Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

Сергєєв Артур Георгійович

УДК 517.9

ВИЩІ СИМЕТРІЇ ТА ПАРАСУПЕРСИМЕТРІЇ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

01.01.03 – математична фізика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Науковий керівник
НІКІТІН
Анатолій Глібович
доктор фіз.–мат. наук,
професор

Київ – 2000

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Поняття симетрії і його узагальнення поза сумнівом відіграють сьогодні одну з провідних ролей у сучасній математичній фізиці. Симетрійна мова виявилася адекватною в теорії скінченно- та нескінченновимірних інтегровних систем [42], теорії біфуркацій і атракторів [110], в багатьох задачах квантової механіки [57, 56, 88], квантової теорії поля (див. напр. [44]), зокрема в теорії струн [21], та ін.

Чільне місце у цій проблематиці посідає класичний спадок Лі (див., зокрема, [95, 96]), що нині перетворився на розвинені та потужні теорію груп і алгебр Лі та їх зображень (див. напр. [19, 23] і наведені там посилання) та теорію симетрій диференціальних рівнянь в частинних похідних (див. [26, 42, 40, 49, 74, 75, 76] і наведені там посилання).

Потужним стимулом до застосування симетрій стало усвідомлення того факту, що у більшості випадків наявність достатнього запасу симетрій гарантує точну розв'язність (інтегровність) системи диференціальних рівнянь з частинними похідними. При цьому з'ясувалося, що для інтегровності потрібні не ліївські, а т.зв. узагальнені симетрії (інші назви – вищі симетрії або симетрії Лі – Беклунда), поняття про які вперше виникло фактично ще в роботі Ньотер [101], де було доведено знамениту теорему, що носить її ім'я, і остаточно викристалізувалось в основному в роботах Н.Х. Ібрагімова [26], П. Олвера [42] та ін. Докладний аналіз результатів і приоритетів в цій царині можна знайти в Розд. 5 книги [42]. Зазначимо лише, що для випадку (1+1)-вимірних систем роль наявності вищих симетрій як необхідної умови інтегровності було виявлено в роботах Н.Х. Ібрагімова, А.Б. Шабата, А.В. Михайлова, В.В. Соколова та ін. (див. оригінальні роботи [24, 27, 28] та огляди і монографію [26, 36, 50]).

Принагідно зауважимо, що вищі симетрії є ефективним знаряддям дослідження не лише нелінійних, а й лінійних рівнянь (див. [56, 88] і наведені там посилання). Зокрема, як було показано у [4, 79, 33], вони можуть бути застосовані для розділення змінних та знаходження додаткових інтегралів руху і більше того, для розділення змінних в лінійній системі ДРЧП порядку n, взагалі кажучи, потрібно знати її симетрії порядку вище n [79]. Нещодавно також було встановлено [127], що *квазіточнорозв'язність* [53, 54, 122] стаціонарного рівняння Шредінгера пов'язана з існуванням т.зв. узагальнених умовних симетрій [85, 126] цього рівняння. Цікаво, що *дискретні* симетрії стаціонарного одновимірного рівняння Шредінгера тісно пов'язані з перетвореннями Дарбу і теж відіграють важливу роль в спектральній теорії відповідних операторів Шредінгера [5, 38].

Оскільки термін "вищі симетрії" досить часто вживають на позначення узагальнених симетрій порядку, вищого за порядок розглядуваного рівняння чи системи рівнянь, ми в подальшому будемо вживати його саме в цьому значенні, а в інших випадках вживатимемо термін "узагальнені симетрії", що вже набув широкого міжнародного поширення.

Б. Фукштайнером і А. Фокашем [83, 84] було введено два важливих поняття мастерсиметрії і спадкового оператора. Повторне взяття комутатора мастерсиметрії з однією вищою стаціонарною симетрією або застосування до неї оператора рекурсії породжує за деяких додаткових технічних вимог нескінченну ієрархію вищих стаціонарних симетрій еволюційного рівняння, причому якщо оператор рекурсії є спадковим, а його похідна Лі відносно цієї симетрії є нульовою, отримана ієрархія буде комутативною. Дослідження в цьому напрямку було продовжено Б. Фукштайнером зі співробітниками у [86] та наступних роботах (див. огляд результатів, отриманих в рамках цього підходу, та докладну бібліографію в книзі [67]).

Як добре відомо, необхідною умовою існування мастерсиметрій для еволюційних рівнянь є існування *поліноміально залежних від часу* симетрій. Крім того, в застосуваннях часто виникають (див. напр.[87, 98] і наведені там посилання) інтегровні еволюційні рівняння з залежними від часу коефіцієнтами, для яких потрібно з самого початку розглядати всю множину нестаціонарних узагальнених симетрій, а не лише її стаціонарну частину, однак безпосереднє узагальнення техніки класифікації інтегровних рівнянь, обчислення симетрій і т.д., розвинутої для рівнянь з незалежними від часу коефіцієнтами, не завжди можливе в силу ряду труднощів, пов'язаних з включенням часу t до набору динамічних змінних [45]. Отже, природним чином виникає задача знаходження всіх, як локальних, так і нелокальних, залежних від часу симетрій еволюційних рівнянь.

Ця задача розглядалася, зокрема, в роботі А.М. Виноградова та Й.С. Красільщіка [12], де було знайдено всі локальні узагальнені симетрії рівнянь Кортевега – де Фріза і Бюргерса, в роботі Б.А. Магадєєва і В.В. Соколова [32], де незалежно від [12] було знайдено всі локальні узагальнені симетрії рівняння Кортевега – де Фріза та отримано деякі інші цікаві результати, в книгах А.М. Виноградова та ін. [13, 49], де було запропоновано загальну схему дослідження локальних узагальнених симетрій еволюційних рівнянь (яку, однак, не було реалізовано в більш або менш загальній ситуації), в роботі Б. Флаха [81], де розглядалася залежність вищих симетрій таких рівнянь від старших похідних, а також в роботах А.Ю. Орлова і Є.І. Шульмана [43, 105], де було запропоновано загальну схему пошуку нестаціонарних симетрій довільної інтегровної системи в (1+1) вимірах, що має зображення нульової кривизни, сумісних з цим зображенням, та роботах А.Ю. Орлова і П. Вінтерніца [14, 106, 107] по узагальненню цієї схеми на (2+1)-вимірний випадок та її застосуванню до ієрархії Кадомцева — Петвіашвілі. Не можна не згадати також роботу Б.А. Магадєєва [31], в якій було описано всі можливі скінченновимірні алгебри Лі контактних симетрій, які можуть допускатися (1+1)-вимірними скалярними еволюційними рівняннями.

Однак авторам цих та інших робіт не вдалося отримати повний розв'язок вказаної задачі навіть для найпростішого випадку (1+1)-вимірних скалярних еволюційних рівнянь загального вигляду за відсутності, наприклад, припущення про їх інтегровність в тому чи іншому сенсі. Зокрема, були практично відсутні скільки-небудь загальні результати про структуру алгебр Лі нестаціонарних локальних узагальнених симетрій таких рівнянь, а схема дослідження таких алгебр, запропонована А.М. Виноградовим та ін. [13, 49], в загальному випадку досі залишалася нереалізованою. Саме дослідженню структури цих алгебр Лі для випадку (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь загального вигляду (не обов'язково інтегровних), а також невироджених слабко діагоналізовних систем таких рівнянь і присвячено Розділи 1 і 2 дисертації.

Серед узагальнених симетрій важливе місце посідають *суперсиметрії*, що виявилися найбільш адекватним математичним виразом давньої ідеї про симетричне входження бозонів і ферміонів до майбутньої єдиної теорії поля [11, 21, 55]. Суперсиметрії відіграють важливу роль не лише в квантовій теорії поля, а і в релятивістській та нерелятивістській квантовій механіці [125, 16, 70, 17, 72]. Зокрема, було виявлено приховану суперсиметрію для рівняння Дірака в деяких зовнішніх електромагнітних полях, наприклад в полі Кулона [118, 119], а використання парасуперсиметрії[1] дозволило досягти значних успіхів в побудові задовільної теорії масивних частинок спіну 1, яка розвивалася зокрема у роботах Ж. Бекерса, Н. Деберг, А.Г. Нікітіна [63, 64]. Зокрема, було виявлено парасуперсиметрію нового рівняння для масивної частинки спіну 1 для випадку постійного однорідного магнітного поля, запропо-

[1] Примітка. Це поняття було введено в роботах [108] та [62]. Див. також подальші роботи [60, 91, 92, 77] і огляд [72].

нованого в [64], тому цікаво було б з'ясувати, чи існує, за аналогією з рівнянням Дірака, парасуперсиметрія для частинки спіну 1 в полі Кулона, причому в силу існування аномалії Корбена – Швінгера [73] для частинок спіну 1 доцільно розглянути дещо змінену модель – т.зв. модифіковане рівняння Штюкельберга з гіромагнітним відношенням 2. Саме цьому і присвячено Розділ 3 дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота проводилась згідно з загальним планом досліджень відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є аналіз структури узагальнених симетрій нелінійних (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь порядку не нижче двох і невироджених слабко діагоналізовних систем таких рівнянь, і зокрема отримання формул для ведучих членів похідних Фреше таких симетрій, та знаходження парасуперсиметрій і побудова точних розв'язків модифікованого рівняння Штюкельберга в полі Кулона для випадку станів дискретного спектру.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну і виносяться на захист, наступні:

1. Знайдено достатню умову (квазі)поліноміальності по часу узагальнених симетрій для широкого класу (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь порядку не нижче двох, інваріантних відносно зсувів по просторовій змінній x і часу t, зокрема для рівнянь зі сталою сепарантою.

2. Знайдено достатню умову відсутності поліноміальних по часу t (окрім стаціонарних) симетрій достатньо високого порядку для інтегровного (1+1)-вимірного еволюційного рівняння порядку не

нижче двох з незалежними від t коефіцієнтами, що володіє нетривіальними канонічними щільностями законів збереження, і з її допомогою знайдено всі локальні узагальнені симетрії рівняння Гаррі Дима, модифікованого рівняння КдФ та деяких інших важливих рівнянь математичної фізики.

3. Описано загальний вигляд залежності від x узагальнених симетрій (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь порядку не нижче двох, інваріантних відносно зсуву по x.

4. Подано узагальнення названих вище результатів на випадок невироджених слабко діагоналізовних систем (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь порядку не нижче двох.

5. Знайдено повний набір станів дискретного енергетичного спектра в полі Кулона для модифікованого рівняння Штюкельберга і виявлено приховану парасуперсиметрію при певних значеннях параметрів моделі.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути використані при розв'язуванні ряду конкретних задач математичної фізики. Результати Розділу 3 можуть бути використані в теоретичній фізиці як можлива модель опису руху масивної частинки спіну 1 у зовнішніх електромагнітних полях.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану діяльності та постановка задач належать науковому керівнику – А.Г. Нікітіну. Всі результати, що увійшли до дисертації, отримані дисертантом самостійно і опубліковані без співавторів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України, на VI і VII Міжнародних конференціях ім. акад. М. Кравчука (Київ, 1997, 1998), на II і III Міжнародних конференціях "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Київ, 1997 і 1999), XXX і XXXI Симпозіумах з математичної фізики (Торунь, Польща, 1998, 1999).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [46] – [48], [112] – [117].

Дисертацію в основному присвячено аналізу структури алгебр Лі локальних узагальнених симетрій (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь та слабко діагоналізовних систем таких рівнянь. При цьому використовується техніка формальних рядів по степенях повної похідної D по просторовій змінній x, розширена на випадок, коли коефіцієнти цих рядів можуть явно залежати від часу t. Розглянуто також приклад узагальнених симетрій (в даному випадку — парасуперсиметрій) системи звичайних диференціальних рівнянь, отриманих в результаті розділення змінних для модифікованого рівняння Штюкельберга.

Дисертація складається зі вступу, трьох розділів і списку використаних джерел.

Розділ 1 присвячено аналізу загальної структури нестаціонарних узагальнених симетрій та формальних симетрій (1+1)-вимірних нелінійних еволюційних рівняння порядку не нижче двох та невироджених слабко діагоналізовних систем таких рівнянь.

Перед тим як сформулювати здобуті результати, наведемо необхідні означення і позначення.

