ОРДЕНА ЛЕНИНА АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

САМОЙЛЕНКО Валерий Григорьевич

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ И МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ

01.01.02 - дифференциальные уравнения и
математическая физика

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ -
академик АН УССР
Ю.А. МИТРОПОЛЬСКИЙ

Киев - 1982

С О Д Е Р Ж А Н И Е

В в е д е н и е 4

ГЛАВА I. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ. ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВАРИАНТА МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ II

§ I.I. Обратная периодическая задача для нелинейных уравнений ленгмюровской цепочки II

§ I.2. Дискретная периодическая задача для модифицированного нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза 22

§ I.3. Периодическая задача для цепочки Тода 32

§ I.4. Точные почти-периодические решения нелинейных уравнений распространения волнового импульса в двухуровневой среде без диссипации 43

ГЛАВА П. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ УСРЕДНЕНИЯ И МЕТОДОМ ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ... 54

§ 2.I. Слабо нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами и с запаздыванием. I. Построение асимптотических приближений 54

§ 2.2. Слабо нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами и с запаздыванием. П. О сходимости рядов $\mathcal{R}_m A_n$, $\mathcal{R}_m B_n$, рядов для функций $\mathcal{U}_k(\tau, a, \theta, \varphi)$ и дифференцируемости функций $A_n(\tau, a, \psi)$, $B_n(\tau, a, \psi)$, $\mathcal{U}_n(\tau, a, \theta, \varphi)$ 72

§ 2.3. Система двух слабо связанных уравнений типа Ван-дер Поля 92

§ 2.4. Периодическая задача для оператора Дирака и нелинейные уравнения Шредингера I02

§ 2.5. Усреднение модулированных законов сохранения нелинейного уравнения Шредингера и связь с алгебраической геометрией II3

Литература I3I

В В Е Д Е Н И Е

Большое число важных явлений в механике, физике, радиофизике, электронике, биологии и химии моделируются нелинейными дифференциальными , дифференциально-разностными уравнениями и уравнениями с запаздыванием. К числу таких уравнений относятся, например , нелинейные уравнения Кортевега-де Фриза и Шредингера [23 , 90], которые находят широкое применение в физике, система уравнений с частными производными (4.I), описывающая распространение волнового импульса в двухуровневой среде без диссипации [21] , нелинейные уравнения ленгмюровской цепочки [I9], применяемые при изучении тонкой структуры спектра ленгмюровских колебаний в плазме (коллапс волн Ленгмюра в плазме [23]), а также описывающие взаимодействие биологических сообществ вида "жертва-хищник" [I33] . При моделировании электрических цепей лестничного типа (так называемых самодуальных сетей) возникают системы дифференциально-разностных уравнений , которые редуцируются к дискретному аналогу модифицированного нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза. Хорошо известна система нелинейных дифференциально-разностных уравнений цепочки Тода [I30] . Эти уравнения описывают поведение материальных точек единичной массы , каждая из которых взаимодействует с ближайшими соседними точками по экспоненциальному закону. Для описания колебательных явлений в радиотехнике широко используются уравнения типа Ван-дер Поля.

Для исследования нелинейных уравнений применяются самые разнообразные методы. Среди аналитических методов исследования нелинейных уравнений можно выделить два класса: методы точного интегрирования и методы построения приближенных решений исследуемых уравнений. Интегрирование в квадратурах дифференциальных уравнений, как известно, является труднейшей задачей. Открытие в 1967 г. нового метода исследования нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными - метода обратной задачи теории рассеяния [110], дало новый импульс развитию методов точного интегрирования нелинейных уравнений. Метод обратной задачи был предложен для уравнений вида $u_t = S(u)$, которые можно представить следующим образом $\partial L/\partial t = LM - ML$, где S - некоторый, в общем случае, нелинейный оператор, L, M - некоторые линейные операторы, коэффициенты которых зависят от функции $u(x,t)$. Из последней формулы следует, что спектр оператора L не меняется с течением времени t. Асимптотические характеристики собственных функций оператора L легко вычисляются по их начальным данным, а функция $u(x,t)$ определяется в процессе решения обратной задачи рассеяния для оператора L. Метод обратной задачи в дальнейшем совершенствовался П.Д. Лаксом [118], В.Е. Захаровым и Л.Д. Фаддеевым [26], К. Гарднером [109], В.Е. Захаровым и А.Б. Шабатом [28,29], причем применение теории рассеяния ограничивало возможности получения решений лишь классом функций, достаточно быстро убывающих к нулю на бесконечности.

Развитие периодического и почти-периодического варианта метода обратной задачи теории рассеяния потребовало принципиально новых идей. В работах С.П. Новикова [71], В.А. Марченко [47,48], Б.А. Дубровина [16], А.Р. Итса и В.Б. Матвеева [19,33] изучалась задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза с периодическими и почти-периодическими N - зонными начальными условиями. В этих работах была построена теория так называемых конечно-зонных периодических и почти-периодических решений уравнения Кортевега-де Фриза и вскрыта их глубокая алгебро-геометрическая природа. В частности, было показано , что решение названной задачи тесно связано с решением классической проблемы Якоби обращения абелевых интегралов на гиперэллиптических римановых поверхностях. Применение θ - функций Римана позволило получить широкий класс явных решений уравнения Кортевега-де Фриза , которые в общем случае являются почти-периодическими функциями пространственной переменной. Следует отметить , что эти решения естественным образом обобщают многосолитонные решения , которые можно получить методом обратной задачи в классе функций достаточно быстро убывающих на бесконечности. В.А. Марченко [47,48] был предложен метод , позволяющий описывать конечнозонные решения при помощи автономных систем нелинейных дифференциальных уравнений. Метод обратной задачи для дифференциально-разностных дискретных уравнений развивался в работах [104,106, 130-133]. Принципиальным моментом в исследовании [104], как и в работах Б.А. Дубровина , А.Р. Итса и В.Б. Матвеева, является решение проблемы обращения Якоби для абелевых интегралов.

Методы работ [47,48,16] развивались В.П. Котляровым, В.А. Козелом, А.Р. Итсом и А.К. Прикарпатским [32, 35, 36,72-75] для нахождения почти-периодических решений нелинейных уравнений Шредингера , синус-Гордона , модифицированного уравнения Шредингера и др. В работах И.М. Кричевера [37-39,18] была предложена алгебро-геометрическая конструкция широкого класса периодических и почти-периодических решений уравнений Захарова-Шабата, позволяющая найти их явные выражения через θ - функции Римана.

Ко второй группе методов следует отнести в первую очередь методы теории возмущений [70], асимптотические методы Крылова-Боголюбова-Митропольского [41,7,8, 54,55] , численно-аналитические [81] и др. Из числа методов этого класса для исследования колебательных процессов в нелинейных системах , весьма эффективными яв -

ляются асимптотические методы нелинейной механики. Решения , полученные при помощи этих методов, представляются асимптотическими по малому параметру ε рядами, причем погрешность (отклонение от точного колебательного решения) пропорциональна $m+1$ -ой степени параметра ε . Очевидно , что для фиксированных m эта погрешность становится сколь угодно малой при достаточно малых значениях ε . Следует отметить , что хотя при $m \to \infty$ эти асимптотические разложения , вообще говоря, не сходятся , асимптотические методы находят широкое практическое применение , так как многие свойства колебательных систем проявляются уже в первом (втором) приближении. Так, например , стационарные режимы, их устойчивость , зависимость параметров стационарных режимов часто можно изучать , используя уравнения лишь первого (второго) приближения.

Первоначально асимптотические методы интенсивно использовались в небесной механике, а затем были перенесены в квантовую механику. Здесь асимптотические методы применялись для консервативных динамических систем, записанных в канонических переменных. Бурное развитие электроники в 20-х годах вызвало необходимость исследования нелинейных колебательных систем , имеющих как источники энергии , так и элементы ее потребляющие. Качественно новый подход (на основе применения усреднения) к исследованию колебательных процессов в упомянутых системах был предложен голландским ученым Ван-дер Полем, который предложил (без математического обоснования) метод "медленно меняющихся амплитуды и фазы". Полное обоснование метода усреднения было дано в исследованиях Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова [6,41], доказавшими теоремы о применимости метода усреднения для дифференциальных уравнений с квазипериодическими функциями времени в правой части.

Дальнейшее развитие метод усреднения получил в последующих работах Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского и их учеников [7,8, 56, 55], где были установлены условия , при выполнении которых разность между решением точных уравнений и решением соответствующих им усредненных сколь угодно мала при достаточно малых значениях параметра ε на сколь угодно большом , но конечном интервале времени и соответствие между различными свойствами решений точной системы уравнений и усредненной системы, зависящие от поведения решений на бесконечном интервале времени. Различные важные аспекты асимптотических методов и, в частности , метода усреднения, изучались в работах Ю.А. Митропольского [54-56], Ю.А. Митропольского и А.М. Самойленко [59-64], Е.А. Гребеникова и Ю.А.Рябова [13,14] и др. В работах Ю.А. Митропольского и А.М. Самойленко [59-63] на основе метода усреднения предложен метод асимптотического интегрирования квазилинейных систем уравнений второго порядка , позволяющий находить асимптотические приближения для периодических и квазипериодических решений , исследован вопрос существования инвариантных тороидальных многообразий , выполнено изучение многочастотных колебаний в окрестности квазистатических положений равновесия уравнений n-х приближений.

Для описания колебательных процессов в системах , характеристики (перемещение, скорость , ускорение) которых зависят от предыстории системы обычно используются дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом (с запаздыванием). Для дифференциальных уравнений с запаздыванием широко применяются асимптотические методы нелинейной механики [7, 58]. Исследования по построению асимптотических приближений для решений уравнений с запаздыванием выполнялись в работах А. Халаная [94-96] , Дж. Хейла [112, Ю.А. Митропольского и В.И. Фодчука [67], В.И. Фодчука[92-93], В.П. Рубаника[79], Ю.А. Митропольского и Д.И. Мартынюка [58]. В.Г. Коломиец и Д.Г. Кореневский [40]изучали вопрос о колебательных процессах в нелинейных системах со случайным запаздыванием.

Асимптотические методы и метод усреднения в их числе находят широкое применение при изучении нелинейных волн (волн на воде , волн в плазме и др.) , их модуляции (медленного по сравнению с периодами колебаний изменения параметров нелинейной волны) [121 ,134, 135]. Теоремы по математическому обоснованию применения метода усреднения при изучении процесса модуляции получены Дж. Люком [121].

Цель настоящей диссертационной работы состоит в развитии методов исследования нелинейных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений , построении точных почти-периодических решений ряда нелинейных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений , исследовании дифференциальных уравнений при помощи метода усреднения.

В диссертации (глава I) рассматривается обратная периодическая задача для нелинейных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений, исследуется задача конструктивного описания необходимых и достаточных условий на начальные значения Коши для дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений , обеспечивающих представимость решений этих задач Коши в явном виде.Развивается дискретный аналог периодического варианта метода обратной задачи теории рассеяния. Построен алгоритм для нахождения точных почти-периодических решений дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений (уравнений распространения импульса,периодических цепочек Ленгмюра и Тода , дискретного модифицированного нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза) через тэта-функции Римана.

Во второй главе диссертационной работы периодические и почти-периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений исследуются методом усреднения и методом изоспектральных деформаций. Для слабо нелинейного дифференциального уравнения с медленно меняющимися коэффициентами и с запаздыванием рассматривается задача построения асимптотических приближений для периодических решений этого уравнения, близких к периодическому решению порождающего уравнения, исследуется вопрос о дифференцируемости функций, задающих асимптотические приближения. При помощи метода асимптотического интегрирования квазилинейных систем изучается система двух слабо связанных уравнений типа Ван-дер Поля. На основе анализа уравнений первого приближения для этой системы установлено существование тора (почти-периодического решения) и циклов (периодических решений), исследована устойчивость этих циклов и тора, получены выражения, определяющие их с точностью до величин порядка ε^2. Методом усреднения изучается модуляция волн, описываемых почти-периодическими решениями нелинейного уравнения Шредингера. Получены усредненные модулированные законы сохранения и дифференциальные уравнения в медленных переменных на параметры римановой поверхности , задающей это почти-периодическое решение.

Результаты работы докладывались на IX Международной конференции по нелинейным колебаниям (г.Киев, 1981 г.), семинарах отдела математической физики и теории нелинейных колебаний и отдела дифференциальных уравнений Института математики АН УССР, отдела статистической механики Математического института АН СССР им. В.А.Стеклова, семинаре кафедры дифференциальных уравнений Киевского госуниверситета, конференциях молодых ученых Института математики АН УССР (г.Киев, 1979-1980 гг.).

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю - академику АН УССР Юрию Алексеевичу Митропольскому за постоянное внимание и поддержку в работе.

ГЛАВА I

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ. ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВАРИАНТА МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

§ 1.1. Обратная периодическая задача для нелинейных уравнений ленгмюровской цепочки

1.1.1. Рассмотрим систему нелинейных дифференциально-разностных уравнений

$$\frac{dc_n}{dt} = c_n(c_{n+1} - c_{n-1}),\ c_n(t) > 0,\ n \in Z \qquad (1.1)$$

Эта система уравнений возникает при изучении тонкой структуры спектра ленгмюровских колебаний в плазме [19,23 ,133]. Часто ее называют ленгмюровской цепочкой [23]. Системы уравнений вида (1.1) также возникают при моделировании динамики биологических сообществ [133] и являются уравнениями типа Вольтерра. Отметим , что уравнения (1.1) в континуальном пределе [23] переходят в уравнение Кортевега-де Фриза

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - 6v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad (1.2)$$

т.е. (1.1) можно рассматривать как разностный аналог уравнения (1.2) на всей действительной оси.

В работах [19,23] уравнения (1.1) изучались при помощи метода обратной задачи теории рассеяния , что позволило найти для этих уравнений "дискретные" солитонные решения , на существование которых было указано еще в работе [24] .

Изучим периодическую задачу для уравнения (1.1) при помощи дискретного аналога периодического варианта метода обратной задачи [47,48, 9,10] и дадим полное решение этой задачи в классе поч -

ти-периодических по переменной t функций.

Пусть $c_n(t) = a_n^2(t)$, $0 < a_n(t) \in \mathbb{R}^1$, $a_n(t)$ - в дальнейшем новая неизвестная функция. Система уравнений (I.I) эквивалентна системе

$$\frac{d a_n}{dt} = \frac{1}{2} a_n (a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2), \quad n \in \mathbb{Z} \qquad (I.3)$$

Имеет место лемма.

Л е м м а I.I. Для уравнений (I.3) справедливо представление типа Лакса на матрицах второго порядка

$$\frac{d \mathcal{L}_n(\lambda)}{dt} = \mathcal{M}_{n+1}(\lambda) \mathcal{L}_n(\lambda) - \mathcal{L}_n(\lambda) \mathcal{M}_n(\lambda), \qquad (I.4)$$

где

$$\mathcal{M}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2}{2} - \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{2} & -\lambda a_n \\ \lambda a_n & -\frac{\lambda^2}{2} - \frac{a_n^2 - a_{n-1}^2}{2} \end{pmatrix}, \qquad (I.5)$$

$$\mathcal{L}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{a_{n+1}} & -\frac{a_n}{a_{n+1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}^1 \text{ - параметр.}$$

Прямым вычислением легко показать , что уравнения (I.4) ос - таются справедливыми для всех $\lambda \in \mathbb{C}^1$ тогда и только тогда, ког - да функция $a_n(t)$ удовлетворяет уравнениям (I.3).

В дальнейшем считаем , что функция $a_n(t)$ - периодическая по индексу n с периодом $\mathcal{N}+1$: $a_{n+\mathcal{N}+1}(t) = a_n(t), \ \forall t \in \mathbb{R}^1$.

Рассмотрим следующие линейные задачи для вектор-функции $V_n(t) \in \mathbb{C}^2$:

$$V_{n+1}(t) = \mathcal{L}_n(\lambda) V_n(t), \quad \frac{d V_n(t)}{dt} = \mathcal{M}_n(\lambda) V_n(t). \qquad (I.6)$$

Записывая условие совместности уравнений (I.6) в виде $\frac{d}{dt} V_{n+1}(t) = \left.\frac{d V_m(t)}{dt}\right|_{m=n+1}$, находим , что матрицы $\mathcal{L}_n(\lambda)$ и $\mathcal{M}_n(\lambda)$ должны удовлетворять уравнению (I.4). Это значит , что на реше -

ниях уравнений (I.3) линейные задачи (I.6) совместны при всех n и t.

Используя периодичность функции $a_n(t)$ по индексу n, определим для уравнений (I.6) матрицу монодромии $S_n = S_n(t,\lambda)$ [89, 9] по следующей формуле

$$V_{n+N+1}(t) = S_n(t,\lambda)\, V_n(t)$$

Из первого уравнения в (I.6) находим явную формулу

$$S_n(t,\lambda) = \prod_{k=0}^{\overleftarrow{N}} \mathcal{L}_{n+k}(\lambda) = \mathcal{L}_{n+N}(\lambda)\,\mathcal{L}_{n+N-1}(\lambda)\ldots\mathcal{L}_n(\lambda), \quad (I.7)$$

где $\overleftarrow{N}$ указывает на порядок возрастания индексов.

Следствием формулы (I.7) является следующая лемма.

Л е м м а I.2. Матрица монодромии $S_n(t,\lambda)$ для линейных задач (I.6) является полиномиальной по параметру λ матричной функцией.

Используя уравнения (I.6) и формулу (I.7), нетрудно получить для матрицы монодромии $S_n(t,\lambda)$ дифференциально-разностные уравнения

$$S_{n+1}(t,\lambda)\,\mathcal{L}_n(\lambda) = \mathcal{L}_n(\lambda)\, S_n(t,\lambda),$$

$$\frac{d\,S_n(t,\lambda)}{dt} = \left[\mathcal{M}_n(\lambda),\, S_n(t,\lambda)\right]. \quad (I.8)$$

Уравнения (I.8) в дальнейшем имеют важное значение, поэтому исследуем дополнительно их свойства.

Лемма I.3. Величины $\det S_n$ и $Sp\, S_n$ являются инвариантами уравнений (I.8):

$$\frac{d}{dt}\det S_n = \frac{d}{dt} Sp\, S_n = 0, \quad Sp\, S_m = Sp\, S_n, \qquad \det S_m = \det S_n, \quad m, n \in Z. \tag{I.9}$$

I.I.2. Введем следующие обозначения: $S_n = \| S_n^{(ij)} \|$, $i,j = 1,2$, $S_n^{(11)} + S_n^{(22)} = 2h_n$, $S_n^{(11)} - S_n^{(22)} = 2f_n$, $S_n^{(12)} = -\varphi_n$, $S_n^{(21)} = \chi_n$.

Тогда уравнения (I.8) с учетом леммы I.3 эквивалентны следующим дифференциально-разностным уравнениям:

$$\lambda(f_{n+1} - f_n) = \varphi_{n+1} a_{n+1} - \chi_n a_n, \quad \varphi_n a_{n+1} = \chi_{n+1} a_n, \tag{I.10}$$
$$a_{n+1}(f_{n+1} + f_n) = \lambda \chi_{n+1}, \quad a_n(f_{n+1} + f_n) = \lambda \varphi_n.$$

$$\frac{df_n}{dt} = \lambda a_n(\varphi_n - \chi_n), \qquad \frac{dh_n}{dt} = 0,$$
$$\frac{d\varphi_n}{dt} = -2\lambda a_n f_n + \varphi_n\left(\lambda^2 - \frac{a_{n+1}^2}{2} + a_n^2 - \frac{a_{n-1}^2}{2}\right), \tag{I.11}$$
$$\frac{d\chi_n}{dt} = 2\lambda a_n f_n - \chi_n\left(\lambda^2 - \frac{a_{n+1}^2}{2} + a_n^2 - \frac{a_{n-1}^2}{2}\right),$$

для которых справедлива такая теорема.

Теорема I.I. Системы дифференциально-разностных уравнений (I.10), (I.11) имеют полиномиальные по λ решения

$$f_n(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{N} f_n^{(k)}(t)\lambda^{2k+1}, \quad \varphi_n(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{N} \varphi_n^{(k)}(t)\lambda^{2k}, \quad \chi_n(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{N} \chi_n^{(k)}(t)\lambda^{2k} \tag{I.12}$$

тогда и только тогда, когда функции $f_n^{(k)}(t)$, $\varphi_n^{(k)}(t)$, $\chi_n^{(k)}(t)$ удовлетворяют некоторым совместным автономным нелинейным дифференциально-разностным уравнениям и справедливы равенства

$$f_n^{(N)} = f_m^{(N)}, \quad 2a_n f_n^{(N)} = \varphi_n^{(N)}, \quad 2a_{n+1} f_n^{(N)} = \chi_{n+1}^{(N)}, \tag{I.13}$$
$$a_{n+1}\varphi_n^{(K)} = a_n \chi_{n+1}^{(K)}, \quad a_{n+1}\varphi_{n+1}^{(0)} = a_n \chi_n^{(0)}, \quad K=\overline{0,N}, \ m,n \in N.$$

Если кроме того, при некотором $n = n_o$ и при $t = 0$

$$f_{n_o}(0,\lambda) = f_{n_o}^*(0,\lambda^*), \quad \chi_{n_o}(0,\lambda) = -\varphi_{n_o}^*(0,\lambda^*), \tag{I.14}$$

то эти автономные нелинейные дифференциально-разностные уравнения имеют решение при всех n и t, а соотношения (I.13) задают алгоритм построения явного действительного решения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставив решение (I.12) в систему уравнений (I.10), (I.11) и используя произвольность параметра λ, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра. В результате получим некоторую систему автономных нелинейных дифференциально-разностных и алгебраических уравнений. Используя эти алгебраические уравнения, находим систему автономных нелинейных дифференциально-разностных уравнений вида

$$\Delta y_n^{(K)} t = \mathcal{F}_K(y_n^{(0)}(t), \ldots, y_n^{(3N+2)}(t)), \tag{I.15}$$
$$\frac{\partial y_n^{(K)}(t)}{\partial t} = \Phi_K(y_n^{(0)}(t), \ldots, y_n^{(3N+2)}(t)),$$

где $f_n^{(K)}(t) = y_n^{(K)}(t), \ \varphi_n^{(K)}(t) = y_n^{(N+K+1)}(t), \ \chi_n^{(K)}(t) = y_n^{(2N+K+2)}(t),$

$K = 0,1,\ldots,N, \quad \Delta y_n^{(K)}(t) = y_{n+1}^{(K)}(t) - y_n^{(K)}(t)$, функции $\mathcal{F}_K(\cdot)$, $\Phi_K(\cdot)$ – полиномы от $y_n^{(K)}(t)$. Прямым вычислением нетрудно показать, что $\frac{\partial}{\partial t}(\Delta y_n^{(K)}(t)) = \Delta(\frac{\partial}{\partial t} y_n^{(K)}(t))$, т.е. система (I.15) совместна. Условия (I.13) выражают условия совместности алгебраических уравнений, полученных из (I.10), (I.11) после подстановки (I.12) и приравнивания коэффициентов. Справедливо и обратное, если имеют место условия (I.13), функции $f_n^{(K)}(t)$, $\varphi_n^{(K)}(t), \chi_n^{(K)}(t)$ удовлетворяют системе дифференциально-разностных уравнений (I.15), то очевидно(по построению системы уравнений (I.15)), полиномиальные функции (I.12) удовлетворяют уравнениям (I.10) и (I.11). Условия (I.14) обеспечивают продолжимость решений $y_n^{(k)}(t)$ системы уравнений (I.15) для всех n и t. Доказательство этого факта несложно и проводится также как и в работах [36, 75].

Используя соотношения (I.14) и разрешимость уравнений (I.15), построим алгоритм, ведущий к явным формулам для функции $C_n(t) = a_n^2(t)$. Для этого рассмотрим периодическую задачу Коши для уравнений (I.1), (I.3). Пусть при некотором $n = n_0$ и при $t = 0$ задано действительное число $a_{n_0}^2(0) = a_0^2$. Для того, чтобы найти $N+1$ - периодическое по индексу n решение $C_n(t) = a_n^2(t)$ уравнений (I.1), (I.3), необходимо отыскать набор величин

$$\left\{ a_{n_0}^2(t),\ a_{n_0+1}^2(t),\ \ldots,\ a_{n_0+N}^2(t) \right\}. \tag{I.16}$$

Рассмотрим полином $\varphi_n(t,\lambda)$ в форме

$$\varphi_n(t,\lambda) = \varphi_n^{(N)}(t) \prod_{i=1}^{N} (\lambda^2 - \mu_i(n,t)), \tag{I.17}$$

где $\mu_i(n,t)$ - его нули. Подставляя разложение (I.17) во второе уравнение системы (I.11), находим уравнения для нулей $\mu_i(n,t)$:

$$\frac{d\mu_i(n,t)}{dt} = \frac{\sqrt{\mu_i P(\mu_i)}}{f_n^{(N)} \prod_{j \neq i}^{N} (\mu_i - \mu_j)}, \tag{I.18}$$

где $P(\lambda^2) = \sum_{k=0}^{2N+1} p_k \lambda^{2k} = f_n^2 - \varphi_n \chi_n$, причем коэффициенты p_k, как это следует из уравнений (I.10), (I.11) и соотношений (I.14) - действительны и не зависят от n и t. Используя соотношение $\varphi_n^{(N)} = 2a_n f_n^{(N)}$ и то, что $f_n^{(N)}(t)$ не зависит от n, t, запишем уравнение (I.3) в виде:

$$\frac{d}{dt} \ln \varphi_n^{(N)} = \frac{1}{2} a_{n+1}^2 - \frac{1}{2} a_{n-1}^2, \tag{I.19}$$

а из второго уравнения системы (I.11) получим:

$$\frac{d}{dt}\ln\varphi_n^{(N)}=(\varphi_n^{(N-1)}-2a_nf_n^{(N-1)})(\varphi_n^{(N)})^{-1}-\frac{a_{n+1}^2}{2}+a_n^2-\frac{a_{n-1}^2}{2}. \quad (I.20)$$

$$\frac{d}{dt}\ln\varphi_n^{(0)}=-\frac{1}{2}a_{n+1}^2+a_n^2-\frac{1}{2}a_{n-1}^2 \quad (I.21)$$

Пользуясь соотношениями $2a_nf_n^{(N)}=\varphi_n^{(N)}$, $2a_{n+1}f_n^{(N)}=\chi_{n+1}^{(N)}$ и тем, что числа P_k не зависят от n и t, находим

$$\frac{f_n^{(N-1)}}{f_n^{(N)}}=\frac{1}{2}P_{2N}P_{2N+1}^{-1}+\frac{1}{2}\chi_n^{(N)}\varphi_n^{(N)}P_{2N+1}^{-1}=\frac{1}{2}P_{2N}P_{2N+1}^{-1}+2a_n^2. \quad (I.22)$$

Формулы (I.19)-(I.22) с учетом соотношений $\varphi_n^{(N-1)}(t)=$ $=-\varphi_n^{(N)}(t)\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n,t)$, $\varphi_n^{(0)}(t)=(-1)^N\varphi_n^{(N)}(t)\prod_{i=1}^{N}\mu_i(n,t)$ позволяют найти выражение

$$C_n(t)=a_n^2(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln\prod_{i=1}^{N}\mu_i(n,t)-\frac{P_{2N}}{4P_{2N+1}}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n,t), \quad (I.23)$$

а также рекуррентное соотношение для $C_n(t)=a_n^2(t)$ и $C_{n+1}(t)=$ $=a_{n+1}^2(t)$:

$$C_{n+1}(t)=-C_n(t)-\frac{1}{2}P_{2N}P_{2N+1}^{-1}-\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n,t). \quad (I.24)$$

Предположим, что используя уравнения (I.18), мы явно определили величины $\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n,t)$ и $\ln\prod_{i=1}^{N}\mu_i(n,t)$ по заданным начальным значениям $\mu_{i0}=\mu_i(n_0,0)$, $i=\overline{1,N}$. Тогда по формуле (I.23) находим функцию $C_{n_0}(t)$:

$$C_{n_0}(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln\prod_{i=1}^{N}\mu_i(n_0,t)-\frac{1}{4}P_{2N}P_{2N+1}^{-1}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n_0,t), \quad (I.25)$$

а по известному выражению функции $C_{n_0}(t)$ из (I.24) легко определяем функцию $C_{n_0+1}(t)$:

$$C_{n_0+1}(t)=-C_{n_0}(t)-\frac{1}{2}P_{2N}P_{2N+1}^{-1}-\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n_0,t). \quad (I.26)$$

Чтобы построить элемент $C_{n_0+2}(t)$ из набора (I.16), необходимо, как это следует из соотношений (I.23), (I.24), найти яв -

но выражения $\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n_0+1,t)$ и $\ln\prod_{i=1}^{N}\mu_i(n_0+1,t)$. Используя соотношения $-\varphi_n^{(0)}\chi_n^{(0)}=P_0$, $a_{n_0+1}\varphi_{n_0+1}^{(0)}=a_{n_0}\chi_{n_0}^{(0)}$, получаем:

$$\prod_{i=1}^{N}\mu_i(n_0+1,t)=\frac{(-1)^N\chi_{n_0}^{(0)}a_{n_0}}{2\,a_{n_0+1}^2 f_n^{(N)}}=\frac{(-1)^{N+1}a_{n_0}P_0}{2\,a_{n_0+1}^2 f_{n_0}^{(N)}\varphi_{n_0}^{(0)}}= \tag{I.27}$$

$$=(-1)^N P_0\varphi_{n_0}^{(N)}\left(4a_{n_0+1}^2\left(f_{n_0}^{(N)}\right)^2\right)^{-1}=-P_0\left(4\,a_{n_0+1}P_{2N+1}\prod_{i=1}^{N}\mu_i(n_0,t)\right)^{-1}.$$

Из формулы (I.23) при $n=n_0+1$ по известному выражению для $\prod_{i=1}^{N}\mu_i(n_0+1,t)$ находим $\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n_0+1,t)$, а из (I.24) при $n=n_0+1$ уже можно найти явный вид функции $C_{n_0+2}(t)$. Аналогично находятся остальные функции $a_{n_0+i}^2$, $i=\overline{3,N}$ из набора (I.16).

I.I.3. Для доказательства разрешимости и нахождения явных выражений $\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n_0,t)$, $\ln\prod_{i=1}^{N}\mu_i(n_0,t)$ рассмотрим уравнения (I.18) на гиперэллиптической римановой поверхности $\mathcal{R}$ функции $w=\sqrt{zP(z)}$, $z,w\in C^1$. Пусть E_i, $i=\overline{1,2N+1}$ – нули полинома $P(z)$. Риманову поверхность $\mathcal{R}$ функции $\sqrt{zP(z)}$ реализуем в виде двулистной поверхности наложения комплексной плоскости C^1 с непересекающимися разрезами по отрезкам $(\infty,0],\ldots,[E_{2i-1},E_{2i}],\ \ldots$, $[E_{2i},\infty)$, $i=\overline{1,N}$. Точки верхнего листа обозначим через $(z,+\sqrt{zP(z)})$, а нижнего – через $(z,-\sqrt{zP(z)})$. Функция $w=\sqrt{zP(z)}$ аналитична и однозначна на поверхности $\mathcal{R}$. Начальные значения $\mu_{i,0}=\mu_i(n_0,0)$ определяются как точки на поверхности $\mathcal{R}$ той ветвью функции $w=\sqrt{zP(z)}$, для которой выполнено тождественно соотношение $\sum_{k=0}^{N}f_n^{(k)}(0)\mu_{i,0}^{k+1}=\sqrt{\mu_{i,0}P(\mu_{i,0})}$. Алгебраический род поверхности $\mathcal{R}$ равен N. На поверхности $\mathcal{R}$ существует [88, 97] базис циклов $a_1,a_2,\ldots,a_N,b_1,b_2,\ldots,b_N$ с индексами пересечений $a_i\circ a_j=b_i\circ b_j=0$, $a_i\circ b_j=\delta_{ij}$. Как обычно, за циклы a_i, $i=\overline{1,N}$ берут кривые, расположенные на верхнем листе поверхности $\mathfrak{N}$, которые обходят по часовой стрелке отрезок $[E_{2i-1}, E_{2i}]$, а за циклы b_i , $i=\overline{1,N}$ - кривые , которые начинаются в точке E_{2i} , по верхнему листу приходят в точку E_{2N+1} и по нижнему листу снова возвращаются в точку E_{2i} [30] .

Пусть
$$\omega_i(z) = \int\limits_{E_{2N+1}}^{z} \sum_{k=0}^{N-1} C_i^{(k)} \xi^k (\xi P(\xi))^{-\frac{1}{2}} d\xi, \quad i=\overline{1,N}, \qquad (I.28)$$

- нормированный базис абелевых интегралов первого рода [88,97,30] на поверхности $\mathfrak{N}$. Матрица $B = \| B_{ij} \|$, $B_{ij} = \oint_{b_i} d\omega_j(z)$ называется матрицей Римана. Она симметрична, а ее мнимая часть положительно определена. Выполнив в уравнениях (I.18) отображение Абеля
$$\nu_j(t) = \sum_{i=1}^{N} \omega_j(\mu_i(n_0,t)),$$

получаем $\nu_j(t) = \alpha_j(t) + \nu_j(0)$, $\alpha_j = C_j^{(N-1)} / f_n^{(N)}$. Отсюда заключаем, что точки $\mu_i(n_0,t)$ образуют решение классической проблем Якоби обращения абелевых интегралов (I.28) на гиперэллиптической римановой поверхности $\mathfrak{N}$.

Для ее решения , согласно [30], рассмотрим N- мерную θ-функцию Римана , построенную по матрице периодов (I, B) базиса абелевых интегралов (I.28):
$$\theta(\vec{u}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^N} \exp\{2\pi i(\vec{m},\vec{u}) + \pi i(B\vec{m},\vec{m})\}, \qquad (I.29)$$

где $\mathbb{Z}^N$ - пространство целочисленных векторов в $\mathbb{R}^N$, вектор $\vec{u} \in \mathbb{C}^N$, $(\cdot,\cdot)$ - обычное скалярное произведение. Функция имеет следующие очевидные свойства:

1) $\theta(-u_1, -u_2, \ldots, -u_N) = \theta(u_1, u_2, \ldots, u_N)$,

2) $\theta(u_1, \ldots, u_i+1, \ldots, u_N) = \theta(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_N)$,

3) $\theta(u_1+B_{1j},\dots,u_N+B_{Nj})=\theta(u_1,\dots,u_N)\exp[-\pi i B_{jj}-2\pi i u_j]$.

Обозначим через $\hat{\mathcal{V}}$ поверхность $\mathcal{V}$, разрезанную по a-циклам и введем Θ - функцию по формуле

$$\Theta(z)=\theta(\vec{\omega}(z)-\vec{e}),$$

где

$$e_j=\alpha_j t+\gamma_j\ ,\quad \gamma_j=\sum_{i=1}^{N}{}'\,\omega_j(\mu_{i,0})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}B_{ij}-\frac{1}{2}j.$$

Известно, что функция $\Theta(z)$ аналитична на поверхности $\hat{\mathcal{V}}$, а ее нули совпадают с точками $\mu_i(n_0,t)$ [30]. Используя алгоритм, предложенный в работе [30], находим:

$$\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n_0,t)=\sum_{i=1}^{N}\oint_{a_i}z\,d\omega_i(z)+\frac{d}{dt}\ln\frac{\theta(\vec{\alpha}t+\vec{\gamma}+\vec{\delta})}{\theta(\vec{\alpha}t+\vec{\gamma}-\vec{\delta})}, \qquad (I.30)$$

$$\ln\prod_{i=1}^{N}\mu_i(n_0,t)=\sum_{i=1}^{N}\oint_{a_i}\ln z\,d\omega_i(z)+2\pi i m+ \qquad (I.31)$$

$$\ln\frac{\theta(\vec{\alpha}t+\vec{\gamma}+\vec{\sigma})\,\theta(\vec{\alpha}t+\vec{\gamma}-\vec{\sigma})}{\theta(\vec{\alpha}t+\vec{\gamma}+\vec{\delta})\,\theta(\vec{\alpha}t+\vec{\gamma}-\vec{\delta})},$$

где $\vec{\delta}=\vec{\omega}(+\infty)$, $\vec{\sigma}=\vec{\omega}(+0)$, m - произвольное целое число.

