АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

СЕЛЕХМАН Николай Андреевич

УДК 517.948.34:519.46

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 (дифференциальные уравнения
и математическая физика)

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
доктор физ.-мат. наук,
профессор В.И.ФУЩИЧ

Киев - 1984

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время заметно возрос интерес к исследованию групповых свойств дифференциальных уравнений. Это вызвано, главным образом, двумя причинами: а) групповые методы дают возможность построить интегралы движения для системы, описываемой исследуемыми уравнениями; б) с помощью групповых методов можно найти точные решения исследуемых уравнений.

Групповые свойства дифференциальных уравнений изучаются, главным образом, классическим методом С.Ли /71, 24, 23, 36, 37/. При исследовании групповых свойств уравнений различают прямую и обратную задачи группового анализа. Прямая задача заключается в нахождении симметрии данного уравнения. Поскольку группа инвариантности (в смысле С.Ли) произвольного уравнения, вообще говоря, тривиальна, то важной задачей группового анализа становится описание уравнений, инвариантных относительно заданных групп преобразований. Эту задачу, следуя Л.В.Овсянникову /37/, будем называть обратной симметрийной задачей. С другой стороны, уравнения, используемые для описания физических явлений, как правило, обладают нетривиальной симметрией. Более того, свойство инвариантности относительно определенных групп преобразований является одним из критериев отбора "нужных уравнений. Именно поэтому успехи групповых методов исследования дифференциальных уравнений тесно связаны с изучением уравнений, которые априорно обладают некоторой симметрией, - уравнений теоретической и математической физики (см. /37, 48/ и приведенную там библиографию).

Для исследования групповых свойств более широких классов уравнений (например, интегро-дифференциальных) или же для нахождения симметрий, которые не могут быть обнаружены в классическом подходе, необходимо обобщение метода С.Ли.

Конструктивный метод исследования теоретико-алгебраических свойств линейных дифференциальных уравнений предложен в работах /48, 49/. Существенным отличием этого метода от метода С.Ли является то обстоятельство, что базисные элементы алгебры инвариантности дифференциальных уравнений, найденные с помощью этого метода, являются интегро-дифференциальными операторами.

Для исследования симметрийных свойств дифференциальных уравнений используется также метод дифференциальных форм. Еще Бейтман /64/ с успехом применил его для нахождения группы инвариантности уравнений Максвелла с токами. Исследования Э.Картана /26, 27/ дали возможность применять метод дифференциальных форм для описания законов сохранения дифференциальных уравнений. В работах Спенсера, Эстабрука, Виноградова эти идеи обрели современную дифференциально-геометрическую трактовку и широко используются для исследования дифференциальных уравнений /II,31-34, 59, 67, 73/.

С помощью групповых методов исследованы симметрийные свойства и описаны законы сохранения многих дифференциальных уравнений /24, 31, 32, 34, 53/. Методы, основанные на алгоритме Ли, дают возможность эффективно находить решения дифференциальных уравнений /55, 68/. Таким образом, можно сказать, что симметрийные свойства дифференциальных уравнений изучены достаточно хорошо.

В то же время симметрийные свойства интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) почти не изучены. Изучение групповых свойств является важным как в теоретическом, так и в практическом отношениях: расширение области применения групповых методов дает возможность находить решения, законы сохранения интегро-дифференциальных уравнений математической физики.

Для изучения групповых свойств ИДУ классический метод Ли не пригоден. Очень полезными в этом отношении являются методы дифференциальной геометрии и теории псевдодифференциальных операторов. На несомненную важность изучения ИДУ с теоретико-алгебраической точки зрения особое внимание обращено в работе /52/, где предложен способ построения алгебры инвариантности линейных псевдодифференциальных уравнений.

Настоящая диссертация посвящена применению методов дифференциальной геометрии и теории псевдодифференциальных операторов к изучению симметрийных свойств некоторых ИДУ теоретической и математической физики, построению законов сохранения и точных решений ИДУ.

Диссертация состоит из введения и трех глав.

В первой главе исследованы теоретико-алгебраические свойства псевдодифференциальных уравнений математической физики. В §I изложен метод нахождения симметрии псевдодифференциальных уравнений. §2 посвящен изучению симметрии ИДУ, возникающих в квантовой теории полей. В §3 описаны некоторые скалярные уравнения, инвариантные относительно конформной группы и группы Шредингера, а также их подгрупп. Получен аналог теоремы Брейкена для случая ИДУ. В §4 исследованы симметрийные свойства одного класса ИДУ с включенным взаимодействием с внешним полем. В §5 найдена нелокальная симметрия уравнения для гармонического осциллятора и одной системы псевдодифференциальных уравнений.

Вторая глава посвящена нахождению симметрий и решению обратной задачи теоретико-алгебраического анализа для некоторых ИДУ.

В §6 изложен метод исследования симметрийных свойств таких ИДУ, основанный на технике дифференциальных форм; описан способ определения законов сохранения ИДУ. В §7 рассматриваются ИДУ инвариантные относительно подгрупп группы Шредингера и конформной группы. В §8 изучаются симметрийные свойства уравнений для электромагнитного и спинорного полей. В §9 с теоретико-алгебраической точки зрения анализируются уравнения статистической физики. Исследованы уравнения Больцмана, Власова, Ландау. В §10 установлены законы сохранения для некоторых ИДУ, рассмотренных во второй главе.

Третья глава посвящена построению точных решений некоторых ИДУ. В §11 описан класс ИДУ, для которого разрешима задача Коши, найдены явные решения задачи Коши. В §12 проведена редукция ИДУ к уравнению с меньшим числом переменных, если исходное ИДУ допускает нетривиальную группу симметрии. В §13 найдены частные решения ИДУ с помощью метода Вольтерра.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Сформулирован конструктивный способ нахождения симметрии ИДУ.

2. Описаны симметрийные свойства уравнений статистической физики - уравнений Больцмана, Власова, Ландау.

3. Исследованы нелокальные симметрийные свойства некоторых дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

4. Описаны скалярные ИДУ, инвариантные относительно подгрупп группы Шредингера и конформной группы.

5. Описаны нелинейные ИДУ для электромагнитного и спинорного полей, инвариантные относительно подгрупп конформной группы.

6. Установлены законы сохранения некоторых ИДУ.

7.Найдены точные решения ИДУ специального вида.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах /43-45, 54/. Часть из них докладывалась на конференции молодых математиков ИМ АН УССР, на семинарах отдела прикладных исследований Института математики АН УССР.

Пользуюсь случаем, чтобы выразить искреннюю благодарность моему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору В.И.Фущичу за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ГЛАВА I.

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Псевдодифференциальные операторы (ПДО) естественно возникают в математической физике не только при изучении собственно ИДУ, но даже дифференциальных уравнений. Изучение ПДО представляет и самостоятельный интерес - многие уравнения математической физики являются ИДУ и в частности псевдодифференциальными уравнениями. При изучении ПДО важно знать закон их преобразования при диффеоморфизмах области определения.

В настоящей главе приводится способ определения преобразований, сохраняющих вид данного ИДУ, и исследуются симметрийные свойства некоторых ИДУ, возникающих в математической физике.

§I. Построение алгебры инвариантности псевдодифференциальных уравнений.

Рассмотрим ИДУ вида

$$(A\varphi)(x) = \int e^{ip(x-y)} A(x,p,y,\varphi(y))\,dy\,đp = 0, \qquad \text{(I.I)}$$

где $đp=(2\pi)^{-n}dp;\ \ x,y,p\in R^n,\ \ \varphi\in C^\infty(R^n)$. Функция A - C^∞ по аргументам x,y,p, аналитична по φ, причем $A(x,p,y,0)=0$, и допускает оценку

$$|D_p^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma A(x,p,y,\varphi)| \le C_{\alpha,\beta,\gamma,K}\langle p\rangle^{m+\delta|\beta+\gamma|-\rho|\alpha|}$$

$$\langle p\rangle = (1+|p|^2)$$

для произвольного компакта K, $x,y\in K$ и любых мультииндексов α, β, γ. Регуляризация интеграла производится стандартным образом /63, §I). Уравнение (I.I), где функция A удовлетворяет указанным выше условиям, будем называть псевдодифференциальным.

Пусть K_A – ядро обобщенной функции $A(x,p,y,\varphi(y))$. Если π_x, π_y – проекции носителя K_A на X и на Y являются собственными отображениями, то ПДО называется собственным. Удобство введенного класса ПДО заключается в том, что интеграл (I.I) имеет смысл для $\varphi(x)\in C^{\infty}(X)$, а на функцию A можно не накладывать условия $A(x,p,y,0)=0$. Всюду в дальнейшем оператор $\hat{A}$ – собственный.

Определим замену координат для ПДО. Будем считать функцию $\varphi=(\varphi_1,\dots\varphi_m)$ таким же переменным, как и x; $\varphi: R^n\to R^m$.

Пусть $\varkappa$ – диффеоморфизм $(x,\varphi)\longrightarrow(x',\varphi'(x'))$, или в координатах

$$x'=g(x,\varphi(x)) \qquad \varphi'(x')=\lambda(x,\varphi(x))$$

$$x=\tilde{g}(x',\varphi'(x')) \qquad \varphi(x)=\tilde{\lambda}(x',\varphi'(x')).$$

Обозначим $\varkappa^* f=\tilde{\lambda}\circ f\circ\tilde{g}^{-1}$, $(g^*u)(x)=u(g(x,\varphi(x)))$; $F(R^n)$ – алгебра C^{∞} функций на R^n. Определим оператор A_1, полученный из A заменой переменных, с помощью следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} F(R^n) \arrow[r, "\hat{A}"] & F(R^n) \\ F(R^n) \arrow[u, "\varkappa^*"] \arrow[r, "\hat{A}_1"] & F(R^n) \arrow[u, "g^*"'] \end{tikzcd}$$

Отсюда находим, что $A_1=(g^*)^{-1}\circ A\circ\varkappa^*$

$$(\hat{A}_1\varphi)(x')=\int exp(ip(\tilde{g}(x')-y))A(\tilde{g}(x'),p,y,\tilde{\lambda}\circ\varphi\circ\tilde{g}^{-1}(y))dy\,dp. \tag{I.2}$$

Разумеется это эквивалентно следующей записи:

$$(\hat{A}_1\varphi)(x)=\int exp(ip(g(x)-y'))A(g(x),p,y',\lambda\circ\varphi\circ g^{-1}(y'))\,dy'\,dp.$$

Мы будем пользоваться именно таким определением оператора $\hat{A}_1$. Оператор $(A_1\varphi)(x)$ можно переписать в виде

$$(A_1\varphi)(x)=\int e^{i\theta(x-y)}A(g(x),\Psi(x,y,\theta),g(y),\lambda(y,\varphi(y)))\mathcal{D}_y\mathcal{D}_p\,dy\,d\theta, \tag{I.3}$$

где $\mathcal{D}_y$, $\mathcal{D}_p$ — якобианы соответствующих замен $y' = g(y, \varphi(y))$, $p = \Psi(x, y, \theta)$ в силу леммы, следующей ниже.

Лемма I.I /63, §4/

Пусть функция ϕ такова, что:

1. $\phi(x, y, p) = \phi_i(x, y) p_i \equiv \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x, y) p_i$
2. $\nabla_p \phi = 0 \iff x = y$; $\nabla_{x,y,p}(\phi) \neq 0$ $p \neq 0$.

Тогда существуют такие окрестность $\widetilde{\Delta}$ диагонали $\Delta \in X \times Y$ и C^∞ отображение Ψ , что $\phi(x, y, p) = \phi(x, y, \Psi(x, y, \theta)) = \theta_i (x_i - y_i)$; $x, y \in \widetilde{\Delta}$.

Доказательство.

Дифференцирование по x соотношения $\phi(x, x, p) = 0$, показывает, что $\phi'_x = -\phi'_y$ при $x = y$. Из условия леммы следует, что $\nabla_{x,y,p} \phi \neq 0$, а поскольку $\nabla_p \phi(x, x, p) = 0$, то $\nabla_x \phi(x, x, p) \neq 0$. Следовательно,

$$det \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right) \Big|_{x=y} \neq 0 .$$

По лемме Адамара имеем $\phi_j = \sum_{k=1}^{n} \phi_{jk} (x_k - y_k)$, где $\phi_{jk} \in C^\infty(\widetilde{\Delta})$. Если F — это матрица (ϕ_{jk}) , то замена переменных

$$\theta = F^T p$$

приводит функцию ϕ к требуемому виду (знак $(\ )^T$ означает транспонирование). Аналогично, если

$$(p, x - y) \equiv B_{ik}\, p_k (x_i - y_i) \ ., \quad det\, |B_{ik}| \neq 0$$

и выполняются условия леммы, то имеем

$$(p_i, \phi_i) = (p_i, \phi_{ij}(x_j - y_j)) = B_{ik}\, p_k\, \phi_{ij}(x_j - y_j) = B_{ik}\, \theta_k (x_k - y_k),$$

где

$$\theta = B^{-1} F^T B\, p$$

Таким образом, отображение Ψ из леммы таково

$$\Psi(x, y, \theta) = B^{-1} (F^T)^{-1} B\, \theta .$$

Лемма доказана.

Следовательно, в силу леммы I.I, оператор A_1 (I.2) может быть записан в виде (I.3)

Рассмотрим частный случай предыдущих построений. Пусть диффеоморфизм $\varkappa$ задан потоком поля X

$$X = \xi^i \partial_i + \eta^k \partial_{\varphi^k} \tag{I.4}$$

$$\frac{d\tilde{x}^i}{dt} = \xi^i(\tilde{x}, \tilde{\varphi}(\tilde{x})) \qquad \tilde{x}_i|_{t=0} = x_i \qquad i = \overline{1,n}$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}^k}{dt} = \eta^k(\tilde{x}, \tilde{\varphi}(\tilde{x})) \qquad \tilde{\varphi}^k|_{t=0} = \varphi^k \qquad k = \overline{1,m}.$$

Предполагается, что ξ^i, η^k, называемые координатами оператора X, являются аналитическими функциями переменных x, φ; по повторяющимся индексам идет суммирование по всей области их определения.

Для определения тех диффеоморфизмов (I.4), которые оставляют уравнение инвариантным, мы будем пользоваться инфинитезимальными преобразованиями. Эти преобразования задаются непосредственно координатами ξ^i, η^k оператора X, что существенно облегчает вычисления.

С помощью производной Ли L_X вдоль векторного поля X условие инвариантности уравнения, заданного оператором $(\hat{A}\varphi)(x)$ записывается следующим образом

$$L_X(\hat{A}\varphi) \equiv \frac{d}{dt}(\hat{A}_1\varphi)|_{t=0} = h(\hat{A}\varphi). \tag{I.5}$$

Функции g, ψ, λ в операторе (I.3) теперь определяются потоком поля X. Формулу (I.5) в явном виде, удобном для применения к ПДУ, можно найти простым, хотя несколько громоздким способом, изложенным ниже /43/.

Пусть $A(x, p, \varphi)$ – аналитическая функция своих аргументов. Будем считать p оператором дифференцирования

$$p = \{p_\mu\}, \quad p_\mu = i\, g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \tag{I.6}$$

$g_{\mu\nu}$ - метрический тензор пространства X, на котором определена функция $\varphi(x)$; в дальнейшем он предполагается постоянным. Выражение $A(x,p,\varphi)$, по определению, означает следующее

$$A(x,p,\varphi)=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{A_\alpha\, p^{\alpha_I}(\varphi^{\alpha_{II}}(x))}{\alpha!}, \tag{I.7}$$

$\varphi\in C^\infty(R^n)$, α_I и α_{II} - дополнительные друг к другу мультииндексы, так что $\alpha_I+\alpha_{II}=\alpha$. В целях простоты мы ограничимся пока случаем $p=(p_1,p_2)$. Обобщение на случай большего числа переменных не представляет затруднений. Отметим еще, что переменные x , p в (I.7) не коммутируют и поэтому размещены в строгом порядке: переменные x слева от переменных p . В терминологии /63, §3/ (I.7) соответствует символу ПДО.

Итак, найдем производную Ли L_X выражения (I.7) вдоль векторного поля X(I.4). Инфинитезимальные преобразования, порождаемые полем таковы

$$x'=x+\varepsilon\xi\ ,\quad \varphi'=\varphi+\varepsilon\eta\ ,\quad p'=p+\varepsilon\tau.$$

Приращение функции A при этих преобразованиях имеет следующий вид

$$A(x',p',\varphi')=S\sum_{|\alpha|=0}\frac{A_\alpha(x')}{\alpha!}(p_1+\varepsilon\tau_1)^{\alpha_1}(p_2+\varepsilon\tau_2)^{\alpha_2}(\varphi+\varepsilon\eta)^{\alpha_3}.$$

Заметим, что $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\varphi=p_2^{\alpha_2}p_1^{\alpha_1}\varphi$, поэтому в (I.7) включен оператор симметризации S по переменным p_1, p_2 . В данном случае оператор S определен формулой

$$S\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{A_\alpha(x')}{\alpha!}(p_1')^{\alpha_1}(p_2')^{\alpha_2}(\varphi')^{\alpha_3}=\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{A_\alpha(x')}{\alpha!}\left(p_1'^{\alpha_1}p_2'^{\alpha_2}+p_2'^{\alpha_2}p_1'^{\alpha_1}\right)\varphi'^{\alpha_3}.$$

В формуле (I.7) следует определить члены первого порядка по ε. Прежде чем это сделать приведем ряд вспомогательных результатов, которые понадобятся нам при вычислениях.

Лемма I.2.

С точностью до членов порядка $O(\varepsilon)$ имеют место соотношения:

I) $(A+\varepsilon B)^n = A^n + \varepsilon\left(nBA^{n-1} + \sum\limits_{i=1}^{n-1}[A^i,B]A^{n-1-i}\right)$, $A^i = AA^{i-1}$, $A^0 = I$, $[A,B] = AB-BA$;

2) $[p^n,\tau] = \sum\limits_{K=1}^{n} C_K^n\, p^K(\tau)\, p^{n-K}$, $p^K(\tau)$ – производная K-ого порядка от τ;

3) $\tau_\mu = i\,p_\mu(\pi)$, $\pi = \xi^\mu g_{\mu\nu} p_\nu \equiv (\xi,p)$;

4) $p^\alpha(AB) = \sum\limits_{|\gamma|=0}^{\alpha} \dfrac{p^\gamma(A)\, D_p^\gamma(p^\alpha B)}{\gamma!}$, α,γ – мультииндексы.

Доказательство.

I. Пусть выполняется соотношение I).

Докажем, что такое же соотношение имеет место для $m=n+1$. Действительно,

$$(A+\varepsilon B)^{n+1} = (A+\varepsilon B)\left(A^n + \varepsilon\left(nBA^{n-1} + \sum_{K=1}^{n-1}[A^K,B]A^{n-1-K}\right)\right) =$$

$$= A^{n+1} + \varepsilon\left((n+1)BA^n + \sum_{K=1}^{n-1}[A^K,B]A^{n-K} + [A^n,B]\right) =$$

$$= A^{n+1} + \varepsilon\left((n+1)BA^n + \varepsilon\sum_{K=1}^{n}[A^K,B]^{n-K}\right).$$

Таким образом, соотношение I) для $m=n+1$ выполняется. Для $n=1,2$ соотношение легко проверяется и тем самым оно доказано.

2) Поскольку по формуле Лейбница имеем

$$p^K(fg) = \sum_{S=0}^{K} C_S^K (p^S f)(p^{K-S} g) \qquad C_S^K = \frac{K!}{S!\,(S-K)!},$$

то коммутатор $[p^K,\tau]$ равен

$$[p^K,\tau] = \sum_{S=1}^{K} C_S^K\, p^S(\tau)\, p^{K-S}.$$

3. Если $x' = x+\varepsilon\xi$, то

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \tilde{x}_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x'_\nu} \qquad \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \varepsilon\, \xi_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad \xi_\mu^\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\xi^\nu).$$

Последнее равенство можно записать в виде $p'_\mu = p_\mu + i\,p_\mu(\xi,p)$ (см. I.6), что и доказывает утверждение.

4. По формуле Лейбница имеем

$$p^{\alpha}(fg)=\sum_{|r|=0}^{\alpha} C_r^{\alpha}\, p^{r}(f)\, p^{\alpha-r}(g)=\sum_{|r|=0}^{\alpha}\frac{C_r^{\alpha}\, p^{r}(f)\, D_p^{r}(p^{\alpha}g)}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-r+1)}=$$

$$=\sum_{|r|=0}^{\alpha}\frac{p^{r}(f)\, D_p^{r}(p^{\alpha}g)}{r!}.$$

Лемма доказана.

Таким образом, из (I.7) с помощью леммы I.2 находим

$$A(x',p',\varphi')=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{A_\alpha(x')}{\alpha!}(p_1+\varepsilon\tau_1)^{\alpha_1}(p_2+\varepsilon\tau_2)^{\alpha_2}(\varphi+\varepsilon\eta)^{\alpha_3}=$$

$$=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{A_\alpha(x')}{\alpha!}\Big[p_1^{\alpha_1}+\varepsilon i\Big(\alpha_1 p_1(\pi)p_1^{\alpha_1-1}+\sum_{n=1}^{\alpha_1-1}\sum_{K=1}^{n}C_K^{n}\,p_1^{K}(p_1(\pi))p_1^{\alpha_1-K-1}\Big)\Big]\times$$

$$\times\Big[p_2^{\alpha_2}+\varepsilon i\Big(\alpha_2 p_2(\pi)p_2^{\alpha_2-1}+\sum_{s=1}^{\alpha_2-1}\sum_{r=1}^{s}C_r^{s}\,p_2^{r}(p_2(\pi))p_2^{\alpha_2-r-1}\Big)\Big](\varphi+\varepsilon\eta)^{\alpha_3}=$$

$$=A(x,p,\varphi)+\varepsilon\Big[\xi^{\mu}\partial_\mu A(x,p,\varphi)+\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{A_\alpha(x)}{\alpha!}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}(\alpha_3\varphi^{\alpha_3-1}\eta)+$$

$$+i\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{A_\alpha(x)}{\alpha!}\Big(\sum_{K=1}^{\alpha_1}\frac{p_1^{K}(\pi)\,D_{p_1}^{K}(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\varphi^{\alpha_3})}{K!}+\sum_{n=1}^{\alpha_2}\frac{p_1^{\alpha_1}\big(p_2^{n}(\pi)\,D_{p_2}^{n}(p_2^{\alpha_2}\varphi^{\alpha_3})\big)}{n!}\Big)\Big]=$$

$$=A(x,p,\varphi)+\varepsilon\Big[\xi^{\mu}\partial_\mu A(x,p,\varphi)+\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\Big(\sum_{|K|=0}^{\infty}\frac{p_1^{K_1}p_2^{K_2}(\eta)\,D_{p_1}^{K_1}D_{p_2}^{K_2}(A_\alpha p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\alpha_3\varphi^{\alpha}}{\alpha!\;K!}$$

$$+i\sum_{K_1=1}^{\alpha_1}\frac{p_1^{K_1}(\hat\pi)\,D_{p_1}^{K_1}(A_\alpha p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\varphi^{\alpha_3})}{\alpha!\;K_1!}+\sum_{s=1}^{\alpha_2}\sum_{r=0}^{\alpha_1}\frac{p_1^{r}p_2^{s}(\hat\pi)D_{p_1}^{r}D_{p_2}^{s}(A_\alpha p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\varphi^{\alpha_3})}{r!\;s!\;\alpha!}\Big)\Big]$$

$$=A(x,p,\varphi)+\varepsilon\big[\xi^{\mu}\partial_\mu A(x,p,\varphi)+\exp(pD_p)(\eta\cdot A_\varphi)+\qquad(I.8)$$

$$+i(\exp(p_1D_{p_1})-1)(\hat\pi A)+i(\exp(\Sigma p_\mu D_{p_\mu})-\exp(p_1D_{p_1}))(\hat\pi A)\big]=$$

$$=A(x,p,\varphi)+\varepsilon\big[\xi^{\mu}\partial_\mu A+\exp(pD_p)(\eta A_\varphi)+i(\exp(pD_p)-1)(\hat\pi A)\big].$$

Здесь и в дальнейшем приняты обозначения:

$exp(pD_p) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{p^{\alpha} D_p^{\alpha}}{\alpha!}$, $\quad p^{\alpha}$ – оператор дифференцирования по x α-го порядка,

$$exp(p\, D_p)\,(A\cdot B) = \sum_{|n|=0}^{\infty} \frac{p^n(A)\, D_p^n(B)}{n!}. \qquad (I.9а)$$

Оператор $\hat{\pi}$ в терминах ПДО записывается следующим образом

$$\hat{\pi} A = \xi^{\nu} g_{\nu\mu} \int e^{ip(x-y)}\, p_{\nu} A(x,p,\varphi(y))\, dy\, dp. \qquad (I.9б)$$

Отметим также, что с помощью формулы суммирования биномиальных коэффициентов

$$\sum_{r=k}^{n} C_k^r = C_{k+1}^{n+1}, \qquad C_k^r = \frac{r!}{k!\,(r-k)!}$$

в (I.8) выполнено следующее преобразование

$$\sum_{i=1}^{\alpha_1-1} \sum_{k=1}^{i} C_k^i\, p_1^{k+1}(\phi)\, p_1^{\alpha_1-k-1}(\psi) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\alpha_1-1} \frac{p_1^{k+1}(\phi)\, D_{p_1}^{k+1}(p_1^{\alpha_1}\psi)}{(k+1)!} = \sum_{k=2}^{\alpha_1} \frac{p_1^{k}(\phi)\, D_{p_1}^{k}(p_1^{\alpha_1}\cdot\psi)}{k!}.$$

В силу абсолютной сходимости рядов, перестановки, сделанные в (I.8), корректны.

Таким образом, из (I.8) и определения производной Ли (I.5) следует, что производная Ли L_X вдоль векторного поля X (I.4) от функции $A(x,p,\varphi)$ (I.7) равна

$$L_X\,(A(x,p,\varphi) = \xi^{\mu}\partial_{\mu}(A) + exp(pD_p)(\eta\cdot A_{\varphi}) + i\,[exp(pD_p)-1]\,\hat{\pi} A.$$

Обобщим этот результат на случай большего количества переменных $p=(p_0, p_1, ..p_n)$. Выкладки, следующие ниже, определяют приращение за счет изменения оператора p, т.к. способ учета приращения (A) за счет изменения φ их очевиден. Итак, распишем (I.7) в случае $p=(p_1 \ldots p_n)$. Используя лемму I.2 и указанные преобразования имеем

$$A(x',p',\varphi') = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{A_\alpha(x)}{\alpha!} \left(p_1^{\alpha_1} + i\varepsilon G_1\right)\left(p_2^{\alpha_2} + i\varepsilon G_2\right) \dots \left(p_n^{\alpha_n} + i\varepsilon G_n\right)\varphi^{\alpha_{n+1}} =$$

$$= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{A_\alpha(x)}{\alpha!}\Big[p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n} + i\varepsilon\big[G_1 p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n} + p_1^{\alpha_1}G_2 p_3^{\alpha_3}\dots p_n^{\alpha_n} + \dots$$

$$+ p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_{n-1}^{\alpha_{n-1}}G_n\big]\varphi^{\alpha_{n+1}} . \qquad \text{(I.10)}$$

Здесь символ G_K обозначает следующее выражение

$$G_K = \sum_{r=1}^{\alpha_K} \frac{p_K^r(\pi)\, D_p^r(p_K^{\alpha_K})}{r!} .$$

Из выкладок (I.8) видно, что ряд вида

$$B_K = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{A_\alpha}{\alpha!}\, p_1^{\alpha_1}\dots p_{K-1}^{\alpha_{K-1}}\, G_K\, p_{K+1}^{\alpha_{K+1}}\dots p_n^{\alpha_n}$$

при суммировании дает следующий результат

$$B_K = \Big[\exp\Big(\sum_{i=1}^{K} p_i D_{p_i}\Big) - \exp\Big(\sum_{i=1}^{K-1} p_i D_{p_i}\Big)\Big](\hat{\pi} A) .$$

Поэтому из (I.10) находим, что

$$A(x,p',\varphi) = A(x,p,\varphi) + \varepsilon i\, \Big[\big(\exp(p_1 D_{p_1}) - 1\big) +$$

$$\big(\exp(p_1 D_{p_1} + p_2 D_{p_2}) - \exp(p_1 D_{p_1})\big) + \dots$$

$$+ \Big(\exp\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i D_{p_i}\Big) - \exp\Big(\sum_{i=1}^{n-1} p_i D_{p_i}\Big)\Big)\Big](\hat{\pi} A) =$$

$$= A(x,p,\varphi) - i\,\Big(\exp\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i D_{p_i}\Big) - 1\Big)(\hat{\pi} A).$$

Очевидно, что применение оператора симметризации к симметричному выражению, полученному выше, не дает ничего нового

$$S A(x,p',\varphi) = A(x,p,\varphi) + \varepsilon i\, S\,\big(\exp(p D_p) - 1\big)(\hat{\pi} A) =$$

$$= A(x,p,\varphi) + \varepsilon i\,\big(\exp(p D_p) - 1\big)(\hat{\pi} A),$$

$SA = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma,\alpha}\frac{A_\alpha}{\alpha!}(\sigma p)^{\alpha_I}\varphi^{\alpha_{II}}$, где σ – перестановка чисел $1, \dots n$. Если учесть изменение x и φ так, как это было сделано в (I.8), то можно утверждать, что доказана следующая теорема /43/.

Теорема I.I.

Производная Ли L_X функции $A(x,p,\varphi)$ (I.7) вдоль векторного поля X

$$X = \xi^\mu \partial_\mu + \eta^\kappa \partial_{\varphi^\kappa}$$

равна

$$L_X A(x,p,\varphi) = \xi^\mu \partial_\mu + i\,(\exp(p D_p) - 1)(\hat{\pi} A) + \exp(p D_p)(\eta \cdot A_\varphi),$$

$$(\xi, p) = \pi = \xi^\mu g_{\mu\nu} p_\nu , \quad \hat{\pi} A = \int e^{ip(x-y)} \pi(p, \xi(x,\kappa,\varphi)) A(x,p,\varphi(y))\, dy\, dp .$$

Заметим, что относительно зависимости ξ , η от x , p , φ не делалось никаких специальных предположений, кроме C^∞ дифференцируемости. Поэтому теорема (I.I) позволяет исследовать симметрийные свойства нелинейных ЦДУ в классе, например, псевдодифференциальных операторов, что значительно расширяет область применимости обычного лиевского метода.

Изучим алгебраическую структуру множества операторов, оставляющих инвариантным уравнение $A(x,p,\varphi) = 0$, т.е. операторов удовлетворяющих условию инвариантности (I.5)

$$L_X A(x,p,\varphi) = h_X A(x,p,\varphi),$$

где h_X – некоторое отображение, соответствующее оператору X , причем $h_X(0) = 0$.

Лемма I.3.

Пусть операторы X_1 , X_2 удовлетворяют условию инвариантности. Тогда оператор $X_3 = X_1 X_2 - X_2 X_1$, также удовлетворяет условию инвариантности.

Доказательство.

$$X_1 X_2 (A) = X_1 (h_2 A) + h_2 \circ h_1 A .$$

Поэтому $X_3 A = (X_1(h_2) - X_2(h_1) + h_2 \circ h_1 - h_1 \circ h_2) A$, что и доказывает утверждение.

Следовательно, множество операторов, удовлетворяющих (I.5) образует алгебру Ли, причем, в соответствии с общими принципами эквивариантности /22, гл. I, §8/, h_χ можно рассматривать как представление этой алгебры в пространстве значений отображения A . Определим далее продолжение оператора Y

$$Y = B^\mu \partial_\mu + C \partial_\varphi ,$$

т.е. укажем закон преобразования производных функции φ , или, что то же, координаты продолженного оператора $\tilde{Y}$

$$\tilde{Y} = B^i \partial_i + C \partial_\varphi + \sum_{K,S=1}^{\infty} \eta_{K;S} \partial_{p^K \varphi^S} . \tag{I.II}$$

Этот оператор должен оставить инвариантной систему дифференциальных форм $\omega_{K;S}$

$$\omega_{K;S} = d(p^K \varphi^S) - (p^{K+1_i} \varphi^S)\, dx_i .$$

Здесь $p^K \varphi = (i)^{|K|} D_x^K \varphi$, 1_i – мультииндекс вида $(0, 0, \ldots \underset{i}{1}, 0, \ldots 0) =$ – на i-ом месте единица, остальные нули; α , K , S – мультииндексы.

Поскольку оператор порождает преобразования

$$\tilde{x}_i = x_i + \varepsilon B^i , \qquad \tilde{\varphi} = \varphi + \varepsilon \eta ,$$

то используя (I.I0), (I.8), получаем $(B, p) = g_{iK} \xi^i p_K$

$$\tilde{p}^\alpha \tilde{\varphi}^s = p^\alpha \varphi^s + \varepsilon i [G_1 p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n} + \ldots + p_1^{\alpha_1} \ldots p_{n-1}^{\alpha_{n-1}} G_n + (-i) p^\alpha (s C \varphi^{s-1}]$$

$$= p^\alpha \varphi^s + \varepsilon \Big[\sum_{|n|=1}^{\alpha} i \frac{p^n (B, p) D_p^n (p^\alpha \varphi^s)}{n!} + \sum_{|K|=0}^{\alpha} \frac{p^K(C) D_p^K (s p^\alpha \varphi^{s-1})}{K!} \Big] =$$

$$= \rho^{\alpha}\varphi^{s} + \varepsilon \underset{\alpha;s}{\tau},$$

где

$$\underset{k;s}{\tau} = i\sum_{|n|=1}^{k} \frac{\rho^{n}(B,p)\,D_{\rho}^{n}(\rho^{k}\varphi^{s})}{n!} + \sum_{|n|=0}^{k} \frac{\rho^{n}(C)\,D_{\rho}^{n}(s\rho^{k}\varphi^{s-1})}{n!}.$$

Таким образом, приращение производной $\rho^{k}\varphi^{s}$ есть $\underset{k;s}{\tau}$ и это же выражение есть соответствующая координата продолженного оператора $\tilde{Y}$.

Отметим, что оператор $\tilde{Y}$ определен на множестве $\rho^{k}\varphi^{s}$ в отличие от традиционного, что удобнее для наших целей. Разумеется при $s=1$ $\underset{k;s}{\tau}$ есть обычное k-ое продолжение оператора Y /37, гл. I, §4/.

Важно отметить, что отображение $Y \to \tilde{Y}$ сохраняет алгебраическую структуру множества операторов, сохраняющих уравнение инвариантным. Имеет место следующий факт /37, гл. I, §4/

Теорема I.2. Отображение $Y \to \tilde{Y}$ является гомоморфизмом алгебр Ли

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]}.$$

Найдем теперь коммутатор операторов X и Y, заданных формулами

$$X = \xi^{n}\partial_{n} + \tau\,\partial_{\varphi}, \qquad Y = \rho^{n}\partial_{n} + \lambda\,\partial_{\varphi}.$$

Воспользовавшись теоремой о продолжении, мы найдем координаты коммутатора только при ∂_{i}, ∂_{φ}, поскольку координаты при $\partial_{\rho^{k}\varphi^{s}}$ строятся с помощью формулы (I.II):

$$[X, Y] = (\xi^{i}\rho_{i}^{k} - \rho^{i}\xi_{i}^{k})\,\partial_{k} + [\xi^{i}\partial_{i}(\lambda) - \rho^{i}\partial_{i}(\tau)]\,\partial_{\varphi} +$$

$$+ \Big(\underset{k;s}{\tau}\,\partial_{\rho^{k}\varphi^{s}}(\rho^{i}) - \underset{k;s}{\lambda}\,\partial_{\rho^{k}\varphi^{s}}(\xi^{i})\Big)\,\partial_{i} +$$

$$+ \Big(\underset{k;s}{\tau}\,\partial_{\rho^{k}\varphi^{s}}(\lambda) - \underset{k;s}{\lambda}\,\partial_{\rho^{k}\varphi^{s}}(\tau)\Big)\,\partial_{\varphi}.$$

Пользуясь выражением для $\underset{k;s}{\tau}$, $\underset{k;s}{\lambda}$, можно найти $[X, Y]$ в виде

$$+ \exp(pD_p)(\tau\rho^k_\varphi - \lambda\xi^k_\varphi)\partial_k + [\,i(\exp(pD_p)-1)(\Omega\lambda - Q\tau) +$$

$$+ \exp(pD_p)(\tau\lambda_\varphi - \lambda\tau_\varphi)]\partial_\varphi . \qquad (I.12)$$

Здесь $\Omega = -(\xi, p)$, $Q = -(\rho, p)$.

Из I.12 видно, что векторные поля, координатные функции которых являются ПДО, вообще говоря, не образуют алгебру Ли, т.е. координаты коммутатора двух таких полей не обязательно есть ПДО. Тем не менее, есть по крайней мере два важных частных случая, когда операторы симметрии образуют алгебру Ли.

Первый случай определяется тем, что ξ^i, ρ^i, λ, τ зависят только от x, φ. Это обычный лиевский случай. Теорема (I.I) позволяет находить лиевскую симметрию как линейных, так и нелинейных ПДУ.

Второй случай определяется условиями $\xi^i = \xi^i(x)$, $\rho^i = \rho^i(x)$, $\tau = \tau(x,p)\varphi$, $\lambda = \lambda(x,p)\varphi$. Из (I.12) следует, что

$$[X, Y] = \exp(pD_p)(\tau\lambda_\varphi - \lambda\tau_\varphi)\partial_\varphi + (\xi^i\rho^k_i - \rho^i\xi^k_i)\partial_k =$$

$$= [\,\lambda(x,p)(\tau(x,p)\varphi) - \tau(x,p)(\lambda(x,p)\varphi)]\partial_\varphi + (\xi^i\rho^k_i - \rho^i\xi^k_i)\partial_k .$$

Этот случай соответствует ситуации, возникающей при исследовании нелокальной симметрии уравнений математической физики /5I, 49, 48, 50/.

Рассмотрим детальнее вопрос о лиевской симметрии псевдодифференциальных уравнений. Мы рассматриваем такие уравнения, которые разрешимы относительно некоторых производных функции φ, т.е. уравнение $A(x,p,\varphi) = 0$ можно записать в виде $p^\alpha\varphi = f(x,p,\varphi)$. Условие инвариантности (I.5) можно переписать в виде

$$L_X(A(x,p,\varphi))|_M = 0, \qquad (I.13)$$

где M – множество решений уравнения $A(x,p,\varphi) = 0$. При условиях, оговоренных выше, переход на множество решений - это замена $p^\alpha\varphi$ на $f(x,p,\varphi)$ в условии инвариантности (I.5). Приравнивая члены при производных, получаем систему уравнений для ξ, η. Решение этой системы определяет генератор искомых преобразований. Общее решение этой системы определяет максимальную алгебру инвариантности уравнения $A(x,p,\varphi)=0$ в классе дифференциальных операторов первого порядка.

