pi}) = e^{iS_1}B(\vec{\pi})e^{-iS_1} = B(\vec{\pi}) + i[S_1, B(\vec{\pi})] + \frac{i^2}{2!}[S_1,[S_1,B(\vec{\pi})]] + \frac{i^3}{3!}[S_1,[S_1,[S_1,B(\vec{\pi})]]] + \cdots \qquad /10.10/$$

Ограничившись в /10.9/ и /10.10/ лишь членами порядка получаем

$$\mathcal{H}^{(1)}(\vec{\pi}) = (1+\beta_4)\frac{(\vec{\beta}\vec{\pi})^2}{4m} - m(1-\beta_4) + e\varphi - \frac{ie}{2m}\beta_4(\vec{\beta}\vec{E}) - \frac{ie}{8m^2}[\vec{\beta}\vec{E},\vec{\beta}\vec{\pi}] + \frac{1}{12m^2}(\vec{\beta}\vec{\pi})^3 + O\left(\frac{1}{m^3}\right), \qquad /10.11/$$

$$B^{(1)}(\vec{\pi}) = \frac{1}{2}\left[1-\beta_4 + \frac{ie}{m^2}\beta_4(\vec{\beta}\vec{E})\right] + O\left(\frac{1}{m^3}\right), \qquad /10.12/$$

где $E=-e\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_a}$ - напряженность электромагнитного поля,

$O(\frac{1}{m^3})$ - члены порядка $\sim\frac{1}{m^3}$

Как видим из /10.11/, /10.12/, в результате преобразования /10.5/, мы получили операторы $\mathcal{H}^{(1)}(\vec{\pi})$ и $B^{(1)}(\vec{\pi})$, диагональные с точностью до членов порядка $\frac{1}{m^0}$

После второго преобразования

$$\Psi^{(1)}\to\Psi^{(2)}=e^{iS_2}\Psi^{(1)}, \qquad /10.13/$$

где

$$S_2=-\frac{e}{4m^2}(\vec{\beta}\vec{E}), \qquad /10.14/$$

получаем операторы $\mathcal{H}^{(2)}(\vec{\pi})$ и $B^{(2)}(\vec{\pi})$ диагональные с точностью до членов порядка $\frac{1}{m}$:

$$\mathcal{H}^{(2)}(\vec{\pi})=e^{iS_2}\mathcal{H}^{(1)}(\vec{\pi})e^{-iS_2}=\frac{(\vec{\beta}\vec{\pi})^2}{4m}(1+\beta_4)-m(1-\beta_4)+ \qquad /10.15/$$
$$+e\varphi+\frac{1}{12m^2}(\vec{\beta}\vec{\pi})^3-\frac{ie}{8m^2}[(\vec{\beta}\vec{\pi}),(\vec{\beta}\vec{E})]+O(\frac{1}{m^3}),$$

$$B^{(2)}(\vec{\pi})=e^{iS_2}B^{(1)}(\vec{\pi})e^{-iS_2}=\frac{1}{2}(1-\beta_4)+O(\frac{1}{m^3}). \qquad /10.16/$$

И, наконец, после третьего преобразования

$$\Psi^{(2)}\to\Psi^{(3)}=e^{iS_3}\Psi^{2}=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}, \qquad /10.17/$$

где

ψ_1 и ψ_2 - $(2s+1)$ -, а ψ_3 - $(2s-1)$ - компонентные волновые функции, а оператор S_3 имеет вид

$$S_3=-\frac{i}{24m^3}\beta_4(\vec{\beta}\vec{\pi})^3, \qquad /10.18/$$

находим операторы $\mathcal{H}^{(3)}(\vec{\pi})$ и $B^{(3)}(\vec{\pi})$, диагональные с точностью до членов порядка

$$\mathcal{H}^{(3)}(\vec{\pi})=(1+\beta_4)\frac{(\vec{\beta}\vec{\pi})^2}{4m}-(1-\beta_4)m+e\varphi-\frac{ie}{8m^2}[(\vec{\beta}\vec{\pi}),(\vec{\beta}\vec{E})]+O(\frac{1}{m^3}) \qquad /10.19/$$

$$B^{(3)}(\vec{\pi})=\frac{1}{2}(1-\beta_4)+O(\frac{1}{m^3}). \qquad /10.20/$$

При этом уравнение движения и дополнительное условие выглядят так

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi^{(3)}=\mathcal{H}^{(3)}\Psi^{(3)}, \qquad /10.21/$$

$$B^{(3)}(\vec{\pi})\,\Psi^{(3)}=0 \qquad /10.22/$$

Из уравнений /10.21/, /10.22/ и формул /9.3/, /10.7/, /10.19/, /10.20/ следует, что волновые функции ψ_2 и ψ_3 содержат лишь нулевые компоненты, а $(2s+1)$ - компонентная функция ψ_1 удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_1=\Big\{\frac{\vec{\pi}^2}{2m}-\frac{e(\vec{S}\vec{H})}{2ms}+e\varphi-\frac{ie}{8m^2}\Big([(\vec{S}\vec{\pi}),(\vec{S}\vec{E})]+ \qquad /10.23/$$
$$+(\vec{K}^+\vec{\pi})(\vec{K}\vec{E})-(\vec{K}^+\vec{E})(\vec{K}\vec{\pi})\Big)\Big\}\psi_1$$

Учитывая соотношение /8.3/, уравнение /10.23/ можно переписать так

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_1=\Big\{\frac{\vec{\pi}^2}{2m}-\frac{e(\vec{S}\vec{H})}{2ms}+e\varphi-\underline{\frac{e}{8m^2}\,\mathrm{div}\,\vec{E}}\,- \qquad /10.24/$$
$$\underline{-\frac{e}{8m^2}\,\frac{\vec{S}}{s}\,(\vec{E}\times\vec{\pi}-\vec{\pi}\times\vec{E})}\Big\}\psi_1$$

Оператор в правой части уравнения /10.24/ отличается от соответствующего оператора в обобщенном уравнении Паули /8.32/ наличием подчеркнутых членов, которые по аналогии с релятивистскими случаем [40],[52] , можно интерпретировать, как дарвиновское и спин-орбитальное взаимодействие.

В случае $s=\frac{1}{2}$ /10.24/ с точностью до аддитивной постоянной m совпадает с уравнением для положительно-частотных решений уравнения Дирака [40]

Однако, квадрупольное взаимодействие для частиц с $s\neq\frac{1}{2}$ как видно из /10.24/ не может быть описано, исходя из уравнения /10.1/ с дополнительным условием /10.2/.

Покажем, что введение минимального взаимодействия одновременно в уравнение /9.37/ и дополнительное условие /9.40/ позволяет описать дипольное, дарвиновское, спин-орбитальное, а для случая $s\neq\frac{1}{2}$ и квадрупольное взаимодействие заряженной нерелятивистской частицы с полем.

Уравнение движения и дополнительное условие при этом имеют вид

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\vec{x},t)=\mathcal{H}(\vec{\pi})\Phi(\vec{x},t), \qquad /10.25/$$

$$B(\vec{\pi})\Phi(\vec{x},t)=0, \qquad /10.26/$$

где
$$\mathcal{H}(\vec{\pi})=\frac{\vec{\pi}^2}{2m}-\Pi_1\frac{(\vec{S}\vec{\pi})^2}{ms}-\Pi_1\frac{e(\vec{S}\vec{H})}{2ms}-\rho_1\frac{(\vec{S}\vec{\pi})}{s}-\Pi_2\frac{m}{s}+e\varphi, \qquad /10.27/$$

$$B(\vec{\pi})=\frac{1}{2}\{1-\frac{1}{2}[\mathcal{H}(\vec{\pi})-\frac{1}{2}\rho_2[\mathcal{H}(\vec{\pi}),\rho_2]_+,\underline{[(\mathcal{H}(\vec{\pi})-\frac{1}{2}\rho_2[\mathcal{H}(\vec{\pi}),\rho_2]_+)^2]^{-\frac{1}{2}}}]_+\}, \qquad /10.28/$$

а подчеркнутый интегральный оператор следует понимать как ряд Маклорена по степеням $\frac{1}{m}$

Гамильтониан $\mathcal{H}(\vec{\pi})$ /10.27/ и оператор $B(\vec{\pi})$ /10.28/ недиагональны. Перейдем к представлению, где они диагональны, а "лишние" /нефизические/ компоненты волновой функции тождественно равны нулю. Как и в предыдущем случае, $\mathcal{H}(\vec{\pi})$ и $B(\vec{\pi})$ точно диагонализировать нельзя. Диагонализируем их приближенно с помощью серии унитарных преобразований.

После первого преобразования

$$\Phi\to\Phi^{(1)}=e^{iS_1}\Phi, \qquad /10.29/$$

$$S_1=-\rho_2\frac{(\vec{S}\vec{\pi})}{m} \qquad /10.30/$$

получаем операторы $\mathcal{H}^{(1)}(\vec{\pi})$ и $B^{(1)}(\vec{\pi})$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(1)}(\vec{\pi})&=e^{iS_1}\mathcal{H}(\vec{\pi})e^{-iS_1}=\frac{\vec{\pi}^2}{2m}-\Pi_2\frac{(\vec{S}\vec{\pi})^2}{ms}-\Pi_2\frac{m}{s}-\Pi_1\frac{e(\vec{S}\vec{H})}{2ms}+\\&+e\varphi+\rho_1\frac{(\vec{S}\vec{\pi})^3}{3m^2s}-i\rho_2\frac{1}{2m^2}[(\vec{S}\vec{\pi}),\vec{\pi}^2]+i\rho_2\frac{e}{4m^2s}[(\vec{S}\vec{\pi}),(\vec{S}\vec{H})]\\&+\frac{ie}{4m^2s}[\rho_2(\vec{S}\vec{\pi}),\rho_3(\vec{S}\vec{H})]-\frac{ie}{2m^2}[(\vec{S}\vec{\pi}),(\vec{S}\vec{E})]+\rho_2\frac{e}{m}(\vec{S}\vec{E})+O(\tfrac{1}{m^3}),\end{aligned} \qquad /10.31/$$

$$B^{(1)}(\vec{\pi})=e^{iS_1}B(\vec{\pi})e^{-iS_1}=\frac{1}{2}[1-\rho_3-\frac{2es}{m}\rho_2(\vec{S}\vec{E})]+O(\tfrac{1}{m^3}) \qquad /10.32/$$

диагональные с точностью до членов порядка $\sim\frac{1}{m}$.

Осуществим второе преобразование

$$\Phi^{(1)}\to\Phi^{(2)}=e^{iS_2}\Phi^{(1)}, \qquad /10.33/$$

где

$$S_2 = -\rho_1 \frac{es}{m^2} (\vec{S}\vec{E}) \qquad /10.34/$$

находим операторы

$$\mathcal{H}^{(2)}(\vec{\pi}) = e^{iS_2} \mathcal{H}^{1}(\vec{\pi}) e^{-iS_2} = \frac{\vec{\pi}^2}{2m} - \Pi_2 \frac{(\vec{S}\vec{\pi})^2}{ms} - \Pi_2 \frac{m}{s} + e\varphi - \Pi_1 \frac{e(\vec{S}\vec{H})}{2ms} + \rho_1 \frac{(\vec{S}\vec{\pi})^3}{3m^2 s} - i\rho_2 \frac{1}{2m^2}[(\vec{S}\vec{\pi}), \vec{\pi}^2] + i\rho_2 \frac{e}{4m^2 s}[(\vec{S}\vec{\pi}), (\vec{S}\vec{H})] + \frac{ie}{4m^2 s}[\rho_2(\vec{S}\vec{\pi}), \rho_3(\vec{S}\vec{H})] - \frac{ie}{2m^2}[(\vec{S}\vec{\pi}), (\vec{S}\vec{E})] + O\left(\frac{1}{m^3}\right), \qquad /10.35/$$

$$B^{(2)}(\vec{\pi}) = e^{iS_2} B^{(1)}(\vec{\pi}) e^{-iS_2} = \Pi_2 + O\left(\frac{1}{m^3}\right), \qquad /10.36/$$

диагональные с точностью до членов порядка $\sim \frac{1}{m}$

И, наконец, после преобразования

$$\Phi^{(2)} \to \Phi^{(3)} = e^{iS_3} \Phi^{(2)} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \qquad /10.37/$$

где φ_1 и φ_2 $-(2s+1)$ – компонентные волновые функции, а оператор имеет вид

$$S_3 = \frac{is}{m}\left\{ i\rho_2 \frac{(\vec{S}\vec{\pi})^3}{3s} - \frac{1}{2}\rho_1 [(\vec{S}\vec{\pi}), \vec{\pi}^2] + \rho_1 \frac{e}{4s}[(\vec{S}\vec{\pi})(\vec{S}\vec{H})] + \frac{ie}{4s}\rho_3 [\rho_2(\vec{S}\vec{\pi}), \rho_3(\vec{S}\vec{H})]\right\}, \qquad /10.38/$$