Подставив выражения (I.30) и (I.31) в формулы (I.24)-(I.27), мы тем самым находим явные решения уравнений (I.I) и (I.3).

Сформулируем основной результат в виде конструктивной теоремы.

Т е о р е м а I.2. Пусть заданы произвольные попарно-различные числа $E_j\in\mathbb{C}^1$, $j=\overline{1,2N+1}$ и числа $\mu_{j,0}=\mu_j(n_0,0)\in\mathbb{C}^1$, $j=\overline{1,N}$ так, что выполнено условие

$$\prod_{j=1}^{2N+1} (\mu_{i,0} - E_j) = \mu_{i,0} f_{n_0}^2(\mu_{i,0}) P_{2N+1}^{-1},$$

где $f_{n_0}(\lambda)$ – полином степени N с действительными коэффициентами, число $P_{2N+1} = (f_n^{(N)})^2$.

Тогда существует решение периодической задачи Коши для уравнений (I.I), (I.3), которое находится в явном виде изложенным выше алгоритмом.

В силу свойств θ – функции решение $\{C_{n_0}(t), \ldots, C_{n_0+N}(t)\}$ будет почти-периодической функцией переменной t с почти-периодами $\{T_1, \ldots, T_N\}$, вычисляемых по формулам

$$T_j^{-1} = \sum_{i=1}^{N} (B^{-1})_{ji} \alpha_i$$

Отметим, что класс решений уравнений (I.I), (I.3) можно существенно увеличить при помощи процедуры специального выбора точек ветвления функции $\sqrt{z P(z)}$ [123,126].

I.I.4. Построим частное решение уравнений (I.I). Для этого рассмотрим случай $N=1$ и предположим, что нули полинома $P(\lambda)$ имеют вид $E_1 = 0$, $E_2 = -E_3 = iR$. Тогда $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda R^2$, $P_3 = 1$, $P_2 = R^2$, $P_2 = P_0 = 0$. Функция $\mu(t)$ удовлетворяет уравнению $d\mu/dt = \mu\sqrt{\mu^2 + R^2}$, решение которого записывается так $arsh(R\mu^{-1}) = -Rt + C$, где C – произвольная постоянная. Подставляя в последнюю формулу $-C_1 + i\frac{\pi}{2}$ вместо C, $C_1 \in R^1$, получаем $\mu = -iR\, ch^{-1}(Rt + C_1)$. Решение уравнений (I.I) для рассматриваемого случая находим по формуле (I.23):

$$C_n(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 + R^2} - \frac{\mu}{2} = \frac{R}{2}(i + sh\,\frac{1}{2}(Rt + C_1))\, ch^{-1}(Rt + C_1),$$

$$C_{n+1}(t) = -C_n(t) - \mu = \frac{1}{2} R(i - sh\,\frac{1}{2}(Rt + C_1))\, ch^{-1}(Rt + C_1).$$

§ I.2. Дискретная периодическая задача для модифицированного нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза

I.2.I. Дифференциально-разностные уравнения электрической цепи лестничного типа (т.н. самодуальной сети) можно записать в следующем виде [II3]

$$\frac{dz_n}{dt} = (1 \pm z_n^2)(y_{n-1} - y_n),$$
$$\frac{dy_n}{dt} = (1 \pm y_n^2)(z_n - z_{n+1}), \quad n \in \mathbb{Z}. \qquad (2.I)$$

В работе [I33] показано , что уравнения (2.I) при помощи замен $q_{2n-1} = - z_n$, $q_{2n} = y_n$ редуцируются к дискретному аналогу модифицированного нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза (м.К.дФ) в работах [47,48,32,35,36,72-75,102] для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Этот метод позволит получить полное решение периодической задачи для уравнения (2.2) в явном виде при помощи θ - функций Римана в классе периодических по индексу n и почти-периодических по переменной t функций $q_n(t)$.

I.2.2. Рассмотрим следующие линейные дискретные задачи:

$$V_{n+1}(t) = \mathcal{L}_n(\lambda) V_n(t), \quad \frac{\partial V_n(t)}{\partial t} = \mathcal{M}_n(\lambda) V_n(t), \qquad (2.4)$$

где матрицы $\mathcal{L}_n(\lambda)$ и $\mathcal{M}_n(\lambda)$ имеют вид

$$\mathcal{L}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & q_n \\ \mp q_n & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 \pm q_n q_{n-1} & \lambda q_n + \lambda^{-1} q_{n-1} \\ \mp(\lambda q_{n-1} + \lambda^{-1} q_n & \lambda^{-2} \pm q_n q_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (2.5)$$

$\lambda \in C^1$ - параметр, а вектор $V_n^{\tau}(t) = (V_{n1}(t), V_{n2}(t))$ удовлетворяет условию совместности : $\frac{\partial V_{n+1}}{\partial t} = \left(\frac{\partial V_m}{\partial t} \right) \Big|_{m=n+1}$, τ - означает транспонирование. Тогда линейные задачи (2.4) и (2.5), рассматриваемые совместно, как легко убедиться, эквивалентны тому, что функция $q_n(t)$ удовлетворяет дискретному уравнению м.К.дФ. (2.2).

Пусть функция $q_n(t)$ является периодической по n с периодом $N+1$: $q_{n+N+1}(t) = q_n(t)$, где N - некоторое натуральное число. Рассмотрим теперь решение V_m линейных задач (2.4), (2.5) при $m=n$ и $m = N+n+1$. Тогда в силу периодичности функции $q_n(t)$ по индексу n можно определить оператор (матрицу) монодромии $S_n(t,\lambda)$ [89,74,75] по формуле:

$$V_{n+N+1}(t) = S_n(t,\lambda)\, V_n(t). \qquad (2.6)$$

Из (2.4)-(2.6) находим явный вид оператора монодромии $S_n(t,\lambda)$:

$$S_n(t,\lambda) = \prod_{k=0}^{N} \mathcal{L}_{n+k}(\lambda) = \mathcal{L}_{n+N}(\lambda)\, \mathcal{L}_{n+N-1}(\lambda) \ldots \mathcal{L}_n(\lambda), \qquad (2.7)$$

где стрелка указывает на порядок возрастания индексов.

Из выражения (2.7) получаем первое основное уравнение для матрицы монодромии:

$$S_{n+1}\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n S_n, \tag{2.8}$$

а из второго уравнения в (2.5) находим второе основное уравнение:

$$\frac{dS_n}{dt} = \left[\mathcal{M}_n, S_n \right]. \tag{2.9}$$

Пусть $S_n = \| S_n^{(ij)} \|$, $i,j = 1,2$, $S_n^{(11)} + S_n^{(22)} = 2h_n$, $S_n^{(11)} - S_n^{(22)} = 2f_n$, $S_n^{(12)} = -\varphi_n$, $S_n^{(21)} = \chi_n$.

Тогда уравнения (2.8) и (2.9) примут вид:

$$\begin{aligned}
&\lambda(f_{n+1} - f_n) = \mp q_n \varphi_{n+1} + q_n \chi_n, \\
&\lambda^{-1}(f_{n+1} - f_n) = \mp q_n \varphi_n + q_n \chi_{n+1}, \\
&\lambda^{-1}\varphi_{n+1} - \lambda\varphi_n = q_n(f_{n+1} + f_n), \\
&\lambda\chi_{n+1} - \lambda^{-1}\chi_n = \mp q_n(f_{n+1} + f_n),
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{df_n}{dt} = (\lambda q_n + \lambda^{-1} q_{n-1})\chi_n \mp (\lambda q_{n-1} + \lambda^{-1} q_n)\varphi_n, \\
&\frac{d\varphi_n}{dt} = (\lambda^2 - \lambda^{-2})\varphi_n + 2(q_n\lambda + q_{n-1}\lambda^{-1}) f_n, \\
&\frac{d\chi_n}{dt} = (\lambda^{-2} - \lambda^2)\chi_n \mp 2(\lambda q_{n-1} + \lambda^{-1} q_n) f_n
\end{aligned} \tag{2.11}$$

При выводе формул (2.10), (2.11) мы воспользовались тем, что величины $Sp\, S_n$ и $\det S_n$ в силу уравнений (2.8), (2.9) являются инвариантами:

$$Sp\, S_n = Sp\, S_m, \quad \det S_n = \det S_m, \quad \frac{d}{dt} Sp\, S_n = \frac{d}{dt} \det S_n = 0, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \tag{2.12}$$

I.2.3. Для дальнейшего анализа периодической задачи для уравнения (2.2), исследуем решения уравнений (2.I0), (2.II) как функции параметра λ .

Имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.I. Системы уравнений (2.I0), (2.II) имеют полиномиальное по параметру λ решение

$$f_n(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{N+1} f_n^{(k)}(t)\,\lambda^{2k},\quad \varphi_n(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{N}\varphi_n^{(k)}(t)\,\lambda^{2k+1},\quad \chi_n(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{N}\chi_n^{(k)}(t)\,\lambda^{2k+1} \tag{2.13}$$

тогда и только тогда , когда функции $f_n^{(k)}(t)$, $\varphi_n^{(k)}(t)$, $\chi_n^{(k)}(t)$ удовлетворяют некоторым совместным нелинейным дифференциально-разностным уравнениям и выполнены следующие равенства:

$$q_n(t)=\mp\frac{1}{2}\,\chi_n^{(N)}\cdot\left(f_n^{(N+1)}\right)^{-1},\quad q_n(t)=-\frac{1}{2}\,\varphi_n^{(N)}\cdot\left(f_n^{(N+1)}\right)^{-1}. \tag{2.14}$$

Если к тому же для некоторого индекса $n=n_0$ в точке $t=0$ выполнены соотношения

$$f_{n_0}^{*}(\overset{*}{\lambda},0)=\lambda^{2(N+1)}f_{n_0}(\lambda^{-1},0),\quad \chi_{n_0}^{*}(\overset{*}{\lambda},0)=\mp\lambda^{2(N+1)}\varphi_{n_0}(\lambda^{-1},0), \tag{2.15}$$

$$\chi_{n_0}^{(N)*}(0)\,f_{n_0}^{(N+1)}(0)=\chi_{n_0}^{(N)}(0)\,f_{n_0}^{(0)}(0),\quad \varphi_{n_0}^{(N)*}(0)\,f_{n_0}^{(N+1)}(0)=\varphi_{n_0}^{(N)}(0)\,f_{n_0}^{(0)}(0),$$

то эти дифференциально-разностные нелинейные уравнения имеют решение при всех n и t и функция $q_n(t)$, определяемая по формулам (2.I4) , является действительным решением дискретного уравнения м.К.дФ. (2.2).

Доказательство теоремы 2.I несложно и проводится аналогично доказательству теоремы I.I § I.I при помощи подстановки разложений (2.I3) в уравнения (2.I0), (2.II) и учета произвольности параметра λ .

Для получения явных формул для решения $q_n(t)$ уравнения (2.2) воспользуемся представлением полинома $\varphi_n(t,\lambda)$ в форме

$$\varphi_n(t,\lambda)=\lambda\,\varphi_n^{(N)}(t)\prod_{i=1}^{N}(\lambda^2-\mu_i(n,t)), \qquad (2.16)$$

$\mu_i(n,t)$ - нули полинома $\varphi_n(t,\lambda)$, и найдем уравнения движения функций $\varphi_n^{(N)}(t)$ и нулей $\mu_i(n,t)$ в зависимости от переменных n и t. Подстановкой (2.16) в (2.11) находим:

$$\frac{d\mu_i}{dt}=\frac{\sqrt{P(\mu_i)}}{f_n^{(N+1)}\prod_{j\neq i}(\mu_i-\mu_j)}\left[1-(-1)^N\prod_{j\neq i}\mu_j\,f_n^{(N+1)}\,(f_n^{(0)})^{-1}\right], \qquad (2.17)$$

$$\frac{d}{dt}\ln\varphi_n^{(N)}(t)=(-1)^N f_n^{(0)}\cdot(f_n^{(N+1)})^{-1}\prod_{j=1}^{N}\mu^{*-1}(n,t)-\frac{1}{2}p_{2N+1}p_{2N+2}^{-1}-$$

$$-\sum_{j=1}^{N}\mu_j(n,t)\pm(-1)^N\frac{1}{2}\cdot|\varphi_n(t)|^2 p_{2N+2}^{-1}\prod_{j=1}^{N}\mu_j^{*-1}(n,t), \qquad (2.18)$$

где через $P(\lambda^2)$ обозначено полиномиальный инвариант

$$P(\lambda^2)=f_n^2-\varphi_n\chi_n=\sum_{k=0}^{2N+2}p_k\lambda^{2k},$$

коэффициенты p_k удовлетворяют условиям: $p_k^*=p_{2N+2-k}$ и не зависят от переменных n,t.

Рассмотрим уравнение (2.18) при условии, что при $n=n_0$ автономные обыкновенные дифференциальные уравнения (2.17) могут быть решены в явном виде. Тогда в силу (2.15), уравнение (2.18) легко интегрируется, что дает по формуле (2.14) решение $q_{n_0}(t)$ уравнения (2.2). Имеем $q_{n_0}(t)=q_0\exp\int_0^t A(\tau)\,d\tau$,

где

$$A(t)=2\,\mathrm{Re}\left[f_{n_0}^{(0)}(f_{n_0}^{(N+1)})^{-1}\prod_{j=1}^{N}\mu_j(n_0,t)\right]\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{N}\mu_j(n,t)\times$$

$$\times\left\{\mathrm{Im}\left[f_{n_0}^{(0)}(f_n^{(N+1)})^{-1}\prod_{j=1}^{N}\mu_j(n_0,t)\right]\right\}^{-1}-\frac{1}{2}p_{2N+1}p_{2N+2}^{-1}-\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{N}\mu_j(n_0,t).$$

В силу периодичности решения $q_n(t)$ по индексу n с периодом $N+1$ необходимо найти только следующие величины:

$$\left\{ q_{n_0}(t),\ q_{n_0-1}(t), \ldots,\ q_{n_0-N}(t) \right\}. \tag{2.19}$$

Согласно формуле (2.14), для решений $q_n(t)$ и $q_{n-1}(t)$ можно записать следующее рекуррентное соотношение:

$$q_{n-1}(t) = q_n(t)\,(-1)^{N+1} f_n^{(N+1)} \cdot \left(f_n^{(0)}\right)^{-1} \prod_{j=1}^{N} \mu_j(n,t), \tag{2.20}$$

откуда находим

$$q_{n_0-1}(t) = (-1)^{N+1} q_{n_0}(t)\, \frac{f_{n_0}^{(N+1)}}{f_n^{(0)}} \prod_{j=1}^{N} \mu_j(n_0,t)$$

Аналогично для решения $q_{n_0-2}(t)$ получим формулу

$$q_{n_0-2}(t) = (-1)^{N+1} q_{n_0-1}(t)\, f_{n_0}^{(N+1)} \left(f_{n_0}^{(0)}\right)^{-1} \prod_{j=1}^{N} \mu_j(n_0-1,t), \tag{2.21}$$

из которой следует возможность явного нахождения величины $q_{n_0-2}(t)$ по известным $\prod_{i=1}^{N} \mu_i(n_0-1,\ t)$ и $q_{n_0-1}(t)$. Чтобы найти в явном виде выражение $\prod_{i=1}^{N} \mu_i(n_0-1,\ t)$, рассмотрим соотношение, полученное из системы (2.10):

$$q_n(t) + q_{n-1}(t) \sum_{i=1}^{N} \mu_i(n-1,t) = \pm q_{n-1}(t) \Bigg| q_n^2(t) \prod_{j=1}^{N} \mu_j^*(n,t)(-1) \times$$
$$\times \left(f_n^{(0)} f_n^{(N+1)}\right)^{-1} + \frac{P_{2N+1}}{2\,P_{2N+2}} + \frac{q_{n-1}^2(t) \prod_{i=1}^{N} \mu_i^*(n-1,t)}{(-1)^{N+1} f_n^{(0)} f_n^{(N+1)}} \Bigg| \tag{2.22}$$

Легко заменить, что из соотношений (2.18) при $n = n_0$ и формулы (2.22) при $n = n_0$ выражение $\prod_{i=1}^{N} \mu_i(n_0-1,\ t)$ находится при помощи несложных алгебраических вычислений. Подставляя это выражение в формулу (2.21), находим величину $q_{n_0-2}(t)$. Анало -

гично вычисляются все элементы множества (2.19), что и решает задачу нахождения $N+1$ - периодического по индексу n уравнения (2.2).

I.2.4. Как показано выше , периодическая задача для нелинейного уравнения м.К.дФ. (2.2) решается полностью в явном виде при условии , что система уравнений (2.17) разрешима в явном виде. Для доказательства этого утверждения и вычисления величин $\sum_{i=1}^{N} \mu_i(n_0,t)$, $\prod_{i=1}^{N} \mu_i(n_0,t)$, рассмотрим систему уравнений (2.17) как систему, заданную на гиперэллиптической римановой поверхности Γ функции $w=\sqrt{P(z)}$ [97]. Алгебраический род поверхности Γ равен числу N. Начальные данные $\mu_{j,0}=\mu_j(n_0,0)$ определяются как точки на Γ той ветвью функции w , для которой тождественно выполнено соотношение $\sum_{k=0}^{N+1} f_{n_0}^{(k)}(0)\mu_{j,0}^{k}=\sqrt{P(\mu_{j,0})}$.

Рассмотрим реализацию поверхности Γ в виде двулистной поверхности наложения комплексной плоскости $\mathbb{C}^1$ с непересекающимися разрезами по отрезкам $(\infty,E_1]$, ..., $[E_{2j},E_{2j+1}]$, .. , $[E_{2N+2},\infty)$, где E_j - нули полинома $P(z)$. На Γ существуют две бесконечно удаленные точки ∞^+ и ∞^- расположенные , соответственно, на верхнем и нижнем листах. Верхний лист определяется как множество точек $(z,+\sqrt{P(z)})$, а нижний - как множество $(z,-\sqrt{P(z)})$ для всех $z\in\mathbb{C}^1$.

Рассмотрим на поверхности Γ отображение Абеля

$$v_j(t)=\sum_{i=1}^{N}\omega_j(\mu_i(n_0,t)), \tag{2.23}$$

где $\omega_j(z)$ - нормированный базис абелевых интегралов первого рода на поверхности Γ [88] :

$$\omega_j(z)=\int_{E_{2N+2}}^{z}\sum_{k=0}^{N-1}C_{j,k}\lambda^k\left[P(\lambda)\right]^{-\frac{1}{2}}d\lambda \tag{2.24}$$

нормированный условиями $\oint_{a_i} d\omega_j(z)=\delta_{ij}$, a_i, b_i, $i=1,2,\dots,N$, -

базис одномерной группы гомологий многообразия Γ , соответствующий разрезам $[E_{2j}, E_{2j+1}]$. Учитывая уравнения движения (2.17) точек $\mu_i(n_o, t)$ на поверхности Γ для отображения Абеля (2.23) получим следующее соотношение:

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_j(\mu_i(n_o,t)) = \left(\frac{C_{j,N-1}}{f_{n_o}^{(N+1)}} + (-1)^N \frac{C_{j,0}}{f_{n_o}^{(0)}} \right) t + \sum_{i=1}^{N} \omega_j(\mu_i(n_o,0)). \qquad (2.25)$$

Выражение (2.25) означает [88], что точки $\mu_i(n_o, t)$ являются решением проблемы Якоби обращения гиперэллиптических интегралов (2.24) на поверхности Γ . Известно , что эта проблема имеет единственное решение , которое можно записать в терминах θ - функций Римана [30]. Для нашей задачи нахождения решения $q_n(t)$ согласно формул (2.20) , (2.21) необходимо вычислить величины $\sum\limits_{i=1}^{N} \mu_i(n_o, t)$ и $\prod\limits_{i=1}^{N} \mu_i(n_o, t)$, так как все остальные необходимые неизвестные величины находятся рекуррентным способом.

Рассмотрим для этого следующую θ - функцию

$$\theta(\vec{u}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^N} \exp\left\{ 2\pi i (\vec{m}, \vec{u}) + \pi i (B\vec{m}, \vec{m}) \right\},$$

где $\mathbb{Z}^N$ - пространство целочисленных N -мерных векторов , $\vec{u} \in \mathbb{C}^N$ и $(\cdot,\cdot)$ - обычное скалярное произведение. Определим Θ - функцию Римана по формуле $\Theta(z) = \theta(\vec{e} - \vec{\omega}(z))$, где вектор $\vec{e} \in \mathbb{C}^N$ определяется соотношениями:

$$e_j = \alpha_j t + \gamma_j , \quad \alpha_j = \frac{C_{j,N-1}}{f_{n_o}^{(N+1)}} + (-1)^N \frac{C_{j,0}}{f_{n_o}^{(0)}}, \quad B_{ij} = \oint_{b_i} d\,\omega_j(z),$$

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{N} \omega_j(\mu_i(n_o,0)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} B_{ij} - \frac{j}{2}$$

Как известно [30], функция $\Theta(z)$ аналитична на поверхности Γ с разрезами по a - циклам и ее нули совпадают с точками $\mu_i(n_o, t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Воспользовавшись интегрированием по границе поверхности Γ и интегральной формулой Коши, для $\sum_{i=1}^{N} \mu_i(n_o,t)$ и $\ln \prod_{i=1}^{N} \mu_i(n_o,t)$ получим следующие выражения:

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i(n_o,t) = \frac{\partial}{\partial\tau} \ln \frac{\theta(\vec{\alpha}t+\vec{\gamma}+\tau\vec{\beta}+\vec{\tau})}{\theta(\vec{\alpha}t+\vec{\gamma}+\tau\vec{\beta}-\vec{\tau})}\Bigg|_{\tau=0} + \sum_{i=1}^{N} \oint_{a_i} \lambda \, d\omega_i(\lambda), \tag{2.26}$$

$$\ln \prod_{i=1}^{N} \mu_i(n_o,t) = \ln \frac{\theta(\vec{\alpha}t+\vec{\gamma}+\vec{\delta})\,\theta(\vec{\alpha}t+\vec{\gamma}-\vec{\delta})}{\theta(\vec{\alpha}t+\vec{\gamma}+\vec{\tau})\,\theta(\vec{\alpha}t+\vec{\gamma}-\vec{\tau})} + \sum_{i=1}^{N} \oint_{a_i} \ln\lambda \, d\omega_i(\lambda),$$

где

$$\beta_j = C_{j,N-1}\left(f_{n_o}^{(N+1)}\right)^{-1}, \quad \vec{\delta} = \vec{\omega}(0^+), \quad \vec{\tau} = \vec{\omega}(\infty^+).$$

Тем самым задача построения алгоритма для нахождения точных решений периодической задачи для уравнений (2.2) полностью решена.

Заметим, что в силу формулы (2.26) и свойств θ - функции, решение $q_n(t)$ будет функцией, периодической по индексу n и почти-периодической по переменной t.

Сформулируем основной результат этого параграфа в виде следующего конструктивного утверждения.

Т е о р е м а 2.2. Пусть заданы произвольные попарно разные комплексные числа E_j, $j=1,2,\ldots,2N+2$ и числа $\mu_{j,0}=\mu_j(n_o,0) \in \mathbb{C}^1$, $j=1,2,\ldots,N$, удовлетворяющие тождественно следующему алгебраическому соотношению:

$$\prod_{j=1}^{2N+2}(z-E_j) \mp \frac{4q_{n_o}^2(t)\, f_{n_o}^{(0)}}{(-1)^N f_{n_o}^{(N+1)}} \prod_{i=1}^{N} \mu_{i,0}^*(z-\mu_{i,0}^{*\,-1})(z-\mu_{i,0}) = \rho_{2N+2}^{-1} \, f_{n_o}^2(z),$$

где $f_{n_0}(z)$ - полином степени $N+1$ с коэффициентами $f_{n_0}^{(k)}$, удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$f_{n_0}^{(k)*} = f_{n_0}^{(N+1-k)}, \quad \text{число} \quad P_{2N+2} = \left(f_{n_0}^{(N+1)}\right)^2.$$

Тогда существует решение дискретной периодической задачи для уравнения м.К.дФ. (2.2), которое находится по изложенному выше алгоритму.

I.2.4. Пусть $N=1$. Тогда $f_n(t,\lambda) = f_n^{(2)}(t)\lambda^4 + f_n^{(1)}(t)\lambda^2 + f_n^{(0)}(t)$, $\varphi_n(t,\lambda) = \varphi_n^{(1)}(t)\lambda^3 + \varphi_n^{(0)}(t)\lambda$, $\chi_n(t,\lambda) = \chi_n^{(1)}(t)\lambda^3 + \chi_n^{(0)}(t)\lambda$,

$$P(\lambda^2) = f_n^2 - \varphi_n\chi_n = p_4\lambda^8 + \ldots + p_0.$$

Предположим, что $E_1 = E_2 = Re^{i\alpha} = E = -E_3^* = -E_4^*$. Находим $p_0 = R^4$, $p_1 = 4iR^3\sin\alpha$, $p_2 = -2R^2(1+2\sin^2\alpha)$, $p_3 = -4iR\sin\alpha$, $p_4 = 1$. Уравнение для функции $\mu(t)$ имеет вид $\frac{d\mu}{dt} = (1+R^{-2})(\mu-E)(\mu+E^*)$. Легко вычислить, что $\mu - E = (\mu+E^*)\exp[2t(R^{-2}+1)+2C]$, где C - произвольная постоянная. Отсюда

$$\mu(t) = -R\,\frac{ch[-i\alpha + (R+R^{-1})t\cos\alpha + C]}{sh[(R+R^{-1})t\cos\alpha + C]}.$$

Заменив C на $\frac{i\pi}{2} + C_1$ и считая C_1 - действительным, находим

$$\mu(t) = -R\left[th((R+R^{-1})t\cos\alpha + C_1)\cos\alpha + iR\sin\alpha\right],$$

$$Re\,\mu(t) = -R\,th((R+R^{-1})t\cos\alpha + C_1)\cos\alpha, \quad Im\,\mu(t) = R\sin\alpha.$$

Подставляя эти выражения в (2.14), (2.18), окончательно получаем

$$q_n(t) = q_0\exp(2iR+\sin\alpha)\left[ch((R+R^{-1})t\cos\alpha + C_1)\right]^{\frac{R}{(R^2+1)\cos\alpha}},$$

$$q_{n-1}(t) = q_n(t)\,\mu(t)\,R^{-2}.$$

§ I.3. Периодическая задача для цепочки Тода

I.3.I. Взаимодействие $N+1$ частицы на прямой с экспоненциальным потенциалом описывается уравнениями периодической цепочки Тода [130]:

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = \exp(q_{n-1} - q_n) - \exp(q_n - q_{n-1}),\ q_n(t) \in \mathbb{R}^1,\quad n = \overline{0,N}. \qquad (3.I)$$

Исследованию уравнений (3.I) посвящено много работ [19, 39, 44,103-106,125,130-133], причем уравнение цепочки Тода изучалось разнообразными методами. Отметим лишь некоторые из этих работ и методов. В работах [44,105,106] уравнения движения (3.I) были проинтегрированы в быстроубывающем случае ($q_n \to 0$, $N \to \infty$) методом обратной задачи теории рассеяния , что позволило найти для этого "дискретные" солитонные решения. Затем, в работах 19,23,39,103 была решена периодическая задача для уравнения (3.I), причем применение методов алгебраической геометрии позволило записать решение $q_n(t)$ в явном виде в терминах многомерных тэта-функций Римана. Отметим также работы [124,125,120], в которых развиваются эффективные методы Дарбу и Бэклунд - преобразований , приводящие к удобным рекуррентным формулам для решений дискретных эволюционных уравнений, включая цепочку Тоды (3.I).

В данном параграфе периодическая задача для уравнения (3.I) исследуется при помощи дискретного аналога периодического варианта метода обратной задачи [9,10].

I.3.2. Как было показано в [44,105,100], уравнение цепочки Тода (3.I) допускает представление типа Лакса на матрицах второго порядка, зависящих от произвольного спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}^1$, которое можно записать согласно [19] в следующем виде

$$\frac{d\mathcal{L}_n(\lambda)}{dt} = \mathcal{M}_{n+1}(\lambda)\,\mathcal{L}_n(\lambda) - \mathcal{L}_n(\lambda)\,\mathcal{M}_n(\lambda), \tag{3.2}$$

где

$$\mathcal{M}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} b_n - \lambda & 2 \\ -2a_n^2 & \lambda - b_{n+1} + a_n^{-1}\dfrac{da_n}{dt} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & a_n^{-1} \\ -a_n & (b_n - \lambda)\,a_n^{-1} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\exp\frac{1}{2}(q_{n-1} - q_n), \quad b_n = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}q_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Прямым вычислением легко убедиться, что уравнение (3.2) остается справедливым для всех $\lambda \in \mathbb{C}^1$, если функции $q_n(t)$ удовлетворяют уравнениям (3.I).

В дальнейшем считаем, что функция $q_n(t)$ периодическая с периодом $N+1$ по индексу n :

$$q_{n+N+1}(t) = q_n(t) \pmod{\mathcal{K}}, \tag{3.4}$$

где $\mathcal{K}$ - произвольное действительное число. Рассмотрим следующие линейные задачи на вектор-функцию $u_n(t) \in \mathbb{C}^2$:

$$u_{n+1}(t) = \mathcal{L}_n(\lambda)\,u_n(t), \quad \frac{du_n(t)}{dt} = \mathcal{M}_n(\lambda)\,u_n(t). \tag{3.5}$$

Записывая условие совместности уравнений (3.5) в виде $\frac{d}{dt}u_{n+1} = \left.\frac{du_m}{dt}\right|_{m=n+1}$, находим , что матрицы $\mathcal{L}_n(\lambda)$ и $\mathcal{M}_n(\lambda)$ должны удовлетворять уравнению (3.2). Это значит , что на решениях уравнения цепочки Тода (3.I) линейные задачи (3.5) совместные при всех n и t .

В силу периодичности (3.4) функции $q_n(t)$ для уравнений определена матрица монодромии $S_n = S_n(t,\lambda)$ по формуле

$$u_{n+N+1}(t) = S_n(t,\lambda)\, u_n(t). \tag{3.6}$$

Из первого уравнения в (3.5) находим для S_n явную формулу

$$S_n = \prod_{k=0}^{\overleftarrow{N}} \mathcal{L}_{n+k}(\lambda) = \mathcal{L}_{n+N}(\lambda)\,\mathcal{L}_{n+N-1}(\lambda) \ldots \mathcal{L}_n(\lambda), \tag{3.7}$$

где $\overleftarrow{N}$ указывает на порядок возрастания индексов в произведении (3.7).

Имеет место следующая лемма.

Л е м м а 3.1. Матрица монодромии $S_n(t,\lambda)$ для линейных задач (3.5) является полиномиальной по параметру λ матричной функцией.

Получим теперь дифференциально-разностные уравнения, которым удовлетворяет матрица монодромии $S_n(t,\lambda)$. Из определения (3.7) следует соотношение

$$S_{n+1}\,\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n\, S_n. \tag{3.8}$$

Подставив (3.6) во второе уравнение (3.5), легко находим второе соотношение

$$\frac{dS_n}{dt} = \left[\mathcal{M}_n , S_n \right]. \tag{3.9}$$

Эти уравнения на S_n будут для нас в дальнейшем главными, поэтому исследуем дополнительно их свойства. Справедлива следующая лемма.

Л е м м а 3.2. Для системы дифференциально-разностных уравнений (3.8) и (3.9) величины $\det S_n$ и $Sp\, S_n$ являются абсолютными инвариантами: $\frac{d}{dt} \det S_n = \frac{d}{dt}\, Sp\, S_n = 0$,

$$\det S_m = \det S_n, \quad Sp\, S_m = Sp\, S_n, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \tag{3.10}$$

Доказательство очевидно.

Введем следующие обозначения $S_n = \| S_n^{(ij)} \|; \quad i,j=1,2,$

$$S_n^{(11)} + S_n^{(22)} = 2h_n, \quad S_n^{(11)} - S_n^{(22)} = 2f_n, \quad S_n^{(12)} = -\varphi_n, \quad S_n^{(21)} = \chi_n .$$

Тогда уравнения (3.8) и (3.9) эквивалентны следующим

$$(f_{n+1} - f_n)(b_{n+1} - \lambda)\, a_n^{-1} = \varphi_n a_n - \chi_{n+1} a_n^{-1},$$

$$(f_{n+1} + f_n)\, a_n^{-1} = -(b_{n+1} - \lambda)\, a_n^{-1} \varphi_{n+1}, \tag{3.11}$$

$$(f_{n+1} + f_n)\, a_n = -(b_{n+1} - \lambda)\, a_n^{-1} \chi_n, \quad \chi_n = a_n^2 \varphi_{n+1},$$

$$\frac{d f_n}{dt} = 2(\chi_n - \varphi_n a_n^2),$$

$$\frac{d\varphi_n}{dt} = (b_n + b_{n+1} - 2\lambda - a_n^{-1} \frac{d a_n}{dt})\varphi_n + 4 f_n, \tag{3.12}$$

$$\frac{d\chi_n}{dt} = (2\lambda - b_n - b_{n+1} + a_n^{-1} \frac{d a_n}{dt})\chi_n - 4 f_n a_n^2 .$$

Согласно лемме (3.I) , системы уравнений (3.II), (3.I2) имеют полиномиальное по λ решение $f_n(t,\lambda)$, $\varphi_n(t,\lambda)$, $\chi_n(t,\lambda)$, которое запишем в следующем виде

$$f_n(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{N+1} f_n^{(k)}(t)\lambda^k, \quad \varphi_n(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{N} \varphi_n^{(k)}(t)\lambda^k, \quad \chi_n(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{N} \chi_n^{(k)}(t)\lambda^k \tag{3.13}$$

Кроме того , из формул (3.I0) следует инвариантность полинома

$$P(\lambda) = f_n^2 - \chi_n \varphi_n = \sum_{k=0}^{2N+2} P_k \lambda^k, \tag{3.14}$$

где числа P_k не зависят от n и t .

Изучим более подробно свойства решений (3.13) уравнений (3.11) и (3.12). Для этого докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. Системы дифференциально-разностных уравнений (3.11) и (3.12) допускают полиномиальное по параметру λ решение (3.13) тогда только тогда, когда функции $f_n^{(k)}(t)$, $\varphi_n^{(k)}(t)$, $\chi_n^{(k)}(t)$ удовлетворяют некоторым совместным дифференциально-разностным автономным нелинейным уравнениям, причем справедливы соотношения

$$\frac{d f_n^{(N+1)}}{dt} = \frac{d f_m^{(N)}}{dt} = 0, \quad f_n^{(N+1)} = f_m^{(N+1)}, \quad f_n^{(N)} = f_m^{(N)}, \quad k=\overline{0,N}, \tag{3.15}$$

$$\varphi_n^{(N)} = 2 f_n^{(N+1)}, \quad \chi_n^{(k)} = a_n^2 \varphi_{n_0+1}^{(k)}, \quad 2 f_n^{(N)} = -b_{n+1} \varphi_n^{(N)} + \varphi_{n+1}^{(N-1)}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Если к тому же в некоторой точке $n=n_0$, $t=0$ заданы следующие условия

$$f_{n_0}^{(k)*}(0) = f_{n_0}^{(k)}(0), \quad \chi_{n_0}^{(N)*}(0)\, \chi_{n_0}^{(N-1)}(0) = \chi_{n_0}^{(N-1)*}(0)\, \chi_{n_0}^{(N)}(0),$$
$$\chi_{n_0}^{(N)*}(0)\, \chi_{n_0}^{(N-2)}(0) = \chi_{n_0}^{(N-2)*}(0)\, \chi_{n_0}^{(N)}(0), \tag{3.16}$$

то эти нелинейные автономные дифференциально-разностные уравнения имеют решение при всех n, t, и соотношения (3.15) приводят к алгоритму построения явного действительного решения уравнения (3.1).