Покажем теперь, что если уравнение $A(x,p,\varphi)=0$ линейно, т. е. $A(x,p,\varphi)=a(x,p)\varphi$, а символ $a(x,p)$ не вырождается в полином, то структура координат ξ, η становится более определенной. Именно, справедлива следующая лемма.

Лемма I.4. Пусть символ $a(x,p)$ уравнения $a(x,p)\varphi=0$ не вырождается в полином. Тогда координаты операторов симметрии X этого уравнения имеют вид

$$\xi^i=\xi^i(x),\quad \eta=\sigma(x)\varphi+\tilde{\sigma},\quad X=\xi^i\partial_i+\eta\,\partial_\varphi,$$

где φ-решение исследуемого уравнения.

Доказательство. Воспользуемся теоремой I.I. В нашем случае $A(x,p,\varphi)=a(x,p)\varphi$, поэтому член вида $\exp(p\,D_p)(\eta\,A_\varphi)$ можно упростить. Заметим сначала, что оператор p можно представить в виде (K - мультииндекс)

$$p_i=-i\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{|K|=0}^{\infty}p_i(p^K\varphi)\,\partial_{p^K\varphi}=d_i+\sum_{|K|=0}^{\infty}(p^{K+1_i}\varphi)\,\partial_{p^K\varphi}.$$

Следовательно, имеем

$$\exp(p\,D_p)(\eta\,A_\varphi)=a(x,p)(\eta(x,\varphi))=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{a_\alpha(x)}{\alpha!}p^\alpha(\eta(x,\varphi))=$$

$$a_0\eta+\frac{a_1}{1!}\left(d(\eta)+(p\varphi)\eta_\varphi\right)+\frac{a_2}{2!}\left(d^2(\eta)+2(p\varphi)\,d(\eta_\varphi)+(p\varphi)(p\varphi)\eta_{\varphi\varphi}\right.$$

$$\left.+(p^2\varphi)\eta_\varphi\right)+\ldots=a(x,d)\eta+\eta_\varphi(a\varphi)-\varphi\left(a(x,d)(\eta_\varphi)\right)+$$

$$+ \tau_{\varphi\varphi} \left[\frac{a_2}{2!} (p\varphi)(p\varphi) + \frac{a_3}{3!} (p\varphi)(p^2\varphi) + \frac{a_4}{4!} \left((p^2\varphi)(p^2\varphi) + (p\varphi)(p^3\varphi) \right) \dots \right]$$

$$+ \partial_\varphi^n(\tau) [\mathcal{D}_n] + \sum_{|n|=1}^{\infty} \frac{d^n(\tau_\varphi) D_p^n(a\varphi)}{n!}.$$

Легко убедиться, что скобка $\mathcal{D}_2$ при $\tau_{\varphi\varphi}$ может быть представлена рядом

$$\mathcal{D}_2 = \sum_{|n|=2}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \sum_{|s|=0}^{n-1_i-1_j} p^s\left((p_i^i\varphi) \cdot (p^{n-s} p_j \varphi)\right) =$$

$$= \sum_{|n|=2}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \sum_{|k|=0}^{|n-2|} C_{k+1}^{n-1} (p^{k+1}\varphi)(p^{n-k-1}\varphi) =$$

$$= \sum_{|n|=2}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \sum_{s=1}^{n-1} C_s^{n-1} (p^s\varphi)(p^{n-s}\varphi) =$$

$$= \sum_{|n|=2}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \left(p^{n-1_i} (\varphi (p_i\varphi)) - \varphi \cdot p^n \varphi \right).$$

Распишем условие инвариантности (I.5)

$$L_X(a\varphi) = \xi^i \partial_i (a\varphi) + i(\exp(pD_p) - 1)(\hat{\pi} a\varphi) + a(x,d)\tau + \tau_\varphi a\varphi -$$
$$- \varphi (a(x,d)\tau_\varphi) + \tau_{\varphi\varphi} \left(\sum_{|n|=2}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \left[p^{n-1_i} (\varphi \cdot (p_i\varphi)) - \varphi(p^n\varphi) \right] + \right.$$
$$+ \partial_\varphi^n(\tau) \mathcal{D}_n + \dots = h(a(x,p)\varphi). \qquad \text{(I.14)}$$

Заметим, что оператор h имеет следующую структуру

$$h = \sum_s R_s(x,p,\varphi)\, T_s(x,p),$$

где R_s – произвольный ПДО, а T_s – линейный ПДО. Как видно из (I.14) из-за наличия членов типа $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_n$ и т.д., левая часть (I.14) не может быть представлена в таком виде. Следовательно, $\tau_{\varphi\varphi} = 0$. Расписывая теперь I.14, получим

$$L_X(a\varphi) = \xi^n \partial_n (a\varphi) + i\left\{ \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} \frac{d^\alpha(\pi) D_p^\alpha (a\varphi)}{\alpha!} + \right.$$

$$+ \pi_\varphi \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} \frac{(p^\alpha\varphi)(D_p^\alpha(a\varphi))}{\alpha!} + \sum_{|\alpha|=2}^{\infty} \sum_{|K|=1}^{|\alpha|-1} \frac{d^K(\pi_\varphi)(p^{\alpha-K}\varphi)(D_p^\alpha a\varphi)}{K!\,(\alpha-K)!} +$$

$$\left. + \pi_{\varphi\varphi} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \sum_{|K|=0}^{\alpha} \frac{p^{\alpha-K}\left((p^{K+1_i}\varphi)\cdot(p_j\varphi)\right) D_p^{\alpha+1_i+1_j}(a\varphi)}{(\alpha+1_i+1_j)!} + \ldots \right\} +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} \frac{d^\alpha(\xi^s) D_p^\alpha (\partial_s a\varphi)}{\alpha!} + \xi_\varphi^s \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} \frac{(p^\alpha\varphi) D_p^\alpha(\partial_s a\varphi)}{\alpha!} +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=2}^{\infty} \sum_{|K|=1}^{|\alpha|-1} \frac{d^K(\xi^s)(p^{\alpha-K}\varphi) D_p^\alpha (\partial_s a\varphi)}{K!\,(\alpha-K)!} +$$

$$+ \xi_{\varphi\varphi}^s \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \sum_{|K|=0}^{\alpha} \frac{p^{\alpha-K}\left((p^{K+1_i}\varphi)(p_j\varphi)\right) D_p^{\alpha+1_i+1_j}(\partial_s a\varphi)}{(\alpha+1_i+1_j)!} = \sum_s R_s T_s(a\varphi).$$

Если перейти на множество решений уравнения $a(x,p)\varphi = 0$, то, приравнивая члены при выражениях вида $(p^\alpha\varphi)(D_p^\alpha a\varphi)$, убеждаемся, что $\pi_\varphi = \xi_\varphi = 0$. Таким образом, $\xi^i = \xi^i(x)$, $\tau = \sigma(x)\varphi + \tilde\sigma$, что и требовалось доказать.

§2. Симметрия некоторых псевдодифференциальных уравнений

В работе /IO §2/ в качестве уравнения, описывающего скалярное поле в квантовой теории, рассматривается уравнение вида

$$\hat{p}_0 \varphi = (\hat{p}_1^2+\hat{p}_2^2+\hat{p}_3^2)\varphi \equiv \int e^{ip(x-y)}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)^{1/2}\varphi(y)\,dy\,dp\,, \qquad (2.\mathrm{I})$$

где $p_0 = i\,\partial/\partial x_0$, $\varphi(x)=\varphi(x_0,x_1,x_2,x_3)$

Уравнение обладает многими достоинствами. В частности, оно допускает решение типа плоской волны $\varphi = \exp(iK_\mu x^\mu)$ только с положительной энергией $K_0=\sqrt{K_1^2+K_2^2+K_3^2}$. С помощью метода, описанного в §I, нами будет установлена следующая теорема.

Теорема I.3. Уравнение (2.I) инвариантно относительно алгебры Ли группы конформных преобразований C(I.3). Эта алгебра является максимальной алгеброй симметрии в классе операторов первого порядка.

Доказательство. В силу теоремы I.I и леммы I.4 с точностью до членов, содержащих производные по p_i выше второго порядка, имеет место следующее соотношение $(X=\xi^\mu\partial_\mu+(\sigma\varphi)\partial_\varphi)$

$$L_X(p_0-E)\varphi = i\varphi\sigma_0 + \sigma p_0\varphi - \xi_0^0 p_0\varphi + \xi_0^i p_i\varphi - \xi_i^0 p_0\frac{p_i}{E}\varphi -$$

$$-\xi_i^k\frac{p_ip_k}{E}\varphi + \frac{i}{2}\xi_{kj}^0 p_0\left(\frac{\delta_{kj}}{E}-\frac{p_kp_j}{E^3}\right)\varphi + \frac{i}{2}\xi_{ij}^k p_k\left(\frac{\delta_{ij}}{E}-\frac{p_ip_j}{E^3}\right)\varphi - \sigma E\varphi +$$

$$+ i\sigma_k\frac{p_k}{E}\varphi + \frac{1}{2}\sigma_{ik}\left(\frac{\delta_{ik}}{E}-\frac{p_ip_k}{E^3}\right)\varphi = h(p_0-E)\varphi\,,\quad E=\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}\,.$$

Переходом на многообразие решений уравнения (2.I) приводим предыдущее соотношение к виду:

$$i\varphi\sigma_0 - \xi_0^0 E\varphi + (\xi_i^0-\xi_0^i)p_i\varphi - \xi_k^i\frac{p_ip_k}{E}\varphi \quad +$$

$$+\frac{i}{2}\xi_{kj}^0\left(\delta_{kj}-\frac{p_kp_j}{E^2}\right)\varphi + \frac{i}{2}\xi_{ij}^k p_k\left(\frac{\delta_{ij}}{E}-\frac{p_ip_j}{E^3}\right)\varphi + i\,\sigma_k\frac{p_k}{E}\varphi +$$

$$+\frac{1}{2}\sigma_{ik}\left(\frac{p_ip_k}{E^3}-\frac{\delta_{ik}}{E}\right)\varphi = 0.$$

Приравнивая члены при независимых ПД выражениях типа $\frac{p_k}{E}\varphi$, $\frac{p_i p_k}{E^3}\varphi$, получаем

$$\xi_i^0=\xi_0^i,\quad \xi_k^i+\xi_i^k=0\ (i\neq k),\ \xi_0^0=\xi_1^1=\xi_2^2=\xi_3^3=2\sigma\ ,\ \sigma_{ik}=0$$

Решение этих уравнений хорошо известно: оно определяет алгебру C(I.3)

$$\xi^\mu = 2\,(\alpha_\nu x^\nu)x_\mu - \alpha_\mu(x_\nu x^\nu) + C_{\mu\nu}x_\nu + C_\mu\ , \qquad (2.2)$$

$$\sigma\varphi = C_{00}\varphi - 2\alpha_\nu x^\nu\varphi\ ,\quad C_{0a}=C_{a0},\ C_{ik}=-C_{ki}\,(k\neq i)\ C_{00}=C_{11}=C_{22}=C_{33}.$$

Теорема доказана. Для полноты докажем инвариантность уравнения (2.I) относительно алгебры C(I.3) более привычным способом. Поскольку уравнение (2.I) линейно, то оператор симметрии Q должен удовлетворять условию

$$[L,Q]=LQ-QL=hL\ ,\ L=p_0-p$$

или на множестве решений M уравнения (2.I)

$$[L,Q]_{|M}=0.$$

Будем искать оператор Q в виде

$$Q=\sum_{\mu=0}^{3}R^\mu p_\mu + B$$

где R^μ, B полиномы относительно переменных x. Тогда условие инвариантности приобретает вид:

$$\left[\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{|\alpha|=1}^{\infty}\frac{p^\alpha(R^\mu)\,D_p^\alpha(L)\,p_\mu}{\alpha!}+\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{p^\alpha(B)\,D_p^\alpha(L)}{\alpha!}\right]_{|p_0\varphi=E\varphi}=0$$

Если $R^\mu=R^\mu_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta+R^\mu_\alpha x_\alpha+\tilde{R}_\mu$, $B=B_\alpha x_\alpha+\tilde{B}$, то получаем

$$\Big\{\Big[R^\mu_{\alpha\beta}\Big[x_\alpha\Big(-ig_{\beta 0}+ig_{\beta k}\frac{p_k}{E}\Big)+x_\beta\Big(-ig_{\alpha 0}+ig_{\alpha k}\frac{p_k}{E}\Big)-g_{\alpha k}\Big(\frac{\delta_{\beta k}}{E}-\frac{g_{\beta s}p_k p_s}{E^3}\Big)\Big]$$
$$+R^\mu_\alpha\Big(-ig_{\alpha 0}+ig_{\alpha k}\frac{p_k}{E}\Big)\Big]p_\mu+B_\alpha\Big(-ig_{\alpha 0}+ig_{\alpha k}\frac{p_k}{E}\Big)\Big\}_{|p_0\varphi=E\varphi}=0$$

Таким образом, имеем

$$R^{\mu}_{\alpha\beta}\, x_\alpha x_\beta = 2(x_\nu x^\nu) x_\mu - K_\mu (x_\nu x^\nu), \quad B_\mu = 2 g_{\mu\nu} K_\nu, \quad \bar{B} = \mathcal{D} i$$

$$R^{\mu}_{\alpha}\, x_\alpha = \mathcal{D} x^\mu + C_{\mu\alpha} x_\alpha, \quad C_{0k} = C_{k0}, \quad C_{ik} = C_{ki}, \quad C_{00} = 0,$$

что совпадает с (2.2).

Таким образом, операторы Q таковы:

$$p_\mu = i g_{\mu\nu} \partial_\nu, \quad \mathcal{I}_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad \mathcal{D} = x_\mu p^\mu + i \qquad (2.3)$$

$$K_\mu = 2x_\mu \mathcal{D} - x_\nu x^\nu p_\mu .$$

Наконец, проверим инвариантность уравнения (2.I) относительно конформных преобразований, используя лемму I.I.

$$(p_0 - E)\varphi \equiv \int e^{-i p_\mu z^\mu} \left(p_0 - \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\right) \varphi(y)\, dy\, dp = 0,$$

здесь $p_\mu z^\mu = p_\mu (x^\mu - y^\mu) = p_0 z_0 - p_1 z_1 - p_2 z_2 - p_3 z_3, \quad z_\mu = x_\mu - y_\mu .$

Пусть $K_0 = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\partial_0 + 2x_0 x_k \partial_k - 2x_0 \varphi \partial_\varphi .$

Тогда

$$p_\mu \tilde{z}^\mu = p_\mu z^\mu + \varepsilon\, p_0 (x_0^2 + \vec{x}^2 - y_0^2 - \vec{y}^2) - 2\varepsilon\, p_k (x_0 x_k - y_0 y_k) =$$

$$= p_\mu z^\mu + \varepsilon \left[p_0 (z_0^+ z_0 + z_i^+ z_i) - (z_0^+ z_i + z_i^+ z_0) p_i \right], \quad z_\mu^+ = x_\mu + y_\mu .$$

Следовательно, можно записать, что

$$z'_\mu = \tilde{\Phi}_{\mu\nu} z_\nu = (\delta_{\mu\nu} + \varepsilon\, \Phi_{\mu\nu}) z_\nu ,$$

где

$$(\Phi_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} z_0^+, & z_1^+ & z_2^+ & z_3^+ \\ -z_1^+, & -z_0^+, & 0, & 0 \\ -z_2^+, & 0, & -z_0^+, & 0 \\ -z_3^+, & 0, & 0, & -z_0^+ \end{pmatrix} .$$

Поэтому, если в соответствии с леммой I.I сделать замену переменных

$$\theta_\mu = (\delta_{\mu\varkappa} - \varepsilon\, g_{\varkappa\alpha} \Phi_{\alpha\nu} g_{\nu\mu}) p_\varkappa$$

то мы получим

$$\tilde{J} \equiv \int e^{-ip_\mu \tilde{z}^\mu} (p_0 - E)\, \tilde{\varphi}(\tilde{y})\, d\tilde{y}\, dp =$$

$$= \int e^{-p_\mu \tilde{z}^\mu} (p_0 - E)(\varphi(y) - 2\varepsilon\, y_0 \varphi(y))(1 + \varepsilon 8 y_0)\, dy\, dp =$$

$$= \int e^{-i\theta_\mu z^\mu} (p_0(\theta) - E(\theta))(1 + \varepsilon(6y_0 - 4z_0^+))\varphi(y)\, dy\, d\theta = \qquad (2.4)$$

$$= J + \varepsilon \int e^{-i\theta_\mu z^\mu} \left[\left(1 - \frac{\theta_0}{E}\right)\theta_i z_i^+ - z_0^+(\theta_0 - E) \right] \varphi(y)\, dy\, d\theta +$$

$$+ \varepsilon \int e^{-i\theta_\mu z^\mu} (\theta_0 - E)(2y_0 - 4x_0)\varphi(y)\, dy\, d\theta = J +$$

$$\varepsilon \int e^{-i\theta_\mu z^\mu} \left\{ 2i\left(\frac{\theta_0}{E} - 1\right) - 4x_0(\theta_0 - E) - \frac{2x_i\theta_i}{E}(\theta_0 - E) \right\} \varphi(y)\, dy\, d\theta =$$

$$= J + \varepsilon \left[-4x_0 - \frac{2x_i\theta_i}{E} + \frac{2}{E} \right] J$$

Здесь $E(p) = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2}$, $J = \int e^{-i\theta_\mu z^\mu} (\theta_0 - E(\theta))\varphi(y)\, dy\, d\theta$.

Таким образом, на множестве решений уравнения (2.I) имеем

$$L_X(J)|_M = 0\,, \quad X = K_0$$

Следовательно, конформная инвариантность уравнения (2.I) доказана с помощью теоремы I, а также традиционным образом с помощью коммутаторов и проверена непосредственно (см. 2.2, 2.3, 2.4), при этом координаты операторов задаются формулами (2.2), а сами операторы можно записать в виде (2.3).

Исследуем теперь симметрийные свойства уравнения типа релятивистского осциллятора

$$(\hat{p}_0 - \hat{E})\varphi \equiv \int e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} \left(p_0 - \sqrt{\vec{p}^{\,2} + x_\mu x^\mu}\right) \varphi(y)\, dy\, dp \tag{2.5}$$

Теорема I.4. Уравнение (2.5) инвариантно относительно алгебры Ли группы Лоренца O(I.3), образованной операторами:

$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \quad , \; p_\mu = i g_{\mu\nu} \partial_\nu$$

Доказательство.

В силу леммы I.4 ищем оператор симметрии в виде

$$X = \xi^\mu(x)\, \partial_\mu + \sigma(x)\varphi\, \partial_\varphi \; .$$

Используя теорему I.I, находим $\left(E = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + x_\mu x^\mu}\right)$

$$\xi^\nu g_{\nu\alpha} x_\alpha \frac{1}{E}\varphi + \xi^0_K \frac{p_0 p_K}{E}\varphi + \xi^K_s \frac{p_K p_s}{E}\varphi + \xi^0_0 p_0 \varphi - \xi^K_0 p_K \varphi + \ldots = 0$$

Отсюда имеем

$$\xi^\nu g_{\nu\alpha} x_\alpha = 0, \quad \xi^i_K + \xi^K_i = 0, \quad \xi^0_K - \xi^K_0 = 0, \quad \xi^0_0 = 0 .$$

Таким образом,

$$\xi^\nu = C_{\nu\mu} x_\mu \quad , \quad C_{0K} = C_{K0}, \; C_{iK} = -C_{Ki}, \; C_{00} = 0 .$$

Поэтому операторы таковы

$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \, .$$

Теорема доказана.

Изучим групповые свойства системы уравнений, которая рассматривалсь в /49/.

$$\begin{aligned} p_0 \vec{E} &= a_1 \operatorname{rot} \vec{H} + a_2\, p \vec{H} \\ p_0 \vec{H} &= -b_1 \operatorname{rot} \vec{E} - b_2\, p \vec{E} \end{aligned} \tag{2.6}$$

$x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$, $\vec{E} = (E_1(x), E_2(x), E_3(x))$, $H = (H_1(x), H_2(x), H_3(x))$.

Теорема I.5.

Система уравнений (2.6) в классе операторов первого порядка инвариантна относительно алгебры $A=\{p_\mu, J_{ab}, D\}$, образованной операторами $p_\mu = i g_{\mu\nu}\partial_\nu$, $D = x_\mu p^\mu + \varkappa i$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + i\left(E_a \partial_{E_b} - E_b \partial_{E_a}\right) + i\left(H_a \partial_{H_b} - H_b \partial_{H_a}\right).$$

Доказательство. В силу леммы I.4 оператор симметрии ищем в виде

$$X = \xi^\mu \partial_\mu + \sigma^i_k E_i \partial_{E_k} + \tau^i_k H_i \partial_{H_k} + \tilde{\sigma}^i_k H_i \partial_{E_k} + \tilde{\tau}^i_k E_i \partial_{H_k} + \sigma^i \partial_{E_i} + \tau^i \partial_{H_i}.$$

Пользуясь теоремой I.I, находим, что

$$\xi^i_k + \xi^k_i = 0 \ (i \neq k), \quad \xi^0_i = \xi^i_0, \quad \xi^0_0 = \xi^1_1 = \xi^2_2 = \xi^3_3, \quad \xi^0_i = \tilde{\sigma}^i_k = \tilde{\tau}^i_k = 0,$$
$$\xi^i_k = \sigma^i_k = \tau^i_k$$

а τ^i, σ^i удовлетворяют уравнениям (2.6). Но отсюда немедленно следуют утверждения теоремы. Заметим, что поскольку симметрия, порожденная операторами $\tau^i \partial_{H_i}$, $\sigma^i \partial_{E_i}$ тривиальна – решение уравнений заменяется на некоторое другое решение – то мы ее не учитываем. Теорема доказана.

Рассмотрим уравнения для потенциала A_μ с калибровкой

$$\begin{cases} (p_0 - p) A_\mu(x) = 0 \\ p_\mu A^\mu(x) = 0 \end{cases} \qquad (2.7)$$

где $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $A_\mu = A_\mu(x)$, $p_\mu = i g_{\mu\nu}\partial_\nu$, $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$, $\mu, \nu = \overline{0,3}$.

Эти уравнения выделяют плоские волны с положительной энергией из множества всех плоских волн, допускаемых уравнениями для потенциала

$$(p_0^2 - p^2) A_\mu = 0, \quad p_\mu A^\mu = 0.$$

Поэтому представляется важным исследовать симметрийные свойства таких уравнений.

Теорема I.7. Уравнения (2.7) инвариантны относительно расширенной группы Пуанкаре $\widetilde{P}(1,3)=\{P(1,3),\mathcal{D}\}$.

Доказательство. В силу леммы I.4 оператор симметрии ищем в виде

$$X=\xi^{\mu}(x)\,\partial_{\mu}+\sigma^{\mu}_{\nu}A_{\mu}\,\partial_{A_{\nu}}$$

Уравнение калибровки дает следующие соотношения:

$$\xi^{a}_{0}=\sigma^{0}_{a}\ ,\quad \xi^{k}_{i}=\sigma^{i}_{k}\ ,\quad \xi^{0}_{0}-\sigma^{0}_{0}=\xi^{1}_{1}-\sigma^{1}_{1}=\xi^{2}_{2}=\sigma^{2}_{2}=\xi^{3}_{3}-\sigma^{3}_{3}$$

Выпишем теперь условие инвариантности для ПД уравнений из (2.7)

$$i\left(\partial_0\sigma^{\mu}_{\nu}+\partial_k(\sigma^{\mu}_{\nu})\frac{p_k}{p_0}\right)A_{\mu}-\xi^{0}_{0}\left(pA_{\nu}\right)+\left(\xi^{0}_{i}-\xi^{i}_{0}\right)p_iA_{\nu}+$$

$$+\xi^{k}_{i}\left(\frac{p_kp_i}{p}A_{\nu}\right)+\frac{\partial_i\partial_k}{2}\left(\sigma^{\mu}_{\nu}\right)\left[\frac{\delta_{ik}}{p}-\frac{p_ip_k}{p^3}\right]A_{\mu}+$$

$$+\frac{i}{2}\left[\xi^{0}_{kj}\left(\delta_{kj}-\frac{p_kp_j}{p^2}\right)-\xi^{k}_{ij}\,p_k\left(\frac{\delta_{ij}}{p}-\frac{p_ip_j}{p^3}\right)\right]A_{\nu}\approx 0.$$

Знак $\approx$ означает равенство с точностью до более высоких производных по x и p (см. Т. I.I). Отсюда, приравнивая члены при ПД выражениях типа $\frac{p_i}{p}A_{\mu}$, $\frac{p_ip_k}{p^3}A_{\nu}$ и т.д., получаем, что

$$\partial_k(\sigma^{\mu}_{\nu})=0\ ,\quad \xi^{a}_{0}=\xi^{0}_{a}\ ,\quad \xi^{i}_{k}=-\xi^{k}_{i}\ (i\neq k)\ ,\quad \xi^{0}_{0}=\xi^{1}_{1}=\xi^{2}_{2}=\xi^{3}_{3}.$$

Из этих соотношений находим следующие операторы преобразований

$$T_{\mu}=\partial_{\mu}\ ,\qquad \mathcal{D}=x_0\partial_0+x_k\partial_k+\lambda A_{\mu}\partial_{A_{\mu}}$$

$$J_{0k}=x_0T_k+x_kT_0+\left(S_{0k}A\right)_{\mu}\partial_{A_{\mu}}$$

$$J_{ik}=x_iT_k-x_kT_i+\left(S_{ki}A\right)_{\mu}\partial_{A_{\mu}}$$

Матрицы $S_{\mu\nu}$ имеют структуру, определяемую уравнениями для ξ^ν, σ^μ_ν

$$S_{01}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad S_{02}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad S_{03}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$S_{12}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad S_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad S_{31}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Теорема доказана.

§3. Псевдодифференциальные уравнения, инвариантные относительно группы Шредингера и конформной группы

Хорошо известно, что нелинейное уравнение $(p_0^2 - p_K p_K)\varphi + \lambda\varphi^3 = 0$ $K = \overline{1,3}$, $\varphi = \varphi(x_0, x_1, x_2, x_3)$, $p_\mu = i g_{\mu\nu}\partial_\nu$ конформно инвариантно. Известно также, что уравнение Шредингера

$$\check{S}\Psi + \lambda(\bar{\Psi}\Psi)^{2/3}\Psi = 0, \quad \check{S} = p_0 - \frac{p_K p_K}{2}$$

инвариантно относительно группы Шредингера, включающей движения пространства (x_1, x_2, x_3) , переносы по x_0 , галилеевы преобразования, а также масштабные и проективные преобразования.

Задача, которая решена в настоящем параграфе, заключается в следующем: описать скалярные уравнения вида

$$f(A)\varphi + \lambda F(\varphi) = 0$$

инвариантные относительно подгрупп группы Шредингера или же конформной группы, если A – оператор Шредингера или Даламбера, соответственно. Под выражением $f(A)\varphi$ условимся понимать следующий ПДО

$$f(A)\varphi \equiv \int e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} \tilde{f}(A)\,\varphi(y)\,dy\,dp ,$$

где $\tilde{f}(A)$ символ оператора $f(A)$. Пусть сначала A – оператор Даламбера $A = p_\mu p^\mu$. Изучим симметрийные свойства уравнения

$$\int e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} \tilde{f}(p_\mu p^\mu)\,\varphi(y)\,dy\,dp + \lambda F(\varphi(x)) = 0 \qquad (3.I)$$

Теорема I.8. Уравнение (3.I) инвариантно относительно следующих алгебр:

I) алгебры Пуанкаре P(I.3), если f и F произвольные дифференцируемые функции своих аргументов;

2) алгебры $\tilde{P}(1,3) = \{P(1,3), \mathcal{D}\}$, если
a) $f(p_\mu p^\mu) = (p_\mu p^\mu)^s$, $F(\varphi) = \varphi^{\varkappa}$, $2s + \beta(\varkappa - 1) = 0$, $\beta \neq 0$

в) $f(p_\mu p^\mu)=(p_\mu p^\mu)^s$, $F(\varphi)=exp(-\frac{2s}{\alpha}\varphi)$, $\alpha, s\in R^1$, $\alpha\neq 0$.

3) алгебры C(I.3), если

$$f(p_\mu p^\mu)=(p_\mu p^\mu)^s\ ,\ F(\varphi)=\varphi^{\varkappa}\ ,\ \varkappa=\frac{2+s}{2-s}\ ,\ s\neq 2.$$

Доказательство. Запишем полное условие инвариантности для уравнения (3.I)

$$X=\xi^\mu\partial_\mu+\tau(x,\varphi)\partial_\varphi\ ,\ (\xi,p)=g_{\mu\nu}\xi^\mu p_\nu\ ,\ p^2=p_\mu p^\mu$$

$$L_X\left(f(p^2)\varphi+\lambda F(\varphi)\right)=i\,2p_\mu(\xi,p)g_{\mu\nu}p_\nu f'\varphi+$$

$$+p_\mu p_\nu(\xi,p)\left[g_{\mu\nu}f'\varphi+2g_{\mu\alpha}g_{\nu\varkappa}p_\alpha p_\varkappa f''\varphi\right]+$$

$$+i\sum_{|\alpha|=3}^{\infty}\frac{p^\alpha(\xi,p)D_p^\alpha(f(p^2)\varphi)}{\alpha!}+f(p^2)(\tau(x,\varphi))+$$

$$\tau(x,\varphi)F_\varphi(\varphi)=h\left[f(p^2)\varphi+\lambda F(\varphi)\right].$$

В силу утверждения 3 леммы I.2 имеем

$$L_X(p^2)=2i\,p_\mu(\xi,p)g_{\mu\nu}p_\nu+i\,p_\mu p^\mu(\xi,p).$$

Поэтому $L_X f(p^2)\varphi$ с необходимостью будет включать только нетривиальные ПД выражения. Поскольку преобразования локальны, то $F(\varphi)$ не может преобразовываться через производные от φ. Следовательно, $F(\varphi)$ и $f(p^2)\varphi$ преобразовываются независимо. Поэтому $h=h(x,\varphi)$. Допуская зависимость ξ от φ и нелинейную зависимость τ от φ, выкладками, аналогичными проделанным в лемме I.4, можно убедиться, что в этом случае $\xi=\eta=0$. Поэтому $\xi^\mu=\xi^\mu(x)$, $\tau=\sigma(x)\varphi$. Запишем теперь условие инвариантности в более удобной форме

$$
\begin{aligned}
L_X\left(f(p^2)\varphi + \lambda F(\varphi)\right) = &-2\,\xi^\alpha_\varkappa\, g_{\alpha\mu}\, p_\mu\, p_\varkappa\, f'\varphi + \\
&+ \sigma f(p^2)\varphi + \lambda\tau F_\varphi - i\,\xi^\alpha_{\mu\nu}\, g_{\alpha\varkappa}\, p_\varkappa\left[g_{\mu\nu} f'\varphi + 2 p_\mu p_\nu f''\varphi\right] \\
&+ 2i\,\sigma_\mu\, p_\mu\, f'\varphi - \sigma_{\mu\nu}\left[g_{\mu\nu} f' + 2 p_\mu p_\nu f''\right]\varphi \\
&+ \sum_{|\alpha|=3}^{\infty} \frac{p^\alpha\left(i(\xi,p)+\sigma\right) D^\alpha_p(f)\varphi}{\alpha!} = h(x,\varphi)\left(f(p^2)\varphi + \lambda F(\varphi)\right).
\end{aligned}
\tag{A}
$$

Из равенства (A) видно, что, если производные функции f являются независимыми: $f' \neq K f''$ или $f \neq t f'$, причем $(\xi_\varkappa, p) p_\varkappa f' \neq = \omega\, p^2 f(p^2)$, то должны выполняться следующие соотношения

$$
\xi^a_0 - \xi^0_a = 0\,, \quad \xi^i_K + \xi^K_i = 0\,, \quad \xi^0_0 = 0.
$$

Эти уравнения получаются из (A) обычной процедурой приравнивания коэффициентов в (A) при членах типа $p^K(\xi)\, D^n_p(f)$ и определяют алгебру Ли группы Пуанкаре. Возвращаясь к (A), видим, что в этом случае $\tau = \sigma\varphi = 0$, поэтому f и F могут быть произвольными дифференцируемыми функциями. Таким образом, утверждание I) доказано.

Если допустить наличие связи типа $\xi^\alpha_\varkappa\, g_{\alpha\mu}\, p_\mu\, p_\varkappa\, f' = k\,\omega(x) f$ то, поскольку $f = f(p^2)$, это возможно только, если $\xi^0_0 = \xi^1_1 = \xi^2_2 = \xi^3_3 = k\,\omega(x)$. Тогда f удовлетворяет уравнению $y\, df/dy = s f$ · следовательно, является степенной функцией: $f = (p^2)^s$

Итак, из (A) получаем соотношения

$$
\sigma_{\mu\nu} = 0, \quad \xi^0_a - \xi^a_0 = 0, \quad \xi^i_K + \xi^K_i = 0 \ (i \neq K), \quad \xi^\alpha_{\mu\nu} = 0 \ (\alpha \neq \mu \neq \nu)
$$

$$
\xi^0_0 = \xi^1_1 = \xi^2_2 = \xi^3_3\,, \quad (2-s)\,\xi^0_0\,.
$$

Этих условий достаточно, чтобы утверждать, что максимальная симметрия уравнения (3.I) является конформной симметрией. Выпишем генераторы алгебры C(I.3)

$$
p_\mu = i\, g_{\mu\nu}\,\partial_\nu\,, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu\,, \quad D = x_\mu p^\mu + i\beta
$$

$$K_\mu = 2x_\mu \mathcal{D} - x^2 p_\mu \quad , \quad \beta = 2 - s .$$

Возвращаясь опять к (A) находим, что

$$(2-s)\varphi F_\varphi = (2+s) F .$$

Решение этого уравнения $F = \lambda \varphi^{\frac{2+s}{2-s}}$. Инвариантность уравнения (3.I) относительно расширенной группы Пуанкаре $\widetilde{P}$ (I.3) проверяется аналогично. Теорема доказана.

Замечание. Результат о конформной инвариантности легко распространяется на случай n пространственных переменных. При этом получаем такое утверждение.

Утверждание.

Уравнение

$$f(p^2)\varphi + \lambda F(\varphi) = 0$$

$\varphi = \varphi(x_0, x_1, \dots x_n)$; $p^2 = p_0^2 - \sum_{k=1}^{n} p_k p_k$ инвариантно относительно алгебры $C(1,3)$, если и только если

$$f(p^2) = (p^2)^s \ , \quad F(\varphi) = \varphi^{æ} \ , \quad æ = (n+1+2s)/(n+1-2s) \ , \ n+1 \neq 2s, \ n \geq 2 .$$

Докажем теперь аналогичный результат для уравнения типа Шредингера

$$f(\check{S})\Psi + \lambda F(\bar{\Psi}, \Psi) = 0 \qquad (3.2)$$

$\check{S} = p_0 - \frac{\vec{p}^{\,2}}{2}$, $p_0 = i\partial_0$, $\vec{p} = -i(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)$, $\Psi = \Psi(x_0, x_1, \dots x_n)$,

$\bar{\Psi}$ - комплексно сопряженная к Ψ функция.

Теорема I.9.

Уравнение (3.2) инвариантно относительно следующих алгебр:

I) алгебры Ли группы Галилея $G(1,n)$, если

$$F = \Phi(\bar{\Psi}\Psi)\Psi \qquad f \in S^m_{\rho,\delta} \ , \quad \Phi \in C^1(R)$$

2) расширенной алгебры Галилея $\widetilde{G}(1,n) = \{G(1,n), \mathcal{D}\}$, если и только если

$$f(\check{S}) = (\check{S})^{æ} \ , \quad F = (\bar{\Psi}\Psi)^s \Psi , \quad 2\beta s = -2æ \ , \quad \beta \neq 0 ;$$

3) алгебры Ли группы Шредингера $Sch(1,n)$, если и только если $f(\check{S}) = (\check{S})^{\varkappa}$, $F = (\bar{\Psi}\Psi)^s\Psi$, $s = 2\varkappa/(n+2-2\varkappa)$, $2\varkappa \neq n+2$.

Доказательство.

Доказательство проводится аналогично т. I.8 и получается весьма громоздким. Поэтому мы только проверим, что указанные уравнения инвариантны относительно соответствующих алгебр. Операторы алгебры $Sch(1,n)$, включающей как подалгебры $G(1,n)$, $\tilde{G}(1,n)$ таковы

$p_\mu = i g_{\mu\nu}\partial_\nu$, $g_{\mu\nu} = diag(1,-1,-1,\ldots -1)$ количество (–I) равно n,

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \quad a,b = \overline{1,n}$$

$$G_a = x_0 p_a - x_a, \quad D = 2x_0 p_0 - x_a p_a + i\beta,$$

$$A = x_0^2 p_0 - x_0 x_a p_a + \left(\frac{x_a x_a}{2} - i\beta x_0\right), \quad \beta = -\frac{n}{2} + \varkappa - 1.$$

Итак проверим утверждение 3. Векторное поле, соответствующее оператору A таково

$$X = x_0^2\partial_0 + x_0 x_a \partial_a + \left(\beta x_0 + \frac{i}{2}x_a x_a\right)\Psi\partial_\Psi + \left(\beta x_0 - \frac{i}{2}x_a x_a\right)\bar{\Psi}\partial_{\bar{\Psi}}.$$

Пользуясь теоремой I.I, находим

$$L_X\left(f(\check{S})\Psi + \lambda F(\bar{\Psi},\Psi)\right) = -2x_0\check{S}f'\Psi + x_i p_i f'\Psi - i\check{S}f''\Psi +$$

$$+\frac{i}{2}\vec{p}^{\,2}f''\Psi + i\beta f'\Psi - x_a p_a f'\Psi + \frac{i}{2}nf'\Psi + i\check{S}f''\Psi - ip_0 f''\Psi +$$

$$+\left(\beta x_0 + \frac{i}{2}x_a x_a\right)f\Psi + \lambda\left(\beta x_0 + \frac{i}{2}x_a x_a\right)\Psi F_\Psi + \lambda\left(\beta x_0 - \frac{i}{2}x_a x_a\right)\bar{\Psi}F_{\bar{\Psi}} =$$

$$= -2x_0\check{S}f'\Psi - i\check{S}f''\Psi + i\beta f'\Psi + \frac{i}{2}nf'\Psi + \left(\beta x_0 + \frac{i}{2}x_a x_a\right)f\Psi +$$

$$+\lambda\beta x_0\left(\Psi F_\Psi + \bar{\Psi}F_{\bar{\Psi}}\right) + \lambda\frac{i}{2}x_a x_a\left(\Psi F_\Psi - \bar{\Psi}F_{\bar{\Psi}}\right).$$

Таким образом, если $f(\check{s}) = (\check{s})^{\varkappa}$, то имеем

$$L_X\left(f(\check{s})\Psi + \lambda F(\bar{\Psi},\Psi)\right) =$$

$$= \left[\left(-2\varkappa x_0 + \beta x_0 + \frac{i}{2} x_a x_a\right) \check{s}^{\varkappa} + i\left(-\varkappa(\varkappa-1) + \beta\varkappa + \varkappa \frac{n}{2}\right) \check{s}^{\varkappa-1} \right] \Psi +$$

$$+ \lambda\beta x_0 \left(\Psi F_\Psi + \bar{\Psi} F_{\bar{\Psi}}\right) + \frac{\lambda i}{2} x_a x_a \left(\Psi F_\Psi - \bar{\Psi} F_{\bar{\Psi}}\right) = h\left(\check{s}^{\varkappa}\Psi + \lambda F(\bar{\Psi},\Psi)\right).$$

Следовательно, $h = -2\varkappa x_0 + \beta x_0 + \frac{i}{2} x_a x_a$, $\beta = -\frac{n}{2} + \varkappa - 1$,

$$\beta x_0\left(\Psi F_\Psi + \bar{\Psi} F_{\bar{\Psi}}\right) + \frac{i}{2} x_a x_a \left(\Psi F_\Psi - \bar{\Psi} F_{\bar{\Psi}}\right) = \left((\beta - 2\varkappa) x_0 + \frac{i}{2} x_a x_a\right) F.$$

Отсюда $F = (\bar{\Psi}\Psi)^s \Psi$, $s = 2\varkappa/(n+2-2\varkappa)$. Утверждение доказано. Остальные утверждения т. I.9 доказываются аналогично.