получаем гамильтониан $\mathcal{H}^{(3)}(\vec{\pi})$ и оператор $B^{(3)}(\vec{\pi})$ диагональные с точностью до членов порядка $\sim \frac{1}{m^2}$ включительно:

$$\mathcal{H}^{(3)}(\vec{\pi}) = \frac{\vec{\pi}^2}{2m} - \Pi_2 \frac{(\vec{S}\vec{\pi})^2}{ms} - \Pi_2 \frac{m}{s} + e\varphi - \Pi_1 \frac{e(\vec{S}\vec{H})}{2ms} - \frac{ie}{2m^2}[(\vec{S}\vec{\pi}), (\vec{S}\vec{E})] + O\left(\frac{1}{m^3}\right), \qquad /10.39/$$

$$B^{(3)}(\vec{\pi}) = \Pi_2 + O\left(\frac{1}{m^3}\right). \qquad /10.40/$$

Уравнение движения и дополнительное условие в этом представлении выглядят так

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi^{(3)} = \mathcal{H}^{(3)}(\vec{\pi})\Phi^{(3)}; \qquad /10.41/$$

$$\Pi_2 \Phi^{(3)} = 0. \qquad /10.42/$$

Из уравнений /10.41/, /10.42/ и формул /9.30/, /10.37/ следует, что все компоненты волновой функции φ_2 тождественно равны нулю, а $(2s+1)$ – компонентная функция φ_1 содержащая лишь физические компоненты, удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 = \left\{\frac{\vec{\pi}^2}{2m} - \frac{e(\vec{S}\vec{H})}{2ms} + e\varphi - \frac{ie}{2m^2}[(\vec{S}\vec{\pi}), (\vec{S}\vec{E})]\right\}\varphi \qquad /10.43/$$

Используя тождество [41]:

$$[(\vec{S}\vec{\pi}),(\vec{S}\vec{E})] \equiv -\frac{i}{6}\{3[S_i,S_j]_+ - 2\delta_{ij}\vec{S}^2\}\nabla_i E_j - \\ -\frac{i}{3}\vec{S}^2\vec{\nabla}\vec{E} - \frac{i}{2}\vec{S}(\vec{E}\times\vec{P}-\vec{P}\times\vec{E}), \qquad /10.44/$$

уравнение /10.43/ можно переписать так

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 = \{\frac{\vec{\pi}^2}{2m} - \frac{e(\vec{S}\vec{H})}{2ms} + e\varphi - \frac{2s^2}{3}Q_{ij}\nabla_i E_j - \\ -\frac{e}{6m^2}s(s+1)\,div\,E - \frac{e}{4m^2}\vec{S}(\vec{E}\times\vec{P}-\vec{P}\times\vec{E})\}\varphi_1 \qquad /10.45/$$

Подчеркнутый член в котором

$$Q_{ij} = \frac{e}{8m^2s^2}\left(3[S_i,S_j]_+ - 2\delta_{ij}\,s(s+1)\right) \qquad /10.46/$$

можно интерпретировать как квадрупольное взаимодействие.

В случае $s = \frac{1}{2}$ уравнение /10.45/ совпадает с /10.24/ и отличается от уравнения Дирака для положительно-частотных решений [40] лишь отсутствием аддитивной постоянной m в операторе правой части /10.45/.

Таким образом, если обобщать на случай наличия поля не уравнение /8.40/ непосредственно, а эквивалентное ему в свободном случае уравнение /9.37/ с дополнительным условием /9.40/, то это позволяет учесть, кроме дипольного, спин-орбитальное, дарвиновское и квадрупольное /для $s \neq \frac{1}{2}$ / взаимодействие заряженной нерелятивистской частицы с внешним электромагнитным полем

§ 11. Дифференциальные уравнения второго порядка для частиц произвольного спина s в релятивистской механике

В §8 мы показали, что нерелятивистские уравнения Хагена-Герли /8.1/ для /$6s+1$/ компонентной волновой функции и построенные нами уравнения /8.40/ можно преобразовать к такому виду, что волновая функция в новом представлении будет иметь лишь $(2s+1)$ отличных от нуля компонент.

Эта $(2s+1)$ - компонентная волновая функция в свободном случае удовлетворяет уравнению Шредингера /8.30/, а при наличии поля - уравнению Паули /8.32/.

В этом параграфе мы решим аналогичную задачу для некоторых релятивистских уравнений. Кроме того, нами будут построены новые дифференциальные релятивистски-инвариантные уравнения для $2(2s+1)$-компонентной волновой функции, с помощью которых можно описать движение частицы с произвольным спином s

Хорошо известно, что движение электрона /позитрона/ описывают с помощью релятивистского уравнения Дирака [1]

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t)=\mathcal{H}\Psi(\vec{x},t), \qquad /11.1/$$

где

$$\mathcal{H}=\beta m+\vec{\alpha}\vec{p}, \quad p_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a} \qquad /11.2/$$

Для матриц β и α_a можно выбрать такое представление

$$\beta=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}, \quad \alpha_a=\begin{pmatrix}-\sigma_a & 0\\ 0 & \sigma_a\end{pmatrix} \qquad /11.3/$$

где I - единичные матрицы размерности /2×2/, а σ_a - обычные матрицы Паули.

Покажем, что уравнение /11.1/ можно преобразовать к такому виду, что волновая функция будет иметь лишь $(2s+1)=2$ отличных от нуля компонент. Причем, эта двухкомпонентная волновая функция будет удовлетворять уравнению Клейна-Гордона в свободном случае и уравнению Фейнмана-Гелл-Манна [53] при движении электрона /позитрона/ во внешнем электромагнитном поле.

Действительно, подвергнув волновую функцию Ψ, удовлетворяющую /11.1/, преобразованию

$$\Psi\rightarrow\Psi'=V_{\frac{1}{2}}\Psi=\begin{pmatrix}\varphi'\\ \chi'\end{pmatrix}, \qquad /11.4/$$

где φ' и χ' - двухкомпонентные волновые функции, а оператор $V_{\frac{1}{2}}$ имеет вид

$$V_{\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}I & 0\\ -\frac{p_0+\vec{\sigma}\vec{p}}{m} & I\end{pmatrix}, \quad V_{\frac{1}{2}}^{-1}=\begin{pmatrix}I & 0\\ \frac{p_0+\vec{\sigma}\vec{p}}{m} & I\end{pmatrix} \qquad /11.5/$$

находим волновое уравнение для Ψ'

$$A'\Psi' = 0, \qquad /11.6/$$

$$A' = V_{\frac{1}{2}}(P_0 - \mathcal{H})V_{\frac{1}{2}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -m \\ -m + \frac{P_0^2 - \vec{P}^2}{m} & 2P_0 \end{pmatrix}. \qquad /11.7/$$

Из уравнения /11.6/ и формул /11.4/, /11.7/ следует, что каждая из двух компонент волновой функции χ' тождественно равна нулю, а двухкомпонентная волновая функция φ' удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона

$$(P_0^2 - \vec{P}^2 - m^2)\varphi' = 0. \qquad /11.8/$$

Следовательно, именно волновая функция φ' является адекватной релятивистской частице со спином $S = \frac{1}{2}$

Информацию о том какой спин имеет частица, описываемая уравнением /11.8/ содержат генераторы группы $\mathcal{P}$ /1.3/, представление которых реализуется на его решениях:

$$P_0 = p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \quad a, b, c - \text{цикл } 1, 2, 3 \qquad /11.9/$$

$$J_{0a} = t p_a - m x_a - \frac{1}{2(p_0 + m)}[x_a, \vec{P}^2]_+ + \frac{(\vec{S}\times\vec{P})_a}{p_0 + m}$$

S_c -$(2s+1)$ - мерные матрицы представления $\mathcal{D}(s)$ алгебры O /3/. В нашем случае $S_a = \frac{1}{2}\sigma_a$

Отметим, что на решениях уравнения /11.8/ алгебра /11.9/ совпадает с алгеброй Ли группы $\mathcal{P}$ /1.3/, найденной А.Чакрабарти [54]:

$$P_0 = p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}$$

$$J_{0a} = t p_a - x_a p_0 + \frac{(\vec{S}\times\vec{p})_a}{(p_0 + m)} \qquad /11.10/$$

Сделав в /11.1/ замену p_μ на $\pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$ получаем уравнение движения для электрона /позитрона/ во внешнем электромагнитном поле.

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \mathcal{H}(\vec{\pi})\Psi \qquad /11.11/$$

Аналогично, как и в свободном случае, преобразовав Ψ по закону

$$\Psi \to \Psi' = V_{\frac{1}{2}}(\vec{\pi})\Psi, \qquad /11.12/$$

где $V_{\frac{1}{2}}(\vec{\pi})$ получается из /11.5/ посредством замены $p_\mu \to \pi_\mu$ приходим к уравнению

$$\begin{pmatrix} 0 & -m \\ \frac{\pi_0^2}{m} - m - \frac{\vec{\pi}^2}{m} + \frac{e}{m}\vec{\sigma}(\vec{H} + i\vec{E}) & 2\pi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{pmatrix} = 0, \qquad /11.13/$$

где $\vec{H} = rot\vec{A}$ - напряженность магнитного поля, а $E = -grad A_0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ - напряженность электромагнитного поля. Из /11.13/ следует, что χ' имеет лишь нулевые компоненты, а двухкомпонентная волновая функция φ' удовлетворяет уравнению

$$[\pi_0^2 - \vec{\pi}^2 - m^2 + e\vec{\sigma}(\vec{H} + i\vec{E})]\varphi = 0. \qquad /11.14/$$

Уравнение /11.14/ впервые предложено Г.А.Зайцевым [55],[56] затем переоткрыто Фейнманом и Гелл-Манном [53] и известно в литературе /см., например, [57]/ как уравнение Фейнмана-Гелл-Манна.

В §8 путем обобщения уравнения Леви-Леблонда [27] на случай произвольного спина мы получили новые нерелятивистские дифференциальные уравнения /8.40/. Аналогичным способом построим релятивистские волновые уравнения для частиц с произвольным спином $s \neq 0$

Будем постулировать, что уравнение движения релятивистской частицы с произвольным спином s при отсутствии внешнего электромагнитного поля так же, как и в случае $s = \frac{1}{2}$ в представлении $\{\Psi'\}$ имеет вид

$$A'_s\Psi' = \begin{pmatrix} 0 & -m \\ -m + \frac{p_0^2 - \vec{p}^2}{m} & 2p_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{pmatrix} = 0 \qquad /11.15/$$

где φ' и χ' - $(2s+1)$ - компонентные волновые функции, причем, как видно из /11.15/, χ' содержит лишь нулевые компоненты.

По аналогии с /11.5/ оператор перехода к представлению $\{\Psi\}$ выберем в виде

$$V_s = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\frac{sp_0 + \hat{\vec{S}}\vec{p}}{ms} & 0 \end{pmatrix}, \quad V_s^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \frac{sp_0 + \hat{\vec{S}}\vec{p}}{m} & I \end{pmatrix} \qquad /11.16/$$

Преобразовав волновую функцию

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{pmatrix} \qquad /11.17/$$

по закону

$$\Psi' \to \Psi = V_s^{-1}\Psi'$$

находим уравнение движения для релятивистской частицы с произвольным спином $s \neq 0$ в представлении $\{\Psi\}$

$$A_s\Psi = 0, \qquad /11.18/$$

где

$$A_s = V_s^{-1} A_s' V_s = \begin{pmatrix} p_0 + \frac{\hat{\vec{S}}\vec{p}}{s} & -m \\ -m + \frac{\vec{p}^2}{m} - \frac{(\hat{\vec{S}}\vec{p})^2}{m s^2} & p_0 - \frac{\hat{\vec{S}}\vec{p}}{s} \end{pmatrix} \qquad /11.19/$$

Из /11.19/ видно, что уравнение /11.18/ можно записать в гамильтоновой форме

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \mathcal{H}_s \Psi, \qquad /11.20/$$

где

$$\mathcal{H}_s = \rho_1 m - \rho_3 \frac{\vec{S}\vec{p}}{s} + \frac{\rho_1 - i\rho_2}{2}\left(\frac{\vec{p}^2}{m} - \frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{m s^2}\right), \qquad /11.21/$$

а матрицы ρ_i имеют вид /3.2/

В случае $s = \frac{1}{2}$ уравнение /11.20/ совпадает с уравнением Дирака /11.1/.

Уравнение /11.20/ инвариантно относительно группы Пуанкаре $\mathcal{P}$ /1.3/, ибо на его решениях реализуется следующее представление ее генераторов

$$P_0 = p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a},$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \quad J_{0a} = t p_a - x_a p_0 + \lambda_a + S_{0a}, \qquad /11.22/$$

где матрицы S_{ab} реализуют прямую сумму $\mathcal{D}(s) \oplus \mathcal{D}(s)$ представлений алгебры $O/3/$, а S_{0a} и λ_a имеют вид

$$S_{0a} = \begin{pmatrix} -i\hat{S}_a & 0 \\ 0 & i\hat{S}_a \end{pmatrix}, \quad \lambda_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{i S_a p_0}{m}\left(\frac{1}{s} - 2\right) + \frac{i p_a}{m} - \frac{i}{m s}[\vec{S}\vec{p}, S_a]_+ & 0 \end{pmatrix} \qquad /11.23/$$

$\hat{S}_a$ – $(2s+1)$ – мерные матрицы представления $\mathcal{D}(s)$ алгебры $O/3/$.