Розглянемо скалярне (1+1)-вимірне еволюційне рівняння

$$\partial u/\partial t = F(x,t,u,u_1,\ldots,u_n), \quad n \geq 2, \quad \partial F/\partial u_n \neq 0, \tag{1}$$

де $u_l = \partial^l u/\partial x^l$, $l = 0,1,2,\ldots$, $u_0 \equiv u$.

Узагальнене векторне поле вигляду $Q = G(x,t,u,\ldots,u_k)\partial/\partial u$ називається (локальною узагальненою) *симетрією* рівняння (1), якщо рівняння

$$\partial u/\partial\sigma = G(x,t,u,u_1,\ldots,u_k) \tag{2}$$

сумісне з (1) (див. напр. [42], с.391–392).

Якщо (2) сумісне з (1), то потік, асоційований з рівнянням (2), переводить один розв'язок (1) в інший за виконання умов відповідних теорем існування і єдиності розв'язків.

Ми будемо називати симетрію Q нестаціонарною (залежною від часу), якщо $\partial G/\partial t \neq 0$.

Функція $G(x,t,u,\ldots,u_k)$ називається *характеристикою* симетрії $Q = G\partial/\partial u$. Надалі ми будемо, якщо явно не вказано протилежне, ототожнювати симетрії з їх характеристиками.

Для будь-якої функції $H = H(x,t,u,u_1,\ldots,u_q)$ найбільше число m таке, що $\partial H/\partial u_m \neq 0$ називається її *порядком* і позначається $m = \operatorname{ord} H$. Якщо $H = H(x,t)$, то вважаємо, що $\operatorname{ord} H = 0$. Називатимемо функцію f змінних $x,t,u,u_1,\ldots$ *локальною*, якщо вона має скінченний порядок.

Надалі ми вважатимемо, не повторюючи цього щоразу окремо, що всі функції, які зустрічатимуться в тексті (симетрії, функції F і т.д.), є локально аналітичними функціями своїх аргументів.

Введемо наступні позначення: $S_F^{(k)}$ – простір симетрій порядку не вище k рівняння (1), $S_F = \bigcup_{j=0}^{\infty} S_F^{(j)}$, $\Theta_F = \{H(x,t) | H(x,t) \in S_F\}$, $S_{F,k} = S_F^{(k)}/S_F^{(k-1)}$ для $k = 1,2,\ldots$, $S_{F,0} = S_F^{(0)}/\Theta_F$, $Ann_F = \{G \in S_F | \dfrac{\partial G}{\partial t} = 0\}$.

Надалі ми завжди розглядатимемо залежні від часу симетрії рівняння (1) з $\partial F/\partial t = 0$ як елементи фактор-простору S_F/Ann_F. Інакше кажучи, ми завжди будемо виключати з залежних від часу симетрій члени, що є лінійними комбінаціями стаціонарних симетрій.

S_F є алгеброю Лі відносно *дужки Лі* (див. [42], с.387, [50], с.134),

$$\{g,h\} = h_*(g) - g_*(h),$$

де $f_* = \sum\limits_{i=0}^{\mathrm{ord}\, f} \partial f/\partial u_i D^i$, $\nabla_f = \sum\limits_{i=0}^{\infty} D^i(f)\partial/\partial u_i$, а $D = \dfrac{\partial}{\partial x} + \sum\limits_{i=0}^{\infty} u_{i+1}\dfrac{\partial}{\partial u_i}$ і $D_t = \partial/\partial t + \nabla_F$ – оператори повних похідних по змінних x і t [42], с.588. $\mathrm{Im}\, D$ позначатиме нижче образ простору локальних функцій під дією оператора D.

Нагадаємо, що формальний ряд по степенях D – це вираз вигляду $\mathrm{H} = \sum\limits_{j=-\infty}^{m} h_j(x, t, u, u_1, \ldots)D^j$. Найбільше ціле число m таке, що $h_m \neq 0$, називається *степенем* формального ряду H і позначається $\deg \mathrm{H}$ (див. напр. [35, 100]; на відміну від цих робіт ми допускаємо залежність коефіцієнтів формального ряду від t і x). Надалі будемо для скорочення викладу говорити "формальний ряд" замість "формальний ряд по степенях D".

Формальною симетрією рангу p рівняння (1) називається такий формальний ряд R, що (див. [103], с.323)

$$\deg(\partial \mathrm{R}/\partial t + \nabla_F(\mathrm{R}) - [F_*, \mathrm{R}]) \leq \deg F_* + \deg \mathrm{R} - p. \tag{3}$$

Аналогічно, формальна симетрія нескінченного рангу рівняння (1) – це такий формальний ряд R, що задовольняє співвідношення (див. там же)

$$\partial \mathrm{R}/\partial t + \nabla_F(\mathrm{R}) - [F_*, \mathrm{R}] = 0. \tag{4}$$

В підрозділі 1 Розділу 1 досліджено структуру розв'язку визначальних рівнянь для похідної Фреше G_* узагальненої симетрії G, і зокрема показано, що для будь-якої симетрії G, $\mathrm{ord}\, G = k \geq n_0$, маємо

$$\partial G/\partial u_k = c_k(t)\Phi^{k/n},$$

де $c_k(t)$ – деяка функція t, $\Phi = \partial F/\partial u_n$,

$$n_0 = \begin{cases} \max(1-j, 0), \text{ коли } F \text{ така, що } \frac{\partial F}{\partial u_{n-i}} = \phi_i(x,t), \quad i = 0, \ldots, j, \\ 2 \ \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

В підрозділі 2 Розділу 1 отримано наступні результати:

Твердження 1.2.1 *Будь-яку формальну симетрію* R *рівняння (1) степеня* r *і рангу* $p > n$ *можна представити у вигляді*

$$\mathrm{R} = \tilde{\mathrm{R}} + \sum_{j=r-n+1}^{r} d_j(t) F_*^{j/n} + \left(\frac{1}{n}\dot{d}_r(t) D^{-1}(\Phi^{-1/n}) - \frac{r}{n} d_r(t) D^{-1}(D_t(\Phi^{-1/n}))\right) F_*^{\frac{r-n+1}{n}},$$

де $d_j(t)$ *– деякі функції* t*,* $\tilde{\mathrm{R}}$ *– деякий формальний ряд,* $\deg \tilde{\mathrm{R}} < r-n+1$.

Точка над літерою тут і далі позначатиме *частинну* похідну по часу t.

Наслідок 1.2.1 *Для будь-якої симетрії* $G \in S_F$ *порядку* $k > n+n_0-2$

$$G_* = \mathrm{N} + \sum_{j=k-n+1}^{k} c_j(t) F_*^{j/n} + \left(\frac{1}{n}\dot{c}_k(t) D^{-1}(\Phi^{-1/n}) - \frac{k}{n} c_k(t) D^{-1}(D_t(\Phi^{-1/n}))\right) F_*^{\frac{k-n+1}{n}},$$

де $c_j(t)$ *– деякі функції* t*, а* N *– деякий формальний ряд,* $\deg \mathrm{N} < k-n+1$.

Для $n_0 \le k \le n+n_0-2$

$$G_* = \mathrm{N} + \sum_{j=n_0}^{k} c_j(t) F_*^{j/n},\ \deg \mathrm{N} < n_0.$$

Теорема 1.2.1 *Якщо* $\Phi^{-1/n} \notin \operatorname{Im} D$*, а* $\nabla_F(\Phi^{-1/n}) \in \operatorname{Im} D$*, то рівняння (1) з* $\partial F/\partial t = 0$ *не має залежних від часу симетрій порядку вище* n.

Використовуючи Теорему 1.2.1, було доведено, що рівняння Гаррі Дима $u_t = u^3 u_3$ і рівняння Кавальканте – Тененблат $D^2(u_1^{-1/2}) + u_1^{3/2}$ мають лише по одній залежній від часу узагальненій симетрії: $\mathcal{D}_{HD} = xu_1 + 3tu^3u_3$ і $\mathcal{D}_{CT} = xu_1/3 + t(D^2(u_1^{-1/2}) + u_1^{3/2})$ відповідно.

Крім того, на основі (1.13) проаналізовано структуру симетрій рівнянь (1) з $\partial F/\partial t = 0$ і $\nabla_F(\Phi^{-1/n}) \notin \operatorname{Im} D$, і зокрема показано, що всі узагальнені симетрії рівняння $u_t = uu_2 + u_1^2$ еквівалентні точковим симетріям Лі.

В підрозділі 3 Розділу 1 з використанням Твердження 1.2.1 і Наслідку 1.2.1 доведено наступні

Твердження 1.3.1 *Нехай* P, Q *– формальні симетрії рівняння (1),* $\deg \mathrm{P} = p$*,* $\deg \mathrm{Q} = q$*, і ранги* P *і* Q *вище* n*. В силу Твердження 1.2.1* $\mathrm{P} = c_p(t) F_*^{p/n} + \tilde{\mathrm{P}}$ *і* $\mathrm{Q} = d_q(t) F_*^{q/n} + \tilde{\mathrm{Q}}$*,* $\deg \tilde{\mathrm{P}} < p$*,* $\deg \tilde{\mathrm{Q}} < q$.

Тоді $\deg[\mathrm{P},\mathrm{Q}] \le p+q-n$ *і*

$$[\mathrm{P},\mathrm{Q}] = \frac{1}{n}(pc_p(t)\dot{d}_q(t) - q\dot{c}_p(t)d_q(t))F_*^{\frac{p+q-n}{n}} + \tilde{\mathrm{R}},$$

де $\tilde{\mathrm{R}}$ *– деякий формальний ряд,* $\deg\tilde{\mathrm{R}} < p+q-n$.

Твердження 1.3.2 *Нехай* P, Q *– симетрії рівняння (1),* $\operatorname{ord} P = p$, $\operatorname{ord} Q = q$, $p, q > n+n_0-2$. *В силу (1.5) маємо* $\partial P/\partial u_p = c_p(t)\Phi^{p/n}$, $\partial Q/\partial u_q = d_q(t)\Phi^{q/n}$.

Тоді $\operatorname{ord}\{P,Q\} \le p+q-n$ *і*

$$\{P,Q\} = \frac{1}{n}(q\dot{c}_p(t)d_q(t) - pc_p(t)\dot{d}_q(t))\Phi^{\frac{p+q-n}{n}}u_{p+q-n} + \tilde{R},$$

де $\tilde{R}$ *– деяка локальна функція,* $\operatorname{ord}\tilde{R} < p+q-n$.

Твердження 1.3.3 $S_F^{(k)}$, $k = 0,\ldots,n$, *є підалгебрами алгебри Лі* S_F.

Як приклад застосування Твердження 1.3.2 знайдено достатню умову, за виконання якої всі *стаціонарні* узагальнені симетрії K_j порядку $k_j > n+n_0-2$ рівняння (1) з $\partial F/\partial t = 0$ і $n_0 < 2$, що допускає дилатацію $\mathcal{D} = tF + h(x,u,u_1)$, є однорідними відносно цієї дилатації з точністю до додавання до них стаціонарних симетрій нижчих порядків, тобто $\{\mathcal{D}, K_j\} = (k_j/n)K_j$.

Розглянемо тепер систему еволюційних рівнянь вигляду

$$\partial u^\alpha/\partial t = F^\alpha(x,t,u,\ldots,u_n),\ n \ge 2, \quad \alpha = 1,\ldots,s, \tag{5}$$

коли $u, u_1, \ldots$ і F, а також симетрії G є s-компонентними векторами.

Якщо матрицю $\Phi = \partial F/\partial u_n$ можна діагоналізувати за допомогою деякої матриці $\Omega = \Omega(x,t,u,u_1,\ldots)$, тобто матриця $\Lambda = \Omega\Phi\Omega^{-1}$ діагональна, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_s)$, і, крім того, усі власні значення матриці Φ невироджені, тобто $\lambda_i \ne \lambda_j$ при $i \ne j$, будемо називати систему (5) *слабко діагоналізовною*, а якщо виконується додаткова умова $\det\Phi \ne 0$, ми будемо називати відповідні системи (5) *невиродженими слабко діагоналізовними.*

Цю термінологію введено на підставі наступного

Твердження 1 *Нехай система (5) слабко діагоналізовна і* Ω *– матриця, що діагоналізує* Φ*. Тоді існує єдиний формальний ряд* $\mathrm{T} = \Omega + \Omega \sum\limits_{j=-1}^{-\infty} \Omega_j D^j$ *з властивістю* $\operatorname{diag} \Omega_j = 0$*,* $j = -1, -2, \ldots$ *і такий, що усі коефіцієнти формального ряду* $\mathrm{V} = \mathrm{T} F_* \mathrm{T}^{-1} + (D_t(\mathrm{T}))\mathrm{T}^{-1}$ *діагональні.*

Цей результат є очевидним узагальненням Твердження 3.1 статті [36] на випадок, коли $\partial F / \partial t \neq 0$.