Изучим далее конформную инвариантность уравнений специального вида для многокомпонентной функции $\Psi(x) = (\Psi_1(x), \ldots \Psi_n(x))$

$$(p_0 - p)\Psi \equiv \int e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} (p_0 - p)\Psi(y)\, dy\, dp = 0 \qquad (3.3)$$

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3), \quad p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}, \quad \mu = \overline{0,3}.$$

Отметим, что в т. I.7 изучались симметрийные свойства таких уравнений для четырехкомпонентной функции Ψ с дополнительным условием калибровки. Оказалось, что такая система не является C(I.3) инвариантной, хотя каждое из уравнений $(p_0 - p)A_\mu = 0$ такой симметрией обладает. Поэтому естественен вопрос: при каких дополнительных условиях уравнения (3.3) конформно инвариантны? Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема I.IO. Уравнения (3.3) конформно инвариантны, если и только если Ψ преобразуется по представлению $D(0,i)$, $D(i,0)$, $D(0,i)\times D($ группы Лоренца и удовлетворяет уравнению $(\lambda p_\mu - S_{\mu\nu}p^\nu)\Psi = 0$

Доказательство.

Из леммы I.4 следует, что представление алгебры $C(1,3)$ должно быть линейным. Легко убедиться также, что система (3.3) допускает операторы из расширенной группы Пуанкаре. Вид генераторов таков

$$p_\mu = i g_{\mu\nu}\partial_\nu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \quad \mathcal{D} = x_\mu p^\mu + i\beta.$$

Из /66/ следует, что K_μ можно задать в виде

$$K_\mu = 2x_\mu \mathcal{D} - (x_\nu x^\nu) p_\mu + 2x^\nu S_{\mu\nu}$$

Пользуясь теоремами I.I, I.3, формулами (2.4), можно найти производную Ли вдоль поля K_μ

$$L_{K_\mu}(p_0 - p)\Psi = A(p_0 - p)\Psi + \frac{2}{p}\left(iS_{\mu\nu}p^\nu + (1-\beta)p_\mu\right)\Psi,$$

где

$$A = -4x_0 + 2x_a p_a/p + \frac{2}{p}.$$

Следовательно, дополнительное условие имеет вид

$$M\Psi \doteq \left(iS_{\mu\nu}p^\nu + (1-\beta)p_\mu\right)\Psi = 0 \tag{3.4}$$

Далее мы должны убедиться, что условие (3.4) C(I.3) инвариантно. Симметрия относительно K_μ накладывает дополнительные условия на матрицы $S_{\mu\nu}$

$$g_{\rho\varkappa} S_{\mu\rho} S_{\varkappa\nu} + g_{\rho\varkappa} S_{\nu\rho} S_{\varkappa\mu} + g_{\mu\nu} S_{\rho\sigma} S_{\varkappa\alpha} g_{\rho\varkappa} g_{\sigma\alpha} =$$

Следовательно, по теореме Брейкена /65, 66/ получаем, что на множестве решений уравнений (3.3), (3.4) реализуется представление $\mathcal{D}(0,i)\times\mathcal{D}(j,0)$ группы Лоренца, если мы требуем, чтобы система (3.3), (3.4) была конформно инвариантна.

Теорема доказана.

Заметим, что если матрицы $S_{\mu\nu}$ представления $\mathcal{D}(1,0)\oplus\mathcal{D}(0,1)$ выбрать в виде

$$\tilde{S}_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\tilde{S}_{bc}, \quad (\tilde{S}_a)_{kn} = i\,\varepsilon_{akn}$$

$$S_a = \begin{pmatrix} \tilde{S}_a & O_3 \\ O_3 & \tilde{S}_a \end{pmatrix}, \qquad S_{0a} = \begin{pmatrix} O_3, & \tilde{S}_a \\ -\tilde{S}_a, & O_3 \end{pmatrix}, \quad \beta = 2$$

то условия (3.4) суть просто уравнения Максвелла

$$\frac{\partial \Psi_a}{\partial t} = \varepsilon_{abc} \frac{\partial \Psi_{c+3}}{\partial x_b} \quad , \quad \frac{\partial \Psi_{3+a}}{\partial t} = - \varepsilon_{abc} \frac{\partial \Psi_c}{\partial x_b}$$

$$\sum_a \frac{\partial \Psi_a}{\partial x_a} = 0 \quad , \qquad \sum_a \frac{\partial \Psi_{3+a}}{\partial x_a} = 0 .$$

Возвращаясь к уравнениям (2.7), мы видим, что поскольку A_μ преобразуется по представлению $\mathcal{D}(1/2, 1/2)$ (см. (2.8)), то они не могут быть C(I.3) инвариантными в силу только что доказанной теоремы.

§4. О симметрии псевдодифференциальных уравнений со взаимодействием

Настоящий параграф посвящен изучению симметрийных свойств уравнений со взаимодействием. В частности, к таким уравнениям относятся уравнения, полученные из классических уравнений Клейна-Гордона и Дирака заменой $p_\mu = \pi_\mu = p_\mu - A_\mu$. С помощью этой замены описывается взаимодействие частицы, волновая функция которой удовлетворяет какому-либо из перечисленных уравнений, с внешним полем, заданным потенциалом A_μ. Поэтому важно знать, как введение взаимодействия влияет на симметрийные свойства уравнений - ведь взаимодействие должно вводиться инвариантным образом.

В настоящем параграфе исследуются симметрийные свойства нелинейных уравнений типа Клейна-Гордона и Дирака со включенным взаимодействием, а также уравнение (2.I).

Рассмотрим уравнение Дирака

$$f(\gamma_\mu \pi^\mu)\Psi + \lambda F(\bar\Psi, \Psi) = 0 \qquad (4.\mathrm{I})$$

Здесь $\Psi = (\Psi_1(x), \Psi_2(x), \Psi_3(x), \Psi_4(x))$, $A_\mu = A_\mu(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\mu = \overline{0,3}$, γ_μ - матрицы Дирака $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$, $\bar\Psi$ - дираковски сопряженный биспинор $\bar\Psi = \Psi^+\gamma_0$, $\gamma_\mu\pi^\mu = \hat\gamma$. Функция f, как функция от матрицы задается рядом $f(\hat\gamma) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} f_\alpha \hat\gamma^\alpha/\alpha!$, причем каждый матричный элемент принадлежит классу $L^m_{\rho,\delta}$, т.е. интеграл

$$f(\gamma_\mu \pi^\mu)\Psi \equiv \int e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} f(\gamma_\mu(p^\mu - A^\mu(y)))\Psi(y)\,dy\,dp$$

имеет смысл /63, §I/. Обозначим $\mathcal{J}_N$ - полный набор инвариантов группы Пуанкаре, построенных из $\bar\Psi$, Ψ, причем если $\mathcal{D} = x_\mu p^\mu + i\beta$ то $L_{\mathcal{D}}(\mathcal{J}_N) = 2\beta\mathcal{J}_N$; пусть I_2, O_2 единичная и нулевая 2x2 матрицы. Выберем матрицы γ_μ в виде $\gamma_0 = \begin{pmatrix} O_2 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & O_2 \end{pmatrix}$, $\gamma_k = \begin{pmatrix} O_2, & \sigma_k \\ -\sigma_k, & O_2 \end{pmatrix}$, где σ_μ – матрицы Паули

$$\sigma_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Имеет место утверждение.

Теорема I.II. Уравнение (4.I) инвариантно относительно:
I) алгебры Пуанкаре $P(1,3)$, если

$$F=\begin{pmatrix}F_1 I_2, & O_2\\ O_2, & F_2 I_2\end{pmatrix}\Psi$$

$F_1=F_1(J_N)$, $F_2=F_2(J_N)$, F_1, F_2 – дифференцируемы по своим аргументам, матричные элементы функции f принадлежат $L^m_{\rho\delta}$.
2) алгебры расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$, если

$$f(\hat{\gamma})=(\hat{\gamma})^s, \qquad F_1=J_1^t\, G_1\left(\frac{J_N}{J_1}\right),\quad F_2=J_1^t\, G_2\left(\frac{J_N}{J_1}\right)$$

$$2\beta t=-s,\quad J_1=\bar{\Psi}\Psi,\quad s,\beta\in R^1,\ \beta\neq 0.$$

Доказательство. Тот факт, что указанные алгебры максимальны, устанавливается с помощью т.I.I. Ввиду громоздкости доказательства мы здесь только проверим, что уравнение (4.I) инвариантно относительно указанных алгебр инвариантности.

Действительно, при преобразованиях из группы Лоренца имеем:

$$J_{\mu\nu}=x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu},\quad S_{\mu\nu}=\frac{i}{4}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]_-$$

Следовательно,

$$\hat{\gamma}'=\hat{\gamma}+\varepsilon\left(-\gamma_\mu\pi_\nu+\gamma_\nu\pi_\mu\right)\equiv\hat{\gamma}+\varepsilon B_{\mu\nu}$$

$$\Psi'=\Psi+\varepsilon i S_{\mu\nu}\Psi,\quad (\hat{\gamma}\Psi)'=\hat{\gamma}\Psi+i\varepsilon S_{\mu\nu}\hat{\gamma}\Psi-\varepsilon B_{\mu\nu}\Psi$$

$$(\hat{\gamma}')^n=\hat{\gamma}^n+\varepsilon\sum_{K=0}^{n-1}\hat{\gamma}^K B_{\mu\nu}\hat{\gamma}^{n-1-K}$$

$$(\hat{\gamma}')^n\Psi'=\hat{\gamma}^n\Psi+\varepsilon\sum_{K=0}^{n-1}\hat{\gamma}^K B_{\mu\nu}\hat{\gamma}^{n-1-K}\Psi-$$

$$+\varepsilon i S_{\mu\nu} \hat{\gamma}^n \Psi - \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\gamma}^k B_{\mu\nu} \hat{\gamma}^{n-1-k}$$

Поэтому имеем

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} f_\alpha \frac{(\hat{\gamma}')^\alpha}{\alpha!} \Psi' = f(\gamma)\Psi + \varepsilon i S_{\mu\nu} f(\hat{\gamma})\Psi$$

При описанном выше выборе матриц γ_μ, произвольная функция вида

$$F(\bar{\Psi},\Psi) = \begin{pmatrix} F_1 I_2 & 0_2 \\ 0_2 & F_2 I_2 \end{pmatrix} \Psi$$

при преобразованиях, генерируемых $J_{\mu\nu}$, изменяется следующим образом

$$F' = F + \varepsilon i S_{\mu\nu} \Psi$$

Поэтому

$$L_{J_{\mu\nu}} \left(f(\hat{\gamma})\Psi + \lambda F(\bar{\Psi},\Psi)\right) = i S_{\mu\nu} \left(f(\hat{\gamma})\Psi + \lambda F(\bar{\Psi},\Psi)\right)$$

что доказывает инвариантность этого уравнения относительно преобразований из $P(1,3)$.

Группа $\tilde{P}(1,3)$ содержит дополнительно только оператор

$$\mathcal{D} = x_\mu \partial_\mu - A_\mu \partial_{A_\mu} + \beta \left(\Psi \partial_\Psi + \bar{\Psi} \partial_{\bar{\Psi}}\right).$$

Из вида $\mathcal{D}$ следует, что

$$L_{\mathcal{D}}(\hat{\gamma}) = -\hat{\gamma}, \quad L_{\mathcal{D}} \Psi = \beta\Psi, \quad L_{\mathcal{D}} \bar{\Psi} = \beta\bar{\Psi}.$$

Поэтому

$$L_{\mathcal{D}} \left(\hat{\gamma}^s \Psi + \lambda F\right) = (\beta - s)\left(\hat{\gamma}^s \Psi + \lambda F\right),$$

если F_1, F_2 удовлетворяют условиям п 2, теоремы I.II.

Таким образом, утверждения теоремы проверены.

Рассмотрим теперь псевдодифференциальное уравнение Клейна-Гордона со взаимодействием

$$f(\pi_\mu \pi^\mu)\varphi + \lambda F(\varphi) = 0, \tag{4.3}$$

$$f(\pi_\mu \pi^\mu)\varphi \equiv \int e^{-ip_\mu(x_\mu - y^\mu)} f(p_\mu - A_\mu(y), p^\mu - A^\mu(y))\,\varphi(y)\,dy\,dp$$

Теорема I.I2.

I.Уравнение (4.3) инвариантно относительно алгебры $P(1,3)$ при произвольных дифференцируемых функциях f и F.

2.Уравнение (4.3) инвариантно относительно алгебры $\tilde{P}(1,3)$ если и только если $f(\pi_\mu \pi^\mu) = (\pi_\mu \pi^\mu)^s$, $F(\varphi) = \begin{cases} \varphi^{\varkappa} & , 2s + \beta(\varkappa - 1) = 0 \\ \exp(-\frac{2s\varphi}{\alpha}), & \alpha \neq 0 \end{cases}$

Доказательство теоремы проводится полностью аналогично т.I.I с тем различием, что $S_{\mu\nu} = 0$ поскольку уравнение скалярное.

Наконец, найдем симметрию уравнения (2.I) со взаимодействием:

$$\pi_0 \varphi = \sqrt{\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2}\,\varphi\,; \quad \pi_\mu = p_\mu - A_\mu(y) \quad \mu = \overline{0,3}, \tag{4.4}$$

$$\left(\pi_0 - \sqrt{\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2}\right)\varphi \equiv \int e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)}\left(\pi_0 - \sqrt{\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2}\right)\varphi(y)\,dy\,dp$$

Теорема I.I3.

Уравнение (4.4) инвариантно относительно расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$, генераторы которой имеют вид

$$T_\mu = \partial_\mu, \qquad J_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} x_\alpha T_\nu - g_{\nu\alpha} x_\alpha T_\mu + g_{\nu\alpha} A_\alpha \partial_{A_\mu} - g_{\mu\alpha} A_\alpha \partial_{A_\nu}$$

$$D = x_0 \partial_0 + x_a \partial_a + \beta\varphi\partial_\varphi - A_\mu \partial_{A_\mu}$$

Доказательство.

Из леммы I.4 следует, что оператор симметрии имеет вид

$$X = \xi^\mu \partial_\mu + \sigma\varphi\partial_\varphi + \sigma^\mu_\nu A_\mu \partial_{A_\nu}$$

где $\xi^\mu = \xi^\mu(x)$, $\sigma = \sigma(x)$, $\sigma^\mu_\nu = \sigma^\mu_\nu(x)$.

Пользуясь т. I.I, находим условие инвариантности $(\pi = \sqrt{\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2}$

$$-\xi^0_0 p_0 \varphi + \xi^k_0 p_k \varphi + i\sigma_0\varphi + \sigma p_0 \varphi + \sigma^\mu_0 A_\mu \varphi - \left[\sigma^\mu_k(y) A_\mu(y)\,\partial_{A_k}(\pi) - \right.$$

$$-i\,D_k(\xi,p)\,\partial_{p_k}(\pi) - \frac{D_k D_i(\xi,p) D_{p_k} D_{p_i}(\pi)}{2} + (\sigma A_0 \varphi)$$

$$+\sum_{|\alpha|=3}^{\infty} \frac{(-iD)^\alpha(\xi,p) D_p^\alpha(\pi)}{\alpha!}\varphi - \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{(-iD)^\alpha(\sigma) D_p^\alpha(\pi)}{\alpha!}\varphi = h(\pi_0-\pi)\varphi$$

Отсюда, как и в теореме I.3, получаем определяющие уравнения

$$\xi^i_k + \xi^k_i = 0 \ (i \neq k) \qquad \xi^0_k = \xi^k_0, \qquad \xi^0_0 = \xi^1_1 = \xi^2_2 = \xi^3_3 = -\sigma^0_0 = -\sigma^1_1 = -\sigma^2_2 =$$

$$= -\sigma^3_3, \qquad \xi^a_k = -\sigma^a_k, \quad \xi^a_0 = -\sigma^a_0, \quad \xi^\alpha_{\mu\nu} = 0, \quad \sigma = const.$$

Из этих уравнений определяются координаты операторов, указанных в теореме.

Таким образом, нами показано, что если вводить взаимодействие так, как это сделано в настоящем параграфе, то нелинейные уравнения Клейна-Гордона, Дирака и (2.I) с включенным взаимодействием являются релятивистски инвариантными.

§5. Нелокальная симметрия некоторых дифференциальных уравнений

Рассмотрим теперь вопрос о симметрии некоторых дифференциальных уравнений относительно нелокальных преобразований. К ним относится нелиевская симметрия /48–49/. Метод, предложенный в этих работах, дает возможность найти скрытые, не геометрические симметрии уравнений математической физики – уравнений Максвелла, Дирака, Кеммера-Дафина и др. Операторы симметрии, получаемые в этом подходе, являются ПД-операторами и стандартным методом Ли найдены быть не могут. Инвариантность относительно нелокальных преобразований указывает на наличие скрытых симметрийных свойств изучаемой системы уравнений. Поляризация света, расщепление уровней атома водорода – вот характерные примеры проявления нелокальной симметрии.

Настоящий пункт посвящен исследованию нелокальной симметрии уравнения на собственные значения для гармонического осциллятора и одной системы псевдодифференциальных уравнений.

Итак, рассмотрим стационарное уравнение Шредингера для гармонического осциллятора

$$(p_k p_k + x_k x_k)\varphi(x) = E\varphi(x) \qquad (5.1)$$

$x=(x_1,x_2,x_3)$, $p_k=-i\partial_k$, $k=\overline{1,3}$; $E=const$ и имеет смысл энергии.

Теорема 1.14.

Уравнение (5.1) инвариантно относительно бесконечной алгебры Ли, образованной операторами

$$J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \quad R=(\sigma\varphi)\partial_\varphi$$

$$\sigma\varphi = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{\frac{ip}{2}(x+y)}\,\phi(J_N(p,y-x))\,\varphi(y)\,dy\,dp$$

Доказательство.

Учитывая сказанное в §1 о алгебрах ПД операторов, генератор симметрии X ищем в виде

$$X = \xi^{\kappa}(x)\, \partial_{\kappa} \quad {}_{1}p)\varphi\, \partial_{\varphi}.$$

Следуя изложенному ı алгоритму, находим

$$L_X\left[\left(p_\kappa p_\kappa \varphi + x_\kappa x_\kappa \varphi\right) \quad \varphi\right] = \left(\eta_{\kappa\kappa} + 2 x_\kappa \xi^\kappa \varphi - E\sigma\varphi + x_\kappa x_\kappa \sigma\varphi\right)\Big|_M =$$

$$= 2x_\kappa \xi^\kappa \varphi + \quad \sigma\varphi \quad \varphi - 2\xi^\kappa_i (p_\kappa p_i \varphi) + i \quad \xi^s_{\kappa\kappa}\, p_s \varphi -$$

$$- \quad \partial_\kappa(\sigma)\varphi \quad i\, \partial_s(\quad \partial_s\varphi + \sigma(-x_\kappa x_\kappa \varphi + E\varphi) =$$

$$= 2x \quad {}^\kappa_i p_\kappa p_i \varphi \quad i\, \xi^s_{\kappa\kappa}\, p_s\varphi + \left[-\partial_i\partial_i(\sigma) + \partial_{p_i}\partial_{p_i}(\sigma) + \right.$$

$$\left. + 2i\, x_\kappa \partial_{p_\kappa} \quad) - 2i \quad s\right]\varphi = 0.$$

Отсюда имеем

$$\xi^i_\kappa + \quad = 0\ (i \neq \kappa), \quad {}^s_{\kappa\kappa} = 0, \quad \xi^1_1 = \xi^2_2 = \xi^3_3,$$

$$2x_s \xi^s \quad (x_\kappa x_\kappa \quad = 0, \tag{5.2}$$

$$- \partial_\kappa\partial_\kappa(\sigma) + \partial_{p_\kappa}\partial_{p_\kappa}(\quad i\, x_\kappa \partial_{p_\kappa}(\sigma) - 2i\, \partial_\kappa(\sigma) p_\kappa = 0.$$

Из первой груп ı ний получаем:

$$\xi^i = C_{i\kappa} \qquad C_{i\kappa} = - C_{\kappa i}$$

Чтобы решить у авн для σ, выполним преобразование Фурье по переменным x, p

$$\sigma(x,p) = \int e^{i\vec{\kappa}\vec{x}} \quad {}^{i\vec{p}\vec{\tau}}\, \hat{\sigma}(\kappa,\tau)\, d\tau\, d\kappa. \tag{5.3}$$

Подставим (5.3) в урав ие для σ (5.2). Тогда для $\hat{\sigma}$ получаем уравнение

$$\left[2i\,(\kappa_s \partial_{\tau_s} - \tau_s \partial_{\kappa_s}) + \vec{\kappa}^2 - \vec{\tau}^2\right]\hat{\sigma} = 0,$$

или в симметричной форме

$$\frac{d\tau_s}{2i\kappa_s} = \frac{d\kappa_s}{-2i\tau_s} = \frac{d\hat{\sigma}}{(\tau^2 - \kappa^2)\hat{\sigma}}. \tag{5.4}$$

Следовательно, $\hat{\sigma} = \exp\left(-\frac{\kappa\tau}{2i}\right)\Phi(J_N(\kappa,\tau))$;

где J_N - первые интегралы уравнения (5.4), Φ - произвольная функция такая, что интеграл (5.3) существует.

Таким образом, общий вид искомого оператора σ можно найти обратным преобразованием Фурье:

$$\sigma(x,p)\varphi = \int e^{ip(x-y)}\sigma(x,p)\varphi(y)\,dy\,dp =$$

$$= \int e^{ip(x-y)} e^{ikx} e^{ip\tau} e^{-\frac{k\tau}{2i}} \Phi(J_N(k,\tau))\,dy\,dk\,d\tau\,dp =$$

$$= \int e^{ikx} e^{-\frac{k\tau}{2i}} \delta(x-y+\tau)\,\Phi(J_N(k,\tau))\,\varphi(y)\,dy\,dk\,d\tau =$$

$$= \int e^{ikx} e^{\frac{i}{2}k(y-x)} \Phi(J_N(k,y-x))\,\varphi(y)\,dy\,dk =$$

$$= \int \exp\left(\frac{ik}{2}(x+y)\right)\Phi(k,y-x)\,\varphi(y)\,dy\,dk .$$

Теорема доказана.

Возвратимся теперь к исследованию симметрийных свойств уравнений (2.6) с точки зрения нелиевской симметрии. Теорема I.5 описывает симметрию в классе операторов первого порядка. Нелокальная симметрия уравнений (2.6) оказывается гораздо шире.

Лемма I.5.

Пусть $a_1 = b_1 = a$, $a_2 = b_2 = b$. Тогда уравнения (2.6) приводятся невырожденным преобразованием к виду

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = i\begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix} p\Phi , \quad c_1 = ((b-a)(b+a))^{1/2} \quad (5.5$$

Доказательство.

Введем обозначения: O_3 , I_3 - нулевая и единичная матрицы 3х3

$$\sigma_2 = i\begin{pmatrix} O_3 & -I_3 \\ I_3 & O_3 \end{pmatrix} , \quad S_a = \begin{pmatrix} \tilde{S}_a & O_3 \\ O_3 & \tilde{S}_a \end{pmatrix}$$

$$\tilde{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \tilde{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \tilde{S}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\tilde{p}_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}(p_b - p_c) , \quad \tilde{p} = \left(\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2 + \tilde{p}_3^2\right)^{1/2} , \quad \hat{p}_a = \frac{p_a}{|p|} ,$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[p_1^4(p_2^2 - p_3^2)^2 + p_2^4(p_3^2 - p_1^2)^2 + p_3^4(p_1^2 - p_2^2)^2\right]^{1/2}$$

$$D = \Big\{\sum_{a \neq b \neq c}\left[(p_a^2 p_b^2 + p_b^2 p_c^2 - p^2 p^2)(1 - S_a^2) + p_1 p_2 p_3 S_a S_b p_c\right] -$$

$$- p_1^2 p_2 p_3 p \left[1 - \frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{p^2}\right]\Big\}\delta^{-1} , \quad R_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \mp \sigma_2)$$

Известно, что если $b = 0$, то преобразованием $U = U_4 U_3 U_2 U_1$ уравнения (2.6) приводятся к диагональному виду /53, §23/. Здесь

$$U_1 = R_- + R_+ D\,\frac{\vec{S}\vec{p}}{p} , \qquad U_2 = \exp(-i S_a \tilde{p}_a)$$

$$U_3 = \exp\left(\frac{i}{\sqrt{2}}(S_2 - S_1)\,\pi/4\right) , \quad U_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - i(S_1 S_2 + S_2 S_1 - S_3^2 + 1)\right] .$$

Уравнения (2.6) удобно переписать в виде

$$p_0 \Phi = \left(a\,\sigma_2(\vec{S}\vec{p}) + b\,\sigma_2 p\right)\Phi , \quad \Phi = (\vec{E}, \vec{H}) .$$

Следовательно, вопрос в том, как ведет себя оператор $\sigma_2 p$ при преобразовании $\sigma_2 p \to U \sigma_2 p U^{-1}$. Заметим, что σ_2 коммутирует с произвольной матрицей M вида

$$M = \begin{pmatrix} A & O_3 \\ O_3 & A \end{pmatrix}$$

Именно такой структурой обладают операторы U_2, U_3, U_4, D, $\vec{S}\vec{p}$. Очевидно также, что $[R_\pm ; \sigma_2]_- = 0$. Поскольку оператор перестановочен с произвольной функцией от $\vec{p}$, то имеем следующий результат $U \sigma_2 p U^{-1} = \sigma_2 p$; т.к. $U \sigma_2 \vec{S}\vec{p}\, U^{-1} = \Gamma_0 = \mathrm{diag}$ (I-I, 0 -I I 0), то уравнения (2.6) после преобразования U принимают вид:

$$\phi \to \Psi = U \phi, \quad \Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_6)$$

$$\begin{aligned} p_0 \Psi_1 &= p(a\Psi_1 + b\Psi_4) & \quad p_0 \Psi_4 &= -p(a\Psi_4 + b\Psi_1) \\ p_0 \Psi_2 &= p(-a\Psi_2 + b\Psi_5) & \quad p_0 \Psi_5 &= p(a\Psi_5 - b\Psi_2) \\ p_0 \Psi_3 &= bp\Psi_6 & \quad p_0 \Psi_6 &= -bp\Psi_3 . \end{aligned} \tag{5.6a}$$

Введем новые функции

$$\Psi_1 + \Psi_4 = F_1$$

$$\Psi_1 - \Psi_4 = F_2$$

$$\Psi_2 + \Psi_5 = F_3$$

$$\Psi_2 - \Psi_5 = F_4$$

$$\Psi_3 = F_5, \quad \Psi_6 = F_6$$

В новых терминах уравнения (5.6а) становятся более симметричными

$$p_0 F_1 = -\beta p F_2 \qquad p_0 F_3 = -\alpha p F_4 \qquad p_0 F_5 = b p F_6$$
$$p_0 F_2 = \alpha p F_1 \qquad p_0 F_4 = \beta p F_3 \qquad p_0 F_6 = -b p F_5 \tag{5.6б}$$

Нетрудно проверить, что невырожденным преобразованием матрица C вида

$$C = \begin{pmatrix} 0_3 & \varkappa I_3 \\ \delta I_3 & 0_3 \end{pmatrix}, \quad \varkappa\delta \neq 0$$

преобразуется к диагональному виду. Преобразование задается следующим образом

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \left(\frac{\delta}{\varkappa}\right)^{1/2} I_3, & I_3 \\ -I_3, & -\left(\frac{\delta}{\varkappa}\right)^{-1/2} I_3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \left(\frac{\delta}{\varkappa}\right)^{-\frac{1}{2}} I_3, & -I_3 \\ I_3, & \left(\frac{\delta}{\varkappa}\right)^{1/2} I_3 \end{pmatrix}$$

При этом получаем

$$A\begin{pmatrix} 0_3, \varkappa I_3 \\ \delta I_3, 0_3 \end{pmatrix} A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (\varkappa\delta)^{1/2}, & 0_3 \\ 0_3, & -(\varkappa\delta)^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, если сделаем замену

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/2}, & 1 \\ -1, & -i\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2} & 1 \\ -1 & -i\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Omega_3 \\ \Omega_4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \Omega_5 \\ \Omega_6 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_5 \\ F_6 \end{pmatrix}$$

то уравнения (5.6б) преобразуются к виду

$$p_0 \Omega_2 = i(\alpha\beta)^{1/2} p \Omega_2$$

$$p_0 \Omega_4 = i(\alpha\beta)^{1/2} p \Omega_4$$

$$p_0 \Omega_1 = -i(\alpha\beta)^{1/2} p \Omega_1$$

$$p_0 \Omega_3 = i(\alpha\beta)^{1/2} p \Omega_3$$

$$p_0 \Omega_5 = i b\, p \Omega_5$$

$$p_0 \Omega_6 = -i b\, p \Omega_6$$

Таким образом, лемма доказана.

Теперь, используя запись уравнений (2.6) в виде (5.5) мы можем доказать следующую теорему.

Теорема I.I5.

Пусть $(\alpha\beta)^{1/2} \neq b$, $(\alpha\beta)^{1/2} b \neq 0$. Тогда уравнения (5.5) инвариантны относительно операторов, образующих алгебру Ли $\{p_\mu, J_{ab}, D, GL(2) \oplus GL(2)\}$.

Доказательство.

Как и при доказательстве т.I.3, оператор симметрии выбираем в виде

$$X = \xi^\mu(x)\partial_\mu + \sigma^A_B(x)\,\Omega_A\,\partial_{\Omega_B} \quad A, B = \overline{1,6}.$$

Проделав выкладки, убеждаемся, что

$$\xi^a_0 = \xi^0_a = 0\,; \quad \xi^a_b + \xi^b_a = 0 \ (a \neq b) \quad \xi^0_0 = \xi^1_1 = \xi^2_2 = \xi^3_3\,,$$

$\partial_{x_\mu}(\sigma^A_B) = 0$, причем отличны от нуля только элементы

$$\sigma^1_1,\ \sigma^2_2,\ \sigma^1_2,\ \sigma^2_1,\ \sigma^3_3,\ \sigma^4_4,\ \sigma^3_4,\ \sigma^4_3\,.$$

Таким образом, получаем следующие генераторы

$$P_\mu = \partial_\mu, \quad J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad D = x_0 P_0 + x_a P_a + \beta$$

$$R^\varepsilon_\delta = \phi_\varepsilon\, \partial_{\phi_\delta}\ , \quad G^\varepsilon_\delta = \phi_{2+\varepsilon}\, \partial_{\phi_{2+\delta}} \quad \mu = \overline{0,3};\ a,b = \overline{1,3};\ \varepsilon,\delta = 1,2\,.$$

Доказательство окончено.

Теорема I.I5 не исчерпывает всех симметрийных свойств уравнений (5.5), хотя при указанных условиях найденная алгебра симметрии максимальна. Выбором коэффициентов можно расширить алгебру симметрии.

Теорема I.I5а.

Пусть $b = 0$. Тогда уравнения (5.5) инвариантны относительно алгебры $\{P_\mu,\ J_{ab},\ D,\ GL(2)\oplus GL(2)\oplus GL(2)\}$.

Доказательство.

Если $b = 0$, то уравнения (5.5) таковы

$$p_0 \phi = a \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & -I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 \end{pmatrix} p\, \phi$$

$0_2, I_2$ – нулевая и единичная матрицы 2x2. Далее доказательство аналогично т. I.I5. Этот случай соответствует ситуации из /53, §43/.

Теорема I.I5б.

Пусть $b = i = (\alpha\beta)^{1/2}$. Тогда уравнения (5.5) инвариантны относительно алгебры $GL(3)\oplus GL(3)\oplus C(1,3)$.

Доказательство.

Действительно, если $b = i = (\alpha\beta)^{1/2}$, то уравнения (5.5) можно записать в виде

$$i\,\frac{\partial\phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} I_3 & O_3 \\ O_3 & -I_3 \end{pmatrix} p\,\phi$$

Выкладками, аналогичными проделанным в т. I.3, I.I5, убеждаемся в справедливости утверждений теоремы. Приведем явный вид генераторов этих преобразований:

$$p_\mu = i g_{\mu\nu}\partial_\nu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad D = x_\mu p^\mu + i$$

$$R^a_b = \phi_a\,\partial_{\phi_b}, \qquad T^a_b = \phi_{3+a}\,\partial_{\phi_{3+b}}.$$

Теорема доказана.

Таким образом, хотя уравнения (2.6) и (5.5) связаны унитарным преобразованием, их симметрийные свойства сильно различаются. Разумеется, симметрии, найденные в т. I.I5, I.I5а, I.I5б, будут симметриями исходного уравнения (2.6), но операторы инвариантности будут ПДО /48, 50/. Подчеркнем, что для данного диагонализирующего оператора найденные симметрии уравнения (2.6) максимальны в том смысле, что расщепленная система (5.5) других операторов первого порядка не допускает.

ГЛАВА 2.

СИММЕТРИЙНЫЕ СВОЙСТВА И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Настоящая глава посвящена исследованию симметрийных свойств ИДУ, ядра которых не содержат зависимости от переменных ρ, как это имело место в предыдущей главе. Для исследования симметрии таких уравнений используются методы дифференциальной геометрии. С помощью этих методов вопросы симметрии дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных уравнений получают единообразную трактовку и становится возможным эффективно находить группы инвариантности указанных уравнений. С помощью методов дифференциальной геометрии можно находить в явном виде законы сохранения изучаемых уравнений. Наконец, геометрический подход удобен при нахождении симметрии уравнений, коэффициенты которых содержат обобщенные функции.

§6. Алгебры инвариантности и законы сохранения интегро-дифференциальных уравнений

I. Опишем метод Эстабрука-Уолквиста /67/ отыскания симметрии дифференциальных уравнений и обобщим его на случай интегро-дифференциальных уравнений. Пусть система уравнений в частных производных задана отображением ϕ из пространства n –струй в R^m $\phi: J_n(M) \to R^m$, $\phi(x, \varphi^N, \varphi^N_i, \dots \varphi^N_{i_1 \dots i_n}) = 0$. Введем набор форм Картана $\theta^N = d\varphi^N - \varphi^N_i dx_i$, $\theta^N_i = d\varphi^N_i - \varphi^N_{is} dx_s$, $\theta^N_{i_1, \dots i_{n-1}} = d\varphi^N_{i_1 \dots i_{n-1}} - \varphi^N_{i_1 \dots i_{n-1}, s} dx_s$, $T^N_{i_1 \dots i_s} = d\theta^N_{i_1 \dots i_s}$; всюду в вышеприведенных формулах по повторяющимся индексам идет суммирование от 1 до $m = \dim M$; функции $\varphi^N_{i_1 .. i_s}$ заданы на многообразии M, $1 \le N \le N_0$, d– внешний дифференциал.

Требование инвариантности системы уравнений эквивалентно инвариантности системы форм $\{ \phi\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_k , \theta , T \}$. Поскольку производная Ли L_X не меняет степень формы, то условие инвариантности указанной системы форм можно записать в виде

$$L_X (\phi dx) = h\, \phi dx + H\theta + RT$$
$$L_X \theta = \tilde{H}\theta \ , \ L_X T = \lambda\theta + tT . \qquad (6.I)$$

Здесь θ, T – вектор формы $\theta = \{ \theta^N_{i_1 \ldots i_s} \}$, $T = \{ T^N_{i_1 \ldots i_s} \}$; $h, H, R, \tilde{H}, \lambda, t$ – матрицы-формы соответствующих степеней: $(H\theta)_\alpha = H_{\alpha\beta}\, \theta_\beta \ldots$, символ β нумерует компоненты формы.

Из инвариантности форм Картана следует закон преобразования производных. Зная закон преобразования производных, можно найти симметрию формы ϕdx рассматриваемого уравнения.

Рассомтрим теперь интегро-дифференциальные уравнения, заданное отображением $F : J_n \to R^m$

$$F(x, \varphi^N, \varphi^N_i, \ldots, \varphi^N_{i_1 \ldots i_n}) = \phi(x, \ldots, \varphi^N_{i_1 \ldots i_n}) + \lambda \int_M K(x, y, \ldots, \varphi^N_{i_1 \ldots i_n}(y))\, dy .$$

Функции и производные под интегралом определены в точке $y \in M$. Представим отображение F посредством форм

$$\int_M F dx = \int_M \phi dx + \lambda \int_{M \times M} K\, dy\, dx = 0 . \qquad (6.2)$$

Поскольку интеграл по многообразию есть интеграл от формы, то задача состоит в том, чтобы найти условие, при выполнении которого сумма форм (6.2) будет инвариантна. Мы понимаем инвариантность в смысле (6.I), и поэтому инфинитезимальный критерий инвариантности уравнения (6.2) можно представить в виде

$$L_X (\phi dx + \lambda K dy\, dx) =$$
$$= h (\phi dx + \lambda K dy\, dx) + H\theta + RT + H'\theta' + R'T' , \qquad (6.2a)$$

где формы Картана θ', T' определены в точке y многообразия M. Помимо (6.2а) в условие инвариантности необходимо включить, аналогично (6.I), условие инвариантности форм θ, T, θ', T'

$$L_X\,\theta = H_1\,\theta \quad , \quad L_X\,\theta' = H_1'\theta' ,$$
$$L_X T = \lambda_1\theta + t_1 T \quad , \quad L_X T' = \lambda_1'\theta' + t_1' T'. \qquad (6.2б)$$

Поскольку формы $\Phi\,dx$ и $\lambda\,K\,dy\,dx$ в (6.2) разных степеней, то преобразуются они независимо:

$$L_X\,\Phi dx = h\,\Phi dx + H\theta + RT$$

$$L_X\,K dy dx = h\,K dy dx + H'\theta' + R'T' .$$

Связь между преобразованиями этих форм задается одной и той же формой h, что обеспечивает инвариантность уравнения (6.2).