Из /11.23/ видим, что в случае $s = \frac{1}{2}$, $\lambda_a = 0$ и /11.22/ совпадает с хорошо известным явно ковариантным представлением генераторов группы $\mathcal{P}$ /1.3/ реализующимся на решениях уравнения Дирака /11.1/

$$P_0 = p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a},$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \quad J_{0a} = t p_a - x_a p_0 + S_{0a} \qquad /11.24/$$

Предварительно записав член с $(\vec{S}\vec{p})^2$ в A_s виде /7.2/, затем заменив p_μ на π_μ из уравнения /11.18/ получаем уравнение движения для заряженной релятивистской частицы с произвольным спином $s \neq 0$ во внешнем электромагнитном поле

$$A_s(\vec{\pi})\Psi = \begin{pmatrix} \pi_0 + \frac{\vec{S}\vec{\pi}}{s} & -m \\ -m - \frac{\vec{\pi}^2}{m} + \frac{(\vec{S}\vec{\pi})^2}{m s^2} + \frac{e(\vec{S}\vec{H})}{2 m s^2} & \pi_0 - \frac{\vec{S}\vec{\pi}}{s} \end{pmatrix}\Psi = 0. \qquad /11.25/$$

Если $S=\frac{1}{2}$, то /11.25/ совпадает с /11.11/, а при $S\neq\frac{1}{2}$ является его обобщением на случай произвольного спина.

Преобразовав волновую функцию Ψ, удовлетворяющую /11.25/ по закону

$$\Psi\to\Psi'=V_s(\vec{\pi})\Psi, \qquad /11.26/$$

где $V_s(\vec{\pi})$ получается из /11.16/ посредством замены $p_\mu\to\pi_\mu$ находим, что в новом представлении уравнение имеет вид

$$A_s'(\vec{\pi})\Psi'=\begin{pmatrix}0 & -m\\ \frac{\pi_0^2}{m}-m-\frac{\vec{\pi}^2}{m}+\frac{e}{ms}\vec{S}\left(\frac{1}{2s}\vec{H}+i\vec{E}\right) & 2\pi_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi'\\ \chi'\end{pmatrix}=0 \qquad /11.27/$$

Из /11.27/ видим, что все $(2s+1)$ компонент волновой функции χ' тождественно равны нулю, а $(2s+1)$ - компонентная волновая функция φ' удовлетворяет обобщенному уравнению Фейнмана-Гелл-Манна

$$\left[\pi_0^2-\vec{\pi}^2-m^2+\frac{ie}{s}\hat{\vec{S}}\left(\frac{1}{2s}\vec{H}+i\vec{E}\right)\right]\varphi'=0. \qquad /11.28/$$

В случае $S=\frac{1}{2}$ как и следовало ожидать, уравнение /11.28/ совпадает с оригинальным уравнением Фейнмана-Гелл-Манна /11.14/.

§ 12. Гамильтонова форма релятивистских уравнений Гарди

В работах [58],[59] найдены волновые уравнения, описывающие движение релятивистской частицы с произвольным спином $S\neq0$ и массой m. Эти уравнения можно записать так

$$\beta_0 p_0\Phi(\vec{x},t)=\left[(\vec{\beta}\vec{p})+\beta_4 m\right]\Phi(\vec{x},t) \qquad /12.1/$$

где $\Phi(\vec{x},t)$ - $(6s+1)$ - компонентная волновая функция, а матрицы β_0,β_a,β_4 имеют вид

$$\beta_0=\begin{pmatrix}I&0&0\\0&I&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \beta_4=\begin{pmatrix}0&I&0\\I&0&0\\0&0&\hat{I}\end{pmatrix},\ \beta_a=\begin{pmatrix}\frac{S_a}{s}&0&0\\0&-\frac{\hat{S}_a}{s}&\frac{K_a^+}{s}\\\frac{K_a}{s}&0&0\end{pmatrix} \qquad /12.2/$$

$p_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a}$, $p_0=i\frac{\partial}{\partial t}$, I и $\hat{I}$ - $(2s+1)$ и $(2s-1)$ - мерные единичные матрицы соответственно. S_a - матрицы размерности $(2s+1)\times(2s+1)$ представления $\mathcal{D}(s)$ алгебры O /3/, K_a - матрицы размерности $(2s+1)\times(2s-1)$ удовлетворяющие соотношениям /8.3/.

В случае $S=\frac{1}{2}$ уравнение /12.1/ совпадает с уравнением Дирака

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\vec{x},t)=\mathcal{H}_D\Phi(\vec{x},t), \qquad /12.3/$$

где

$$\mathcal{H}_D = \vec{\beta}\vec{P} + \beta_4 m, \qquad /12.4/$$

а

$$\beta_a = \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & -\sigma_a \end{pmatrix}, \quad \beta_4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

σ_a - обычные матрицы Паули.

При $S \neq \frac{1}{2}$ как видно из /12.2/, гамильтониан не выделен.

В этом параграфе мы решим задачу, аналогичную решенной в §9, т.е. используя методы, развитые в [45],[47] установим гамильтонову форму уравнений /12.1/. Затем исследуем полученные уравнения.

Рассмотрим операторы β_0 и $(1-\beta_0)$,

где

$$1 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \hat{I} \end{pmatrix}. \qquad /12.5/$$

β_0 и $(1-\beta_0)$ являются проекторами на подпространства "верхних" и "нижних" компонент волновой функции $\Phi(\vec{x},t)$ и имеют такие свойства

$$\beta_0 + (1-\beta_0) = 1, \qquad /12.6а/$$

$$\beta_0(1-\beta_0) = 0. \qquad /12.6б/$$

Умножив уравнение /12.1/ слева на проектор $(1-\beta_0)$ и учитывая /12.6б/, получаем

$$\{(1-\beta_0)(\vec{\beta}\vec{P}) + (1-\beta_0)\beta_4 m\}\Phi = 0 \qquad /12.7/$$

Используя явный вид β -матриц /12.2/, нетрудно убедиться, что имеют место такие соотношения

$$(1-\beta_0)\beta_4 = (1-\beta_0), \qquad /12.8а/$$

$$(1-\beta_0)\beta_a(1-\beta_0) = 0. \qquad /12.8б/$$

Принимая во внимание /12.8а/, уравнение /12.7/ можно переписать так

$$(1-\beta_0)\Phi = -(1-\beta_0)\frac{\vec{\beta}\vec{P}}{m}\Phi, \qquad /12.9/$$

или учитывая /12.6а/, /12.8б/

$$(1-\beta_0)\Phi = -(1-\beta_0)\frac{\vec{\beta}\vec{P}}{m}\beta_0\Phi \qquad /12.10/$$

На уравнение /12.10/ слева подействуем оператором $P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}$

$$(1-\beta_0)P_0\Phi = -(1-\beta_0)\frac{(\vec{\beta}\vec{P})}{m}\beta_0 P_0\Phi \qquad /12.11/$$

При этом мы учли, что оператор P_0 коммутирует с β матрицами и оператором P_a

$$[\beta_0, P_0] = [\beta_a, P_0] = [P_0, P_a] = 0$$

Из /12.1/ и /12.11/ следует такое уравнение

$$(1-\beta_0)p_0\Phi = \{-(1-\beta_0)\frac{(\vec\beta\vec p)^2}{m} - (1-\beta_0)(\vec\beta\vec p)\beta_4\}\Phi \qquad /12.12/$$

Сложив почленно правые и левые части уравнений /12.1/ и /12.12/, получаем

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\vec x,t) = \mathcal{H}\Phi(\vec x,t), \qquad /12.13/$$

где

$$\mathcal{H} = \vec\beta\vec p + \beta_4 m - (1-\beta_0)\frac{(\vec\beta\vec p)^2}{m} - (1-\beta_0)(\vec\beta\vec p) \qquad /12.14/$$

Волновая функция Φ, как видно из /12.9/, удовлетворяет дополнительному условию

$$A\Phi(\vec x,t) = 0, \qquad /12.15/$$

где

$$A = (1-\beta_0)\left(1 + \frac{\vec\beta\vec p}{m}\right) \qquad /12.16/$$

Из /12.2/ следует, что в случае $s=\frac{1}{2}, A=0$, а оператор /12.16/ совпадает с гамильтонианом Дирака /12.4/.

Таким образом, исходя из уравнения Герли /12.1/, мы получили эквивалентную ему систему уравнений - уравнение в гамильтоновой форме /12.13/ с дополнительным условием /12.15/.

Волновая функция Φ в уравнении /12.13/, так же как и в исходном уравнении /12.1/, имеет "лишние" компоненты.

Исходя из уравнения /12.13/ и дополнительного условия /12.15 получим уравнение в гамильтоновой форме для волновой функции, содержащей лишь физические компоненты.

Для этого перейдем к представлению, в котором оператор диагонален. Это достигается посредством преобразования волновой функции

$$\Phi \to \Phi' = V\Phi \qquad /12.17/$$

где

$$V = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -\frac{\vec K\vec p}{ms} & 0 & \hat I \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \frac{\vec K\vec p}{ms} & 0 & \hat I \end{pmatrix} \qquad /12.18/$$

Волновая функция

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{pmatrix} \qquad /12.19/$$

где φ' - $2(2s+1)$ - компонентная, а χ' - $(2s-1)$ - компонентные волновые функции, удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi' = \mathcal{H}'\Phi' \qquad /12.20/$$

и дополнительному условию

$$A'\mathcal{P}' = 0 \qquad /12.21/$$

$$\mathcal{H}' = V\mathcal{H}V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{S}\vec{P}}{s} & m & 0 \\ m + \frac{\vec{P}^2}{2m} - \frac{(\vec{S}\vec{P})^2}{ms^2} & -\frac{\vec{S}\vec{P}}{s} & \frac{\vec{K}^{+}\vec{P}}{s} \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \qquad /12.22/$$

$$A' = VAV^{-1} = (1-\beta_0) \qquad /12.23/$$

Из формул /12.2/, /12.19/ видим, что проектор $A' = (1-\beta_0)$ в этом представлении выделяет подпространство $(2s-1)$ - компонентных волновых функций, содержащих лишь "лишние" /нефизические/ компоненты, а проектор β_0 - подпространство $2(2s+1)$ - компонентных функций φ' с физическими компонентами. Из уравнений /12.20/, /12.21/ и формул /12.22/, /12.23/ следует, что волновая функция χ' содержит лишь нулевые компоненты, а $2(2s+1)$ - компонентная волновая функция φ' удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi' = \mathcal{H}_s\varphi' \qquad /12.24/$$

где

$$\mathcal{H}_s = \rho_1 m + \rho_3\frac{(\vec{S}\vec{P})}{s} + \frac{\rho_1 - i\rho_2}{2}\left(\frac{\vec{P}^2}{m} - \frac{(\vec{S}\vec{P})^2}{ms}\right) \qquad /12.25/$$

а матрицы ρ_i задаются формулами /3.2/.

Отметим, что уравнение /12.24/ совпадает с ранее полученным нами релятивистским уравнением /11.20/.

Для спинов $s=1$, $s=\frac{3}{2}$ оператор A можно преобразовать к диагональному виду /12.23/ и с помощью оператора, отличного от /12.18/.