В підрозділі 4 Розділу 1 отримано узагальнення результатів двох попередніх підрозділів на випадок невироджених слабко діагоналізовних систем. Сформулюємо найважливіші з цих результатів:

Твердження 1.4.1 *Будь-яку формальну симетрію* R *степеня* r *і рангу* $p > n$ *слабко діагоналізовної системи (5) з* $\det \Phi \neq 0$ *можна представити у вигляді*

$$\mathrm{R} = \tilde{\mathrm{R}} + \sum_{j=r-n+1}^{r} \mathrm{T}^{-1} d_j(t) \mathrm{V}^{j/n} \mathrm{T} + \mathrm{T}^{-1} \left(\frac{1}{n} \dot{d}_k(t) D^{-1}(\Lambda^{-1/n}) - \right.$$
$$\left. \frac{r}{n} d_r(t) D^{-1}(D_t(\Lambda^{-1/n})) \right) \mathrm{V}^{\frac{r-n+1}{n}} \mathrm{T},$$

де $d_j(t)$ *– деякі діагональні* $s \times s$ *матриці, а* $\tilde{\mathrm{R}}$ *– деякий формальний ряд,* $\deg \tilde{\mathrm{R}} < r - n + 1$*.*

Наслідок 1.4.1 *Для будь-якої симетрії* G *порядку* $k > n + n_0 - 2$ *слабко діагоналізовної системи (5) з* $\det \Phi \neq 0$

$$G_* = \mathrm{N} + \sum_{j=k-n+1}^{k} \mathrm{T}^{-1} c_j(t) \mathrm{V}^{j/n} \mathrm{T} + \mathrm{T}^{-1} \left(\frac{1}{n} \dot{c}_k(t) D^{-1}(\Lambda^{-1/n}) - \right.$$
$$\left. \frac{k}{n} c_k(t) D^{-1}(D_t(\Lambda^{-1/n})) \right) \mathrm{V}^{\frac{k-n+1}{n}} \mathrm{T},$$

де $c_j(t)$ *– деякі діагональні* $s \times s$ *матриці, а* N *– деякий формальний ряд,* $\deg \mathrm{N} < k - n + 1$*.*

Для $n_0 \leq k \leq n + n_0 - 2$

$$G_* = \mathrm{N} + \sum_{j=n_0}^{k} \mathrm{T}^{-1} c_j(t) \mathrm{V}^{j/n} \mathrm{T}, \ \deg \mathrm{N} < n_0.$$

Теорема 1.4.1 *Якщо для всіх власних значень* λ_i *матриці* Φ $\lambda_i^{-1/n} \notin \operatorname{Im} D$, *а* $\nabla_F(\lambda_i^{-1/n}) \in \operatorname{Im} D$, *то невироджена слабко діагоналізовна система (5) з* $\dfrac{\partial F}{\partial t} = 0$ *не має залежних від часу симетрій порядку вище* n.

Як приклад застосування цієї теореми, показано, що єдиною залежною від часу узагальненою симетрією інтегровної системи Вадаті – Конно – Ішікави $u_t = D^2(u(1+uv)^{-1/2})$, $v_t = -D^2(v(1+uv)^{-1/2})$ є дилатація $\mathcal{D} = (xu_1 + 2tD^2(u(1+uv)^{-1/2}))\partial/\partial u + (xv_1 - 2tD^2(v(1+uv)^{-1/2}))\partial/\partial v$, яка еквівалентна точковій симетрії Лі.

Твердження 1.4.2 *Нехай* P, Q *– формальні симетрії невиродженої слабко діагоналізовної системи (5),* $\deg \mathrm{P} = p$, $\deg \mathrm{Q} = q$, *і ранги* P *і* Q *вище* n. *З Твердження 1.4.1 випливає, що* $\mathrm{P} = \mathrm{T}^{-1} c_p(t) \mathrm{V}^{p/n} \mathrm{T} + \tilde{\mathrm{P}}$ *і* $\mathrm{Q} = \mathrm{T}^{-1} d_q(t) \mathrm{V}^{p/n} \mathrm{T} + \tilde{\mathrm{Q}}$, $\deg \tilde{\mathrm{P}} < p$, $\deg \tilde{\mathrm{Q}} < q$.

Тоді $\deg[\mathrm{P}, \mathrm{Q}] \le p + q - n$ *і*

$$[\mathrm{P}, \mathrm{Q}] = -\mathrm{T}^{-1} \frac{1}{n} (q \dot{c}_p(t) d_q(t) - p c_p(t) \dot{d}_q(t)) \mathrm{V}^{\frac{p+q-n}{n}} \mathrm{T} + \tilde{\mathrm{R}},$$

де $\tilde{\mathrm{R}}$ *– деякий формальний ряд,* $\deg \tilde{\mathrm{R}} < p + q - n$.

Твердження 1.4.3 *Нехай* P, Q *– симетрії невиродженої слабко діагоналізовної системи (5),* $\operatorname{ord} P = p$, $\operatorname{ord} Q = q$, $p, q > n + n_0 - 2$. *В силу Наслідку 1.4.1 маємо* $\partial P/\partial u_p = \Omega^{-1} c_p(t) \Lambda^{p/n} \Omega$, $\partial Q/\partial u_q = \Omega^{-1} d_q(t) \Lambda^{q/n} \Omega$.

Тоді $\operatorname{ord}\{P, Q\} \le p + q - n$ *і*

$$\{P, Q\} = \frac{1}{n} \Omega^{-1} (q \dot{c}_p(t) d_q(t) - p c_p(t) \dot{d}_q(t)) \Lambda^{\frac{p+q-n}{n}} \Omega u_{p+q-n} + \tilde{R},$$

де $\tilde{R}$ *– деяка локальна вектор-функція,* $\operatorname{ord} \tilde{R} < p + q - n$.

Доведено також, що Твердження 1.3.3 виконується для довільних невироджених слабко діагоналізовних систем при $n_0 < 2$.

В **Розділі 2** розглядаються узагальнені симетрії рівнянь (1) та слабко діагоналізовних систем (5), інваріантних відносно зсувів по t або x.

В підрозділі 1 Розділу 2 вперше в літературі наведено строге і коректне доведення Теорем 3.1 і 3.2 зі статті А.В. Шаповалова та І.В. Широкова [58] і зазначено, що допоміжне твердження про можливість одночасного зведення кількох комутуючих матриць до жорданової нормальної форми, на яке спирались оригінальні доведення цих теорем, – хибне.

В підрозділі 2 цього розділу отримано наступні результати:

Теорема 2.2.1 *Якщо* $\dim S_F^{(1)} < \infty$ *і* $\partial F/\partial t = 0$, *то для всіх* $k \geq n_0$

$$\dim S_F^{(k)} \leq m_F + \sum_{p=n_0}^{k} \left(\left[\frac{p - n_0}{n-1} \right] + 3 \right) < \infty.$$

Наслідок 2.2.1 *Якщо* $\dim S_F^{(1)} < \infty$ *і* $\partial F/\partial t = 0$, *то будь-яка симетрія* $G \in S_F^{(k)}$ *рівняння (1) є лінійною комбінацією симетрій вигляду*

$$Q = \exp(\lambda t) \sum_{j=0}^{q} Q_j(x, u, \ldots, u_k) t^j,$$

де $\lambda \in \mathbb{C}$, $q \leq \dim S_F^{(k)} - 1$.

Наслідок 2.2.2 *Якщо* $\dim S_F^{(1)} < \infty$ *і рівняння (1) з* $\partial F/\partial t = 0$ *має симетрію вигляду* $K = tF + h(x, u, u_1)$, *то усі симетрії рівняння (1) є поліномами по* t.

Твердження 2.2.1 *Якщо* $\dim S_{F,k} < \infty$, $k \geq n_0$, *і* $\partial F/\partial t = 0$, *будь-яка симетрія* $G \in S_{F,k}$ *є лінійною комбінацією симетрій вигляду*

$$Q = \exp(\lambda t) \sum_{j=0}^{s} Q_j(x, u, \ldots, u_k) t^j,$$

де $\lambda \in \mathbb{C}$, $s \leq \dim S_{F,k} - 1$.

В підрозділі 3 Розділу 2 досліджувалась структура симетрій рівнянь (1) з $\partial F/\partial x = 0$ і отримано наступні результати:

Теорема 2.3.1 *Будь-яку симетрію* G *порядку* k *рівняння (1) з* $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$ *можна представити у вигляді*

$$G = \psi(t, x, u, u_1) + \sum_{j=0}^{s} x^j g_j(t, u, \ldots, u_{k-j(n-1)}), \quad s \leq r_{k,n,n_0-1},$$

причому при $n_0 \leq 1$

$$\partial\psi/\partial u_r = 0, \quad r = n_0, \dots, 1.$$

Тут $r_{k,n,-1} = \left[\dfrac{k}{n-1}\right]$ і для $q = 0, 1$

$$r_{k,n,q} = \begin{cases} \left[\dfrac{k}{n-1}\right] \text{ для } k \not\equiv 0, \dots, q \pmod{n-1}, \\ \max(0, \left[\dfrac{k}{n-1}\right] - 1) \text{ для } k \equiv 0, \dots, q \pmod{n-1}. \end{cases}$$

Нехай

$$\mathcal{B}_F = \begin{cases} \Theta_F, & \text{якщо} \quad n_0 = 0, \\ S_F^{(n_0-1)} & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 2.3.2 *Якщо для рівняння (1) з* $\dfrac{\partial F}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\left(\dfrac{\partial F}{\partial u_n}\right)^{-1/n} = a + K(u, \dots, u_n)$, *де* $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $K \in \operatorname{Im} \tilde{D}$, $\nabla_F(K) \in \operatorname{Im} \tilde{D}$, *і всі симетрії з простору* $S_F^{(n-2+n_0)}/\mathcal{B}_F$ *є поліномами (або лінійними комбінаціями квазіполіномів) по* t, *то таку ж властивість мають усі симетрії цього рівняння з простору* $S_F/\mathcal{B}_F$.

Нагадаємо, що квазіполіномами називаються вирази вигляду $\exp(\lambda t) \times \times P(t)$, де $\lambda \in \mathbb{C}$, а P – поліном.

В цьому ж підрозділі показано, що Теорема 2.3.1 виконується для довільних невироджених слабко діагоналізовних систем (5), і отримано узагальнення Теореми 2.3.2 для таких систем:

Теорема 2.3.3 *Якщо для невиродженої слабко діагоналізовної системи (5) з* $\partial F/\partial t = 0$, $\partial F/\partial x = 0$, $\lambda_i^{-1/n} = a_i + K_i(u, \dots, u_n)$, *де* $a_i \in \mathbb{C}$, $a_i \neq 0$, $K_i \in \operatorname{Im} \tilde{D}$, $\nabla_F(K_i) \in \operatorname{Im} \tilde{D}$, $i = 1, \dots, s$, *і всі симетрії з простору* $S_F^{(n-2+n_0)}/\mathcal{B}_F$ *є поліномами або лінійними комбінаціями квазіполіномів по* t, *то таку ж властивість мають усі симетрії цього рівняння з простору* $S_F/\mathcal{B}_F$.

В п.2.3.1 цього підрозділу також показано, що у випадку $b = \dim \mathcal{B}_F < \infty$ для симетрій з простору $S_F/\mathcal{B}_F$ у Теоремі 2.3.1 можна вважати поліномом по x степеня не вище $b + r_{k,n,n_0-1}$.

В п. 2.3.2 досліджено залежність від x стаціонарних симетрій рівняння (1) з $\partial F/\partial x = 0$ і дещо уточнено для них результат Теореми 2.3.1.