2. Опишем теперь способ нахождения симметрии обобщенных функций. Введем следующие определения и обозначения /69/. Пусть M и N – два многообразия $\dim N \le \dim M$ и пусть x и y – локальные координаты на многообразиях M и N соответственно. Обозначим $F(M)$ и $F(N)$ – алгебры C^∞ комплекснозначных функций на M и N; $H(M)$ и $H(N)$ – пространства основных функций на M и N, а $H'(M)$ и $H'(N)$ – пространства обобщенных функций (линейных функционалов) на M и N. Пусть форма $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ соответствует действию H' на H : $f(\varphi) \equiv \langle f|\varphi\rangle$ $f\in H'$, $\varphi\in H$, причем форма $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ полулинейная. Для основных функций положим $\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle \int_M \varphi_1^*\varphi_2\,dx$ если $\varphi_1, \varphi_2 \in H(M)$. Как обычно, распространим действие оператора A, заданного на основных функциях, на обобщенные функции посредством сопряженного оператора A^+ : $\langle AF|\varphi\rangle = \langle F|A\varphi\rangle$. Наша задача состоит в том, чтобы для заданного отображения Φ: $M \to N$, которое порождается потоком поля Z найти производную Ли отображения $\Phi_\alpha F$:

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \alpha} = Z\,\Phi_\alpha \;, \quad \Phi_{\alpha_1} \circ \Phi_{\alpha_2} = \Phi_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Введем в рассмотрение форму ρ, определяемую из соотношения

$dx = \rho \wedge \phi^*(dy)$, $\text{degree}\,\rho + \dim N = \dim M$,

где dx – форма объема на M, а dy – на N.

Как известно из интегральной геометрии, имеет место следующее основное соотношение:

$$\int_M f(x)\,\rho\wedge\phi^*(dy) = \int_N \Big(\int_{\phi^{-1}(y)} f(x)\rho \Big)\, dy\,, \tag{6.3}$$

где

$$\int_{\phi^{-1}(y)} f\rho$$

рассматривается как функция от y, а интеграл от дифференциальной формы $f\rho$ берется по слою, определяемому сечением ϕ. Для $f \in H(M)$, $\varphi \in H_N$, используя (6.3), имеем

$$\langle \overset{+}{\phi^*} f \,|\, \varphi \rangle = \langle f \,|\, \phi^* \varphi \rangle = \int_M \bar f(x)\,\varphi(\phi(x))\,\rho\wedge\phi^*(dy) =$$

$$= \int_N \varphi(y) \overline{\Big(\int_{\phi^{-1}(y)} f(x)\rho \Big)}\, dy = \langle \int_{\phi^{-1}(y)} f\rho \,|\, \varphi(y) \rangle\,,$$

$\overset{+}{\phi^*}$ – отображение сопряженное к ϕ^* в скалярном произведении $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$.

Определим обобщенную функцию $\overset{+}{\phi^*} F$, $F \in H'_M$ с помощью приведенных выше соотношений

$$\langle \overset{+}{\phi^*} F \,|\, f \rangle = \langle F(y) \,|\, \int_{\phi^{-1}(y)} f(x)\rho \rangle\,. \tag{6.4}$$

Поскольку ϕ – диффеоморфизм, определяемый потоком поля Z, то

$\Phi_\alpha^{-1}(y) = \phi_{-\alpha}(y)$, причем $\Phi_\alpha^{-1}(y)$ есть нульмерное подмногообразие многообразия M.

Таким образом, соотношение (6.4) можно переписать в виде

$$< \overset{+}{\Phi}{}_\alpha^{*} F | \varphi > = < F(y) | \Phi_{-\alpha}^{*}(\varphi\rho) > .$$

Условие инвариантности записывается обычным образом:

$$< \frac{d}{d\alpha} \overset{+}{\phi}{}_\alpha^{*} F | \varphi >_{|_{\alpha=0}} = < h F | \varphi > . \qquad (6.5)$$

Поэтому имеем

$$< \frac{d}{d\alpha} \overset{+}{\phi}{}_\alpha^{*} F | \varphi >_{|_{\alpha=0}} = < F | \frac{d}{d\alpha} \phi_{-\alpha}^{*}(\varphi\rho) > = - < F | L_z(\varphi\rho) > .$$

Значит, если $L_z(\varphi\rho) = h\varphi\rho$, т.е. выполняется условие инвариантности, то

$$< \frac{d}{d\alpha} \overset{+}{\phi}{}_\alpha^{*} F | \varphi >_{|_{\alpha=0}} = < h F(y) | \varphi(y) > .$$

Рассмотрим подробнее случай, когда $F(x) = \delta(f(x))$, где δ – дельта – функция Дирака. Пусть подмногообразие N таково, что

$$f_{|N} = 0 \;, \; df(x) \neq 0 \quad \forall x \in N \subset M .$$

Определим форму θ_f следующим образом

$$dx = df \wedge \theta_f .$$

Можно доказать /69/, что $\theta_f = Y \lrcorner\, dx$, где Y – такое векторное поле на M, что выполняется соотношение

$$Y \lrcorner\, df = L_Y f = 1, \qquad (6.6)$$

причем θ_f от выбора Y не зависит.

Определим обобщенную функцию $\delta(f(x))$ соотношением

$$< \delta(f(x)) | \varphi > = \int_N \varphi\,\theta_f .$$

Следовательно,

$$< \overset{+}{\phi}{}^{*} F | \varphi > = < F | \phi_{-\alpha}^{*}(\varphi\rho) > = \int_N \phi_{-\alpha}^{*}(\varphi\rho)\,\theta_f .$$

Сделав замену переменных $y = \phi_\alpha(x)$, мы получим

$$< \overset{+}{\phi}{}^*_\alpha \, \delta(f(x)) \,|\, \varphi > = \int\limits_{\phi_\alpha(N)=N} \varphi\rho \, L_Z(\theta_f) = \int\limits_N h\cdot\varphi\rho\,\theta_f .$$

Поэтому условие инвариантности приобретает вид

$$< \frac{d}{d\alpha} \overset{+}{\phi}{}^*_\alpha \, \delta(f(x)) \,|\, \varphi > = \int\limits_N \varphi\rho \, L_Z(\theta_f) = \int\limits_N h\varphi\rho\,\theta_f .$$

Подсчитаем $L_Z(\theta_f)$:

$$L_Z(\theta_f) = L_Z(i_Y\, dx) = i_{[Z,Y]}\, dx \pm \operatorname{div} Z\, (Y \lrcorner dx),$$

$\operatorname{div} Z$ определяется из соотношения

$$\operatorname{div} Z\, dx = L_Z\, dx .$$

Пусть $Z = \xi^\mu \partial_\mu$, $Y = \frac{1}{f_0}\partial_0$, $f_0 \neq 0$.

Тогда имеем

$$[Z,Y] = -\left[\frac{\xi^\mu f_{0\mu}}{f_0^2} + \frac{\xi^0_0}{f_0} \right] \partial_0 - \frac{1}{f_0}\, \xi^i_0\, \partial_i ,$$

$$i_{[Z,Y]}\, dx_0\, dx_1 \ldots dx_n \Big|_N = -\left[\frac{\xi^\mu f_{0\mu}}{f_0^2} + \frac{\xi^0_0}{f_0} \right] dx_1\, dx_2 \ldots dx_n -$$

$$- \frac{1}{f_0} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i\, \xi^i_0\, dx_0\, dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n ,$$

$\widehat{dx_i}$ означает, что dx_i опущен.

Пользуясь тем, что на многообразии

$$dx_0 = -\frac{1}{f_0} \sum_{k=1}^{n} f_k\, dx_k$$

находим, что на N искомый коммутатор имеет вид

$$[Z,Y]_N = -\frac{(\xi^\mu f_{0\mu} + \xi^\mu_0 f_\mu)}{f_0}\, Y .$$

Окончательно условие инвариантности выглядит так

$$L_Z\, \theta_f = h\, \theta_f\,, \quad h = \operatorname{div} Z - Y(Xf).$$

Отметим, что член $\operatorname{div} Z\,(Y \lrcorner\, dx)$ описывает приращение формы объема в скалярном произведении для основных функций.

В дальнейшем нам придется определять симметрию функционала $\delta(f^1)\,\delta(f^2)$ (подразумевается, что такое произведение имеет смысл). Предположим, что f^ε таковы, что

$$f^\varepsilon\big|_{N^\varepsilon} = 0\,, \quad df^\varepsilon \neq 0\,, \quad N^\varepsilon \subset M \quad \varepsilon = 1,2.$$

Тогда имеем:

$$f_0^1\, dx_0 + f_n^1\, dx_k\big|_{N^1} = 0$$

$$f_0^2\, dx_0 + f_k^2\, dx_k\big|_{N_2} = 0.$$

Следовательно,

$$dx_0 = -\frac{f_k^1}{f_0^1}\, dx_k$$

$$-f_0^2 f_k^1\, dx_k + f_0^1 f_k^2\, dx_k = 0.$$

Отсюда

$$dx_1 = \frac{\sum\limits_{k=2} \left(f_0^2 f_k^1 - f_0^1 f_k^2\right) dx_k}{f_1^2 f_0^1 - f_0^2 f_1^1}$$

Поэтому можно выбрать Y_1 и Y_2 в следующем виде

$$Y_1 = \frac{1}{f_0}\,\partial_0\,; \quad Y_2 = \frac{1}{f_1^2 f_0^1 - f_0^2 f_1^1}\,\partial_1.$$

Тогда

$$\theta_{f^1, f^2} = (Y_1 \wedge Y_2) \lrcorner\, dx\,.$$

Случай большего числа δ – функций рассматривается аналогично.

3.Рассмотрим теперь вопрос о законах сохранения интегро-дифференциальных уравнений.

Изучим сначала случай дифференциальных уравнений. Пусть M - многообразие размерности $m = \dim M$, $J_n(M)$ - многообразие n - струй функций φ на M; $T(J_n(M))$ и $T^*(J_n(M))$ - касательное и кокасательное расслоения над $J_n(M)$; $\omega \in \Lambda^s(J_n(M))$ внешняя форма степени s на $T^*(J_n(M))$. Каждой форме ω степени m поставим в соответствие оператор $\mathcal{D}_\omega$ по следующему правилу /34/

$$\mathcal{D}_\omega(\varphi) = J_n^*(\varphi)(\omega).$$

Здесь $j_n(\varphi)$ для $\forall \varphi : M \to R$ - определяется следующим образом: если $(x, u, p_i, \ldots, p_{i_1\ldots i_n})$ - координаты на $J_n(M)$, то $j_n(\varphi) : (x, u, p_i, \ldots, p_{i_1\ldots i_n}) \to (x, \varphi(x), \ldots, \frac{\partial^n \varphi(x)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_n}}$. Локально произвольная форма степени m из $\Lambda^m(J_n(M))$ имеет следующий вид

$$\omega = \sum_{s=0}^{m} \sum_{i_1\ldots i_s} a_{i_1\ldots i_s}^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-s}} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_s} \wedge dp_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dp_{\alpha_{m-s}}, \tag{6.6}$$

где $\alpha_1, \ldots \alpha_{m-s}$ - мультииндексы, соответствующие координатам $p_{\alpha_1}, \ldots p_{\alpha_{m-s}}$ в $J_n(M)$. Если $n = 1$, то с помощью форм вида (6.6) при отображении $j_1^*(\varphi)$ можно получить классические уравнения Монжа-Ампера $|\varphi_{ik}| = 0$. Рассмотрим формы Картана $\theta_A = dp_A - p_{A,i}\,dx_i$, $T_A = d\theta_A$ где A - мультииндекс $0 \le |A| \le n-1$, $p_0 = u$. Ясно, что $j_n^*(\varphi)\theta_A = j_n^*(\varphi)T_A \equiv 0$. Каждая форма $\lambda : j_n^*(\varphi)(\lambda) \equiv 0$ может быть представлена в виде $\lambda = \lambda_A^1\theta_A + \lambda_A^2 T_A$. Класс форм этого вида обозначим Ω_0.

Форма ω называется эффективной, если $\exists \varphi : j_n^*(\varphi)\omega \neq 0$. Фактор-модуль эффективных форм определяется соотношением $\Lambda_э^m = \Lambda^m / \Omega_0$. Его элементы однозначно определяют оператор $\mathcal{D}_\omega$.

Покажем, что произвольную форму $\omega \in \Lambda^m(J_n(M))$ можно разложить по формам θ_A. Действительно, подставим $dp_A = \theta_A + p_{A,i}\,dx_i$ в форму ω, тогда получим

$$\omega = \omega_0 + \theta_A \wedge \omega_A + \theta_A \wedge \theta_B\,\omega_{AB} + \ldots .$$

Обозначим проекцию $\omega \to \omega_0$ посредством π и определим оператор $d_\pi = \pi \circ d$; пусть $Z_A = \frac{\partial}{\partial p_A}$, $|A| \le n-1$, L_{Z_A} – производная Ли вдоль поля Z_A, тогда на множестве эффективных форм оператор d может быть представлен следующим образом: $d = d_\pi + \theta_A L_{Z_A}$.

Действительно, из (6.6) получаем

$$d\omega = \sum_{s=0}^{m} \sum_{i_1 \ldots i_s} \left[\partial_{p_A}\left(a_{i_1 \ldots i_s}^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-s}}\right) dp_A + \partial_{x_i}\left(a_{i_1 \ldots i_s}^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-s}}\right) dx_i \right] \wedge$$

$$\wedge\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_s} \wedge dp_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dp_{\alpha_{m-s}} .$$

Выразив dp_A через θ_A $(|A| \le n-1)$, мы и получим искомое разложение $d = d_\pi + \theta_A L_{Z_A}$, потому что, если $\omega \in \pi(\Lambda^m)$, то в (6.6) содержатся только члены, где $dp_{\alpha_1} \ldots dp_{\alpha_{m-s}}$ соответствуют случаю $|\alpha_1| = |\alpha_2| = \ldots = |\alpha_{m-s}| = n$, так как при $|\alpha_2| \le n-1$ они выражаются через θ_A.

Введем понятие закона сохранения. Законом сохранения для оператора $\mathcal{D}_\omega$ называется форма $\rho \in \Lambda^{m-1}(J_n(M))$ такая, что ограничение ρ на произвольное решение уравнения $\mathcal{D}_\omega(\varphi) = 0$ есть замкнутая форма $(\omega \in \Lambda^m(J_n(M)))$.

Из определения следует, что

$$d\rho = g\,\omega + \theta_A X_A + T_A Y_A .$$

Следовательно, если мы определим условия, при которых форма $g\,\omega + \theta_A X_A + T_A Y_A$ замкнута, то при отсутствии топологических препятствий (например, если многообразие M таково, что всякая замкнутая форма $W = du$) можно указать форму ρ.

Лемма 6.I

Если $\Omega \in \pi\,\Lambda^m(J_n(M))$, то существуют такие формы Ω_A, Q_A, R, что $d\Omega = \theta_A Q_A + T_A \Omega_A + R$.

Доказательство.

$$d\Omega = d_\pi \Omega + \theta_A L_A \Omega \quad , \quad L_A \equiv L_{z_A}$$

$$d_\pi \Omega = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{s=0}^{m} \sum_{i_1 \dots i_s} \Big\{ \Big[\partial_{x_\mu} \big(a^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-s}}_{i_1 \dots i_s}\big) + \sum_{|A|=0}^{n-1} \partial_{p_A} \big(a^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-s}}_{i_1 \dots i_s}\big) p_{A\mu} \Big] dx_\mu + \sum_{|A|=0}^{n-1} \partial_{p_{A,\mu}} \big(a^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-s}}_{i_1 \dots i_s}\big) dp_{A,\mu} \Big\} \wedge \tag{6.7}$$

$$\wedge\ dx_{i_1} \dots dx_{i_s} \wedge dp_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dp_{\alpha_{m-s}} .$$

Обозначим символом R формы, которые нельзя представить в виде $\theta_A Q_A$ $T_A \Omega_A$. Из приведенных вычислений следует, что членов отличных от $T_A \Omega_A$, $\theta_A Q_A$, R нет, а формы вида $T_A \Omega_A$ могут появиться только из $d_\pi \Omega$ (см. 6.7).

Теорема 6.I. Класс эквивалентности $[\Omega]$ формы $\Omega \in \Lambda^m_э$ содержит замкнутую форму, если и только если

$$\begin{aligned} &\Omega_A + X_A + d_p Y_A = 0 \\ &L_A (g\Omega) - d_p X_A + T_B L_A Y_B = 0 \\ &L_A X_B - L_B X_A = S_{AB} \ , \ R = 0 \qquad |B| = |A| = n-1 . \end{aligned} \tag{6.8}$$

где R – формы описанные в лемме; Ω_A определяются из соотношения $d_\pi (g\Omega) = T_A \Omega_A + \tilde{R}$; $S_{AB} = S_{BA}$ – симметричный тензор.

Доказательство.

Класс эквивалентности формы Ω определяется равенством $[\Omega] = g\Omega + T_A Y_A + \theta_A X_A$. Мы требуем, чтобы форма $[\Omega]$ была замкнута. Используя лемму, получаем

$$0 = d[\Omega] = d_\pi (g\Omega) + \theta_A L_A (g\Omega) + T_A X_A - \theta_A d_\pi X_A - \theta_A \theta_B L_B X_A +$$

$$+ T_A d_\pi Y_A + T_A \theta_B L_B Y_A =$$

$$= T_A (\Omega_A + X_A + d_\pi Y_A) + \theta_A (L_A (g\Omega) - d_p X_A + T_B L_A Y_B) + R - \theta_A \theta_B L_B X_A .$$

Таким образом, $[\Omega]$ замкнута тогда и только тогда, когда выполняются условия теоремы.

Приведем явные формулы вычисления законов сохранения ρ /34/. Выберем функцию u, определяемую композицией проекций $J_n(M) \to J_0(M) = M \times R \to R$ и некоторое решение $\varphi \in C^\infty(M)$: $j_n^*(\varphi)(\Omega) = 0$. Обозначим A_t группу сдвигов вдоль поля $X_{u-\varphi} = (u-\varphi)\partial_u$

$$A_t(x, u, p_i \ldots p_\alpha) = (x, (u-\varphi)e^t + \varphi, (p_i - \varphi_i)e^t + \varphi_i, (p_\alpha - \varphi_\alpha)e^t + \varphi_\alpha)$$

Очевидно, $A_0(x, u, p_i \ldots) = (x, u, p_i \ldots)$, $A_{-\infty}(x, u, p_i \ldots) = (x, \varphi, \varphi_i, \ldots \varphi_\alpha$.

По определению закона сохранения имеем

$$d\rho = g\Omega + \theta_A X_A + T_A Y_A$$

$$L_{u-\varphi}(\rho) = i_{u-\varphi}(d\rho) + d(i_{u-\varphi}\rho) = \{g\, i_{u-\varphi}(\Omega) + (u_A - \varphi_A)X_A -$$

$$-(u_{A,\mu} - \varphi_{A,\mu})\, dx_\mu Y_A\} - \theta_A i_{u-\varphi}(X_A) +$$

$$T_A L_{u-\varphi}(Y_A) + d(i_{u-\varphi}(\rho)), \quad L_{u-\varphi} = L_{X_{u-\varphi}}, \ 0 \le |A| \le n-1.$$

Обозначим

$$\Pi = g\, i_{u-\varphi}(\Omega) + (u_A - \varphi_A)X_A - (u_{A,\mu} - \varphi_{A,\mu})\, dx_\mu Y_A \quad (6.9)$$

$$C = d(i_{u-\varphi}\rho) + T_A L_{u-\varphi} Y_A - \theta_A i_{u-\varphi}(X_A).$$

Пользуясь определением производной Ли и указанными свойствами поля $X_{u-\varphi}$, получаем

$$\frac{d}{dt}(A_t^*\omega) = A_t^* L_{u-\varphi}\omega, \quad A_t^*\omega|_{t=0} = \omega$$

$$\rho - A_{-\infty}^*\rho = \int_{-\infty}^{0} A_t^*(\Pi)\,dt + \int_{-\infty}^{0} A_t^*(C)\,dt.$$

Если Ψ - произвольное решение уравнения $\mathcal{D}_\omega(\Psi)=0$, то имеем $(A_{-\infty}\circ j_n(\Psi))^*(\Omega)=j_n^*(\Psi)\Omega=0$ поэтому, если сравнить $d\rho$ и $d\int_{-\infty}^{0}A_t^*(\Pi)dt$ то получим

$$j_n^*(\Psi)\left[d\rho-d\int_{-\infty}^{0}A_t^*\Pi dt\right]=j_n^*(\Psi)\circ A_{-\infty}^*(d\rho)=0.$$

Следовательно, $d\rho$ и $d\int_{-\infty}^{\theta}A_t^*\Pi\, dt$ на множестве решений уравнения $\mathcal{D}_\Omega(\Psi)=0$ совпадают. Поэтому положим, что закон сохранения имеет вид

$$\rho=\int_{-\infty}^{0}A_t^*(\Pi)dt\ , \tag{6.10}$$

где Π задано формулой (6.9).

Если решение неизвестно, но построена замкнутая форма $\Sigma=g\Omega+\theta_A X_A+T_A Y_A$, причем группа когомологий многообразия M тривиальна, то закон сохранения может быть вычислен по формуле /I, § 36/

$$\rho_x(\xi_1,\dots\xi_{m-1})=\int_0^1 d\rho|_t\ (x,t\xi_1,\dots t\xi_{m-1})dt\ ,\ \xi_i\in T_x(J_n(M)).$$

Наконец, если уравнение интегро-дифференциальное и представлено формой (см. (6.2)).

$$T=\Omega+K\,dy\,dx$$

то удобно поступать следующим образом. Найдем функцию g такую, что (см. т.6.I))

$$d(g\Omega+\theta_A X_A+T_A Y_A)=0.$$

После этого найдем форму $\widetilde{K}$ такую, что

$$d\widetilde{K}=gK+\theta_A X_A+T_A Y_A.$$

Тогда форма $\rho+\widetilde{K}$ будет законом сохранения исходного уравнения.

$$j_n^*(\varphi)\,(d\rho + \int d\tilde{K}\,dy\,dx) = j_n^*(\varphi)[\,g(\Omega + (\int K\,dy)\,dx) + \vartheta_A X_A' + T_A Y_A'\,] = 0.$$

если φ – решение ИДУ. Обычно это сделать проще, чем реализовать т. (6.I) применительно к форме $[\tilde{g}\,K\,dy\,dx]$, после чего необходимо выяснить, когда $g = \tilde{g}$.

Приступим теперь к анализу конкретных уравнений.

§7. Групповые свойства интегро-дифференциальных уравнений инвариантных относительно группы комформных преобразований и группы Шредингера

Рассмотрим уравнение

$$L\varphi + \lambda_1 F(\varphi) + \lambda_2 \int_{R^{n+1}} K(x, y, \varphi(y))\, dy = 0, \qquad (7.I)$$

где L – дифференциальный оператор Даламбера $L = p_\mu p^\mu$ или Шредингера $L = p_0 - \frac{\vec{p}^{\,2}}{2}$. Уравнения типа (7.I) могут описывать самодействующее поле в среде с памятью и нелокальным взаимодействием. Опишем уравнения вида (7.I) инвариантные относительно группы Пуанкаре $P(1,n)$, расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,n)$ или группы конформных преобразований $C(1,n)$ в случае, когда $L = p_\mu p^\mu$; если $L = p_0 - \frac{\vec{p}^{\,2}}{2}$, то ограничимся теми уравнениями (7.I), которые инвариантны относительно группы Галилея $G(1,n)$ или расширенной группы Галилея $\tilde{G}(1,n)$, или группы Шредингера. Инвариантность относительно указанных фундаментальных групп релятивистской и нерелятивистской физики сильно ограничивает выбор функций F и K, и уравнений с перечисленными свойствами оказывается не слишком много.

Примем следующие обозначения и соглашения: алгебры Ли обозначаются теми же символами, что и группы, которые им соответствуют; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование в пределах их изменения – греческие от 0 до n, латинские – от I до n ; $x = (x_0, x_1, \dots x_n)$, $y = (y_0, y_1, \dots y_n)$, $z = x - y$, $dy \equiv dy_0 dy_1 \dots dy_n$, $\rho^2 = z_\mu z^\mu = z_0^2 - z_i z_i$, $z^2 = z_i z_i$, символ * означает комплексное сопряжение, $\varphi = \varphi(x)$, $\varphi^* = \varphi^*(x)$.

Рассмотрим уравнение (7.I), где $L = p_\mu p^\mu$ – оператор Даламбера

$$p_\mu p^\mu \varphi + \lambda_1 F(\varphi) + \lambda_2 \int_{R^4} K(x, y, \varphi(y))\, dy = 0 . \qquad (7.2)$$

Теорема 7.I.

Уравнение (7.2) инвариантно относительно:

I) алгебры $P(1,n)$, если

$$K=K(\rho,\varphi),\quad F=F(\varphi)$$

K, F – произвольные дифференцируемые функции;

2) алгебры $\widetilde{P}(1,n)$, если

$$K=\rho^{a}\varphi^{\varkappa}\Phi\left(\frac{\varphi}{\rho^{\beta}}\right),\quad F(\varphi)=\varphi^{s},\quad \beta\varkappa=\beta-a-n-3,\quad s=\frac{\beta-2}{\beta},\quad \beta\neq 0,$$

или

$$K=\Phi\left(\frac{\exp\varphi}{\rho^{\alpha}}\right)\exp\left(-\frac{n+3}{\alpha}\varphi\right)\quad,\ \alpha\neq 0;$$

3) алгебры $C(1,n)$, если

$$K=\rho^{-(n+3)}\varphi(y),\quad F=\varphi^{\frac{n+3}{n-1}}.$$

Доказательство.

Инвариантность уравнения (7.2) находим по методу, изложенному в § 6. Форма, представляющая уравнение (7.2), такова:

$$\Omega=\left(db_0\,dx_1\ldots dx_n+db_1\,dx_0\,dx_2\ldots dx_n+\ldots+(-1)^{n+1}db_n\,dx_0\,dx_1\ldots dx_{n-1}\right.$$
$$\left.+\lambda_1F(\varphi)\,dx\right)+\lambda_2\,K\,dy\,dx,$$

Инвариантность формы, стоящей в скобках (обозначим ее Ω_1), записывается так:

$$L_{X_A}\Omega_1=h_A\Omega_1+\lambda_A\theta+\lambda'_A\,d\theta,$$

индекс A указывает принадлежность X_A подалгебре A некоторой алгебры Ли. Условие инвариантности Ω_1 есть условие инвариантности выражения $\Box\varphi+\lambda F(\varphi)$ и для него получается известный результат /23/, /46/, при этом h такова:

$$h_{P(1,n)}=0,\quad h_{\widetilde{P}_1(1,n)}=\beta+n-1,\quad h_{\widetilde{P}_2(1,n)}=n-1,\quad h_{C(1,n)}=(n-1)\alpha_\mu x^\mu.$$

Здесь $\tilde{P}_1(1,n) = \{P(1,n), \mathcal{D}_1\}$, $\tilde{P}_2(1,n) = \{P(1,n), \mathcal{D}_2\}$,

$$\mathcal{D}_1 = x_\mu p^\mu - i\beta\varphi\partial_\varphi , \quad \mathcal{D}_2 = x_\mu p^\mu - i\alpha\partial_\varphi .$$

Из условий инвариантности получаем, что функция K удовлетворяет уравнению

$$\xi^\mu_A K_{x_\mu} + \tau^\mu_A K_{y_\mu} + \eta(y,\varphi) K_{\varphi(y)} + [\partial_{x_\mu}(\xi^\mu_A) + \partial_{y_\mu}(\tau^\mu_A)]K = h_A K,$$

$$K_{x_\mu} = \frac{\partial K}{\partial x_\mu}, \quad K_{y_\mu} = \frac{\partial K}{\partial y_\mu}, \quad K_\varphi = \frac{\partial K}{\partial \varphi}.$$

Рассмотрим преобразования трансляции вдоль μ -ой оси

$$K_{x_\mu} + \tau^\nu_{(p_\mu)} K_{y_\nu} = 0 .$$

Выберем поле $X_{p_\mu} = \tau^\nu_{(p_\mu)}\partial_{y_\nu}$ постоянным, причем $\tau^\nu_{(p_\mu)} = \delta_{\nu\mu}$. Это всегда можно сделать, выпрямив поле X_{p_μ} /2/. Таким образом, наш выбор поля $\tau^\nu_A \partial_{y_\nu}$ таков, что при переносах оно постоянно. В этом случае, как будет видно из дальнейшего, мы получим функцию K в виде обычно используемой в физике. Следовательно, из инвариантности относительно переносов получаем $K = K(z, \varphi)$.
Выпишем теперь условия, которым должна удовлетворять функция K, для того, чтобы уравнение (7.I) было инвариантно относительно алгебр $P(1,n)$, $\tilde{P}_1(1,n)$, $\tilde{P}_2(1,n)$, $C(1,n)$:

$P(1,n)$: $\quad C_{\mu\nu} z_\nu K_{z_\mu} = 0, \; C_{0k} = C_{k0}, \; C_{ab} = -C_{ba}, \; z_\mu = x_\mu - y_\mu;$

$\tilde{P}_1(1,n)$: $\quad (d_1 z_\mu + C_{\mu\nu} z_\nu) K_{z_\mu} + d_1\beta\varphi K_\varphi = d_1(\beta - n - 3) K;$

$\tilde{P}_2(1,n)$: $\quad (d_2 z_\mu + C_{\mu\nu} z_\nu) K_{z_\mu} + d_2\alpha K_\varphi = -d_2(n+3) K;$

$$C(1,n):\quad \alpha_\mu(x^\mu+y^\mu)\rho\Phi_\rho+2d\alpha_\mu y^\mu\varphi K_\varphi+[s\alpha_\mu(x^\mu+y^\mu)+$$

$$+2d\varkappa\alpha_\mu y^\mu+2(n+1)\alpha_\mu y^\mu]\Phi=-(n+3)\alpha_\mu x^\mu\Phi,\quad K=\rho^s\varphi^\varkappa\Phi\left(\frac{\varphi}{\rho^\beta}\right).$$

Общее решение определяющих уравнений для группы $P(1,n)$ известно: $K=K(z_\mu z^\mu,\varphi)$. Подставив это выражение в уравнения для $\tilde{P}_1(1,n)$, легко получаем

$$d_1\rho K_\rho+d_1\beta\varphi K_\varphi=d_1(\beta-n-3)K,\quad \rho^2=z_\mu z^\mu.$$

Следовательно, $K=\rho^s\varphi^\varkappa\Phi(\varphi/\rho^\beta)$, $\beta\varkappa+a=\beta-n-3$. Подставив последнее выражение для K в уравнения, определяющие инвариантность относительно группы $C(1,n)$ получаем: $s=-(n+3)$, $\Phi_\rho=\Phi_\varphi=0$, $\varkappa=1$. Теорема доказана.

Отметим некоторые следствия доказанной теоремы.

Следствие 7.I. Если $F=0$, то уравнения вида (7.2), инвариантные относительно конформной группы, суть линейные уравнения. Установим аналогичный результат для уравнения с дифференциальным оператором Шредингера вместо оператора Даламбера:

$$\check{S}\Psi+F(\Psi^*,\Psi)=\int_{R^{n+1}}K(x,y,\Psi^*(y),\Psi(y))\,dy. \tag{7.3}$$

Теорема 7.2.

Уравнение (7.3) инвариантно относительно следующих алгебр:
I) алгебры Галилея $G(1,n)$, если

$$K=\exp\left(\frac{i\vec{z}^{\,2}}{2z_0}\right)\Phi(z_0,\Psi^*\Psi)\Psi(y),\quad F=F_1(\Psi^*\Psi)\Psi$$

Φ, F_1 – дифференцируемая функция;
2) расширенной алгебры Галилея $\tilde{G}(1,n)=\{G(1,n),\mathcal{D}\}$, если

$$K=\exp\left(\frac{i\vec{z}^{\,2}}{2z_0}\right)z_0^{-\frac{n+4}{2}}\Phi(\Psi^*\Psi/z_0^\beta)\Psi(y)$$

$$F=(\Psi^*\Psi)^s\Psi,\quad s\beta=-1;$$

3) алгебры Шредингера $Sch(1,n)$, если

$$K=\exp\left(\frac{i\vec{z}^{\,2}}{2z_0}\right) z_0^{-\frac{n+4}{2}}\Psi(y),\quad F=(\Psi^*\Psi)^{2/3}\Psi.$$

Доказательство.

Как и при доказательстве т. (7.I), мы получаем следующие уравнения, которым должна удовлетворять функция K из уравнения (7.3):

$G(1,n)$:

$$z_0 K_{z_a} + i y_a \Psi K_\Psi - i y_a \Psi^* K_{\Psi^*} = i x_a K;$$

$\tilde{G}(1,n)$:

$$g_a z_0 K_{z_a} + 2d\, z_0 K_{z_0} + d\, z_a K_{z_a} +$$
$$+ i g_a y_a(\Psi K_\Psi - \Psi^* K_{\Psi^*}) + d\beta(\Psi K_\Psi + \Psi^* K_{\Psi^*}) =$$
$$= [i x_a g_a + d(\beta - n - 4)]K;$$

$Sch(1,n)$:

$$(x_0^2\partial_{x_0} + x_0 x_a\partial_{x_a} + y_0^2\partial_{y_0} + y_0 y_a\partial_{y_a})K + \left(\frac{i\vec{y}^{\,2}}{2} - \frac{n}{2}y_0\right)\Psi K_\Psi$$
$$-\left(\frac{i\vec{y}^{\,2}}{2} + \frac{n}{2}y_0\right)\Psi^* K_{\Psi^*} = \left[\frac{i\vec{x}^{\,2}}{2} - \left(2+\frac{n}{2}\right)x_0\right]K.$$

Решая эти уравнения, получим утверждения теоремы. Имеет место утверждение, аналогичное следствию (7.I).

Следствие 7.2.

Уравнение (7.3) инвариантное относительно группы $Sch(1,n)$ при $F=0$ является линейным уравнением.

Изучим симметрийные свойства уравнений вида

$$F(p_\mu p^\mu)\varphi + \Phi(\varphi) + \int_{R^{n+1}} K(x,y,\varphi(y))\,dy = 0, \qquad (7.4a)$$

$$G(\check{S})\psi + R(\psi^*,\psi) + \int\limits_{R^{n+1}} K(x,y,\psi^*(y),\psi(y))\,dy = 0, \qquad (7.4б)$$

где $\check{S} = p_0 - \frac{\vec{p}^{\,2}}{2}$, $\varphi = \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $\psi = \psi(x_0, x_1, \ldots x_n)$, dy – форма объема на R^{n+1}. Как видно, эти уравнения являются обобщением как уравнений вида (3.I)-(3.2), так и уравнений (7.I). Комбинируя методы §§ I и 6, докажем утверждения типа тт. 7.I-7.2, относительно симметрии уравнений (7.4а-б).

Теорема 7.3.

Уравнение (7.4а) инвариантно относительно следующих алгебр:

I)алгебры $P(1,n)$, если $K = K(\rho, \varphi(y))$,

F, ϕ, K – произвольные дифференцируемые функции своих аргументов;

2)алгебры $\tilde{R}(1,n)$, если

$$F(p^2) = p^{2s}, \quad \phi(\varphi) = \varphi^t, \quad K = T(\varphi/\rho^\alpha)\rho^{\varkappa}\varphi^q$$

$$2s + \alpha(t-1) = 0, \quad \varkappa = (1-q)\alpha - (2s+n+1), \quad \alpha, s, q \in R^1$$

или

$$F(p^2) = p^{2s}, \quad \phi(\varphi) = \exp(-\tfrac{2s}{\alpha}\varphi), \; K = T\left(\frac{\exp\varphi}{\rho^\alpha}\right)\exp\left(-\frac{2s+n+1}{\alpha}\varphi\right), \alpha \neq 0;$$

3)алгебры $C(1,n)$, если

$$F(p^2) = p^{2s}, \quad \phi(\varphi) = \varphi^t, \quad K = \rho^{\varkappa}\varphi$$

$$t(n+1-2s) = n+1+2s, \quad \varkappa = -(n+1+2s), \quad 2s \neq n+1.$$

Доказательство.

Следуя, изложенному в §§ I и 6, необходимо найти производную Ли L_X вдоль поля $X = \xi^\mu \partial_\mu + \eta\,\partial_\varphi$ от выражения (7.4а)

$$L_X\left(F(p^2) + \phi(\varphi) + \int K(x,y,\varphi(y))\,dy\right) =$$

$$= h\left(F(p^2) + \phi(\varphi) + \int K(x,y,\varphi(y))\,dy\right).$$

После громоздких вычислений, которые здесь не приводим, находим определяющие соотношения для координат ξ^μ, η:

$$\xi^0_a = \xi^a_0, \quad \xi^i_k + \xi^k_i = 0 \ (i \neq k), \quad \xi^0_0 = \xi^1_1 = \ldots = \xi^n_n = -\frac{2}{n+1-2s}\partial_\varphi \eta$$

Решая эти уравнения, получаем

$$\xi^\mu = 2(\alpha x)x_\mu - \alpha_\mu x_\nu x^\nu + C_{\mu\nu}x_\nu + C_\mu$$

$$\eta = -(n+1-2s)(\alpha x)\varphi - C_{00}\frac{n+1-2s}{2}\varphi, \quad C_{0a} = C_{a0}, \quad C_{ab} = -C_{ba}, C_{00} = C_{aa}$$

При этом ядро K удовлетворяет условию

$$\xi^\mu_A K_{x_\mu} + \tau^\mu_A K_{y_\mu} + \eta_A K_\varphi + \partial_{y_\mu}(\tau^\mu_A)K = h_A K.$$

$$h_{P(1,n)} = 0, \quad h_{\tilde{P}_1(1,n)} = (\beta - 2s), \quad h_{\tilde{P}_2(1,n)} = -2s$$

$$h_{C(1,n)} = -(n+1+2s)(\alpha x).$$

Для функции ϕ также имеем уравнение: $\eta_A \Phi_\varphi = h_A \Phi$. Относительно условий на $F(p^2)$ см.т.3.I. Утверждения теоремы прямо следуют из этих соотношений.