Доказательство. Подстановкой решений (3.13) в системы уравнений (3.11) и (3.12) с учетом произвольности параметра λ находим некоторые системы дифференциально-разностных нелинейных автономных уравнений, причем алгебраические соотношения (3.15) выражают условие их совместности. Используя эти соотношения и разрешимость автономных уравнений, приходим к явным формулам для решения $q_n(t)$. Для уточнения этих формул рассмотрим периодическую задачу Коши для уравнения (3.1): по заданному значению $q_{n_0}(0)=q_0$ найти периодическое по индексу n решение $q_n(t)$

уравнения (3.1).

Будем считать, как и ранее, период функции $q_n(t)$ равным $N+1$. Это значит, что нам необходимо отыскать следующий набор величин :

$$\{ q_{n_0}(t), q_{n_0+1}(t), \ldots, q_{n_0+N}(t) \}, \tag{3.17}$$

где n_0 - произвольное целое число.

Рассмотрим полином $\chi_n(t,\lambda)$ в следующей форме :

$$\chi_n(t,\lambda) = \chi_n^{(N)}(t) \prod_{i=1}^{N} (\lambda - \mu_i(n,t)), \tag{3.18}$$

где $\mu_i(n,t)$ - его нули. Тогда из (3.15) находим

$$\frac{d}{dt} q_n(t) = 2 f_n^{(N)} / f_n^{(N+1)} + 2 \sum_{i=1}^{N} \mu_i(n,t). \tag{3.19}$$

Здесь величины $f_n^{(N)}$ и $f_n^{(N+1)}$ согласно (3.15) - инварианты уравнений (3.11), (3.12) и определены однозначно условиями (3.16). Из этих же условий находим, что функция $q_n(t)$ в равенстве (3.19) является действительной. Подставляя разложение (3.18) в третье уравнение системы (3.12), находим уравнение для нулей

$$\frac{d\mu_i(n,t)}{dt} = \frac{2\sqrt{P(\mu_i)}}{f_n^{(N+1)} \prod_{j \neq i}^{N} (\mu_i - \mu_j)} \tag{3.20}$$

Предположим, что мы определим явно при помощи уравнений (3.20) значение величины $\sum_{i=1}^{N} \mu_i(n_0,t)$ по заданным начальным значениям $\mu_{i,0} = \mu_i(n_0,0)$, $i = 1,2, \ldots, N$. Тогда по формуле (3.19) прямым интегрированием находим функцию $q_{n_0}(t)$ по значению $q_{n_0}(0) = q_0$:

$$q_{n_0}(t) = q_0 + \frac{2 f_n^{(N)}}{f_n^{(N+1)}} t + 2 \int_0^t \sum_{i=1}^{N} \mu_i(n_0,\tau)\, d\tau. \tag{3.21}$$

Чтобы найти элемент множества (3.17) - функцию $q_{n_0+1}(t)$, рассмотрим следующее равенство, полученное из системы (3.11) и формулы (3.14),

$$a_n^2+a_{n+1}^2=\frac{1}{2}\left(\left(f_n^{(N)}\right)^2-P_{2N}\right)P_{2N+2}^{-1}+\sum_{i<j}^{N}\mu_i\mu_j-\frac{1}{2}\frac{dq_n(t)}{dt}\sum_{i=1}^{N}\mu_i \qquad (3.22)$$

Запишем уравнение (3.I) в виде

$$a_n^2-a_{n+1}^2=\frac{1}{4}\frac{d^2}{dt^2}q_n(t). \qquad (3.23)$$

Отсюда в предположении явной разрешимости уравнений (3.20) при $n=n_o$ следует явная формула для решения $q_{n_o+1}(t)$. Действи - тельно , вычитая из уравнения (3.22) уравнение (3.23), находим

$$2\,a_{n+1}^2\equiv\frac{1}{2}\exp\left(q_n(t)-q_{n+1}(t)\right)=\frac{1}{2}\left(\left(f_n^{(N)}\right)^2-P_{2N}\right)P_{2N+2}^{-1}-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n,t)+\sum_{i<j}^{N}\mu_i(n,t)\mu_j(n,t)-\frac{1}{2}\frac{dq_n(t)}{dt}\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n,t)\equiv Q_n(t). \qquad (3.24)$$

Отсюда легко запишем общую рекуррентную формулу для решений уравнения (3.I) по индексу n.

$$q_{n+1}(t)=q_n(t)-\ln 2\,Q_n(t) \qquad (3.25)$$

Таким образом, по явной функции $q_{n_o}(t)$, определенной из формулы (3.2I), находим явное выражение для функции $q_{n_o+1}(t)$ по формуле

$$q_{n_o+1}(t)=q_{n_o}(t)-\ln 2\,Q_{n_o}(t), \qquad (3.26)$$

где , согласно предположению относительно разрешимости уравнений (3.20) при $n=n_o$, функция $Q_{n_o}(t)$ (3.24) является уже известной. Доказательство разрешимости уравнений (3.20) мы проведем далее.

Построим теперь элемент $q_{n_o+2}(t)$ из набора (3.I7). Для этой цели нам необходимо согласно (3.24) и (3.25) , найти в явном виде выражения: $\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n_o+1,t)$, $\sum_{i<j}^{N}\mu_i(n_o+1,t)\mu_j(n_o+1,t)$.

Пользуясь функцией $q_{n_o+1}(t)$ (3.26), по формуле (3.I9) находим

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i(n_0+1,t) = -\frac{f_{n_0}^{(N)}}{f_{n_0}^{(N+1)}} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} q_{n_0+1}(t). \tag{3.27}$$

Рассмотрим равенство , получаемое из (3.12) и (3.14) при $n = n_0+1$.

$$\sum_{i<j}^{N} \mu_i(n_0+1,t)\mu_j(n_0+1,t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \mu_i(n_0+1,t)\frac{d}{dt} q_{n_0+1}(t) + \tag{3.28}$$
$$+2a_{n_0+1}^2(t) - \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2} q_{n_0+1}(t) + \frac{1}{2}\left[P_{2N} - (f_{n_0}^{(N)})^2\right] P_{2N+2}^{-1}$$

Так как выражения $\sum_{i=1}^{N} \mu_i(n_0+1,t)$ и $a_{n_0+1}^2(t)$ уже определены выше формулами (3.24) и (3.27) , то формула (3.28) дает в явном виде нужное соотношение $\sum_{i<j} \mu_i(n,t)\mu_j(n,t)$ при $n = n_0+1$. Подставляя выражения (3.27) и (3.28) в формулу (3.25) при $n = n_0+1$ находим элемент $q_{n_0+2}(t)$ множества (3.17). Этот алгоритм можно аналогично использовать для определения функций $q_{n_0+i}(t), i=3,4,\dots,N$ из набора (3.17). Теорема доказана.

I.3.3. В п. I.3.2 мы доказали теорему реконструкции решения периодической задачи Коши для уравнения (3.I) при условии явного интегрирования уравнений (3.20). Чтобы исследовать это условие, рассмотрим систему автономных нелинейных дифференциальных уравнений (3.20) как систему [97,30], заданную на гиперэллиптической римановой поверхности Γ рода N функции $w=\sqrt{P(z)}$. Начальные данные $\mu_{i,0}=\mu_i(n_0,0)$ определим как точки на Γ , которые тождественно удовлетворяют следующему соотношению: $\sum_{k=0}^{N+1} f_{n_0}^{(k)}(0)\mu_{i,0}^{k} = \sqrt{P(\mu_{i,0})}$. Пусть E_j, $j=1,2,\dots,2N+2$, - нули полинома $P(\lambda)$. Поверхность Γ реализуем в виде двулистной поверхности наложения комплексной плоскости $\mathbb{C}^1$ с разрезами $(\infty, E_1], \dots, [E_{2j}, E_{2j+1}], \dots, [E_{2N+2}, \infty)$. На поверхности Γ имеется две бесконечно удаленные точки ∞^+ и ∞^- , расположенные соответственно на верхнем $(z, +\sqrt{P(z)})$ и нижнем $(z, -\sqrt{P(z)})$ листах. При этом функция W будет однозначной аналитической функцией на поверхности Γ. Циклы, образующие базис одномерной группы гомологий, будем, как обычно, обозначать через a_i, b_i, $i=1, 2, \dots, N$, считая, что кривая a_i расположена на верхнем листе поверхности Γ и обходит по часовой стрелке отрезок $[E_{2i}, E_{2i+1}]$, а кривая b_i начинается в точке E_{2i+1}, по верхнему листу приходит в точку E_{2N+2} и по нижнему листу возвращается снова в точку E_{2i+1}. На поверхности Γ существует [88] базис абелевых интегралов первого рода, который задается формулами

$$\omega_j(z) = \sum_{k=0}^{N-1} C_j^{(k)} \int_{E_{2N+2}}^{z} \lambda^k \left[P(\lambda) \right]^{-\frac{1}{2}} d\lambda \qquad (3.29)$$

Нормируем базис (3.29) условиями

$$\oint_{a_i} d\omega_j(z) = \delta_{ij}, \quad \oint_{b_i} d\omega_j(z) = B_{ij}. \qquad (3.30)$$

Матрица $B = \| B_{ij} \|$, $i,j = 1, 2, \dots, N$, называется матрицей Римана. Она симметрична, а ее мнимая часть положительно определена.

Построим теперь при помощи базиса (3.29) отображение Абеля

$$\nu_j(t) = \sum_{i=1}^{N} \omega_j(\mu_i(n_0, t)), \qquad (3.31)$$

где функции $\mu_i(n_0, t)$ удовлетворяют уравнениям (3.20). Тогда легко показать, что $d\nu_j(t)/dt = 2\, C_j^{(N-1)}/f_{n_0}^{(N+1)}$. Выражение (3.31) примет вид $\nu_j(t) = \nu_j(0) + 2t\, C_j^{(N-1)}/f_{n_0}^{(N+1)}$, т.е. функции $\mu_i(n_0, t)$ решают проблему Якоби обращения абелевых интегралов на гиперэллиптической римановой поверхности Γ.

Для ее решения, согласно [30] рассмотрим N-мерную θ-функцию Римана, построенную по матрице периодов (I, B) (3.30) базиса абелевых интегралов (3.29)

$$\theta(\vec{u}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^N} \exp\left[2\pi i (\vec{m}, \vec{u}) + \pi i (B\vec{m}, \vec{m}) \right],$$

где $\mathbb{Z}^N$ - пространство целочисленных векторов, вектор $\vec{u} \in \mathbb{C}^N$ и $(\cdot,\cdot)$ - обычное скалярное произведение. Тогда в силу того, что функция $\Theta(z) = \theta(\vec{e} - \vec{\omega}(z))$,

где

$$e_j = \alpha_j t + \gamma_j, \quad \alpha_j = \frac{2C_j^{(N-1)}}{f_{n_0}^{(N+1)}}, \quad \beta_j = \frac{C_j^{(N-2)}}{f_{n_0}^{(N+1)}},$$

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{N} \omega_j(\mu_{i,0}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} B_{ij} - \frac{j}{2}$$

аналитична на поверхности Γ с разрезами по a - циклам, а ее нули совпадают с точками $\mu_i(n_0,t)$, находим

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i(n_0,t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln\frac{\theta(\vec{\alpha}t+\vec{\gamma}-\vec{z})}{\theta(\vec{\alpha}t+\vec{\gamma}+\vec{z})} + \sum_{i=1}^{N}\oint_{a_i}\lambda\, d\omega_i(\lambda),$$

(3.32)

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i^2(n_0,t) = -\frac{1}{4}\frac{d^2}{dt^2}\ln\frac{\theta(\vec{\alpha}t+\vec{\gamma}-\vec{z})}{\theta^{-1}(\vec{\alpha}t+\vec{\gamma}+\vec{z})} + \sum_{i=1}^{N}\oint_{a_i}\lambda^2 d\omega_i(\lambda) +$$

$$+\frac{1}{2}P_{2N+1}\frac{d}{dt}\ln\frac{\theta(\vec{\alpha}t+\vec{\gamma}-\vec{z})}{\theta(\vec{\alpha}t+\vec{\gamma}+\vec{z})} - \frac{\partial}{\partial\tau}\ln\frac{\theta(\vec{\alpha}t+\vec{\gamma}+\vec{\beta}\tau-\vec{z})}{\theta(\vec{\alpha}t+\vec{\gamma}+\vec{\beta}\tau+\vec{z})}\Bigg|_{\tau=0},$$

$\vec{z} = \vec{\omega}(\infty^+)$.

Так как

$$2\sum_{i<j}\mu_i(n_0,t)\mu_j(n_0,t) = \left(\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n_0,t)\right)^2 - \sum_{i=1}^{N}\mu_i^2(n_0,t), \qquad (3.33)$$

то формулы (3.32), (3.33) решают полностью задачу вычисления явных решений q_{n_0+i}, $i=0,1,\ldots,N$, уравнения (3.I), что следует из результатов п. I.3.2.

Сформулируем основной результат этого параграфа в виде следующей конструктивной теоремы.

Т е о р е м а 3.2. Пусть заданы произвольные попарно разные числа $E_j \in \mathbb{C}^1$, $j=1,2,\ldots,2N+2$, и числа $\mu_{i,0}=\mu_i(n_0,0)\in\mathbb{C}^1$, $i=1,2,\ldots,N$, которые удовлетворяют условию

$$\prod_{j=1}^{2N+2}(\mu_{i,0}-E_j)=f_{n_0}^2(\mu_{i,0})\left(f_{n_0}^{(N+1)}\right)^{-2},$$

где $f_{n_0}(\lambda)$ - полином степени $N+1$ с действительными коэффициентами.

Тогда существует решение периодической задачи Коши для уравнения цепочки Тода (3.I), которое находится изложенным выше алгоритмом в явном виде.

I.3.4. Чтобы получить в явном виде решение уравнений (3.I) при $N=1$, воспользуемся вычислениями, выполненными в п.I.2.4. Пусть снова $E_1=E_2=E=Re^{i\alpha}=-E_3^*=-E_4^*$. Функция $\mu(x,t)$ определяется из уравнения $d\mu/dt=(\mu-E)(\mu+E^*)$, решение которого можно записать в виде $\mu(t)=iR\,\mathrm{ch}(i\alpha-Rt\cos\alpha)\,\mathrm{ch}^{-1}(Rt\cos\alpha+C)$, C - произвольная постоянная. Далее находим

$$q_1(t)=q_0-4iRt\sin\alpha+\int_0^t 2iR\,\frac{\mathrm{ch}(i\alpha-R\tau\cos\alpha+C)}{\mathrm{ch}(R\tau\cos\alpha+C)}\,d\tau,$$

$$q_2(t)=q_1(t)-\ln 2Q(t),$$

$$Q(t)=R^2-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mu(t)-\frac{1}{2}\mu(t)\frac{d}{dt}q_1(t).$$

Отметим, что в случае $N\geq 2$ при помощи вырождения римановой поверхности Γ, задающей решение $q_n(t)$, можно получить солитонные решения для периодической цепочки Тода [125, 126].

§ 1.4. Точные почти-периодические решения нелинейных уравнений распространения волнового импульса в двухуровневой среде без диссипации

1.4.1. Распространение волнового импульса в двухуровневой среде без учета эффекта диссипации описывается дифференциальными уравнениями [21]:

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}=2i\rho,\quad \frac{\partial n}{\partial t}=i(E\rho^*-E^*\rho),\quad \frac{\partial \rho}{\partial t}=-2inE, \qquad (4.1)$$

где E - комплексная амплитуда волны, ρ, n - элементы матрицы плотности $\hat{\rho}=\begin{pmatrix} n & \rho \\ \rho^* & -n \end{pmatrix}$.

Уравнения (4.1) уже изучались в солитонном секторе решений в работах[21,99,114]методом обратной задачи теории рассеяния. Это исследование посвящено анализу периодической задачи для уравнений (4.1) в рамках методов работ [47,48], развитых для нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза, а также работ [32,35, 72], развитых для нелинейных уравнений Шредингера, синус - Гордон и Риккати.

1.4.2. Рассмотрим следующие линейные операторы $\mathcal{X}_\lambda$ и T_λ, заданные в пространстве комплексных дифференцируемых вектор-функций:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_\lambda &= \frac{\partial}{\partial x}+i\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} 0 & E \\ E^* & 0 \end{pmatrix}+\frac{i}{\lambda}\hat{\rho}, \\ T_\lambda &= \frac{\partial}{\partial t}-i\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}-i\begin{pmatrix} 0 & E \\ E^* & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \qquad (4.2)$$

где λ - произвольный комплексный параметр. Тогда уравнения (4.I) можно записать [21] при помощи коммутационного представления типа Лакса на матричных дифференциальных операторах $\mathcal{X}_\lambda$ и T_λ :

$$[\ \mathcal{X}_\lambda\ ,\ T_\lambda\ ] = 0 \tag{4.3}$$

Предположим, что матрица плотности $\hat{\rho}$ и амплитуда волны E являются ℓ - периодическими функциями пространственной переменной x, и, следуя [74, 75,89], найдем дифференциальные уравнения для матрицы монодромии оператора $\mathcal{X}_\lambda$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\mathcal{X}_\lambda\ g_\lambda(x, x_o, t) = 0\ ,\ g_\lambda(x_o, x_o, t) = g^o_\lambda(t), \tag{4.4}$$

где $g_\lambda(x, x_o, t)$, $g^o_\lambda(t)$ - матрицы 2×2 и матрица $g^o_\lambda(t)$ при некотором $t = t_o$ невырождена , т.е. $\det g^o_\lambda(t_o) \neq 0$.

Используя ℓ - периодичность оператора $\mathcal{X}_\lambda$ по переменной x , определим матрицу монодромии для уравнения (4.4) по формуле

$$g_\lambda(x+\ell, x_o, t) = g_\lambda(x, x_o, t)\ T(x_o, t). \tag{4.5}$$

Так как матрица $g_\lambda(x, x_o, t)$ в некоторой окрестности точки t_o является фундаментальным решением уравнения (4.4), то матрица $T(x_o, t)$ не зависит от переменной x . Продифференцируем равенство (4.5) по переменной x_o . Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x_o} g_\lambda(x+\ell, x_o, t) = \frac{\partial g_\lambda(x, x_o, t)}{\partial x_o} T(x_o, t) + g_\lambda(x, x_o, t) \frac{\partial T(x_o, t)}{\partial x_o}.$$

Отсюда , переходя к пределу $x \to x_o$, получим

$$i \lim_{x \to x_0} \frac{\partial}{\partial x_0} g_\lambda (x+\lambda, x_0, t) = i \lim_{x \to x_0} \frac{\partial g_\lambda (x, x_0, t)}{\partial x_0} T(x_0, t) + \\ + i g^0_\lambda (t) \frac{\partial T(x_0, t)}{\partial x_0} \tag{4.6}$$

Чтобы найти предельные значения в (4.6), рассмотрим уравнение (4.4) для $g_\lambda (x, x_0, t)$, продифференцированное по переменной x_0:

$$X_\lambda \left[\frac{\partial g_\lambda (x, x_0, t)}{\partial x_0} \right] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_0} X_\lambda g_\lambda (x, x_0, t) = 0. \tag{4.7}$$

Используя коммутативность операторов $\frac{\partial}{\partial x_0}$ и X_λ, из (4.4) и (4.7) находим:

$$i \frac{\partial g_\lambda (x, x_0, t)}{\partial x_0} = g_\lambda (x, x_0, t) B(x_0, t), \tag{4.8}$$

где $B(x_0, t)$ - некоторая матрица, не зависящая от переменной x. С другой стороны, известно, что

$$i \lim_{x \to x_0} \frac{\partial g_\lambda (x, x_0, t)}{\partial x_0} = Q(x_0, t) g^0_\lambda (t), \tag{4.9}$$

где матрица $Q(x_0, t)$ тождественно равна недифференциальной части оператора X_λ при $x = x_0$. При $x \to x_0$ из соотношения (4.8) получаем

$$B(x_0, t) = \left(g^0_\lambda (t) \right)^{-1} Q(x_0, t) g^0_\lambda (t). \tag{4.10}$$

Рассмотрим формулу (4.8) в точке $(x+l, x_0, t)$. Тогда имеем

$$i \frac{\partial g_\lambda (x+l, x_0, t)}{\partial x_0} = g_\lambda (x, x_0, t) T(x_0, t) B(x_0, t),$$

откуда, при $x \to x_0$ находим

$$i \lim_{x \to x_0} \frac{\partial g_\lambda(x+\ell, x_0, t)}{\partial x_0} = g^0_\lambda(t)\, T(x_0,t)\, B(x_0,t). \tag{4.11}$$

Подставляя соотношения (4.9)-(4.11) в формулу (4.6), получаем уравнение для матрицы $T(x_0,t)$:

$$i g^0_\lambda(t) \frac{\partial T}{\partial x_0} (g^0_\lambda(t))^{-1} = g^0_\lambda(t)\, T\, (g^0_\lambda(t))^{-1} Q(x_0,t) - Q(x_0,t)\, g^0_\lambda(t) \cdot T \cdot (g^0_\lambda(t))^{-1} \tag{4.12}$$

Обозначим через $S(x_0,t)$ матрицу $g^0_\lambda(t)\, T(x_0,t)(g^0_\lambda(t))^{-1}$. Уравнение (4.12) запишется в виде

$$i \frac{\partial S}{\partial x_0} = [\, S, Q \,] \tag{4.13}$$

Аналогично получим уравнение для матрицы $S(x_0,t)$ по переменной t .

Воспользуемся тем, что на решениях уравнений (4.1) коммутатор (4.3) равен нулю. Пусть $g_\lambda(x, x_0, t)$ - решение уравнения (4.4). Тогда $T_\lambda g_\lambda(x,x_0,t)$ - также решение этого уравнения, и, значит

$$T_\lambda g_\lambda(x,x_0,t) = g_\lambda(x,x_0,t)\, C(x_0,t), \tag{4.14}$$

где $C(x_0,t)$ - некоторая матрица, не зависящая от переменной x. Подставив в формулу (4.14) вместо x значение $x+\ell$, получим

$$T_\lambda (g_\lambda(x,x_0,t)\, T(x_0,t)) = g_\lambda(x,x_0,t)\, T(x_0,t)\, C(x_0,t) \tag{4.15}$$

Используя (4.2), из формул (4.14) и (4.15) при $x \to x_0$ находим

$$i \frac{\partial g^0_\lambda(t)}{\partial t} = g^0_\lambda(t)\, C(x_0,t) - \Lambda(x_0,t)\, g^0_\lambda(t), \tag{4.16}$$

$$i \frac{\partial T(x_0,t)}{\partial t} = T(x_0,t)\, C(x_0,t) - C(x_0,t)\, T(x_0,t), \tag{4.17}$$

где матрица $\Lambda(x_0,t)$ - недифференциальная часть оператора при $x=x_0$.

При помощи несложных вычислений из соотношений (4.16),(4.17) получаем уравнения для матрицы $S(x_0,t)$ по переменной t

$$i\frac{\partial S}{\partial t}=\left[\;S,\Lambda\right]. \tag{4.18}$$

Нетрудно показать , что из условия $\det g^0_\lambda(t)\neq 0$ при $t=t_0$ следует $\det g^0_\lambda(t)\neq 0\ \forall t\in R^1$

2. Уравнения (4.13) и (4.18) имеют важное значение в дальнейшем исследовании , поэтому выпишем их явно , вводя некоторые обозначения. Пусть

$$S=\| S_{ij}\|,\ i,j=1,2,\ \ S_{11}+S_{22}=2h,\ S_{11}-S_{22}=2f,\ S_{12}=-\varphi,$$

$S_{21}=\chi$. Из уравнений (4.13) и (4.18) получим следующие системы уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}=-i\left[(E+\frac{\rho}{\lambda})\chi+(E^*+\frac{\rho^*}{\lambda})\varphi\right],\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial x}=-2i\left[(\lambda+\frac{n}{\lambda})\varphi+(E+\frac{\rho}{\lambda})f\right],\\
&\frac{\partial \chi}{\partial x}=2i\left[(\lambda+\frac{n}{\lambda})\chi-(E^*+\frac{\rho^*}{\lambda})f\right],
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=i\,(E\chi+E^*\varphi),\quad \frac{\partial \chi}{\partial t}=2i(-\lambda\chi+E^*f), \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=2i(\lambda\varphi+Ef),\quad \frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial h}{\partial x}=0,$$

для которых справедлива следующая "аппроксимационная" теорема.

Т е о р е м а 4.I. Системы уравнений (4.I9), (4.20) допускают полиномиальные по параметру λ решение -

$$f(x,t,\lambda)=\sum_{k=0}^{N+1} f_k(x,t)\lambda^k,\ \varphi(x,t,\lambda)=\sum_{k=0}^{N}\varphi_k(x,t)\lambda^k,\ \chi(x,t,\lambda)=\sum_{k=0}^{N}\chi_k(x,t)\lambda^k \tag{4.21}$$

тогда и только тогда, когда функции $f_k(x,t),\ \varphi_k(x,t),\ \chi_k(x,t)$ удовлетворяют некоторым совместным нелинейным автономным системам дифференциальных уравнений и выполнены соотношения

$$E(x,t)=-\varphi_N(x,t)\,f_{N+1}^{-1},\quad \overset{*}{E}(x,t)=\chi_N(x,t)\,f_{N+1}^{-1}. \tag{4.22}$$

Если, кроме того, в точке $x=0$, $t=0$ выполнены начальные условия

$$f(0,0,\overset{*}{\lambda})=\overset{*}{f}(0,0,\lambda),\quad \varphi(0,0,\overset{*}{\lambda})=-\overset{*}{\chi}(0,0,\lambda), \tag{4.23}$$

то эти нелинейные автономные системы дифференциальных уравнений имеют решение при всех x, t, причем функция $E(x,t)$, определяемая формулами (4.22), является точным бесконечно дифференцируемым решением уравнений (4.I).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим решение (4.2I) в систему уравнений (4.I9), (4.20) и, используя произвольность параметра λ, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ. При этом мы получим систему дифференциальных и алгебраических уравнений. Используя эти алгебраические уравнение, получаем систему автономных нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial x} &= F_{1i}(y_0,y_1,\dots,y_{3N+3}),\\ \frac{\partial y_i}{\partial t} &= F_{2i}(y_0,y_1,\dots,y_{3N+3}), \end{aligned} \tag{4.24}$$

где $y_i = f_i$, $y_{N+2+i} = \varphi_i$, $y_{2N+3+i} = \chi_i$, $i=0,1,\dots,N$,

а функции $\mathcal{F}_{kj}$, $k=1,2$, $j=0,1,\dots,3N+3$, – полиномы от y_i . Система уравнений (4.24) совместна , поскольку выполняются соотношения

$$\sum_{j=0}^{3N+3}\left(\frac{\partial \mathcal{F}_{1i}}{\partial y_j}\mathcal{F}_{2j} - \frac{\partial \mathcal{F}_{2i}}{\partial y_j}\mathcal{F}_{1j}\right) = 0,$$

которые проверяются непосредственными вычислениями. Условия (4.22) являются условиями совместности алгебраических уравнений, полученных из (4.19) , (4.20) после подстановки (4.2I) и приравнивания коэффициентов. Справедливо и обратное , если имеет место условие (4.22) и функции $f_k(x,t)$, $\varphi_k(x,t)$, $\chi_k(x,t)$ удовлетворяют системе автономных нелинейных дифференциальных уравнений (4.24) , то очевидно (по построению уравнений (4.24), полиномиальные функции (4.2I) удовлетворяют системам уравнений (4.I9) , (4.20). Теорема доказана.

I.4.3. Для эффективной реконструкции решений уравнений (4.I) рассмотрим дифференциальные уравнения на нули $\mu_j(x,t)$, $j=1,2,\dots,N$ функции $\varphi(x,t,\lambda)$:

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial t} = 2i\sqrt{P(\mu_j)}\, f_{N+1}^{-1}\prod_{i\neq j}^{N}(\mu_j-\mu_i)^{-1}, \tag{4.25}$$

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial x} = \frac{-2i\sqrt{P(\mu_j)}}{f_{N+1}\prod\limits_{i\neq j}^{N}(\mu_j-\mu_i)}\left[1+\frac{\rho}{E\mu_j}\right], \tag{4.26}$$

где $P(\lambda) = f^2 - \varphi\chi - \prod\limits_{i=1}^{2N+2}(\lambda - e_j) = \sum\limits_{k=0}^{2N+2}\rho_k\lambda^k$ – полином с постоянными коэффициентами.

Уравнения (4.25), (4.26) проанализируем при помощи методов алгебраической геометрии. Пусть Γ - гиперэллиптическая риманова поверхность функции $w=\sqrt{P(z)}$, $w, z \in \mathbb{C}^1$, реализуемая двулистной поверхностью наложения комплексной плоскости $\mathbb{C}^1$ с непересекающимися разрезами $(\infty, e_1], \dots, [e_{2j}, e_{2j+1}], \dots, [e_{2N+2}, \infty)$. Алгебраический род поверхности Γ равен N. Возьмем, как обычно, за циклы a_j гладкие кривые, лежащие на верхнем листе и обходящие по часовой стрелке разрез $[e_{2j}, e_{2j+1}]$, а за циклы b_j - гладкие кривые, которые начинаются в точке e_{2j+1}, проходят по верхнему листу в точку e_{2N+2} и по нижнему листу возвращаются в исходные точки. На Γ существует нормированный базис абелевых интегралов первого рода [97,30]

$$\omega_j(z) = \sum_{k=0}^{N-1} C_j^{(k)} \int_0^z \lambda^k \left[P(\lambda) \right]^{-\frac{1}{2}} d\lambda, \tag{4.27}$$

$$\oint_{a_i} d\omega_j(z) = \delta_{ij}, \qquad \oint_{b_i} d\omega_j(z) = B_{ij},$$

при помощи которого строим отображение Абеля для уравнений (4.25), (4.26):

$$\nu_j(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \omega_j(\mu_i(x,t)).$$

Легко показать, что точки $\mu_i(x,t)$ решают следующую проблему обращения Якоби абелевых интегралов на Γ:

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_j(\mu_i(x,t)) = 2i(t-x)\, C_j^{(N-1)} - 2i\, C_j^{(0)} \gamma(x) + \sum_{i=1}^{N} \omega_j(\mu_i(0,0)) \tag{4.28}$$

где функция $\gamma = \gamma(x)$ удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\rho(x,t)\, E^{-1}(x,t)}{\prod\limits_{i=1}^{N} \mu_i(x,t)}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} = 0, \quad \gamma(0) = 0. \tag{4.29}$$

Пусть $\theta(\vec{u}) = \sum\limits_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^N} \exp\{2\pi i(\vec{m},\vec{u}) + \pi i(B\vec{m},\vec{m})\}, \ \vec{u} \in \mathbb{C}^N$

- стандартная многомерная тэта-функция Римана , построенная по матрице B - периодов базиса абелевых интегралов (4.27).

Решая проблему обращения Якоби (4.28) , находим [30]:

$$\sum_{j=1}^{N} \mu_j(x,t) = \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\theta(\vec{\alpha}t + \vec{\beta}x + \vec{\nu}\gamma(x) + \vec{\eta} + \vec{\gamma})}{\theta(\vec{\alpha}t + \vec{\beta}x + \vec{\nu}\gamma(x) - \vec{\eta} + \vec{\gamma})} + \sum_{j=1}^{N} \oint_{a_j} z\, d\omega_j(z), \tag{4.30}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \ln \mu_j(x,t) = \ln \frac{\theta(\vec{\alpha}t + \vec{\beta}x + \vec{\nu}\gamma(x) + \vec{\eta} + \vec{\gamma})}{\theta(\vec{\alpha}t + \vec{\beta}x + \vec{\nu}\gamma(x) - \vec{\eta} + \vec{\gamma})} + 2\pi i m +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \oint_{a_j} \ln z\, d\omega_j(z) + \ln \frac{\theta(\vec{\alpha}t + \vec{\beta}x + \vec{\nu}\gamma(x) - \vec{\xi} + \vec{\gamma})}{\theta(\vec{\alpha}t + \vec{\beta}x + \vec{\nu}\gamma(x) + \vec{\xi} + \vec{\gamma})},$$

где

$$\alpha_j = -\beta_j = 2i\, C_j^{(N-1)}, \quad \nu_j = 2i\, C_j^{(0)}, \quad \eta_j = \omega_j(\infty^+),$$

$$\xi_j = \omega_j(0^+), \quad \gamma_j = \sum_{i=1}^{N} \omega_j(\mu_i(0,0)) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} B_{ij} - \frac{j}{2},$$

m - произвольное целое число. Здесь мы учли, что точкам $z=\infty$, $z=0 \in \mathbb{C}^1$ соответствуют точки $z=\{\infty^+,\infty^-\}, z=\{0^+,0^-\} \in \Gamma$.

I.4.4. Пусть задано $\rho(x,0)\, E^{-1}(x,0) = g(x)$, где $g(x)$ - почти-периодическая функция по x . Тем самым для уравнений (4.I) задан аналог почти-периодической задачи Коши , причем начальные данные для функции $E(x,t)$ определяются параметрами поверхности Γ . Так как функция $A(x,t) = \prod\limits_{i=1}^{N} \mu_i(x,t)$ согласно (4.30) определена явно , то из (4.29) находим дифференциальное уравнение для функции $\gamma(x)$:

$$\frac{d}{dx}\gamma(x) = g(x)\,A^{-1}(x,0). \tag{4.31}$$

Отметим , что , задаваясь почти-периодической функцией $\gamma(x)$, по формуле (4.3I) можно описать класс данных Коши $g(x)$ для уравнений (4.I), для которых решения можно получить в квадратурах.

По известной функции $\gamma(x)$ из (4.29) находим:

$$\rho(x,t)\,E^{-1}(x,t) = A(x,t)\,A^{-1}(x,0)\,g(x). \tag{4.32}$$

Чтобы определить значение $E(x,t)$ в явном виде, воспользуемся дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln E = -2i\left(\sum_{j=1}^{N}\mu_j(x,t) + f_N f_{N+1}^{-1}\right), \tag{4.33}$$

которое следует из соотношений (4.20).- (4.22). Поскольку , согласно (4.30) выражение $\sum\limits_{j=1}^{N}\mu_j(x,t)$ известно , то интегрируя (4.33), находим функцию $E(x,t)$ явно. Подставляя полученное значение $E(x,t)$ в формулу (4.32), определяем функцию $\rho(x,t)$.Из третьего уравнения системы (4.I) легко найти неизвестную функцию $n(x,t)$. Имеем

$$n(x,t) = \frac{i}{2E(x,t)}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A(x,t)}{A(x,0)}E(x,t)g(x)\right). \tag{4.34}$$

Используя соотношения (4.32)-(4.34) и уравнения (4. I) получаем ограничения на выбор начальных данных - функций $g(x)$.Имеем:

$$\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x}\ln\frac{E}{\rho} = 2i\,\frac{\partial\frac{\rho}{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{E(x,t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A(x,t)}{A(x,0)}E(x,t)g(x)\right)\right) - \tag{4.35}$$

$$- \frac{\partial^2}{\partial t^2}\ln E(x,t),$$

где величины $A(x,t)$, $E(x,t)$ согласно (4.30), (4.33) известны. Подставив соотношение (4.32), в уравнение (4.35), получим уравнение на функцию $g(x)$.

Сформулируем основной результат в виде следующей конструктивной теоремы.

Т е о р е м а 4.2. Пусть заданы произвольные попарно-разные комплексные числа e_j , $j=1,2,\ldots,2N+2$, и $\mu_{j,0}=\mu_j(0,0)$, $j=1,2,\ldots,N$, которые удовлетворяют следующему алгебраическому соотношению:

$$\prod_{j=1}^{2N+2}(\lambda-e_j)=|E(0,0)|^2\prod_{j=1}^{N}(\lambda-\mu_{j,0}^*)(\lambda-\mu_{j,0})=f^2(\lambda),$$

где $f(\lambda)$ - полином степени $N+1$ с действительными коэффициентами.