Рассмотрим преобразование

$$\mathcal{P} \to \mathcal{P}'' = V_1^s\,\mathcal{P} \qquad /12.26/$$

где

$$V_1^1 = \begin{pmatrix} I & -\frac{\vec{S}\vec{P}}{m} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -\frac{\vec{K}\vec{P}}{m} & 0 & \hat{I} \end{pmatrix}, \quad (V_1^1)^{-1} = \begin{pmatrix} I & \frac{\vec{S}\vec{P}}{m} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \frac{\vec{K}\vec{P}}{m} & 0 & \hat{I} \end{pmatrix}; \qquad /12.27/$$

$$V_1^{\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{E}{m} + \frac{\vec{P}^2 - 4(\vec{S}\vec{P})^2}{8m(E+m)} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}\frac{(\vec{S}\vec{P})}{E} - \frac{(\vec{S}\vec{P})[\vec{P}^2 - 4(\vec{S}\vec{P})^2]}{12mE(E+m)} & \frac{m}{E} - \frac{\vec{P}^2 - 4(\vec{S}\vec{P})^2}{8E(E+m)} & \\ \frac{2}{3}\frac{\vec{K}\vec{P}}{m} & 0 & \hat{I} \end{pmatrix} \qquad /12.28/$$

Учитывая тождества /3.82/ и /3.83/, а для случая $S=1$, кроме того, такие соотношения, следующие из /3.82/ и /8.3/

$$(\vec{S}\vec{P})(\vec{K}^{+}\vec{P})=0 \quad \text{и} \quad (\vec{K}\vec{P})(\vec{S}\vec{P})=0, \qquad /12.29/$$

находим

$$A''=A'=(V_1^{s})A(V_1^{s})^{-1}=(1-\beta_0) \qquad /12.30/$$

Гамильтониан $\mathcal{H}''=(V_1^{s})\mathcal{H}(V_1^{s})^{-1}$ при этом отличный от /12.22/ и имеет вид:

$$\mathcal{H}''=\begin{pmatrix} 0 & m+\frac{(\vec{S}\vec{P})^2}{m} & 0 \\ m+\frac{\vec{P}^2}{2m}-\frac{(\vec{S}\vec{P})^2}{m} & 0 & \vec{K}^{+}\vec{P} \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \text{ если } s=1, \qquad /12.31/$$

$$\mathcal{H}''=\begin{pmatrix} 0 & m+\frac{9}{8}\frac{\vec{P}^2}{2m}-\frac{(\vec{S}\vec{P})^2}{2m} & 0 \\ m-\frac{\vec{P}^2}{8m}+\frac{(\vec{S}\vec{P})^2}{2m} & 0 & \frac{2}{3}\left[\frac{m}{E}-\frac{\vec{P}^2-4(\vec{S}\vec{P})^2}{8E(E+m)}\right](\vec{K}^{+}\vec{P}) \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \text{ если } s=\frac{3}{2} \qquad /12.32/$$

а волновая функция

$$\Phi''=\begin{pmatrix} \varphi'' \\ \chi'' \end{pmatrix}, \qquad /12.33/$$

где φ'' - $2(2s+1)$ -, а χ'' - $(2s-1)$ - компонентные волновые функции, удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi''=\mathcal{H}''\Phi'' \qquad /12.34/$$

и дополнительному условию

$$(1-\beta_0)\Phi''=0. \qquad /12.35/$$

Из уравнений /12.34/, /12.35/ и формул /12.31/, /12.32/ видим, что χ'' содержит лишь нулевые компоненты, а $2(2s+1)$ - компонентная волновая функция φ'' с отличными от нуля физическими компонентами удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi''=\mathcal{H}_s''\varphi'' \qquad /12.36/$$

где

$$\mathcal{H}_1''=\rho_1\left(m+\frac{\vec{P}^2}{2m}\right)+i\rho_2\left[\frac{(\vec{S}\vec{P})^2}{m}-\frac{\vec{P}^2}{2m}\right] - \qquad /12.37/$$

гамильтониан Тамма-Саката-Такетани [42],[43]

$$\mathcal{H}_{\frac{3}{2}}''=\rho_1\left(m+\frac{\vec{P}^2}{2m}\right)+\frac{i}{2}\rho_2\left[\frac{5}{4}\frac{\vec{P}^2}{2m}-\frac{(\vec{S}\vec{P})^2}{m}\right] - \qquad /12.38/$$

аналог гамильтониана Тамма-Саката-Такетани для случая $S=\frac{3}{2}$

При отсутствии внешнего электромагнитного поля операторы /12.37/ и /12.38/ изометрически эквивалентны гамильтониану /12.25/.

Так в случае $s=1$

$$\mathcal{H}_1'' = V_2\, \mathcal{H}_1' V_2^{-1}, \qquad /12.39/$$

где

$$V_2 = \begin{pmatrix} I & -\frac{\vec{S}\vec{p}}{m} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad V_2^{-1} = \begin{pmatrix} I & \frac{\vec{S}\vec{p}}{m} \\ 0 & I \end{pmatrix}. \qquad /12.40/$$

Глава III

Нерелятивистская заряженная частица во внешних постоянных полях

В настоящей главе на основе уравнений, полученных в гл. I, исследовано движение заряженной нерелятивистской частицы со спином $S=\frac{1}{2}$ и $S=1$ во внешнем постоянном однородном магнитном поле. Точно определен спектр оператора энергии

Изучено движение электрона в кулоновском поле ядра. В первом приближении вычислены поправки к энергетическим состояниям атома водорода, обусловленные спиновыми эффектами.

§ 13. Частица спина $S=\frac{1}{2}$ в постоянном однородном магнитном поле

В этом параграфе, используя уравнения, найденные в § 3, мы определим спектр энергий заряженной нерелятивистской частицы со спином в постоянном однородном магнитном поле.

Аналогичная задача в релятивистском случае на основании уравнения Дирака рассматривалась многими авторами /см. [57] стр.108

Из /3.88а/, /7.3/, /7.4/ следует, что уравнение движения для частицы со спином $S=\frac{1}{2}$ и зарядом e в постоянном однородном магнитном поле имеет вид

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi=\mathcal{H}(\vec{\pi})\Psi \qquad /13.1/$$

где

$$\mathcal{H}(\vec{\pi})=\rho_3\left(mc^2+\frac{\vec{\pi}^2}{2m}\cos 2\theta\right)+\rho_2\frac{\vec{\pi}^2}{2m}\sin 2\theta+\rho_1\sqrt{2}\,c(\vec{\sigma}\vec{\pi})\sin\theta \qquad /13.2/$$

При решении таких задач, не умаляя общности, можно считать, что поле направлено параллельно оси z [60]. Последнее означает, что компоненты тензора электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu}=-i\left[\pi_\mu,\pi_\nu\right] \qquad /13.3/$$

равны

$$F_{0\alpha} = E_\alpha = 0, \quad F_{23} = H_1 = 0, \; F_{31} = H_2 = 0, \quad F_{12} = H_3 = H \qquad /13.4/$$

Из формул /13.3/, /13.4/ следует, что π_μ можно выбрать в виде

$$\pi_1 = p_1 + \frac{e}{c} H x_2, \; \pi_2 = p_2, \; \pi_3 = p_3, \; \pi_0 = p_0 = i\frac{\partial}{\partial t} \qquad /13.5/$$

Операторы, входящие в определение гамильтониана /13.2/ не коммутируют друг с другом и с самим $\mathcal{H}(\vec{\pi})$, поэтому определить собственные значения оператора энергии непросто.

Преобразуем гамильтониан к такому виду, чтобы он содержал лишь коммутирующие друг с другом операторы. Это позволит нам, не решая уравнения /13.1/, найти спектр собственных значений гамильтониана.

Подвергнем волновую функцию Ψ унитарному преобразованию

$$\Psi \to \Psi_1 = \mathcal{U}_1 \Psi \qquad /13.6/$$

где

$$\mathcal{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\sin\theta + \cos\theta) + i\rho_1(\cos\theta - \sin\theta)\}$$
$$\mathcal{U}_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\sin\theta + \cos\theta) - i\rho_1(\cos\theta - \sin\theta)\} \qquad /13.7/$$

унитарный, чисто матричный оператор.

В результате преобразования /13.6/ приходим к такому уравнению для волновой функции Ψ_1

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_1 = \mathcal{H}_1(\vec{\pi})\Psi_1, \qquad /13.8/$$

$$\mathcal{H}_{(1)}(\vec{\pi}) = \mathcal{U}_1 \mathcal{H}(\vec{\pi}) \mathcal{U}_1^+ = \rho_3 mc^2 \sin 2\theta + \rho_2\left(mc^2\cos 2\theta + \frac{\vec{\pi}^2}{2m}\right) + \rho_1\sqrt{2}\,c(\vec{\sigma}\vec{\pi})\sin\theta \qquad /13.9/$$

Гамильтониан /13.9/ можно представить в виде

$$\mathcal{H}_1(\vec{\pi}) = \rho_3 mc^2 \sin 2\theta + K, \qquad /13.10/$$

где

$$K = \rho_2\left(mc^2\cos 2\theta + \frac{\vec{\pi}^2}{2m}\right) + \rho_1\sqrt{2}\,c(\vec{\sigma}\vec{\pi})\sin\theta \qquad /13.11/$$

- недиагональный оператор, антикоммутирующий с матрицей ρ_3

$$[K, \rho_3]_+ = 0 \qquad /13.12/$$

Посредством унитарного преобразования

$$\Psi_1 \to \Psi_2 = U_2 \Psi_1 \qquad /13.13/$$

преобразуем гамильтониан /13.10/

$$\mathcal{H}_1(\vec{\pi}) \to \mathcal{H}_2(\vec{\pi}) = U_2 \mathcal{H}_1(\vec{\pi}) U_2^+ \qquad /13.14/$$

таким образом, чтобы оператор $\mathcal{H}_2(\vec{\pi})$ коммутировал с ρ_3

Оператор U_2 будем искать в виде

$$U_2 = exp\left[\frac{\rho_3}{2} \frac{K}{mc^2} w\right], \qquad /13.15/$$
$$U_2^+ = exp\left[-\frac{\rho_3}{2} \frac{K}{mc^2} w\right],$$

где $w = w\left(\frac{|K|}{mc^2}\right)$ - действительная функция, которую следует определить так, чтобы в $\mathcal{H}_2(\vec{\pi})$ отсутствовали слагаемые некоммутирующие с ρ_3

Поскольку показатель экспоненты в /13.15/ антикоммутирует с операторами ρ_3 и K одновременно, то U_2 удовлетворяет таким соотношениям

$$U_2 \rho_3 = \rho_3 U_2^+ \quad , \ U_2 K = K U_2^+ \qquad /13.16/$$

Подставляя /13.10/, /13.15/ в формулу /13.14/ и учитывая /13.16/, получаем

$$\mathcal{H}_2(\vec{\pi}) = (\rho_3 mc^2 Sin 2\theta + K) exp\left[-\rho_3 \frac{K}{mc^2} w\right] \qquad /13.17/$$

Используя тождество

$$exp\left[-\rho_3 \frac{K}{mc^2} w\right] \equiv Cos\left(\frac{|K|}{mc^2} w\right) - \rho_3 \frac{K}{|K|} Sin\left(\frac{|K|}{mc^2} w\right) \qquad /13.18/$$

выражение /13.17/ запишем в виде

$$\mathcal{H}_2(\vec{\pi}) = \rho_3 \left[mc^2 Sin 2\theta \, Cos\left(\frac{|K|}{mc^2} w\right) + |K| \, Sin\left(\frac{|K|}{mc^2} w\right)\right] + \qquad /13.19/$$
$$+ K\left[Cos\left(\frac{|K|}{mc^2} w\right) - \frac{mc^2}{|K|} Sin 2\theta \, Sin\left(\frac{|K|}{mc^2} w\right)\right]$$

Из /13.19/ следует, что если w выбрать так, чтобы коэффициент при K обратился в ноль, то оператор $\mathcal{H}_2(\vec{\pi})$ будет коммутировать с матрицей ρ_3

Действительно, положив в /13.19/

$$w = \frac{mc^2}{|K|} \operatorname{arctg} \frac{|K|}{mc^2 \sin 2\theta} \qquad /13.20/$$

убеждаемся, что коэффициент при K равен нулю, а $\mathcal{H}_2(\vec{\pi})$ коммутирует с ρ_3 и выглядит так

$$\mathcal{H}_2(\vec{\pi}) = \rho_3 \{ m^2c^4 \sin^2 2\theta + K^2 \}^{1/2} \qquad /13.21/$$

Подставив /13.11/ в выражение /13.21/ и вводя обозначения [5],[7]

$$\vec{\pi}_1 = (\pi_1, \pi_2, 0), \quad \xi^2 = (\vec{\sigma}\vec{\pi}_1)^2 = (\sigma_1 \pi_1 + \sigma_2 \pi_2)^2 = \pi_1^2 - \frac{e}{c}\sigma_3 H, \qquad /13.22/$$

где оператор ξ^2 коммутирует со всеми скалярами построенными из $\vec{\sigma}, \vec{\pi}, \vec{H}$ находим явный вид гамильтониана

$$\mathcal{H}_2(\vec{\pi}) = \rho_3 \Big\{ \Big[mc^2 + \frac{\xi^2}{2m} + \frac{p_3^2}{2m} \Big]^2 + \sigma_3 \frac{eH}{mc} \Big[mc^2 \cos 2\theta + \frac{\xi^2}{2m} + \frac{p_3^2}{2m} \Big] + \Big(\frac{eH}{2mc} \Big)^2 - \underline{i \rho_3 \frac{\sqrt{2}\, eH}{m} \sigma_3 (\vec{\sigma}\vec{\pi}_1) \sin\theta} \Big\}^{1/2} \qquad /13.23/$$

Учитывая, что -матрицы удовлетворяют такому соотношению

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\, \varepsilon_{ijk}\, \sigma_k \qquad /13.24/$$

нетрудно убедиться, что подчеркнутый оператор не коммутирует со вторым слагаемым, а следовательно и с оператором энергии $\mathcal{H}_2(\vec{\pi})$

Покажем, что существует унитарное преобразование

$$\Psi_2 \to \Psi_3 = U_3 \Psi_2 \qquad /13.25/$$

посредством которого гамильтониан $\mathcal{H}_2(\vec{\pi})$ можно преобразовать так, чтобы оператор

$$\mathcal{H}_3(\vec{\pi}) = U_3 \mathcal{H}_2(\vec{\pi}) U_3^+ \qquad /13.26/$$

коммутировал с матрицей σ_3 и содержал лишь коммутирующие между собой слагаемые.