Теорема 7.4.

Уравнение (7.4б) инвариантно относительно следующих алгебр:

I)алгебры $G(1,n)$, если

$$R(\psi^*,\psi) = \mathcal{R}(\psi^*\psi)\psi, \quad K = \exp\left(\frac{i\vec{z}^2}{2z_0}\right)T(z_0,\psi^*\psi)\psi(y)$$

G, $\mathcal{R}$, T – произвольные дифференцируемые функции своих аргументов;

2)алгебры $\tilde{G}(1,n)$, если

$$G(\check{S}) = \check{S}^{\varkappa}, \quad \mathcal{R}(\psi^*\psi) = (\psi^*\psi)^s, \quad T = T(\psi^*\psi/z_0^\beta)z_0^\alpha(\psi^*\psi)^t$$

$$s(n+2-2\varkappa) = 2\varkappa, \quad 2\beta t + 2\alpha = -(n+4), \quad 2\varkappa \neq n+2; \ \alpha,\beta,\varkappa,t \in R^1;$$

3) алгебры $Sch(1,n)$, если

$$G(\check{S}) = \check{S}^{\nu\varkappa}, \quad \mathcal{R}(\Psi^*\Psi) = (\Psi^*\Psi)^s, \; K = \exp\left(\frac{i\vec{z}^{\,2}}{2z_0}\right) z_0^{\lambda}\,\Psi(y)$$

$$s(n+2-2\varkappa) = 2\varkappa, \quad \lambda = -\left(\frac{n}{2}+\varkappa+1\right), \quad 2\varkappa \neq n+2, \; \varkappa \in R^1.$$

Теорема 7.4 доказывается аналогично теореме 7.3. Отметим, что при определенных условиях, уравнения инвариантные относительно групп $C(1,n)$, $Sch(1,n)$ не обладают такой строго определенной структурой, как в теоремах (7.3), (7.4). Это вытекает из следствий 7.3–7.4 приведенных ниже.

Следствие 7.3. Уравнение

$$\Box^{\frac{n+1}{2}}\varphi + \Phi(\varphi) + \int \rho^{\varkappa} F(\varphi(y))\,dy = 0, \quad \varkappa = -2(n+1)$$

конформно инвариантно при произвольных дифференцируемых функциях Φ и F.

Доказательство.

Заметим, что в исследуемом случае $\eta = 0$. Поэтому утверждение следствия непосредственно следует из определяющих уравнений, приведенных в т. (7.3).

Таким же образом убеждаемся, что справедливо утверждение относительно симметрии уравнения (7.4б).

Следствие 7.4. Уравнение

$$\check{S}^{\frac{n+1}{2}}\Psi + F(\Psi^*\Psi)\Psi + \int \exp\left(\frac{i\vec{z}^{\,2}}{2z_0}\right) z_0^{-(n+1)} R(\Psi^*\Psi)\Psi(y)\,dy = 0$$

инвариантно относительно группы Шредингера $Sch(1,n)$ при произвольных дифференциальных функциях F и Φ.

Таким образом, в теоремах этого параграфа нами дана характеристика симметрийных свойств уравнений вида (7.4а–б). Показано, что инвариантностью относительно групп $C(1,n)$ и $Sch(1,n)$ обладает весьма специфический класс уравнений, и если какойлибо параметр фиксирован, то требование инвариантности относительно указанных групп определяет уравнение однозначно (с точностью до диффеоморфизма). При этом для произвольной пространственной размерности существуют "вырожденные" уравнения, инвариантные относительно групп $C(1,n)$ и $Sch(1,n)$ при весьма слабых ограничениях на входящие в уравнения функции.

§8. Симметрийные свойства интегро-дифференциальных уравнений для электромагнитного и спинорного полей

Настоящий параграф посвящен исследованию симметрийных свойств систем интегро-дифференциальных уравнений. К этому классу относятся уравнения с дифференциальным оператором Максвелла, Дирака, а также уравнение Бете-Солпитера. Все эти уравнения широко используются в современной теоретической физике.

В многокомпонентном случае появляются некоторые отличия в поведении системы при конформных отображениях по сравнению с однокомпонентными уравнениями, рассмотренными в предыдущем параграфе. Оказывается, невозможно построить конформно инвариантное уравнение вида

$$(T\varphi)(x) \equiv M\varphi + \lambda \int K(x,y,\varphi(y))dy = 0, \qquad (8.1)$$

где $\varphi = (\varphi_1, \dots \varphi_N)$, M – дифференциальный оператор. Точнее, пусть M – дифференциальный оператор, инвариантный относительно линейного представления конформной группы. В соответствии с общими принципами эквивариантности /22, гл.I, §8/ это означает, что инфинитезимально имеем равенство

$$L_X(T\varphi) = h(T\varphi) \qquad (8.2)$$

где h – генератор некоторого представления группы $C(1,3)$, который задан на компонентах $(T\varphi)(x)$ и, вообще говоря, реализует представление группы $C(1,3)$ отличное от заданного на функциях φ. Обозначим J_B – инварианты группы Пуанкаре, построенные из φ, φ_μ; Ψ – вектор-функция, построенная из φ, φ_μ, ..., преобразующаяся по представлению h группы $C(1,3)$ (см. (8.2)).

Теорема 8.1. Уравнение (8.1) инвариантно относительно:

1) алгебры $P(1,3)$, если

$$K = \Phi(\rho, J_B)\Psi, \quad [\Phi, S'_{\mu\nu}] = 0,$$

где $S'_{\mu\nu}$ – матрица представления h алгебры $P(1,3)$, матричные элементы матрицы Φ – дифференцируемые функции своих аргументов;

2) алгебры $\tilde{P}(1,3) = \{P(1,3), \mathcal{D}\}$, если

$$K = \rho^{2s} \Phi\left(\frac{J_A}{\rho^{2\beta}}\right) \Psi ,$$

где $2s + \alpha = \varkappa$, $L_{\mathcal{D}}(J_A) = 2\beta J_A$,

$$L_{\mathcal{D}} \Psi = \beta \Psi, \quad L_{\mathcal{D}}(T\varphi) = \varkappa T\varphi ;$$

3) алгебры $C(1,3)$, если $K = 0$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что поскольку речь идет о линейных представлениях группы $C(1,3)$, то, не умаляя общности, можно считать, что на векторах φ, $T\varphi$ операторы группы $C(1,3)$ заданы следующим образом:

$$\begin{gathered} P_\mu = \partial_\mu, \quad J_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} x_\alpha \partial_\nu - g_{\nu\alpha} x_\alpha \partial_\mu + (S_{\mu\nu}\varphi)_N \partial_{\varphi_N} \\ \mathcal{D} = x_0 \partial_0 + x_a \partial_a + \beta \varphi_N \partial_{\varphi_N} \\ K_\mu = 2x_\mu \mathcal{D} - x_\nu x^\nu \partial_\mu + 2(x^\nu S_{\mu\nu}\varphi)_N \partial_{\varphi_N} \\ P'_\mu = \partial_\mu, \quad J'_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} x_\alpha \partial_\nu - g_{\nu\alpha} x_\alpha \partial_\mu + (S'_{\mu\nu} T\varphi)_K \partial_{(T\varphi)_K} \\ \mathcal{D}' = x_0 \partial_0 + x_a \partial_a + \lambda (T\varphi)_K \partial_{(T\varphi)_K} \\ K'_\mu = 2x_\mu \mathcal{D}' - x_\nu x^\nu \partial_\mu + 2(x^\nu S'_{\mu\nu} T\varphi) \partial_{T\varphi} \end{gathered} \tag{8.3}$$

Пусть Ψ – новая вектор-функция, построенная из φ, φ_μ и т.д. со свойствами $L_{J_{\mu\nu}} \Psi = S'_{\mu\nu} \Psi$, $L_{\mathcal{D}}(\Psi) = \alpha \Psi$

$$L_{K_\mu}(\Psi) = 2\alpha x_\mu \Psi + 2x^\nu S'_{\mu\nu} \Psi .$$

Из критерия инвариантности относительно векторного поля X_A (6.2) находим уравнения, которым должна удовлетворять функция K из уравнения (8.I)

$$X_A = \xi_A^\mu \partial_\mu + \tau_A^\mu \partial_{y_\mu} + \eta_A(y)\,\partial_{\varphi(y)} + \eta(x)\,\partial_{\varphi(x)} . \qquad (8.4)$$

$$\left(\xi_A^\mu \partial_{x_\mu} + \tau_A^\mu \partial_{y_\mu} + \eta_A(y)\partial_{\varphi(y)}\right)K + \partial_{y_\mu}(\tau_A^\mu)K = h_A K .$$

Индекс A указывает алгебру, которой принадлежит X_A. Как ясно из (8.3), функции h_A таковы:

$$h_{P_\mu} = 0, \quad h_{P(1,3)} = S'_{\mu\nu}, \quad h_{\mathcal{D}} = \varkappa, \quad h_{K_\mu} = 2\varkappa x_\mu + 2x^\nu S'_{\mu\nu}$$

Из инвариантности относительно сдвигов находим, что

$$K_{x_\mu} + \tau_{P_\mu}^\nu K_{y_\nu} = 0.$$

Выберем $\tau_{P_\mu}^\nu = \delta_{\mu\nu}$, что всегда можно сделать по теореме о выпрямлении поля /2/. Следовательно, $K = K(z, \varphi)$. Из инвариантности относительно группы Пуанкаре находим, что ядро удовлетворяет уравнению

$$g_{\alpha\mu} z_\mu K_{z_\nu} - g_{\nu\mu} z_\mu K_{z_\alpha} + K_\varphi (S_{\mu\nu}\varphi) = S'_{\nu\alpha} K .$$

Следовательно, если существует вектор ψ с описанными выше свойствами, то $K = \phi\psi$, причем $[S'_{\mu\nu}, \phi] = 0$. Матричные элементы ϕ – дифференцируемые функции от инвариантов группы $P(1,3)$.

Инвариантность относительно $\tilde{P}(1,3) = \{P(1,3), \mathcal{D}\}$ влечет дополнительное условие на ϕ, в чем нетрудно убедиться, подставляя (8.3) в (8.4):

$$z_\mu K_{z_\mu} + 2\beta J_A \phi_{J_A}\psi + \alpha\phi\cdot\psi + 4\phi\psi = \varkappa\phi\psi .$$

Таким образом,

$$K = (z_\mu z^\mu)^s \phi\left(\frac{J_A}{\rho^{2\beta}}\right)\psi$$

$$2s + 2\beta + 4 + \alpha = \varkappa$$

Наконец, из условия инвариантности относительно K_μ следует, что должны выполняться соотношения

$$[2z_\mu(z_\nu\partial_{z_\nu}+2\beta\varphi\partial_\varphi)-z_\nu z^\nu\partial_{z_\mu}]\Phi=0,$$

$$y_\mu(z_\nu\partial_{z_\nu}+2\beta\varphi\partial_\varphi)\Phi=s\,y_\mu\Phi\,,\quad s\neq 0,$$

$$[y_\nu(g_{\mu\alpha}z_\alpha\partial_{z_\nu}-g_{\nu\alpha}z_\alpha\partial_{z_\mu})+(y^\nu S_{\mu\nu}\varphi)_N\partial_{\varphi_N}]\Phi=-2y^\nu S'_{\mu\nu}\varphi$$

Поскольку Φ – инвариант группы $\widetilde{P}(1,3)$, то видим, что $\Phi=0$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь уравнение Дирака вида

$$\gamma_\mu p^\mu\Psi+\lambda_1F(\bar\Psi,\Psi)+\lambda_2\int_{R^4}K(x,y,\Psi(x),\bar\Psi(x),\Psi(y),\bar\Psi(y))dy=0, \tag{8.5}$$

где $\Psi=\Psi(x)$ – биспинор, $\bar\Psi$ – дираковски сопряженный биспинор $\bar\Psi=\Psi^+\gamma_0$, $x=(x_0,x_1,x_2,x_3)$, $\mu=\overline{0,3}$. Как и прежде, J_A – инварианты группы Пуанкаре такие, что $L_D J_A=2\beta J_A$. Матрицы γ_μ выбраны в виде (4.3).

Теорема 8.2 Уравнение Дирака (8.5) инвариантно относительно:
I) алгебры $P(1,3)$, если

$$F=\begin{pmatrix}F_1I_2, & O_2\\ O_2, & F_2I_2\end{pmatrix}\Psi(x),\qquad K=\begin{pmatrix}K_1I_2, & O_2\\ O_2, & K_2I_2\end{pmatrix}\Psi(y),$$

F_1, F_2 – дифференцируемые функции от $J_A(x)$; K_1, K_2 – дифференцируемые функции $\rho^2=z_\mu z^\mu$, $J_A(x)$, $J_A(y)$;
2) алгебры $\widetilde{P}(1,3)$, если

$$F_\varepsilon=J_1^{s_\varepsilon}(x)\,\Phi_\varepsilon\left(\frac{J_A}{J_1}(x)\right),\qquad K_\varepsilon=\rho^{-5}G_\varepsilon\left(\frac{J_A(x)}{\rho^{2\beta}},\frac{J_A(y)}{\rho^{2\beta}}\right)$$

$$2\beta s_\varepsilon+1=0,\quad J_1=\bar\Psi\Psi\,,\quad \varepsilon=1,2;$$

F_ε, G_ε – дифференцируемые функции своих аргументов;
3) алгебры $C(1,3)$, если

$$F_\varepsilon = J_1^{1/3}(x)\ \phi_\varepsilon\left(\frac{J_2}{J_1}(x)\right), \quad K = \begin{pmatrix} K_1 I_2, & O_2 \\ O_2, & K_2 I_3 \end{pmatrix} \psi(x)$$

$$K_1 = \left(z_\mu z^\mu\right)^{-4} \quad T_1\left(\frac{J_1(y)}{J_2(y)}, S, \frac{J_1(x)}{J_2(x)}\right) J_1^{-}(x)$$

$$K_2 = \left(z_\mu z^\mu\right)^{-4} \quad T_2\left(\frac{J_1(y)}{J_2(y)}, S, \frac{J_1(x)}{J_2(x)}\right) J_1^{-1}(x)$$

$$J_1 = \bar{\Psi}\Psi, \qquad J_2 = \bar{\Psi}\gamma_5\Psi, \qquad S = \rho^6 J_1(x) J_1(y).$$

Доказательство.

Довольно простые, но громоздкие вычисления приводят к следующим уравнениям, которым удовлетворяют функции F, K.

$$X_A = \xi^\mu_A \partial_{x_\mu} + \tau^\mu_A \partial_{y_\mu} + \eta(x)\partial_{\psi(x)} + \bar{\eta}(x)\partial_{\bar{\psi}(x)} + \eta(y)\partial_{\psi(y)} + \bar{\eta}(y)\partial_{\bar{\psi}(y)}.$$

$$\eta(x) F_\psi + F_{\bar{\psi}}\ \bar{\eta}(x) = hF$$

$$\xi^\mu K_{x_\mu} + \tau^\mu K_{y_\mu} + K_{\psi(y)}\eta(y) + K_{\bar{\psi}(y)}\bar{\eta}(y) +$$

$$+ K_{\psi(x)}\eta(x) + K_{\bar{\psi}(x)}\bar{\eta}(x) + \partial_{y_\mu}(\tau^\mu) K = hK$$

$$\xi^\mu = c_\mu + c_{\mu\nu} x_\nu + 2(\alpha_\nu x^\nu) x_\mu - \alpha_\mu (x_\nu x^\nu)$$

$$\tau^\mu = c_\mu + c_{\mu\nu} y_\nu + 2(\alpha_\nu y^\nu) y_\mu - \alpha_\mu (y_\nu y^\nu)$$

$$[K, S_{\mu\nu}]_- = 0, \qquad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$$

$$\eta(x) = [C_{\mu\nu} S_{\mu\nu} + (-\tfrac{3}{2})d + 2\alpha^{\mu} x^{\nu} S_{\mu\nu} - 3\alpha_{\mu} x^{\mu}]\Psi(x)$$

$$h = C_{\mu\nu} S_{\mu\nu} - \frac{5}{2}d - 5\alpha_{\mu} x^{\mu} + 2\alpha^{\mu} x^{\nu} S_{\mu\nu}$$

$$C_{0K} = C_{K0}, \quad C_{iK} = -C_{Ki}\ (i \neq K), \quad C_{00} = C_{11} = C_{22} = C_{33} = d.$$

Решая определяющие уравнения с указанными ξ^{μ}, τ^{μ}, η, h, получим утверждения теоремы.

Перейдем теперь к изучению симметрийных свойств уравнений типа Максвелла

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{H} + \vec{f} + \int_{R^4} \vec{K}\, dy \\
&\operatorname{div} \vec{E} = f_0 + \int_{R^4} K_0\, dy \\
&\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E} + \vec{\varphi} + \int_{R^4} \vec{R}\, dy \\
&\operatorname{div} \vec{H} = \varphi_0 + \int_{R^4} R_0\, dy
\end{aligned} \tag{8.6}$$

функции $f = (f_0, \vec{f})$, $\varphi = (\varphi_0, \vec{\varphi})$ – дифференцируемы и зависят от $\vec{E}(x), \vec{H}(x), \vec{E}_{\mu}(x), \vec{H}_{\mu}(x)$. Функции $K = (K^0, \vec{K})$, $R = (R^0, \vec{R})$ – дифференцируемы и зависят от $\vec{E}(x), \vec{H}(x), \vec{E}(y), \vec{H}(y), \vec{E}_{\mu}(x)$, $\vec{H}_{\mu}(x), \vec{E}_{\mu}(y), \vec{H}_{\mu}(y)$. Пусть J_N – инварианты группы Пуанкаре, построенные из $\vec{E}, \vec{H}, \vec{E}_{\mu}, \vec{H}_{\mu}$, причем $L_{\mathcal{D}} J_N = 2\beta J_N$.

Теорема 8.3.

Уравнения Максвелла (8.6) инвариантны относительно:

I) группы Пуанкаре $P(1,3)$, если

$$f_0 = -\vec{A}\vec{E} + j_0 \qquad \vec{f} = -A_0\vec{E} + \vec{A}\times\vec{H} - \vec{j}$$

$$\varphi_0 = -\vec{B}\vec{H} + m_0 \qquad \vec{\varphi} = -B_0\vec{H} - \vec{B}\times\vec{E} - \vec{m}$$

$$j_{\mu} = \Omega^{\varepsilon}\,\partial_{\mu}(J_{\varepsilon}) \qquad m_{\mu} = \Lambda^{\varepsilon}(J_N)\,\partial_{\mu}(J_{\varepsilon})$$

$$A_\mu = A^\varepsilon(J_N)\,\partial_\mu(\ln J_\varepsilon), \quad B_\mu = B^\varepsilon(J_N)\,\partial_\mu(\ln J_\varepsilon)$$

$$K_\mu = K'_\mu + K''_\mu, \quad R_\mu = R'_\mu + R''_\mu$$

$$K'_\mu = \partial_{x_\mu}(J_\varepsilon^{1/2}(x))\,V_\varepsilon(\rho, J_N(x), J_N(y)) + \partial_{y_\mu}(J_\varepsilon^{1/2}(y))\,Q_\varepsilon(\rho, J_N(x), J_N(y))$$

$$R'_\mu = \partial_{x_\mu}(J_\varepsilon^{1/2}(x))\,U_\varepsilon(\rho, J_N(x), J_N(y)) + \partial_{y_\mu}(J_\varepsilon^{1/2}(y))\,T_\varepsilon(\rho, J_N(x), J_N(y)).$$

$$K_0'' = -(\vec{C}_1\vec{E}(x) + \vec{C}_2\vec{E}(y)), \quad R_0'' = -(\vec{\mathcal{D}}_1\vec{H}(x) + \vec{\mathcal{D}}_2\vec{H}(y))$$

$$\vec{K}'' = -(C_1^0\vec{E}(x) + C_2^0\vec{E}(y)) + \vec{C}_1\times\vec{H}(x) + \vec{C}_2\times\vec{H}(y)$$

$$\vec{R}'' = -(\mathcal{D}_1^0\vec{H}(x) + \mathcal{D}_2^0\vec{H}(y) + \vec{\mathcal{D}}_1\times\vec{E}(x) + \vec{\mathcal{D}}_2\times\vec{E}(y))$$

$$C_1^\mu = \partial_\mu(J(x))\,C_1(\rho, J_N(x), J_N(y)) + \partial_\mu(J(y))\,\Pi_1(\rho, J_N(x), J_N(y))$$

$$C_2^\mu = \partial_\mu(J(x))\,C_2(\rho, J_N(x), J_N(y)) + \partial_\mu(J(y))\,\Pi_2(\rho, J_N(x), J_N(y))$$

$$\mathcal{D}_1^\mu = \partial_\mu(J(x))\,W_1(\rho, J_N(x), J_N(y)) + \partial_\mu(J(y))\,S_1(\rho, J_N(x), J_N(y))$$

$$\mathcal{D}_2^\mu = \partial_\mu(J(x))\,W_2(\rho, J_N(x), J_N(y)) + \partial_\mu(J(y))\,S_2(\rho, J_N(x), J_N(y)),$$

где $A^\mu, B^\mu, \Omega^\varepsilon, \Lambda^\varepsilon, V^\varepsilon, Q_\varepsilon, U_\varepsilon, T_\varepsilon, C_\varepsilon, \Pi_\varepsilon, W_\varepsilon, S_\varepsilon$ – дифференцируемые функции своих аргументов; по ε сумма, $\varepsilon=1,2$; $J_1 = \vec{E}^2 - \vec{H}^2$, $J_2 = \vec{E}\cdot\vec{H}$, $J = \frac{J_2}{J_1}$.

2) группы $\tilde{P}(1,3) = \{P(1,3), \mathcal{D}\}$, если

$$j_\mu = \Omega_\varepsilon\left(\frac{J_N}{J_1}\right)\partial_\mu(J_\varepsilon^{1/2}), \qquad m_\mu = \Lambda_\varepsilon\left(\frac{J_N}{J_1}\right)\partial_\mu(J_\varepsilon^{1/2}),$$

$$A_\varepsilon(J_N) = \tilde{A}_\varepsilon\left(\frac{J_N}{J_1}\right), \quad B_\varepsilon = B_\varepsilon\left(\frac{J_N}{J_1}\right),$$

$$V_\varepsilon = \rho^{-4}\tilde{V}_\varepsilon\left(\frac{J_N(x)}{\rho^{2\beta}}, \frac{J_N(y)}{\rho^{2\beta}}\right), \quad Q_\varepsilon = \rho^{-4}\tilde{Q}_\varepsilon\left(\frac{J_N(x)}{\rho^{2\beta}}, \frac{J_N(y)}{\rho^{2\beta}}\right),$$

$$U_\varepsilon = \rho^{-4}\,\tilde{U}_\varepsilon\left(\frac{J_N(x)}{\rho^{2\beta}},\frac{J_N(y)}{\rho^{2\beta}}\right),\quad T_\varepsilon = \rho^{-4}\,\tilde{T}_\varepsilon\left(\frac{J_N(x)}{\rho^{2\beta}},\frac{J_N(y)}{\rho^{2\beta}}\right),$$

$$C_\varepsilon = \rho^{-4}\,\tilde{C}_\varepsilon\left(\frac{J_N(x)}{\rho^{2\beta}},\frac{J_N(y)}{\rho^{2\beta}}\right),\quad \Pi_\varepsilon = \rho^{-4}\,\tilde{\Pi}_\varepsilon\left(\frac{J_N(x)}{\rho^{2\beta}},\frac{J_N(y)}{\rho^{2\beta}}\right),$$

$$W_\varepsilon = \rho^{-4}\,\tilde{W}_\varepsilon\left(\frac{J_N(x)}{\rho^{2\beta}},\frac{J_N(y)}{\rho^{2\beta}}\right),\quad S_\varepsilon = \rho^{-4}\,\tilde{S}_\varepsilon\left(\frac{J_N(x)}{\rho^{2\beta}},\frac{J_N(y)}{\rho^{2\beta}}\right),$$

где $\tilde{V}_\varepsilon;\ \tilde{Q}_\varepsilon,\ \tilde{U}_\varepsilon,\ \tilde{T}_\varepsilon,\ \tilde{C}_\varepsilon,\ \tilde{\Pi}_\varepsilon,\ \tilde{W}_\varepsilon,\ \tilde{S}_\varepsilon$ – дифференцируемые функции своих аргументов;

3) группы конформных преобразований, если

$$j_\mu = J_1^{1/2}\,\Omega\left(J_N'(x)\right)\partial_\mu\left(J(x)\right),\quad m_\mu = J_1^{1/2}\,\Lambda\left(J_N'(x)\right)\partial_\mu\left(J(x)\right)$$

$$K_\mu' = \rho^{s} J_1^{s_1}(x)\,J_1^{s_2}(y)\,V\left(J_N'(x),J_N'(y),\frac{J_1(x)\cdot J_1(y)}{\rho^{4\beta}}\right)\partial_\mu\left(J(x)\right)$$

$$B_\mu' = \rho^{\pi} J_1^{s_1}(x)\,J_1^{\pi_2}(y)\,U\left(J_N'(x),J_N'(y),\frac{J_1(x)\,J_1(y)}{\rho^{4\beta}}\right)\partial_\mu\left(J(x)\right)$$

$$C_1^{\mu} = C\left(J_N'(x),J_N'(y),\frac{J_1(x);J_1(y)}{\rho^{4\beta}}\right)\partial_\mu\left(J(x)\right)\qquad \begin{cases} s+4\beta s_1 = 2\beta \\ s+4\beta s_2+8=0\end{cases}$$

$$\mathcal{D}_1^{\mu} = \mathcal{D}\left(J_N'(x),J_N'(y);\frac{J_1(x)\,J_1(y)}{\rho^{4\beta}}\right)\partial_\mu\left(J(x)\right)\qquad \begin{cases} \pi+4\beta\pi_1 = 2\beta \\ \pi+4\beta\pi_2=-8\end{cases}$$

$$A_\mu = A(J_N')\,\partial_\mu J(x) + a\,\partial_\mu \ln P_t(J_1,J_2),\quad B_\mu = B(J_N')\,\partial_\mu(J(x)) + b\,\partial_\mu \ln P_{\bar{t}}(J_1,J_2),$$

где J_N' – инварианты конформной группы, $C,\mathcal{D},U,V$ – дифференцируемые функции своих аргументов; $P_t = \sum\limits_{\alpha+\varkappa=t} A_{\alpha\varkappa} J_1^{\alpha} J_2^{\varkappa}$, $\beta(2at+1)=-2$;

4) группы $C(1,3)\times H(1)$, если

$$A_\mu = a\,\partial_\mu \ln(J_1^2+J_2^2)^s,\quad B_\mu = a\,\partial_\mu \ln(J_1^2+J_2^2)^s$$

$$\beta(1+2as)=-2,\qquad 1+2as\neq 0.$$

Доказательство.

Заметим, что дополнительные члены, которыми уравнения (8.6) отличаются от обычных уравнений Максвелла, можно рассматривать как токи. Согласно /64/ дифференциальные формы, представляющие уравнения (8.6), имеют следующий вид

$$\omega_1 = d\vec{E}\,d\vec{S} - d\vec{H}\,d\vec{x}\,dt + \vec{F}\,d\vec{S}\,dt - F_0\,dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\omega_2 = d\vec{H}\,d\vec{S} + d\vec{E}\,d\vec{x}\,dt + \vec{G}\,d\vec{S}\,dt - G_0\,dx_1 dx_2 dx_3$$

$$F_\mu = f_\mu + \int_{R^4} K_\mu\,dy\,, \quad G_\mu = \varphi_\mu + \int_{R^4} R_\mu\,dy\,, \quad (dS)_i = \varepsilon_{ikn}\,dx_k dx_n$$

Оператор симметрии X ищем в виде

$$X = \xi^\mu \partial_{x_\mu} + \tau^\mu \partial_{y_\mu} + \eta(x)\,\partial_{\psi(x)} + \eta(y)\,\partial_{\psi(y)} +$$

$$+ \eta_\mu(x)\,\partial_{\psi_\mu(x)} + \eta_\mu(y)\,\partial_{\psi_\mu(y)}\,,$$

$\psi \equiv (\vec{E}, \vec{H})$, η_μ – координаты первого продолжения. Из условия инвариантности (6.2) применительно к формам ω_1, ω_2 получаем определяющие уравнения для f_μ, φ_μ, K_μ, R_μ :

$$L_X(K_\mu) \equiv [\xi^\nu \partial_{x_\nu} + \tau^\nu \partial_{y_\nu} + \eta^A(x)\,\partial_{\psi^A(x)} + \eta^A(y)\,\partial_{\psi^A(y)} +$$

$$+ \eta^A_\rho(x)\,\partial_{\psi^A_\rho(x)} + \eta^A_\rho(y)\,\partial_{\psi^A_\rho(y)}]\,K_\mu = \sigma^\nu_\mu K_\nu + \tilde{\sigma}^\nu_\mu R_\nu \qquad (8.7)$$

$$L_X R_\mu = \sigma^\nu_\mu R_\nu + \tilde{\tilde{\sigma}}{}^\nu_\mu K_\nu\,, \quad L_X f_\mu = \sigma^\nu_\mu f_\nu + \tilde{\sigma}^\nu_\mu \varphi_\nu$$

$$L_X \varphi_\mu = \sigma^\nu_\mu \varphi_\nu + \tilde{\tilde{\sigma}}{}^\nu_\mu f_\nu\,, \qquad A = \overline{1,6}\,,$$

где

$$\xi^\mu = C_\mu + C_{\mu\nu} x_\nu + 2(\alpha_\nu x^\nu) x_\mu - \alpha_\mu (x_\nu x^\nu)$$

$$\tau^\mu = C_\mu + C_{\mu\nu} y_\nu + 2(\alpha_\nu y^\nu) y_\mu - \alpha_\mu (y_\nu y^\nu)$$

$$C_{0k} = C_{k0}, \quad C_{ik} = -C_{ki}\ (i \neq k), \quad C_{00} = C_{11} = C_{22} = C_{33} = d,$$

$$\eta(x) = \phi\,\Psi(x),$$

$$\phi = C_{\mu\nu} S_{\mu\nu} + d\beta + 2\beta(\alpha_\mu x^\mu) + 2\alpha^\mu x^\nu S_{\mu\nu},$$

матрицы $S_{\mu\nu}$ (см.лемму I.5) принадлежат представлению $\mathcal{D}(1,0)$ $\mathcal{D}(0,1)$ группы Лоренца. Координаты продолженного оператора находятся по формуле

$$\eta^A_\mu = \partial_\mu(\eta^A) + \Psi^B_\nu \partial_{\psi_B}(\eta^A) - \Psi^A_\gamma(\xi^\nu_\mu + \Psi^B \partial_{\psi_B}(\xi^\nu));$$

$$(\sigma^\nu_\mu) = \sigma = C_{\mu\nu} S'_{\mu\nu} + d(\beta-1) + 2(\beta-1)\alpha_\mu x^\mu + 2\alpha^\mu x^\nu S'_{\mu\nu}$$

$S'_{\mu\nu}$ – матрицы представления $\mathcal{D}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ группы Лоренца; в явном виде $S'_{\mu\nu}$ выписаны в т.I.7; $\tilde{\sigma}^\nu_\mu = -\delta_{\nu\mu}$, $\tilde{\tilde{\sigma}}^\nu_\mu = \delta_{\nu\mu}$.

Выражения для $\varphi_\mu, f_\mu, K_\mu, R_\mu$ суть решения уравнений (8.7). Разумеется, выбор явного вида решений неоднозначен, однако любое другое решение получается из приведенного при подходящем выборе функций от инвариантов, входящих в указанные выражения. Теорема доказана.

Заметим, что если $A=B$, то уравнения (8.6) можно переписать в виде

$$D_0 \vec{E} = Rot\,\vec{H} - \vec{j} \qquad D_0\vec{H} = -Rot\,\vec{E} - \vec{m}$$
$$Div\,\vec{E} = j_0 \qquad Div\,\vec{H} = m_0 \ ,$$

где $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu = A^\varepsilon(J_N)\,\partial_\mu \ln(J_\varepsilon) + \partial_\mu$. Таким образом, векторы A_μ определяют ковариантную производную при преобразованиях из группы $P(1,3)$, $\tilde{P}(1,3)$ в соответствии с доказанной теоремой.

Изучим теперь симметрийные свойства уравнения Бете-Солпитера /60, гл. I7 §6/. Это уравнение описывает взаимодействие двух релятивистских частиц (в нашем случае частиц со спином I/2). Группа инвариантности этого уравнения установлена только в случае локального взаимодействия. Техника дифференциальных форм позволяет избежать затруднений, связанных с тем, что уравнение интегро-дифференциальное.

Уравнение Бете-Солпитера имеет вид

$$\hat{\gamma}^1 \hat{\gamma}^2 \Psi = \int\limits_{R^4}\int\limits_{R^4} K(x, y, \Psi(y), \bar{\Psi}(y))\, dy^1 dy^2 \qquad (8.8)$$

$$\hat{\gamma}^1 = \gamma^1_\mu p^{1\mu} + m_1 \ , \quad \hat{\gamma}^2 = \gamma^{(2)}_\mu p^{2\mu} + m_2$$

$$\hat{\gamma}^1 \hat{\gamma}^2 = \hat{\gamma}^2 \hat{\gamma}^1 \ , \quad dy^\varepsilon \equiv dy_0^\varepsilon dy_1^\varepsilon dy_2^\varepsilon dy_3^\varepsilon \ , \ \varepsilon = 1,2.$$

Матрицы Дирака γ^1_μ которые мы выберем в виде (4.2'), коммутируют с матрицами Дирака γ^2_μ по определению; $\Psi = \Psi(x)$ – матрица-функция 4x4, $x \equiv (x^{(1)}, x^{(2)})$, $y = (y^{(1)}, y^{(2)})$, $x^\varepsilon = (x_0^\varepsilon, x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, x_3^\varepsilon)$, $y^\varepsilon = (y_0^\varepsilon, y_1^\varepsilon, y_2^\varepsilon, y_3^\varepsilon)$, $\bar{\Psi} = \Psi^+ \gamma_0$, Ψ^+ – эрмитово сопряженная матрица. Положим; $z_\varepsilon^2 = (x^\varepsilon - y^\varepsilon, x^\varepsilon - y^\varepsilon)$,
$z^2 = (x^1 + x^2 - y^1 - y^2, x^1 + x^2 - y^1 - y^2)$, $(U, V) \equiv U_\mu V^\mu$;
J_N – инварианты группы $P(1,3) \otimes P(1,3)$ построенные из Ψ, $\bar{\Psi}$. Выберем J_N таким образом, чтобы $L_\mathcal{D} J_N = 2\beta J_N$.

Теорема 8.4.

Уравнение Бете-Солпитера (8.8) инвариантно относительно:
1) группы $P(1,3) \otimes P(1,3)$, если

$$K = \begin{pmatrix} F_1 I_2, & O_2 \\ O_2, & F_2 I_2 \end{pmatrix} \Psi \ , \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = F_1(z_1, z_2, z, J_N) \ , \quad F_2 = F_2(z_1, z_2, z, J_N)$$

F_1, F_2 – дифференцируемые функции своих аргументов;
2) группы $\tilde{P}_1(1,3) \otimes P(1,3)$, если $m_1 = 0$

$$F_1 = z_1^{2s} J_1^{s_1} \Omega\left(z_2; \frac{J_N}{z_1^{2\beta}}\right), \quad 2s + 2\beta s_1 + 5 = 0,$$

$$F_2 = z_1^{-5} \Lambda\left(z_2, \frac{J_N}{z_1^{2\beta}}\right)$$

$$\mathcal{D}_1 = x_\nu^{(1)} \partial_{x_\nu^{(1)}} + y_\nu^{(1)} \partial_{y_\nu^{(1)}} + (\beta\psi)_{ik} \partial_{\psi_{ik}(x)} +$$

$$+ (\beta\bar{\psi})_{ik} \partial_{\bar{\psi}_{ik}(x)} + (\beta\psi)_{ik}(y) \partial_{\psi_{ik}(y)} + (\beta\bar{\psi})_{ik}(y) \partial_{\bar{\psi}_{ik}(y)};$$

3) группы $\{\tilde{P}_1(1,3),\ \tilde{P}_2(1,3)\}$, если $m_1 = m_2 = 0$

$$F_1 = z_1^{s_1} z_2^{s_2}\, \Omega\left(\frac{J_N}{z_1^{2\beta_1} z_2^{2\beta_2}}\right) \qquad s_1 + s_2 = -5$$

$$F_2 = z_1^{\varkappa_1} z_2^{\varkappa_2}\, \Lambda\left(\frac{J_N}{z_1^{2\beta_1} z_2^{2\beta_2}}\right) \qquad \varkappa_1 + \varkappa_2 = -5\ ;$$

4) группы $\{P(1,3) \otimes P(1,3),\ \mathcal{D}\}$,

$$F_1 = z^{s} J_1^{s_1}\, \Omega\left(\frac{z_1}{z}, \frac{z_2}{z}, \frac{J_N}{z}\right)$$

$$F_2 = z^{\varkappa} J_1^{\varkappa_1}\, \Lambda\left(\frac{z_1}{z}, \frac{z_2}{z}, \frac{J_N}{z}\right)$$

$$s + 2\beta s_1 + 5 = 0, \quad \varkappa + 2\beta\varkappa_1 + 5 = 0, \quad J_1 = Sp(\bar{\psi}\cdot\psi).$$

Здесь $\tilde{P}_\varepsilon(1,3) = \{P_\varepsilon(1,3),\ \mathcal{D}_\varepsilon\}$, $\varepsilon = 1, 2$,

$$\mathcal{D}_\varepsilon = x_\nu^{(\varepsilon)} \partial_{x_\nu^{(\varepsilon)}} + y_\nu^{(\varepsilon)} \partial_{y_\nu^{(\varepsilon)}} + \beta_\varepsilon\left[\psi_{ik}(x) \partial_{\psi_{ik}(x)} +\right.$$

$$\left. + \psi_{ik}(y) \partial_{\psi_{ik}(y)} + \bar{\psi}_{ik}(x) \partial_{\bar{\psi}_{ik}(x)} + \bar{\psi}_{ik}(y) \partial_{\psi_{ik}(y)}\right]$$

$$\mathcal{D} = x_\nu^{(1)} \partial_{x_\nu^{(1)}} + x_\nu^{(2)} \partial_{x_\nu^{(2)}} + y_\nu^{(1)} \partial_{y_\nu^{(1)}} + y_\nu^{(2)} \partial_{y_\nu^{(2)}} +$$

$$+ \beta \left(\Psi_{ik}(x) \partial_{\Psi_{ik}(x)} + \Psi_{ik}(y) \partial_{\Psi_{ik}(y)} + \bar{\Psi}_{ik}(x) \partial_{\bar{\Psi}_{ik}(x)} + \bar{\Psi}_{ik}(y) \partial_{\bar{\Psi}_{ik}(y)} \right).$$

Доказательство.