Крім того, в п.2.3.3 показано, що коли для деякого $m \in \{-1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ $D_t(\rho_m^a) \notin \operatorname{Im} D$, $a = 1, \ldots, s$, де ρ_m^a – щільність канонічного закону збереження невиродженої слабко діагоналізовної системи (5) з $\partial F/\partial t = 0$ (аналогічно, $D_t(\rho_m) \notin \operatorname{Im} D$ для випадку рівняння (1)), то розглядувана система (або рівняння) не мають поліноміальних по t узагальнених симетрій порядку вище $n + m + n_0 - 1$. Цим узагальнено відомий аналогічний результат [36], що стосувався незалежних від t узагальнених симетрій.

З використанням отриманих результатів показано, що система Бакірова $u_t = u_4 + v^2, v_t = v_4/5$ має лише одну узагальнену симетрію, яка нееквівалентна точковій симетрії Лі, чим посилено аналогічний результат Бойкерса, Сандерса і Ванг для незалежних від x і t узагальнених симетрій.

В підрозділі 4 Розділу 2 розглянуто інтегровне еволюційне рівняння (1) з $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, причому в якості критерія інтегровності вибрано наявність незалежної від часу формальної симетрії L, $\deg \mathrm{L} \neq 0$, нескінченного рангу.

Відомо, що може існувати щонайбільше одна (з точністю до додавання лінійної комбінації симетрій $Z \in Ann_F$, для яких $[\nabla_Z - Z_*, \mathrm{L}] = 0$) така симетрія $Y \in Ann_F$, що $[\nabla_Y - Y_*, \mathrm{L}] \neq 0$. Виберемо Y так, щоб вона мала найменший можливий порядок r, додаючи до неї, якщо потрібно, підходящу лінійну комбінацію елементів $Z \in Ann_F$, для яких $[\nabla_Z - Z_*, \mathrm{L}] = 0$. Без втрати загальності вважатимемо надалі, що $\forall P \in (Ann_F \bigcap S_F/S_F^{(r)})$

$$[\nabla_P - P_*, \mathrm{L}] = 0. \tag{7}$$

Нехай

$$p_{_F}(m) = \begin{cases} m+n+1, \text{ якщо (7) виконується} \quad \forall P \in Ann_F, \\ \max(r, m+n+1) \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

Теорема 2.4.1 *Якщо рівняння (1) з* $\partial F/\partial t = 0$ *має стаціонарну формальну симетрію нескінченного рангу* L, $\deg \mathrm{L} \neq 0$, *і для деякого* $m \in \mathbb{N}$ $\rho_m \notin \operatorname{Im} D$, *причому для* $j = -1, 1, \ldots, m-1$, $j \neq 0$, $\rho_j \in \operatorname{Im} D$, *то (1) не має поліноміальних по* t *симетрій (крім, можливо, стаціонарних) з простору* $S_F/S_F^{(p_{_F})}$.

Ми називатимемо формальну симетрію невиродженої слабко діагоналізовної системи (5) *невиродженою* [36], с.10–11, якщо її старший коефіцієнт – невироджена матриця. Всюди далі ми, не обумовлюючи цього щоразу окремо, вважатимемо *стаціонарні* формальні симетрії невироджених слабко діагоналізовних систем невиродженими.

Теорема 2.4.2 *Якщо слабко діагоналізовна система (5) з* $\det \Phi \neq 0$ *і* $\partial F/\partial t = 0$ *має незалежну від часу формальну симетрію* L, $\deg \mathrm{L} \neq 0$, *нескінченного рангу, для всіх* $P \in Ann_F$ *виконується (7), і існує таке* $m \in \mathbb{N}$, *що* $\rho_m^l \notin \operatorname{Im} D$ *для всіх* $l = 1, \ldots, s$ *в той час як для* $j = -1, 1, \ldots, m-1$, $j \neq 0$, $\rho_j^a \in \operatorname{Im} D$ *для всіх* $a = 1, \ldots, s$, *то система (5) не має поліноміальних по часу локальних узагальнених симетрій (крім, можливо, стаціонарних) з простору* $S_F/S_F^{(m+n+1)}$.

Зазначимо, що твердження Теореми 2.4.2 залишається справедливим, якщо серед щільностей ρ_j^a, $j < m$, $j \neq 0$, є нетривіальні, але вони лінійно незалежні від щільності ρ_m^a з тим же a. Визначення щільностей ρ_j, ρ_k^l див. у статті [35], с.244–249, та у Розділі 2 цієї дисертації.

На підставі отриманих результатів запропоновано досить просту і ефективну схему знаходження всіх залежних від часу симетрій інтегровних еволюційних рівнянь, яка полягає в наступному:

Знаючи вигляд формальної симетрії розглядуваного рівняння, треба спершу знайти таке найменше $m \in \{-1, 1, 2, \ldots\}$, що щільність ρ_m нетривіальна. Якщо $m \neq -1$, слід перевірити, чи всі симетрії з простору $S_F/S_F^{(p_F)}$ вичерпуються поліномами по t, користуючись Наслідком 2.2.2 та Теоремою 2.3.3 або іншими методами. Якщо $m = -1$ або поліноміальність по t справді має місце, то за Теоремою 1.2.1 або 2.4.1 не існує залежних від часу симетрій порядку вище n або p_F. Нарешті, всі залежні від часу симетрії порядків $0, \ldots, n$ або $0, \ldots, p_F$ можна знайти шляхом безпосереднього обчислення (з використанням при потребі комп'ютерної алгебри). Розглянуто також узагальнення описаної вище схеми на випадок інтегровних невироджених слабко діагоналізовних систем (5).

Ефективність запропонованої схеми проілюстровано на прикладах рівняння мКдФ, і потенціальних рівнянь КдФ і мКдФ, рівняння Калоджеро – Дегаспеpіса – Фокаша, а також системи Хіроти – Сацуми, для яких знайдено всі залежні від t узагальнені симетрії.

Крім того, показано, що коли рівняння (1) з $\dim S_F^{(1)} < \infty$ задовольняє умови Теореми 1.2.1 або 2.4.1 і володіє спадковою алгеброю, то ця алгебра обов'язково містить нескінченну кількість мастерсиметрій τ_j, що залежать від нелокальних змінних.

В **Розділі 3** розглянуто наступне узагальнення модифікованого рівняння Штюкельберга, запропонованого Бекерсом, Деберг і Нікітіним [64]:

$$(D_\mu D^\mu + m_{eff}^2)B^\nu + iegF_\rho^\nu B^\rho = 0, \qquad (8)$$

де $m_{eff}^2 = M^2 + k_2|e^2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/2|^{1/2}$, A^μ – це потенціали зовнішнього електромагнітного поля, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ – т.зв. "видовжені" похідні, e,g,M – відповідно заряд, гіромагнітне відношення і маса частинки (частинок), що описуються рівнянням (3.5).

Тут використовується "природна" система одиниць, в якій $\hbar = c = 1$, метричний тензор в 4-вимірному просторі Мінковського має вигляд $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}[1, -1, -1, -1]$, індекси, асоційовані з цим простором, позначаються малими грецькими літерами і пробігають значення від 0 до 3, $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, 4-вектори записуються у вигляді $J^\mu = (J^0, \mathbf{J})$, де жирна літера позначає тривимірний вектор (зокрема, $x^\mu = (t, \mathbf{r})$). Роль хвильової функції відіграє 4-вектор B^μ.

У Вступі до Розділу 3 подано короткий огляд і вмотивовано необхідність розгляду модифікованого рівняння Штюкельберга в якості "іграшкової" моделі, що описує поведінку релятивістської масивної частинки спіну 1 в полі Кулона.

У підрозділі 1 Розділу 3 наведено модифіковане за Бекерсом – Деберг – Нікітіним рівняння Штюкельберга і подано узагальнення (8) цієї модифікації на випадок частинок з довільним гіромагнітним відношенням g. В цьому узагальненні також дещо змінено вигляд доданка, що описує нелінійну взаємодію частинки з електромагнітним полем, у такий спосіб, щоб уникнути появи комплексних власних значень енергії для випадку поля Кулона.

Для випадку притягуючого поля Кулона

$$\mathbf{A} = 0, A^0 = -Ze/r, Z > 0 \tag{9}$$

у підрозд. 2 Розділу 3 знайдено рівні дискретного енергетичного спектру

$$E^{inj} = M/\sqrt{1 + \beta^2/(n + \mu_i + 1)^2} \tag{10}$$

де $n = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 0, 1, 2 \ldots$, $i = 0, 1, 2, 3$,

$$\mu_i = -1/2 + \sqrt{(j + 1/2)^2 - \beta^2 + 2\lambda_i + k_2\beta},$$
$$\lambda_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{(j + 1/2)^2 - (\beta g/2)^2}, \quad \lambda_3 = 0.$$

Знайдено також власні функції відповідних зв'язаних станів і показано, що при $k_2 = 0, j > 0, g = 2$ рівні (10) чотирикратно вироджені при $n > 1$, і це виродження пояснюється наявністю компонент зі спінами 0 і 1, причому трикратне виродження станів зі спіном 1, котре залишається після виключення компоненти зі спіном 0 шляхом накладання умови$D_\mu B^\mu = 0$, зумовлене наявністю прихованої парасуперсиметрії в розглядуваній задачі.

Показано, що у випадку $k_2 = 0$, $g = 2$ рівнянням для радіальних функцій станів дискретного спектру з повним моментом $j > 1$, отримані внаслідок розділення змінних, після накладання умови $D_\mu B^\mu = 0$ можна надати форму рівняння на власні значення гамільтоніана парасуперсиметричної квантової механіки Рубакова – Спірідонова, і побудовано узагальнені симетрії цих рівнянь – парасуперзаряди.

Встановлено також відсутність аномалії Корбена – Швінгера в розглядуваній моделі для випадку $k_2 = 0, j > 0, g = 2$.

Відзначимо, що, наскільки відомо автору, запропонована модель при $k_2 = 0$, $g = 2$ є першим прикладом парасуперсиметричної релятивістської системи з неосциляторною взаємодією.

Подяки. Автор щиро вдячний своєму науковому керівникові – доктору фізико-математичних наук, завідувачу відділу прикладних досліджень

Анатолію Глібовичу Нікітіну

за постановку задач, постійну увагу та допомогу в роботі.

Я вдячний також доктору Міхалу Марвану за допомогу в проведенні ряду обчислень, використаних в прикладах дисертації, за допомогою розробленої ним програми Jet.

На завершення висловлюю щиру вдячність усім учасникам наукового семінару відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України за цінні зауваження, зроблені при обговоренні результатів.

РОЗДІЛ 1

Про структуру нестаціонарних симетрій та формальних симетрій еволюційних рівнянь

Вступ

Як добре відомо [26, 42], всі відомі на сьогодні рівняння вигляду $u_t = F(x, u, u_1, \ldots, u_n)$, $n \geq 2$, що мають нескінченну кількість стаціонарних узагальнених симетрій як завгодно високого порядку, виявляються або лінеаризовними, як рівняння Бюргерса, або можуть бути проінтегровані за допомогою методу оберненої задачі розсіяння.

Більше того, для нелінійних рівнянь $u_t = F$ з поліноміальною функцією F вигляду $F = u_n + f(u, \ldots, u_{n-1})$, $n \geq 2$, Сандерс і Ванг [109] довели давнє припущення, яке вперше було чітко сформульоване Фокашем [82], с.255, про те, що наявність однієї стаціонарної узагальненої симетрії, відмінної від очевидних симетрій $u_1\partial/\partial u$ і $F\partial/\partial u$, що відповідають зсувам по x і t, веде до інтегровності розглядуваного рівняння (а для випадку s-компонентної векторної системи для інтегровності згідно цього припущення потрібно s таких симетрій). У випадку, коли такі рівняння допускають масштабну симетрію $\mathcal{D} = (tF + xu_1/n + \lambda u)\partial/\partial u$ з $\lambda > 0$, їм вдалося повністю описати усі інтегровні ієрархії таких рівнянь.