Для этого запишем $\mathcal{H}_2(\vec{\pi})$ в виде

$$\mathcal{H}_2(\vec{\pi}) = \rho_3\{m^2c^4 + A\}^{1/2} \qquad /13.27/$$

где

$$A = \frac{(\xi^2+P_3^2)^2}{4m^2} + c^2(\xi^2+P_3^2) + \left(\frac{eH}{2mc}\right)^2 - \frac{eH}{mc}\{i\rho_3 e\sqrt{2}c \times$$
$$\times \sigma_3(\vec{\sigma}\vec{\pi}_\perp)\sin\theta - \sigma_3[mc^2\cos 2\theta + \frac{\xi^2}{2m} + \frac{P_3^2}{2m}]\} \qquad /13.28/$$

Убедимся, что если оператор $\mathcal{U}_3$ коммутирует с матрицей ρ_3, то справедливо такое тождество

$$\mathcal{U}_3\rho_3\{m^2c^4 + A\}^{1/2}\mathcal{U}_3^+ \equiv \rho_3\{m^2c^4 + A_1\}^{1/2}, \qquad /13.29/$$

где

$$A_1 = \mathcal{U}_3 A\,\mathcal{U}_3^+. \qquad /13.30/$$

Действительно,

$$\mathcal{U}_3\rho_3\{A + m^2c^4\}^{1/2}\mathcal{U}_3^+ \equiv \rho_3\mathcal{U}_3\{A + m^2c^4\}\mathcal{U}_3^+ \equiv$$
$$\equiv \rho_3\{mc^2 + \frac{\mathcal{U}_3 A\mathcal{U}_3^+}{2m} - \frac{\mathcal{U}_3 A\mathcal{U}_3^+\mathcal{U}_3 A\mathcal{U}_3^+}{8m^3c^2} + \cdots\} \equiv \qquad /13.31/$$
$$\equiv \rho_3\{m^2c^4 + A_1\}^{1/2}.$$

Из формул /13.28/, /13.29/ видим, что гамильтониан

$$\mathcal{H}_3(\vec{\pi}) = \mathcal{U}_3\mathcal{H}_2(\vec{\pi})\mathcal{U}_3^+ \qquad /13.32/$$

будет коммутировать с матрицей σ_3, если выражение

$$\Omega = \mathcal{U}_3\{i\rho_3\sqrt{2}c\sigma_3(\vec{\sigma}\vec{\pi}_\perp)\sin\theta - \sigma_3[mc^2\cos 2\theta +$$
$$+ \frac{\xi^2}{2m} + \frac{P_3^2}{2m}]\}\mathcal{U}_3^+ \qquad /13.33/$$

не содержит слагаемых, не коммутирующих с σ_3, т.е.

$$[\sigma_3\,\Omega] = 0 \qquad /13.34/$$

Найдем такой унитарный оператор $\mathcal{U}_3$, при котором Ω удовлетворяло бы соотношению /13.34/.

Оператор $\mathcal{U}_3$ будем искать в виде:

$$\mathcal{U}_3 = exp\left[\frac{\sigma_3}{2}\frac{L}{M}W\right],$$
$$\mathcal{U}_3^+ = exp\left[-\frac{\sigma_3}{2}\frac{L}{M}W\right], \qquad /13.35/$$

где

$$L = i\rho_3\sqrt{2}\,c\,\sigma_3(\vec{\sigma}\vec{\pi}_\perp)\,Sin\,\theta,$$
$$M = -\left[mc^2 Cos\,2\theta + \frac{\xi^2}{2m} + \frac{p_3^2}{2m}\right], \qquad /13.36/$$

а $W = W\left(\frac{|L|}{M}\right)$ - действительная функция, которую следует определить так, чтобы оператор Ω коммутировал с σ_3

Показатель экспоненты в /13.35/ антикоммутирует с операторами L и σ_3, поэтому унитарный оператор $\mathcal{U}_3$ удовлетворяет таким соотношениям

$$\mathcal{U}_3 L = L\,\mathcal{U}_3^+ \;, \quad \mathcal{U}_3\sigma_3 = \sigma_3\,\mathcal{U}_3^+ \qquad /13.37/$$

Подставляя /13.35/ в /13.33/ и учитывая /13.37/, получаем

$$\Omega = \{\sigma_3 M\,Cos\left(\frac{|L|}{M}W\right) + |L|\,Sin\left(\frac{|L|}{M}W\right) +$$
$$+ L\left\{Cos\left(\frac{|L|}{M}W\right) - \frac{M}{|L|}Sin\left(\frac{|L|}{M}W\right)\right\} \qquad /13.38/$$

Как видим из /13.38/ оператор Ω будет коммутировать с матрицей σ_3, если

$$W = \frac{M}{|L|}\,arctg\,\frac{|L|}{M} \qquad /13.39/$$

Гамильтониан $\mathcal{H}_3(\vec{\pi})$ при этом тоже коммутирует с матрицей σ_3 и имеет вид

$$\mathcal{H}_3(\vec{\pi}) = \rho_3\Big\{\Big(mc^2 + \frac{\xi^2}{2m} + \frac{p_3^2}{2m}\Big)^2 - \sigma_3\frac{eH}{mc}\Big[m^2c^4Cos^2 2\theta +$$
$$+ \xi^2c^2 + p_3^2c^2Cos\,2\theta + \frac{(\xi^2+p_3^2)^2}{4m^2}\Big]^{1/2} + \Big(\frac{eH}{2mc}\Big)^2\Big\}^{1/2} \qquad /13.40/$$

Все операторы, входящие в определение гамильтониана /13.40/ коммутирует друг с другом, а следовательно, и с $\mathcal{H}_3(\vec{\pi})$. Их собственные значения имеют вид [8], [61]

$$\rho_3 \Psi_3 = \pm 1 \Psi_3 , \qquad /13.41а/$$

$$P_3^2 \Psi_3 = p_3^2 \Psi_3 ; \qquad /13.41б/$$

$$(\vec{S}\vec{H}) \Psi_3 = S_3 H \Psi_3 \qquad /13.41в/$$

$$\xi^2 \Psi_3 = (2n+1-\sigma_3) \frac{e}{c} H \Psi_3 \qquad /13.41г/$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad S_3 = \pm \frac{1}{2}, \ \sigma_3 = 2 S_3, \ \sigma_3 = \pm 1$$

Поскольку все операторы /13.41/ коммутируют друг с другом и с гамильтонианом /13.40/, то они имеют общую систему собственных функций. Следовательно, согласно /13.40/, /13.41/ возможные значения энергии заряженной нерелятивистской частицы со спином $S = \frac{1}{2}$ в постоянном однородном магнитном поле равны

$$E = \pm \Big\{ \Big(mc^2 + \frac{\frac{eH}{c}(2n+1-\sigma_3) + P_3^2}{2m} \Big)^2 + \Big(\frac{eH}{2mc} \Big)^2 - \sigma_3 \frac{eH}{mc} \Big[m^2 c^4 \cos^2 2\theta + (2n+1-\sigma_3) \frac{eH}{c} + c^2 P_3^2 \cos 2\theta + \frac{\big[\frac{eH}{c}(2n+1-\sigma_3) + P_3^2\big]^2}{4m^2} \Big]^{1/2} \Big\}^{1/2}, \ \sigma_3 = \pm 1 \qquad /13.42/$$

Значения E всегда вещественны, ибо оператор /13.40/ эрмитов, а спектр эрмитова оператора вещественен [62]

Поскольку выражение /13.42/ не содержит величины p_1, пробегающей непрерывный ряд значений, то уровни энергии нерелятивистской частицы со спином $S = \frac{1}{2}$ в постоянном однородном магнитном поле вырождены с бесконечной кратностью. Аналогичная ситуация имеет место и в обычной нерелятивистской теории для частиц со спином $S = \frac{1}{2}$ [63]

Найдем систему собственных функций $\Psi_{\varepsilon n s_3 p_3}$ гамильтониана /13.40/.

Из явного вида оператора S_{ab} /1.3/ заключаем, что общий вид функции Ψ_3 задается формулой

$$\Psi_3 = \begin{pmatrix} \Psi_3^{(1)} \\ \Psi_3^{(2)} \end{pmatrix} \qquad /13.43/$$

где $\Psi_3^{(1)}$ и $\Psi_3^{(2)}$ – $(2s+1)$ – компонентные функции.

Произвольная волновая функция Ψ_3 может быть разложена по полной системе собственных функций $\Psi_{\epsilon n s_3 p_3}$, коммутирующих эрмитовых операторов /13.41/.

Из /3.2/ и /13.43/ нетрудно найти, что собственные функции оператора ρ_3 имеют вид

$$\Psi_{+1 n s_3 p_3} = \begin{pmatrix} \Psi_{n s_3 p_3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{-1 n s_3 p_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_{n s_3 p_3} \end{pmatrix} \qquad /13.44/$$

Для того, чтобы задать явный вид 2 – компонентных функций $\Psi_{n s_3 p_3}$ воспользуемся представлением, в котором матрица $\hat{S}_{12}$ диагональна

$$\hat{S}_{12} = \hat{S}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad /13.45/$$

Тогда $\Psi_{n s_3 p_3}$ представляет собой столбец, в котором все элементы равны нулю, кроме того, который стоит в строке под номером $\left(\frac{3}{2} - s_3\right)$, где $s_3 = \pm \frac{1}{2}$

$$\Psi_{n \frac{1}{2} p_3} = \begin{pmatrix} \Psi_{n p_3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{n -\frac{1}{2} p_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_{n p_3} \end{pmatrix} \qquad /13.46/$$

где $\Psi_{n p_3}$ – однокомпонентные функции, удовлетворяющие уравнению

$$\vec{\pi}^2 \Psi_{n p_3} = \left[(2n+1)\frac{e}{c} H + p_3^2\right] \Psi_{n p_3} \qquad /13.47/$$

Явный вид таких функций хорошо известен [63] и задается формулой

$$\Psi_{n p_3} = \frac{(|e| H)^{1/4}}{\pi^{1/4} (\hbar c)^{1/4} (2^n n!)^{1/2}} \exp \frac{i}{\hbar} (p_1 x_1 + p_3 x_3) \times$$
$$\times \exp\left[\frac{|e| H}{2\hbar c}\left(x_2 + \frac{c p_1}{e H}\right)\right] H_n\left[\sqrt{\frac{|e| H}{\hbar c}}\left(x_2 + \frac{c p_1}{e H}\right)\right], \qquad /13.48/$$

где H_n - полиномы Эрмита.

Формулы /13.44/, /13.46/, /13.48/ полностью определяют явный вид системы собственных функций $\Psi_{\epsilon n s_3 p_3}$ оператора энергии /13.40/, соответствующих значениям энергии /13.42/. Для получения явного вида собственных функций исходного гамильтониана /13.2/ необходимо подействовать на Ψ_3, выраженную через $\Psi_{\epsilon n s_3 p_3}$ оператором

$$\mathcal{U}^+ = \mathcal{U}_1^+ \mathcal{U}_2^+ \mathcal{U}_3^+, \qquad /13.49/$$

где $\mathcal{U}_1^+, \mathcal{U}_2^+, \mathcal{U}_3^+$ определены формулами /13.7/, /13.15/, /13.35/ соответственно.

§ 14. Нерелятивистская частица спина $s=1$ в постоянном однородном магнитном поле

В этом параграфе, исходя из уравнений /7.3/, мы определим спектр энергий заряженной нерелятивистской частицы со спином $s=1$ массой m и зарядом, равным заряду электрона, e в постоянном однородном магнитном поле.

Аналогичные задачи для релятивистских частиц, описываемых уравнением Кеммера-Деффина решены в работах А.А.Бергерта [48] и его сотрудников [64], [65]

При решении задачи будем использовать систему единиц: $\hbar=c=1$ Как и в предыдущем случае допустим, что компоненты тензора электромагнитного поля задаются формулами /13.4/, а операторы π_μ имеют вид

$$\pi_1 = p_1 + eHx_2, \quad \pi_2 = p_2, \quad \pi_3 = p_3 = 0$$
$$\pi_0 = p_0 = i\frac{\partial}{\partial t} \qquad /14.1/$$

Ради простоты изложения, но не умаляя общности, рассмотрим лишь случай

$$\theta = \frac{\pi}{4} \qquad /14.2/$$

Из /3.88б/, /7.3/, /7.4/, /14.1/ и /14.2/ следует, что уравнение движения в этом случае выглядит так

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \mathcal{H}(\vec{\pi})\Psi, \qquad /14.3/$$

где

$$\mathcal{H}(\vec{\pi}) = \rho_3\left[m + \frac{\hat{\eta}}{2m} - \frac{(\vec{S}\vec{\pi}_\perp)^2}{m} + \frac{e(\vec{S}\vec{H})}{2m}\right] + \rho_1\sqrt{2}(\vec{S}\vec{\pi}_\perp), \qquad /14.4/$$

а в формуле /14.4/ использованы такие обозначения

$$\begin{aligned} \vec{\pi}_\perp &= (\pi_1, \pi_2, 0), \\ (\vec{S}\vec{\pi}_\perp) &= (S_1\pi_1 + S_2\pi_2), \\ \hat{\eta} &= \pi_1^2 - 2e(\vec{S}\vec{H}) \end{aligned} \qquad /14.5/$$

Оператор $\hat{\eta}$ коммутирует со всеми скалярами построенными из $\vec{S}, \vec{H}, \vec{\pi}$

Из /14.3/, /14.4/ следует, что уравнение для стационарных состояний Ψ имеет вид

$$\left\{\rho_3\left[m + \frac{\hat{\eta}}{2m} - \frac{(\vec{S}\vec{\pi}_\perp)^2}{m} + \frac{e(\vec{S}\vec{H})}{2m}\right] + \rho_1\sqrt{2}(\vec{S}\vec{\pi}_\perp)\right\}\Psi = E\Psi, \qquad /14.6/$$

где E - собственные значения оператора энергии $\mathcal{H}(\vec{\pi})$, которые нам надо найти.