Ввиду большого объема вычислений мы не будем приводить полное доказательство, а только укажем операторы симметрии, что даст возможность проверить утверждения теоремы.

Алгебра $\widetilde{P}_\varepsilon(1,3)$ $(\varepsilon = 1,2)$ образована операторами

$$P_\mu^{(\varepsilon)} = \partial_{x_\mu^{(\varepsilon)}} + \partial_{y_\mu^{(\varepsilon)}} \quad , \quad J_{\mu\nu}^{(\varepsilon)} = g_{\mu\alpha} z_\alpha^{(\varepsilon)} \partial_{z_\nu^{(\varepsilon)}} - g_{\nu\alpha} z_\alpha^{(\varepsilon)} \partial_{z_\mu^{(\varepsilon)}} + S_{\mu\nu}^{\varepsilon},$$

$$\mathcal{D}^{(\varepsilon)} = z_\mu^{(\varepsilon)} \partial_{z_\mu^{(\varepsilon)}} + \beta_\varepsilon , \qquad S_{\mu\nu}^{(\varepsilon)} = \frac{i}{4} \left(\gamma_\mu^\varepsilon \gamma_\nu^\varepsilon - \gamma_\nu^\varepsilon \gamma_\mu^\varepsilon \right).$$

Оператор $\mathcal{D}$ имеет вид $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$.

§9. Симметрийные свойства уравнений статистической физики

Настоящий параграф посвящен исследованию симметрийных свойств некоторых важных уравнений статистической физики. Мы изучим теоретико-групповые свойства уравнений Больцмана, Власова и Ландау. Несмотря на важность затронутой темы, такой анализ для указанных уравнений не был выполнен. Методы, описанные в §6, дают возможность осуществить намеченную программу исследования теоретико-групповых свойств уравнений статистической физики.

Рассмотрим уравнение Больцмана /40, §85/

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V}\,\mathrm{grad}\, f = \int K(|\vec{V}-\vec{V}^1|)(\tilde{f}^1\tilde{f} - f^1 f)\,d\Omega\, d\vec{V}_1 \tag{9.I}$$

$$f = f(t,\vec{x},\vec{V}), \quad \tilde{f} = f(t,\vec{x},\tilde{\vec{V}}), \quad f^1 = f(t,\vec{x},\vec{V}^1),$$

$$\tilde{f}^1 = f(t,\vec{x},\tilde{\vec{V}}^1), \quad \vec{x} = (x_1,x_2,x_3), \quad \vec{V} = \frac{d\vec{x}}{dt} = (V_1,V_2,V_3)$$

$$\tilde{\vec{V}} = \frac{1}{2}(\vec{V}+\vec{V}^1+g\vec{e}), \quad \tilde{\vec{V}}^1 = \frac{1}{2}(\vec{V}+\vec{V}^1-g\vec{e}), \quad g = |\vec{V}-\vec{V}_1|, \quad |\vec{e}| = 1,$$

$\vec{e}$ – произвольный вектор, f – функция распределения. Для дальнейшего важно отметить, что вектор $\vec{e}$ может быть представлен как функция разности скоростей: $\vec{e} = \frac{1}{g}(\tilde{\vec{V}} - \tilde{\vec{V}}^1)$. Символ $d\Omega$ –элемент телесного угла вектора $\vec{e}$.

Теорема 9.I.

Уравнение Больцмана (9.I) инвариантно относительно

I) группы Галилея $G(1,3)$, если

$K = K(|\vec{V}-\vec{V}^1|)$ – дифференцируемая функция;

2) расширенной группы Галилея $\tilde{G}(1,3)$, если $K = |\vec{V}-\vec{V}^1|^s$,

$$(1-2\varkappa)s = 4\varkappa-\beta-3, \quad \varkappa \neq \frac{1}{2}, \quad \varkappa,\beta \in R^1,$$

или $K = K(|\vec{V}-\vec{V}_1|)$;

3) группы Шредингера, если $K=|\vec{V}-\vec{V}_1|^{-1}$.

Доказательство.

Поступая в соответствии с методом Эстабрука-Уолквиста (см. §6), находим, что координаты оператора симметрии X

$$X=\xi^{\mu}\partial_{\mu}+\tau^{a}\partial_{V_a}+\tau^{a}(V^1)\,\partial_{V_a^1}+\eta\,\partial_f$$

удовлетворяют уравнениям:

$$\tau^a_0+\tau^a_k V_k=0,$$

$$(\tau^a K_{V_a}+\tau^a(V_1)\,K_{V_a^1})(\tilde f^1\tilde f-f^1 f)+$$

$$+K(\tilde\eta^1\tilde f+\tilde f^1\tilde\eta-\eta^1 f-\eta f^1)+(\partial_{V_a^1}(\tau^a(V^1))+\tau^a_f(V^1)\,f_{V_a^1})\times \tag{9.2}$$

$$\times K(\tilde f^1\tilde f-f^1 f)=h\,K(\tilde f^1\tilde f-f^1 f),$$

$$\eta_0+V_k\eta_k=0,\quad \tau^k=\xi^k_0+\xi^k_i V_i-V_k(\xi^0_0+\xi^0_i V_i)$$

$$h=\partial_f\eta-\xi^{\mu}_f f_{\mu}-\tau^k_f f_{V_k}-\xi^0_0-\xi^0_i V_i\,.$$

Предположим, что координаты оператора X - аналитические функции, тогда из первого и третьего уравнений (9.2) следует, что

$$\begin{aligned}\xi^0&=Ax_0^2+B_k x_k x_0+C_{0\mu}x_{\mu}+C_0\\ \xi^k&=Ax_0x_k+B_i x_i x_k+C_{i\mu}x_{\mu}+C_i\end{aligned}\tag{9.3}$$

где A, B_k, $C_{\mu\nu}$, C_{μ} - зависят от f. Однако из второго из уравнений (9.2) следует, что $\tau^a_f=0$, а следовательно $\xi^{\mu}_f=0$. Преобразования порождаемые оператором X должны функцию от разности скоростей переводить в такую же функцию (возможно с некоторым множителем). Из операторов вида (9.3) таким свойством обладают только операторы из алгебры $Sch(1,3)$

$$\xi^0 = Ax_0^2 + 2dx_0 + C_0$$

$$\xi^k = Ax_0x_k + dx_k + G_kx_0 + C_{ki}x_i.$$

Ядро K находится из условия

$$\tau^a K_{V_a} + \tau^a(V_1) K_{V_a^1} + \partial_{V_a^1}(\tau^a(V^1))K = hK.$$

Подставив сюда координаты τ^k, нетрудно убедиться, что последнее утверждение теоремы (9.I) действительно имеет место.

Операторы (9.3) описывают максимальную алгебру инвариантности, и поэтому определены однозначно. Однако, если мы ограничимся не максимальной алгеброй, то появляется некоторый произвол. Например, оператор $\mathcal{D} = 2\varkappa x_0\partial_0 + x_a\partial_a + (1-2\varkappa)V^k\partial_{V^k} + \beta f\partial_f$ не принадлежит алгебре Шредингера, но тем не менее, уравнениям (9.2) удовлетворяет. Таким образом, уравнение (9.I) инвариантно относительно $\tilde{G}(1,3)$, если

$$K = |\vec{V} - \vec{V}^1|^s, \quad (1-2\varkappa)s = 4\varkappa - \beta - 3$$

$$\mathcal{D} = 2\varkappa x_0\partial_0 + x_a\partial_a + (1-2\varkappa)V_k\partial_{V_k} + \beta f\partial_f;$$

$$K = K(|\vec{V} - \vec{V}^1|), \quad \mathcal{D} = x_0\partial_0 + x_k\partial_k - f\partial_f.$$

Подставив эти выражения для координат оператора X в (9.2), можно убедиться, что второе утверждение также справедливо.

Если мы ограничимся только алгеброй $G(1,3)$, то координаты оператора X таковы

$$\xi^0 = C_0, \quad \xi^a = x_0G_a + G_{ai}x_i + C_a.$$

Подставив их в (9.2), убедимся в правильности первого утверждения. Теорема доказана.

Уравнение Больцмана (9.I) может быть переписано в виде /40,

§ 85/

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V}\,\mathrm{grad}\, f = \int P(\tilde{\vec{V}}_1, \tilde{\vec{V}} \,|\, \vec{V}_1, \vec{V})(\tilde{f}^1 \tilde{f} - f^1 f)\, d\tilde{\vec{V}}_1\, d\tilde{\vec{V}}\, d\vec{V}_1 \qquad (9.4)$$

Этот способ записи будет полезен в дальнейшем. Функция P называется плотностью вероятности процесса $\tilde{\vec{V}}_1 \tilde{\vec{V}} \to \vec{V}_1, \vec{V}$. Ядро P сингулярно: оно содержит δ - функции Дирака, обеспечивающие выполнение законов сохранения. Нерелятивистский случай определяется следующим выбором функции P :

$$P = \delta(\tilde{\vec{V}}_1 + \tilde{\vec{V}} - \vec{V}_1 - \vec{V})\, \delta(\tilde{\vec{V}}_1^2 + \tilde{\vec{V}}^2 - \vec{V}_1^2 - \vec{V}^2)\, \Pi(\tilde{V}_1 \tilde{V} \,|\, V_1, V), \qquad (9.5)$$

где Π - регулярная часть ядра. Теорема (9.2) показывает, как исследуется симметрия ИДУ при наличии в уравнении обобщенных функций.

Теорема 9.2.

Уравнение Больцмана (9.4) с ядром (9.5) инвариантно относительно группы Шредингера $Sch(1,3)$, если и только если

$$\Pi = |\vec{V}_1 - \vec{V}|^{-2}\, \Pi_1\left(\frac{Q_N}{|V_1 - V|}\right), \quad \vec{a} = \tilde{\vec{V}} - \vec{V}_1, \quad \vec{b} = \tilde{\vec{V}} - \vec{V},$$

$$Q_1 = |\tilde{\vec{V}} - V_1|,\ Q_2 = |\tilde{\vec{V}} - \vec{V}|,\ Q_3 = \vec{a}\cdot\vec{b},\ Q_4 = \vec{a}(\vec{V}_1 - \vec{V}),\ Q_5 = \vec{b}(\vec{V}_1 - \vec{V})$$

Доказательство.

Оператор симметрии ищем в виде

$$X = \xi^\mu \partial_\mu + \tau^a \partial_{V_a} + \tau^a(V_1)\partial_{V_1^a} + \tau^a(\tilde{V})\partial_{\tilde{V}_a} + \tau^a(\tilde{V}_1)\partial_{\tilde{V}_1^a} + \eta\,\partial_f .$$

Введем новые векторы $\vec{a} = \tilde{\vec{V}}_1 - \vec{V}_1$, $\vec{b} = \tilde{\vec{V}} - \vec{V}$. Тогда получим

$$\delta(\tilde{\vec{V}}_1 + \tilde{\vec{V}} - \vec{V}_1 - \vec{V}) = \delta(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\delta(\tilde{V}_1^2 + \tilde{V}^2 - V_1^2 - V^2) = \delta(2\vec{a}^2 - 2\vec{a}(\tilde{V} - \tilde{V}_1)).$$

Выберем поля $\mathcal{Y}$ (6.6′) в виде

$\vec{Y} = \partial_{\vec{b}}$, $\quad Y_0 = \dfrac{1}{4a - 2|V-V_1|\cos\theta}\,\partial_a$, $\quad \theta = (\widehat{\vec{a}, |\vec{V}_1 - \vec{V}}|)$,

$f = 2|a|^2 - 2|a||V-V_1|\cos\theta$.

Следовательно, форма, соответствующая подынтегральному выражению, такова

$$\Omega = K(\tilde{f}^1\tilde{f} - f^1 f)\frac{a^2\sin\theta}{4a - 2|V-V_1|\cos\theta}\,d\theta\, d\varphi\, d\vec{V}_1\, dx_0\, d\vec{x}$$

Поэтому форма ω, представляющая уравнение (9.3), имеет вид

$$\omega = (f_0 + \vec{V}\,\mathrm{grad} f)\,dx_0\, d\vec{x}\, dV - \Omega$$

Теперь, следуя §6, легко найти, что определяющие уравнения совпадают с (9.2). Нетрудно убедиться (подобно тому, как это сделано в т. 9.1), что форма ω инвариантна относительно операторов, образующих алгебру $Sch(1,3)$

$$\xi^0 = Ax_0^2 + 2dx_0 + C_0$$

$$\xi^i = Ax_0x_i + dx_i + G_ix_0 + C_{ik}x_k + C_i, \quad C_{ik} = -C_{ki}$$

Инвариантность относительно проективных преобразований влечет условие на Π $\quad (L_X\,\delta(f) = (\mathrm{div}X - Y_0\,L_X f)\,\delta(f) = -x_0\,\delta(f))$:

$$-x_0(u\,\Pi_u + Q_N\,\Pi_{Q_N}) - 4x_0\,\Pi = -2x_0\,\Pi \qquad u = |\vec{V} - \vec{V}_1|$$

$$\Pi = |\vec{V} - \vec{V}_1|^{-2}\,\Pi_1(Q_N/|\vec{V} - \vec{V}_1|).$$

Здесь Q_N – инварианты группы $G(1,3)$

$$Q_1 = |\vec{a}|,\ Q_2 = |\vec{b}|,\ Q_3 = \vec{a}\cdot\vec{b},\ Q_4 = (\vec{V}_1 - \vec{V}, \vec{a}),\ Q_5 = (\vec{V}_1 - \vec{V}, \vec{b})$$

Теорема доказана.

Доказанные теоремы об инвариантности уравнения Больцмана не исчерпывают симметрийных свойств этого уравнения. Причина заключается в том, что симметрийные свойства зависят от выбора ядра уравнения (9.4). Выбор подходящей структуры ядра позволяет реализовать иные, отличные от описанных выше, алгебр инвариантности уравнения (9.4).

Выберем P в виде

$$P=\delta(u+v-u'-v')\ \delta(u_\mu u^\mu-1)\,\delta(v_\mu v^\mu-1)\,\delta(u'_\nu u'^\nu-1)\times$$

$$\times\delta(v'_\nu v'^\nu-1)\ \Pi(u'_\mu, v'_\mu \,|\, u_\mu, v_\mu), \tag{9.6}$$

где u , v , v' , u' – хорошо известные четыре-скорости частиц:

$$u=\left(\frac{1}{(1-\vec{u}^{\,2})^{1/2}}, \frac{\vec{u}}{(1-\vec{u}^{\,2})^{1/2}}\right), \quad v=\left(\frac{1}{(1-\vec{v}^{\,2})^{1/2}}, \frac{\vec{v}}{(1-\vec{v}^{\,2})^{1/2}}\right),$$

$$u'=\left(\frac{1}{(1-\vec{u}'^{\,2})^{1/2}}, \frac{\vec{u}'}{(1-\vec{u}'^{\,2})^{1/2}}\right), \; v'=\left(\frac{1}{(1-\vec{v}'^{\,2})^{1/2}}, \frac{\vec{v}'}{(1-\vec{v}'^{\,2})^{1/2}}\right).$$

Само уравнение Больцмана, очевидно, можно переписать в новых терминах : $f=f(x,v)$, $f'=f(x,u)$, $\tilde f=f(x,v')$, $\tilde f'=f(x,u')$

$$v_\mu f_\mu = \int P(\tilde f'\tilde f - f'f)\,d^4u\,d^4u'\,d^4v'. \tag{9.7}$$

Теорема (9.3)

Уравнение Больцмана (9.7) с ядром (9.6) инвариантно относительно расширенной группы Пуанкаре, если и только если Π зависит от инвариантов группы Пуанкаре, построенных из u , u' , v , v'.

Доказательство.

Определим форму, представляющую интегральную часть уравнения (9.7). Следуя § 6, выберем поля Y (6.6$'$) в виде

$$Y_1=\frac{1}{2u_0}\,\partial_{u_0}, \; Y_2=\frac{1}{2v_0'}\,\partial_{v_0'}, \; Y_3=\frac{1}{2u_0'}\,\partial_{u_0'}, \; Y_{3+i}=\frac{\partial}{u_i'}.$$

Тогда искомую форму Ω можно записать в виде

$$\Omega=\delta\Big((1-\vec{u}^{\,2})^{1/2}+(1-\vec{v}^{\,2})^{1/2}+(1-\vec{v}'^{\,2})^{1/2}+(1-(\vec{u}+\vec{v}-\vec{v}')^2)^{1/2}\Big)\,\Pi(\tilde f'\tilde f-f'f).$$

Таким образом, форма ω , представляющая уравнение (9.7), равна

$$\omega=v_\mu f_\mu\,dx\,dv-\Omega\,\frac{d\vec{v}'}{2v_0'}\,\frac{d\vec{u}}{2u_0}\,dx\,dv.$$

Следуя изложенному выше методу, находим условия инвариантности уравнения (9.7)

$$X = \xi^{\mu}\partial_{\mu} + \tau^{\alpha}\partial_{V_\alpha} + \eta\partial_f$$

$$V_{\mu}\eta_{\mu} = 0, \qquad \tau_0^a + V_K \tau_K^a = 0. \tag{9.9}$$

$$\left(\tau^{\mu}(v)\Pi_{V_\mu} + \tau^{\mu}(u)\Pi_{u_\mu} + \tau^{\mu}(u')\Pi_{u'_\mu} + \tau^{\mu}(V')\Pi_{V'_\mu}\right)\delta\cdot(\tilde{f}'\tilde{f} - f'f) +$$
$$+ \delta\cdot\Pi\cdot(\tilde{\eta}'\tilde{f} + \tilde{\eta}\tilde{f}' - \eta' f - \eta f') + \left[h_1\delta\cdot\Pi + \frac{\partial_{V'_K}(\tau^K(V'))}{2V_0'} + \frac{\partial_{u_K}(\tau^K(u))}{2u_0}\right]\times$$
$$\times(\tilde{f}'\tilde{f} - f'f) - \delta\cdot\Pi\left(\frac{\tau_0(V')}{2V_0'^2} + \frac{\tau_0(u)}{2u_0^2}\right)(\tilde{f}'\tilde{f} - f'f) = h\,\delta\cdot\Pi(\tilde{f}'\tilde{f} - f'f)$$

$$h = \eta_f - f_{\mu}\xi_f^{\mu} - f_{V_K}\tau_f^K - (\xi_0^0 + \xi_i^0 V_i).$$

Здесь δ – краткое обозначение δ– функции в (9.8); τ^{α}, ξ^{μ}, η– координаты оператора симметрии; h – функция (6.7), определяющая инфинитезимальное изменение распределения δ. Из доказательства т.9.I следует, что из возможных преобразований (9.3) только преобразования Лоренца и дилатации сохраняют δ. Эти преобразования задаются операторами

$$T_{\nu} = \partial_{\nu}, \qquad J_{0a} = x_0 T_a + x_a T_0, \quad J_{iK} = x_i T_K - x_K T_i,$$
$$\mathcal{D} = x_{\mu}T_{\mu} + f\partial_f. \tag{9.10}$$

Следовательно, закон преобразования скорости таков:

$$V^K \to \tilde{V}^K = V^K + \varepsilon\tau^K, \quad \tau^K = C_{0K} - C_{0i}V_K V_i + C_{Ki}V_i$$

Поэтому функция h_1 равна (для поворота J_{0a})

$$h_1 = \frac{1}{g_1}\partial_{u_1}\left(\tau^K g_{V_K} + \tau^K(u)g_{u_K} + \tau^K(V')g_{V'_K}\right) =$$

$$= \frac{1}{g_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(-u_a - V_a + V_a' + (u_a + V_a - V_a')\right) \equiv 0,$$

$$g = (1-\vec{u}^2)^{1/2} + (1-\vec{v}^2)^{1/2} - (1-(\vec{u}+\vec{v}-\vec{v}')^2)^{1/2} - (1-\vec{v}'^2)^{1/2}, \quad g_1 = \frac{\partial g}{\partial u_1}.$$

Таким образом, для Π получаем уравнение

$$(\tau^{\mu}(v)\,\Pi_{v_\mu} + \tau^{\mu}(u)\,\Pi_{u_\mu} + \tau^{\mu}(u')\,\Pi_{u'_\mu} + \tau^{\mu}(v')\,\Pi_{v'_\mu})(\tilde{f}^1\tilde{f} - f^1 f) +$$

$$+ \Pi(\tilde{\eta}'\tilde{f} + \tilde{\eta}\tilde{f}' - \eta f' - \eta' f) = h\,\Pi(\tilde{f}'\tilde{f} - f'f),$$

$h = \partial_f \eta - \xi^0_0 = \beta - 1$. Отсюда получаем $\beta = -1$, $\Pi = \Pi(Q_A)$;
$Q_1 = (u,v)$, $Q_2 = (u,v')$, $Q_3 = (u,u')$, $Q_4 = (v,v')$, $Q_5 = (v,u')$,
$Q_6 = (v',u')$, где $(u,v) \equiv u_\mu v^\mu$.

Таким образом, доказано, что операторы (9.10), образуют максимальную алгебру инвариантности уравнения (9.7).

Следовательно, уравнение Больцмана инвариантно как относительно галилеевских, так и лоренцовских преобразований, при соответствующем выборе ядра.

Перейдем теперь к теоретико-групповому изучению уравнений Власова /14/

$$\begin{gathered} f_0 + v_i f_i + [E_i + (\vec{v}\times\vec{H})_i]\, f_{v_i} = 0 \\ \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\vec{H} - \vec{j}, \qquad \operatorname{div}\vec{E} = \rho, \\ \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\vec{E}, \qquad \operatorname{div}\vec{H} = 0, \\ \rho = \int f\, d^3v, \qquad \vec{j} = \int \vec{v} f\, d^3v. \end{gathered} \tag{9.11}$$

Система уравнений Власова очень важна во многих разделах физики, поскольку описывает взаимодействие ансамбля заряженных частиц с электромагнитным полем.

Теорема 9.4.

Максимальная алгебра инвариантности уравнений Власова (9.II) есть алгебра Ли, образованная операторами:

$$T_\mu = \partial_\mu, \quad \mathcal{D} = x_\mu \partial_\mu - E_K \partial_{E_K} - H_K \partial_{H_K} - 2f\partial_f$$

$$J_{iK} = x_i T_K - x_K T_i - (V_i \partial_{V_K} - V_K \partial_{V_i}) - E_i \partial_{E_K} - E_K \partial_{E_i} - H_i \partial_{H_K} - H_K \partial_{H_i}$$

Доказательство.

Выпишем дифференциальные формы, представляющие уравнения Максвелла /64/ и уравнения для функции распределения

$$\Omega_1 = d\vec{H}\, d\vec{S} + d\vec{E}\, d\vec{x}\, dx_0, \qquad (d\vec{S})_i = \varepsilon_{ijK}\, dx_j\, dx_K,$$

$$\Omega_2 = d\vec{E}\, d\vec{S} - d\vec{H}\, d\vec{x}\, dx_0 + f(V_1\, dx_2\, dx_3\, dx_0 + V_2\, dx_3\, dx_1\, dx_0 +$$

$$+ V_3\, dx_1\, dx_2\, dx_0 - dx_1\, dx_2\, dx_3)\, dV,$$

$$\Omega_3 = [f_0 + V_i f_i + [E_i + (\vec{V}\times\vec{H})_i] f_{V_K}\, d^4x\, d^3V,$$

$$\Omega_4^K = dE^K - E^K_\alpha dx_\alpha, \quad \Omega_5^K = dH^K - H^K_\alpha dx_\alpha, \quad \tilde{\Omega}_4^K = d\Omega_4^K, \quad \tilde{\Omega}_5^K = d\Omega_5^K,$$

$$\Omega_6 = df - f_\alpha dx_\alpha - f_{V_K} dV_K.$$

Из условия инвариантности (6.2) после громоздких вычислений получаем следующие уравнения для координат оператора симметрии X

$$X = \xi^\mu \partial_\mu + \pi^K \partial_{V_K} + \eta^K \partial_{E^K} + \tau^K \partial_{H_K} + R\,\partial_f$$

$$\xi^\alpha_{E^K} = \xi^\alpha_{H^K} = \xi^\alpha_f = 0, \quad \xi^i_K + \xi^K_i = 0, \quad \xi^0_K - \xi^K_0 = 0,$$

$$\xi_0^0 = \xi_1^1 = \xi_2^2 = \xi_3^3 = -\frac{\partial \eta^1}{\partial E^1} = -\frac{\partial \tau^1}{\partial H^1} = -\frac{\partial \eta^2}{\partial E^2} = -\frac{\partial \tau^2}{\partial H^2} = -\frac{\partial \eta^3}{\partial E^3} = -\frac{\partial \tau^3}{\partial H^3},$$

$$\xi_k^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial E^k} = \frac{\partial \tau^i}{\partial H^k}, \quad \xi_a^0 = \varepsilon_{abc}\, \partial_{H^b}(\eta^c) = -\varepsilon_{abc}\, \partial_{E^b}(\tau^c),$$

$$\xi_{ks}^0 = \xi_{00}^i = 0, \quad \xi_{00}^0\, \delta_{in} = 2\,\xi_{0n}^i, \quad \xi_{ks}^i = \delta_{is}\, \xi_{0k}^0.$$

Отсюда находим, что

$$\xi^0 = d\,x_0 + C_0, \quad \xi^k = C_{ki}\, x_i + d\,x_k + C_k, \quad C_{ki} = -C_{ik},$$

$$\eta^k = C_{ki}\, E^i - d\cdot E^k, \quad \tau^k = C_{ki}\, H^i - d\cdot H^k, \quad R = -2d\cdot f.$$

Теорема доказана.

Таким образом, уравнения Власова (9.II) не инвариантны ни относительно преобразований Галилея, ни относительно преобразований Лоренца. Следовательно, необходимо описать систему уравнений типа (9.II), которая удовлетворяла хотя бы одному принципу относительности. Рассмотрим систему уравнений, образованную уравнением для функции распределения f и уравнениями Леви-Леблонда /70/

$$\begin{gathered} f_0 + V_i f_i + E_k f_{V_k} = \int K(|\vec{V} - \vec{V}^1|)(\tilde{f}^1 \tilde{f} - f^1 f)\, d\Omega\, d\vec{V}^1, \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \rho, \quad \operatorname{div} \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \end{gathered} \tag{9.I2}$$

$\rho, \vec{j}$ определены в (9.II); $\tilde{f}^1$, $\tilde{f}$, f^1 – определены в (9.I).

Теорема 9.5.

Система уравнений (9.I2) инвариантна относительно алгебры Ли расширенной группы Галилея $\tilde{G}(1,3)$.

Доказательство.

Оператор симметрии ищем в виде

$$X = \xi^{\mu}\partial_{\mu} + \pi^{i}\partial_{V_i} + \tau^{a}\partial_{E^a} + \eta^{a}\partial_{H^a} + R\partial_f .$$

После вычислений получаем следующую систему дифференциальных уравнений для ξ^{μ}, π^{i}, τ^{a}, η^{a}, R

$$\xi^a_b + \xi^b_a = 0\ (a \neq b), \quad \xi^a_b = \frac{\partial \tau^a}{\partial E^b} = \frac{\partial \eta^a}{\partial H^b}, \ a, b = \overline{1,3},$$

$$\pi^k = \xi^k_0 + \xi^k_i V_i - V_k(\xi^0_0 + \xi^0_i V_i),$$

$$\xi^0_0 = \xi^a_a = -\frac{\partial \tau^a}{\partial E^a} = -\frac{\partial \eta^a}{\partial H^a} = -\frac{\partial R}{\partial f}, \quad \frac{\partial \xi^a}{\partial x_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\frac{\partial \eta^b}{\partial E^c}.$$

Эти уравнения определяют координаты оператора X

$$\xi^0 = \mathcal{D}x_0 + C_0,$$

$$\xi^a = \mathcal{D}x_a + C_{ab}x_b + G_a x_0 + C_a \qquad C_{ab} = -C_{ba}, \ a, b = \overline{1,3}$$

$$\tau^a = C_{ab}E^b - \mathcal{D}E^a, \qquad R = -\mathcal{D}f,$$

$$\eta^a = C_{ab}H^b - \mathcal{D}H^a - \varepsilon_{abc}G_b E_c, \quad \pi^a = C_{ab}V_b + G_a .$$

Теорема доказана.

Таким образом, мы показали, что уравнения Власова (9.12) удовлетворяют принципу относительности Галилея. Уравнения (9.11) можно изменить таким образом, что они станут Пуанкаре-инвариантными. Рассмотрим следующую систему уравнений

$$V_\mu f_\mu + F_\mu f_{V_\mu} = \int P(\tilde{f}^1\tilde{f} - f^1 f)\, d^4u\, d^4u'\, d^4V',$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\vec{H} - \vec{j}, \quad \mathrm{div}\,\vec{H} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\vec{E}, \quad \operatorname{div}\vec{E} = j_0, \quad j_\mu = \int\limits_{V_\mu V^\mu = 1} V_\mu f \, d^4V. \tag{9.13}$$

Ядро P определяется формулой (9.6).

Функция F описывает силу, действующую на частицу: $F = (F_0, F_1, F_2, F_3)$. В случае электромагнитного поля эта сила такова: $F = (\vec{V}\vec{E}, \vec{E}V_0 + \vec{V}\times\vec{H})$ (V - релятивистская скорость!)

Теорема 9.6. Уравнения Власова (9.13) инвариантны относительно расширенной группы Пуанкаре $\widetilde{P}(1,3)$.

Доказательство.

Оператор X ищем в виде

$$X = \xi^\mu \partial_\mu + \pi^\mu \partial_{V_\mu} + \eta^a \partial_{E^a} + \tau^a \partial_{H^a} + R\,\partial_f.$$

Выпишем систему форм, представляющую уравнения (9.13)

$$\Omega_1 = dH_a\, \varepsilon_{abc}\, dx_b\, dx_c + dE_i\, dx_i\, dx_0,$$

$$\Omega_2 = dE^a \varepsilon_{abc}\, dx_b\, dx_c - dH^i\, dx_i\, dx_0 +$$

$$+ f(V_1 dx_2 dx_3 dx_0 + V_2 dx_3 dx_1 dx_0 + V_3 dx_1 dx_2 dx_0 - V_0 dx_1 dx_2 dx_3) d$$

$$\Omega_3 = (V_\mu f_\mu + F_\mu f_{V_\mu})\, d^4x\, d^4V.$$

Из условия инвариантности (6.2) находим, что

$$\xi^0_a - \xi^a_0 = 0, \quad \xi^i_k + \xi^k_i = 0\,(i \neq k), \quad \xi^\alpha_{\mu\nu} = 0, \quad i,k = \overline{1,3},$$

$$\xi^0_0 = \xi^1_1 = \xi^2_2 = \xi^3_3 = -\frac{\partial \eta^i}{\partial E^i} = -\frac{\partial \tau^i}{\partial H^i} = -\frac{\partial R}{\partial f},$$

$$\xi^i_k = \frac{\partial \eta^i}{\partial E^k} = \frac{\partial \tau^i}{\partial H^k}, \quad \xi^0_a = -\varepsilon_{abc}\frac{\partial \eta^b}{\partial H^c} = \varepsilon_{abc}\frac{\partial \tau^b}{\partial E^c}.$$

Следовательно, генераторы алгебры $\widetilde{P}(1,3)$ таковы:

$$\xi^{\mu} = C_{\mu\nu} x_{\nu} + \mathcal{D} x_{\mu} + C_{\mu}, \quad C_{00} = C_{11} = C_{22} = C_{33} = 0, \quad C_{0a} = C_{a0},$$
$$C_{ab} = -C_{ba}, \quad a, b = \overline{1,3},$$

$$T_{\nu} = \partial_{\nu},$$

$$J_{ab} = x_a T_b - x_b T_a + E_a \partial_{E_b} - E_b \partial_{E_a} + H_a \partial_{H_b} - H_b \partial_{H_a} + V_a \partial_{V_b} - V_b \partial_{V_a}$$

$$J_{0a} = x_0 T_a + x_a T_0 + \varepsilon_{abc} \left(E_b \partial_{H_c} - H_b \partial_{E_c} \right) + V_0 \partial_{V_a} + V_a \partial_{V_0}$$

$$\mathcal{D} = x_{\mu} T_{\mu} - \left(E_a \partial_{E_a} + H_a \partial_{H_a} + f \partial_f \right).$$

Теорема доказана.

Таким образом уравнения (9.13) удовлетворяют принципу относительности Лоренца-Пуанкаре-Эйнштейна. В заключение этого параграфа изучим симметрийные свойства уравнения Ландау /3, гл. II/. Уравнение Ландау описывает функцию распределения разреженного, слабо взаимодействующего газа.

$$f_0 + V_1^k f_k = C \int \partial_{12}^r \left(\frac{g^2 \delta_{rs} - g^r g^s}{g^3} \right) \partial_{12}^s f(V_1) f(V_2)\, dV_2$$
$$\vec{g} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2, \quad g = |\vec{g}|, \quad \partial_{12}^r = \frac{\partial}{\partial V_1^r} - \frac{\partial}{\partial V_2^r}. \qquad (9.14)$$

Теорема 9.7.

Уравнение Ландау (9.14) инвариантно относительно расширенной группы Галилея $\widetilde{G}(1,3)$. Алгебра $\widetilde{G}(1,3)$ образована операторами

$$T_{\nu} = \partial_{\nu}, \qquad G_a = x_0 T_a + \partial_{V_1^a} + \partial_{V_2^a},$$

$$J_{ab} = x_a T_b - x_b T_a + V_a \partial_{V_b} - V_b \partial_{V_a},$$

$$\mathcal{D} = \alpha x_0 T_0 + x_a T_a - \alpha f \partial_f, \ \alpha \in R^1.$$

Теорема 9.7 доказывается аналогично предыдущим утверждениям.

Таким образом, в настоящем параграфе изучены симметрийные свойства уравнений статистической физики, таких, как уравнения Больцмана, Власова, Ландау. Показано, что уравнения Больцмана инвариантно относительно алгебры Шредингера, если ядро интеграла столкновений выбрано в виде (9.5) или относительно расширенной алгебры Пуанкаре, если ядро интеграла выбрано в виде (9.6). Установлено, что уравнения Власова (9.11) не инвариантны ни относительно группы Галилея, ни относительно группы Пуанкаре. Однако уравнения Власова можно изменить таким образом, что они станут либо галилеевски, либо релятивистски инвариантными. Этими свойствами обладают уравнения (9.12) и (9.13) соответственно.

§10. Законы сохранения для некоторых интегро-дифференциальных уравнений.

Рассмотрим сначала уравнение вида

$$\Box\varphi + f(\varphi) + \lambda \int K((x-y)^2, \varphi(y))\,dy = 0. \qquad (10.1)$$

Обозначим

$$\omega = dp_0\, dx_1 dx_2 dx_3 + dp_1 dx_0 dx_2 dx_3 - dp_2 dx_0 dx_1 dx_3 + $$
$$+ dp_3 dx_0 dx_1 dx_2 + f\, dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 .$$

По методу, изложенному выше, следует найти такую функцию g переменных $\mathscr{x}$, φ, p_α, $\alpha=\overline{0,2}$, чтобы класс эквивалентности $[\Omega]$

$$[\Omega] = g(\omega + \lambda K dy\, dx) + \theta \wedge X + T \wedge Y$$

содержал замкнутую форму, т.е. $d[\Omega] = 0$. Формы ω и $K dy\, dx$ разных степеней; найдем g, применяя этот метод к форме ω. Уравнение для g имеет вид

$$L_1(g\omega) + d_\pi \circ \partial_{x_\alpha} \wedge \partial_{p_\alpha} \circ d_{g\mathscr{x}}(g\omega) = 0 .$$

Получаем

$$g_\varphi \omega - g f_\varphi dx_0 dx_1 dx_2 + D_\alpha D_\alpha(g)\, dV + D_{p_\alpha} D_0(g)\, dp_\alpha dx_1 dx_2 +$$

$$D_{p_\alpha} D_1(g)\, dp_\alpha dx_0 dx_2 - D_{p_\alpha} D_2(g)\, dp_\alpha dx_0 dx_1 +$$

$$+ dp_0 \wedge (D_\alpha D_{p_1}(g)\, dx_\alpha dx_2 - D_\alpha D_{p_2}(g)\, dx_\alpha dx_1)$$

$$+ dp_1 \wedge (D_\alpha D_{p_0}(g)\, dx_\alpha dx_2 - D_\alpha D_{p_2}(g)\, dx_\alpha dx_0) -$$

$$- dp_2 \wedge (D_\alpha D_{p_0}(g)\, dx_\alpha dx_1 - D_\alpha D_{p_1}(g)\, dx_\alpha dx_0) +$$

$$+ dp_0 \wedge (D_{p_\alpha} D_{p_1} g\, dp_\alpha dx_2 - D_{p_\alpha} D_{p_2}(g)\, dp_\alpha dx_1) +$$

$$dp_1 \wedge (D_{p_\alpha} D_{p_0}(g)\, dp_\alpha dx_2 - D_{p_\alpha} D_{p_2}(g)\, dp_\alpha dx_1) -$$

$$- dp_2 \wedge (D_{p_\alpha} D_{p_0}(g)\, dp_\alpha dx_1 - D_{p_\alpha} D_{p_1}(g)\, dp_\alpha dx_0) -$$

$$-(f_\varphi\, p_\alpha D_{p_\alpha}(g) - f D_\alpha D_{p_\alpha}(g))\, dx_0\, dx_1\, dx_2 -$$

$$- f[D_{p_\alpha} D_{p_0}(g)\, dp_\alpha\, dx_1\, dx_2 - D_{p_\alpha} D_{p_1}(g)\, dp_\alpha\, dx_0\, dx_2 +$$

$$+ D_{p_\alpha} D_{p_2}(g)\, dp_\alpha\, dx_0\, dx_1] = 0, \quad D_{p_\mu} = \frac{\partial}{\partial p_\mu}, \quad D_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + p_\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Приравнивая члены при базисных формах, находим, что

$$g = C_{\alpha\beta}\, x_\alpha p_\beta + C_\alpha p_\alpha, \quad C_{0k} = C_{k0}, \; C_{ik} = -C_{ki}, \; C_{00} = 0, \; i,k = \overline{1,2}.$$

Вычислив интеграл (6.10), можно найти явный вид законов сохранения ρ. Найдем теперь форму $\widetilde{K}$ (см. (6.11)) такую, что

$$d\widetilde{K} = gK + \theta_i x_i + T_i y_i.$$

Ввиду громоздкости, мы выпишем только формы сохранения, отвечающие C_α – т.е. законы сохранения энергии-импульса.