Тогда система нелинейных уравнений (4.I) имеет точные почти-периодические решения , сводимые к квадратурам , которые находятся по изложенному выше алгоритму.

ГЛАВА II

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ УСРЕДНЕНИЯ И МЕТОДОМ ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

§ 2.1. Слабо нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами и с запаздыванием. I. Построение асимптотических приближений.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами и с запаздыванием

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\lambda_1(\tau)\frac{dx(t)}{dt}+\lambda_2(\tau)\frac{dx(t-\Delta(\tau))}{dt}+\omega_1^2(\tau)x(t)+ \tag{1.1}$$
$$+\omega_2^2(\tau)x(t-\Delta(\tau))=\varepsilon f(\tau,\theta,x(t),x(t-\Delta(\tau)),\dot{x}(t),\dot{x}(t-\Delta(\tau))),$$

где $\tau=\varepsilon t$ – "медленное" время, $\frac{d\theta}{dt}=\nu(\tau)$ – мгновенная частота внешней периодической силы.

Пусть $f(\ldots)$ $-2\pi-$ периодическая по θ функция, представимая в виде

$$f(\tau,\theta,x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{|n|\le N} e^{in\theta} f_n(\tau,x_1,x_2,x_3,x_4),$$

где коэффициенты $f_n(\tau,x_1,\ldots,x_4)$ – полиномиальные функции переменных $x_1,\ldots,x_4$ и бесконечно дифференцируемые по τ .

Предположим также , что невозмущенное($\varepsilon=0,\ \tau=const$)уравнение (1.1) имеет семейство периодических решений $x(t)=a\cos(\omega t+\varphi)$, где a , φ – произвольные постоянные , $\omega=\omega(\tau)$ – собственная частота колебательной системы (I.I), удовлетворяющая системе характеристических уравнений

$$D_1(\omega) = -\omega^2 + \lambda_2 \omega \sin \omega \Delta + \omega_1^2 + \omega_2^2 \cos \omega \Delta = 0, \quad (I.2)$$

$$D_2(\omega) = \omega \lambda_1 + \lambda_2 \omega \cos \omega \Delta - \omega_2^2 \sin \omega \Delta = 0.$$

Рассмотрим задачу построения периодических решений уравнения (I.I) близких к периодическим решениям порождающего уравнения. Такая задача для частных случаев уравнения (I.I) рассматривалась в работах [58,67,79]. Изучению аналогичной задачи для других дифференциальных уравнений с запаздыванием посвящены исследования [40, 57, 58,68,92-96,112]. Для решения поставленной задачи применим асимптотический метод Крылова-Боголюбова-Митропольского [7,53-55, 58,70].

При построении асимптотических решений уравнений, описывающих нелинейные колебательные системы, различают нерезонансный и резонансные случаи [7]. Обычно находят решения отдельно для каждого из этих случаев. Для уравнения (I.I) из-за зависимости собственной частоты $\omega(\tau)$ и частоты внешней силы $\nu(\tau)$ от медленного времени τ такого разграничения , как известно [54,58], делать нельзя , так как при изменении этих величин с течением времени возможны переходы колебательной системы из одного , например , нерезонансного состояния в другое (резонансное) и наоборот.

Поэтому приближенное решение уравнения (I.I) ищем в виде

$$x(t) = a \cos \psi + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i(\tau, a, \theta, \psi), \quad (I.3)$$

где $\psi = \frac{p}{q}\theta + \psi$, функции $u_i(\tau, a, \theta, \psi)$ – 2π– периодические по θ и ψ , p и q – некоторые взаимно простые числа, величины a и ψ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{da}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i A_i(\tau, a, \psi), \tag{I.4}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i B_i(\tau, a, \psi),$$

функции A_i, B_i - 2π - периодические по ψ . Кроме того , для однозначного определения функций $u_i(\tau, a, \theta, \psi)$ будем предполагать отсутствие первых гармоник ψ в их рядах Фурье, т.е.

$$\int_0^{2\pi} u_k(\tau, a, \theta, \psi)\, e^{\pm i\psi}\, d\psi = 0. \tag{I.5}$$

Чтобы получить уравнения для определения функций A_i, B_i, u_i , как известно , необходимо в уравнение (I.I) подставить выражение (I.3) с учетом уравнений (I.4), расположить слагаемые в обеих частях полученного равенства по степеням ε и затем коэффи - циенты при одинаковых степенях ε приравнять.

Введем следующие , связанные с уравнениями (I.I), (I.4) и полезные в дальнейшем , дифференциальные операторы и обозначения:

$$P_0 = \nu\frac{\partial}{\partial\theta} + \omega\frac{\partial}{\partial\psi}, \quad P_1 = \frac{\partial}{\partial\tau} + A_1\frac{\partial}{\partial a} + B_1\frac{\partial}{\partial\psi}, \quad \ell = \omega - \frac{p}{q}\nu,$$

$$P_k = A_k\frac{\partial}{\partial a} + B_k\frac{\partial}{\partial\psi}, \quad G_k = A_k\frac{\partial}{\partial a} + B_k\frac{\partial}{\partial\psi}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

$$Q_0 = \ell\frac{\partial}{\partial\psi}, \quad G_1 = \frac{\partial}{\partial\tau} + A_1\frac{\partial}{\partial a} + B_1\frac{\partial}{\partial\psi}, \quad T_{0m} = \delta_{0m}, \tag{I.6}$$

$$T_{km} = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = m \\ i_1, \dots, i_k \geq 0}} G_{i_1} G_{i_2} \dots G_{i_k}, \quad k \in N, \ m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\mathcal{N}_m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\Delta)^{k+1}}{(k+1)!} T_{km}, \quad \mathcal{O} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\Delta)^{k+1}}{(k+1)!} Q_1 Q_0^{k}.$$

$\mathcal{R} = \mathcal{N}_0 Q_0 + 1$, $\tilde{P}_0 = \omega \frac{\partial}{\partial \psi}$, δ_{mn} - символ Кронекера, операторы $Q_i, T_{km}, \mathcal{N}_m, \mathcal{O}, \mathcal{R}$ действуют на функции A_k, B_k, а операторы $\tilde{P}_0$, P_i - на функции $\mathcal{U}_k$. Условимся, что переменные θ, φ, ψ', входящие в выражения функций $A_k, B_k, \mathcal{U}_k$, попарно-независимые. Это предположение используем при вычислении результата действия операторов P_i, Q_i и их произведений на функции $A_k, B_k, \mathcal{U}_k$. Обозначения (I.6) позволяют более кратно записать выражения и уравнения, используемые далее.

Учитывая обозначения (I.6) и уравнения (I.4), при помощи несложных вычислений находим:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \varepsilon Q_0 A_1 + \varepsilon^2 \{ Q_1 A_1 + Q_0 A_2 \} + \varepsilon^3 \dots,$$

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = \varepsilon \left\{ \frac{dl}{d\tau} + Q_0 B_1 \right\} + \varepsilon^2 \{ Q_1 B_1 + Q_0 B_2 \} + \varepsilon^3 \dots, \qquad (I.7)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d^k a}{dt^k} = \varepsilon T_{k-1,0} A_1 + \varepsilon^2 \{ T_{k-1,1} A_1 + T_{k-1,0} A_2 \} + \varepsilon^3 \dots,$$

$$\frac{d^k \psi}{dt^k} = \varepsilon T_{k-1,0} B_1 + \varepsilon^2 \{ T_{k-1,1} B_1 + T_{k-1,0} B_2 \} + \varepsilon^{k-1} \frac{d^{k-1} l}{d\tau^{k-1}} + \varepsilon \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d x(t)}{dt} = -a\omega \sin\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \{ -a B_k \sin\varphi + A_k \cos\varphi +$$

$$+ P_0 \mathcal{U}_k + g_k(\tau, a, \psi, \varphi, \theta) \}.$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-a\omega^2\cos\varphi+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\{-(2\omega A_k+aQ_0B_k)\sin\varphi+$$

$$+(Q_0A_k-2a\omega B_k)\cos\varphi+P_0^2\mathcal{U}_k+S_k(\tau,a,\psi,\varphi,\theta)\},$$

где, например, $g_1=0;\ g_2=P_1\mathcal{U}_1,\ S_1=-a\frac{d\omega}{d\tau}\sin\varphi+P_0^2\mathcal{U}_1$,

$$S_2=-(2A_1B_1+aQ_1B_1)\sin\varphi+(Q_1A_1-aB_1^2)\cos\varphi+$$

$$+(P_1P_0+P_0P_1+Q_0P_1)\mathcal{U}_1. \tag{I.8}$$

Для записи функций $x(t-\Delta(\tau))$, $\frac{dx(t-\Delta(\tau))}{dt}$ в виде асимптотического ряда по степеням ε , представим функции $\theta(t-\Delta(\tau)),\ a(t-\Delta(\tau)),\ \psi(t-\Delta(\tau))$ через асимптотические по ε ряды. Рассмотрим формулы

$$\theta(t-\Delta)=\theta(t)-\Delta\frac{d\theta}{dt}+\dots,$$

$$a(t-\Delta)=a(t)-\Delta\frac{da}{dt}+\dots,$$

$$\psi(t-\Delta)=\psi(t)-\Delta\frac{d\psi}{dt}+\dots,$$

и воспользуемся соотношениями (I.6), (I.7). Имеем:

$$a(t-\Delta)=a(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\Delta)^n}{n!}\frac{d^na}{dt^n}=a(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\Delta)^n}{n!}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\left\{\sum_{m=0}^{k-1}T_{n-1,m}A_{k-m}\right\}=a(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\times \tag{I.9}$$

$$\times\left\{\sum_{m=0}^{k-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\Delta)^n}{n!}T_{n-1,m}\right)A_{k-m}\right\}=a(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\left(\sum_{m=0}^{k-1}\mathcal{X}_mA_{k-m}\right).$$

Аналогично получаем

$$\theta(t-\Delta(\tau)) = \theta(t) - \Delta(\tau)\nu(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k} \frac{(-\Delta)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{d^{k}\nu}{d\tau^{k}}, \qquad (I.10)$$

$$\psi(t-\Delta(\tau)) = \psi(t) - \Delta(\tau) l(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k} \left[\frac{(-\Delta)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{d^{k} l}{d\tau^{k}} + \right. \qquad (I.11)$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{k-1} \varkappa_m B_{k-m} \right]$$

Тогда

$$x(t-\Delta) = a\cos(\varphi-\omega\Delta) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k} \{ \varkappa_0 A_k \cos(\varphi-\omega\Delta) -$$

$$- a\varkappa_0 B_k \sin(\varphi-\omega\Delta) + U_k(\tau, a, \theta-\nu\Delta, \varphi-\omega\Delta) + \qquad (I.12)$$

$$+ q_k(\tau, a, \psi, \varphi, \theta),$$

$$\frac{dx(t-\Delta)}{dt} = -a\omega\sin(\varphi-\omega\Delta) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k} \{ (\varkappa A_k - a\omega\varkappa_0 B_k) \times$$

$$\times \cos(\varphi-\omega\Delta) - (\omega\varkappa_0 A_k - a\varkappa B_k) \sin(\varphi-\omega\Delta) +$$

$$+ P_0 U_k(\tau, a, \theta-\nu\Delta, \varphi-\omega\Delta) + r_k(\tau, a, \psi, \varphi, \theta) \},$$

где, например,

$$q_1 = -\frac{a\Delta^2}{2!} \frac{d\omega}{d\tau} \sin(\varphi-\omega\Delta),$$

$$q_2 = \left[\mathfrak{N}_1 A_1 - \frac{a}{2} \left(\mathfrak{N}_0 B_1 + \frac{\Delta^2}{2} \frac{d\omega}{d\tau} \right)^2 \right] \cos(\varphi - \omega\Delta) -$$

$$- \left[\mathfrak{N}_0 A_1 \left(\mathfrak{N}_0 B_1 + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{d\omega}{d\tau} \right) - \frac{a\Delta^3}{3!} \frac{d^2\omega}{d\tau^2} \right] \sin(\varphi - \omega\Delta) +$$

$$+ \left[\mathfrak{N}_0 P_1 + \frac{\Delta^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial\tau} P_0 - P_0 \frac{\partial}{\partial\tau} \right) \right] \mathcal{U}_1 (\tau, a, \theta - \nu\Delta, \varphi - \omega\Delta),$$

$$r_1 = - \frac{a\omega\Delta^2}{2!} \frac{d\omega}{d\tau} \cos(\varphi - \omega\Delta) + \frac{a\, d(\omega\Delta)}{d\tau} \sin(\varphi - \omega\Delta),$$

$$r_2 = \Big[\mathfrak{N} A_1 - \frac{d\Delta}{d\tau} \mathfrak{N} A_1 - a \left(B_1 - \frac{d(\omega\Delta)}{d\tau} \right) \mathfrak{N}_0 B_1 -$$

$$- \frac{a\Delta^2}{2!} \frac{d\omega}{d\tau} \left(B_1 - \frac{d(\omega\Delta)}{d\tau} \right) + Q_0 \left(\mathfrak{N}_1 A_1 - \frac{a}{2} \left(\mathfrak{N}_0 B_1 + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{d\omega}{d\tau} \right)^2 \right) +$$

$$+ \omega \left(- \mathfrak{N}_0 A_1 \left(\mathfrak{N}_0 B_1 + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{d\omega}{d\tau} \right) - a \mathfrak{N}_1 A_1 + \frac{a\Delta^3}{3!} \frac{d^2\omega}{d\tau^2} \right) \Big] \times$$

$$\times \cos(\varphi - \omega\Delta) + \Big[- a \mathfrak{N} A_1 - a \frac{d\Delta}{d\tau} \mathfrak{N} B_1 - \left(B_1 - \frac{d(\omega\Delta)}{d\tau} \right) \mathfrak{N}_0 A_1 -$$

$$- A_1 \mathfrak{N}_0 B_1 - \frac{\Delta^2}{2!} A_1 \frac{d\omega}{d\tau} - \frac{a}{2!} \frac{d}{d\tau} \left(\Delta^2 \frac{d\omega}{d\tau} \right) - \omega \Big(\mathfrak{N}_1 A_1 -$$

$$- \frac{a}{2} \left(\mathfrak{N}_0 B_1 + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{d\omega}{d\tau} \right)^2 - Q_0 \left(\mathfrak{N}_0 A_1 \left(\mathfrak{N}_0 B_1 + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{d\omega}{d\tau} \right) + \right.$$

$$\left. + a \mathfrak{N}_1 B_1 - \frac{a\Delta^3}{3!} \frac{d^2\omega}{d\tau^2} \right) \Big] \sin(\varphi - \omega\Delta) + \Big[P_1 - \frac{\partial}{\partial\tau} (\Delta P_0) +$$

$$+ \mathfrak{N}_0 P_1 + \frac{\Delta^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial\tau} P_0^2 - P_0^2 \frac{\partial}{\partial\tau} \right) + \mathfrak{N}_0 Q_0 P_1 \Big] \mathcal{U}_1 (\tau, a, \theta - \nu\Delta, \varphi - \omega\Delta).$$

В этих соотношения везде $A_K = A_K(\tau, a, \psi)$, $B_K = B_K(\tau, a, \psi)$, $a = a(t), \psi = \psi(t), \varphi = \varphi(t)$.

Подставляя выражения (I.3), (I.8), (I.12) в правую часть уравнения (I.I) и располагая результат по степеням параметра ε, находим

$$\varepsilon f(\tau,\theta,x(t),x(t-\Delta),\dot{x}(t),\dot{x}(t-\Delta))=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k} f_{k-1}(\tau,a,\theta,\varphi),$$

где, например,

$$f_0 = f(\tau,\theta,a\cos\varphi,a\cos(\varphi-\omega\Delta),-a\omega\sin\varphi,-a\omega\sin(\varphi-\omega\Delta)),$$

$$f_1 = U_1(\tau,a,\theta,\varphi)\frac{\partial f(\cdot)}{\partial x(t)}+(\mathcal{N}_0 A_1\cos(\varphi-\omega\Delta)-a(\mathcal{N}_0 B_1+$$

$$+\Delta^2\frac{d\omega}{d\tau})\sin(\varphi-\omega\Delta)+U_1(\tau,a,\theta-\nu\Delta,\varphi-\omega\Delta))\frac{\partial f(\cdot)}{\partial x(t-\Delta)}+$$

$$+(A_1\cos\varphi-aB_1\sin\varphi+P_0U_1(\tau,a,\theta,\varphi))\frac{\partial f(\cdot)}{\partial \dot{x}(t)}+\Big[(\mathcal{R}A_1-$$

$$-a\omega\mathcal{N}_0B_1\cos(\varphi-\omega\Delta)-(a\mathcal{R}B_1+\omega\mathcal{N}_0A_1)\sin(\varphi-\omega\Delta)+$$

$$+P_0U_1(\tau,a,\theta-\nu\Delta,\varphi-\omega\Delta)+z_1(\tau,a,\psi,\varphi,\theta)\Big]\frac{\partial f(\cdot)}{\partial \dot{x}(t-\Delta)},$$

величины $\frac{\partial f(\cdot)}{\partial x(t)}, \ldots, \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \dot{x}(t-\Delta)}$ вычислены при значениях

$$x(t)=a\cos\varphi, \qquad x(t-\Delta)=a\cos(\varphi-\omega\Delta),$$

$$\dot{x}(t)=-a\omega\sin\varphi, \qquad \dot{x}(t-\Delta)=-a\omega\sin(\varphi-\omega\Delta).$$

Полученные выражения подставим в уравнение (I.I) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим:

при $\varepsilon=0$

$$-a\omega^2\cos\varphi-\lambda_1 a\omega\sin\varphi-\lambda_2 a\omega\sin(\varphi-\omega\Delta)+$$
$$+\omega_1^2 a\cos\varphi+\omega_2^2 a\cos(\varphi-\omega\Delta)=0,$$

(это равенство в силу (I.2) выполняется тождественно);
при ε^k, $k \in N$

$$\left(P_0^2+\lambda_1 P_0+\omega_1^2\right)u_k(\tau,a,\theta,\varphi)+\left(\lambda_2 P_0+\omega_2^2\right)u_k(\tau,a,\theta-\nu\Delta,\varphi-\omega\Delta)= \tag{I.13}$$

$$=\mathcal{F}_k(\tau,a,\varphi,\theta)+(\mathcal{Z}A_k+a\mathcal{E}B_k\cos\varphi+(\mathcal{E}A_k-a\mathcal{Z}B_k)\sin\varphi,$$

где
$$\mathcal{F}_k=f_{k-1}-\lambda_1 g_k-\lambda_2 r_k+\omega_2^2 q_k-s_k,$$

$$\mathcal{Z}=Q_0+\lambda_1+\lambda_2(\cos\omega\Delta\,\mathcal{R}+\omega\sin\omega\Delta\,\mathcal{R}_0)+\omega_2^2\cos\omega\Delta\,\mathcal{R}_0, \tag{I.14}$$

$$\mathcal{E}=-2\omega+\lambda_2(\sin\omega\Delta\,\mathcal{R}-\omega\cos\omega\Delta\,\mathcal{R}_0)+\omega_2^2\sin\omega\Delta\,\mathcal{R}_0.$$

Явный вид функций $\mathcal{F}_k, f_{k-1}, g_k, r_k, q_k, s_k$, $k \in N$ можно найти после последовательного определения выражений для A_j, B_j, u_j, $1 \le j \le k-1$. Для этого, пользуясь 2π- периодичностью функций $A_j, B_j, u_k, \mathcal{F}_k$ по ψ, φ, θ представим эти функции с помощью их рядов Фурье:

$$(u_k,\mathcal{F}_k)=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}(u_{kmn}(\tau,a),\mathcal{F}_{kmn}(\tau,a))e^{i(m\theta+n\varphi)}, \tag{I.15}$$

$$(A_j,B_j)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(A_{jk}(\tau,a),B_{j,k}(\tau,a)\right)e^{ik\psi}, \tag{I.16}$$

где

$$\left(u_{kmn},\mathcal{F}_{kmn}\right)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(u_k,\mathcal{F}_k)(\tau,a,\theta,\varphi)e^{-i(m\theta+n\varphi)}\,d\theta\,d\varphi,$$

$$\left(A_{jk},B_{jk}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(A_j,B_j)(\tau,a,\psi)e^{-ik\psi}\,d\psi,$$

и выделим резонансные гармоники в разложении функции $\mathcal{F}_k(\tau,a,\theta,\varphi)$ в ряд Фурье:

$$\mathcal{F}_K(\tau,a,\theta,\varphi) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_{Kmn}(\tau,a)\, e^{i(m\theta+n\varphi)} =$$

$$= \sum_{(m,n)\in\Lambda} \mathcal{F}_{Kmn}\, e^{i(m\theta+n\varphi)} + \sum_{(m,n)\notin\Lambda} \mathcal{F}_{Kmn}\, e^{i(m\theta+n\varphi)}, \tag{I.17}$$

где $\quad \Lambda = \Lambda_{p,q} = \{(m,n)\colon\ m,n\in\mathbb{Z},\ mq+(n\pm1)p=0\}.$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части равенства (I.17):

$$\sum_{(m,n)\in\Lambda} \mathcal{F}_{Kmn}\, e^{i(m\theta+n\varphi)} = \sum_{mq+(n+1)p=0} (\cdots) + \sum_{mq+(n-1)p=0} (\cdots) =$$

$$= \sum_{\substack{s=-\infty \\ q\mid s}}^{\infty} \left(\mathcal{F}_{K,-\frac{p}{q}s,s-1}\, e^{i\varphi} + \mathcal{F}_{K,-\frac{p}{q}s,s+1}\, e^{-i\varphi} \right) e^{is\varphi} = \tag{I.18}$$

$$= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left(\mathcal{F}_{K,-ps,qs-1}\, e^{i\varphi} + \mathcal{F}_{K,-ps,qs+1}\, e^{-i\varphi} \right) e^{iqs\varphi},$$

где $q\mid s$ означает , что число q делит число s .

Учитывая условие (I.5) и соотношения (I.17) , (I.18), записываем уравнения для определения функций A_K, B_K, U_K :

$$\mathcal{M}\, U_K(\tau,a,\theta,\varphi) + N\, U_K(\tau,a,\theta-\nu\Delta,\varphi-\omega\Delta) = \sum_{(m,n)\notin\Lambda} \mathcal{F}_{Kmn}(\tau,a)\, e^{i(m\theta+n\varphi)}, \tag{I.19}$$

$$\mathcal{L} A_k + a \mathcal{E} B_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{kn}(\tau,a) e^{in\psi},$$

$$\mathcal{E} A_k - a \mathcal{L} B_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{kn}(\tau,a) e^{in\psi}, \tag{I.20}$$

где

$$\mathcal{M} = P_0^2 + \lambda_1 P_0 + \omega_1^2, \quad \mathcal{N} = \lambda_2 P_0 + \omega_2^2,$$

$$G_{kn} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}_{k,-pm,qm-1} + \mathcal{F}_{k,-pm,qm+1}) e^{i(mq-n)\psi} d\psi =$$

$$= -\frac{1}{8\pi^3} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_k(\tau,a,\theta,\varphi) e^{im(p\theta - q\varphi)} \times \tag{I.21}$$

$$\times (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) e^{i(mq-n)\psi} d\theta\, d\varphi\, d\psi,$$

$$H_{kn} = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i\,(\mathcal{F}_{k,-pm,qm+1} - \mathcal{F}_{k,-pm,qm-1}) \times$$

$$\times e^{i(mq-n)\psi} d\psi = -\frac{i}{8\pi^3} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_k(\tau,a,\theta,\varphi) \times$$

$$\times e^{im(p\theta - q\varphi)} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) e^{i(mq-n)\psi} d\theta\, d\varphi\, d\psi. \tag{I.22}$$

Подставив в уравнения (I.19), (I.20) ряды Фурье (I.15),(I.16) функций $A_k, B_k, \mathcal{U}_k$, получим следующие линейные алгебраические уравнения для коэффициентов Фурье:

$$\left(\mathcal{M}_{mn} + \mathcal{N}_{mn} e^{-i\Delta(m\nu+n\omega)}\right) U_{kmn} = \begin{cases} \mathcal{F}_{kmn}, & (m,n) \notin \Lambda, \\ 0, & (m,n) \in \Lambda, \end{cases} \tag{I.23}$$

$$\mathcal{L}_n A_{kn} + a\,\mathcal{E}_n B_{kn} = G_{kn}, \quad \mathcal{E}_n A_{kn} - a\,\mathcal{L}_n B_{kn} = H_{kn}. \tag{I.24}$$

где

$$\mathcal{M}_{mn} = (im\nu + in\omega)^2 + i\lambda_1(m\nu + n\omega) + \omega_1^2,$$

$$\mathcal{N}_{mn} = i\lambda_2(m\nu + n\omega) + \omega_2^2,$$

$$\mathcal{L}_n = inl + \lambda_1 + \lambda_2 \cos\omega\Delta\, e^{-in\Delta l} + (\lambda_2\omega \sin\omega\Delta + \omega_2^2\cos\omega\Delta)\,\rho(nl),$$

$$\mathcal{E}_n = -2\omega + \lambda_2 \sin\omega\Delta\, e^{-in\Delta l} + (-\lambda_2\omega\cos\omega\Delta + \omega_2^2 \sin\omega\Delta)\,\rho(nl),$$

$\rho(nl) = -\Delta$, если $nl = 0$ и $\rho(nl) = \dfrac{\exp(-in\Delta l) - 1}{inl}$, если $nl \neq 0$

Справедлива следующая лемма.

Л е м м а I. А. Уравнения (I.23) совместны и имеют единственное решение

$$U_{kmn}(\tau, a) = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{F}_{kmn}(\tau, a)}{\mathcal{M}_{mn} + \mathcal{N}_{mn} e^{-i\Delta(m\nu+n\omega)}}, & \text{если } (m,n) \notin \Lambda, \\ 0, & \text{если } (m,n) \in \Lambda \end{cases} \tag{I.25}$$

тогда и только тогда, когда система характеристических уравнений (I.2) не имеет решений вида $\lambda = m\nu + n\omega$, $(m,n) \notin \Lambda$.

Б. Система уравнений (I.24) совместна и имеет единственное решение

$$A_{kn} = \frac{\mathcal{L}_n G_{kn} + \mathcal{E}_n H_{kn}}{\mathcal{L}_n^2 + \mathcal{E}_n^2}, \quad B_{kn} = \frac{\mathcal{E}_n G_{kn} - \mathcal{L}_n H_{kn}}{a(\mathcal{L}_n^2 + \mathcal{E}_n^2)}, \quad n \in Z \tag{I.26}$$

тогда и только тогда, когда для $\forall n \in \mathbb{Z}$ выполняются следующие условия:

$$\pm 2\omega - n\ell + i\lambda_1 + i\lambda_2 e^{i(\pm\omega - n\ell)\Delta} + (i\omega_2^2 \pm \lambda_2\omega)\rho(n\ell) e^{\pm i\omega\Delta} \neq 0. \quad (I.27)$$

Замечание I. Соотношения (I.27) при $n=0$ эквивалентны условию, что $\pm\omega$ являются простыми корнями системы характеристических уравнений (I.2).

Подставляя значения (I.25) в формулу (I.15), для функции $U_K(\tau,a,\theta,\varphi)$ получаем:

$$U_K(\tau,a,\theta,\varphi) = \sum_{(m,n)\notin\Lambda} \frac{e^{i(m\theta+n\varphi)} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_K(\tau,a,\theta,\varphi) e^{-i(m\theta+n\varphi)} d\theta d\varphi}{4\pi^2 (M_{mn} + N_{mn} e^{-i\Delta(m\nu+n\omega)})}. \quad (I.28)$$

Аналогично находим

$$A_K(\tau,a,\psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\psi}}{4\pi^3(\mathcal{Z}_n^2+\ell_n^2)} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_K(\tau,a,\theta,\varphi) \times \quad (I.29)$$

$$\times(-\mathcal{Z}_n\cos\psi + \ell_n\sin\psi)\exp[im(p\theta - q\varphi) + i(mq-n)\psi]\, d\theta\, d\varphi\, d\psi,$$

$$B_K(\tau,a,\psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\psi}}{4\pi^3 a(\mathcal{Z}_n^2+\ell_n^2)} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_K(\tau,a,\theta,\varphi) \times \quad (I.30)$$

$$\times(-\mathcal{Z}_n\sin\varphi - \ell_n\cos\varphi)\exp[im(p\theta - q\varphi) + i(mq-n)\psi]\, d\theta\, d\varphi\, d\psi$$

Известно [7,61,62], что многие свойства колебательных систем проявляются уже в первом приближении. Так, например, стационарные режимы, их устойчивость, зависимость параметров стационарных режимов часто можно изучать, используя уравнения лишь первого приближения. Поэтому выражения первого и первого улучшенного приближений для уравнения (I.1) выпишем в явном виде.

Улучшенное первое приближение имеет вид

$$x(t) = a\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right) + \varepsilon\, U_1\left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q}\theta+\psi\right),$$

где

$$U_1(\tau,a,\theta,\varphi) = \sum_{(m,n)\notin\Lambda} \frac{e^{i(m\theta+n\varphi)} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\tau,a,\theta,\varphi)\, e^{-i(m\theta+n\varphi)}\, d\theta\, d\varphi}{4\pi^2\left(M_{mn} + N_{mn} e^{-i\Delta(m\nu+n\omega)}\right)}, \quad (I.3I)$$

а функции $a = a(t)$, $\psi = \psi(t)$ удовлетворяют уравнениям первого приближения

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau,a,\psi) = \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\psi}}{4\pi^3(\mathcal{Z}_n^2+\mathcal{E}_n^2)} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\tau,a,\theta,\varphi) \times$$

$$\times(-\mathcal{Z}_n\cos\varphi + \mathcal{E}_n\sin\varphi)\, e^{i[m(p\theta-q\varphi)+(qm-n)\psi]}\, d\theta\, d\varphi\, d\psi,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega - \frac{p}{q}\nu + \varepsilon B_1(\tau,a,\psi) = \omega - \frac{p}{q}\nu + \frac{\varepsilon}{a}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\psi}}{4\pi^3(\mathcal{Z}_n^2+\mathcal{E}_n^2)} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\tau,a,\theta,\varphi)\times(-\mathcal{Z}_n\sin\varphi -$$

$$- \mathcal{E}_n\cos\varphi)\, \exp i\left[m(p\theta-q\varphi)+(qm-n)\psi\right] d\theta\, d\varphi\, d\psi$$

Для иллюстрации изложенного алгоритма построения приближенного решения рассмотрим примеры.

I. $$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t-2\pi) = \varepsilon\left[E\sin\theta - \alpha x^3(t-2\pi) - 2\beta\frac{dx(t-2\pi)}{dt}\right]. \quad (I.32)$$

Здесь $\dfrac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ - частота внешней силы, причем $\nu \approx 1$. Для уравнения (I.32) построим улучшенное первое приближение.

Решая характеристическое уравнение $-\omega^2 + e^{-2\pi i\omega} = 0$, находим

$\omega=1$. Следовательно , $p=q=1$, т.е. имеет место случай главного резонанса.

Решение уравнения (I.32) в улучшенном первом приближении ищем в виде $x(t)=a\cos(\theta+\psi)+\varepsilon U_1(\tau,a,\theta,\psi)$, где величины $a(t)$, $\psi(t)$ удовлетворяют уравнениям первого приближения

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A_1(\tau,a,\psi),\quad \frac{d\psi}{dt}=1-\nu+\varepsilon B_1(\tau,a,\psi). \tag{I.33}$$

Уравнения для определения $U_1,\ A_1,\ B_1$ принимают вид:

$$P_0^2 U_1(\tau,a,\theta,\psi)+U_1(\tau,a,\theta-2\pi,\theta+\psi-2\pi)=\frac{\alpha a^3}{4}\cos 3(\theta+\psi),$$

$$\left[(1-\nu)\frac{\partial}{\partial\psi}+\gamma_0\right]A_1-2aB_1=-\left[E\sin\psi+\frac{3}{4}\alpha a^3\right], \tag{I.34}$$

$$-2A_1-a\left[(1-\nu)\frac{\partial}{\partial\psi}+\gamma_0\right]B_1=E\cos\psi+2\beta a.$$

Решая уравнения (I.34), находим

$$U_1(\tau,a,\theta,\psi)=\frac{\alpha a^3}{32}\cos 3(\theta+\psi),$$

$$A_1(\tau,a,\psi)=a\,\frac{-8\beta+3\alpha\pi a^2}{8(\pi^2+1)}+\frac{E}{u^2+v^2}\left\{(-\gamma u+\delta)\cos\psi+(\gamma v+\sigma)\sin\psi\right\}, \tag{I.35}$$

$$B_1(\tau,a,\psi)=\frac{8\beta\pi+3\alpha\pi a^2}{8(\pi^2+1)}+\frac{E}{a(u^2+v^2)}\left\{(\gamma v+\sigma)\cos\psi+(\gamma u-\delta)\sin\psi\right\},$$

где

$$\varkappa=\Delta(\omega-\nu)=2\pi(1-\nu),\quad v=2\left[(1-\nu)^2+1-\cos\varkappa\right]\sin\varkappa,$$

$$u=4-\left(1-\nu+\frac{1-\cos\varkappa}{1-\nu}\right)^2+\frac{\sin^2\varkappa}{(1-\nu)^2},\quad 3-\nu+\frac{1}{1-\nu}=\gamma,$$

$$\delta=\frac{u\cos\varkappa+v\sin\varkappa}{1-\nu},\quad \sigma=\frac{-v\cos\varkappa+u\sin\varkappa}{1-\nu}$$

Таким образом , улучшенное первое приближение для уравнения

(I.32) имеет вид

$$x(t) = a\cos(\theta+\psi) + \varepsilon\frac{\alpha a^3}{32}\cos 3(\theta+\psi),$$

где a, ψ удовлетворяют уравнениям первого приближения (I.33), правые части которых определены соотношениями (I.35).

2. $$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \mu(\tau)\left(\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx(t-1)}{dt}\right) + \chi^2(\tau)\,x(t) +$$

$$+\left(4\pi^2 - \chi^2(\tau)\right)x(t-1) = \varepsilon\left[E\cos\theta - \alpha x^3(t-1) - 2\beta\frac{dx(t-1)}{dt}\right]. \quad (I.36)$$

Здесь $0 \le \chi^2(\tau) \le 4\pi^2$, $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ - частота внешней силы, причем $\nu \simeq 2\pi$.

Для уравнения (I.36) построим улучшенное первое приближение. Из характеристического уравнения

$$-\omega^2 + i\mu\omega(1 - e^{-i\omega}) + \chi^2 + (4\pi^2 - \chi^2)e^{-i\omega} = 0,$$

находим $\omega = 2\pi$. Следовательно, $p = q = 1$, т.е. имеет место случай главного резонанса.