Операторы, входящие в определение $\mathcal{H}(\vec{\pi})$ /14.4/, не коммутируют друг с другом, а значит и не имеют общих собственных функций, поэтому определить собственные значения оператора энергии $\mathcal{H}(\vec{\pi})$ непросто. Найти унитарное преобразование, с помощью которого $\mathcal{H}(\vec{\pi})$ можно было бы преобразовать к такому виду, чтобы он содержал лишь коммутирующие операторы, как и в релятивистском случае [6-8] не удается. Поэтому, для нахождения спектра собственных значений оператора энергии, воспользуемся методикой развитой в [6-8] для релятивистских уравнений.

Следуя [6], умножим /14.6/ слева на E и учитывая его коммутативность с $\mathcal{H}(\vec{\pi})$, получим

$$E^2\Psi = \mathcal{H}(\vec{\pi})E\Psi = [\mathcal{H}(\vec{\pi})]^2\Psi \qquad /14.7/$$

Возводя гамильтониан /14.4/ в квадрат и используя такие соотношения [6]

$$(\vec{S}\vec{\pi}_\perp)^4 = \hat{\eta}(\vec{S}\vec{\pi}_\perp)^2 \qquad /14.8/$$

$$[(\vec{S}\vec{\pi}_\perp)^2, (\vec{S}\vec{H})]_+ = (\hat{\eta} + e(\vec{S}\vec{H}))(\vec{S}\vec{H}) \qquad /14.9/$$

$$[(\vec{S}\vec{\pi}_\perp), (\vec{S}\vec{H})] = -i\,\vec{S}(\vec{H}\times\vec{\pi}) \qquad /14.10/$$

уравнение /14.7/ запишем в виде

$$E^2\Psi = \{(m + \frac{\hat{\eta}}{2m})^2 + \underline{S_3(eH) - S_3^2(\frac{eH}{2m})^2 - \rho_2\frac{e\sqrt{2}}{2m}\vec{S}(\vec{H}\times\vec{\pi})}\}\Psi \qquad /14.11/$$

Подчеркнутое выражение коммутирует с другими слагаемыми, квадратом гамильтониана, а значит и с таким оператором.

$$A = E^2 - (m + \frac{\hat{\eta}}{2m})^2 \qquad /14.12/$$

Подставив /14.12/ в /14.11/, приходим к такому уравнению

$$A\Psi = \{S_3(eH) - S_3^2(\frac{eH}{2m})^2 - \rho_2\frac{e\sqrt{2}}{2m}\vec{S}(\vec{H}\times\vec{\pi})\}\Psi \qquad /14.13/$$

Представим Ψ в виде

$$\Psi = \Psi^+ + \Psi^-,$$

где

$$\Psi^+ = S_3^2\Psi, \quad \Psi^- = (1 - S_3^2)\Psi \qquad /14.14/$$

Используя свойства спиновых матриц для $s = 1$

$$S_i S_j S_k + S_k S_j S_i = \delta_{ij} S_k + \delta_{kj} S_i \qquad /14.15/$$

легко показать, что операторы S_3^2 и $(1 - S_3^2)$ удовлетворяют таким соотношениям

$$(S_3^2)^2 = S_3^2, \quad [(1-S_3^2)]^2 = (1-S_3^2),$$
$$S_3^2(1-S_3^2) = 0 \qquad /14.16а/$$

и

$$[S_3^2, S_\kappa]_+ = S_\kappa \qquad /14.16б/$$

Из /14.14/ и /14.16а/ следует, что

$$S_3^2\Psi^+ = \Psi^+, \quad S_3^2\Psi^- = 0, \qquad /14.17а/$$

$$(1-S_3^2)\Psi^- = \Psi^-, \quad (1-S_3^2)\Psi^+ = 0 \qquad /14.17б/$$

Как видим из /14.17/, операторы S_3^2 и $(1-S_3^2)$ являются проекторами на подпространства собственных функций Ψ^+ и Ψ^- оператора S_3^2 с собственными значениями 1 и 0 соответственно.

Подействовав на уравнение /14.13/ слева оператором S_3^2 и учитывая /14.14/, /14.16а/, /14.16б/, получаем

$$[A - S_3(eH) + S_3^2\left(\frac{eH}{2m}\right)^2]\Psi^+ = -\underline{S_3\rho_2\frac{e\sqrt{2}}{2m}\vec{S}(\vec{H}\times\vec{\pi})}\Psi^- \qquad /14.18/$$

Аналогично, умножая /14.13/ слева на оператор $(1-S_3^2)$ и принимая во внимание /14.14/, /14.16а/, /14.16б/, приходим к уравнению

$$A\Psi^- = -\rho_2\frac{e\sqrt{2}}{2m}\vec{S}(\vec{H}\times\vec{\pi})\Psi^+ \qquad /14.19/$$

Подействовав на /14.18/ оператором A, учитывая, чтотон коммутирует с подчеркнутым выражением и действует на Ψ^- согласно /14.19/, находим уравнение для волновой функции Ψ^+

$$A[A - S_3(eH) + S_3^2\left(\frac{eH}{2m}\right)^2]\Psi^+ = S_3^2\frac{e^2}{2m^2}[\vec{S}(\vec{H}\times\vec{\pi})]^2\Psi^+ \qquad /14.20/$$

Воспользовавшись тождествами [5]:

$$[\vec{S}(\vec{H}\times\vec{\pi})]^2 \equiv H^2(\vec{S}\vec{\pi}_1)^2 = \frac{1}{2}H^2 N_+ \qquad /14.21а/$$

$$(\vec{S}\vec{H})^2(\vec{S}\vec{\pi}_1)^2 \equiv \frac{1}{2}\hat{\eta}\,S_3^2H^2 + \frac{e}{2}S_3H^3 + \frac{1}{4}H^2N_+ \qquad /14.21б/$$

где

$$N_+ = S_-^2\pi_+^2 + S_+^2\pi_-^2 \qquad /14.22/$$

- оператор, коммутирующий с S_3^2 и антикоммутирующий с S_3, а операторы $S_\pm$ и $\pi_\pm$ задаются формулами

$$S_\pm = S_1 \pm i\,S_2\,, \quad \pi_\pm = \pi_1 \pm i\,\pi_2$$

а также соотношением /15.17а/, уравнение /14.20/ можно переписать так

$$[A^2 + \frac{\hat{\eta}}{4m^2}(eH)^2 + \left(\frac{eH}{2m}\right)^2 A]\Psi^+ = [S_3(eH)A + S_3\frac{(eH)^3}{4m^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{eH}{2m}\right)^2 N_+]\Psi^+ \qquad /14.23/$$

Наконец, умножая /14.23/ слева на оператор

$$[A^2 + \frac{\hat{\eta}}{4m^2}(eH)^2 + \left(\frac{eH}{2m}\right)^2 A], \qquad /14.24/$$

учитывая его коммутативность с оператором в правой части /14.23/ и также соотношения

$$[S_3^2, N_+] = [S_3, N_+]_+ = 0$$
$$N_+^2 = 4S_3^2(\hat{\eta}^2 - e^2H^2), \quad S_3^2\Psi^+ = \Psi^+ \qquad /14.25/$$

приходим к уравнению

$$Z\Psi^+ = 0, \qquad /14.26/$$

где оператор имеет вид

$$Z = \{A^3 + 2\left(\frac{eH}{2m}\right)^2 A^2 + [\left(\frac{eH}{2m}\right)^4 - 2\hat{\eta}\left(\frac{eH}{2m}\right)^2 - (eH)^2]A - [2\hat{\eta}\left(\frac{eH}{2m}\right)^4 + \frac{(eH)^4}{2m^2}]\} \qquad /14.27/$$

Все операторы, входящие в определение Z /15.26/, коммутируют друг с другом и с оператором Z, поэтому имеют общую систему собственных функций.

Их собственные значения имеют вид

$$A\Psi^+ = a\Psi^+, \qquad /14.28а/$$
$$\hat{\eta}\Psi^+ = \eta\Psi^+, \qquad /14.28б/$$

где

$$\eta=(2n+1-2S_3)eH\,,\ n=0,1,2,\ldots\,,\ S_3=-1,0,1$$

а собственные значения a оператора A как это видно из /14.26/, /14.27/, являются решениями такого уравнения

$$a^3+ka^2+\ell a+\tau=0, \qquad /14.29/$$

где

$$k=2\left(\frac{eH}{2m}\right)^2,\ \ell=\left[\left(\frac{eH}{2m}\right)^4-2\eta\left(\frac{eH}{2m}\right)-(eH)^2\right],$$
$$\tau=-\left[2\eta\left(\frac{eH}{2m}\right)^4+\frac{(eH)^4}{2m^2}\right] \qquad /14.30/$$

Уравнение /14.29/ решается точно. Его корни находятся по формуле Кардано [37]

$$a=\left\{-\frac{q}{2}+\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{1/2}\right\}^{1/3}+\left\{-\frac{q}{2}-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{1/2}\right\}^{1/3}-\frac{k}{3}, \qquad /14.31/$$

где

$$q=\left(\frac{2k^3}{27}-\frac{k\ell}{3}+\tau\right),$$
$$p=\left(\ell-\frac{k^2}{3}\right), \qquad /14.32/$$

выражающей корни уравнения /14.29/ через его коэффициенты при помощи квадратных и кубичных радикалов.

Так как кубичный радикал имеет в поле комплексных чисел три значения, то формула /14.31/ задает три корня уравнения /14.29/. Коэффициенты p и q /14.32/ - действительные числа, поэтому хотя бы один из трех корней уравнения /14.29/ действителен. Спектр эрмитова оператора A /14.12/ должен быть вещественен [62] поэтому комплексные корни уравнения /14.29/ не могут быть его собственными значениями.

Количество действительных корней уравнения /14.29/ зависит от знака выражения $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ стоящего в формуле /14.31/ под знаком квадратного корня. Уравнение /14.29/ может иметь:

а/ один действительный корень, если $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$

б/ три действительных корня, причем два из них равны между собой, если $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$

в/ три различных действительных корня, если $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$

В случаях б/ и в/ существуют решения уравнения /14.29/, которые не являются собственными значениями оператора A. Для того, чтобы из всех имеющихся действительных корней уравнения /14.29/ выбрать тот, который является собственным значением оператора мы должны учесть тот факт, что собственные значения оператора должны удовлетворять такому соотношению

$$a + \left(m + \frac{\eta}{2m}\right)^2 = m^2 + (2n+1-S_3)eH + O\left(\frac{1}{m}\right) \qquad /14.33/$$

где $O\left(\frac{1}{m}\right)$ слагаемые порядка малости $\sim \frac{1}{m}$

Соотношение /14.33/ следует непосредственно из определения оператора A /14.12/, уравнения /14.11/ и формул /14.28а/, /14.28б/.

Действительный корень уравнения /14.29/, определяемый по формуле /14.31/ и удовлетворяющий условию /14.33/, и является собственным значением оператора A. Обозначим его через a_A. Тогда, согласно /14.12/, возможны следующие значения энергии заряженной нерелятивистской частицы со спином $S=1$ во внешнем постоянном однородном магнитном поле:

$$E = \pm\left\{\left[m + \frac{(2n+1-2S_3)}{2m}eH\right]^2 + a_A\right\}^{1/2} \qquad /14.34/$$

Из формул /14.30/, /14.31/, /14.32/ видим, что выражение /14.34/ не содержит величины p_1, пробегающей непрерывный ряд значений, поэтому уровни энергии, как и в предыдущем случае при $S=\frac{1}{2}$ вырождены с бесконечной кратностью. Значения E всегда действительны, поскольку оператор энергии /14.4/ эрмитов

§ 15. Нерелятивистский электрон в поле ядра

В §7 мы показали, что движение заряженной нерелятивистской частицы со спином $S=\frac{1}{2}$ во внешнем электромагнитном поле может быть описано уравнением

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \mathcal{H}^{k}(\vec{\pi})\Psi \qquad /15.1/$$

где оператор $\mathcal{H}^{k}(\vec{\pi})$ диагональный с точностью до членов порядка $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ включительно и задается формулой /7.32/

В настоящем параграфе мы исследуем движение электрона, описываемого уравнением /15.1/, в кулоновском поле ядра с потенциальной энергией $V(\vec{r}) = -Ze^2/r$

Положив в /7.32/ $H \equiv 0, e\varphi = -\frac{Ze^2}{r}$ и подвергнув волновую функцию Ψ преобразованию

$$\Psi \to \Phi = e^{i\rho_3 mc^2 \frac{t}{\hbar}} \Psi \qquad /15.2/$$

приходим к уравнению

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \{ \rho_3 \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} - \frac{\hbar^2 e \sin^2\theta}{4m^2c^2} \operatorname{div} E - \frac{e\hbar \sin^2\theta}{4m^2c^2} \vec{\sigma}(\vec{E}\times\vec{p} - \vec{p}\times\vec{E}) \} \Phi. \qquad /15.3/$$

Введем обозначения

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \qquad /15.4/$$

где φ и χ 2-компонетные волновые функции, являющиеся положительно-частотными и отрицательно-частотными решениями уравнения /15.3/ соответственно.