Ищем $\widetilde{K}$ в виде

$$\widetilde{K} = K^\mu dy (dx)^\mu + R^\mu (dy)^\mu dx,$$

$$K^\mu dy (dx)^\mu \equiv dy \wedge (K^0 dx_1 dx_2 + K^1 dx_0 dx_2 + K^2 dx_0 dx_1),$$

$R^\mu (dy)^\mu dx$ имеет аналогичный смысл. Выберем

$$K^\mu = C_\mu \varphi(x) K(x-y, \varphi(y)), \quad R^\mu = C_\mu \varphi(y) K(x-y, \varphi(x)).$$

Следовательно,

$$d\widetilde{K} = C_\mu [p_\mu(x) K(x-y, \varphi(y)) + p_\mu(y) K(x-y, \varphi(x)) +$$

$$+ \varphi(x) K_{x_\mu}(x-y, \varphi(y)) + \varphi(y) K_{y_\mu}(x-y, \varphi(x))]\, dy\, dx + \theta_\mu X_\mu.$$

Члены вида

$$B = C_\mu [p_\mu(x) K(x-y, \varphi(y)) + p_\mu(y) K(x-y, \varphi(x))] +$$

$$+ [\varphi(x) K_{x_\mu}(x-y, \varphi(y)) + \varphi(y) K_{y_\mu}(x-y, \varphi(x))] C_\mu = B' + B''$$

не могут быть представлены в виде $B = \theta_\mu S_\mu$. Следовательно $B'' = 0$. Но из этого условия видно, что $K(x, y, \varphi(y)) = K(x,y)\varphi(y)$ $K(x,y) = K(y,x)$, причем $K_{x_\mu} + K_{y_\mu} = 0$.

Поэтому приходим к выводу, что законы сохранения энергии-импульса существуют только, если $K(x, y, \varphi(y)) = K((x_0-y_0)^2, (x_1-y_1)^2, (x_2-y_2)^2, (x_3-y_3)^2)\varphi(y)$. Выпишем теперь явно законы сохранения энергии-импульса:

$$\rho_E = p_0(p_0 dx_1 dx_2 dx_3 + p_1 dx_0 dx_2 dx_3 - p_2 dx_0 dx_1 dx_3 + p_3 dx_0 dx_1 dx_2)$$

$$-\varphi\Big(dp_1 dx_2 dx_3 - dp_2 dx_1 dx_3 + dp_3 dx_1 dx_2 - \frac{\varphi^s}{s+1} dx_1 dx_2 dx_3\Big) +$$

$$+ \frac{\lambda}{2}\Big[\varphi(x) K((x-y, x-y))\varphi(y) dy\, d\vec{x} + \varphi(y) K((x-y, x-y))\varphi(x) d\vec{y}\, dx\Big].$$

Здесь принято, что $f(\varphi) = \varphi^s$.

$$\rho_{p_1} = p_1(p_0 dx_1 dx_2 dx_3 + p_1 dx_0 dx_2 dx_3 - p_2 dx_0 dx_1 dx_3 + p_3 dx_0 dx_1 dx_2)$$

$$+\varphi\Big(dp_0 dx_1 dx_3 - dp_1 dx_0 dx_3 - dp_3 dx_0 dx_1 + \frac{\varphi^s}{s+1} dx_0 dx_1 dx_3\Big) +$$

$$+ \frac{\lambda}{2}\Big[\varphi(x) K((x-y, x-y))\varphi(y) dy\, dx_0 dx_2 dx_3 + \varphi(y) K((x-y, x-y))\varphi(x) \cdot$$

$$dy_0 dy_1 dy_3\, dx\Big],$$

$$\rho_{p_2} = p_2(p_0 dx_1 dx_2 dx_3 + p_1 dx_0 dx_2 dx_3 - p_2 dx_0 dx_1 dx_3 + p_3 dx_0 dx_1 dx_2)$$

$$+\varphi\Big(dp_0 dx_1 dx_3 - dp_1 dx_0 dx_3 - dp_3 dx_0 dx_1 + \frac{\varphi^s}{s+1} dx_0 dx_1 dx_3\Big)$$

$$+ \frac{\lambda}{2}\Big[\varphi(x) K((x-y, x-y))\varphi(y) dy\, dx_0 dx_1 dx_3 +$$

$$+ \varphi(y) K((x-y, x-y))\varphi(x) dy_0 dy_1 dy_3 dx\Big],$$

$$\rho_{p_3} = p_3(p_0 dx_1 dx_2 dx_3 + p_1 dx_0 dx_2 dx_3 - p_2 dx_0 dx_1 dx_3 + p_3 dx_0 dx_1 dx_2)$$

$$-\varphi\Big(dp_0 dx_1 dx_2 + dp_1 dx_0 dx_2 - dp_2 dx_0 dx_1 + \frac{\varphi^s}{s+1} dx_0 dx_1 dx_2\Big) +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \left[\varphi(x) K((x-y, x-y)) \varphi(y)\, dy\, dx_0\, dx_2\, dx_1 + \right.$$

$$\left. + \varphi(y) K((x-y, x-y)) \varphi(x)\, dy_0\, dy_2\, dy_1\, dx \right].$$

Эти же законы сохранения можно записать в виде, обычно используемом в физике:

$$E = \int \left(\varphi_0^2 + \varphi_i \varphi_i + \frac{1}{s+1} \varphi^{s+1} \right) d\vec{x} + \lambda \int \varphi(x) K((x-y, x-y)) \varphi(y)\, dy\, d\vec{x},$$

$$\vec{P} = \int (\mathrm{grad}\, \varphi) \cdot \varphi_0\, d\vec{x}.$$

Опишем теперь законы сохранения для нелинейного уравнения типа Шредингера

$$\begin{gathered} i \Psi_0 + \Delta \Psi + f(\bar{\Psi}, \Psi) \Psi + \lambda \int_{R^4} K(x, y, \bar{\Psi}(y), \Psi(y))\, dy = 0 \\ -i \bar{\Psi}_0 + \Delta \bar{\Psi} + \bar{f}(\bar{\Psi}, \Psi) \bar{\Psi} + \lambda \int_{R^4} \bar{K}(x, y, \bar{\Psi}(y), \Psi(y))\, dy = 0. \end{gathered} \qquad (10.2)$$

Здесь $\bar{\Psi}$ – комплексно сопряженная к Ψ функция, $\Psi = \Psi(x_0, \vec{x})$. Ввиду громоздкости расчетов проделаем детальные выкладки для случая $(x_0, x_1) = x$, $(y_0, y_1) = y$.

Законы сохранения для четырехмерного случая приведем в виде, используемом в физике.

Дифференциальные формы, представляющие уравнение (10.2) в двумерном случае, таковы

$$\tilde{\Omega}_1 = i p_0\, dV + dp_1\, dx_0 + F(\bar{u}, u) u\, dV + \lambda K\, dy\, dV = \Omega_1 + \lambda K\, dy\, dV,$$

$$\tilde{\Omega}_2 = -i \bar{p}_0\, dV + d\bar{p}_1\, dx_0 + F(\bar{u}\, u) \bar{u}\, dV + \lambda \bar{K}\, dy\, dV = \Omega_2 + \lambda \bar{K}\, dy\, dV$$

$$dV = dx_0\, dx_1, \quad \bar{F} = F, \quad \theta_1 = du - p_\alpha\, dx_\alpha, \quad d\theta_1 = T_1$$

$\theta_2 = d\bar{u} - \bar{p}_\alpha dx_\alpha$, $T_2 = d\theta_2$.

Необходимо найти такие функции g и ϕ, чтобы форма $\rho = g\mathcal{R}_1 + \phi\tilde{\mathcal{R}}_2 + \theta_i X_i + T_i Y_i$ была замкнута. Найдем такие g и ϕ для форм $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$. Обозначим A^α, B^α следующие выражения

$$A^0 = (ip_0 + Fu)g_{p_1} + (-i\bar{p}_0 + F\bar{u})\phi_{p_1} + D_1(g),$$

$$A^1 = (i\bar{p}_0 - F\bar{u})\phi_{p_0} - (ip_0 + Fu)g_{p_0} - ig,$$

$$B^0 = (ip_0 + Fu)g_{\bar{p}_1} + (-i\bar{p}_0 + F\bar{u})\phi_{\bar{p}_1} + D_1(\phi),$$

$$B^1 = (i\bar{p}_0 - F\bar{u})\phi_{\bar{p}_0} - (ip_0 + Fu)g_{\bar{p}_0} + i\phi, \quad D_\alpha = \partial_{x_\alpha} + p_\alpha\partial_u + \bar{p}_\alpha\partial_{\bar{u}}.$$

Условия замкнутости (6.5) приводят к следующей системе уравнений:

$$B^0_{p_0} + \partial_u Y^2 - \partial_{\bar{u}} Y^1 = 0 \qquad g_{\bar{p}_1} = \phi_{p_1}, \quad B^1_{p_0} = 0$$

$$B^0_{p_1} - D_0(g_{\bar{p}_0}) + g_{\bar{u}} = 0 \qquad B^0_{\bar{p}_0} = 0$$

$$B^1_{p_1} - D_1(g_{p_0}) + \partial_u Y^2 - \partial_{\bar{u}} Y^1 = 0 \qquad B^1_{\bar{p}_0} = 0$$

$$B^0_{p_1} - D_0(\phi_{\bar{p}_0}) + \phi_{\bar{u}} = 0 \qquad B^1_{\bar{p}_1} - D_1(\phi_{p_0}) = 0$$

$$A^0_{\bar{p}_0} - (\partial_u Y^2 - \partial_{\bar{u}} Y^1) = 0 \qquad A^0_{p_0} = A^1_{p_0} = 0$$

$$A^0_{p_1} - D_0(g_{p_0}) + g_u = 0 \qquad A^1_{\bar{p}_0} = 0$$

$$A^0_{\bar{p}_1} - D_0(\phi_{p_0}) + \phi_u = 0 \qquad A^1_{p_1} - D_1(g_{p_0}) = 0.$$

$$A^1_{\bar p_1} - D_1(\Phi_{p_0}) + \partial_{\bar u} Y^1 - \partial_u Y^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$g = E\bar p_0 + (2i\,Gx_0 + T)\bar p_1 + (Gx_1 + C)\bar u,$$

$$\phi = Ep_0 + (2iGx_0 - T)p_1 - (Gx_1 + C)u.$$

В четырехмерном случае функции g, ϕ имеют аналогичный вид

$$g = E\bar p_0 + (2i\,G_a x_0 + T_a)\bar p_a + (G_a x_a + C)\bar u + C_{ab} x_a \bar p_b,$$

$$\phi = E\,p_0 + (2i\,G_a x_0 - T_a)p_a - (G_a x_a + C)u - C_{ab} x_a p_b,$$

E, T_a, G_a, C, C_{ab} – некоторые постоянные. Таким образом пространство законов сохранения одиннадцатимерное и образовано законами сохранения энергии, импульса, момента импульса, заряда и галилеевскими законами сохранения.

Анализ интегрального члена может быть проведен также, как в предыдущем примере. Ядро $K(x, y, \Psi(y), \bar\Psi(y))$ должно иметь вид $K(x, y)\,\Psi(y)$ для первого из уравнений (10.2) и $\bar K(x, y)\,\bar\Psi(y)$ для сопряженного. Пользуясь теоремой (7.2), выберем $K(x, y)$ в виде $K(x, y) = \exp\left(\frac{i(x_1 - y_1)^2}{2(x_0 - y_0)}\right)\cdot\phi(|z_0|)$. Считая, что $F(\bar\Psi, \Psi) = (\bar\Psi\,\Psi)^s$, законы сохранения можно записать следующим образом

$$\rho_E = \frac{1}{2}(\bar p_0 p_1 + p_0 \bar p_1)\,dx_0 - \frac{1}{2}(u\,d\bar p_1 + \bar u\,dp_1) + \frac{1}{s+1}(\bar u\,u)^{s+1}dx_1 +$$

$$+ \lambda \int \bar u(x) \exp\left(\frac{i(x_1 - y_1)^2}{2(x_0 - y_0)}\right) u(y)\,dy\,dx_1,$$

$$\rho_T = \frac{i}{2}(u\bar p_\alpha - \bar u p_\alpha)\,dx_\alpha - \frac{1}{s+1}(\bar u\,u)^{s+1}dx_0 + p_1\bar p_1\,dx_0 +$$

$$+ \lambda \int\limits_{R^1 \times R^2} \bar{u}(x) \exp\left(\frac{i(x_1-y_1)^2}{2(x_0-y_0)}\right) u(y)\, dy\, dx_0 .$$

Закон сохранения заряда:

$$\rho_c = (\bar{\Psi} p_1 - \Psi \bar{p}_1)\, dx_0 + i\,(\bar{\Psi}\Psi)\, dx_1$$

Галилеевский закон сохранения:

$$\rho_G = \left[2i\, x_0\, p_1 \bar{p}_1 + x_1(\bar{u}\, p_1 - u\, \bar{p}_1) - \frac{2i x_0}{s+1} (\bar{u} u)^{s+1}\right] dx_0 +$$

$$+ 2i\, x_1\, \bar{u} u\, dx_1 + 2x_0\, (\bar{u}\, p_\alpha - u\, \bar{p}_\alpha)\, dx_\alpha +$$

$$+ \lambda \int x_0\, \bar{u}(x) \exp\left(\frac{i(x_1-y_1)^2}{2(x_0-y_0)}\right) u(y)\, dy\, dx_0 .$$

Для четырехмерного случая выпишем законы сохранения энергии-импульса в "физической" записи, не повторяя аналогичных громоздких выкладок

$$E = \frac{1}{2} \int \left(|\operatorname{grad} u|^2 + \frac{1}{s+1} (\bar{u} u)^{s+1} \right) d\vec{x} +$$

$$+ \lambda \int \bar{u}(x) \exp\left(\frac{i(\vec{x}-\vec{y})^2}{2(x_0-y_0)}\right) \phi(|z_0|)\, u(y)\, dy\, d\vec{x} \;-$$

закон сохранения энергии ;

$$\vec{P} = \int (u \operatorname{grad} \bar{u} - \bar{u} \operatorname{grad} u)\, d\vec{x} \quad -$$

закон сохранения импульса.

Наш последний пример касается уравнения Монжа-Ампера-Погорелова. Он интересен тем, что в нем явно видна независимость симметрийных свойств уравнения и законов сохранения, которые можно построить для него. Уравнение МАП имеет вид

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu \partial x_\mu} \right| = 0, \qquad \mu, \nu = \overline{0,n}. \tag{IO.3}$$

Форма Ω, его представляющая , такова

$$\Omega = dp_0\, dp_1\, dp_2 \dots dp_n$$

Ищем замкнутую форму ρ вида

$$\rho = g\,\Omega + \theta X + T Y, \quad \theta = du - p_\alpha dx_\alpha, \quad T = d\theta.$$

Поступая, как описано выше, находим уравнения, которым должна удовлетворять функция g

$$D_\alpha D_\beta (g) = 0, \quad D_{p_\alpha} D_\alpha (g) + g_u = 0, \quad D_\alpha = \partial_{x_\alpha} + p_\alpha \partial_u.$$

Следовательно

$$g = A(p)u + B^\mu(p)x_\mu + \mathcal{D}^\mu(p)u x_\mu + C(p),$$

где $C(p)$ произвольная функция от $p = (p_0, p_1 \dots p_n)$, а функция A, B^μ и $\mathcal{D}^\mu$ связаны условием

$$B^\alpha_{p_\alpha} + p_\alpha D_{p_\alpha} A + (n+1)A = 0, \qquad \mathcal{D}^\mu = 0$$

Однако функция A приводит к нулевым сохраняющимся величинам. Положим ее равной нулю. Тогда законы сохранения могут быть описаны следующей формулой

$$\rho = \int_{-\infty}^{0} dt\, A_t^* \Big[B^\mu(p)x_\mu + C \sum_{\alpha=0}^{n} (-1)^{\alpha+1} p_\alpha \Omega_\alpha -$$

$$- u \sum_{\alpha=0}^{n} (-1)^{\alpha+1} B^\alpha \Omega_\alpha \Big],$$

где A_t – отображение (6.10), $\mathcal{R}_\alpha$ обозначает форму $\mathcal{R}$ (10.3), в которой α-й элемент опущен.

В физической записи, выбрав B^μ и C однородными полиномами степени s и z, соответственно, получим

$$\rho = \int\limits_{R^n} \left\{ \left(\frac{B^\mu x_\mu}{s+n+2} + \frac{C}{z+n+2} \right) \begin{vmatrix} u_0 \ldots u_n \\ u_{10} \ldots u_{1n} \\ \cdots\cdots \\ u_{n0}, \ldots u_{nn} \end{vmatrix} - \frac{u}{s+n+2} \begin{vmatrix} B_0 \ldots B_n \\ u_{10} \ldots u_{1n} \\ \cdots\cdots \\ u_{n0}, \ldots u_{nn} \end{vmatrix} \right\} dx$$

Таким образом, мы нашли законы сохранения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, с помощью методов дифференциальной геометрии. Оказалось, что законы сохранения интегро-дифференциальных уравнений можно получить независимо от наличия групповых свойств (в смысле С.Ли) этих уравнений, причем для существования законов сохранения необходимо накладывать жесткие ограничения на вид подынтегральных членов.

ГЛАВА 3.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Настоящая глава посвящена нахождению частных точных решений интегро-дифференциальных уравнений. Для уравнений с аналитическим символом доказана разрешимость задачи Коши, найдены точные решения задачи Коши для нелинейных ИДУ.

Доказана теорема о редукции интегро-дифференциального уравнения, инвариантного относительно некоторого оператора, к уравнению с меньшим количеством переменных; указаны редуцированные формы некоторых уравнений, рассмотренных во второй главе.

Найдены решения интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа.

§11. Решение задачи Коши для одного класса интегро-дифференциальных уравнений.

Рассмотрим ИДУ вида

$$\int e^{ip(x-y)}\tilde{a}(p,\varphi(y))\,dy\,đp = 0.$$

Мы предполагаем, что это уравнение можно записать в виде

$$\int e^{ipx} a(p,\hat{\varphi}(p))\,đp = 0. \qquad (11.1)$$

Здесь $\hat{\varphi}(p)$ – преобразование Фурье функции $\varphi(x)$: $\hat{\varphi}(p)=\int e^{-ipx}\varphi(x)\,dx$, $x, p\in R^n$, px – некоторое скалярное произведение векторов p и x. Мы хотим рассматривать интеграл (11.1) как функционал на подходящем пространстве. Равенство (11.1) мы понимаем в смысле обобщенных функций

$$\int e^{ipx} a(p,\hat{\varphi}(p))\,\psi^*(x)\,đp\,dx = 0. \qquad (11.1)$$

Равенство (11.1) можно переписать в виде

$$\int e^{ipx} a(p,\hat{\varphi}(p))\, \psi^*(x)\, dp\, dx = \int a(p,\hat{\varphi}(p))\, \hat{\psi}^*(p)\, dp \equiv$$

$$\equiv \langle a(p,\hat{\varphi}(p)), \hat{\psi}(p) \rangle = 0, \qquad \text{(II.2)}$$

где символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$, означает полулинейную форму. Решение (I.II) это такая функция $\hat{\varphi}(p)$, что для произвольного $\hat{\psi}(p)$ из основного пространства интеграл (II.2) равен нулю.

В случае линейных уравнений подобная схема успешно применена /I8, I9/. Оказалось удобным в качестве пространства основных функций выбрать те функции из L^2 , преобразование Фурье которых имеет компактный носитель. Пространство функционалов над этим пространством достаточно широко и, в частности, включает функцию Дирака δ . Однако при изучении нелинейных уравнений этого ожидать не приходится. Далее, если $\hat{\varphi}$ имеет компактный носитель, то композиция $f \circ \hat{\varphi}$, где f – аналитическая функция, этим свойством, вообще говоря, не обладает. Поэтому при определении сопряженного пространства финитность функционала, вероятно, не следует требовать. Отказаться же от компактности носителя преобразования Фурье основных функций не представляется возможным: если мы хотим трактовать $a(p,\hat{\varphi}(p))$ как функционал в смысле (II.2) с непрерывной по p функцией $a(p,\hat{\varphi}(p))$, то условие финитности $\hat{\psi}$ обязательно.

На основании этих соображений примем следующие определения.

Пусть S_R – параллелепипед в R^n

$$S_R \equiv \{ \xi : |\xi_i| < r_i ,\ 0 \le r_i < \infty \}.$$

Определение.

Пространство основных функций W_R состоит из тех функций, преобразование Фурье которых финитно и принадлежит L^1 :

$$W_R \equiv \{ \psi(x) : \hat{\psi}(\xi) \in L^1 ,\ supp\, \hat{\psi} \subset S_R ,\ |\int a(p,\hat{\varphi}(p))\, \hat{\psi}^*(p)\, dp | < \infty \}.$$

Снабдим пространства W_R топологией индуктивного предела в есть индуктивный предел пространства W_R.

По теореме Пэли-Винера /39, гл. IX.3) функции из W^{∞} принадлежат множеству функций из пространства S', сопряженного к пространству Шварца S, таких, что 1) они допускают аналитическое продолжение в C^n и 2) для которых справедлива оценка

$$|\psi(x+iy)| \leq K(1+|x+iy|)^N \exp(k_i y_i)$$

для всех $x+iy$ и некоторых констант K, N, k_i.

Пространство функционалов на W^{∞} обозначим $W^{-\infty}$.

Теорема II.I.

Пространство $W^{-\infty}$ образовано функциями вида

$$\hat{f} = a(p, \hat{\varphi}(p)) \quad , \hat{\varphi}(p) \in L_K^{\infty},$$

L_K^{∞} - пространство функций, ограниченных в существенном на каждом компакте K, $a(p, \hat{\varphi})$ - аналитическая функция $p, \hat{\varphi}$.

Доказательство.

Ясно, что функции указанного вида принадлежат $W^{-\infty}$

$$\left| \int_{S_R} a(p, \hat{\varphi}(p)) \, \psi^*(p) \, dp \right| \leq C \left| \int_{S_R} \psi(p) \, dp \right| < \infty$$

$\hat{\varphi}(p) \in L_K^{\infty}$, $a(p, \hat{\varphi}(p))|_{S_R} < C$, $\psi(p)$ - интегрируемая функци

Если же допустим, что $\hat{\varphi}$ не является ограниченной в существенном функцией, то рассмотренный выше интеграл не может быть конечным, поскольку мера множества, где $\hat{\varphi}(p)$ не ограничена, не равна нулю.

Предположим теперь, что функция $a(p, \hat{\varphi}(p))$ в (II.I-II.2) аналитична по p и голоморфна по $\hat{\varphi}$.

Теорема II.2

Если функция $a(p, \hat{\varphi}(p))$ имеет невырожденную производную $\frac{\partial a}{\partial \hat{\varphi}} \neq 0$ в окрестности точки $p = \xi$, $\hat{\varphi} = \eta$, то уравнение (II.I) имеет единственное решение в окрестности указанной точки $p=\xi$, $\hat{\varphi}=\eta$, причем $\hat{\varphi}$ – аналитическая функция.

Доказательство.

Высказанное утверждение имеет место в силу теоремы о неявной функции. Заметим еще, что если $a(p,\hat{\varphi})$ только непрерывна по p, то этим же свойством будет обладать и $\hat{\varphi}(p)$.

Рассмотрим теперь задачу Коши для уравнения вида

$$\begin{gathered}\frac{\partial^n \hat{\varphi}(t,p)}{\partial t^n} = a(t,p,\hat{\varphi}(t,p)) \\ \left.\frac{\partial^k \hat{\varphi}(t,p)}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \hat{f}_k(p), \quad 0<k\le n-1\end{gathered} \tag{II.3}$$

Теорема II.3.

Задача Коши (II.3) имеет единственное решение, если

I) $\hat{f}_k \in L^\infty_K$, $0<s\le n-1$

2) функция $\alpha(p,\hat{\varphi})$ аналитична по p, $\hat{\varphi}$, t.

Доказательство.

Поскольку $a(p,\hat{\varphi})$ аналитична по p, $\hat{\varphi}$, то из теорем о зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров и начальных данных /2I, 62/ следует, что искомое решение $\hat{\varphi}$ существует и аналитично по p и $\hat{f}_s$. Поскольку функции $\hat{f}_s(p)$ ограничены на каждом компакте по условию I), то решение $\hat{\varphi}(t,p,\hat{f}_s)$ удовлетворяет неравенству

$$|\hat{\varphi}(t,p,\hat{f}_s)|_K \le C_K\, |\hat{\varphi}(t,p,\hat{f}_s)|\,\Big|_{\hat{f}_s=B_{s,K}},$$

если $|\hat{f}_s|_K \le B_{s,K}$. Следовательно, $\hat{\varphi}(t,p,\hat{f}_s)\in W^{-\infty}$ и является единственным решением уравнений (II.3) в силу соответствующих теорем для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Укажем теперь некоторые уравнения в "χ" представлении, сво-[illegible] (II.3). Пусть символ * обозначает операцию свертки, а символы функций, начинающиеся с прописной буквы, – функции в алгебре с операцией свертки. Таким образом,

$$f * \varphi = \int f(x-y)\varphi(y)dy,$$

$$\overset{*}{F}(\varphi) \equiv e + \frac{\varphi}{1!} + \frac{\varphi * \varphi}{2!} + \dots + \frac{\overset{*}{\varphi}{}^{n}}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \overset{*}{\varphi}{}^{n}/n!,$$

$$\overset{*}{f}{}^{n} \equiv \underbrace{f * f * \dots * f}_{n}, \quad \overset{*}{f}{}^{0} = e, \quad e * e = e, \quad e * f = f * e = f.$$

Тогда в предположении, что свертки существуют и принадлежат пространству функций, на котором определено преобразование Фурье, мы находим, что всякое уравнение вида

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a(p)F(\varphi) \equiv \int e^{ip(x-y)} a(p)\overset{*}{F}(\varphi)(y)\,dy\,dp \qquad \text{(A)}$$

принадлежит рассматриваемому классу. Выполнив в (A) преобразование Фурье, имеем

$$\frac{\partial \hat{\varphi}(t,p)}{\partial t} = a(p)\cdot F(\varphi)(t,p),$$

$$\overset{*}{F}(\varphi)(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} F_\alpha \overset{*}{\varphi}{}^{\alpha}(x)/\alpha!, \quad F(\varphi)(t,p) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{F_\alpha \varphi^{\alpha}(t,p)}{\alpha!},$$

где F – аналитическая функция.

Следовательно, мы вправе применить соображения, изложенные выше и получить решение нелинейного ИДУ. Приведем некоторые примеры иллюстрирующие сказанное.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$i\,\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = a(p)\varphi(x,t) + \lambda\,\overset{*}{\varphi}{}^{n+1} \qquad \text{(II.4)}$$

$$\varphi \equiv \varphi(t,x), \quad \varphi(0,x) = f(x), \quad f \in W^{-\infty},$$

$$\varphi * \varphi = \int \varphi(t,x-y)\varphi(t,y)\,dy$$

и т.д.

Сделав преобразование Фурье, получим

$$i\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} = a(p)\,\hat{\varphi}(t,p) + \lambda\,\hat{\varphi}^{n+1}(t,p).$$

Следовательно,

$$\frac{\hat{\varphi}}{a+\lambda\hat{\varphi}^{n}} = C\,\exp(-i\,n\,a(p)t).$$

Отсюда находим, что

$$C = \hat{f}^{n}/(a+\lambda\hat{f}^{n}).$$

Таким образом,

$$\hat{\varphi} = \left(\frac{a(p)\exp(-in\,a(p)t)\,\hat{f}^{n}}{a(p)+\lambda\hat{f}^{n}-\lambda\exp(-in\,a(p)t)\,\hat{f}^{n}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

есть фурье-преобразование искомого решения уравнения (II.4). Чтобы найти его, следует выполнить обратное преобразование Фурье, интегрируя по области G аналитичности оператора $a(p)$

$$\varphi(t,x) = \int\limits_{G} e^{ipx}\,\hat{\varphi}(t,p)\,dp.$$

При условиях, обсуждавшихся выше, $\varphi(t,x)$ есть слабое решение уравнения (II.4), т.е. $\varphi(t,x) \in W^{-\infty}$.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial t^2} = a(p)\varphi(t,x) + b(p)\,\overset{*}{\varphi}{}^{n}(t,x) \tag{II.5}$$

$$\varphi(0,x) = f_0(x), \qquad \left.\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = f_1(x).$$

$$f_0(x),\ f_1(x) \in L^{\infty}_{K}.$$

Из уравнения (II.5) легко находим, что

$$(\hat{\varphi}')^2 = C_0 + a\,\hat{\varphi}^2 + \frac{2}{n+1}\,b\,\hat{\varphi}^{n+1}.$$

Следовательно, имеем

$$t + C_1 = \int\left(C_0 + a\,\hat{\varphi}^2 + \frac{2}{n+1}\,b\,\hat{\varphi}^{n+1}\right)^{-1/2} d\hat{\varphi}.$$

Таким образом, в явном виде решение не записывается. Однако в частных случаях это вполне возможно.

Выберем $C_0 = 0$, $n = 3$, тогда имеем

$$\int \frac{d\hat{\varphi}}{\left(a\hat{\varphi}^2 + \frac{b}{2}\hat{\varphi}^4\right)^{1/2}} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \frac{z - \sqrt{a}}{z + \sqrt{a}}, & a > 0, b > 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{a} - z}{\sqrt{a} + z}, & a > 0, b < 0 \\ \frac{1}{i\sqrt{a}} \arccos\left(\sqrt{-\frac{a}{b}}\, \frac{1}{z}\right), & a < 0, b > 0 \\ z = \left(a + b\hat{\varphi}^2/2\right)^{1/2} \end{cases}$$

Пусть $a > 0$, $b > 0$, тогда находим

$$t + \frac{\ln C_2}{2i\sqrt{a}} = \frac{1}{2i\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{a + b\hat{\varphi}^2/2} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + b\hat{\varphi}^2/2} + \sqrt{a}}.$$

Следовательно,

$$\hat{\varphi}^2 = \frac{2a}{b}\left[\left(\frac{1 + C_2 \exp(2i\sqrt{a}\,t)}{1 - C_2 \exp(2i\sqrt{a}\,t)}\right)^2 - 1\right]$$

Отсюда легко находим связь между C_2 и f_0:

$$\hat{f}_0^2 = \frac{2a}{b}\left[\left(\frac{1 + C_2}{1 - C_2}\right)^2 - 1\right].$$

Выбор $C_0 = 0$ означает, что

$$\hat{f}_1^2 = a\hat{f}_0^2 + \frac{b}{2}\hat{f}_0^4.$$

Таким образом, решение задачи (II.5) таково:

$$\varphi(t,x) = \int e^{ipx}\left[\frac{2a}{b}\left(\frac{1 + C_2 \exp(2i\sqrt{a}\,t)}{1 - C_2 \exp(2i\sqrt{a}\,t)}\right)^2 - 1)\right]^{1/2} dp.$$

Рассмотрим уравнение со сдвигом аргумента

$$\Delta\varphi + \lambda \mathcal{P}_a \overset{*}{\varphi}{}^{n+1} = 0,$$

где

$$\mathcal{P}_a f(x) = f(x+a), \quad \overset{*}{\varphi}{}^{n+1} \equiv \underbrace{\varphi * \varphi * \ldots * \varphi}_{n+1}, \quad \Delta = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k},$$

символ $*$ обозначает операцию свертки. С помощью преобразования Фурье, уравнение можно привести к виду

$$\vec{p}^{\,2} \hat{\varphi} - \lambda \exp(i \vec{a} \vec{p}) \hat{\varphi}^{n+1} = 0, \quad \vec{p} = (p_1, \ldots p_N).$$

Следовательно, имеем такие решения этого уравнения

$$\hat{\varphi}_1 = 0, \quad \hat{\varphi}_2 = \lambda^{-1/n} |p|^{2/n} \exp(-\tfrac{i}{n} \vec{a} \vec{p})$$

$$\varphi_2(x) = \lambda^{-\frac{1}{n}} \int e^{i \vec{p} \vec{x}} |p|^{2/n} \exp(-\tfrac{i}{n} \vec{a} \vec{p}) dp.$$

Совершенно аналогично рассматривается уравнение

$$a(p)(\varphi * \varphi) + \mathcal{P}_a b(p) \varphi + c(x).$$

Поступая аналогично изложенному, получаем

$$a(p) \hat{\varphi}^2 + \exp(i \vec{a} \vec{p}) b(p) \hat{\varphi} + \hat{c}(p) = 0$$

$$\hat{\varphi} = \frac{\exp(i \vec{a} \vec{p}) b(p) \pm \sqrt{\exp(2i \vec{a} \vec{p}) b^2 - 4 a \hat{c}}}{2 a(p)}.$$

Таким образом, построены решения нелинейных псевдодифференциальных уравнений со сдвигом аргумента.

Покажем теперь, что для линейного уравнения ($a(p)$ - аналитична)

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = a(p) \varphi + \mathcal{I}(t,x), \quad \varphi(0,x) = \varphi_0(x) \qquad (II.7)$$

$$\varphi = \{\varphi_1, \ldots \varphi_N\}, \quad \mathcal{I} = \{\mathcal{I}_1, \ldots \mathcal{I}_N\}, \quad x \in R^n$$

задача Коши (II.7) разрешима на гораздо более широком множестве функций.

Выберем в качестве основного пространства H^∞ множество функций, преобразовния Фурье которых принадлежит классу C_0^∞ :

$$H^{\infty} = \{ f(x) : \hat{f}(\xi) \in C_0^{\infty}(R^n) \}$$

По теореме Пэли–Винера это те и только те функции, которые

1)допускают продолжение в C^n и являются целыми;

2)удовлетворяют оценке $|f(z)| \leq \tilde{C} \frac{\exp(R|\operatorname{Im} z|)}{(1+|z|)^M} \quad \forall M > 0$.

Легко показать, что множество функционалов $H^{-\infty}$ над пространством H^{∞} есть множество функций, преобразование Фурье которых есть функционал над $C_0^{\infty}(R^n)$:

$$H^{-\infty} \equiv \{ g(x) : \hat{g}(\xi) \in \mathcal{D}'(R^n), \ |\langle a\hat{g}, \hat{f} \rangle| < \infty \}$$

для произвольной $f \in H^{\infty}$.

С учетом замечаний об " x " представлении функций из H^{∞}, мы видим, что пространство $H^{-\infty}$ содержит $S'(R^n)$ в " x " представлении.

Предположим далее, что матрица $a(p)$ невырождена.

Теорема II.4.

Задача Коши (II.7) разрешима при произвольных $\varphi_0 \in H^{-\infty}$; $\mathcal{J}(t,x) \in H^{-\infty}$ по переменным " x " и гладко зависит от t.

Доказательство.

Выполним в (II.7) преобразование Фурье по переменным " x "

$$\frac{\partial \hat{\varphi}(t,p)}{\partial t} = a(p)\,\hat{\varphi}(t,p) + \hat{\mathcal{J}}(t,p) \ ; \quad \hat{\varphi}(0,p) = \hat{\varphi}_0(p).$$

Тогда очевидно, что решением этой задачи является единственная функция

$$\hat{\varphi}(t,p) = e^{a(p)t} \Big[\int_0^t e^{-a(p)\tau} \hat{\mathcal{J}}(\tau,p)\, d\tau + \hat{\varphi}_0(p) \Big].$$

Ясно, что в силу определений

$$\langle \hat{\varphi}(t,p), \hat{\psi}(p) \rangle < \infty$$

для произвольной функции ψ из H^{∞}. Следовательно, $\hat{\varphi}(t,p) \in H^{-\infty}$ и теорема доказана.

Подчеркнем, что задача Коши (II.7) имеет единственное решение, если $\varphi_0(x),\ \mathcal{J}(t,x) \in S'(R^n) \subset H^{-\infty}$ и тем самым мы действительно значительно расширили множество допустимых начальных значений по сравнению с нелинейным случаем.

Приведем примеры использования теоремы II.4.

Рассмотрим уравнение Дирака

$$\gamma_\mu p^\mu \Psi + m\Psi = \gamma_0 V * \Psi .$$

Предположим, что V – обобщенная функция с компактным носителем $V \in \mathcal{E}'(R^3)$, $\Psi \in S'(R^4)$. Пусть $\check{f}(x) = f(-x)$, тогда по определению свертка $V * \Psi$ есть функционал

$$< V * \Psi, g > = < V, \check{\Psi} * g > , \quad g \in H^\infty .$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Дирака в $R_+^4 \equiv \{ (x_0, x_1, x_2, x_3) : x_0 \geqslant 0 \}$

$$\gamma_\mu p^\mu \Psi + m\Psi = \gamma_0 V * \Psi \tag{II.8}$$

$$\Psi(0,\vec{x}) = \Psi_0(\vec{x}) \quad , \quad [V, \gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 m] = 0 .$$

Теорема о разрешимости задачи Коши (II.8) автоматически следует из т.II.4. Действительно, все операторы в уравнении (II.8) корректно определены и допускают преобразование Фурье по переменным " $\vec{x}$ "

$$i\gamma_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x_0} - \vec{\gamma}\vec{P}\Psi + m\Psi = \gamma_0 \hat{V} \cdot \hat{\Psi} ,$$

где $\hat{V}(p)$ – целая функция по p и допускает оценку $|\hat{V}(p)| \leqslant C(1+|p|)^M \exp(R|\operatorname{Im} p|)$ по теореме Пэли-Винера. Таким образом, мы находимся в условиях теоремы т.II.4. Решение задачи Коши (II.8) имеет вид

$$\hat{\Psi}(t,\vec{p}) = [\cos t\hat{V} - i\sin(tV)][\cos tE - \frac{iH}{E}\sin(tE)]\hat{\Psi}_0(\vec{p}).$$

Здесь $H = \gamma_0\gamma_a p_a + \gamma_0 m$, $E = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$; потенциал $\hat{V}$ коммутирует с H по предположению.

Решим аналогичную задачу для уравнений Максвелла, которые можно записать в виде

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\sigma_2 \vec{S}\vec{p}\,\phi + i\mathcal{J} \tag{II.9}$$

$$p_a \phi_a = -i\rho, \quad p_a \phi_{3+a} = 0, \quad \phi(0,\vec{x}) = \Psi(\vec{x}), \quad a = \overline{1,3},$$

где $\phi = (\vec{E},\vec{H})$, $\vec{p} = -i\frac{\partial}{\partial\vec{x}}$, $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3, 0,0,0)$, $\mathcal{J} = \mathcal{J}(t,\vec{x})$, $\rho = \rho(t,\vec{x})$.