Решение уравнения (I.36) в улучшенном первом приближении ищем в виде $x(t) = a\cos(\theta+\psi) + \varepsilon U_1(\tau, a, \theta, \psi)$, где величины $a(t)$, $\psi(t)$ удовлетворяют уравнениям первого приближения

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau, a, \psi), \quad \frac{d\psi}{dt} = 2\pi - \nu + \varepsilon B_1(\tau, a, \psi). \quad (I.37)$$

Функции U_1, A_1, B_1 определяются из уравнений:

$$(P_0^2 + \mu P_0 + \chi^2)\,U_1(\tau, a, \theta, \theta+\psi) + (-\mu P_0 + 4\pi^2 - \chi^2)\times$$

$$\times\, U_1(\tau, a, \theta-2\pi, \theta+\psi-2\pi) = -\frac{\alpha a^3}{8}\left(e^{3i(\theta+\psi)} + e^{-3i(\theta+\psi)}\right). \qquad (I.38)$$

$$\left[(2\pi-\nu)\frac{\partial}{\partial\psi} + \mu(1-\varkappa) + (4\pi^2-\chi^2)\varkappa_0\right]A_1 + a(-2\omega+\mu\omega\varkappa_0)B_1 =$$

$$= -\left(E\sin\psi + \frac{3}{4}\alpha a^3\right),$$

$$\left[-2\omega+\mu\omega\varkappa_0\right]A_1 - a\left[(2\pi-\nu)\frac{\partial}{\partial\psi} + \mu(1-\varkappa) + (4\pi^2-\chi^2)\varkappa_0\right]B_1 =$$

$$= E\cos\psi + 2\beta a\omega.$$

Решая уравнения (I.38) , находим

$$U_1(\tau, a, \theta, \theta+\psi) = \frac{\alpha a^3}{128\pi^2}\cos 3(\theta+\psi), \qquad (I.39)$$

$$A_1(\tau, a, \psi) = \frac{-2\beta(2+\mu)a\omega + \frac{3}{4}\alpha a^3(4\pi^2-\chi^2)}{\omega^2(2+\mu)^2 + (4\pi^2-\chi^2)^2} +$$

$$+ \frac{E}{u^2+v^2}\left[(-u\Gamma+v\gamma)\cos\psi + (u\gamma+v\Gamma)\sin\psi\right],$$

$$(I.40)$$

$$B_1(\tau, a, \psi) = \frac{2\beta\omega(4\pi^2-\chi^2) + \frac{3}{4}\alpha a^2\omega(2+\mu)}{\omega^2(2+\mu)^2 + (4\pi^2-\chi^2)^2} +$$

$$+ \frac{E}{a(u^2+v^2)}\left[(u\gamma+v\Gamma)\cos\psi + (u\Gamma-v\gamma)\sin\psi\right],$$

где

$$\gamma = -\mu(1-\cos(\omega-\nu))\frac{2\omega-\nu}{\omega-\nu} + \frac{(4\pi^2-\chi^2)\sin(\omega-\nu)}{\omega-\nu},$$

$$\Gamma = 3\omega-\nu+\mu\sin(\omega-\nu)\frac{2\omega-\nu}{\omega-\nu} + \frac{(4\pi^2-\chi^2)(1-\cos(\omega-\nu))}{\omega-\nu}, \quad \omega = 2\pi.$$

Улучшенное первое приближение для уравнения (I.37) имеет вид $x(t) = a\cos(\theta+\psi) + \varepsilon\frac{\alpha a^3}{128\pi^2}\cos 3(\theta+\psi)$, где $a(t)$, $\psi(t)$

удовлетворяют уравнениям первого приближения (I.37), правые части которых определяются соотношениями (I.40.

З а м е ч а н и е 2. Для уравнения

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+x(t)=\varepsilon\left[E\sin\theta-\alpha x^3(t)-2\beta\frac{dx(t)}{dt}\right] \tag{I.41}$$

в случае главного резонанса первое улучшенное приближение согласно[53] имеет вид

$$x(t)=a\cos(\theta+\psi)+\varepsilon\frac{3\alpha a^3}{32}\cos 3(\theta+\psi), \tag{I.42}$$

где $a(t)$, $\psi(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A_1(\tau,a,\psi)=\varepsilon\left(-\beta a-\frac{E}{1+\nu}\cos\psi\right), \tag{I.43}$$

$$\frac{d\psi}{dt}=1-\nu+\varepsilon B_1(\tau,a,\psi)=1-\nu+\varepsilon\left(\frac{3\alpha a^2}{8}+\frac{E}{a(1+\nu)}\sin\psi\right).$$

Уравнение (I.41) можно получить из уравнения (I.32), если вместо $\Delta=2\pi$ положить $\Delta=0$. Как следует из (I.35), (I.42), "внешний вид" улучшенного первого приближения для уравнений (I.32) и (I.41) один и тот же. Наличие запаздывания $\Delta=2\pi$ в уравнении (I.32) оказывает влияние на уравнения первого приближения, которым удовлетворяют амплитуда $a(t)$ и фаза $\psi(t)$ колебаний системы, описываемой уравнением (I.32). Отметим, что можно установить некоторое соответствие между уравнениями первого приближения для уравнений (I.32) и (I.41), а именно: функции $A_1(\tau,a,\psi)$, $B_1(\tau,a,\psi)$ в правой части уравнений (I.43) можно получить из (I.35) с помощью предельного перехода $\Delta\to 0$, при этом $\mathscr{X}\to 0$, $\vartheta\to 0$, $u\to(1+\nu)(3-\nu)$.

В этом предельном переходе ($\Delta\to 0$, уравнение (I.32) переходит в уравнение (I.4I)), формулы изложенного выше метода (при $\Delta \equiv 0$) совпадают с формулами асимптотического метода Крылова-Боголюбова-Митропольского для обыкновенных дифференциальных уравнений.

§ 2.2. Слабо нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами и с запаздыванием. П. О сходимости рядов $\mathcal{R}_m A_n$, $\mathcal{R}_m B_n$, рядов для функций $\mathcal{U}_k(\tau, a, \theta, \varphi)$ и дифференцируемости функций $A_n(\tau, a, \psi)$, $B_n(\tau, a, \psi)$, $\mathcal{U}_k(\tau, a, \theta, \varphi)$.

При построении асимптотических приближений для уравнения (I.I) в § 2.I мы оперировали с выражениями вида $\mathcal{R}_m A_n$, $\mathcal{R}_m B_n$ и частными производными функций $A_n(\tau, a, \psi)$, $B_n(\tau, a, \psi)$, $\mathcal{U}_n(\tau, a, \theta, \psi)$. Естественно возникают вопросы:

I) при каких условиях на функции $A_n(\tau, a, \psi)$, $B_n(\tau, a, \psi)$ ряды

$$\mathcal{R}_m A_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\Delta)^{k+1}}{(k+1)!} T_{km} A_n, \quad \mathcal{R}_m B_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\Delta)^{k+1}}{(k+1)!} T_{km} B_n \qquad (2.1)$$

сходятся абсолютно и равномерно по ψ ?

2) при каких условиях на функции $G_n(\tau, a, \psi)$, $H_n(\tau, a, \psi)$, $\mathcal{F}_k(\tau, a, \theta, \varphi)$, $f(\tau, \theta, x(t), x(t-\Delta), \dot{x}(t), \dot{x}(t-\Delta))$ существуют непрерывные частные производные порядка m (бесконечного порядка) функций $A_n(\tau, a, \psi)$, $B_n(\tau, a, \psi)$, $\mathcal{U}_n(\tau, a, \theta, \varphi)$?

При изучении этих вопросов используем разложения периодических и абсолютно интегрируемых функций в ряды Фурье и взаимосвязь между порядком роста коэффициентов Фурье периодической функции и существованием у этой функции производных [4].

Теорема 2.I. Предположим, что:

I) функции $A_n(\tau,a,\psi), B_n(\tau,a,\psi), n\in N$ - бесконечно-дифференцируемы по τ, a, ψ;

2) существуют функции $C_{mn}=C_{mn}(\tau,a)>0$, $L_{mn}=L_{mn}(\tau,a)$, $m,n=0,1,2,\ldots$ такие, что равномерно по ψ выполняются неравенства

$$\left|\frac{\partial^k(A_n,B_n)}{\partial\tau^i\,\partial a^j\,\partial\psi^{k-i-j}}\right|\le C_{mn}\,L_{mn}^{k-i-j}, \tag{2.2}$$

где $A_0\equiv 0,\ B_0=\ell(\tau),\quad 0\le i,j\le\min(k,m),\ i+j\le\min(k,m),$

$k,m,n=0,1,2,\ldots,\quad \left|\dfrac{\partial^\alpha(A,B)}{\partial u^\alpha}\right|=\max\left(\left|\dfrac{\partial^\alpha A}{\partial u^\alpha}\right|,\left|\dfrac{\partial^\alpha B}{\partial u^\alpha}\right|\right).$

Тогда ряды (2.I) сходятся абсолютно и равномерно по ψ.

Доказательство теоремы I проведем отдельно для $m=0$, $m=1$ и $m>1$.

При $m=0$ условие (2.2) принимает вид $\left|\dfrac{\partial^k(A_n,B_n)}{\partial\psi^k}\right|\le C_{0n}L_{0n}^k$, операторы T_{0k} равны Q_0^k и, следовательно, имеем

$$|\mathfrak{R}_0A_n|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\Delta)^{k+1}}{(k+1)!}T_{k0}A_n\right|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\Delta)^{k+1}}{(k+1)!}Q_0^kA_n\right|= \tag{2.3}$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\Delta)^{k+1}}{(k+1)!}\ell^k\frac{\partial^kA_n}{\partial\psi^k}\right|\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\Delta|\cdot|\Delta\ell|^k}{(k+1)!}C_{0n}L_{0n}^k.$$

Пусть теперь $m=1$. Тогда $\mathcal{T}_1=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-\Delta)^{k+1}}{k+1}T_{k,1}$,

$T_{k,1}=\sum\limits_{\tau=0}^{k-1}Q_0^{\tau}Q_1Q_0^{k-\tau-1}$, $k\in\mathcal{N}$. Далее, $Q_0^{\tau}Q_1Q_0^{k-\tau-1}A_n=$

$$=\ell^{\tau}\frac{\partial^{\tau}}{\partial\psi^{\tau}}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+A_1\frac{\partial}{\partial a}+B_1\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\ell^{k-\tau-1}\frac{\partial^{k-\tau-1}A_n}{\partial\psi^{k-\tau-1}}=(k-\tau-1)\,\ell^{k-2}\times$$

$$\times\frac{d\ell}{d\tau}\frac{\partial^{k-1}A_n}{\partial\psi^{k-1}}+\ell^{k-1}\left[\frac{\partial^{k}A_n}{\partial\tau\,\partial\psi^{k-1}}+\frac{\partial^{\tau}}{\partial\psi^{\tau}}\left(A_1\frac{\partial^{k-\tau}A_n}{\partial a\,\partial\psi^{k-\tau-1}}+B_1\frac{\partial^{k-\tau}A_n}{\partial\psi^{k-\tau}}\right]\right..$$

Отсюда, применяя формулу Лейбница дифференцирования произведения функций, получаем

$$\left|\sum_{\tau=0}^{k-1}Q_0^{\tau}Q_1Q_0^{k-\tau-1}A_n\right|\le\sum_{\tau=0}^{k-1}\left\{(k-\tau-1)\cdot\left|\frac{d\ell}{d\tau}\right|\cdot|\ell|^{k-2}C_{1n}L_{1n}^{k-1}+\right.$$

$$+|\ell|^{k-1}\left[C_{1n}L_{1n}^{k-1}+\sum_{i=0}^{\tau}C_{\tau}^{i}\left(C_{11}L_{11}^{i}C_{1n}L_{1n}^{k-i+1}\right)+\right. \tag{2.4}$$

$$\left.\left.+C_{11}L_{11}^{i}C_{1n}L_{1n}^{k-i}\right)\right]\Bigg\}\le C_{1n}\left\{\left|\frac{d\ell}{d\tau}\right|\cdot|\ell|^{k-2}\cdot C_n^2+|\ell|^{k-1}\times\right.$$

$$\times\left.\left[k-1+C_{11}(1+L_{1n})L_{1n}L_{11}^{-1}\left((L_{11}L_{1n}^{-1}+1)^k-1\right)\right]\right\}L_{1n}^{k-1}.$$

Пусть, наконец, $m>1$. В $T_{km}A_n$, как это следует из (I.6), входят слагаемые вида

$$Q_{i_1}Q_{i_2}\ldots Q_{i_k}A_n\,,\qquad i_1+i_2+\ldots+i_k=m. \tag{2.5}$$

Число таких слагаемых равно $\sum\limits_{i_1=0}^{m}\sum\limits_{i_2=0}^{m-i_1}\ldots\sum\limits_{i_k=0}^{m-i_1-\ldots-i_{k-1}}1=C_{m+k-1}^{m}$ и оценивается сверху числом m^k. Раскрыв в (2.5) скобки, получим не более 3-х слагаемых вида $\mathcal{D}_{i_1}\frac{\partial}{\partial y_{i_1}}\mathcal{D}_{i_2}\frac{\partial}{\partial y_{i_2}}\dots\mathcal{D}_{i_k}\frac{\partial}{\partial y_{i_k}}$ (здесь $\mathcal{D}_j$ равно δ_{j1}, A_j или B_j, а y_j - это τ, a или ψ), каждое из которых после выполнения всех операций дифференцирования будет суммой 2^{k-1} (с учетом равных нулю) слагаемых вида

$$E^{i_1 j_1 \dots i_k j_k}_{r_1 s_1 \dots r_k s_k} A_n = \mathcal{D}_{i_1}\frac{\partial^{j_1}\mathcal{D}_{i_2}}{\partial\tau^{r_1}\partial a^{s_1}\partial\psi^{j_1-r_1-s_1}}\dots\times$$

$$\times\frac{\partial^{j_t}\mathcal{D}_{i_{t+1}}}{\partial\tau^{r_t}\partial a^{s_t}\partial\psi^{j_t-r_t-s_t}}\quad\frac{\partial^{j_k}A_n}{\partial\tau^{r_k}\partial a^{s_k}\partial\psi^{j_k-r_k-s_k}},\tag{2.6}$$

$$r_\alpha, s_\alpha\ge 0,\ r_\alpha+s_\alpha\le j_\alpha\le\alpha,\ 1\le\alpha\le k,\ \sum_{\alpha=1}^{k} i_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{k} j_\alpha=m.$$

Пользуясь формулами (2.2), (2.6), оцениваем сверху величину $|T_{km}A_n|$. Имеем:

$$|T_{km}A_n|\le(6m)^k\max_{\substack{i_1 j_1 r_1 s_1\dots\\ \dots i_k j_k r_k s_k}}\left|E^{i_1 j_1\dots i_k j_k}_{r_1 s_1\dots r_k s_k}A_n\right|\le$$

$$\le(6m)^k C_{mi_1}C_{mi_2}L_{mi_2}^{j_1-r_1-s_1}\dots C_{mi_k}L_{mi_k}^{j_{k-1}-r_{k-1}-s_{k-1}}\times\tag{2.7}$$

$$\times C_{mn}L_{mn}^{j_k-r_k-s_k}\le CL^m(6mC)^k,$$

где

$$C=C(\tau,a)=\max(C_{m0},C_{m1},\dots,C_{mm},C_{mn}),$$

$$L=L(\tau,a)=\max(L_{m1},L_{m2},\dots,L_{mm},1).$$

Из неравенств (2.3), (2.4) и (2.7) по признаку Даламбера сходимости рядов следует, что ряд $\mathcal{T}_m A_n$, $m=0,1,2,\dots$ сходится абсолютно и равномерно по ψ . Тем самым доказана абсолютная и равномерная по ψ сходимость и ряда $\mathcal{N}_m B_n$, $m=0,1,2,\ldots$. Теорема 2.I. доказана.

Следствие. Если функции $A_n(\tau,a,\psi)$, $B_k(\tau,a,\psi)$ удовлетворяют условиям п.п.I,2 теоремы 2.I, то тогда и функции $A_n B_k, \mathcal{N}_m A_n, \mathcal{N}_m B_n$ также удовлетворяют условиям п.п.I,2 теоремы 2.I.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.I (см.[66]).

Исследуем условие (2.2). Достаточные условия выполнения неравенства (2.2) дают следующие леммы.

Лемма 2.I. Пусть:

I) функции $A_n(\tau,a,\psi), B_n(\tau,a,\psi), n\in N$ - тригонометрические полиномы по ψ , т.е.

$$\left(A_n(\tau,a,\psi), B_n(\tau,a,\psi)\right) = \sum_{|k|\le N_n} \left(A_{nk}(\tau,a), B_{nk}(\tau,a)\right) e^{ik\psi}; \qquad (2.8)$$

2) функции $A_{nk}(\tau,a)$, $B_{nk}(\tau,a)$ - m раз (бесконечно) непрерывно дифференцируемы по τ , a .

Тогда: I) для функций A_n , B_n выполняются неравенства (2.2), причем

$$C_{mn} = \max_{\substack{i,j\ge 0\\ i+j\le \min(k,m)}} \left| \frac{\partial^{i+j}(A_{nk}, B_{nk})}{\partial\tau^i\,\partial a^j} \right|, \quad L_{mn} = N_n;$$

2) функции $(\mathcal{N}_i A_n)(\tau,a,\psi), (\mathcal{N}_i B_n)(\tau,a,\psi), i=0,1,\ldots,m$ - тригонометрические полиномы степени не более

$$N_m + \max\{ i_1 N_1 + i_2 N_2 + \ldots + i_{n-1} N_{n-1}\}$$

с коэффициентами $m-i$ раз (бесконечно) непрерывно дифференцируемы по переменным τ , a (N_i - степень тригонометрических полиномов A_j, B_j, $1 \le j \le n-1$, $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \ge 0$,

$$i_1 1 + i_2 \cdot 2 + \ldots + i_{n-1} \cdot (n-1) = m;$$

3) ряды $\mathfrak{N}_i A_n$, $\mathfrak{N}_i B_n$, $i=1,2,\ldots,m$ сходятся абсолютно и равномерно по ψ.

Л е м м а 2.2. Пусть функции $G_n(\tau,a,\psi)$, $H_n(\tau,a,\psi)$ $n \in N$ - тригонометрические полиномы по ψ, т.е.

$$\left(G_n(\tau,a,\psi),\ H_n(\tau,a,\psi)\right) = \sum_{|k| \le N_n} \left(G_{nk}(\tau,a),\ H_{nk}(\tau,a)\right) e^{ik\psi}. \qquad (2.9)$$

Тогда функции $A_n(\tau,a,\psi)$, $B_n(\tau,a,\psi)$ - тригонометрические полиномы по ψ вида (2.8), причем

$$A_{nk} = \frac{\mathcal{Z}_k G_{nk} + \mathcal{E}_k H_{nk}}{\mathcal{Z}_k^2 + \mathcal{E}_k^2}, \quad B_{nk} = \frac{\mathcal{E}_k G_{nk} - \mathcal{Z}_k H_{nk}}{a(\mathcal{Z}_k^2 + \mathcal{E}_k^2)}, \qquad (2.10)$$

где

$$\mathcal{E}_k = -2\omega + \lambda_2 \sin\omega\Delta\, e^{-i\Delta k\ell} + (-\lambda_2\omega\cos\omega\Delta + \omega_2^2 \sin\omega\Delta)\rho(k\ell),$$

$$\mathcal{Z}_k = ik\ell + \lambda_1 + \lambda_2 \cos\omega\Delta \cdot e^{-i\Delta k\ell} + (\lambda_2\omega \sin\omega\Delta + \omega_2^2 \cos\omega\Delta)\rho(k\ell). \qquad (2.11)$$

Доказательство лемм 2.1, 2.2 несложно и поэтому его не приводим. Для иллюстрации леммы 2.1 рассмотрим $\mathfrak{N}_0 A_n$. Имеем:

$$\mathfrak{N}_0 A_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\Delta)^{k+1}}{(k+1)!} Q_0^k \left(\sum_{|m| \le N_n} A_{nm} e^{im\psi}\right) =$$

$$= \sum_{|m| \le N_n} A_{nm} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\Delta)^{k+1}}{(k+1)!} (im\ell)^k\right) e^{im\psi} = \sum_{|m| \le N_n} A_{nm}\, \rho(m\ell) e^{im\psi}.$$

Отметим, что лемма 2.2 следует из системы уравнений для функций $A_{nk}(\tau,a)$, $B_{nk}(\tau,a)$ (1.24).

Л е м м а 2.3. Предположим, что:

1) существуют непрерывные частные производные

$$\frac{\partial^{i+j+h}(G_n(\tau,a,\psi), H_n(\tau,a,\psi))}{\partial\tau^i\,\partial a^j\,\partial\psi^h}, \quad \begin{array}{l} 0\le i\le I\le H, \\ 0\le j\le J,\ 1\le h\le H; \end{array} \tag{2.12}$$

2) функции $\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \omega_1(\tau), \omega_2(\tau), \omega(\tau), \nu(\tau), \Delta(\tau)$ и их производные до I -го порядка включительно непрерывны;

3) выполнено неравенство (1.27).

Тогда существуют непрерывные частные производные

$$\frac{\partial^{i+j+h}(A_n(\tau,a,\psi), B_n(\tau,a,\psi))}{\partial\tau^i\,\partial a^j\,\partial\psi^h}, \quad \begin{array}{l} 0\le i\le I, \\ 0\le j\le J, \end{array} \tag{2.13}$$

$0\le h\le H-1$ при $i=0$ и $0\le h\le H-i$ при $i\ne 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим область $\mathcal{D}_R = \{(\tau,a,\psi):\ \tau^2+a^2<R^2,\ 0<\psi<2\pi\}$. Очевидно, что функции (2.12) равномерно непрерывны в $\mathcal{D}_R$. Пусть $G_{nk}(\tau,a)$, $H_{nk}(\tau,a)$ - коэффициенты Фурье функций $G_n(\tau,a,\psi)$, $H_n(\tau,a,\psi)$. Тогда

$$G_{nk}(\tau,a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_n(\tau,a,\psi)e^{-ik\psi}d\psi = \frac{1}{2\pi ik}\int_0^{2\pi}\frac{\partial G_n(\tau,a,\psi)}{\partial\psi}e^{-ik\psi}d\psi =$$

$$= \ldots = \frac{1}{2\pi(ik)^H}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^H G_n(\tau,a,\psi)}{\partial\psi^H}e^{-ik\psi}d\psi.$$

По теореме Римана [4] $\lim\limits_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^H G_n(\tau,a,\psi)}{\partial\psi^H}e^{-ik\psi}d\psi=0$, так как функция $\partial^H G_n/\partial\psi^H$ непрерывна и, следовательно, абсолютно интегрируема на $[0,2\pi]$. Тогда

$$\lim G_{nk}(\tau,a)\,|k|^H = 0. \tag{2.14}$$

Аналогично доказывается, что при $0 \le i \le I$, $0 \le j \le J$,

$$\lim_{|k|\to\infty} \frac{\partial^{i+j} G_{nk}(\tau,a)}{\partial \tau^i \partial a^j} |k|^H = \lim_{|k|\to\infty} \frac{\partial^{i+j} H_{nk}(\tau,a)}{\partial \tau^i \partial a^j} |k|^H = 0. \tag{2.15}$$

Очевидно, что в области $\mathcal{D}_R$ соотношения (2.14), (2.15) выполняются равномерно по переменным τ, a.

Пусть $\ell(\tau) \ne 0$ в области $\mathcal{D}_R$. Из (2.11) следуют соотношения:

$$\lim_{|k|\to\infty} \frac{\varkappa_k^2 + \ell_k^2}{|k|^2} = -\ell^2(\tau),\ \ell_k = O(1),\ \varkappa_k = O(|k|), \tag{2.16}$$

$$\frac{d^i}{d\tau^i}(\varkappa_k, \ell_k) = O(|k|^i),\ \frac{d^i}{d\tau^i}\frac{1}{\varkappa_k^2+\ell_k^2} = o(|k|^{i-3}),$$

$$\frac{d^i}{d\tau^i}\left(\frac{\varkappa_k}{\varkappa_k^2+\ell_k^2}, \frac{\ell_k}{\varkappa_k^2+\ell_k^2}\right) = o(|k|^{i-2}),\ i \in N.$$

Пусть $A_{nk}(\tau,a)$, $B_{nk}(\tau,a)$ – коэффициенты Фурье функций $A_n(\tau,a,\psi)$, $B_n(\tau,a,\psi)$. Рассмотрим $\lim\limits_{|k|\to\infty} A_{nk}(\tau,a)|k|^{H+1}$ и $\lim\limits_{|k|\to\infty} B_{nk}(\tau,a)|k|^{H+1}$. Учитывая соотношения (2.14), (2.16), имеем:

$$\lim_{|k|\to\infty} A_{nk}|k|^{H+1} = -\lim_{|k|\to\infty} A_{nk}|k|^{H-1}\frac{\varkappa_k^2+\ell_k^2}{\ell^2} = \tag{2.17}$$

$$= -\lim_{|k|\to\infty} \frac{1}{\ell^2}(\varkappa_k G_{nk} + \ell_k H_{nk})|k|^{H-1} = 0.$$

Аналогично $\lim\limits_{|k|\to\infty} B_{nk}|k|^{H+1} = 0$, $1 \le i \le I$, $0 \le j \le J$.

$$\lim_{|K|\to\infty} \frac{\partial^j A_{nK}(\tau,a)}{\partial a^j} |K|^{H+1} = \lim_{|K|\to\infty} \frac{\partial^j (a B_{nK}(\tau,a))}{\partial a^j} |K|^{H+1} = 0, \qquad (2.18)$$

$$\max\left(\left| \frac{\partial^{i+j} A_{nK}(\tau,a)}{\partial \tau^i \partial a^j} \right|, \left| \frac{\partial^{i+j} B_{nK}(\tau,a)}{\partial \tau^i \partial a^j} \right| \right) |K|^{H-i+2} \le M.$$

Отметим , что соотношения (2.I7) и (2.I8) в области $\mathcal{D}_R$ выполняются равномерно по переменным τ, a . Это эквивалентно существованию непрерывных частных производных (2.I3). Аналогично рассматривается случай $l(\tau)=0$ для $\tau \in \mathcal{D}_R$.Лемма 2.3 доказана.

Л е м м а 2.4. Для того , чтобы функции $G_n(\tau,a,\psi)$, $H_n(\tau,a,\psi)$ имели непрерывные частные производные

$$\frac{\partial^{i+j+h} (G_n(\tau,a,\psi), H_n(\tau,a,\psi))}{\partial \tau^i \partial a^j \partial \psi^h}, \quad i,j,h = 0,1,2,\ldots \qquad (2.19)$$

необходимо и достаточно , чтобы

$$\lim_{|qm|\to\infty} \frac{\partial^{i+j}}{\partial \tau^i \partial a^j} \mathcal{F}_{K,-pm,qm-1}(\tau,a) \, |qm|^h = 0,$$

$$\lim_{|qm|\to\infty} \frac{\partial^{i+j}}{\partial \tau^i \partial a^j} \mathcal{F}_{K,-pm,qm+1}(\tau,a) \, |qm|^h = 0, \quad i,j,h = 0,1,2,\ldots.$$

Доказательство леммы 2.4 аналогично доказательству леммы 2.3.

Остановимся на рассмотрении сходимости ряда

$$U_K(\tau,a,\theta,\varphi) = \sum_{(m,n)\notin\Lambda}{}' \frac{\mathcal{F}_{Kmn}(\tau,a)\, e^{i(m\theta+n\varphi)}}{\mathcal{M}_{mn} + \mathcal{N}_{mn} \exp(-i\Delta(m\nu+n\omega))}, \qquad (2.20)$$

где $\mathcal{F}_{Kmn}(\tau,a)$ – коэффициенты Фурье функции $\mathcal{F}_K(\tau,a,\theta,\varphi)$, сходится к $\mathcal{F}_K(\tau, a, \theta, \varphi)$ для всех θ, φ. Очевидно, что ряд (2.20) сходится, если абсолютные значения величин $\left[\mathcal{M}_{mn} + \mathcal{N}_{mn} \exp(-i\Delta(m\nu + n\omega))\right]^{-1}$, $(m,n) \notin \Lambda$ равномерно по m, n ограничены.

Предположим, что система характеристических уравнений (I.2) имеет простые корни $\pm\omega$ и не имеет решений вида $\lambda = m\nu + n\omega, (m,n) \notin \Lambda$. Тогда

$$\mathcal{M}_{mn} + \mathcal{N}_{mn} \exp(-i\Delta(m\nu + n\omega)) = \mathcal{D}_1(m\nu + n\omega) + i\,\mathcal{D}_2(m\nu + n\omega) \overset{def}{=} \mathcal{X}(m\nu + n\omega)$$

и, очевидно, $\mathcal{X}(m\nu + n\omega) \neq 0$ для $(m,n) \notin \Lambda$ (функции $\mathcal{D}_1(\lambda)$, $\mathcal{D}_2(\lambda)$ определены формулами (I.2)). Пусть частоты $\omega(\tau)$, $\nu(\tau)$ при $\tau = \tau_0$ соизмеримы, т.е.

$$\exists m_0, n_0 \in \mathbb{Z} : m_0 \nu(\tau_0) + n_0 \omega(\tau_0) = 0, \quad |m_0| + |n_0| > 0,$$

τ_0 - некоторый момент времени, m_0, n_0 - целые взаимно простые числа. Тогда $\mathcal{X}(m\nu(\tau_0) + n\omega(\tau_0)) = 0$ лишь при $m = km_0$, $n = kn_0 \pm 1$, $k \in \mathbb{Z}$, т.е. при $(m,n) \in \Lambda$. Следовательно, для всех $(m,n) \in \Omega \cap \bar{\Lambda}$ имеем

$$\mathcal{X}(m\nu(\tau_0) + n\omega(\tau_0)) \neq 0, \text{ где } \Omega = \Omega_{m_0 n_0} =$$

$$= \{(m,n) : (m,n) \in \mathbb{Z}, \ |m| \leq |m_0|, \ |n| \leq |n_0| \}$$

Таким образом $|\mathcal{X}(m\nu(\tau_0) + n\omega(\tau_0))| \geq \delta$ для всех $(m,n) \notin \Lambda$ и для некоторого положительного δ. Это значит, что ряд (2.20) при $\tau = \tau_0$ сходится к функции $\mathcal{U}_K(\tau_0, a, \theta, \varphi)$.

Пусть теперь частоты $\omega(\tau)$, $\nu(\tau)$ при $\tau = \tau_0$ несоизмеримы, т.е. для всех целочисленных векторов (m,n) имеем:

$m\nu(\tau_0)+n\omega(\tau_0)=0 \Leftrightarrow m=n=0$.

Рассмотрим значение величин $m\nu(\tau_0)+n\omega(\tau_0)$ при $(m,n)\in\Lambda$. Тогда $m\nu(\tau_0)+n\omega(\tau_0)=\pm\omega(\tau_0)+qk\left(\omega(\tau_0)-\frac{p}{q}\nu(\tau_0)\right)$. Отсюда следует , что для всех $\lambda=m\nu+n\omega$, $(m,n)\in\Lambda$ при $\tau=\tau_0$ имеем: $|\varkappa(\lambda(\tau_0))|\geq\sigma$, где σ – некоторое положительное число.

Известно, что для любой наперед заданной последовательности $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ убывающих ($\lambda_r\to 0$, $r\to\infty$) положительных чисел можно найти такое иррациональное число μ , сколь угодно близкое к заданному μ_0 , что при каждом натуральном r найдутся целые числа m_r , n_r такие , что $|m_r\mu+n_r|<\lambda_r$,

$|m_{r-1}|+|n_{r-1}|<|m_r|+|n_r|$, (см.[77], с. 414).

Отсюда следует , что существуют числа $\omega_1(\tau_0)$, $\nu_1(\tau_0)$, сколь угодно близкие к наперед заданным $\omega(\tau_0)$, $\nu(\tau_0)$, такие , что $|m_r\nu_1(\tau_0)+n_r\omega_1(\tau_0)-\omega_1(\tau_0)|\leq\lambda_r$, $r\in N$,

$$|m_{r-1}|+|n_{r-1}|\leq|m_r|+|n_r|,\ \lambda_r>0,\ \lim_{r\to\infty}\lambda_r=0.$$

По теореме Лагранжа о среднем имеем:

$$|\varkappa(m_r\nu_1(\tau_0)+n_r\omega_1(\tau_0))|=|\varkappa(\omega_1(\tau_0))+\varkappa'(\xi_r)(-\omega_1(\tau_0)+$$

$$+m_r\nu_1(\tau_0)+n_r\omega_1(\tau_0))|\leq M\lambda_r$$

, где ξ_r принадлежит открытому интервалу с конечными значениями $-\omega_1(\tau_0)+m_r\nu_1(\tau_0)+n_r\omega_1(\tau_0)$ и $\omega_1(\tau_0)$, M – некоторая постоянная, значение которой выбрано так, чтобы $|\varkappa'(\xi)|\leq M$ для всех ξ из некоторой окрестности точки $\omega_1(\tau_0)$. Из последнего неравенства следует неограниченность коэффициентов ряда (2.20).

С другой стороны , для многих $\omega_2(\tau_0)$, $\nu_2(\tau_0)$ абсолютные значения величин $\left[\varkappa\left(m\nu_2(\tau_0)+n\omega_2(\tau_0)\right)\right]^{-1}$ ограничены. Чтобы это доказать, выберем $\nu_2(\tau_0)=\sqrt{p_0 q_0^{-1}}\,\omega_2(\tau_0)$, где p_0, q_0 натуральные взаимно простые числа, причем $p_0 q_0$ не есть точный квадрат, $\omega_2(\tau_0)$ - произвольное положительное число. Очевидно, что числа $\omega_2(\tau_0)$, $\nu_2(\tau_0)$ несоизмеримы, причем числа $p_0, q_0, \omega_2(\tau_0)$ можно выбрать так, чтобы $\omega_2(\tau_0)$, $\nu_2(\tau_0)$ сколь угодно мало отличались от любых заданных значений $\omega(\tau_0)$, $\nu(\tau_0)$.

Для доказательства ограниченности величин $\left[\varkappa(m\nu_2(\tau_0)+n\omega_2(\tau_0))\right]^{-1}$ достаточно показать, что существует такое положительное число γ, что для всех $m, n\in\mathbb{Z}$ имеем: $|m\nu_2(\tau_0)+(n-1)\omega_2(\tau_0)|>\gamma$. Предположим противное. Тогда найдется последовательность убывающих положительных чисел $\gamma_1,\gamma_2,\ldots$, $\lim\limits_{r\to\infty}\gamma_r=0$ и найдутся целые числа m_r, n_r, $r\in\mathcal{N}$ такие, что

$$|m_{r-1}|+|n_{r-1}|<|m_r|+|n_r|,\quad |m_r\nu_2(\tau_0)+(n_r-1)\,\omega_2(\tau_0)|=\gamma_r.$$

Последнее равенство запишем в виде

$$m_r\sqrt{p_0 q_0^{-1}}+n_r-1=\bar\gamma_r,\quad \bar\gamma_r=\gamma_r\,\omega_2^{-1}(\tau_0)\,\mathrm{sign}(m_r\nu_2(\tau_0)+(n_r-1)\omega_2(\tau_0)),$$

откуда $\quad m_r^2 p_0-(n_r-1)^2 q_0=\bar\gamma_r q_0(\bar\gamma_r-2(n_r-1)).$

Это ведет к противоречию, так как слева - целое число, а справа, при достаточно малых γ_r - дробные.

Итогом сказанному является следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.2. Предположим, что:

1) $\varkappa(\lambda)$ - непрерывно дифференцируема функция, имеющая лишь одну пару простых нулей $\pm\omega$ и при достаточно больших по абсолютной величине λ удовлетворяющая неравенству $|\varkappa(\lambda)|\geq\sigma$, σ - некоторое положительное число;

2) $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ - последовательность убывающих положительных чисел, $\lim\limits_{r\to\infty}\lambda_r=0$.

Тогда :

I) существуют такие числа $\omega_1(\tau_0)$, $\nu_1(\tau_0)$, сколь угодно мало отличающиеся от заданных значений $\omega(\tau_0)$, $\nu(\tau_0)$, для которых найдется последовательность

$$(m_1, n_1), (m_2, n_2), \ldots, (m_\tau, n_\tau) \notin \Lambda, |m_1| + |n_1| < |m_2| + |n_2| < \ldots$$

такая, что $|\varkappa(m_\tau \nu_1(\tau_0) + n_\tau \omega_1(\tau_0))| < \lambda_\tau$;

2) существуют такие числа $\omega_2(\tau_0)$, $\nu_2(\tau_0)$, сколь угодно мало отличающиеся от заданных значений $\omega(\tau_0)$, $\nu(\tau_0)$, что равномерно по m , $n \in \mathbb{Z}$ выполняется неравенство $|\varkappa(m\nu_2(\tau_0)+n\omega_2(\tau_0))|>\eta$, η - некоторое положительное число.

З а м е ч а н и е I. Теорема 2.2 верна и в том случае, когда функция $\varkappa(\lambda)$ непрерывна для всех $\lambda \in \mathbb{R}^1$,дифференцируема в некоторых окрестностях точек $-\omega$, ω и $|\varkappa(\lambda)| > \sigma_0$ для всех $\lambda : |\lambda| > \lambda_0$, где λ_0 - некоторое положительное число.