Из /3.2/, /15.3/, /15.4/ заключаем, что уравнение для волновой функции имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \{ \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} - \frac{\hbar^2 e \sin^2\theta}{4m^2c^2} \operatorname{div} E - \frac{e\hbar \sin^2\theta}{4m^2c^2} \vec{\sigma}(\vec{E}\times\vec{p} - \vec{p}\times\vec{E}) \} \varphi \qquad /15.5/$$

Как видим из /15.5/, для определения стационарных состояний электрона в кулоновском поле ядра надо решить уравнение

$$E\varphi = \{ \mathcal{H}_0 + W_1 + W_2 \} \varphi, \qquad /15.6/$$

где

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} \qquad /15.7/$$

- обычный нерелятивистский гамильтониан, а W_1 и W_2 - поправки порядка $\sim \left(\frac{v}{c}\right)^2$ обусловленные наличием спина электрона, которые, учитывая что

$$E = -\frac{\vec{r}}{r} \frac{d\varphi}{dr} \qquad /15.8/$$

и такое соотношение

$$\operatorname{div} E = -4\pi Z e \, \delta(r) \qquad /15.9/$$

характерное для кулоновского поля $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$ можно записать в і

$$W_1 = \frac{\pi Z e^2 \hbar^2}{m^2c^2} \sin^2\theta \, \delta(r), \qquad /15.10/$$

$$W_2 = \frac{Ze^2}{m^2c^2r^3} \sin^2\theta \, (\hat{\vec{S}}\hat{\vec{L}}), \qquad /15.11/$$

$\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ - оператор спинового момента,

$\hat{\vec{L}} = \vec{r}\times\vec{p}$ - оператор обритального момента.

Чтобы упростить решение уравнения /15.6/, введем оператор полного момента электрона

$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}} \qquad /15.12/$$

и выразим скалярное произведение $(\hat{\vec{S}}\hat{\vec{L}})$ в /15.11/ через квадраты операторов моментов по формуле

$$(\hat{\vec{S}}\cdot\hat{\vec{L}}) = \frac{1}{2}\left(\hat{\vec{J}}^2 - \hat{\vec{L}}^2 - \hat{\vec{S}}^2\right) \qquad /15.13/$$

а затем запишем уравнение /15.6/ в сферической системе координат. При этом $\mathcal{H}_0, W_1, W_2$ принимают вид

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\vec{L}}^2}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{r} \qquad /15.14а/$$

$$W_1 = \frac{\pi Z e^2 \hbar^2}{m^2c^2}\sin^2\theta\,\delta(\vec{r}) \qquad /15.14б/$$

$$W_2 = \frac{Ze^2}{2m^2c^2r^3}\sin^2\theta\left(\hat{\vec{J}}^2 - \hat{\vec{L}}^2 - \hat{\vec{S}}^2\right) \qquad /15.14в/$$

из /15.14а - 15.14в/ видим, что оператор гамильтона в уравнение /15.6/

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + W_1 + W_2 \qquad /15.15/$$

коммутирует с операторами $\hat{\vec{L}}^2, \hat{\vec{S}}^2, \hat{\vec{J}}^2$ следовательно, возможны стационарные состояния, в которых все три величины, соответствующие этим операторам имеют определенные значения. В этих состояниях зависимость волновых функций от угловых и спиновых переменных задается формулой [66]

$$\varphi_{l\frac{1}{2}jm}(\theta,\varphi) = \sum_{m_s}(l,\tfrac{1}{2},m-m_s,m_s\,|\,j,m)\,Y_{l,m-m_s}(\theta,\varphi)\,\chi_{\frac{1}{2},m_s} \qquad /15.16/$$

где $Y_{l,m-m_s}$ - сферические функции порядка l, отличающиеся значением магнитного квантового числа m и спиновой переменной m_s пробегающей два значения $m_s = \pm\frac{1}{2}$, $\chi_{\frac{1}{2},m_s}$ - двухкомпонентные спиновые функции, а коэффициенты векторного сложения для $j = l \pm \frac{1}{2}$ и $m_s = \pm\frac{1}{2}$ определяются по формулам

$$\begin{aligned}(l,\tfrac{1}{2},m-\tfrac{1}{2}\,|\,l+\tfrac{1}{2},m) &= (l,\tfrac{1}{2},m+\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\,|\,l-\tfrac{1}{2},m) = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\\ (l,\tfrac{1}{2},m+\tfrac{1}{2}\,|\,l+\tfrac{1}{2},m) &= -(l,\tfrac{1}{2},m-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\,|\,l-\tfrac{1}{2},m) = \sqrt{\frac{l-m+1/2}{2l+1}}\end{aligned} \qquad /15.17/$$

Операторы угловых моментов в /15.14а/, /15.14в/ при этом можно заменить их собственными значениями

$$\hat{\vec{J}}^2 = \hbar^2 j(j+1),\ j = l \pm \frac{1}{2}$$
$$\hat{\vec{L}}^2 = \hbar^2 l(l+1), \qquad /15.18/$$
$$\hat{\vec{S}}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$$

Из выше изложенного следует, что уравнение для радиальной волновой функции стационарных состояний атома водорода имеет вид

$$\left\{E + \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] + \frac{Ze^2}{r}\right\}\varphi_{nlj}(\vec{r}) = \qquad /15.19/$$
$$= [W_1 + W_2]\,\varphi_{nlj}(\vec{r}),$$

где W_1 определено формулой /15.14б/, а

$$W_2 = \frac{Ze^2\hbar^2}{2m^2c^2r^3}\sin^2\theta\left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right] \qquad /15.20/$$

Операторы W_1 и W_2 имеют порядок $\left(\frac{v}{c}\right)^2$, поэтому решения уравнения /15.19/ можно провести методом последовательных приближений.

В нулевом приближении уравнение /15.19/ имеет вид

$$\left\{E_n + \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] + \frac{Ze^2}{r}\right\}\varphi_{nl}(\vec{r}) = 0 \qquad /15.21/$$

и полностью совпадает с уравнением нерелятивистской теории атома водорода не учитывающей спин частицы.

Решения его приводятся во многих учебниках по квантовой механике /см. [63], [67] /.

При этом показано, что возможные значения энергии задаются формулой

$$E_n = -\frac{Z^2me^4}{2\hbar n^3},\quad n = 1, 2, \ldots \qquad /15.22/$$

и каждому из них соответствует n радиальных функций, которые выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию по формуле

$$\varphi_{nl}(r) = N_{nl}\left(\frac{2Zar}{n}\right)^l F\left(-n+l+1, 2l+2, \frac{2Zar}{n}\right)e^{-\frac{Zar}{n}}, \qquad /15.23/$$

где

$$N_{nl} = \frac{1}{(2l+1)!}\left[\frac{(n+l)!}{2n(n-l-1)!}\right]^{1/2}\left(\frac{2Z}{n}\right)^{3/2},$$

$a = \frac{\hbar^2}{me^2}$ - боровский радиус, и различаются значениями квантового числа $l = 0, 1, \ldots, n-1$

Зная явный вид функций /15.23/ нулевого приближения можно найти поправку к энергии уровня E_n обусловленную наличием в /15.19/ оператора возмущения $W = W_1 + W_2$

Мы ограничимся лишь тем, что найдем такую поправку в первом приближении.

Известно, что поправка к энергии /15.22/ в первом приближении равна среднему значению оператора W в состоянии, соответствующем волновой функции $\varphi_{n\ell}$ нулевого приближения.

В нашем случае

$$\Delta E_{nj\ell} = E_{nj\ell} - E_n = \langle n\ell|W|n\ell\rangle = \langle n\ell|W_1|n\ell\rangle + \langle n\ell|W_2|n\ell\rangle \qquad /15.24/$$

Вычислим отдельные слагаемые в формуле /15.24/. Более просто это сделать, если перейти к атомным единицам. Вводя постоянную тонкой структуры

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \qquad /15.25/$$

и перейдя к безразмерным величинам

$$E_n = -\frac{Z^2}{2n}, \quad \rho = a r$$

где a - боровский радиус, выражение /15.24/ можно переписать так

$$\Delta E_{nj\ell} = Z \pi \alpha^2 \sin^2\theta \int_0^\infty \varphi_{n\ell}(\vec{\rho})\delta(\vec{\rho})\vec{\rho}^{\,2} d\rho + \frac{Z\alpha^2}{2}\left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}\right]\sin^2\theta \int_0^\infty \varphi_{n\ell}(\vec{\rho})\frac{1}{\rho^3}\vec{\rho}^{\,2} d\rho \qquad /15.26/$$

Интегралы

$$J_1 = \int_0^\infty \varphi_{n\ell}^2(\vec{\rho})\delta(\vec{\rho})\vec{\rho}^{\,2} d\rho, \qquad /15.27а/$$

$$J_2 = \int_0^\infty \varphi_{n\ell}^2(\vec{\rho})\frac{1}{\rho^3}\vec{\rho}^{\,2} d\rho \qquad /15.27б/$$

вычислены в учебниках по квантовой механике /см., например, [68] / и равны

$$J_1 = \frac{Z^3}{\pi n^3}\delta_{\ell 0} \qquad /15.28а/$$

$$J_2 = \frac{Z^3}{n^3(\ell+1)(\ell+\frac{1}{2})\ell} \qquad /15.28б/$$

Подставляя /15.28а/, /15.28б/ в /15.26/, находим окончательную формулу для поправки к энергетическим состояниям /в атомных единицах/ атома водорода

$$\Delta E_{nj\ell} = -\frac{\alpha^2 Z^4}{n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\ell+\frac{1}{2}}\right)\sin^2\theta \qquad /15.29/$$

Эта поправка обусловлена лишь спиновыми эффектами, но не учитывает релятивистских, поэтому она отличается от поправки, полученной из теории Дирака

$$\Delta E_{nj} = -\frac{\alpha^2 Z^4}{2n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right) \qquad /15.30/$$

Из формулы /15.29/ следует, что спиновые эффекты при учете членов порядка $\sim\left(\frac{v}{c}\right)^2$ приводят как и в релятивистском случае /15.30/ к расщеплению n^2 -кратно вырожденого уровня нерелятивистской теории Шредингера /15.22/ для частиц без спина.

Более того, из /15.29/ видно, что в отличие от /15.30/ $\Delta E_{nj\ell}$ зависит и от квантового числа ℓ , поэтому пары уровней, имеющие одинаковые n и j при $\ell = j \pm \frac{1}{2}$ не являются вырожденными, как это имеет место в том случае, когда движение электрона в поле ядра описывается уравнением Дирака.

Таким образом, из выше сказанного следует, что в атоме водорода возможны состояния

$$1S_{1/2},\ 2S_{1/2},\ 2P_{1/2},\ 3S_{1/2},\ 3P_{1/2},\ 3P_{3/2},\ 3d_{3/2},\ 3d_{5/2}\ \text{и т.д.} \qquad /15.31/$$

причем каждое из них обладает разной энергией.

Для примера вычислим энергии состояний $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$ и убедимся, что они не равны между собой.

$$E_{2s\,1/2} = E_2 + \Delta E_{2s\,1/2} = E_2 - \frac{\alpha^2 Z^4}{8}(1-2)\sin^2\theta = E_2 + \frac{\alpha^2 Z^4}{8}\sin^2\theta \qquad /15.32/$$

$$E_{2p\,1/2} = E_2 - \frac{\alpha^2 Z^4}{8}\left(1-\frac{2}{3}\right)\sin^2\theta = E_2 - \frac{\alpha^2 Z^4}{24}\sin^2\theta \qquad /15.33/$$

Из /15.32/, /15.33/ видим, что выражение

$$E_{2s\,1/2} - E_{2p\,1/2} = \frac{1}{6}\alpha^2 Z^4 \sin^2\theta \qquad /15.34/$$

в общем случае, если $\theta \neq k\pi$ не равно нулю, поэтому

$$E_{2s\,1/2} \neq E_{2p\,1/2}$$

Причем, благодаря наличию в /15.34/ множителя

они могут отличаться друг от друга как угодно мало.

В случае $\theta = k\pi$ получаем n^2 -кратно вырожденный уровень нерелятивистской теории Шредингера для частицы без спина.