Матрицы, $\vec{S}$, σ_2 таковы:

$$S_a = \begin{pmatrix} \hat{S}_a & 0_3 \\ 0_3 & \hat{S}_a \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = i\begin{pmatrix} 0_3, & -I_3 \\ I_3, & 0_3 \end{pmatrix},$$

$$\hat{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{S}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сделаем преобразование Фурье по переменным x в уравнениях (II.9). Решением первой подсистемы уравнений Максвелла (II.9) является функция

$$\hat{\phi}(t,p) = exp(it\sigma_2\vec{S}\vec{p})\Big[i\int_0^t exp(-i\tau\sigma_2\vec{S}\vec{p})\mathcal{J}(\tau,p)d\tau + \hat{\Psi}(p)\Big].$$

Чтобы получить явную формулу, предположим, что $\mathcal{J}$ не зависит от времени t. Таким образом, надо вычислить $exp(it\sigma_2\vec{S}\vec{p})$ и $\int exp(-it\sigma_2\vec{S}\vec{p})dt$. Пользуясь антисимметричностью матрицы $\vec{S}\vec{p}$, можно убедиться, что

$$exp(\pm it\sigma_2\vec{S}\vec{p}) = I_6 - \left(\frac{\vec{S}\vec{p}}{p}\right)^2 + \left(\frac{\vec{S}\vec{p}}{p}\right)^2 \cos tp \pm i\sigma_2\frac{\vec{S}\vec{p}}{p}\sin tp$$

$$\int exp(-it\sigma_2\vec{S}\vec{p})dt = \left[I_6 - \left(\frac{\vec{S}\vec{p}}{p}\right)^2\right]t + \left(\frac{\vec{S}\vec{p}}{p}\right)^2\cos tp \pm i\sigma_2\frac{\vec{S}\vec{p}}{p}\sin tp.$$

Заметим, что ввиду необратимости $\vec{S}\vec{p}$ нельзя пользоваться формулой $\int exp(tA)\,dt = A^{-1}exp(tA)$.

Теперь уже легко показать, что решением первой подсистемы уравнений (II.9) с указанными начальными данными является функция

$$\hat{\phi} = i\left[-i\left(I_6 - \left(\frac{\vec{S}\vec{p}}{p}\right)^2\right)t + \sigma_2 \frac{\vec{S}\vec{p}}{p^2}(1-\cos tp) - i\frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{p^3}\sin tp\right]\hat{J}(p)$$

$$+\left[I_6 - \left(\frac{\vec{S}\vec{p}}{p}\right)^2 + \left(\frac{\vec{S}\vec{p}}{p}\right)^2 \cos tp + i\sigma_2 \frac{\vec{S}\vec{p}}{p}\sin tp\right]\hat{\psi}(p). \qquad \text{(II.9')}$$

Однако функция $\hat{\phi}$ должна удовлетворять условиям $p_a \phi_a = -i\rho$, $p_a \phi_{3+a} = 0$. Из (II.9') следует, что начальные данные ψ должны удовлетворять дополнительным условиям. С этой целью заметим, что если $\frac{\partial J}{\partial t} = 0$, то $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 0$ как следует из уравнения непрерывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{J}$. Далее $p_a (\vec{S}\vec{p}\,\Omega)_a \equiv 0$ для $\forall\Omega$ – это эквивалентно $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{\Omega} = 0$.

Поскольку имеет место представление вида

$$\left(\hat{S}_a p_a\right)^2 = \vec{p}^{\,2} I_3 - \begin{pmatrix} p_1 p_1, & p_1 p_2, & p_1 p_3 \\ p_2 p_1, & p_2 p_2, & p_2 p_3 \\ p_3 p_1, & p_3 p_2, & p_3 p_3 \end{pmatrix},$$

то $p_a \left[(\vec{S}\vec{p})^2 \Omega\right]_a \equiv 0$.

Следовательно, $p_a \hat{\phi}_a = t p_a \hat{J}_a + p_a \psi_a = -i\hat{\rho}$, $p_a \hat{\phi}_{3+a} = {}$ $= p_a \psi_{3+a} = 0$. Так как $\hat{\rho} = A(p)t + B(p)$, то имеем $t p_a \hat{J}_a + p_a \hat{\psi}_a = -i(A(p)t + B(p))$. Таким образом, $p_a \hat{\psi}_a = -i B(p)$, $p_a J_a = -i A$ и утверждение о разрешимости задачи Коши (II.9) удобно сформулировать в виде теоремы.

Теорема II.5.

Если функции $\rho(t,x), J(x), \psi(x) \in H^{-\infty}$ и удовлетворяют условиям

$$p_a \hat{\psi}_a = -i B(p), \quad p_a \hat{J}_a = -i A(p), \quad \hat{\rho} = A(p)t + B(p),$$

то задача Коши (II.9) для уравнений Максвелла имеет единственное решение (II.9').

§12. Редукция числа переменных в ИДУ инвариантных относительно некоторых групп преобразований.

Пусть дифференциальная форма ω инвариантна относительно векторного поля X. Покажем, что в этом случае возможна редукция уравнения, представляемого этой формой, к уравнению с меньшим количеством переменных.

Теорема 12.1.

Если форма $\omega \in \Lambda^k$ инвариантна относительно поля X, то существуют такие переменные y_α, $\alpha = \overline{1, n-1}$, что коэффициенты формы ω выражаются только через y_α.

Доказательство.

Пусть форма ω имеет степень k и определена на n - мерном многообразии M. Локально имеем

$$\omega = \sum a_{i_1 \dots i_k}(x_1, \dots x_n)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} .$$

Пусть поле X задано формулой

$$X = \xi^\mu \partial_\mu \quad , \; \mu = \overline{1, n} .$$

Система Лагранжа, индуцируемая полем X,

$$\frac{dx_1}{\xi^1} = \frac{dx_2}{\xi^2} = \dots = \frac{dx_n}{\xi^n}$$

имеет $n-1$ инвариант y_α : $\xi^\mu \partial_\mu (y_\alpha) = 0$. Известно, что они функционально независимы. Поэтому отображение $f : M \to M$ определим следующим образом

$$\tilde{x}_\alpha = y_\alpha \quad , \quad \tilde{x}_n = x_n \quad , \quad \alpha = \overline{1, n-1} .$$

Нетрудно убедиться, что поле X в новых координатах приобретает вид

$$\tilde{X} = f_*(X) = \xi^n \partial_{\tilde{x}_n} \qquad \text{(по } n \text{ суммы нет!).}$$

Выберем теперь диффеоморфизм g следующим образом

$$\frac{\partial g}{\partial \tilde{x}_n} = \frac{1}{\xi^n} .$$

Тогда при отображении $G: \tilde{x}_\alpha \to \tilde{x}_\alpha, \ \tilde{x}_n \to x'_n = g(x_n, x_\alpha)$ имеем

$$X' = G_* \tilde{X} = \xi^n \frac{\partial g}{\partial \tilde{x}_n} \partial_{x'_n} = \partial_{x'_n}.$$

Для удобства обозначим $\tilde{x}_\alpha = y_\alpha, \ x'_n = y_n$. Форма ω в новых координатах y приобретает вид

$$G^* f^* \omega = \sum a_{i_1 \dots i_k} dy_{i_1} \dots dy_{i_k}.$$

Поскольку инвариантность форм при диффеоморфизмах сохраняется, то имеем

$$L_{X'}(G^* f^* \omega) = \sum \frac{\partial a_{i_1 \dots i_k}}{\partial y_n} dy_{i_1} \dots dy_{i_k} = 0.$$

В силу линейной независимости форм $dy_{i_1} \dots dy_{i_k}$ отсюда следует, что $a_{i_1 \dots i_k}$ не зависят от y_n, что и требовалось доказать. Отметим, что приведенное доказательство не что иное, как конкретная реализация общей теоремы о выпрямлении поля /2/. Если форма ω представляет уравнение и инвариантность понимается в более широком смысле:

$$L_X \omega = h\, \omega$$

то переходом на многообразие решений этой формы мы попадаем в ситуацию т.I2.I.

Таким образом, теорема I2.I позволяет сводить задачу решения n - мерных ИДУ к $n-1$ или даже I - мерным уравнениям, что является существенным упрощением исходной задачи. Разумеется, при этом находятся частные решения исходного уравнения.

Приведем примеры редукции уравнений к уравнениям с меньшим количеством независимых переменных.

Рассмотрим уравнение

$$\Box_2 \varphi + \lambda_1 \varphi^n + \lambda_2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} K((x_0 - y_0)^2 - (x_1 - y_1)^2)\, \varphi^m(y_0, y_1)\, dy_0\, dy_1 = 0. \tag{I2.I}$$

Уравнение (12.1) инвариантно относительно лоренцовых вращений, оператор которых имеет вид

$$X = x_0 \partial_{x_1} + x_1 \partial_{x_0} + y_0 \partial_{y_1} + y_1 \partial_{y_0}.$$

Инварианты преобразований, генерируемых данным оператором, можно выбрать в виде

$$\omega_1 = x_0^2 - x_1^2, \quad \omega_2 = y_0^2 - y_1^2, \quad \omega_3 = x_0 y_0 - x_1 y_1.$$

Делаем замену переменных

$$y_0 \to \omega_2, \qquad y_1 \to \omega_3 .$$

Решение уравнения (12.1) ищем в виде $\varphi = \varphi(\omega_1)$. Тогда получаем

$$d\omega_2 \wedge d\omega_3 = (x_0 y_1 - x_1 y_0)\, dy_0 \wedge dy_1 .$$

Поскольку $L_X(x_0 y_1 - x_1 y_0) = 0$, то детерминант преобразования можно записать в терминах ω_1, ω_2, ω_3. Действительно,

$$x_0 y_1 - x_1 y_0 = \sqrt{\omega_3^2 - \omega_1 \omega_2}.$$

Таким образом,

$$\omega_1 \varphi_{\omega_1\omega_1} + 4\varphi_{\omega_1} + \lambda_1 \varphi^n + \lambda_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_3)}{\sqrt{\omega_3^2 - \omega_1\omega_2}} \varphi^m(\omega_2)\, d\omega_2\, d\omega_3 = 0.$$

Следовательно, мы решили поставленную задачу о редукции числа переменных.

Рассмотрим теперь аналогичную задачу для уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} - p^2\psi + \lambda_1(\bar\psi\psi)^s\psi + \lambda_2 \int \exp\left(\frac{i(x_1-y_1)^2}{2(x_0-y_0)}\right) K(x_0-y_0)\,\psi(y)\,dy_0\,dy_1 = 0. \tag{12.2}$$

Как следует из (7.2), это уравнение галилеевски инвариантно. Оператор преобразований имеет следующий вид

$$X = x_0 \partial_{x_1} + y_0 \partial_{y_1} - i x_1 \partial_{\psi(x)} - i y_1 \partial_{\psi(y)}.$$

Инварианты этого оператора можно выбрать в виде

$$\omega_1 = x_0, \quad \omega_2 = y_0, \quad \omega_3 = x_0 y_1 - x_1 y_0 .$$

Решение ищем в виде

$$\psi(x) = \exp\left(\frac{i x_1^2}{2x_0}\right) \varphi(x_0)$$

$$\psi(y) = \exp\left(\frac{i y_1^2}{2 y_0}\right) \varphi(y_0) .$$

Следовательно, получаем

$$\left(i\,\varphi' + \frac{i}{2\omega_1}\varphi + \lambda(\bar\varphi\varphi)^s\varphi\right)\exp\left(\frac{i x_1^2}{2x_0}\right) +$$

$$+ \exp\left(\frac{i x_1^2}{2x_0}\right) \int \exp\left(\frac{i\,\omega_3^2}{2\,\omega_1\omega_2(\omega_1-\omega_2)}\right) K(\omega_1-\omega_2)\,\frac{\varphi(\omega_2)}{\omega_1}\, d\omega_2\, d\omega_3 = 0.$$

Таким образом, уравнение (I2.2) записано в терминах ω_1, ω_2, ω_3, что и требовалось. Следовательно, использование группы симметрии ИДУ, как это сделано в т.I2.I, дает возможность упростить исходное уравнение, редуцируя его к уравнению с меньшим количеством переменных.

Рассмотрим уравнение для вектор-потенциала

$$\Box A_\mu(x) = \lambda A_\mu(x) \int_\Omega (A_\nu A^\nu)^s(y)\, dy . \qquad (I2.3)$$

Здесь $x = (x_0, x_1)$, $y = (y_0, y_1)$, $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$, $\Omega \equiv \{ y:\ a(x_\nu x^\nu) \le y_\nu y^\nu \le$ $\le b(x_\nu x^\nu),\ 0 \le y_1 \le (y_\nu y^\nu)^{1/2},\ 0 < a < b,\ x_\nu x^\nu \ge 0\}$, $x_\nu x^\nu = x_0^2 - x_1^2$, $y_\nu y^\nu = y_0^2 - y_1^2$.

Уравнение (I2.3) лоренц-инвариантно. Поэтому ищем решение в виде $A_\mu(x) = x_\mu \varphi(x_\nu x^\nu)$. Подставляя это выражение в (I2.3), получаем

$$x_\alpha\,(4\omega\varphi'' + 8\varphi') = \lambda x_\alpha \varphi \int_\Omega (y_\nu y^\nu)^s \varphi^{2s}(y_\nu y^\nu)\, dy, \quad \omega = x_\nu x^\nu .$$

Под интегралом сделаем замену переменных

$$y_1 \to y_1, \quad y_0 \to \omega_1 = y_\nu y^\nu .$$

Тогда уравнение преобразуется к виду

$$4\omega\varphi'' + 8\varphi' - \lambda\varphi \int\limits_{a\omega}^{b\omega} \int\limits_{0}^{\sqrt{\omega_1}} \omega_1^s \varphi^{2s}(\omega_1) \frac{1}{2\sqrt{\omega_1^2 + y_1^2}} dy_1 d\omega_1 =$$

$$= 4\omega\varphi'' + 8\varphi' - \frac{\lambda}{2}\varphi \int\limits_{a\omega}^{b\omega} \omega_1^s \varphi^{2s}(y_\nu y^\nu) \ln(1+\sqrt{2})\, d\omega_1 . \qquad (12.4)$$

Следовательно, если выбрать $\varphi(\omega) = C\omega^\alpha$, то, как легко проверить, получаем

$$\left(4\alpha(\alpha-1) + 8\alpha\right)\omega^{\alpha-1} C = \frac{\lambda C^{2s+1}\omega^{s(2\alpha+1)+\alpha+1}}{s(2\alpha+1)+1}\left(b^{s(2\alpha+1)+1} - a^{s(2\alpha+1)+1}\right)\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2}.$$

Таким образом, $\varphi = C x_\mu (x_\nu x^\nu)^{-\frac{2+s}{2s}}$ - решение уравнения (12.3), если C удовлетворяет условию

$$4\alpha(\alpha+1) = \lambda C^{2s} \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2(1+s(2\alpha+1))}\left(b^{s(2\alpha+1)+1} - a^{s(2\alpha+1)+1}\right)$$

$$\alpha = -(2+s)/2s , \quad s \neq 0.$$

Рассмотрим далее уравнение

$$\Box\varphi(x) = \lambda\varphi^{s_1}(x) \int\limits_{\Omega} \varphi^{s_2}(y)\, dy . \qquad (12.5)$$

Здесь $x = (x_0, x_1)$, $y = (y_0, y_1)$, $\Box = \partial_{x_0}^2 - \partial_{x_1}^2$, $\Omega \equiv \{ y : a(x_\nu x^\nu) \leq y_\nu y^\nu \leq b(x_\nu x^\nu),\ 0 \leq y_1 \leq (y_\nu y^\nu)^{1/2},\ 0 < a < b,\ x_\nu x^\nu \geq 0 \}$, $x_\nu x^\nu = x_0^2 - x_1^2$, $y_\nu y^\nu = y_0^2 - y_1^2$.
Уравнение (12.5) лоренц-инвариантно. Поэтому решение φ ищем в виде $\varphi = C(x_\nu x^\nu)^\alpha \equiv C\omega^\alpha$. Следовательно, получим

$$4(\omega\varphi'' + \varphi') = \lambda\varphi^{s_1}(\omega) \int\limits_{\Omega} \omega_1 \varphi^{s_2}(\omega_1)\, dy_0 dy_1, \quad \omega_1 = y_\nu y^\nu .$$

Сделаем под интегралом замену переменных:

$$\omega_0 = y_1, \quad \omega_1 = y_\nu y^\nu$$

Тогда аналогично предыдущему найдем: $\varphi = C\,(x_\nu x^\nu)^{\alpha}$

$$4\alpha^2 C\,\omega^{\alpha-1} = \lambda C^{S_1+S_2}\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2(\alpha S_2+1)}\left[b^{\alpha S_2+1} - a^{\alpha S_2+1}\right]\omega^{\alpha(S_1+S_2)+1},$$

Следовательно, функция $\varphi = C\,(x_\nu x^\nu)^{-\frac{2}{S_1+S_2+1}}$, $S_1+S_2+1 \neq 0$ является решением уравнения (I2.5), если константа C удовлетворяет условию

$$4\alpha^2 = \lambda\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2(\alpha S_2+1)}\left(b^{\alpha S_2+1} - a^{\alpha S_2+1}\right)C^{S_1+S_2-1}, \quad \alpha = -\frac{2}{S_1+S_2+1}. \tag{I2.6}$$

Найдем решение уравнения Шредингера:

$$\left(i\partial_0 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\Psi + \lambda_1(\bar\Psi\Psi)^{S_1}\Psi + \lambda_2\int_0^{x_0}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{i(x_1-y_1)^2}{2(x_0-y_0)}\right)K(\bar\Psi\Psi)^{S_2}\Psi(y)\,dy = 0$$

$$x=(x_0,x_1),\ y=(y_0,y_1),\ \Psi=\Psi(x),\ \lambda_1 = i\rho_1,\ \lambda_2=(1+i)\rho_2,\ K=K(x_0-y_0); \tag{I2.7}$$

Уравнение (I2.7) Галилеевски инвариантно. Поэтому решение $\Psi(x)$ ищем в виде $\Psi = \exp\left(\frac{ix_1^2}{2x_0}\right)\varphi(x_0)$. Согласно (I2.3) имеем

$$i\varphi' + \frac{i}{2x_0}\varphi + \lambda(\bar\varphi\varphi)^{S_1}\varphi +$$

$$+\frac{\lambda_2}{x_0}\int_0^{x_0}dy_0\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{i\omega_3^2}{2x_0y_0(x_0-y_0)}\right)K(x_0-y_0)(\bar\varphi\varphi)^{S_2}\varphi(y_0)\,d\omega_3 = 0.$$

Пользуясь тем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi^2}d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i),$$

легко получаем $\left(K=(x_0-y_0)^{-1/2}\right)$

$$i\left(\varphi' + \frac{\varphi}{2x_0}\right) + \lambda_1(\bar\varphi\varphi)^{S_1}\varphi + \lambda_2(1+i)\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x_0}}\int_0^{x_0}(\bar\varphi\varphi)^{S_2}\varphi(y_0)\sqrt{y_0}\,dy_0 = 0. \tag{I2.8}$$

Пусть $\lambda_1 = i\rho_1$, $\lambda_2 = i(1-i)\rho_2$; $\rho_1,\rho_2\in R^1$. Решение $\varphi(x_0)$ ищем в виде $\varphi = Cx_0^{\varkappa}$. Тогда из (I2.8) получаем, что $\Psi(x_0,x_1) = C\exp\left(\frac{ix_1^2}{2x_0}\right)x_0^{-\frac{1}{2S_1}}$ есть решение уравнения (I2.7), если $2S_1 = S_2$,

$$s_1 s_2 \neq 0, \qquad \varkappa = -\frac{1}{2s_1} = -\frac{1}{s_2}$$

$$\left(\varkappa + \frac{1}{2}\right) \pm \rho_1 |C|^{2s_1} + \frac{4\rho_2\sqrt{\pi}\,|C|^{2s_2}}{3 + 2\varkappa(2s_2+1)} = 0.$$

Таким образом, инвариантность уравнения относительно некоторой группы преобразований дает возможность находить решения интегро-дифференциальных уравнений.

§13. Вольтерровские решения интегро-дифференциальных уравнений специального вида.

Изложим основные положения теории Вольтерра, позволяющей сопоставлять каждому дифференциальному уравнению определенное ИДУ и находить решения таких ИДУ. Пусть заданы функции f и φ от двух переменных. Определим пермутабельное умножение /15, гл. 4, §1/ следующим образом:

$$f * \varphi = \int_x^y f(x,\xi)\varphi(\xi,y) \qquad \text{– первый род}$$

$$f * \varphi = \int_a^b f(x,\xi)\varphi(\xi,y) \qquad \text{– второй род .}$$

Множество функций с такой операцией умножения образует некоммутативную, ассоциативную алгебру. Заметим, что единицей такой алгебры может служить δ – функция Дирака $.1^{\circ} = \delta(x-y)$. Пусть уравнение относительно функции u и ее производных задано соотношением:

$$\phi(z, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \dots, \underset{n}{u}) = 0, \tag{13.1}$$

где $z = (z_1, \dots, z_k)$; $\underset{n}{u}$ – производные n -го порядка функции u . Если

$$u(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_\alpha z^\alpha$$

решение уравнения (13.1), α – мультииндекс, то

$$\psi(z; x, y) = \overset{*}{\xi}_0 u(\overset{*}{\xi}_1 z_1, \overset{*}{\xi}_2 z_2, \dots, \overset{*}{\xi}_k z_k) \equiv \xi_0 * \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_\alpha \overset{*}{\xi}{}^{\alpha} z^\alpha$$

есть решение интегро-дифференциального уравнения

$$\phi\left(\overset{*}{\xi} z, \frac{\psi}{\overset{*}{\xi}_0}, \frac{\underset{1}{\psi}}{\overset{*}{\xi}_0 \overset{*}{\xi}}, \dots \right) = 0 . \tag{13.2}$$

В уравнении (13.2) $\xi_0, \xi_1, \dots \xi_k$ считаются коммутирующими между собой и принадлежащими пермутабельной алгебре.

Приведем некоторые примеры использования этой теории. Рассмотрим сначала случай пермутабельной алгебры второго рода. Пусть

$$f * \varphi = \int_0^1 f(x, \xi)\,\varphi(\xi, y)\,d\xi . \tag{13.3}$$

Рассмотрим уравнение

$$\square u + \lambda u^3 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_3^2}\right) u(z_0, \ldots z_3) + \lambda u^3 = 0. \tag{13.4}$$

Функция $\Psi = \overset{*}{\xi}\, u(\overset{*}{\xi} z_0, \overset{*}{\xi} z_1, \overset{*}{\xi} z_2, \overset{*}{\xi} z_3)$, $\xi = \xi(x, y)$
удовлетворяет уравнению

$$\square \Psi + \lambda\, \Psi * \Psi * \Psi = 0. \tag{13.5}$$

Легко проверить, что для $f = (xy)^n e^{\varkappa(x-y)}$ имеет место соотношение

$$f * f = \frac{f}{2n+1} .$$

Известно /42/, что

$$u(z) = \frac{B}{1 - \alpha_\nu z^\nu}, \quad B^2 = -\frac{2\alpha_\nu \alpha^\nu}{\lambda}$$

есть решение уравнения (13.4).

Следовательно, если $\xi = (xy)^n e^{\varkappa(x-y)}$, то

$$\Psi = \overset{*}{\xi}\, u(\overset{*}{\xi} z) = B\, \overset{*}{\xi} \sum_{z=0}^{\infty} \overset{*}{\xi}{}^{z} (\alpha z)^z =$$

$$= B(2n+1)\, e^{\varkappa(x-y)} (xy)^n \frac{1}{2n+1 - \alpha_\nu z^\nu}$$

есть решение уравнения (13.5).

Выберем теперь $\phi = u(\xi z)$. Функция ϕ удовлетворяет уравнению

$$\square \phi + \lambda\, \overset{*}{\xi}{}^{2} * \phi * \phi * \phi = 0. \tag{13.6}$$

Решением уравнения (13.6) является функция

$$\phi(\xi z) = B 1^{\circ} + (\alpha z)^2 (xy)^n e^{\varkappa(x-y)} \frac{B(2n+1)}{2n+1 - (\alpha z)} .$$

Рассмотрим теперь случай пермутабельной алгебры первого рода:

$$f*\varphi = \int\limits_x^y f(x,\xi)\,\varphi(\xi,y)\,d\xi \quad . \tag{I3.7}$$

Пусть $u(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Box u + \lambda u^3 = 0, \qquad u(z) = \frac{B}{1-\alpha_\nu z^\nu}, \quad B^2 = -\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_0^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\alpha_k,$$

Можно легко убедиться, что имеют место соотношения

$$\left[e^{\lambda(x-y)}(x-y)\right]^n * (x-y)e^{\lambda n(x-y)} = -\frac{(x-y)^{n+2}\,e^{n\lambda(x-y)}}{(n+2)(n+1)},$$

$$(x-y)^{*n} = (-1)^{n-1}\frac{(x-y)^{2n-1}}{(2n-1)!}, \tag{I3.8}$$

$$\left[e^{\lambda(x-y)}(x-y)\right]^{*n} = (-1)^{n-1}\frac{e^{\lambda(x-y)}(x-y)^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Обозначим $\eta = e^{\lambda(x-y)}(x-y)$, тогда функция

$$\phi = \frac{B}{1-\eta^*(\alpha z)}, \quad (\alpha z) = \alpha_\nu z^\nu = \alpha_0 z_0 - \sum_{k=1}^{3}\alpha_k z_k$$

удовлетворяет уравнению

$$\Box\phi + \lambda\,\eta^{*2}\,\phi^{*3} = \Box\phi + \lambda\,\eta*\eta*\phi*\phi*\phi = 0$$

$$\phi = B\sum_{n=0}^{\infty}\eta^{*n}(\alpha z)^n = B\left(1^\circ + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}e^{\bar\lambda(x-y)}(x-y)^{2n-1}(\alpha z)^n}{(2n-1)!}\right) =$$

$$= B\left(1^\circ + e^{\bar\lambda(x-y)}\sqrt{\alpha z}\,\sin\left((x-y)\sqrt{\alpha z}\right)\right).$$

Таким образом, функция

$$\phi = B\left(1^\circ + e^{\bar\lambda(x-y)}\sqrt{\alpha z}\,\sin\left((x-y)\sqrt{\alpha z}\right)\right) \tag{I3.9}$$

является решением уравнения

$$\Box\phi - \frac{\lambda}{6}\,e^{\varkappa(x-y)}(x-y)^3*\phi*\phi*\phi = 0, \tag{I3.I0}$$

где операция $*$ определена формулой (13.7).

Определим теперь функцию Ψ

$$\Psi = \eta^* u(\eta^* z)\ ,\quad \eta = e^{\mu(x-y)}(x-y)\ ,\quad u(z) = \frac{B}{1-\alpha_\nu z^\nu}\ ,\quad B^2 = -2\frac{\alpha_\nu \alpha^\nu}{\lambda}$$

Функция Ψ удовлетворяет уравнению

$$\Box\Psi + \lambda\,\Psi * \Psi * \Psi = 0.$$

Используя соотношения (13.8), можно убедиться, что

$$\Psi = \frac{B\,e^{\mu(x-y)}}{\sqrt{\alpha_\nu z^\nu}}\sin\left(\sqrt{\alpha_\nu z^\nu}(x-y)\right).$$

В общем случае уравнение

$$\Box\varphi = \lambda\varphi^n$$

имеет решение $\varphi(z) = u(\alpha_\nu z^\nu)$, которое удовлетворяет уравнению

$$\alpha_\nu \alpha^\nu u'' = \lambda u^n$$

Отсюда легко находим, что u определяется формулой

$$\int \frac{du}{\left(\frac{2\lambda}{\alpha^2(n+1)}u^{n+1} + C_1\right)^{1/2}} = \alpha_\nu z^\nu + C_2$$

Решение в элементарных функциях возможно только в случае $C_1 = 0$, или $n = 0, 1$, $C_1 \neq 0$.

Выберем $C_1 = 0,\ n = 2\varkappa + 1$. Тогда решение u таково:

$$u = a^{-\frac{1}{\varkappa}}(C_2 - \alpha z)^{-\frac{1}{\varkappa}}\ ,\quad a^2 = \frac{2\lambda(n-2)^2}{4\alpha_\nu\alpha^\nu(n+1)}.$$

Следовательно, необходимо просуммировать ряд

$$\phi(z;\eta^*) = \left[1^\circ + \sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{\eta^{*\tau}(\alpha z)^\tau}{\tau!}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{1}{\varkappa}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{\varkappa}+\tau-1\right)\right]a^{-\frac{1}{2\varkappa}},$$

который и будет решением уравнения

$$\Box \phi = \lambda \eta^{*2} \phi^{*n} .$$

В частности, если $\varkappa = \frac{1}{2}$, $\eta = e^{\mu(x-y)}(x-y)$, получаем решение уравнения

$$\Box \phi = \frac{\lambda}{6} (x-y)^3 e^{\mu(x-y)} * \phi * \phi,$$

$$\phi = \frac{3\alpha_\nu \alpha^\nu}{2\lambda} \Big[1^\circ + \sqrt{\alpha_\nu z^\nu}\, e^{\mu(x-y)} \Big(\frac{3}{2} \sin\big((x-y)\sqrt{\alpha_\nu z^\nu}\big) +$$

$$+ \frac{(x-y)}{2} \sqrt{\alpha_\nu z^\nu} \cos\big((x-y)\sqrt{\alpha_\nu z^\nu}\big)\Big)\Big].$$

Если выбрать функцию $\Psi = e^{\mu(x-y)}(x-y) * \phi$, то Ψ есть решение уравнения

$$\Box \Psi = \lambda (x-y) e^{\mu(x-y)} * \Psi * \Psi ,$$

$$\Psi = \frac{3\alpha_\nu \alpha^\nu}{4\lambda(\alpha z)} e^{\mu(x-y)} \Big((x-y)\cos\big((x-y)\sqrt{\alpha_\nu z^\nu}\big) - \frac{1}{\sqrt{\alpha_\nu z^\nu}} \sin\big((x-y)\sqrt{\alpha_\nu z^\nu}\big)\Big).$$

Замечание I. Метод Вольтерра решения ИДУ вида (I3.2) сохраняет силу для ассоциативных алгебр с произвольным законом умножения. Важно, чтобы переменные, по которым идет дифференцирование, были отличны от переменных, с помощью которых определяется пермутабельное умножение.

Замечание 2. Распространение метода Вольтерра на случай большего количества переменных интегрирования не представляет труда. Достаточно положить, например

$$(f * \varphi)(x_1, x_2; y_1, y_2) = \int_{x_2}^{x_1} \int_{y_2}^{y_1} f(x_1, \xi_1; y_1, \eta_1)\, \varphi(\xi_1, x_2; \eta_1, y_2)\, d\xi_1\, d\eta_1 .$$

для первого рода и, соответственно, для второго рода.

Литература

I.Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974. –432 с.

2.Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – 2-е изд. –М.: Наука, 1975. – 239 с.

3.Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика: в 2-х т. – М.: Мир, 1978, т.2 – 400 с.

4.Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения: в 2-х т. – М.: Мир, 1980. т. I–456 с., т. 2–396 с.

5.Батыров С. О группе симметрии нелинейного параболического уравнения порядка 2 п. – В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. –К.: 1981, с. 119–124.

6.Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. – 5-е изд. – М.: Наука, 1976. – 664 с.

7.Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантовых полей. – М.: Наука, 1973. – 416 с.

8.Боголюбов Н.Н. Избранные труды по статистической физике. – М.: Изд-во МГУ, 1979. – 343 с.

9.Боголюбов Н.Н., Садовников Б.И. Некоторые вопросы статистической механики. – М.: Высшая школа, 1975. – 352 с.

10.Бьеркен Дж., Дрел С. Релятивистская квантовая теория в 2-х т. – М.: Наука, 1978. – т. I–295 с.

II.Виноградов А.М., Красильщиков И.С., Лычагин В.В. Применение нелинейных дифференциальных уравнений. –М.: МИИГА, 1977. – 125 с.

12.Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – Наука, 1979. – 318 с.

13.Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – 3-е изд. – М.: Наука, 1976. – 527 с.

14.Власов А.А. Макроскопическая электродинамика. – М.: Гостехиздат, 1956. – 228 с.

15.Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных интегро-дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1982. - 304 с.

16.Годбийон К. Дифференциальная геометрия и классическая механика. - М.: Мир, 1973. - 188 с.

17.Давыдов А.С. Квантовая механика. - 2-е изд. -М.: Наука, 1973. - 703 с.

18.Дубинский Ю.А. К теории задачи Коши для уравнений в частных производных. - ДАН СССР, 1981, т.259, №4, с. 781-785.

19.Дубинский Ю.А. Алгебра псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами и ее приложения к математической физике. - УМН, 1982, т. 37, вып. 5, с. 97-137.

20.Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. - М.: Наука, 1979. - 760 с.

21.Дьедонне Ж. Основы современного анализа. - М.: Мир, 1964.- 430 с.

22.Зуланке Р., Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. - М.: Мир, 1975. - 348 с.

23.Ибрагимов Н.Х. Групповые свойства волновых уравнений для частиц с нулевой массой. - ДАН СССР, 1968, т. 172, № 3, с. 566 - 568.

24.Ибрагимов Н.Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики. - Новосибирск, Изд-во НГУ, 1972. - 200 с.

25.Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. - М.: Наука, 1983. - 280 с.

26.Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. - М.:Изд-во МГУ, 1962. - 238 с.

27.Картан Э. Интегральные инварианты. ГИТТЛ, М-Л, 1940. - 216 с.

28.Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. - М.: Наука, 1979. - 384 с.

29.Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии т. I. М.: Наука, 1981. - 344 с.

30.Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - 4-е изд. - М.:Наука, 1976. - 543 с.

31.Кыйв М., Розенхауз В. Семейство двумерных уравнений Борна-Инфельда и система законов сохранения. - Известия АН ЭССР физика, математика 1979, № 3, с. 187-193.

32.Кыйв М., Айнсаар А., Кийтранен К. Симметрия пространства-времени и скалярное уравнение Борна-Инфельда. - Препринт Г15 Институт физики АН ЭССР, Тарту, 1981 .

33.Лычагин В.В. Локальная классификация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. - У М Н, 1975. т. 30, № 1, с. 101-171.

34.Лычагин В.В. Контактная геометрия и уравнения второго порядка. - УМН, 1979, 34, № 1, с. 137-165.

35.Малкин И.А., Манько В.И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. - М.: Наука, 1979, 230 с.

36.Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. - Новосибирск, Изд-во НГУ, 1966. - 131 с.

37.Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 400 с.

38.Псевдодифференциальные операторы. - М.: Мир, 1967. -361 с.

39.Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. т. I. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1977 - 358 с. т. 2. Гармонический анализ, самосопряженность. - М.: Мир, 1978. - 395 с.

40.Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. 2-е изд. – М.: Наука, 1977. – 552 с.

41.Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. -443 с.

42.Сегеда Ю.Н. Об инвариантных решениях нелинейного волнового уравнения. – В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. К.: 1981, с. 54-59.

43.Селехман Н.А. О максимальной алгебре инвариантности одной системы интегро-дифференциальных уравнений – В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 125-131?

44.Селехман Н.А. О симметрии некоторых интегро-дифференциальных уравнений. – В кн.: Математические вопросы механики сплошных сред и теплофизики. – Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, с. 108-110.

45.Селехман А.Н. Групповые свойства уравнения Больцмана. В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983, с. 65-68.

46.Серов Н.И. Конформная инвариантность нелинейных волновых уравнений. – В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 59-64.

47.Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. – М.: Мир. 1970 – 412 с.

48.Фущич В.И. О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения. – Теор. и математ. физ., 1971, т. 7, №1, с.3.

49.Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных. – В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978,с.5-44.

50.Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики. – В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 6-23.

51.Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики. – ДАН СССР, 1979, т. 246, № 4, с. 846-850.

52.Фущич В.И. Об одном методе исследования групповых свойств интегро-дифференциальных уравнений. – Укр.математ. журн., 1981, т. 33, № 6, с. 834-838.

53.Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. – К.: Наукова думка, 1983.

54.Фущич В.И., Селехман Н.А. Интегро-дифференциальные уравнения инвариантные относительно групп Галилея, Пуанкаре, Шредингера и конформной группы. – ДАН УССР, 1983, сер. А, № 5, с. 21-24.

55.Фущич В.И., Серов Н.И. О точных решениях уравнения Борна-Инфельда. – ДАН СССР, 1982, т. 263, № 3, с. 582-586.

56.Фущич В.И., Штелень В.М. Об инвариантных решениях нелинейного уравнения Дирака. – ДАН СССР, 1983, т. 269, № 1, с. 88 – 92.

57.Шварц Л. Анализ т. I. – М.: Мир, 1972. – 824 с.

58.Шварц Л. Применение обобщенных функций к изучению элементарных частиц. – М.: Мир, 1972. – 181.

59.Шварчка А.Б., Яновски А.Б. Метод Уолквиста-Эстабрука и его применение к исследованию нелинейных эволюционных уравнений. Случай двух пространственных переменных – ОИЯИ. Препринт Р5-82-242. Дубна, 1982.

60.Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. – М.: ИЛ, 1963. – 842 с.

61.Шилов Г.Е. Математический анализ (второй специальный курс). – М.: Наука, 1965 .

62. Шилов Г.Е. Математический анализ (функции нескольких вещественных переменных) части I - 2. - М.: Наука, 1972. - 624 с.

63. Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. - М.: Наука, 1978. - 280 с.

64. Bateman H. The transformations of Electrodynamical Equations.- Proc. London Math. Soc., 1909, v8, p.223-264.

65. Breaken A.J. A Comment on the conformal invariance of the zero-mass Klein-Gordon Equations.- Lett. Nuovo Cimento, 1971, v2, N11, p574-576.

66. Breaken A.J., Jessup B. Local conformal invariance for finite-component fields.- J. Math. Phys. 1982, v23, N10, p.1925-1945.

67. Estabrook F.B., Harrison B.K. Geometric approach to invariance groups.- J. Math. Phys., 1971, v12, N4, p.653-666.

68. Fuschich W.I., Shtelen W.M. Conformal symmetry and new Exact solutions of the SU_2 Yang-Mills equations.- Lett. Nuovo Cimento, 1983, v38, N2, p.37-40.

69. Hermann R. Fourier analysis on groups and partial wave analysis.- Benjamin, New York, 1969, 302 p.

70. Le Bellac M., Levi-Leblond J.M. Galilean electromagnetism.- Nuovo Cimento B, 1973, v14, N1, p217-235.

71. Lie S. Vorlesungen über Differential gleichungen mit Becannten Infinitesimalen Transformationen.- Leipzig, Teubner, 1881, 568 s.

72. Merve P. du T. Space-time symmetries and nonlinear field theory.- Nuovo Cimento, 1980, v60A, N4, p.247-261.

73. Steeb W.H. Symmetries and vacuum Maxwell equations.- J. Math. Phys. 1980, v21, N7, p.1215-1224.