З а м е ч а н и е 2. Из теоремы 2.2 следует , что если даже коэффициенты $\mathcal{F}_{kmn}$ тригонометрического ряда (I.17) быстро убывают , так что $|\mathcal{F}_{kmn}| < K\alpha^{|m|}\beta^{|n|}$, $0<\alpha,\beta<1$, то все равно можно подобрать $\omega(\tau)$, $\nu(\tau)$ так, что тригонометрический ряд (2.20) при $\tau=\tau_0$ станет расходящимся. Поэтому на $\omega(\tau_0)$, $\nu(\tau_0)$ надо наложить некоторые условия , например,

$$|n\omega(\tau_0) + m\nu(\tau_0)| \geq C(|m|+|n|)^{-\nu}, \nu > 1. \qquad (2.2I)$$

Относительная мера множества точек $(\omega(\tau_0)$, $\nu(\tau_0))$, для которых условие (2.2I) не выполняется , стремится к нулю вместе с C [3,8] . Таким образом , большинство частот $\omega(\tau_0)$,

$\nu(\tau_0)$ при достаточно малых C удовлетворяют неравенству (2.2I).

Если частоты $\omega(\tau_0)$, $\nu(\tau_0)$ удовлетворяют условию (2.2I), то, очевидно, для функции $\varkappa(m\nu+n\omega)$ при $\tau=\tau_0$ имеет место аналогичное соотношение $|\varkappa(m\nu(\tau_0)+n\omega(\tau_0))|\geq C_1(|m|+|n|)^{-\nu}$, $\nu>1$, при условии, что функция удовлетворяет условию п.I теоремы 2.2.

Л е м м а 2.5. Предположим, что:

I) функции $\mathcal{F}_{kmn}(\tau,a)$ непрерывны по τ, a, имеют непрерывные частные производные

$$\frac{\partial^{i+j}\mathcal{F}_{kmn}(\tau,a)}{\partial\tau^i\partial a^j}, \quad \begin{matrix} 0\leq i\leq I, & 0\leq j\leq J, \\ (m,n)\notin\Lambda, & k\in\mathcal{N}, \end{matrix} \tag{2.22}$$

и для всех τ, a выполняются неравенства

$$\left|\frac{\partial^{i+j}\mathcal{F}_{kmn}(\tau,a)}{\partial\tau^i\partial a^j}\right|(1+|m|)^T(1+|n|)^S\leq\mathcal{M}, \tag{2.23}$$

$$0\leq i\leq I,\ 0\leq j\leq J,\ T,S\geq 5(I+1);$$

2) выполнено условие п.2 леммы 2.3;

3) система характеристических уравнений (I.2) имеет простые корни $\pm\omega$ и не имеет решений вида $\lambda=m\nu+n\omega$, $(m,n)\notin\Lambda$;

4) частоты $\omega(\tau)$, $\nu(\tau)$ для всех $\tau\in R^1$, $(m,n)\notin\Lambda$ удовлетворяют равномерно по τ, m, n условию

$$|m\nu(\tau)+n\omega(\tau)|\geq C(|m|+|n|)^{-3}.$$

Тогда функции $\mathcal{U}_k(\tau,a,\theta,\varphi)$ – непрерывны и имеют непрерывные частные производные $0\leq i\leq I$, $0\leq j\leq J$,

$$\frac{\partial^{i+j+t+s}\mathcal{U}_k(\tau,a,\theta,\varphi)}{\partial\tau^i\partial a^j\partial\theta^t\partial\varphi^s}, \quad \begin{matrix} 0\leq t\leq T-5(i+1), \\ 0\leq s\leq S-5(i+1). \end{matrix} \tag{2.24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим область

$$\mathcal{Y}_R = \{(\tau, a, \theta, \varphi) : \tau^2 + a^2 < R^2, \ 0 < \theta, \varphi < 2\pi\}.$$

Очевидно, что функции (2.22) равномерно непрерывны в области $\mathcal{Y}_R$ и, следовательно, неравенства (2.23) в $\mathcal{Y}_R$ выполняются равномерно по переменным τ, a. Пусть $u_{kmn}(\tau,a)$ – коэффициенты Фурье функций $u_k(\tau,a,\theta,\varphi)$, $k \in N$. Тогда имеем:

$$\left| u_{kmn}(\tau,a) \right| = \left| \frac{\mathcal{F}_{kmn}(\tau,a)}{\varkappa(m\nu + n\omega)} \right| \leq \frac{\mathcal{M}(|m|+|n|)^3}{C(1+|m|)^T(1+|n|)^S} \leq \tag{2.25}$$

$$\leq \frac{\mathcal{M}}{C(1+|m|)^{T-3}(1+|n|)^{S-3}}.$$

Так как функция $\varkappa(m\nu(\tau) + n\omega(\tau))$ не зависит от переменной a, то

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial a^j} \frac{\mathcal{F}_{kmn}(\tau,a)}{\varkappa(m\nu+n\omega)} \right| \leq \left| \frac{\partial^j \mathcal{F}_{kmn}(\tau,a)}{\partial a^j} \right| \frac{(|m|+|n|)^3}{C} \leq \frac{\mathcal{M}\cdot C^{-1}}{(1+|m|)^{T-3}(1+|n|)^{S-3}},$$

причем эти неравенства в области $\mathcal{Y}_R$ выполняются равномерно по τ, a. Отсюда следует существование и непрерывность частных производных (2.24) при $i = 0$. Доказательство существования и непрерывности частных производных (2.24) при $i \neq 0$ аналогично доказательству леммы 2.3.

Таким образом, леммы 2.3, 2.4, 2.5 устанавливают тесную связь между свойствами дифференцируемости функций $A_k(\tau,a,\psi)$, $B_k(\tau,a,\psi)$, $u_k(\tau,a,\theta,\varphi)$ и функций $\mathcal{F}_k(\tau,a,\theta,\varphi)$, $k \in N$. Функции $\mathcal{F}_k(\tau,a,\theta,\varphi)$ (см. формулу (I.14) § 2.I) опреде -

ляются правой частью уравнения (I.I) (функцией $f(\ldots)$ и ее частными производными до $K-1$ -го порядка включительно) и $K-1$ -м приближением (функциями $A_1, B_1, U_1, \ldots, A_{K-1}, B_{K-1}, U_{K-1}$ и их производными).

Предположим, что функция $f(\tau, \theta, x_1, \ldots, x_4)$ - бесконечно дифференцируема по всем своим переменным. Введем обозначения для частных производных функции $f(\ldots)$, вычисленных на поверхности $x_1^2 + x_3^2\omega^{-2} = a^2$, $x_2^2 + x_4^2\omega^{-2} = a^2$:

$$R^{\alpha}(\tau, a, \theta, \varphi) = \left.\frac{\partial^{|\alpha|} f(\tau, \theta, x_1, \ldots, x_4)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_4^{\alpha_4}}\right|_{\substack{x_1 = x_1^0 = a\cos\varphi \\ x_2 = x_2^0 = a\cos(\varphi - \omega\Delta) \\ x_3 = x_3^0 = -a\omega\sin\varphi \\ x_4 = x_4^0 = -a\omega\sin(\varphi - \omega\Delta)}}, \qquad (2.26)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_4)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_4$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_4$ - неотрицательные целые числа. Тогда, пользуясь формулой Тейлора для функций многих переменных, функции $f_K(\tau, a, \theta, \varphi)$, $K \in N$ можно записать в явном виде. Имеем:

$$f_{K+1}(\tau, a, \theta, \varphi) = \left.\frac{\partial^K}{\partial \varepsilon^K} f(\tau, \theta, x_1^0 + \varepsilon x_1^1 + \ldots + \varepsilon^K x_1^K, \ldots, x_4^0 + \varepsilon x_4^1 + \ldots + \varepsilon^K x_4^K)\right|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \sum_{n=1}^{K} \frac{1}{n!} \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_n \le 4} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}} \sum_{\substack{j_1 + \ldots + j_n = K \\ j_1, \ldots, j_n \ge 0}} x_{i_1}^{j_1} x_{i_2}^{j_2} \ldots x_{i_n}^{j_n},$$

где функции $x_i^j = x_i^j(\tau, a, \theta, \varphi)$, $i = 1, \ldots, 4$, $j \in N$ - коэффициенты при ε^j в разложениях функций $x(t)$, $x(t-\Delta)$, $\frac{dx(t)}{dt}$, $\frac{dx(t-\Delta)}{dt}$ в ряды Тейлора по степеням ε (см. формулы (I.7), (I.8), (I.12)), частные производные $\partial^n f/(\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n})$ в точности равны функциям $R^{\alpha}(\tau, a, \theta, \varphi)$ при подходящем выборе α.

Из соотношений (I.19) , (I.20) следует , что явный вид и свойства функций $A_K(\tau,a,\psi)$, $B_K(\tau,a,\psi)$ определяются функцией $\tilde{\mathcal{F}}_K=\sum_{(m,n)\in\Lambda}\mathcal{F}_{Kmn}\exp i(m\theta+n\varphi)$, а функций $\mathcal{U}_K(\tau,a,\theta,\varphi)$ - функцией $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_K=\sum_{(m,n)\notin\Lambda}\mathcal{F}_{Kmn}e^{i(m\theta+n\varphi)}$, где $\mathcal{F}_{Kmn}$ - коэффициенты Фурье для $\mathcal{F}_K(\tau,a,\theta,\varphi)$, $\mathcal{F}_K=\tilde{\mathcal{F}}_K+\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_K$. Наиболее просто можно записать выражение для функций $\mathcal{F}_1$, $\tilde{\mathcal{F}}_1$, $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_1$. Имеем:

$$\mathcal{F}_1(\tau,a,\theta,\varphi)=R^o(\tau,a,\theta,\varphi)=f(\tau,\theta,x_1,\dots,x_4)\Bigg|_{\substack{x_1=a\cos\varphi\\ \dots\dots\\ x_4=-a\omega\sin(\varphi-\omega\Delta)}},$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_1(\tau,a,\theta,\varphi)=\sum_{(m,n)\in\Lambda}R^o_{mn}(\tau,a)\,e^{i(m\theta+n\varphi)}=-G_1(\tau,a,\psi)\cos\varphi-$$

$$-H_1(\tau,a,\psi)\sin\varphi,\quad \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_1(\tau,a,\theta,\varphi)=R^o(\tau,a,\theta,\varphi)-\tilde{\mathcal{F}}_1(\tau,a,\theta,\varphi),$$

где $R^o_{mn}(\tau,a)$ - коэффициенты Фурье функции $R^o(\tau,a,\theta,\varphi)$. Пользуясь этими выражениями , из уравнений (I.19) , (I.20) можно найти функции A_1 , B_1 , $\mathcal{U}_1$ (первое приближение). Для отыс - кания функций $A_2, B_2, \mathcal{U}_2$ (второго приближения) необходимо , чтобы ряды $\mathfrak{N}_1 A_1, \mathfrak{N}_1 B_1$ сходились . В общем случае решить вопрос о сходимости этих рядов (рядов $\mathfrak{N}_m A_n, \mathfrak{N}_m B_n$, $m,n\in\mathcal{N}$) по явному виду функции $f(\dots)$ затруднительно. Однако этот вопрос сравнительно просто решается в некоторых частных случаях. Действительно , пусть

$$\mathcal{Y}_{R^o}=\{(m,n):\ m,n\in\mathbb{Z},\ R^o_{mn}(\tau,a)\not\equiv 0\}$$

- множество целочисленных векторов (m,n) таких , что $R^o_{mn}(\tau,a)\not\equiv 0$.

Тогда $\mathcal{F}_1 = \sum\limits_{(m,n)\in \mathcal{Y}_{R^o}} \mathcal{F}_{1mn} e^{i(m\theta+n\varphi)}$, $\tilde{\mathcal{F}}_1 = -G_1\cos\varphi - H_1\sin\varphi =$

$$= \sum_{(m,n)\in \Lambda\cap\mathcal{Y}_{R^o}} \mathcal{F}_{kmn} e^{i(m\theta+n\varphi)}, \quad \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_2 = \sum_{(m,n)\in\bar{\Lambda}\cap\mathcal{Y}_{R^o}} \mathcal{F}_{1mn} e^{i(m\theta+n\varphi)}.$$

Предположим , что множество $\Lambda\cap\mathcal{Y}_{R^o}$ содержит конечное число элементов. Это возможно, например , в следующих двух случаях:

I) функция $f(\tau,\theta,x_1,\dots,x_4)$ - алгебраический полином по переменным $x_1, \dots, x_4$, т.е.

$$f(\tau,\theta,x_1,\dots,x_4) = \sum_{|i|\le N} f_i(\tau,\theta)\, x_1^{i_1}\dots x_4^{i_4}, \qquad (2.27)$$

где $i=(i_1,\dots,i_4)$ - вектор с целыми неотрицательными координатами , $|i| = i_1+\dots+i_4$, $f_i(\tau,\theta)$ - бесконечно дифференцируемые функции переменных τ , θ ;

П) функция $f(\tau,\theta,x_1,\dots,x_4)$ - тригонометрический полином по θ , т.е.

$$f(\tau,\theta,x_1,\dots,x_4) = \sum_{|m|\le M} f_m(\tau,x_1,\dots,x_4)\, e^{im\theta}, \qquad (2.28)$$

где $f_m(\tau,x_1,\dots,x_4)$ - бесконечно дифференцируемые функции своих переменных.

Рассмотрим случай I. Тогда функции $R^\alpha(\tau,a,\theta,\varphi)$ можно представить рядом Фурье

$$R^\alpha(\tau,a,\theta,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{|n|\le N_\alpha} R^\alpha_{mn}\, e^{i(m\theta+n\varphi)}, \qquad (2.29)$$

Далее находим, что множество $\Lambda \cap \mathcal{Y}_{\mathcal{F}_1}$ содержит конечное число элементов, функции $A_1(\tau, a, \psi)$, $B_1(\tau, a, \psi)$ – тригонометрические полиномы по ψ, а функция $\mathcal{U}_1(\tau, a, \theta, \varphi)$ представима рядом Фурье вида

$$\mathcal{U}_1(\tau, a, \theta, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{|n| \le N_1} \mathcal{U}_{1mn}(\tau, a)\, e^{i(m\theta + n\varphi)}. \tag{2.30}$$

Из соотношений (I.8) и (I.12) следует, что функция $\mathcal{F}_2(\tau, a, \theta, \varphi)$ – конечная сумма слагаемых, каждое из которых – произведение конечного числа функций $A_1, B_1, \mathcal{U}_1, \mathcal{R}_0 A_1, \mathcal{R}_0 B_1, \mathcal{R} A_1, \mathcal{R} B_1, P_0 \mathcal{U}_1, P_0^2 \mathcal{U}_1$ и функций вида (2.29) при $|\kappa| = 1$.

Отсюда получаем, что множество $\Lambda \cap \mathcal{Y}_{\mathcal{F}_2}$ содержит конечное число элементов, и, следовательно, функции $A_2(\tau, a, \psi)$, $B_2(\tau, a, \psi)$ – тригонометрические полиномы по ψ, а функция $\mathcal{U}_2(\tau, a, \theta, \varphi)$ представима рядом Фурье вида (2.30).

Продолжая эти рассуждения далее, мы получим, что множество $\Lambda \cap \mathcal{Y}_{\mathcal{F}_\kappa}$, $\kappa = 3, 4$, содержит конечное число элементов, функции $A_\kappa(\tau, a, \psi)$, $B_\kappa(\tau, a, \psi)$ – тригонометрические полиномы по ψ, а функция $\mathcal{U}_\kappa(\tau, a, \theta, \varphi)$ представима рядом Фурье вида (2.30).

Отметим, что для произвольных $\omega(\tau)$, $\nu(\tau)$, несоизмеримых при $\tau = \tau_0$, существует

$$\min_{(m,n) \notin \Lambda, |n| \le N_1} \{ | m\omega(\tau_0) + (n \pm 1)\nu(\tau_0) | \} =$$

$$\min_{|n| \le N_1} \; \min_{m \in \mathbb{Z}, (m,n) \notin \Lambda} \{ | m\omega(\tau_0) + (n \pm 1)\nu(\tau_0) | \} = \delta_0 > 0,$$

где $\delta_0 = \delta_0(\tau_0, \omega(\tau_0), \nu(\tau_0), N_1)$, и, следовательно, ряды

(2.20) для функций $u_k(\tau, a, \theta, \varphi)$, $k \in \mathcal{N}$ при $\tau = \tau_0$ сходятся абсолютно и равномерно по переменным θ, φ при условии, что ряды Фурье для функций $\tilde{\tilde{F}}_k(\tau, a, \theta, \varphi)$, $k \in \mathcal{N}$ сходятся абсолютно и равномерно по переменным θ, φ и выполнено условие п. 3 леммы 2.5.

Аналогично рассматривается случай П.

Таким образом, имеет место утверждение.

Утверждение. Предположим, что:

I) функции $\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \omega_1(\tau), \omega_2(\tau), \omega(\tau), \nu(\tau), \Delta(\tau) \in C^\infty$;

2) характеристические уравнения (I.2) имеют простые корни $\pm\omega$ и не имеют решений вида $\lambda = m\nu + n\omega$, $(m,n) \notin \Lambda$;

3) выполнено условие п. 3 леммы 2.3;

4) функция $f(\tau, \theta, x_1, \ldots, x_4)$ A) имеет вид (2.27); B) имеет вид (2.28) ; C) имеет вид :

$$f(\tau,\theta,x_1,\ldots,x_4) = \sum_{|m|\le \mathcal{M}} \sum_{|n|\le N} f_{nm}(\tau)\, x_1^{n_1} \ldots x_4^{n_4} e^{im\theta}, \quad f_{nm}(\tau) \in C^\infty.$$

Тогда при каждом $k \in \mathcal{N}$ функции $A_k(\tau, a, \psi)$, $B_k(\tau, a, \psi)$ - тригонометрические полиномы по ψ и бесконечно-дифференцируемы по τ, a, $a \neq 0$, а функция $u_k = u_k(\tau, a, \theta, \varphi)$ - бесконечно дифференцируемая по τ, a, θ, φ, $a \neq 0$ и может записана, соответственно, следующим способом

$$\text{A)}\quad u_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{|n|\le N_k} u_{kmn}(\tau,a)\, e^{i(m\theta+n\varphi)}, \quad \text{B)}\quad u_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{|m|\le \mathcal{M}_k} u_{kmn}(\tau,a)\, e^{i(m\theta+n\varphi)};$$

$$\text{C)}\quad u_k = \sum_{|m|\le \mathcal{M}_k} \sum_{|n|\le N_k} u_{kmn}(\tau,a) \exp i(m\theta+n\varphi).$$

§ 2.3. Система двух слабо связанных уравнений типа Ван-дер Поля

В работах Ю.А. Митропольского и А.М. Самойленко [59-64] на основе метода усреднения предложен метод асимптотического интегрирования квазилинейных уравнений второго порядка, позволяющий находить асимптотические приближения для периодических и квазипериодических решений, исследован вопрос существования инвариантных тороидальных многообразий , выполнено изучение многочастотных колебаний в окрестности квазистатических положений равновесия уравнений p -х приближений.

В данном параграфе при помощи метода асимптотического интегрирования изучается система двух слабо связанных уравнений типа Ван-дер Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_1^2 x=\varepsilon\left[(1-\mu_1 x^2)\frac{dx}{dt}+n(1-\alpha_1 y^2)\frac{dy}{dt}\right], \qquad (3.1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega_2^2 y=\varepsilon\left[(1-\mu_2 y^2)\frac{dy}{dt}-n(1-\alpha_2 x^2)\frac{dx}{dt}\right],$$

где $\omega_1,\omega_2,\alpha_1,\alpha_2,\mu_1,\mu_2,\ n$ - некоторые положительные величины.

Аналогично работам [7,61,62] рассмотрим нерезонансный случай, когда $k_1\omega_1-k_2\omega_2\neq 0$ для любых натуральных k_1 , k_2 и резонансные случаи , когда $k_1\omega_1-k_2\omega_2=0$ для некоторых натуральных k_1 , k_2.

В нерезонансном случае после перехода к амплитудно-фазовым переменным (a,b) и (φ,ψ) по формулам

$x = a\sin\varphi,\ y = b\sin\psi,\ \frac{dx}{dt} = a\omega_1\cos\varphi,\ \frac{dy}{dt} = b\omega_2\cos\psi,$

усреднения полученных уравнений по фазовым переменным φ , ψ ,находим уравнения первого приближения

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a}{2}\left[1 - \mu_1\frac{a^2}{4}\right],\ \frac{db}{dt} = \frac{\varepsilon b}{2}\left[1 - \mu_2\frac{b^2}{2}\right],\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega_1,\ \frac{d\psi}{dt} = \omega_2,$$

которые имеют квазистатическое положение равновесия ($2\mu_1^{-\frac{1}{2}}$, $2\mu_2^{-\frac{1}{2}}$). В силу теоремы 4 [6I] это квазистатическое положение экспоненциально устойчиво, а система (3.I) имеет экспоненциально устойчивый тор, который с точностью до величин порядка ε^2 определяется соотношениями:

$$\sqrt{x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_1^2}} = \frac{2}{\sqrt{\mu_1}} + \frac{\varepsilon}{\omega_1}\left\{\frac{\sin 2\varphi}{2\sqrt{\mu_1}} + \frac{\sin 4\varphi}{4\sqrt{\mu_1}} + \frac{n\omega_2(\mu_2 - \alpha_1)}{\mu_2\sqrt{\mu_2}} \times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\omega_1+\omega_2} + \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\omega_1-\omega_2}\right) + \frac{n\alpha_1\omega_2}{\mu_2\sqrt{\mu_2}}\left[\frac{\sin(3\psi+\varphi)}{3\omega_2+\omega_1} + \frac{\sin(3\psi-\varphi)}{3\omega_2-\omega_1}\right]\right\}, \tag{3.2}$$

$$\sqrt{y^2 + \frac{\dot{y}^2}{\omega_2^2}} = \frac{2}{\sqrt{\mu_2}} + \frac{\varepsilon}{\omega_2}\left\{\frac{\sin 2\psi}{2\sqrt{\mu_2}} + \frac{\sin 4\psi}{4\sqrt{\mu_2}} - \frac{n\omega_1(\mu_1 - \alpha_2)}{\mu_1\sqrt{\mu_1}} \times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\omega_1+\omega_2} + \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\omega_1-\omega_2}\right] - \frac{n\alpha_2\omega_1}{\mu_1\sqrt{\mu_1}}\left[\frac{\sin(3\varphi+\psi)}{3\omega_1+\omega_2} + \frac{\sin(3\varphi-\psi)}{3\omega_1-\omega_2}\right]\right\},$$

где φ , ψ' - произвольные постоянные.

Резонансные случаи для системы (3.I) возможно лишь тогда , когда $\omega_1 = 3\omega_2$, либо $\omega_2 = 3\omega_1$, либо $\omega_1 = \omega_2$. Ясно, что резонансные случаи $\omega_1 = 3\omega_2$ и $\omega_2 = 3\omega_1$ принципиально не отличаются,т.е. поведение решений системы (3.I) одинаково в обоих случаях.

Рассмотрим случай резонанса $\omega_1 = 3\omega_2$. После перехода к амплитудно-фазовым переменным по формулам

$$x = a\sin(\theta+3\psi), \qquad y = b\sin\psi,$$

$$\frac{dx}{dt} = a\omega_1\cos(\theta+3\psi), \qquad \frac{dy}{dt} = b\omega_2\cos\psi,$$

усреднения полученных уравнений по ψ , находим уравнения первого приближения

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon\left[\frac{a}{2} - \frac{\mu_1 a^3}{8} + \frac{n\alpha_1 b^3}{24}\cos\theta\right], \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega_2, \tag{3.3}$$

$$\frac{db}{dt} = \varepsilon\left[\frac{b}{2} - \frac{\mu_2 b^3}{8}\right], \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\varepsilon n\alpha_1 b^3}{24a}\sin\theta,$$

квазистатические положения которых удовлетворяют соотношениям

$b_0 = \frac{2}{\sqrt{\mu_2}}$, $\theta_0 = k\pi$, $k = 1, 2$,

$$a_0^3 - \frac{4}{\mu_1}a_0 - \frac{8}{3}\,\frac{n\alpha_1}{\mu_1\mu_2\sqrt{\mu_2}}(-1)^k = 0 . \tag{3.4}$$

Используя систему функций Штурма для полинома в левой части уравнения (3.4), определяем количество положительных действительных корней уравнения (3.4) , а затем и квазистатические положения равновесия уравнений (3.3):

$(a_{01}, b_0, 2\pi)$ при $\gamma = 4\mu_2^3 - 3\mu_1(n\alpha_1)^2 < 0$,

$(a_{01}, b_0, 2\pi), (a_{02}, b_0, \pi), (a_{03}, b_0, \pi)$ при $\gamma > 0$,

$(a_{01}, b_0, 2\pi), \left(\frac{2}{\sqrt{3\mu_1}}, b_0, \pi\right)$ при $\gamma = 0$,

где a_{0i} , $i = 1, 2, 3$, положительные действительные корни уравнения (3.4), $b_0 = \dfrac{2}{\sqrt{\mu_2}}$.

Рассматривая матрицу Якоби для каждого квазистатического положения равновесия , находим, что $(a_{01}, b_0, 2\pi)$ - экспоненциально устойчиво, (a_{02}, b_0, π) , (a_{03}, b_0, π) - экспоненциально дихотомичны, а для выяснения характера устойчивости $(\frac{2}{\sqrt{3\mu_1}}, b_0, \pi)$ требуется рассмотрение уравнений высших приближений. В силу теоремы 5 [61] система (3.I) имеет экспоненциально устойчивый цикл, который в первом приближении определяется соотношениями $(i=1, k=2)$:

$$\sqrt{x^2+\frac{\dot{x}^2}{\omega_1^2}} = a_{0i} + \frac{\varepsilon}{6\omega_2}\left\{\frac{a_{0i}\sin 6\psi}{2} + \left(\frac{a_{0i}}{4} + \frac{(-1)^k n\alpha_1}{6\mu_2\sqrt{\mu_2}}\right)\times\right.$$

$$\left.\sin 12\psi + \frac{n(\mu_2-\alpha_1)}{(-1)^k\mu_2\sqrt{\mu_2}}\left(\frac{\sin 4\psi}{2} + \sin 2\psi\right) + \frac{n\alpha_1\cos 6\psi}{3\mu_2\sqrt{\mu_2}\,(-1)^k}\right\}, \qquad (3.5)$$

$$\sqrt{y^2+\frac{\dot{y}^2}{\omega_2^2}} = \frac{2}{\sqrt{\mu_2}} + \frac{\varepsilon}{\omega_2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_2}} - \frac{n^2\alpha_1\alpha_2}{\mu_1\mu_2\sqrt{\mu_2}} - \frac{3n(\mu_1-\alpha_2)}{2\mu_1\cdot(-1)^k}a_{0i}\right.\right.\times$$

$$\left.\times\left(\frac{\sin 4\psi}{4} + \frac{\sin 2\psi}{2}\right) - \frac{3\alpha_2 n}{4\mu_1}\left(\frac{a_{0i}}{(-1)^k} + \frac{2n\alpha_1}{3\mu_2\sqrt{\mu_2}}\right)\left(\frac{\sin 10\psi}{5} + \frac{\sin 8\psi}{4}\right)\right\},$$

ψ - произвольная постоянная ; в случае $\gamma > 0$ - еще два экспоненциально дихотомичные цикла , которые с точностью до величин порядка ε^2 определяются соотношения (3.5) при $i=2,3,\ k=1$.

Рассмотрим случай главного резонанса, когда $\omega_1=\omega_2=\omega$.Как и раньше, совершим переход к амплитудно-фазовым переменным

$$x = a\sin(\theta+\psi), \qquad y = b\sin\psi,$$

$$\frac{dx}{dt} = a\omega\cos(\theta+\psi) \qquad \frac{dy}{dt} = b\omega\sin\psi$$

и, усредняя полученные после замены уравнения по ψ , находим уравнения первого приближения

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon\left[\frac{a}{2} - \frac{\mu_1 a^3}{8} + n\left(\frac{b}{2} - \frac{\alpha_1 b^3}{8}\right)\cos\theta\right],$$

$$\frac{db}{dt} = \varepsilon\left[\frac{b}{2} - \frac{\mu_2 b^3}{8} - n\left(\frac{a}{2} - \frac{\alpha_2 a^3}{8}\right)\cos\theta\right], \tag{3.6}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\varepsilon n\left[\frac{b}{a}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha_1 b^2}{8}\right) + \frac{a}{b}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha_2 a^2}{8}\right)\right]\sin\theta,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega - \frac{\varepsilon n b}{a}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha_1 b^2}{8}\right)\sin\theta.$$

Рассмотрим сначала те решения уравнений квазистатических положений равновесия , для которых $\sin\theta_0 \neq 0$. В этом случае из уравнений квазистатических положений равновесия для системы (3.6) находим стационарные амплитуды

$$a_0 = 2\sqrt{\frac{\mu_2(\mu_1+\mu_2)}{\alpha_1\mu_1^2 + \alpha_2\mu_2^2}}, \quad b_0 = 2\sqrt{\frac{\mu_1(\mu_1+\mu_2)}{\alpha_1\mu_1^2 + \alpha_2\mu_2^2}} \tag{3.7}$$

и уравнение для определения θ_0 $(\sin\theta_0 \neq 0)$

$$n\sqrt{\mu_1\mu_2}\,(\alpha_1\mu_1 - \alpha_2\mu_2)\cos\theta_0 = \alpha_1\mu_1^2 + \alpha_2\mu_2^2 - \mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2). \tag{3.8}$$

Очевидно , что уравнение (3.8) имеет решения θ_{0i}, $i=1,2$, $\sin\theta_{0i} \neq 0$ лишь тогда , когда выполняются соотношения $\alpha_1=\mu_2$, $\alpha_2=\mu_1$ или

$$
\left|\alpha_1\mu_1^2+\alpha_2\mu_2^2-\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)\right| < n\sqrt{\mu_1\mu_2}\,\left|\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2\right|, \tag{3.9}
$$

$$
\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2 \neq 0
$$

В предположении, что выполняются соотношения (3.9), составив характеристическое уравнение для матрицы Якоби , а затем пользуясь критерием Гурвица отрицательности вещественных частей корней полинома и теоремой 5 [6I], легко установить , что система (3.I) в рассматриваемом случае имеет два цикла , определяемые в первом приближении соотношениями,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2+\frac{\dot{x}^2}{\omega^2}} &= a_0+\frac{\varepsilon}{2\omega}\Big\{\frac{a_0\sin 2(\psi+\theta_{0i})}{2}+\frac{a_0^3\mu_1\sin 4(\psi+\theta_{0i})}{16}+ \\
&+\frac{n}{2}\Big(b_0-\frac{\alpha_1 b_0^3}{4}\Big)\sin(2\psi+\theta_{0i})+\frac{n\alpha_1 b_0^3}{4}\Big(\frac{\sin(4\psi+3\theta_{0i})}{4}+\frac{\sin(2\psi+3\theta_{0i})}{2}\Big)\Big\},
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{y^2+\frac{\dot{y}^2}{\omega^2}} &= b_0+\frac{\varepsilon}{2\omega}\Big\{b_0\frac{\sin 2\psi}{2}+\frac{b_0^3\mu_2\sin 4\psi}{16}-\frac{na_0}{2}\Big(1-\frac{\alpha_2 a_0^2}{4}\Big)\times \\
&\times\sin(2\psi+\theta_{0i})-\frac{n\alpha_2 b_0^3}{4}\Big(\frac{\sin(4\psi+3\theta_{0i})}{4}+\frac{\sin(2\psi+3\theta_{0i})}{2}\Big)\Big\},
\end{aligned}
$$

где ψ - произвольная постоянная, θ_{0i}, $i=1,2$ - решения уравнения (3.8) , a_0 , b_0 - определены формулами (3.7).

Эти циклы экспоненциально устойчивы , если выполнены соотношения

$$\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2>0, \quad \frac{\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)}{\alpha_1\mu_1^2+\alpha_2\mu_2^2}>\frac{1}{3},$$

$$\left[\frac{3\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)}{\alpha_1\mu_1^2+\alpha_2\mu_2^2}-1\right]\left\{\left(\frac{3\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)}{\alpha_1\mu_1^2+\alpha_2\mu_2^2}-1\right)^2+\left[1-\mu_1\mu_2\times\right.\right. \tag{3.11}$$

$$\left.\left.\times\frac{3(\alpha_1\mu_1+\alpha_2\mu_2)}{\alpha_1\mu_1^2+\alpha_2\mu_2^2}+\frac{9\alpha_1\alpha_2\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)^2}{(\alpha_1\mu_1^2+\alpha_2\mu_2^2)^2}\right]\frac{\left[\alpha_1\mu_1^2+\alpha_2\mu_2^2-\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)\right]^2}{\mu_1\mu_2(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)^2}\right\}>$$

$$>\left(1-\frac{2\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)}{\alpha_1\mu_1^2+\alpha_2\mu_2^2}\right)\frac{2n(\mu_1+\mu_2)(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)}{\alpha_1\mu_1^2+\alpha_2\mu_2^2}\times$$

$$\times\left[1-\frac{\left[\alpha_1\mu_1^2+\alpha_2\mu_2^2-\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)\right]^2}{n^2\mu_1\mu_2(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)^2}\right]$$

и экспоненциально дихотомичны в противном случае.

Если $\alpha_1=\mu_2$, $\alpha_2=\mu_1$, то квазистатические положения равновесия уравнений (3.6) не являются изолированными, а поэтому сказать что-нибудь о поведении решений системы (3.I), пользуясь теоремами из [6I,62], нельзя.

Рассмотрим теперь те решения уравнений квазистатических положений равновесия, для которых $\sin\theta_0=0$. Эти решения удовлетворяют уравнениям $\theta_0=k\pi$, $k=1,2$,

$$\begin{aligned} &4a-\mu_1a^3+n(4b-\alpha_1b^3)(-1)^k=0,\\ &4b-\mu_2b^3-n(4a-\alpha_2a^3)(-1)^k=0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

В общем случае анализ решений уравнений (3.12) затруднителен, тогда как в каждом отдельном случае, т.е. при заданных значениях величин $\alpha_1, \alpha_2, \mu_1, \mu_2, n$ или при определенных соотношениях между ними, такой анализ провести сравнительно легко.

Рассмотрим частный случай, предположив, что $\mu_1 = \alpha_2$, $\mu_2 > \alpha_1$. Из (3.12) находим $\theta_0 = k\pi$, $k = 1, 2$, $b_0 = 2\sqrt{(1+n^2)(\mu_2 + n^2\alpha_1)^{-1}}$ и уравнение для определения a:

$$a^3 - \frac{4}{\mu_1} a - 8n\sqrt{1+n^2}\,\frac{(-1)^k(\mu_2 - \alpha_1)}{\mu_1\sqrt{(\mu_2 + n^2\alpha_1)^3}} = 0. \qquad (3.13)$$

Как и раньше, используя систему функций Штурма для полинома в левой части уравнения (3.13), определяем количество положительных действительных корней уравнения (3.13), а затем и квазистатические положения равновесия уравнений (3.6):

$(a_{01}, b_0, 2\pi)$ при $f_3(a) \equiv \dfrac{4}{\mu_1} - \dfrac{27n^2(1+n^2)(\mu_2 - \alpha_1)^2}{(\mu_2 + n^2\alpha_1)^3} < 0$,

$(a_{01}, b_0, 2\pi), (a_{02}, b_0, \pi), (a_{03}, b_0, \pi)$ при $f_3(a) > 0$,

$(a_{01}, b_0, 2\pi), \left(\dfrac{2}{\sqrt{3\mu_1}}, b_0, \pi\right)$ при $f_3(a) \equiv 0$,

где a_{0i}, $i = 1, 2, 3$ – действительные положительные решения уравнения (3.13).