Волновые функции стационарных состояний электрона в кулоновском поле можно в нашем случае записать в виде

$$|n\ell jm\rangle = \varphi_{nj}(r)\,\varphi_{\ell\,1/2\,jm}(\theta,\varphi,m_s), \qquad /15.35/$$

где $\varphi_{nj}(r)$ в нулевом приближении совпадает с /15.23/, а $\varphi_{\ell\frac{1}{2}jm}$ задаются формулой /15.16/.

Заключение

Сделаем несколько замечаний относительно результатов, полученных в диссертации.

Для частиц с произвольным спином найдены волновые уравнения в гамильтоновой форме /1.1/, инвариантные относительно расширенной группы Галилея $\tilde{G}$ и операции сильного отражения /1.12/ $\Theta = CPT$, включающей инверсию времени T, отражение пространственных координат P и зарядовое сопряжение C.

При этом гамильтониан $\mathcal{H}$ /3.87/ – дифференциальный оператор второго порядка, эрмитовый в скалярном произведении /1.5/, а волновая функция Ψ в /1.1/ не имеет "лишних" /нефизических/ компонент.

В отличие от существующих нерелятивистских уравнений для частиц со спином, построенные в гл.I уравнения дают более полное описание движения заряженной нерелятивистской частицы во внешних электромагнитных полях.

Так в §7 показано, что найденные нами уравнения /1.1/ позволяют описать, кроме дипольного, спин-орбитальное, дарвиновское и квадрупольное /для $S \neq \frac{1}{2}$ / взаимодействия заряженной нерелятивистской частицы со спином $S \leq \frac{3}{2}$ с внешним электромагнитным полем.

Следовательно, впервые в рамках нерелятивистской квантовой механики удалось описать спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия, которые было принято ранее считать [27] чисто релятивистскими эффектами.

Немного позже, не требуя эрмитовости гамильтониана $\mathcal{H}$ в скалярном произведении /1.5/ и отказавшись от условия /1.11/, в [69] были построены галилеево-инвариантные уравнения для частиц произвольного спина S

При обобщении на случай движения заряженной нерелятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле, уравнения, полученные в [69], так же, как и уравнения /1.1/, позволяют учесть дипольное, спин-орбитальное, дарвиновское, а для частиц с $s \neq \frac{1}{2}$ и квадрупольное взаимодействия.

В гл.II исследованы нерелятивистские уравнения Х-Г и релятивистские уравнения Герли. Установлена их гамильтонова форма, необходимая при исследовании стационарных состояний квантовых систем.

Построены новые пуанкаре-инвариантные уравнения /11.20/ для частиц произвольного спина s, где гамильтониан $\mathcal{H}$ – дифференциальный оператор второго порядка.

Новые уравнения применены для описания движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

В §13, §14 на основе уравнений /1.1/ исследовано движение нерелятивистской частицы спина $s = \frac{1}{2}$ и $s = 1$, соответственно, в постоянном однородном магнитном поле. Найдены собственные значения, а для частицы с $s = \frac{1}{2}$ и собственные функции оператора энергии.

В §15 исследовано движение нерелятивистского электрона в кулоновском поле ядра. Вычислена поправка /15.29/ к энергетическим состояниям атома водорода.

Установлено, что спиновые эффекты при учете членов порядка малости $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ приводят, в отличие от релятивистского случая, не только к расщеплению n^2 -кратно вырожденного уровня классической нерелятивистской теории Шредингера, но и к расщеплению уровней, имеющих одинаковые n и j при $\ell = j \pm \frac{1}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P.A.M. Quantum theory of the electron. – Proc Roy. Soc. A, 1928, 117, 610-624.

2. Schroer B., Seiler R. and Swieca J.A. Problem of Stabilyty for Quantum Field in External Time-dependent Potentials. – Phys. Rev. D, 1970, 2, №12, 2927.

3. Новожилов Ю. В. Введение в т:орию элементарных частиц. М., Наука, I'72.

4. Dowker J.S. Columb seattering for Arbitrary Spin. – Proc. Phys. Soc. A, 1966, 89, №504, 353.
Dowker J.S. A wave equations for massive Particles of Arbitrary Spin. – Proc. Roy. Soc A, 1967, 293, №1450, 351.

5. Tsai W. and Yildis A. Motion of Charged Particles in a Homogeneous Magnetic Field. – Phys. Rev. D, 1971, 4, №12, 3643-3648.

6. Goldman T. and Tsai W. Motion of Charged Particles in a Homogeneous Magnetic Field. II. – Phys. Rev. D, 1971, 4, №12, 3648-3651.

7. Tsai W. Motion of Spin-1 Particles in a Homogeneous Magnetic Field — Multispinor Formalism. – Phys. Rev D, 1971, 4, №12, 3652-3657

8. Tsai W. Energy Eigenvalues for Charged Particles in a Homogeneous Magnetic Field — An Application of the Foldy-Wouthuysen Transformation. – Phys. Rev. D, 1973, 7, №6, 1945-1948.

9. Mathews P.M. Stationary states of a Spin 1 particle in Homogeneous Magnetic Field. – Phys. Rev., D, 1974, 9, №2, 365-369.

10. Johnson K. and Sudarshan E.C.L. In consistens of the local field theory of charged Spin 3/2 Particles. – Ann. Phys. 1961, 13, №1, 126-145.

11. Hagen C.R. New Inconsistencies in the Quantization of Spin $\frac{3}{2}$ Fields. – Phys. Rev. D, 1971, 4, №8, 2204.

12. Baisya H.L. Bhabha's equation and the electromagnetic field. – Nucl. Phys. B, 1970, 23, №1, 633-640.

13. Weawer D.L., Hammer C.L, Good R.H. Description of a Particles with arbitrary Mass and Spin. – Phys. Rev. B, 1964, 135, №1, 241.

14. Mathews P.M. Relativistic Srödinger Equations for Particles with arbitrary Spin. – Phys. Rev. 1966, 143, №5, 978-985.

15. Mathews P.M. Foldy-Wouthuysen Transformation for Particles with arbitrary Spin. – Phys. Rev. 1966, 143, №5, 985.

16. Mathews P.M. Quantization of Relativistic Equations for arbitrary Spin. – Phys. Rev. 1967, 155, 1415.

17. Mathews P.M. and Ramankrishnan S. General Types of Hamiltonians for Partiles of any Spin. - Nuovo Cim, 1967, 50, № 2.

18. Фущич В.И., Грищенко А.Л., Никитин А.Г. О релятивистских уравнениях движения без лишних компонент. - Теор. и мат. физ. 1971, 8, №2, 192-205.

19. Fushchich V.I. Nikitin A.G. On the Poincare-invariant Equations for Particles with variable Spin and Mass. - Rep. Math. Phys. 1975, 8, № 1, 33-48.

20. Никитин А.Г. О нерелятивистском пределе уравнений без лишних компонент. - УФЖ 1974, 19, №6, 1002-1007.

21. Паули. В. Обобщенные принципы волновой механики. Гостехиздат. 1947.

22. Inönü E. and Wigner E.P

Nuovo Cim. 1952, 9, 705.

23. Bargman V. Representations of Continuous Groups. - Ann. of. Math. 1954, 58, № 1, 1-46.

24. Hammermesh M.

Annals of Phys. 1960, 9, 518.

25. Galindo A. and Sanchez del Rio. Intrisic Magnetic Moment as a Nonrelativistic Phenomenon. - Am. J. Phys., 1961, 29, 582-584.

26. Eberlein W. F.

Am. Math. Mothly. 1962, 69, 587.

27. Levi-Leblond J.-M. Nonrelativistic Particles and Wave Equations.- Comm. Math. Phys. 1967, 6, 286-311.

28. Hagen C.R. and Hurley W.J. Magnetic Moment of a Particle with Arbitrary Spin.- Phys. Rev. Lett. 1970, 24, №24, 1381-1384.
Hurley W.J. Nonrelativistic Quantum Mechanics for Particles with Arbitrary Spin.- Phys. Rev. D, 1971, 3, №10, 2339-2347.

29. Guertin R.F. Relativistic Hamiltonian Equations for any Spin.- Ann. Phys. 1974, 88, 504.
Guertin R.F. Foldy-Wouthuysen Transformation for any Spin, Ann. Phys. 1975, 91, №2, 386-413.

30. Кемпфер Ф. Основные положения квантовой механики. М., Мир, 1967, стр.384-391.

31. Levi-Leblond J.-M. Galilei Group and Galilean Invariance. В сб. Group Teory and Its Applications, V. II, ed. Loebl E.M., Acad. Press. New York - London 1968, p. 221-299.

32. Фущич В.И. Теоретико-групповые основы обобщенной релятивистской квантовой механики и P-, T-, C-преобразования. Докторская диссертация, Киев, 1971.

33. Грищенко А.Л. Пуанкаре-инвариантные уравнения в релятивистской квантовой механике. Кандидатская диссертация, Киев, 1972.

34. Никитин А.Г. Нелагранжевы уравнения для частиц с произвольным спином. Кандидатская диссертация, Киев, 1974.

35. Никитин А. Г. Релятивистские уравнения для системы с переменным спином.— УФЖ 1973, 18, №10, 1605–1614.

36. Курош А. Г. Курс высшей алгебры, М., Наука, 1968, стр. 18.

37. Там же, стр. 235.

38. Ericsen E. Foldy-Wouthuysen Transformation. Exact Solution with Generalization to the Two-Particle Problem.— Phys. Rev. 1958, 111, №3, 1011-1016.

39. De Fries E. Foldy-Wouthuysen Transformations and Related Problems.— Zeitschritte der Phys. 1970, 18, Heft 4, 149-182.

40. Foldy L. L. and Wouthuysent S. A. On the Dirac Theory of Spin $\frac{1}{2}$ Particles and Its Non-Relativistic Limit.— Phys. Rev.— 1950, 78, 29.

41. James K. R. Electromagnetic moments for arbitrary Spin.— Proc. Phys. Soc. (London) 1968, 1, ser. 2, 334-339.

42. Тамм И. Е. Движение мезонов в электромагнитных полях.— ДАН СССР. 1940, 29, №8-9, 551-554.

43. Taketani M. and Sakata S. Proc. Phys.-Math. Soc. (Japan) 1940, 22, 757.

44. Dowker J. S. Columb scattering for arbitrary Spin.— Proc. Phys. Soc. A, 1966, 89, №2, 353.

45. Kemmer N. The particle aspect of meson theory.— Proc. Roy. Soc. A, 1939, 173, 91-116.

46. Heitler W.

Proc. Roy. Irish Academy A, 1943, 49, 1.

47. Case K. M. Hamiltonian Form of Integral Spin Wave Equations. - Phys. Rev. 1955, 100, №5, 1513-1514.

48. Боргардт А. А. Алгебраические методы в теории частиц целого спина. Докторская диссертация. Днепропетровск, 1964.

49. Федоров Ф. И. О приведении волновых уравнений для спина 0 и I к гамильтоновой форме.- ЖЭТФ 1956, 31, вып. I, 140-142.

50. Zeleny W. B. Hamiltonian Form of the Kemmer Equations. - Phys. Rev. 1967, 158, №5, 1223-1226.

51. Shrödinger E.

Proc. Roy. Soc. A, 229, 1955, 39. A, 1955, 232, 435.

52. Garrido L. M. and Oliver L. On the Foldy-Wouthuysen Transformation for Particles in an Electromagnetic Field. - Nuovo Cim. A, 1967, 52, №2, 588-605.

53. Feynmann R., Gell-Mann M. Theory of the Fermi Interaction. —

Phys. Rev. 1958, 109, 193.

54. Chakrabarti A. Canonical Form of the Covariant Free-Particle Equations. - J. Math. Phys. 1963, 4, №10, 1215-1222.

55. Зайцев Г. А. Описание электромагнитного поля при помощи матриц.— ЖЭТФ. 1955, 28, №5, 524.

56. Зайцов Г.А. К вопросу об основном релятивистски инвариантном уравнении для частиц со спином 1/2.— ДАН СССР.1957,115, №6, 1248-1250 .

57. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., И.-Л., 1963.

58. Hurley W.J. Relativistic Wawe Equations for Particles with Arbitrary Spin.- Phys. Rev. D, 1971, 4, №12, 3605-3612.

59. Hurley W.J. and Sudarshan E.C.G. On the determination of the relativistic wave Equations associated with a given representation of SL(2,C)-J. Math. Phys. 1975, 16, 2093.

60. Ахиезер А. И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. М., Наука, 1969 .

61. Weaver D.L. Energy eigevalues for a charged Spin-$\frac{1}{2}$ Particles in Homogeneous Magnetic Field.- Phys. Rev. D, 1975, 12, №12, 4001-4002.

62. Плеснер А . И. Спектральная теория линейных операторов_ М., Наука, 1965, стр.389 .

63. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., Наука, 1974, §112.

64. Карпенко Д. Я., Яровенко А. П. Векторный мезон в кулоновском поле.— ЖЭТФ . 1965, 49, вып.5/11/ ,1468--1469.

65. Карпенко Д. Я. Бозоны во внешних электромагнитных полях. Кандидатская диссертация. Днепропетровск, 1966.