Слід однак зауважити, що припущення, яким явно чи неявно користувалося багато дослідників, про те, що наявність однієї вищої симетрії у еволюційної системи обов'язково веде до наявності нескіченної кількості таких симетрій невірне, як показує приклад системи Бакірова, котра має лише одну таку симетрію. Для симетрій, незалежних від x і t, це було строго доведено в роботі Ф. Бойкерса, Я. Сандерса і Дж.П. Ванг [65], а в п.2.3.3 даної роботи це твердження поширено і на випадок залежних від x і t симетрій системи Бакірова.

Наявність нескінченної кількості стаціонарних узагальнених симетрій у рівняння $u_t = F(x, u, \ldots, u_n)$, $n \geq 2$, веде до існування стаціонарної *формальної симетрії* нескінченного рангу (див. доведення цього твердження в [26], с.205). Зауважимо, що Соколовим (див. [50], с.160) було доведено, що коли таке рівняння має стаціонарну формальну симетрію нескінченного рангу, алгебра його стаціонарних узагальнених симетрій обов'язково містить нескінченновимірну комутативну підалгебру.

Існування стаціонарної формальної симетрії нескінченного рангу як необхідна умова інтегровності лежить в основі надзвичайно ефективного симетрійного підходу до перевірки інтегровності та класифікації інтегровних систем [35, 36, 50], який нещодавно було узагальнено на випадок (2+1)-вимірних інтегровних систем [100].

Оскільки існування такої формальної симетрії еквівалентне наявності нескінченної послідовності канонічних законів збереження (див. напр. [36],с.17), щільності яких можна обчислювати алгоритмічно, зокрема з використанням ЕОМ, в рамках цього підходу вперше вдалося пред'явити повні списки певних класів (1+1)-вимірних нелінійних еволюційних інтегровних систем. Слід однак зауважити, що підхід до опису інтегровних систем, що грунтується на наявності вищих симетрій, а не канонічних законів збереження, є більш загальним, оскільки існують інтегровні системи (які насправді як правило можна лінеаризувати підходящою підстановкою), що володіють вищими симетріями, але не мають нетривіальних канонічних законів збереження (див. напр. [104]).

З іншого боку, інтегровні еволюційні системи як правило володіють (взагалі кажучи, нелокальними) мастерсиметріями (див. напр. [67, 86]), необхідною умовою існування яких є наявність поліноміальних по часу симетрій, а для інтегровних еволюційних систем з залежними від часу коефіцієнтами [87, 98] потрібно з самого початку розглядати всю алгебру їх нестаціонарних симетрій.

Таким чином, як вже зазначалося у Вступі, природно виникає задача дослідження всієї алгебри нестаціонарних симетрій (як локальних, так і нелокальних) еволюційних рівнянь і систем.

Однак існує велика кількість різноманітних означень нелокальних симетрій та підходів до їх знаходження (див. напр. [1, 2, 13, 29, 30, 45, 49, 93]), зв'язки між якими досі остаточно не з'ясовано. Зокрема, запропонований у [13, 49] підхід до їх знаходження вимагає попередньої фіксації накриття над рівнянням і дозволяє знайти лише ті нелокальні симетрії, які асоційовані з даним накриттям. В той же час проблема опису всіх можливих накриттів даного рівняння, для яких алгебра асоційованих з ними нелокальних симетрій ширша за алгебру локальних симетрій, є дуже складною і на сьогодні далека від розв'язання (див. Розділ 6 у [49], зокрема с.346). З іншого боку, як показано в [29], якщо ввести одразу нескінченну кількість нелокальних змінних, то виявляється, що клас рівнянь, що володіють нелокальними симетріями і формальними симетріями, залежними від цих змінних, є дуже широким, тобто відбувається втрата зв'язку симетрійних властивостей з інтегровністю.

Тому, як перший етап розв'язання поставленої задачі, доцільно дослідити структуру алгебр Лі *локальних* узагальнених симетрій в найпростішому випадку (1+1)-вимірних скалярних еволюційних рівнянь.

Саме цьому і присвячено даний розділ. А саме, нами отримано формули для ведучих членів формальних симетрій та похідних Фреше узагальнених симетрій (1+1)-вимірного скалярного еволюційного рівняння $u_t = F(x, t, u, \ldots, u_n)$, $n \geq 2$, загального вигляду, і з їх використанням доведено ряд тверджень про структуру алгебри Лі узагальнених симетрій такого рівняння. Отримані результати також узагальнено на випадок невироджених слабко діагоналізовних систем.

1.1. Аналіз визначальних рівнянь для симетрій

Нагадаємо, що G є симетрією рівняння $u_t = F(x, t, u, \ldots, u_n)$ тоді і тільки тоді, коли (див. [42], с.389)

$$\partial G/\partial t = -\{F, G\}, \tag{1.1}$$

де $\{,\}$ – дужка Лі (див. с.11).

Для будь-яких локальних функцій P, Q змінних $x, t, u, u_1, \ldots$ зі співвідношення $R = \{P, Q\}$ випливає [51]

$$R_* = \nabla_P(Q_*) - \nabla_Q(P_*) + [Q_*, P_*], \tag{1.2}$$

$$[\nabla_P, \nabla_Q] = \nabla_R. \tag{1.3}$$

де $\nabla_P(Q_*) \equiv \sum\limits_{i,j=0}^{\infty} D^j(P) \dfrac{\partial^2 Q}{\partial u_j \partial u_i} D^i$ і аналогічно для $\nabla_Q(P_*)$; $[\cdot, \cdot]$ позначає звичайний комутатор лінійних диференціальних операторів.

Зокрема, з (1.1) дістаємо рівняння для похідної Фреше G_* симетрії G:

$$\partial G_*/\partial t \equiv (\partial G/\partial t)_* = \nabla_G(F_*) - \nabla_F(G_*) + [F_*, G_*]. \tag{1.4}$$

Збираючи члени при D^s, $s = 0, 1, 2, \ldots$ у лівій і правій сторонах (1.4), та користуючись формулою (див. [50], с.138)

$$\frac{\partial}{\partial u_s} D^m = \sum_{j=\max(s-m,0)}^{s} \mathrm{C}_m^{s-j} D^{m-s+j} \frac{\partial}{\partial u_j},$$

дістаємо наступні рівняння:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u_l \partial t} = \sum_{m=0}^{n} D^m(G) \frac{\partial^2 F}{\partial u_m \partial u_l} - \sum_{r=0}^{k} D^r(F) \frac{\partial^2 G}{\partial u_r \partial u_l}$$
$$+ \sum_{j=\max(0,l+1-n)}^{k} \; \sum_{i=\max(l+1-j,0)}^{n} \left[\mathrm{C}_i^{i+j-l} \frac{\partial F}{\partial u_i} D^{i+j-l} \left(\frac{\partial G}{\partial u_j} \right) \right.$$

$$-\mathrm{C}_j^{i+j-l}\frac{\partial G}{\partial u_j}D^{i+j-l}\left(\frac{\partial F}{\partial u_i}\right)\Bigg], \qquad l=0,\ldots,n+k-1, \tag{1.5}$$

де $\mathrm{C}_q^p = \dfrac{q!}{p!(q-p)!}$ і вважається, що $1/p! = 0$ для від'ємних цілих p.

Нехай

$$n_0 = \begin{cases} \max(1-j,0), \text{ коли } F \text{ така, що } \frac{\partial F}{\partial u_{n-i}} = \phi_i(x,t), i=0,\ldots,j, \\ 2 \ \text{ в інших випадках.} \end{cases} \tag{1.6}$$

Рівняння (1.5) з $l=k+n-1$ при $k \geq n_0$ має вигляд

$$n(\partial F/\partial u_n)D(\partial G/\partial u_k) - k(\partial G/\partial u_k)D(\partial F/\partial u_n) = 0,$$

і його загальний розв'язок можна представити у вигляді (див. [42], с.392)

$$\partial G/\partial u_k = c_k(t)\Phi^{k/n}, \tag{1.7}$$

де $c_k(t)$ – функція t, $\Phi = \partial F/\partial u_n$.

Надалі ми без втрати загальності вважатимемо, що коли функція $c_k(t)$ обертається на тотожний нуль, то те саме має місце для відповідної симетрії $G \in S_{F,k}$.

Рівняння (1.5) з $l=n+k-2, n+k-3, \ldots, n+n_0-1$, мають наступну структуру (пор. формулу (7.2) з [50] для випадку незалежних від часу симетрій):

$$n\frac{\partial F}{\partial u_n}D\left(\frac{\partial G}{\partial u_{l-n+1}}\right) - (l-n+1)\frac{\partial G}{\partial u_{l-n+1}}D\left(\frac{\partial F}{\partial u_n}\right) = \Omega_l + \frac{\partial^2 G}{\partial u_l \partial t}, \tag{1.8}$$

де Ω_l залежать від F та від її похідних різних порядків по $x, u, u_1, \ldots, u_n$, а також від $\partial G/\partial u_{l-n+2}, \ldots, \partial G/\partial u_k$ та їх *повних* похідних по x.

Підставляючи (1.7) до рівняння (1.8) з $l=n+k-2$ і розв'язуючи його, можна знайти $\partial G/\partial u_{k-1}$. Потім з рівняння (1.8) з $l=n+k-3$ можна знайти $\partial G/\partial u_{k-2}$, і т.д.

Користуючись лінійністю розглядуваних рівнянь по G і її похідних, в результаті дістаємо наступне представлення загального розв'язку рівнянь (1.5) для $l = n + n_0 - 1, \ldots, n + k - 2$:

$$\partial G/\partial u_i = c_i(t)\Phi^{i/n} + \sum_{p=i+1}^{k} \sum_{r=0}^{[\frac{p-i}{n-1}]} \chi_{i,p,r}(x, t, u, u_1, \ldots, u_k)\partial^r c_p/\partial t^r, \quad (1.9)$$

$i = n_0, \ldots, k-1$, а $c_i(t)$ – деякі довільні функції t, причому у випадку, коли $\partial F/\partial t = 0$, маємо $\partial\chi_{i,p,r}/\partial t = 0$. Підкреслимо, що на відміну від $c_i(t)$, вигляд функцій $\chi_{i,p,r}$ однозначно визначається виглядом функції F.

Зазначимо, що виконання умов сумісності

$$\partial^2 G/\partial u_i \partial u_j = \partial^2 G/\partial u_j \partial u_i$$

не випливає з рівнянь (1.5), і його, взагалі кажучи, слід вимагати окремо. Крім того, оскільки при розв'язуванні рівнянь (1.5) доводиться обертати оператор D, що не завжди можливо, розв'язок цих рівнянь у класі локальних функцій G, взагалі кажучи, може не існувати, або ж його існування може накладати нетривіальні умови на функції $c_j(t)$ (пор. §7 у [50]). Підкреслимо, що проведений вище аналіз рівнянь (1.5) з $l < k+n-1$ було проведено в припущенні, що такої патології не виникає.