Для анализа устойчивости этих квазистатических положений равновесия рассмотрим матрицу Якоби и ее характеристическое уравнение, имеющее вид

$$\left[\lambda^2+\lambda\left(\frac{3\mu_1 a_{oi}^2}{8}-\frac{2n^2\alpha_1-\mu_2(1+3n^2)}{2(\mu_2+n^2\alpha_1}+\frac{n^2+1}{2}\left(\frac{3\mu_1 a_{oi}^2}{4}-1\right)\right]\times \tag{3.14}$$

$$\times\left[\lambda-\frac{n\sqrt{\mu_2+n^2\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2 a_{oi}^4}{4}-\frac{4(n^2+1)(\mu_2-\alpha_1)}{(\mu_2+n^2\alpha_1)^2}-a_{oi}^2\right)}{4a_{oi}\sqrt{1+n^2}\,(-1)^K}\right]=0.$$

Обозначим некоторым образом корни уравнения (3.14) через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Можно установить, что $Re\lambda_1$, $Re\lambda_2<0$, если $a_{oi}>\frac{2}{\sqrt{3\mu_1}}$, $Re\lambda_1$, $Re\lambda_2>0$, если $a_{oi}<\frac{2}{\sqrt{3\mu_1}}$ и $Re\lambda_1=Re\lambda_2=0$, если $a_{oi}=\frac{2}{\sqrt{3\mu_1}}$. Кроме того, получим $sign\,\lambda_3=(-1)^K$, если $a_{oi}>a_+\equiv\sqrt{\frac{2}{\mu_1}+\sqrt{\frac{4}{\mu_1^2}+\frac{16(n^2+1)(\mu_2-\alpha_1)}{\mu_1(\mu_2+n^2\alpha_1)}}}$

$sign\,\lambda_3=(-1)^{K+1}$, если $a_{oi}<a_+$ и $\lambda_3=0$, если $a_{oi}=a_+$, где $K=\theta_{oi}/\pi$.

Из анализа знаков $Re\lambda_i$, $i=1,2,3$ находим, что $(a_{o1}, b_o, 2\pi)$ экспоненциально устойчиво, если $\mu_1>n^2\mu_2$ и экспоненциально дихотомично, если $\mu_1<n^2\mu_2$, а в случае $\mu_1=n^2\mu_2$ для исследования устойчивости $(a_{o1}, b_o, 2\pi)$ требуется рассмотрение уравнений высших приближений; (a_{o2}, b_o, π), (a_{o3}, b_o, π) — экспоненциально дихотомичны, а для исследования устойчивости $(\frac{2}{\sqrt{3\mu_1}}, b_o, \pi)$ следует рассмотреть уравнения высших приближений. На основании теоремы 5 [61] можно утверждать, что система (3.1) имеет цикл, приближено определяемый соотношениями $(i=1,\ K=2)$:

$$\sqrt{x^2+\frac{\dot{x}^2}{\omega^2}}=a_{0i}+\frac{\varepsilon}{2\omega}\left(a_{0i}+nb_0(-1)^k\right)\left(\frac{\sin 4\psi}{4}+\frac{\sin 2\psi}{2}\right),$$

$$\sqrt{y^2+\frac{\dot{y}^2}{\omega^2}}=b_0+\frac{\varepsilon}{2\omega}\left(b_0-na_{0i}(-1)^k\right)\left(\frac{\sin 4\psi}{4}+\frac{\sin 2\psi}{2}\right)$$

(ψ - произвольная постоянная), а в случае $f_3(a)>0$ -еще два экспоненциально дихотомичные цикла, которые с точностью до величин порядка ε^2 определяются соотношениями (3.15) при $k=1$, $i=2,3$.

Цикл (3.15) при $k=2$, $i=1$ экспоненциально устойчив, если $\mu_1>n^2\mu_2$ и экспоненциально дихотомичный, если $\mu_1<n^2\mu_2$.

Аналогично можно провести анализ и в других частных случаях.

Таким образом , пользуясь первым приближением , мы установили , что система (3.1) обладает :

в нерезонансном случае - экспоненциально устойчивым тором ;

в случае резонанса $\omega_1=3\omega_2$ $(\omega_2=3\omega_1)$ - экспоненциально устойчивым циклом , а при $4\mu_2^3-3\mu_1(n\alpha_1)^2>0$ $(4\mu_1^3-3\mu_2\times(n\alpha_2)^2>0)$ еще двумя экспоненциально дихотомичными циклами;

в случае главного резонанса $\omega_1=\omega_2=\omega$ - при выполнении соотношений (3.9) двумя циклами , которые экспоненциально устойчивы, если выполнены соотношения (3.11) и экспоненциально дихотомичны в противном случае;

при $\mu_1=\alpha_2$, $\mu_2>\alpha_1$ циклом , который экспоненциально устойчив, если $\mu_1>n^2\mu_2$ и экспоненциально дихотомичный, если $\mu_1<n^2\mu_2$, а если , кроме того , имеет место соотношение $f_3(a)>0$, то еще двумя экспоненциально дихотомичными циклами.

Эти циклы и тор приближенно определяются формулами (3.5), (3.10, (3.15) и (3.2).

§ 2.4. Периодическая задача для оператора Дирака и нелинейные уравнения Шредингера

В работах [16,19,23,33,34,47-49,71,127], посвященных изучению периодической задачи для уравнения Кортевега-де Фриза, была обнаружена тесная связь этой задачи с решением классической проблемы обращения Якоби абелевых интегралов на гиперэллиптической римановой поверхности Γ рода N функции $w=\sqrt{P(z)}$, где $P(z)$ - алгебраический полином степени $2N+1$ с простыми корнями. Применение методов алгебраической геометрии [19,37,38,127] позволило получить точные почти-периодические и солитонные решения широкого класса нелинейных эволюционных уравнений [18,23,35,36,39,72-75], а также привело к глубокому пониманию как сущности математических структур, лежащих в основе этих методов (представление Лакса, абелевы многообразия и др.), так и физических явлений, приводящих к этим уравнениям, в частности, стохастизации, эргодичности фазовых потоков и многих других.

Основным математическим аппаратом при получении этих результатов является анализ специальных дифференциальных (интегральных) уравнений на компактных римановых поверхностях, ведущий к точному построению так называемых конечнозонных решений нелинейных эволюционных уравнений. (В случае уравнения Кортевега-де Фриза конечнозонным решениям соответствуют операторы Штурма-Лиувилля с конечным числом зон устойчивости Ляпунова [19]).

Однако, в практических приложениях этих решений часто возникают ситуации, позволяющие обойтись без их абсолютно точных выражений. То есть, очень часто изучаемые нелинейные волны локально (в пространстве переменных x и t) являются точными почти-периодическими функциями, которые распространяются на большие расстоя -

ния, допускают медленное изменение своих частот , амплитуд и волновых чисел. Такая модуляция (медленное по сравнению с почти-периодами изменение параметров почти-периодических волн) нелинейных волн естественно происходит также при достижении асимптотических состояний точных решений, которые возникают из разного типа начальных данных для рассматриваемых дифференциальных уравнений. Чтобы описать эту ситуацию , вводятся два масштаба - локальный и медленный ($X = \varepsilon x$, $T = \varepsilon t$) , где ε - малый положительный параметр. При этом предполагается , что параметры $(\mathcal{U}, \vec{k}, \vec{\omega})$ почти-периодической нелинейной волны зависят от медленных переменных (X, T) , но не зависят от локальных переменных (x, t) .

Очевидно , проблема изучения процесса модуляции (медленного изменения параметров $(\mathcal{U}, \vec{k}, \vec{\omega})$) почти-периодической волны аналогична проблеме нестационарных колебаний в классической нелинейной механике.

Имеется несколько эквивалентных подходов к проблеме изучения процесса модуляции (динамики величин $\mathcal{U}, \vec{k}, \vec{\omega}$ по переменным X, T): метод Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна (ВКБ) [50, 128] , методы усреднения, основанные на лагранжевом и гамильтоновом формализмах [90], метод усредненных законов сохранения (метод Уизема) [134,135] и др.[108,121] . Все эти методы - частные случаи общего метода усреднения Крылова-Боголюбова-Митропольского [6,7,41] , развитого в последующих работах [8,54,56, 61-65] .

Так как почти-периодическая волна полностью определяется параметрами исходной римановой поверхности Γ , то задача описания нелинейной волны приводит к изучению деформаций римановых поверхностей, зависящих от медленных переменных (X, T) . В частности, важной является математическая проблема деформаций гиперэллиптических римановых поверхностей конечного рода. Новые результаты в этом направлении получены недавно в работе [107] , где нашел математическое обоснование метод усреднения Уизема на модели нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза.

Этот и следующий параграф посвящены изучению изменения параметров гиперэллиптических римановых поверхностей, возникающих при алгебро-геометрическом анализе почти-периодических нелинейных волн уравнения Шредингера , имеющего широкие приложения в физике. Алгебро-геометрический анализ нелинейного уравнения Шредингера был выполнен в работах [22,31,32,36], результаты которых будем использовать.

Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера

$$i u_t + u_{xx} - 2 |u|^2 u = 0, \tag{4.1}$$

где функция $u(x,t)$ комплекснозначна и достаточное число раз дифференцируема по переменным x и t . С уравнением (4.1) свяжем линейный оператор Дирака:

$$L_\tau = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & i u(x+\tau, t) \\ -i u^*(x+\tau, t) & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

В (4.2) функция $u(x,t)$ считается периодической по x с периодом ℓ: $u(x+\ell, t) = u(x, t)$.

Рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$L_\tau y = \lambda y, \quad y_1(0) = y_1(\ell) = 0, \tag{4.3}$$

где вектор $y = (y_1, y_2)$ принадлежит плотному подмножеству гильбертового пространства $\mathcal{L}_2([0,\ell])$. Тогда стандартными методами можно показать , что спектр оператора L_τ содержит в общем случае бесконечное число собственных значений, лежащих в лакунах спектра оператора $L = L_\tau|_{\tau=0}$ при периодических граничных условиях. Будем считать , что оператор L имеет в непрерывном спектре только конечное число лакун (о существовании таких операторов см.[51 , 52]).

Обозначим "подвижные" собственные значения задачи (4.3) через $\mu_k = \mu_k(\tau, t)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, где N - число лакун в спектре оператора L , $\psi(x, t, \lambda)$ - решение Флоке для оператора L .Можно показать (см.[31 , 123]), что его первая компонента $\psi_1(x, t, \lambda)$ является однозначной аналитической функцией на римановой поверхности Γ функции $z = \sqrt{P(\lambda)}$, где $P(\lambda) = \prod_{k=1}^{2N+2} (\lambda - E_k)$, причем нули ее расположены над точками $\mu_k(x, t)$, а полюса - над точками $\mu_k(0, t)$. Поведение функции $\psi_1(x, t, \lambda)$ вблизи точек $\pm\infty$ описывается асимптотиками

$$\psi_1(x, t, \lambda) \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} e^{-i\lambda x} \frac{u(x, t)}{u(0, t)}, \quad \psi_1(x, t, \lambda) \underset{\lambda \to -\infty}{\sim} e^{i\lambda x} \tag{4.4}$$

Для определения точек $\mu_k(x, t)$ на поверхности Γ необходимо решить следующую проблему обращения Якоби для абелевых интегралов [31,74]:

$$\sum_{k=1}^{N} \omega_i(\mu_k(x, t)) = \alpha_i x + \beta_i t + \sum_{k=1}^{N} \omega_i(\mu_k(0,0)), \tag{4.5}$$

где

$$d\omega_i(\lambda) = \sum_{j=0}^{N-1} C_{ij} \lambda^j \left[P(\lambda) \right]^{-\frac{1}{2}} d\lambda,$$

$$\oint_{a_i} d\omega_j(\lambda) = \delta_{ij}, \qquad \oint_{b_i} d\omega_j(\lambda) = B_{ij}.$$

Здесь a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ - базис одномерной группы гомологий многообразия Γ, $\alpha_j = 2i\, C_{j,N-1}$,

$$\beta_j = -4i \left[C_{j,N-2} + \frac{1}{2} C_{j,N-2} \sum_{k=1}^{2N+2} E_k \right].$$

Из асимптотических формул (4.4) можно определить явный вид функции

$$\Psi_1(x,t,\lambda) = \left\{ \frac{u(x,t)}{u(0,t)} \prod_{j=1}^{N} \frac{(\lambda - \mu_j(x,t))}{(\lambda - \mu_j(0,t))} \right\}^{\frac{1}{2}} \times \tag{4.6}$$

$$\times\, e^{\left\{ -i \int_0^x \frac{\sqrt{P(\lambda)}}{\prod_{k=1}^{N} (\lambda - \mu_k(\tau,t))} d\tau \right\}}.$$

Функция $\Psi_2(x,t,\lambda)$ находится из соотношения

$$\psi_2(x,t,\lambda) = \frac{\lambda\,\psi_1(x,t,\lambda) + i\,\psi'_{1,x}(x,t,\lambda)}{i\;u(x,t)}$$

Определим величину

$$p(\lambda) = \int_0^{\ell} \frac{\sqrt{P(\lambda)}}{\prod_{k=1}^{N}(\lambda-\mu_k(\tau,t))}\,d\tau, \qquad (4.7)$$

которая является , очевидно , производящей функцией для законов сохранения нелинейного уравнения Шредингера (4.I).

Вычислим вариационную производную $\frac{\delta p}{\delta u^*}$. Для этого рассмотрим дифференциальные выражения

$$\begin{aligned}
&-i\,\psi'_{1,x} + i\,u\,\psi_2 = \lambda\,\psi_1, \\
&i\,\psi'_{2,x} - i\,u^*\psi_1 = \lambda\,\psi_2, \\
&-i\,\tilde{\psi}'_{1,x} + i\,\tilde{u}\,\tilde{\psi}_2 = \lambda\,\tilde{\psi}_1, \\
&i\,\tilde{\psi}'_{2,x} - i\,\tilde{u}^*\tilde{\psi}_1 = \lambda\,\tilde{\psi}_2,
\end{aligned} \qquad (4.8)$$

где $\tilde{u} = u + \delta u$. Тогда из (4.8) легко находим:

$$\left[\psi_1\tilde{\psi}_2 - \tilde{\psi}_1\psi_2\right]\Big|_0^{\ell} = \int_0^{\ell}\left[-\delta u\,\tilde{\psi}_2\psi_2 + \delta u^*\,\tilde{\psi}_1\psi_1\right]dx. \qquad (4.9)$$

Выбирая вместо функции $\tilde{\psi}_1(x,t,\lambda)$ функцию вида $\sigma\,\psi_1(x,t,\lambda)$, где σ - перестановка листов римановой поверхности Γ , из (4.9) получаем

$$i\,\frac{\delta p(\lambda)}{\delta u^*(x,t)}\;\frac{1}{u(0,t)}\left(\psi_1\tilde{\psi}'_{1,x}-\tilde{\psi}_1\psi'_{1,x}\right)\Big|_{x=0}=\psi_1(x,t,\lambda)\tilde{\psi}_1(x,t,\lambda). \tag{4.10}$$

Учитывая выражение (4.6) для $\psi_1(x,t,\lambda)$ из (4.10) находим [16], что

$$\frac{\delta p(\lambda)}{\delta u^*(x,t)}=-\frac{u(x,t)\prod\limits_{k=1}^{N}(\lambda-\mu_k(x,t))}{2\sqrt{P(\lambda)}}\,. \tag{4.11}$$

При выводе формулы (4.11) мы воспользовались следующим соотношением (см. формулу (6) в [31]):

$$\psi_1\tilde{\psi}'_{1,x}-\psi'_{1,x}\tilde{\psi}_1=\frac{2i\sqrt{P(\lambda)}}{\prod\limits_{k=1}^{N}(\lambda-\mu_k(x,t))}\,. \tag{4.12}$$

Пусть

$$ip(\lambda)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mathcal{H}_j(u,u^*)}{(2i\lambda)^j}+i\lambda l.$$

Из (4.11) получаем:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\delta\mathcal{H}_j}{\delta u^*}(2i\lambda)^{-j}=-\frac{u(x,t)\prod\limits_{j=1}^{N}(\lambda-\mu_j(x,t))}{2\sqrt{P(\lambda)}}\,. \tag{4.13}$$

Легко видеть , что в разложении

$$-\frac{u(x,t)\prod\limits_{j=1}^{N}(\lambda-\mu_j(x,t))}{2\sqrt{P(\lambda)}}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\beta_j(x,t)}{(2i\lambda)^j}$$

все величины $\beta_j(x,t),\ j=N,N+1,\ldots$ линейно выражаются через $\beta_1(x,t),\beta_2(x,t),\ \ldots,\ \beta_{N-1}(x,t)$ с постоянными коэффициентами (см. [16] комментарии к формуле (2.6)). Тогда из (4.13) следует существование постоянных чисел C_j, $j=1,2,\dots,N$ таких, что имеют место соотношения

$$\sum_{j=1}^{N} C_j \frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u^*} = 0$$

(для стационарных конечнозонных потенциалов $u(x)$ [16]) и

$$\sum_{j=1}^{N} C_j \frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u^*} = i\, u_t \qquad (4.14)$$

(для потенциалов $u(x,t)$, зависящих от переменной t согласно "высшим" уравнениям Шредингера [22]).

Найдем теперь законы сохранения для уравнения (4.I) в форме

$$\frac{\partial G_j}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial t}, \quad j=1,2,\dots .$$

Для этого рассмотрим следующие совместные линейные задачи на функции $\psi_1(x,t,\lambda)$, $\psi_2(x,t,\lambda)$:

$$\psi'_{1,x} = \lambda i \psi_1 + u \psi_2, \quad \psi'_{2,x} = -\lambda i \psi_2 + u^* \psi_1 \qquad (4.15)$$

$$\psi'_{1,t} = \left[-2\lambda^2 i - i|u|^2\right]\psi_1 + \left[-2\lambda u + i u'_x\right]\psi_2,$$
$$\psi'_{2,t} = \left[2\lambda^2 i + i|u|^2\right]\psi_2 + \left[-2\lambda u^* - i u^{*\prime}_x\right]\psi_1. \qquad (4.16)$$

Условием совместности для (4.I5) и (4.I6) является уравнение (4.I). Из (4.I5), исключив функцию $\psi_2(x,t,\lambda)$, находим уравнение для функции $\psi_1(x,t,\lambda)$:

$$u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial x}\psi_1\right) + i\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x} - \ln u\right)\psi_1 + \lambda^2\psi_1 = |u|^2\psi_1. \qquad (4.17)$$

Пусть параметр $\lambda \to \infty$. Тогда для $\psi_1(x,t,\lambda)$ можно записать:

$$\psi_1(x,t,\lambda) = \exp\{ i\lambda x + \int_0^x \varphi(s,t,\lambda)\,ds. \tag{4.18}$$

Из (4.17) находим

$$\varphi = \frac{1}{2i\lambda}\left[|u|^2 - \varphi^2 + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi}{u}\right)\right]. \tag{4.19}$$

Подставляя (4.18) в (4.15) , (4.16), имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t,\lambda) = \frac{\partial}{\partial x}\left[-i|u|^2 + \frac{iu'_x - 2\lambda u}{u}\varphi\right]. \tag{4.20}$$

Для функции $\varphi(x,t,\lambda)$ получим асимптотическую при $|\lambda|\to\infty$ формулу вида

$$\varphi(x,t,\lambda) \sim \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j(x,t)}{(2i\lambda)^j}.$$

Из соотношения (4.19) для $\varphi_j(x,t)$ находим рекуррентную зависимость [22,116]

$$-\varphi_{j+1} = u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u}\varphi_j\right) + \sum_{k=1}^{j-1}\varphi_k\varphi_{j-k}, \quad \varphi_1 = |u|^2.$$

По этой формуле последовательно можно найти φ_j, $j=2,3,\ldots$. Так, например,

$$\varphi_2 = -u u^*_x, \qquad \varphi_3 = u u^*_{xx} - |u|^4,$$

$$\varphi_4 = -u u^*_{xxx} + 3u^2 u^* u^*_x + \frac{1}{2}(|u|^4)'_x.$$

Из (4.20) получаем $\quad \dfrac{\partial\varphi_j}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{iu'_x}{u}\varphi_j + i\varphi_{j+1}\right).$

Таким образом , имеем:

$$G_j = i\, u_x' u^{-1} \mathcal{F}_j + i\, \mathcal{F}_{j+1}, \quad \mathcal{F}_j = \varphi_j, \; j =$$

Законы сохранения $\mathcal{H}_j$, очевидно , записываются так:

$$\mathcal{H}_j = \int_0^{\ell} \mathcal{F}_j (u, u^*)\, dx. \tag{4.21}$$

Отметим также гамильтонову форму уравнения (4.I) вида (4.I4)

$$i\, u_t = -\frac{\delta \mathcal{H}_3}{\delta u^*}, \qquad i\, u_t^* = \frac{\delta \mathcal{H}_3}{\delta u}$$

Используя решение проблемы обращения Якоби (4.5) , получаем формулы для решений $u(x,t)$ уравнения (4.I) через θ -функции

$$u(x,t) = \frac{\theta(\vec{g}(x,t) - \vec{z})\, \theta(\vec{g}(0,0) + \vec{z})}{\theta(\vec{g}(x,t) + \vec{z})\, \theta(\vec{g}(0,0) - \vec{z})} \times \tag{4.22}$$

$$\times \exp\left[i E_0 x + i N_0 t + \Omega \right],$$

$$|u(x,t)| = -2R_1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(\vec{g}(x,t) + \vec{z}),$$

где

$$\vec{g}(x,t) = \vec{\alpha} x + \vec{\beta} t + \vec{\gamma}, \quad \vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N),$$

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{N} \omega_j (\mu_i(0,0)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} B_{ij} - \frac{j}{2},$$

числа E_0 , N_0 , R_1 и Ω однозначно определяются по параметрам римановой поверхности Γ (см. [3I,32]),

$\theta(\vec{u})$, $\vec{u} \in \mathbb{C}^N$ - стандартная многомерная тэта-функция Римана [88 , 97], построенная при помощи матрицы периодов базиса абелевых интегралов первого рода на поверхности Γ :

$$\theta(\vec{u}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^N} \exp\left\{ 2\pi i (\vec{m}, \vec{u}) + \pi i (\vec{m}, B\vec{m}) \right\}.$$

Матрица $B = \| B_{ij} \|$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$ - симметрична , а ее мнимая часть положительно определена.

§ 2.5. Усреднение модулированных законов сохранения нелинейного уравнения Шредингера и связь с алгебраической геометрией

2.5.1. Выражение (4.22) задает точное решение нелинейного уравнения Шредингера (4.1), зависящее от $2N+2$ параметров гиперэллиптической римановой поверхности Γ функции $w=\sqrt{P(z)}$. В силу свойств θ - функции Римана $u(x,t)$ - почти-периодическая функция переменных x и t с почти-периодами

$$\left\{ T_{1,x}, \quad T_{2,x}, \quad \ldots, \quad T_{N,x} \right\},$$

$$\left\{ T_{1,t}, \quad T_{2,t}, \quad \ldots, \quad T_{N,t} \right\},$$

которые определяются соотношениями

$$T_{j,x}^{-1} = \sum_{i=1}^{N} (B^{-1})_{ji}\, \alpha_i, \quad T_{j,t}^{-1} = \sum_{i=1}^{N} (B^{-1})_{ji}\, \beta_i$$

Рассмотрим слабо нестационарные (квазистационарные) нелинейные волны (волны с медленно меняющимися параметрами), описываемые нелинейным уравнением Шредингера (4.1). Предположим, что параметры нелинейной волны (амплитуда u, волновые числа $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_N)$ и частоты $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$) слабо зависят от переменных x и t. Естественно считать, что эта зависимость решения $u(x,t,X,T)$ уравнения (4.1) от переменных X и T происходит от зависимости параметров E_j, $j=1,2,\dots,2N+2$, гиперэллиптической римановой поверхности Γ, которая полностью определяет решение (4.22). Решению задачи описания медленно меняющихся нелинейных волн для уравнений Клейна-Гордона, Кортевега-де Фриза, Буссинеска и др. при помощи асимптотических методов посвящены исследования [90, 108,121,134,135].

В данном параграфе проведем изучение процесса модуляции нелинейных волн, описываемых нелинейным уравнением Шредингера (4.1), при помощи метода усреднения законов сохранения для уравнения (4.1). Отметим, что формулы (4.22) для N - почти-периодического решения $u(x,t)$ нелинейного уравнения Шредингера позволяют получить выражения для усредненных модулированных законов сохранения уравнения (4.1), представимые через гиперэллиптические интегралы и функции от $E_1, E_2, \dots, E_{2N+2}$. При выводе дифференциальных уравнений для функций $E_j(X,T)$, $j=1,2,\dots,2N+2$, ограничимся уравнениями первого приближения. Высшие приближения можно построить аналогично тому, как это сделано в работах [101, 108, 121] при помощи методов теории возмущений применительно к задаче распространения нелинейных волн на воде.

Известно [90,107], что если плотности потоков F_j, G_j, $j=1,2,\dots$, слабо зависят от переменных $(X,T)=(\varepsilon x, \varepsilon t)$, ε - малый параметр , то соответствующие уравнения модуляционных усредненных функций $\langle \mathcal{F}_j \rangle$ и $\langle G_j \rangle$ имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial X} \langle G_j \rangle = \frac{\partial}{\partial T} \langle \mathcal{F}_j \rangle , \tag{5.1}$$

где для произвольной функции $S(x, X, T)$ введено обозначение

$$\langle S(x, X, T) \rangle = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} S(x, X, T)\, dx . \tag{5.2}$$

Из формулы (4.22), определяющей N - почти-периодическое решение нелинейного уравнения Шредингера (4.1), легко найти волновой вектор $\vec{k}$ и вектор частот $\vec{\omega}$ для решения $u(x,t)$:

$$\vec{k} = 2i \quad B^{-1} \vec{C}_{N-1} ,$$

$$\vec{\omega} = -4i \quad B^{-1} \left[\vec{C}_{N-2} + \frac{1}{2} \vec{C}_{N-1} \sum_{j=1}^{2N+2} E_j \right] .$$

Будем предполагать , что волновые числа $k_1, k_2, \dots, k_N$ - несоизмеримы , т.е.

$$(\vec{n}, \vec{k}) = 0 , \quad \vec{n} \in \mathbb{Z}^N \Leftrightarrow |\vec{n}| = |n_1| + |n_2| + \dots + |n_N| = 0 .$$

Решение $u(x, t, \vec{E})$ можно представить в "фазовой" форме

$$u(x, t, \vec{E}) = U(\xi_1(x,t), \xi_2(x,t), \dots, \xi_N(x,t), \vec{E}) ,$$

где $\vec{\xi} = \vec{k}x + \vec{\omega}t + \vec{\theta}_0$, значения фазы $\vec{\theta}_0$ определяются по начальным данным для уравнения (4.1). Отметим , что ξ -переменные являются двойственным объектом для μ - переменных , введенных в § 2.4 и двигающихся по циклам на гиперэллиптической поверхности Γ .

В силу свойств θ - функции Римана функция $u(\vec{\xi}, \vec{E})$ является 2π - периодической по ξ - переменным

$$u(\xi_1, \ldots \xi_{i-1}, \xi_i + 2\pi, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_N, \vec{E}) = u(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i, \xi_{i+1}, \ldots \xi_N, \vec{E})$$

Эти свойства решения $u(x,t,\vec{E})$ $(u(\vec{\xi},\vec{E}))$ имеют очевидную геометрическую интерпретацию. Пусть $\mathcal{M} = [0,2\pi) \times [0,2\pi) \times \ldots \times [0,2\pi)$ - N -мерный тор. Тогда решение $u(\vec{\xi},\vec{E})$ можно рассматривать на торе $\mathcal{M}$. Линейные обмотки тора $\mathcal{M}$ задают семейство почти-периодических решений уравнения (4.I). Поток $\vec{\xi}(x,t)$ покрывает тор $\mathcal{M}$ эргодически (волновые числа κ_1, $\kappa_2, \ldots, \kappa_N$ - несоизмеримы). Тогда по эргодической теореме [2]

$$\langle S \rangle = \langle S(u(x,t,\vec{E})) \rangle = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} S(u(x,t,\vec{E}))\, dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^N \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} S(u(\vec{\xi},\vec{E})\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_N .$$

(При усреднении медленные переменные X , T " заморожены").

Так как интегрирование более просто в μ- переменных , то выполнив соответствующую замену переменных , получаем:

$$\langle S \rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^N \oint\limits_{\mu_1 - \text{цикл}} \ldots \oint\limits_{\mu_N - \text{цикл}} S(u(\vec{\mu},\vec{E})) \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \vec{\mu}}\, d\mu_1 \ldots d\mu_N . \tag{5.3}$$

где якобиан перехода $\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \vec{\mu}}$ вычисляется аналогично тому, как это сделано в работах [I07 , I27]

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N} \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial\vec{\mu}} = \frac{\prod\limits_{i>j}^{N} (\mu_i - \mu_j)}{V \prod\limits_{i=1}^{N} R(\mu_i)},$$

$$V = \det \left[\oint\limits_{\mu_j\text{-цикл}} \frac{\mu^{k-1}}{R(\mu)} d\mu \right], \quad R(\mu) = \sqrt{P(\mu)}. \tag{5.4}$$

Пути интегрирования по μ - циклам , определяющиеся границами лакун спектра оператора L_τ , схематически изображаются так: $[E_{2j} \to E_{2j-1}] \cup [E_{2j-1} \to E_{2j}]$, причем направление обхода выбирается против часовой стрелки.

Пусть теперь $S = S(\vec{\mu}, \vec{E})$, $\vec{\mu} = \vec{\mu}(x,t)$, $\vec{E} = E(X, T)$. Тогда из соотношений (5.3) и (5.4) находим (см. [107] ,с.760)

$$\langle S(\vec{\mu}, \vec{E}) \rangle = \frac{1}{\det \mathcal{M}} \int\limits_{E_1}^{E_2} \ldots \int\limits_{E_{2N-1}}^{E_{2N}} S(\vec{\mu}, \vec{E}) \frac{\prod\limits_{i>j} (\mu_i - \mu_j)\, d\mu_1 \ldots d\mu_N}{\prod\limits_{i=1}^{N} R(\mu_i)},$$

где матрица $\mathcal{M}$ задана формулой

$$\mathcal{M} = \| \mathcal{M}_{ij} \| = \left\| \int\limits_{E_{2j-1}}^{E_{2j}} \frac{\mu^{j-1} d\mu}{R(\mu)} \right\|, \quad i,j = 1, 2, \ldots, N.$$

Для нахождения значений усредненных по формуле (5.2) функций $\mathcal{F}_j$, G_j в явном виде вычислим средние для производящих функций $\varphi(x, t, \lambda)$, $g(x, t, \lambda)$ величин $\mathcal{F}_j$, G_j . Предварительно заметим, что из формул (4.6), (4.7) и (4.18) следует такое соотношение для производящей функции

$$i\lambda + \varphi(x, t, \lambda) - \frac{1}{2}\left(\ln u(x,t)\right)'_x = \tag{5.5}$$

$$= \frac{-i\sqrt{P(\lambda)} + \frac{1}{2}\left(\prod_{j=1}^{N}(\lambda-\mu_j(x,t))\right)'_x}{\prod_{j=1}^{N}(\lambda-\mu_j(x,t))},$$

где в тождестве (5.5) параметр λ находится на нижнем листе римановой поверхности Γ функции $z=\sqrt{P(\lambda)}$. (Это следует из асимптотических свойств (4.4) функции $\psi_1(x,t,\lambda)$).