1.2. Структура формальних симетрій

Нагадаємо, що для будь-якого формального ряду

$$\mathrm{H} = \sum_{j=-\infty}^{m} h_j(x, t, u, \ldots) D^j$$

степеня $m \neq 0$ існує [100] єдиний з точністю до множення на корінь степеня m з одиниці формальний ряд $\mathrm{H}^{1/m}$ степеня 1 (-1 для $m < 0$) такий, що $(\mathrm{H}^{1/m})^m = \mathrm{H}$. Завдяки цьому можна визначити дробові степені довільного ряду H з $\deg \mathrm{H} \neq 0$ як $\mathrm{H}^{q/m} = (\mathrm{H}^{1/m})^l$ для всіх цілих q. Крім того, для всіх цілих p і q має місце формула (див. [103], с.321)

$$[\mathrm{H}^{p/m}, \mathrm{H}^{q/m}] = 0. \quad (1.10)$$

Нехай $\mathrm{R} = \sum\limits_{j=-\infty}^{r} \rho_j(x,t,u,u_1,\ldots)D^j$ – формальна симетрія степеня r і рангу $p>1$ рівняння (1), тобто рівняння $u_t = F(x,t,u,\ldots,u_n)$, $n \geq 2$. В силу (3) коефіцієнти при D^q, $q > r+n-p$ у виразі $(\partial \mathrm{R}/\partial t + \nabla_F(\mathrm{R}) - [F_*,\mathrm{R}])$ мають дорівнювати нулю. Оскільки з іншого боку очевидно, що $\deg(\partial \mathrm{R}/\partial t + \nabla_F(\mathrm{R}) - [F_*,\mathrm{R}]) \leq r+n-1$, спершу слід прирівняти до нуля коефіцієнт при D^{r+n-1}, звідки дістаємо наступне рівняння:

$$n\partial F/\partial u_n D(\rho_r) - r\rho_r D(\partial F/\partial u_n) = 0,$$

звідки (див. [42], с.392)

$$\rho_r = d_r(t)\Phi^{r/n}, \tag{1.11}$$

де $d_r(t)$ – деяка функція t і $\Phi = \dfrac{\partial F}{\partial u_n}$. Отже, можна подати R у вигляді

$$\mathrm{R} = d_r(t)(F_*)^{r/n} + \tilde{\mathrm{R}}, \tag{1.12}$$

де $\tilde{\mathrm{R}}$ – деякий формальний ряд степеня не вище $r-1$. Більше того, користуючись формулою (1.10) для $\mathrm{H} = F_*$, ми знаходимо з (3), що $\tilde{\mathrm{R}}$ є формальною симетрією рівняння (1) степеня $r-1$ і рангу $p-1$. А тепер можна застосувати ті самі міркування до $\tilde{\mathrm{R}}$ і т.д. Має місце наступна

Лема 1.2.1 *Будь-яку формальну симетрію* R *рівняння (1) степеня r і рангу $p>1$ можна представити у вигляді*

$$\mathrm{R} = \mathrm{K} + \sum_{j=r-\min(p,n)+2}^{r} d_j(t)F_*^{j/n}, \tag{1.13}$$

де K *– деякий формальний ряд,* $\deg \mathrm{K} < r - \min(p,n)+2$*,* $d_j(t)$ *– деякі функції t.*

Якщо $p>n$, то коефіцієнт при D^r у виразі $(\partial \mathrm{R}/\partial t + \nabla_F(\mathrm{R}) - [F_*,\mathrm{R}])$ має дорівнювати нулю. Ця умова дає наступне рівняння на коефіцієнт ζ ряду K при D^{r-n+1}:

$$n\partial F/\partial u_n D(\zeta) - (r-n+1)\zeta D(\partial F/\partial u_n) = D_t(d_r(t)\Phi^{r/n}).$$

Розв'язавши це рівняння, яке по суті цілком аналогічне звичайному диференціальному рівнянню відносно ζ, і підставивши розв'язок до (1.13), дістанемо наступний результат:

Твердження 1.2.1 *Будь-яку формальну симетрію* R *рівняння (1) степеня r і рангу $p > n$ можна представити у вигляді*

$$\begin{gathered}\mathrm{R} = \tilde{\mathrm{R}} + \sum_{j=r-n+1}^{r} d_j(t) F_*^{j/n} + \Big(\frac{1}{n}\dot{d}_r(t) D^{-1}(\Phi^{-1/n}) - \\ \frac{r}{n} d_r(t) D^{-1}(D_t(\Phi^{-1/n}))\Big) F_*^{\frac{r-n+1}{n}},\end{gathered} \tag{1.14}$$

де $d_j(t)$ – деякі функції t, $\tilde{\mathrm{R}}$ – деякий формальний ряд, $\deg \tilde{\mathrm{R}} < r - n + 1$.

Точка над літерою тут і надалі позначатиме *частинну* похідну по часу t.

Далі, з (1.6) і (1.4) випливає наступна добре відома

Лема 1.2.2 *Якщо G – симетрія рівняння (1) порядку k, то G_* – формальна симетрія степеня k і рангу $k - n_0 + 2$.*

Леми 1.2.1 і 1.2.2 разом з Твердженням 1.2.1 дають наступний

Наслідок 1.2.1 *Для будь-якої симетрії $G \in S_F$ порядку $k > n + n_0 - 2$*

$$\begin{gathered}G_* = \mathrm{N} + \sum_{j=k-n+1}^{k} c_j(t) F_*^{j/n} + \Big(\frac{1}{n}\dot{c}_k(t) D^{-1}(\Phi^{-1/n}) - \\ \frac{k}{n} c_k(t) D^{-1}(D_t(\Phi^{-1/n}))\Big) F_*^{\frac{k-n+1}{n}},\end{gathered} \tag{1.15}$$

де $c_j(t)$ – деякі функції t, а N *– деякий формальний ряд,* $\deg \mathrm{N} < k - n + 1$.

Для $n_0 \leq k \leq n + n_0 - 2$

$$G_* = \mathrm{N} + \sum_{j=n_0}^{k} c_j(t) F_*^{j/n}, \ \deg \mathrm{N} < n_0. \tag{1.16}$$

Звідси неважко вивести наступний результат:

Теорема 1.2.1 *Якщо $\Phi^{-1/n} \notin \operatorname{Im} D$, а $\nabla_F(\Phi^{-1/n}) \in \operatorname{Im} D$, то рівняння (1) з $\partial F/\partial t = 0$ не має залежних від часу симетрій порядку вище n.*

Доведення. Аналізуючи члени, що стоять під D^{-1} у (1.15), ми бачимо, що коли $\Phi^{-1/n} \notin \operatorname{Im} D$, а $\nabla_F(\Phi^{-1/n}) \in \operatorname{Im} D$, G_* (а отже і G) стає нелокальним, і нелокальні члени зникають лише коли $\dot{c}_k(t) = 0$.

Тепер нам знадобиться наступна

Лема 1.2.3 *Якщо $G \in S_{F,k}$, $k \geq n_0$, і існує лінійний диференціальний оператор зі сталими коефіцієнтами $L = \sum\limits_{j=0}^{q} a_j \partial^j/\partial t^j$, $a_j \in \mathbb{C}$ такий, що $L(c_k(t)) = 0$, то $L(G) = 0$.*

Доведення леми. Припустимо, що твердження леми не виконується, тобто $L(G) = \tilde{G} \neq 0$. Очевидно, що $\tilde{G} \in S_F^{(k-1)}$ ($\tilde{G} \in \Theta_F$ для $k = 0$) і що визначальні рівняння (1.1) для $\tilde{G}$ не містять ні $c_k(t)$, ні її похідних. Оскільки за припущенням $G \in S_{F,k}$, G має зникати, якщо зникає $c_k(t)$. Але це неможливо, бо $\tilde{G}$ не залежить від $c_k(t)$ та її похідних, і за припущенням $\tilde{G} \neq 0$. Отриманого протиріччя можна уникнути лише за умови $\tilde{G} = 0$. $\square$

В силу щойно доведеної леми з $L = \partial/\partial t$ ясно, що коли $\Phi^{-1/n} \notin \operatorname{Im} D$, а $\nabla_F(\Phi^{-1/n}) \in \operatorname{Im} D$, рівняння (1) не має залежних від часу симетрій порядку вище $n + n_0 - 2$, бо такі симетрії для рівняння (1) з $\partial F/\partial t = 0$ визначені з точністю до додавання незалежних від часу симетрій.

Нарешті, з означення (1.6) числа n_0 ясно, що для $n_0 = 0, 1$ $\Phi^{-1/n} = \tilde{\phi}(x) \in \operatorname{Im} D$, а отже випадок $\Phi^{-1/n} \notin \operatorname{Im} D$ можливий лише для $n_0 = 2$. $\square$

Нагадаємо, що *мастерсиметрією* називається [86] така (взагалі кажучи, нелокальна) функція $\tau(x, u, u_1, \ldots)$, що для будь-якої стаціонарної узагальненої симетрії $K \in Ann_F$ рівняння (1) з $\partial F/\partial t = 0$ дужка Лі $\{\tau, K\}$ знову є стаціонарною узагальненою симетрією цього рівняння.

Функцію $B(x, u, u_1, \ldots)$ називатимемо *сильною мастерсиметрією* рівняння (1) з $\partial F/\partial t = 0$, якщо для будь-якої симетрії $P \in Ann_F$ $\{B, P\} \in Ann_F$ і $\{F, B\} \neq 0$. Як і для залежних від часу симетрій, ми завжди виключатимемо з мастерсиметрій члени, що є лінійними комбінаціями стаціонарних симетрій.

Якщо *локальна* функція B є сильною мастерсиметрією для рівняння (1), то очевидно, що $Q = B + t\{B, F\}$ буде залежною від часу симетрією рівняння (1), і $\operatorname{ord} Q \geq \operatorname{ord} B$. Звідси і з Теореми 1.2.1 негайно випливає

Наслідок 1.2.2 *Якщо $\Phi^{-1/n} \notin \operatorname{Im} D$, а $\nabla_F(\Phi^{-1/n}) \in \operatorname{Im} D$, то (1) з $\partial F/\partial t = 0$ не має локальних незалежних від часу сильних мастерсиметрій порядку вище n.*

Приклад 1. Розглянемо інтегровне рівняння Гаррі Дима (див., наприклад, [26], с.217)

$$u_t = u^3 u_3.$$

Очевидно, що $\Phi^{-1/3} = u^{-1} \notin \operatorname{Im} D$, але $\nabla_F(u^{-1}) \in \operatorname{Im} D$, і отже це рівняння не має залежних від часу симетрій порядку вище 3. Безпосереднє обчислення показує, що список його симетрій порядків $0, \ldots, 3$ вичерпується $xu_1 - u, u_1, xu_1 + 3tu^3u_3, u^3u_3$. Отже, рівняння Гаррі Дима має лише одну залежну від часу симетрію $\mathcal{D} = xu_1 + 3tu^3u_3$, яка еквівалентна точковій симетрії Лі. Неважко показати, що Ann_{HD} – комутативна алгебра Лі з базисом $\tilde{\mathcal{D}} = xu_1 - u$, $K_j = \mathrm{R}^j(u_1)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, де $\mathrm{R} = u^3 D^3 \circ u \circ D^{-1} \circ u^{-2}$ – спадковий оператор рекурсії рівняння Гаррі Дима (див. напр. [124], с.112). Тут і надалі ми вважатимемо, що всі константи інтегрування, які виникають внаслідок дії оператора інтегрування D^{-1}, дорівнюють нулю. Подальше обчислення дужок Лі елементів Ann_{HD} з $\mathcal{D}$ показує, що алгебра Лі S_{HD} локальних узагальнених симетрій рівняння Гаррі Дима має наступні комутаційні співвідношення:

$$\begin{aligned}
&\{K_i, K_j\} = 0, \\
&\{\tilde{\mathcal{D}}, K_j\} = 0, \\
&\{\mathcal{D}, K_j\} = (2j+1)K_j, \\
&\{\mathcal{D}, \tilde{\mathcal{D}}\} = 0,
\end{aligned}$$

де $i, j = 0, 1, 2, \ldots$. Очевидно, що алгебра S_{HD} розв'язна.

Приклад 2. Інтегровне рівняння Кавальканте – Тененблат (КТ) (див. [69] та [124], с.112)

$$u_t = D^2(u_1^{-1/2}) + u_1^{3/2}.$$

Оскільки $\Phi^{-1/3} = -2^{1/3}u_1^{-1/2} \notin \operatorname{Im} D$, але $\nabla_F(u_1^{-1/2}) \in \operatorname{Im} D$, в силу Теореми 1.2.1 воно не має залежних від часу симетрій порядку вище 3. Обчислення симетрій з $S_{CT}^{(3)}$ показує, що єдина залежна від t симетрія розглядуваного рівняння – це дилатація $\mathcal{D} = xu_1 + 3t(D^2(u_1^{-1/2}) + u_1^{3/2})$, еквівалентна точковій симетрії Лі. Легко перевірити, що Ann_{CT} – комутативна алгебра Лі, що є лінійною оболонкою генераторів $K_{-1} = 1$, $K_0 = u_1$, $K_j = \mathrm{R}^j(D^2(u_1^{-1/2}) + u_1^{3/2})$, $j \in \mathbb{N}$, де

$$\begin{aligned} \mathrm{R} = u_1^{-1}D^2 - \frac{3u_2}{2u_1^2}D - \frac{u_3}{2u_1^2} + \frac{3u_2^2}{4u_1^3} - \\ u_1 + \frac{1}{2}(D^2(u_1^{-1/2}) + u_1^{3/2})D^{-1} \circ u_1^{-3/2}u_2 \end{aligned}$$

– спадковий оператор рекурсії рівняння КТ (див. [124], с.112).

Алгебра Лі S_{CT} локальних узагальнених симетрій рівняння КТ має наступні комутаційні співвідношення:

$$\begin{aligned} &\{K_i, K_j\} = 0, \quad i, j = -1, 0, 1, 2, \ldots, \\ &\{\mathcal{D}, K_j\} = (2j+1)K_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \\ &\{\mathcal{D}, K_{-1}\} = 0. \end{aligned}$$

На завершення зауважимо для повноти викладу, що з (1.15) випливає, що у випадку, коли $D_t(\Phi^{-1/n}) \notin \operatorname{Im} D$, і функції $\Phi^{-1/n}$ та $D_t(\Phi^{-1/n})$ лінійно незалежні між собою над довільним полем $\mathbb{T}$ функцій часу t, то, очевидно, $c_k(t) = 0$, і отже рівняння (1) взагалі не має локальних узагальнених симетрій порядку вище $n + n_0 - 2$. Ясно, що такий випадок можливий лише при $n_0 = 2$. Якщо $\partial F/\partial t = 0$ і всі узагальнені симетрії рівняння (1) порядку не вище n є поліномами по t, то, як легко перевірити, умову лінійної незалежності $\Phi^{-1/n}$ і $D_t(\Phi^{-1/n})$ можна відкинути.

Зокрема, для рівнянь (1) другого порядку сказане означає, що коли функції $\Phi^{-1/n}$ і $D_t(\Phi^{-1/n})$ лінійно незалежні між собою над довільним полем $\mathbb{T}$ функцій часу t і $D_t(\Phi^{-1/n}) \notin \operatorname{Im} D$, всі узагальнені симетрії таких рівнянь еквівалентні точковим симетріям Лі або контактним симетріям.

Приклад 3. Розглянемо рівняння, що описує процеси поширення рідини в пористому середовищі, нелінійної теплопровідності та ін.,

$$u_t = uu_2 + u_1^2.$$

Легко перевірити, що воно задовольняє вказані вище умови і отже не має локальних узагальнених симетрій порядку вище 2. Подальше обчислення показує, що всі його узагальнені симетрії еквівалентні добре відомим з [41] точковим симетріям Лі ∂_t, ∂_x, $t\partial_t - u\partial_u$, $x\partial_x + 2u\partial_u$.

1.3. Деякі властивості алгебри симетрій і формальних симетрій

Легко перевірити (пор. [35], с.243, для випадку незалежних від часу формальних симетрій), що комутатор двох формальних симетрій рангів p і q знову є формальною симетрією рангу не нижче $\min(p,q)$, і отже множина $FS_{F,p}$ усіх формальних симетрій рівняння (1) рангу не нижче p є алгеброю Лі. У повній аналогії з симетріями через $FS_{F,p}^{(k)}$ будемо позначати множину формальних симетрій степеня не вище k і рангу не нижче p рівняння (1).Обчислення головного члена комутатора двох формальних симетрій дає наступний результат:

Твердження 1.3.1 *Нехай* P, Q *– формальні симетрії рівняння (1),* $\deg \mathrm{P} = p$*,* $\deg \mathrm{Q} = q$*, і ранги* P *і* Q *вище* n*. В силу Твердження 1.2.1* $\mathrm{P} = c_p(t)F_*^{p/n} + \tilde{\mathrm{P}}$ *і* $\mathrm{Q} = d_q(t)F_*^{q/n} + \tilde{\mathrm{Q}}$*,* $\deg\tilde{\mathrm{P}} < p$*,* $\deg\tilde{\mathrm{Q}} < q$*.*

Тоді $\deg[\mathrm{P},\mathrm{Q}] \le p+q-n$ *і*

$$[\mathrm{P},\mathrm{Q}] = \frac{1}{n}(pc_p(t)\dot{d}_q(t) - q\dot{c}_p(t)d_q(t))F_*^{\frac{p+q-n}{n}} + \tilde{\mathrm{R}}, \tag{1.17}$$

де $\tilde{\mathrm{R}}$ *– деякий формальний ряд,* $\deg\tilde{\mathrm{R}} < p+q-n$*.*

Доведення. З умов доводжуваного твердження та з Твердження 1.2.1 випливає, що P і Q мають вигляд

$$\mathrm{P} = \tilde{\mathrm{P}} + \sum_{j=p-n+1}^{p} c_j(t) F_*^{j/n} + \frac{1}{n} D^{-1} \left(\dot{c}_p(t) \Phi^{-1/n} - p c_p(t) (D_t(\Phi^{-1/n})) \right) F_*^{\frac{p-n+1}{n}},$$
$$\mathrm{Q} = \tilde{\mathrm{Q}} + \sum_{j=q-n+1}^{q} d_j(t) F_*^{j/n} + \frac{1}{n} D^{-1} \left(\dot{d}_q(t) \Phi^{-1/n} - q d_q(t) D_t(\Phi^{-1/n}) \right) F_*^{\frac{q-n+1}{n}},$$

де $c_j(t), d_j(t)$ – деякі функції t, $\tilde{\mathrm{P}}$, $\tilde{\mathrm{Q}}$ – деякі формальні ряди, $\deg \tilde{\mathrm{P}} < p - n + 1$, $\deg \tilde{\mathrm{Q}} < q - n + 1$.

Підставляючи отримані вирази до $[\mathrm{P}, \mathrm{Q}]$ і користуючись тим, що в силу (1.10) $[F_*^{r/n},\, F_*^{s/n}] = 0$ для всіх цілих r і s, дістаємо

$$[\mathrm{P}, \mathrm{Q}] = \Bigg[\tilde{\mathrm{P}} + \sum_{j=p-n+1}^{p} c_j(t) F_*^{j/n} + \frac{1}{n} D^{-1} \left(\dot{c}_p(t) \Phi^{-1/n} - p c_p(t) D_t(\Phi^{-1/n}) \right) F_*^{\frac{p-n+1}{n}},$$
$$\tilde{\mathrm{Q}} + \sum_{j=q-n+1}^{q} d_j(t) F_*^{j/n} + \frac{1}{n} D^{-1} \left(\dot{d}_q(t) \Phi^{-1/n} - q d_q(t) D_t(\Phi^{-1/n}) \right) F_*^{\frac{q-n+1}{n}} \Bigg] =$$
$$\left[\tilde{\mathrm{P}} + \frac{1}{n} D^{-1} \left(\dot{c}_p(t) \Phi^{-1/n} - p c_p(t) D_t(\Phi^{-1/n}) \right) F_*^{\frac{p-n+1}{n}}, \sum_{j=q-n+1}^{q} d_j(t) F_*^{j/n} \right] +$$
$$\Bigg[\tilde{\mathrm{P}} + \sum_{j=p-n+1}^{p} c_j(t) F_*^{j/n} + \frac{1}{n} D^{-1} \left(\dot{c}_p(t) \Phi^{-1/n} - p c_p(t) D_t(\Phi^{-1/n}) \right) F_*^{\frac{p-n+1}{n}},$$
$$\tilde{\mathrm{Q}} + \frac{1}{n} D^{-1} \left(\dot{d}_q(t) \Phi^{-1/n} - q d_q(t) D_t(\Phi^{-1/n}) \right) F_*^{\frac{q-n+1}{n}} \Bigg].$$

Легко переконатися в тому, що вклад з найвищим степенем D до нашого комутатора дадуть доданки

$$\left[c_p(t) F_*^{p/n}, \frac{1}{n} D^{-1} \left(\dot{d}_q(t) \Phi^{-1/n} - q d_q(t) D_t(\Phi^{-1/n}) \right) F_*^{\frac{q-n+1}{n}} \right] +$$
$$\left[\frac{1}{n} D^{-1} \left(\dot{c}_p(t) \Phi^{-1/n} - p c_p(t) D_t(\Phi^{-1/n}) \right) F_*^{\frac{p-n+1}{n}}, d_q(t) F_*^{q/n} \right] =$$
$$\left[c_p(t) F_*^{p/n}, \frac{1}{n} D^{-1} \left(\dot{d}_q(t) \Phi^{-1/n} - q d_q(t) D_t(\Phi^{-1/n}) \right) \right] F_*^{\frac{q-n+1}{n}} +$$
$$\left[\frac{1}{n} D^{-1} \left(\dot{c}_p(t) \Phi^{-1/n} - p c_p(t) D_t(\Phi^{-1/n}) \right), d_q(t) F_*^{q/n} \right] F_*^{\frac{p-n+1}{n}} =$$

$$\frac{1}{n}\left(pc_p(t)\dot{d}_q(t) - qd_q(t)\dot{c}_p(t)\right) F_*^{\frac{p+q-n}{n}} + \dots.$$

Звідси безпосередньо випливає наше твердження. $\square$

Наслідок 1.3.1 *Для всіх цілих q простори $FS_{F,r}^{(q)}$ інваріантні відносно приєднаної дії $FS_{F,m}^{(n)}$, якщо $r > n$ і $m > n$.*

Наслідок 1.3.2 *Для всіх цілих $q \le n$, $r > n$ $FS_{F,r}^{(q)}$ є підалгебрами в алгебрі Лі $FS_{F,r}$.*

Користуючись Твердженням 1.3.1, можна отримати аналогічний результат для узагальнених симетрій:

Твердження 1.3.2 *Нехай P, Q – симетрії рівняння (1),* $\operatorname{ord} P = p$, $\operatorname{ord} Q = q$, *$p, q > n + n_0 - 2$. В силу (1.7) маємо $\partial P/\partial u_p = c_p(t)\Phi^{p/n}$, $\partial Q/\partial u_q = d_q(t)\Phi^{q/n}$.*

Тоді $\operatorname{ord}\{P, Q\} \le p + q - n$ *і*

$$\{P, Q\} = \frac{1}{n}(q\dot{c}_p(t)d_q(t) - pc_p(t)\dot{d}_q(t))\Phi^{\frac{p+q-n}{n}} u_{p+q-n} + \tilde{R}, \tag{1.18}$$

де $\tilde{R}$ – деяка локальна функція, $\operatorname{ord}\tilde{R} < p + q - n$.

Доведення. Розглянемо дужку Лі $R = \{P, Q\}$ двох симетрій P і Q. Очевидно, $\operatorname{ord} R = \deg R_* \equiv r$, і з (1.2) можна легко знайти $\partial R/\partial u_r$: ця величина дорівнює сумі коефіцієнтів при D^r в правій стороні (1.2).

Очевидно, що $\deg \nabla_P(Q_*) \le q$ і $\deg \nabla_Q(P_*) \le p$. Більше того, неважко показати (пор. [26], с.196 для випадку незалежних від часу симетрій), що при $n_0 = 0, 1$ і $k \ge n_0$ для будь-якої симетрії G рівняння (1) маємо $\partial G/\partial u_i = \zeta_i(x, t)$, $i = \max(n_0, k - 1 + n_0), \dots, k$. Справді, для $i = k$ це випливає безпосередньо з (1.7). У випадку ж $n_0 = 0$, підставляючи вже доведену рівність $\partial G/\partial u_k = \zeta_k(x, t)$ до (1.9) з $l = k + n - 2$, дістанемо рівняння вигляду

$$n\frac{\partial F}{\partial u_n} D\left(\frac{\partial G}{\partial u_{k-1}}\right) - (k-1)\frac{\partial G}{\partial u_{k-1}} D\left(\frac{\partial F}{\partial u_n}\right) = \eta(x, t),$$

розв'язуючи яке відносно $\partial G/\partial u_{k-1}$, дістаємо шуканий результат.

Таким чином, $\deg \nabla_P(Q_*) \leq \max(0, q+n_0-2)$ і $\deg \nabla_Q(P_*) \leq \max(0, p+n_0-2)$ для $n_0 = 0, 1$ і $p, q \geq n_0$.