При вычислении средних значений $\langle\varphi(x,t,\lambda)\rangle$, $\langle g(x,t,\lambda)\rangle$ полезны следующие формулы для решения $u(x,t)$ [31] :

$$\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\ln u = \sum_{j=1}^{N}\mu_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2N+2}E_j, \tag{5.6}$$

$$|u|^2 = -\sum_{j=1}^{N}\mu_j^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln u + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2N+2}E_j^2. \tag{5.7}$$

Тогда для значения $\langle\varphi\rangle = \langle\varphi(x,t,\lambda)\rangle$ из (4.6), (4.18) и (5.6) имеем:

$$\begin{aligned}\langle\varphi\rangle = -i\lambda + \left\langle \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{N}\mu_j - \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{2N+2}E_j\right\rangle + \\ + \left\langle \frac{i\sqrt{P(\lambda)} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\prod_{j=1}^{N}(\lambda-\mu_j(x,t))\right)}{\prod_{j=1}^{N}(\lambda-\mu_j(x,t))}\right\rangle.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Легко доказать следующие равенства:

$$\left\langle -\frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{2N+2}E_j\right\rangle = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{2N+2}E_j. \tag{5.9}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\mu_j(x,t) = \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\prod_{j=1}^{N}(1+\nu\mu_j(x,t))\right)\Big|_{\nu=0},$$

$$\left\langle \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{N} \mu_j(x,t) \right\rangle = -i \det{}^{-1} \mathcal{M} \times \tag{5.10}$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\int_{E_1}^{E_2} \dots \int_{E_{2N-1}}^{E_{2N}} \prod_{j=1}^{N} \frac{1+\nu\mu_j}{R(\mu_j)} \prod_{i>j} (\mu_i - \mu_j)\, d\mu_1 \dots d\mu_N \right] \Bigg|_{\nu = 0},$$

$$\left\langle \frac{\frac{\partial}{\partial x} \prod\limits_{j=1}^{N} (\lambda - \mu_j(x,t))}{\prod\limits_{j=1}^{N} (\lambda - \mu_j(x,t))} \right\rangle = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \frac{\partial}{\partial x} \ln \prod_{j=1}^{N} (\lambda - \mu_j(x,t))\, dx \; 0,$$

$$\left\langle \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{N} (\lambda - \mu_j(x,t))} \right\rangle = \int_{E_1}^{E_2} \dots \int_{E_{2N-1}}^{E_{2N}} \frac{\prod\limits_{i>j} (\mu_i - \mu_j)\, d\mu_1 \dots d\mu_N}{\det\mathcal{M} \prod\limits_{j=1}^{N} R(\mu_j)(\lambda - \mu_j)} = \tag{5.11}$$

$$= \det \mathcal{K} \cdot \det{}^{-1} \mathcal{M},$$

где матрица $\mathcal{K}$ имеет вид

$$\mathcal{K} = \| \mathcal{K}_{ij} \| = \left\| \int_{E_{2j-1}}^{E_{2j}} \frac{\mu^{i-1}\, d\mu}{(\lambda - \mu) R(\mu)} \right\|, \quad i,j = 1, 2, \dots, N. \tag{5.12}$$

Найдем в явном виде выражение для $\frac{\partial}{\partial \nu} \{\dots\} \big|_{\nu=0}$: имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \int_{E_1}^{E_2} \dots \int_{E_{2N-1}}^{E_{2N}} \frac{(1+\nu\mu_j)}{R(\mu_j)} \prod_{i>j} (\mu_i - \mu_j)\, d\mu_1 \dots d\mu_N \right\} \Bigg|_{\nu=0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \int_{E_1}^{E_2} \dots \int_{E_{2N-1}}^{E_{2N}} \det \left\| \frac{(1+\nu\mu_j)\, \mu_j^{k-1}}{R(\mu_j)} \right\| d\mu_1 \dots d\mu_N \right\} \Bigg|_{\nu=0} = \tag{5.13}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \nu}\left\{ \det \left\| \int\limits_{E_{2j-1}}^{E_{2j}} \frac{(1+\nu\mu)\,\mu^{k-1}}{R(\mu)}\,d\mu \right\| \right\}\Bigg|_{\nu=0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \nu}\left\{ \det \left\| \int\limits_{E_{2j-1}}^{E_{2j}} \frac{\mu^{k-1}\,d\mu}{R(\mu)} + \nu \int\limits_{E_{2j-1}}^{E_{2j}} \frac{\mu^{k}\,d\mu}{R(\mu)} \right\| \right\}\Bigg|_{\nu=0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \nu}\left\{ \det \mathcal{M} + \nu \det \mathcal{M}_1 \right\}\Big|_{\nu=0} = \det \mathcal{M}_1 ,$$

где матрица $\mathcal{M}_1$ задана формулой

$$\mathcal{M}_1 = \| \mathcal{M}_{1,j,k} \| = \left\| \int\limits_{E_{2j-1}}^{E_{2j}} \frac{\mu^{k-1+\delta_{k,N}}}{R(\mu)}\,d\mu \right\|, \; j,k = 1,2,\ldots,N.$$

Из формул (5.8)-(5.13) окончательно находим выражение для $\langle \varphi(x,t,\lambda) \rangle$:

$$\langle \varphi(x,t,\lambda) \rangle = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{2N+2} E_k - i\lambda - i\left\{ \frac{\det \mathcal{M}_1 - \sqrt{P(\lambda)}\,\det \mathcal{K}}{\det \mathcal{M}} \right\}. \quad (5.14)$$

Проведем аналогичные вычисления для производящей функции $g(x,t,\lambda)$ величин G_j . Из (4.20) получаем

$$g(x,t,\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{G_j}{(2i\lambda)^j} = -i|u|^2 + \left(i \frac{\partial}{\partial x} \ln u - 2\lambda\right)\varphi.$$

Отсюда, после усреднения,

$$\langle g(x,t,\lambda) \rangle = -i \langle |u|^2 \rangle + i \left\langle \frac{\partial}{\partial x}(\ln u)\cdot\varphi \right\rangle - 2\lambda \langle \varphi \rangle . \quad (5.15)$$

Вычислим сначала $\langle |u|^2 \rangle$. Из (5.7) находим

$$<|u|^2> = -<\sum_{k=1}^{N}\mu_k> + \frac{1}{2i}<\frac{\partial}{\partial x}\sum_{j=1}^{N}\mu_j> - \tag{5.16}$$

$$-\frac{1}{2}<\sum_{j=1}^{2N+2}E_j^2> - <\Big(\sum_{j=1}^{N}\mu_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2N+2}E_j\Big)^2>.$$

Нетрудно доказать , что имеют место следующие равенства:

$$<\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=1}^{N}\mu_k> = 0, \tag{5.17}$$

$$<\Big(\sum_{k=1}^{N}\mu_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N+2}E_k\Big)^2> = <\Big(\sum_{k=1}^{N}\mu_k\Big)^2> - \tag{5.18}$$

$$-<\sum_{k=1}^{N}\mu_k>\sum_{k=1}^{2N+2}E_k + \frac{1}{4}\Big(\sum_{k=1}^{2N+2}E_k\Big)^2.$$

Далее,

$$\Big(\sum_{j=1}^{N}\mu_j\Big)^2 = \frac{\partial^2}{\partial\nu\,\partial æ}\prod_{j=1}^{N}(1+\nu\mu_j)(1+æ\mu_j)\Big|_{\substack{\nu=0\\ æ=0}}.$$

Тогда получаем

$$<\Big(\sum_{k=1}^{N}\mu_k\Big)^2> = \frac{\partial^2}{\partial\nu\,\partial æ}\left\{\frac{\det\left\|\int_{E_{2k-1}}^{E_{2k}}\frac{(1+\nu\mu)(1+æ\mu)}{R(\mu)}\mu^{k-1}d\mu\right\|}{\det \mathcal{M}}\right\}\Big|_{\substack{\nu=0,\\ æ=0}} = \tag{5.19}$$

$$= \frac{\det\mathcal{M}_1 + \det\mathcal{M}_2}{\det\mathcal{M}},$$

где матрица $\mathcal{M}_2$ имеет вид:

$$\mathcal{M}_2 = \| \mathcal{M}_{2,j,k} \| = \left\| \int_{E_{2j-1}}^{E_{2j}} \frac{\mu^{k-1+2\delta_{k,N}}}{R(\mu)} d\mu \right\|, \quad j,k=1,2,\dots,N.$$

Из формул (5.10), (5.13), (5.16)-(5.19) находим выражение для $\langle |u|^2 \rangle$:

$$\langle |u|^2 \rangle = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2N+2} E_j^2 - \frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{2N+2} E_j\right)^2 + \tag{5.20}$$

$$+ \left\{ \left(\sum_{j=1}^{2N+2} E_j - 2 \right) \det \mathcal{M}_1 - \det \mathcal{M}_2 \right\} \det^{-1} \mathcal{M}.$$

Перейдем к вычислению $\langle i (\ln u)'_x \, \varphi \rangle$. Используя соотношения (5.6) и (5.8), получаем

$$\langle i (\ln u)'_x \, \varphi \rangle = \langle \left(2\sum_{j=1}^{N} \mu_j - \sum_{j=1}^{2N+2} E_j \right) \varphi \rangle =$$

$$= \frac{2}{i} \langle \left(\sum_{j=1}^{N} \mu_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2N+2} E_j \right)^2 \rangle - i\lambda \langle 2\sum_{j=1}^{N} \mu_j - \sum_{j=1}^{2N+2} E_j \rangle + \tag{5.21}$$

$$+ 2i\sqrt{P(\lambda)} \langle \frac{\sum_{k=1}^{N} \mu_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N+2} E_k}{\prod_{k=1}^{N} (\lambda - \mu_k)} \rangle + \langle \left(\sum_{j=1}^{N} \mu_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2N+2} E_j \right) \frac{\partial}{\partial x} \ln \prod_{j=1}^{N} (\lambda - \mu_j) \rangle.$$

Далее находим, что

$$\langle \sum_{k=1}^{2N+2} E_k \frac{\partial}{\partial x} \ln \prod_{j=1}^{N} (\lambda - \mu_j) \rangle = 0, \tag{5.22}$$

$$\langle \sum_{j=1}^{N} \mu_j \prod_{j=1}^{N} (\lambda - \mu_j)^{-1} \rangle = \langle \prod_{j=1}^{N} (\lambda - \mu_j)^{-1} \frac{\partial}{\partial \nu} \prod_{j=1}^{N} (1 + \nu \mu_j) \Big|_{\nu=0} \rangle =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \int_{E_1}^{E_2} \dots \int_{E_{2N-1}}^{E_{2N}} \frac{\prod_{j=1}^{N} (1+\nu\mu_j) \prod_{i>j} (\mu_i - \mu_j) \, d\mu_1 \dots d\mu_N}{\det \mathcal{M} \cdot \prod_{j=1}^{N} (\lambda - \mu_j) R(\mu_j)} \right\} \Bigg|_{\nu=0} = \tag{5.23}$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \det \left\| \int\limits_{E_{2j-1}}^{E_{2j}} \frac{(1+\nu\mu)\,\mu^{k-1}}{(\lambda-\mu)\,R(\mu)}\, d\mu \right\| \right\} \Big|_{\nu=0}}{\det \mathcal{M}} =$$

$$= \frac{\det \left\{ \int\limits_{E_{2j-1}}^{E_{2j}} \frac{\mu^{k-1+\delta_{k,N}}}{(\lambda-\mu)R(\mu)}\, d\mu \right\}}{\det \mathcal{M}} = \frac{\det \mathcal{K}_1}{\det \mathcal{M}},$$

где матрица $\mathcal{K}_1$ задана формулой

$$\mathcal{K}_1 = \| \mathcal{K}_{1,j,k} \| = \left\| \int_{E_{2j-1}}^{E_{2j}} \frac{\mu^{k-1+\delta_{k,N}}}{(\lambda-\mu)R(\mu)} \right\|, \quad j,k = 1,2,\ldots, N$$

Аналогично вычисляем

$$\left\langle \prod_{j=1}^{N} (\lambda-\mu_j)^{-1} \right\rangle = \frac{\det \mathcal{K}}{\det \mathcal{M}},$$

$$\left\langle \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} \mu_k \frac{\partial}{\partial x} \prod\limits_{j=1}^{N} (\lambda-\mu_j)}{\prod\limits_{j=1}^{N} (\lambda-\mu_j)} \right\rangle = 0. \tag{5.24}$$

Из формул (5.10) , (5.13), (5.19), (5.21)-(5.24) находим

$$\langle i\varphi \frac{\partial}{\partial x} \ln u \rangle = i\lambda \sum_{j=1}^{2N+2} E_j - \frac{i}{2} \Big(\sum_{j=1}^{2N+2} E_j \Big)^2 +$$

$$+\left\{2i\left(\sum_{j=1}^{2N+2} E_j-\lambda-1\right)\frac{\det \mathcal{M}_1}{\det \mathcal{M}}-2i\,\frac{\det \mathcal{M}_2}{\det \mathcal{M}}+\right. \tag{5.25}$$

$$\left.+\frac{i\sqrt{P(\lambda)}\left(2\det \mathcal{K}_1-\sum\limits_{j=1}^{2N+2} E_j \det \mathcal{K}\right)}{\det \mathcal{M}}\right\}.$$

Отметим , что при вычислении выражений (5.24) и (5.25) неявно использованы уравнения движения для функций $\mu_k(x,t)$, легко получаемые из формулы (4.6) и (4.12):

$$\frac{\partial \mu_k}{\partial x}=\frac{2i\sqrt{P(\mu_k)}}{\prod\limits_{j\neq k}^{N}(\mu_k-\mu_j)}.$$

Учитывая соотношения (5.14) , (5.15), (5.20) и (5.23) , получаем

$$\langle g(x,t,\lambda)\rangle=\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{2N+2} E_j^2-\frac{i}{4}\left(\sum_{j=1}^{2N+2} E_j\right)^2+2i\lambda^2+$$

$$+i\left\{\sum_{k=1}^{2N+2} E_k \det \mathcal{M}_1-\det \mathcal{M}_2+\sqrt{P(\lambda)}\times\right. \tag{5.26}$$

$$\left.\times\left\{2\det \mathcal{K}_1-\left(\sum_{j=1}^{2N+2} E_j-2\right)\det \mathcal{K}\right\}\right\}\cdot\frac{1}{\det \mathcal{M}}$$

Согласно представлению (5.5), $\varphi(x,t,\lambda)$ - однозначная и мероморфная функция на римановой поверхности Γ функции $\sqrt{P(\lambda)}$. После усреднения выражение $\langle \varphi(x,t,\lambda)\rangle$ перестанет представлять уже мероморфную функцию на поверхности Γ. Так, согласно явному выражению (5.14), функция $\langle \varphi(x,t,\lambda)\rangle$ может иметь особенности только в точках $E_1, E_2, \ldots, E_{2N+2}$, причем, вследствие интегрирования, особенности могут иметь даже логарифмический характер. Это указывает на то, что в общем виде функция $\langle \varphi(x,t,\lambda)\rangle$ - абелевый интеграл третьего рода.

Согласно (5.I), усредненные производящие функции $\langle\varphi(x,t,\lambda)\rangle$, $\langle g(x,t,\lambda)\rangle$ удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial T}\langle \varphi\rangle = \frac{\partial}{\partial X}\langle g\rangle. \qquad (5.27)$$

Из уравнений модуляций (5.27), разлагая абелевы интегралы $\langle\varphi\rangle$ и $\langle g\rangle$ в окрестности точки $\lambda = E_j(X,T)$, получаем уравнения движения, которым удовлетворяют функции $E_j = E_j(X,T)$ (уравнения деформаций римановой поверхности Γ):

$$S_j \frac{\partial E_j}{\partial X} = \frac{\partial E_j}{\partial T},$$

где скорости S_j - функция границ зон E_k, $k=1,2,\ldots,2N+2$. Явные формулы для S_j записываются через гиперэллиптические интегралы [I07].

2.5.2. Рассмотрим пример. Пусть $N=1$, корни полинома $P(\lambda)$ имеют вид $E_1=E_2=E=Re^{i\alpha}$, $E_3=E_4=E^*$. Используя результаты работ [31,32], аналогично п.п. I.I.4, I.2.4, 1.3.4 получаем

$$\mu(x,t) = R\cos\alpha + iR\sin\alpha\ \mathrm{th}\left[2R(x-4Rt\cos\alpha)\times\right.$$

$$\left.\times\sin\alpha + C\right],$$

$$u(x,t) = e^{6iR\cdot x\cos\alpha}\,\frac{\mathrm{ch}(4Rt\sin 2\alpha + C)}{\mathrm{ch}\left[2R(x-4Rt\cos\alpha)\sin\alpha + C\right]}$$

Далее находим

$$\langle\varphi\rangle = 0,\quad \langle y\rangle = i\left\{2\lambda^2 - E^2 - 2\lambda E^* + 2(E^*)^2 + 2\lambda - 2E^*\right\} \qquad (5.28)$$

Из формул (5.1) , (5.28) следует , что $E(X,T)$ зависит от T произвольным образом , а по переменной X удовлетворяет уравнению

$$E\,\frac{\partial E}{\partial X} = (2E^* - \lambda - 1)\,\frac{\partial E^*}{\partial X}$$

2.5.3. Сделаем одно замечание по поводу способа получения усредненных законов сохранения для уравнения (4.1) и уравнения Кортевега-де Фриза в работе [107].

В работе [16] при решении обратной периодической задачи для уравнения Кортевега-де Фриза получен ряд законов сохранения вида (см. формулу (3.5) в [16])

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = i \frac{\partial \varkappa}{\partial x},$$

где χ и $\varkappa$ - их производящие функции, мероморфные на соответствующей римановой поверхности Γ.

Другое представление этих законов сохранения получено в работе [111]

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u} - 6u \frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u}\right) \tag{5.29}$$

где $\mathcal{H}_j$ - законы сохранения (4.21).

Для производящей функции

$$\chi(x,t,\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u}}{(2i\lambda)^j}$$

существует представление вида (4.13), явившееся основным пунктом в доказательстве связи усредненной производящей функции $\langle \chi(x,t,\lambda) \rangle$ со специальными абелевыми дифференциалами на римановой поверхности Γ. Остановимся подробнее на выводе уравнений (5.29) в работах [16,111]. Это позволит доказать несуществование аналогичного представления для уравнения Шредингера (4.1). Итак, рассмотрим два уравнения:

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u}, \quad u_\tau = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u}, \tag{5.30}$$

где $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_j$ – некоторые из законов сохранения , задаваемых производящей функцией $\chi(x,t,\lambda)$. Так как динамические потоки, определяемые уравнениями (5.30), коммутируют [12], т.е.

$$\int_0^{\ell} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u} \, dx = 0,$$

то сравним производные $u_{t\tau}$ и $u_{\tau t}$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u}\right) = \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta u^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u}.$$

Выбирая вместо $\mathcal{H}$ закон сохранения , порождающий уравнение Кортевега-де Фриза , находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u}\right) = 6u \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u}\right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u}\right). \qquad (5.31)$$

Учитывая, что для вариационных производных $\dfrac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u}$ имеют место [42,107,127] соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta \mathcal{H}_{j+1}}{\delta u}\right) = \left(u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} u - \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) \frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u}, \qquad (5.32)$$

из (5.31) и (5.32) получаем в точности равенство (5.29).

Покажем , что описанная выше процедура не проходит для случая уравнения Шредингера. Для этого сначала получим уравнения в вариациях вида (5.31). Согласно (4.14), рассмотрим два коммутирующие динамические потоки (см.[22], где доказана их коммутативность) вида

$$i\, u_t = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u^*}, \qquad i\, u_\tau = -\frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u^*},$$

где $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_j$ - произвольные законы сохранения (4.21). Учитывая их коммутативность , находим

$$-\frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta u^* \delta u} \frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u'} + \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta u^* \delta u} \frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u^*} = -i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u^*} \right).$$

Выбирая вместо $\mathcal{H}$ закон сохранения $\mathcal{H}_3$, ведущий к нелинейному уравнению Шредингера (4.1), получаем соотношения:

$$2 u^2 \frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u} + \left(2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 8 u u^* \right) \frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u^*} = -i \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u^*}. \tag{5.33}$$

Запишем соотношение , аналогичное (5.32), воспользовавшись результатами работ [42,122],

$$u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta \mathcal{H}_{j+1}}{\delta u^*} \right) = u \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u^*} \right) - 2 u^2 \Big(u^* \frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u^*} - \tag{5.34}$$

$$- u \frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u} \Big) - 2 u' \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u^*} - \frac{\delta \mathcal{H}_{j+1}}{\delta u^*} \right) \right].$$

Чтобы получить отсюда законы сохранения вида (5.29) , необходимо представить выражение

$$2 u^2 \frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u^*} - 8 |u|^2 \frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u^*} \tag{5.35}$$

из формулы (5.33) при помощи тождества (5.34) в виде полной производной по переменной x . Но , как это легко видеть из (5.34), выражение (5.34) представить в таком виде нельзя. Тем самым соотношение (4.13) не может служить производящей функцией для абелевых дифференциалов на римановой поверхности Γ , как это было в случае уравнения Кортевега-де Фриза [107]. Поэтому данный подход , основанный на рассмотрении основной производящей функции, ведет к несколько другому и более регулярному методу усреднения модулированных законов сохранения. С этой точки зрения для уравнения Кортевега-де Фриза существует еще одно описание модулированных законов сохранения, основанное на анализе функции $\chi(x, t, \lambda)$, построенной в работе [16].

Литература

1. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблема устойчивости в небесной механике. - Успехи мат. наук, 1963, 18, № 6, с. 91-192.
2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики.- М.: Наука, 1978. - 432 с.
3. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 304 с.
4. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. - М.: Гостехиздат , 1961. - 936 с.
5. Белинский В.А. , Захаров В.Е. Интегрирование уравнений Эйнштейна методом обратной задачи рассеяния и вычисление точных солитонных решений . - Журн. эксп. и теор. физики , 1978, 75 ,№ 6, с. 1953-1971.
6. Боголюбов Н.Н. О некоторых статистических методах в математической физике. - Киев: Изд-во АН УССР, 1945. - 139 с.
7. Боголюбов Н.Н. , Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1974. - 504 с.
8. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. - Киев: Наукова думка, 1969. - 248 с.
9. Боголюбов Н.Н. (мл.), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Дискретная периодическая задача для модифицированного нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза. - Докл.АН СССР,1981, 258 , № 3, с. 575-580.
10. Боголюбов Н.Н. (мл.), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Дискретная периодическая задача для модифицированного нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза. - Теор. и мат.физика, 1982, 50 , № 1 , с. 118-126.
11. Боголюбов Н.Н. (мл.), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Точные почти-периодические и солитонные решения нелинейных урав-

нений распространения волнового импульса в двух уровневой среде без диссипации. - Докл. АН УССР, сер. А, 1982, № 4, с. 5-9.

12. Богоявленский О.И., Новиков С.П. О связи гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач. - Функц. анализ и его прилож., 1976, 10, № 1, с. 9-13.

13. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Новые качественные методы в небесной механике. - М.: Наука, 1971. - 442 с.

14. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. - М.: Наука, 1979. - 432 с.

15. Доброхотов С.Ю., Маслов В.П. Конечнозонные почти-периодические решения в ВКБ - приближениях. - Современные проблемы математики, 1980, 15, с. 3-94.

16. Дубровин Б.А. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечно-зонных потенциалов. - Функц. анализ и его прилож., 1975, 9, № 3, с. 41-51.

17. Дубровин Б.А. Вполне интегрируемые гамильтоновые системы, связанные с матричными операторами, и абелевы многообразия. - Функц. анализ и его прилож., 1977, 11, № 4, с. 28-41.

18. Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П. Уравнения Шредингера в периодическом магнитном поле и римановы поверхности. - Докл. АН СССР, 1976, 229, № 1, с. 15-18.

19. Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П. Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия. - Успехи мат. наук, 1976, 31, № 1, с. 55-136.

20. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Г. Современная геометрия. - М.: Наука, 1979- 759 с.

21. Захаров В.Е. О распространении усиливающегося импульса в двухуровневой среде. - Письма в журн. экспер. и теор. физики, 1980, 32, № 10, с. 603-607.

22. Захаров В.Е., Манаков С.В. Полная интегрируемость нелинейного уравнения Шредингера. - Теор. и мат. физика, 1974, 19, № 3, с. 332-343.

23. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. - М.: Наука, 1980 , - 319 с.

24. Захаров В.Е., Мушер С.Л., Рубенчик А.М. О нелинейной стадии параметрического возбуждения волн в плазме. - Письма в журн. экспер. и теор. физики , 1974, 19 , № 5 , с. 249-253.

25. Захаров В.Е. , Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Полное описание решений "sin-Gordon" уравнений. - Докл. АН СССР, 1974, 219, № 6 , с. 1334-1337.

26. Захаров В.Е. , Фаддеев Л.Д. Уравнение Кортевега-де Фриза - вполне интегрируемая гамильтонова система. - Функц. анализ и его прилож., 1971, 5 , № 4 , с. 18-27.

27. Захаров В.Е. , Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах. - Журн. экспер. и теор. физики, 1971, 61 , № 1 , с. 118-134.

28. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I - Функц. анализ и его прилож. , 1974, 8 , № 3 ,с.43-53.

29. Захаров В.Е. , Шабат А.Б. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II.- Функц. анализ и его прилож. , 1979, 13,№3, с.13-22.

30. Зверович Э.И. Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях. - Успехи мат. наук, 1971, 26 , № 1 , с. 113-179.

31. Итс А.Р. Обращение гиперэллиптических интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений. - Вест. ЛГУ,1976,

вып. 2, № 7, с. 39-46.

32. Итс А.Р., Котляров В.П. Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шредингера. - Доклад. АН УССР, сер. А, 1976, № 11, с. 965-968.

33. Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N - солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза. - Теор. и мат. физика, 1975, 23, № 1, с. 51-68.

34. Итс А.Р., Матвеев В.Б. Об одном классе решений уравнений Кортевега-де Фриса. - Проблемы мат. физики, 1976, вып. 8, с. 70-92.

35. Козел В.А., Котляров В.П. Почти-периодические решения уравнения $u_{tt}-u_{xx}+\sin u=0$.- В кн.: Дифференциальные уравнения и некоторые методы функционального анализа, Киев: Наукова думка, 1978, с. 89-103.

36. Котляров В.П. Периодическая задача для нелинейного уравнения Шредингера. - Мат. физика и функц. анализ, 1976, с. 121-131.

37. Кричевер И.М. Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии. - Функц. анализ и его прилож., 1977, 11, № 1, с. 15-31.

38. Кричевер И.М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений. - Успехи мат. наук, 1977, 32, № 6, с. 183-208.

39. Кричевер И.М. Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения. - Успехи мат. наук, 1978, 33, № 4, с. 215-216.

40. Кореневский Д.Г., Коломиец В.Г. Некоторые вопросы нелинейных колебаний квазилинейных систем со случайным запаздыванием. - Мат.физика, 1967, вып. 3, с. 91-113.

41. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. - Киев: Изд-во АН УССР, 1937. - 366 с.

42. Кулиш П.П. , Рейман А.Г. Иерархия симплектических форм для уравнений Шредингера и Дирака на прямой. - Зап. научн.семинаров ЛОМИ, 1978, 77 , с. 134-147.

43. Курбатов А.М., Санкович Д.П. Уравнения самосогласования в методе аппроксимирующего гамильтониана. - Теор. и мат. физика, 1980 , 40 , № 3 , с. 392-405.

44. Манаков С.В. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах. - Журн. экспер. и теор. физики, 1974, 67 , № 2 , с. 543-555.

45. Манин Ю.И. Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений. - Современные проблемы математики , 1978, вып. II, с. 5-112.

46. Мартынюк Д.И., Самойленко А.М. О периодических решениях нелинейных систем с запаздыванием. - Мат. физика, 1967, вып.3, с. 128-145.

47. Марченко В.А. Периодическая задача Кортевега-де Фриза. - Мат. сб., 1974 , 95 , № 3 , с. 331-356.

48. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. - Киев. Наукова думка, 1977. - 332 с.

49. Марченко В.А. , Островский И.В. Характеристика спектра оператора Хилла. - Мат. сб., 1975, 97 , № 4 , с. 540-606.

50. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. - М.: Наука, 1977. - 384 с.

51. Мисюра Т.В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. I. -Теор функций, функц. анализ и его приложен. , 1978, вып. 30,с.90-101.

52. Мисюра Т.В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. П.-Теор. функций. функц. анализ и его прилож., 1979,вып. 31,с.102-109.

53. Митропольский Ю.А. Медленные процессы в нелинейных системах. - Прикл. мат. и мех., 1950 , 14 , № 2 , с. 139-170.

54. Митропольский Ю.А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. - Киев: Изд-во АН УССР, 1955. - 281 с.

55. Митропольский Ю.А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука,1964.-431 с.

56. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. - Киев: Наукова думка, 1971. - 440 с.

57. Митропольский Ю.А. , Кореневский Д.Г. Применение асимптотических методов к системам с распределенными параметрами и запаздыванием. - Прикл.мех., 1969, 5, № 4, с. 18-24.

58. Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. - Киев: Вища школы, 1979. - 247 с.

59. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Асимптотические разложения квазипериодических решений в квазилинейных системах второго порядка. - В кн.: Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных колебаний. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971, с. 104-112.

60. Митропольский Ю.А. , Самойленко А.М. Условно периодические колебания в нелинейных системах. - Мат. физика, 1972, вып.12, с. 86-105.

61. Митропольский Ю.А. , Самойленко А.М. Асимптотическое исследование слабо нелинейных колебательных систем: Препринт 76.5. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. - 54 с.

62. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Исследование колебательных систем второго порядка: Препринт 76.6. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. - 50 с.

63. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Об асимптотическом интегрировании слабо нелинейных систем. - Укр.мат.журн.,1976,

64. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Некоторые вопросы теории многочастотных колебаний: Препринт 77.14. - Киев: Институт математики АН УССР, 1977, - 50 с.
65. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. К вопросу об асимптотических разложениях нелинейной механики. - Укр.мат.журн., 1979, 31, № 1, с. 42-53.
66. Митропольский Ю.А., Самойленко В.Г. Об асимптотических приближениях для слабо нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами и с запаздыванием: Препринт 81.42. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. - 52 с.
67. Митропольский Ю.А., Фодчук В.И. Асимптотические методы нелинейной механики применительно к нелинейным дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом. - Укр.мат.журн.,1966, 18 , № 3 , с. 65-84.
68. Митропольский Ю.А. , Фодчук В.И. Вторая теорема Н.Н. Боголюбова о методе усреднения для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. - Укр.мат.журн., 1972, 24 , № 1,с.49-56.
69. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. -М.: Наука, 1980. - 400 с.
70. Найфэ А. Методы возмущений. - М.: Мир , 1976. - 455 с.
71. Новиков С.П. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза. - Функц.анализ и его прилож.,1974, 8 , № 3, с.54-66.
72. Прикарпатский А.К. Об уравнениях Риккати , интегрируемых в квадратурах. - Докл. АН СССР, 1980 , 251 , № 5,с. 1072-1077.
73. Прикарпатский А.К. Об одной точно решаемой системе нелинейных дифференциальных уравнений. - Укр.мат.журн.,1979, 31,с.576-582.

74. Прикарпатский А.К. Почти-периодические решения модифицированного нелинейного уравнения Шредингера. - Теор. и мат.физика, 1981, 47 , № 3 , с. 323-332.

75. Прикарпатский А.К., Голод П.И. Периодическая задача для классической двумерной модели Тирринга. - Укр.мат.журн., 1979, 31, № 4, с. 454-459.

76. Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Метод усреднения и уравнения эргодических деформаций для нелинейных эволюционных уравнений: Препринт 81.44. - Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981. - 32 с.

77. Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Т.I. Новые методы небесной механики. - М.: Наука, 1971. - 771 с.

78. Романова Н.Н. N - солитонное решение "на пъедестале" модифицированного нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза.-Теор. и мат. физика, 1979, 39 , № 2, с. 205-214.

79. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. - М.: Наука, 1969. - 287 с.

80. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. - М.:Наука, 1971. - 550 с.

81. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. - Киев: Вища школа , 1976. - 184 с.

82. Самойленко В.Г. Исследование одной системы двух слабо связанных уравнений типа Ван-дер Поля. - Мат. физика, 1978, вып. 24, с. 52-58.

83. Самойленко В.Г. Почти-периодические и солитонные решения нелинейных уравнений ленгмюровской цепочки . - В кн.: IX Международная конференция по нелинейным колебаниям. Тезисы докладов. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 289-290.

84. Самойленко В.Г. Обратная периодическая задача для нелинейных уравнений ленгмюровской цепочки. - Укр.мат.журн.,1982,34,№ 3, с. 322-327.

85. Самойленко В.Г. Почти-периодические и солитонные решения нелинейных уравнений ленгмюровской цепочки. - В кн.: Труды IX Международной конференции по нелинейным колебаниям. Т.3. -Киев: Наукова думка (в печати).

86. Самойленко В.Г., Прикарпатский А.К. Периодическая задача для цепочки Тода. - Укр.мат.журн., 1982, 34 , № 4 , с. 460-475.

87. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. - М.: Сов. радио, 1967. - 368 с.

88. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей.- М.: ИЛ , 1960. - 341 с.

89. Тахтаджян Л.А. , Фаддеев Л.Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга. - Успехи мат.наук,1979,34 ,№ 5, с. 13-63.

90. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. - М.: Мир, 1977. -622с.

91. Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния.-Современные проблемы математики, 1974, вып. 3, с. 93-180.

92. Фодчук В.И. О построении асимптотических решений для нестационарных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и с малым параметром. - Укр.мат.журн.,1962,14, № 4,с. 435-440.

93. Фодчук В.И. О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом от параметра.- Укр. мат.журн., 1964, 16 , № 2,с.273-279.

94. Халанай А. Метод усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. - Revue de math. pures et appl., [illegible] , 4 , No. [illegible], p. [illegible].

95. Халанай А. Периодические решения линейных систем с запаздыванием. - Revue de math. pures et appl., 1959 , 4 , No. 4, p. 685 - 691.

96. Халанай А. Системы с запаздыванием. Результаты и проблемы. - Сборник переводов "Математика", 1966, 10 , № 5, с. 85-102.

97. Чеботарев Н.Г. Теория алгебраических функций. - М.: Гостех - издат , 1948. - 396 с.

98. Ablowitz M. Lectures on the inverse scattering transform. - Studies Appl. Math., 1978 , 58 , No.1, p. 17-94.

99. Ablowitz M., Kaup D., Newell A. Coherent pulse propagation, a dispersive, irreversible phenomenon.- Journ. Math. Physics, 1974 , 15 , No.11, p. 1852-1858.

100. Ablowitz M., Ladik J., Nonlinear differential-difference equations.-Journ. Math. Physics, 1975,16,No.3, p. 598-603.

101. Bisshopp F. A modified stationary principle for nonlinear waves. - Journ. Diff. Equations, 1969, 5, No.3, p.592-605.

102. Date E. On quasi-periodic solutions of the field equation of the classical massive Trirring model.- Progress Theor. Physics, 1978, 59, No.1, p.265-273.

103. Date E., Tanaka S. Periodic multi-soliton solutions of Korteweg-de Vries equation and Toda lattice.- Suppl. Progr. Theor. Physics, 1976, No.59, p.107-125.

104. Date E., Tanaka S. Analog of inverse scattering theory for discrete Hill's equation and exact solutions for the periodic Toda lattice.- Progr. Treor. Physics,1976, 55, No.2, p. 457-465.

105. Flaschka H. Toda lattice I. - Physical Rev. B, 1974, 9, p.1924-1925.

106. Flaschka H. On the Toda lattice II.- Progr. Theor. Physics,

1974, 51, No.3, p.703-716.

107. Flaschka H., Forest M., McLaughlin D. Multiphase averaging and the inverse spectral solutions of the Korteweg-de Vries equation.- Comm. Pure Appl. Math., 1980, 33, No.6, p.739-784.

108. Gardner C. Adiabatic invariants of peroidic classical systems.- Physical Rev., 1959, 115, No.4, p.791-794.

109. Gardner C. Korteweg-de Vries equation and generalization. IV. The Korteweg-de Vries equation as a Hamiltonian system.- Journ. Math. Physics, 1971, 12, No.8, p. 1548-1551.

110. Gardner C., Green J., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Korteweg-de Vries equation.- Physical Rev. lett., 1967, 19, p.1095-1098.

111. Gardner C., Green J., Kruskal M., Miura R. Korteweg-de Vries equation and generalizations. VI. Method for exact solution.- Comm. Pure Appl. Math., 1974, 27 , No.1, p. 97-133.

112. Hale J. Averaging methods for differential equations with retarded arguments and a small paramaters.- Journ. Differ. Equations, 1966, 2 , No. 1, p. 57-73.

113. Hirota R. Exact N-soliton solution of nonlinear lumped self-dual network equations.- Journ. Physical Society Japan, 1973, 35 , No.1, p. 289-294.

114. Kaup D. Coherent pulse propagation: a comparison of the complete solution with the Mc Call-Hahn theory and others.- Physical Rev. A, 1977, 16, No. 2, p. 704-719.

115. Kaup D., Newell A. An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation.- Journ. Math. Physics, 1978, 19 , No. 4, p. 798-801.

116. Kodama Y. Complete integrability of nonlinear evolution equations.- Progr. Theor. Physics, 1975, 54, No. 3, p.669-68

117. Kotera T., Yamazaki S. Toda lattice and Kac-Moerbeke's equation; the general solutions for the scattering problems.- Journ. Physical Society Japan, 1977, 43, No.5, p.1797-1804.

118. Lax P. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves.- Comm. Pure Appl. Math., 1968, 21, No.5, p.467-490.

119. Lax P. Almost periodic behavior of nonlinear waves.- Advanc. Math., 1975, 16, No. 3, p. 368-379.

120. Lesnov A.N., Saveliev M.V. Smirnov-explicit solutions to two dimensionalized Volterra equations: Preprint Institute High Energy.- Serpukhov, 1980.-8p.

121. Luke J. A perturbation method for nonlinear dispersive wave problems.- Proceeding Royal Society, Ser. A, 1966, 292, No. 1430, p. 403-412.

122. Magri F. A simple model of the integrable Hamiltonian equation.- Journ. Math. Physics, 1978, 19, No.5, p.1156-1162.

123. Matveev V.B. Abelian functions and solitons: Preprint Fisyki Teoretychney No.373.- Wroclaw, 1976.- 98p.

124. Matveev V.B. Darboux transformation and the explicit solutions of differential-difference and difference-difference evolution equations.I.- Lett. Math. Physics, 1979, 3, No.3, p. 217-222.

125. Matveev V.B., Salle M.A., Differential-difference evolution equations.II. Darboux transformation for the Toda lattice.- Lett. Math. Physics, 1979, 3, No.5, p. 425-429.

126. Matveev V.B., Yavor M.I. Solutions presque periodiques et a N - solitons de l'equation hydrodynamique non lineaire de

Kaup.- Ann. Inst. H. Poincaré, sec. A, Phys. Théorique, 1979, 31, No.1, p.25-41.

127. Mc Kean H., Moerbeke V. The spectrum of Hill's equation. - Invent. Math. Berlin, 1975, 30, No.3, p.217-274.

128. Miura R., Kruskal M. Application of nonlinear WKB method to the Korteweg-de Vries equation.- SIAM Journ. Appl. Math., 1974, 26, No.3, p.376-395.

129. Ohmiya M. The inverse scattering problem for the Dirac operator and the modified Korteweg-de Vries equation.- Osaka Journ. Math., 1979, 16, No. 1, p. 249-269.

130. Toda M. Waves in nonlinear lattice.- Suppl. Progr. Theor. Physics, 1970, No. 45, p. 174-200.

131. Toda M. Development of the theory of nonlinear lattice.- Suppl. Progr. Theor. Physics, 1976, No.59, p.1-35.

132. Wadati M. The modified Korteweg-de Vries equation.- Journ. Phys. Society Japan, 1973, 34, No. 5, p. 1289-1296.

133. Wadati M. Transformation theories for nonlinear discrete systems.- Suppl. Progr. Theor. Physics, 1976, No.59,p.36-63.

134. Whitham G. Nonlinear dispersive waves.- Procceding Royal Society, Ser. A, 1965, 283, No.1393, p. 238-261.

135. Whitham G. Variational methods and applications to water waves.- Procceding Royal Society, Ser. A, 1967, 299, No.1456, p. 6-25.