Зі сказаного і з Твердження 1.3.1, застосованого до комутатора $[P_*, Q_*]$, випливає, що при $n_0 = 0, 1$ для $p, q > n+n_0-2$ вклад найвищого степеня до R_* дає комутатор $[P_*, Q_*]$. Підставляючи ведучий член цього комутатора з (1.17) до R_* та інтегруючи по u_{p+q-n}, дістаємо доводжуване твердження.□

Наслідок 1.3.3 *Для всіх цілих $k \geq n+n_0-1$ простори $S_F^{(k)}$ інваріантні відносно приєднаної дії $S_F^{(n)}$, тобто дужка Лі будь-якої симетрії з $S_F^{(k)}$ з будь-якої симетрією з $S_F^{(n)}$ знову належить до $S_F^{(k)}$.*

Має місце також наступне

Твердження 1.3.3 *$S_F^{(k)}$, $k = 0, \ldots, n$, є підалгебрами алгебри Лі S_F.*

Доведення. Для $k = 0, 1$ доводжуване твердження добре відоме і легко перевіряється безпосереднім обчисленням дужки Лі двох симетрій. Для $k = 2, \ldots, n+n_0-2$, як і при доведенні Твердження 1.3.2 знаходимо порядок дужки Лі $R = \{P, Q\}$ двох симетрій P і Q порядку k, користуючись тим, що $\operatorname{ord} R = \deg R_*$,причому для оцінки степеня комутатора $[P_*, Q_*]$ підставляємо до нього вирази для P_* і Q_* з Наслідку 1.2.1 і знову використовуємо комутативність дробових степенів $F_*^{m/n}$ для цілих m. Нарешті, для $k = n+n_0-1, n$ доводжуваний результат безпосередньо випливає з Твердження 1.3.2. □

Твердження 1.3.2 дає розв'язок в загальному вигляді задачі про "оцінку згори" (див. [13], с.304) алгебри Лі S_F симетрій рівняння (1), а іноді навіть дозволяє повністю описати її структуру. В [13] для частинних випадків рівнянь Кортевега –де Фріза і Бюргерса цю теорему було доведено прямим обчисленням відповідних дужок Лі, і саме її використання в кінцевому підсумку дозволило описати структуру відповідних алгебр S_F.

Наслідок 1.3.3 також можна застосовувати для вивчення структури алгебри S_F, бо він дозволяє описувати простори $S_F^{(k)}$ як $S_F^{(n)}$-модулі з приєднаною дією $S_F^{(n)}$.

Твердження 1.3.3 є частковим узагальненням Твердження 10 з [50], яке стверджує, що для рівняння (1) з $\partial F/\partial t = 0$, що володіє незалежною від часу t формальною симетрією ненульового степеня і нескінченного рангу, множини $Ann_F \bigcap S_F^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, є підалгебрами Лі в S_F і $\dim(Ann_F \bigcap S_F^{(k)}) \leq n + k + 2$.

Результат Твердження 1.3.3 має наступне цікаве застосування: оскільки простори $S_F^{(k)}$, $k = 0, \dots, n$, є алгебрами Лі, в тому випадку, коли ці простори містять симетрії, що нееквівалентні точковим симетріям Лі, можна дещо скоротити списки розв'язків рівняння (1), інваріантних відносно дії елементів алгебри $S_F^{(k)}$, розглядаючи ці розв'язки з точністю до $S_F^{(k)}$-спряженості (пор. Розділ 3 у [42], де описано аналогічну процедуру для випадку симетрій Лі).

Розглянемо приклад застосування Твердження 1.3.2. Нехай рівняння (1) з $\dfrac{\partial F}{\partial t} = 0$ і $n_0 < 2$ має масштабну симетрію $\mathcal{D} = tF + h(x, u, u_1)$.

Далі, нехай K_j, $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ – базис в Ann_F, причому будемо вважати, що $\operatorname{ord} K_{i+1} > \operatorname{ord} K_i \equiv k_i$, якщо $k_i \geq n_0$. Нехай i_0 – таке, що для $i > i_0$ $\operatorname{ord} K_i > n + n_0 - 2$. Оскільки $\dim(Ann_F \bigcap S_F^{(1)}) \leq n + 3$ і $\dim(Ann_F \bigcap S_{F,k}) \leq 1$ для $k \geq 2$ (див. [50], с.138), виконання цих вимог завжди можна добитися.

В силу Твердження 1.3.2 при $j > i_0$ маємо

$$\{\mathcal{D}, K_j\} = \{h, K_j\} = \frac{k_j}{n}\alpha_j \left(\frac{\partial F}{\partial u_n}\right)^{k_j/n} u_{k_j} + \tilde{R}_j = \frac{k_j}{n} K_j + B_j \in Ann_F, \tag{1.19}$$

де сталі α_j визначаються з рівності (1.7): $\dfrac{\partial K}{\partial u_{k_j}} = \alpha_j \left(\dfrac{\partial F}{\partial u_n}\right)^{\frac{k_j}{n}}$, $\operatorname{ord} B_j < k_j$.

Далі, $B_j = \sum\limits_{i=0}^{j-1} b_{ji} K_i$, $b_{ji} = \mathrm{const}$, бо $B_j \in Ann_F$, і ясно, що для $j \leq i_0$

$$\{\mathcal{D}, K_j\} = \sum_{p=0}^{i_0} a_{jp} K_p, a_{jp} = \mathrm{const}. \tag{1.20}$$

Розглянемо (1.19) для $j = i_0 + 1$. Спробуємо додати до K_{i_0+1} лінійну комбінацію K_j, $j \leq i_0$ так, щоб симетрія $K'_{i_0+1} = K_{i_0+1} + \sum\limits_{i=0}^{i_0} \eta_{i_0+1,i} K_i$ задовольняла рівняння $\{\mathcal{D}, K'_{i_0+1}\} = (k_{i_0+1}/n) K'_{i_0+1}$.

Оскільки K_j лінійно незалежні між собою, це має місце тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\sum_{j=0}^{i_0} \eta_{i_0+1,j}(a_{jp} - (k_{i_0+1}/n)\delta_{j,p}) = -b_{i_0+1,p},$$

які можна задовольнити вибором $\eta_{i_0+1,j}$, якщо $\det(A - (k_{i_0+1}/n)E) \neq 0$, $A \equiv ||a_{jp}||$, E – одинична матриця.

Надалі вважатимемо умову $\det(A - (k_{i_0+1}/n)E) \neq 0$ виконаною і без втрати загальності замінимо K_{i_0+1} на K'_{i_0+1}.

Спробуємо тепер здійснити аналогічну заміну для K_{i_0+2}. Покладемо $K'_{i_0+2} = K_{i_0+2} + \sum\limits_{j=0}^{i_0+1} \eta_{i_0+2,i} K_i$ і будемо вимагати виконання рівняння

$$\{\mathcal{D}, K'_{i_0+2}\} = (k_{i_0+2}/n) K'_{i_0+2}.$$

В повній аналогії з проведеним вище розглядом дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь на $\eta_{i_0+2,i}$:

$$\sum_{j=0}^{i_0} \eta_{i_0+2,j}(a_{jp} - (k_{i_0+2}/n)\delta_{j,p}) + \eta_{i_0+2,i_0+1}(k_{i_0+1} - k_{i_0+2})/n\delta_{p,i_0+1} = -b_{i_0+2,p}.$$

Визначник матриці цієї системи дорівнює $\dfrac{(k_{i_0+1} - k_{i_0+2})}{n} \det(A - \dfrac{k_{i_0+2}}{n} E)$, і отже вона має єдиний розв'язок за умови $\det(A - (k_{i_0+2}/n)E) \neq 0$, бо $k_{i_0+2} \neq k_{i_0+1}$. Тут для скорочення запису ми довизначили a_{jp}, вважаючи, що $a_{jp} = 0$ при $p = i_0 + 1$.

Продовжуючи далі процес індукції, ми доходимо висновку, що коли матриця A не має власних значень k_j/n, $j = i_0 + 1, i_0 + 2, \ldots$, завжди можна добитись того, щоб

$$\{\mathcal{D}, K_j\} = \{h, K_j\} = (k_j/n) K_j, \tag{1.21}$$

тобто без втрати загальності можна вважати, що кожне з рівнянь $u_{t_j} = K_j$, $j > i_0$, має масштабну симетрію $\mathcal{D}_j = t_j(k_j/n)K_j + h$.

Цим узагальнено аналогічний добре відомий результат для випадку $h = \alpha x u_1 + \beta u, \alpha, \beta = \mathrm{const}$, що широко використовується при обчисленні незалежних від часу симетрій рівняння (1) з $n_0 < 2$, для якого виконуються наведені вище умови, зокрема засобами комп'ютерної алгебри. Справа в тому, що наявність масштабної симетрії дозволяє приписати змінним u_j, x, t певне градуювання, а цей результат гарантує, що при знаходженні незалежних від часу симетрій порядку вище $n + n_0 - 2$ можна без втрати загальності шукати лише симетрії, однорідні відносно цього градуювання, що значно спрощує відповідні обчислення.

Наш результат також можна застосовувати для спрощення обчислень при знаходженні симетрій рівняння (1) з $n_0 < 2$ в тих ситуаціях, коли h має вигляд, відмінний від $\alpha x u_1 + \beta u$.

Крім того, у багатьох випадках $\mathcal{D} = tF + h(x, u, u_1)$ – єдина залежна від часу локальна узагальнена симетрія рівняння (1) з $\partial F/\partial t = 0$ і $n_0 < 2$, тому, якщо відомі комутаційні співвідношення елементів Ann_F (наприклад, вдається довести, що Ann_F – комутативна підалгебра в S_F, як це має місце для переважної більшості інтегровних рівнянь (1)), вони разом з (1.20), (1.21) повністю визначають структуру алгебри Лі S_F, що є напівпрямою сумою Ann_F і одновимірної алгебри Лі, натягнутої на $\mathcal{D}$.

Зокрема, коли алгебра Лі $S_F^{(1)} \bigcap Ann_F$ розв'язна, то розв'язна і алгебра Лі Ann_F (див. [42], с.393), а тоді в силу (1.20), (1.21) буде розв'язною і вся алгебра Лі S_F.

1.4. Симетрії та формальні симетрії слабко діагоналізовних систем еволюційних рівнянь

Розглянемо s-компонентну невироджену слабко діагоналізовну (див. Вступ, с.15) систему еволюційних рівнянь (5).

Її формальні симетрії є формальними рядами по степенях $D = \partial/\partial x + \sum\limits_{\alpha=1}^{m}\sum\limits_{i=0}^{\infty} u_{i+1}^{\alpha}\partial/\partial u_i^{\alpha}$, і коефіцієнти цих рядів є $s \times s$ матричнозначними функціями $x, t, u, u_1, \ldots$ (див. напр. [35], с.248).

Очевидно, що визначальне рівняння (3) для формальних симетрій інваріантне відносно "калібрувального" перетворення

$$\mathrm{R} \to \mathrm{R}' = \mathrm{T}\mathrm{R}\mathrm{T}^{-1}, F_* \to \mathrm{V}, \tag{1.22}$$

і його перетворена форма

$$\deg(\partial \mathrm{R}'/\partial t + \nabla_F(\mathrm{R}') - [\mathrm{V}, \mathrm{R}']) \leq \deg \mathrm{V} + \deg \mathrm{R}' - p \tag{1.23}$$

зручніша для подальшого аналізу.

Формальні ряди T і V, які з'являються у цих формулах, визначено у Твердженні 1 (див. с.15 цієї дисертації).

Ясно, що коли матриця $\Phi = \partial F/\partial u_n$ не залежить від якоїсь зі змінних $x, t, u^{\alpha}, \ldots, u_n^{\alpha}$, то без втрати загальності можна вважати, що матриця Ω, що діагоналізує $\Phi = \partial F/\partial u_n$, має таку ж саму властивість.

Крім того, з Твердження 3.1 [36] випливає, що коли $\partial F^{\alpha}/\partial t = 0$, $\alpha = 1, \ldots, s$, завжди можна вважати, що $\partial \mathrm{T}/\partial t = 0$.

Нарешті, легко показати, що коли $\partial F^{\alpha}/\partial x = 0$, $\alpha = 1, \ldots, s$, то без втрати загальності можна вважати, що $\partial \mathrm{T}/\partial x = 0$.

В подальшому ми завжди будемо вважати, що матрицю Ω і формальний ряд T вибрано так, що мають місце три наведені вище результати.

Нехай $\mathrm{R}' \equiv \sum\limits_{j=-\infty}^{r} \rho_j' D^j$. Ясно, що $\deg(\partial \mathrm{R}'/\partial t + \nabla_F(\mathrm{R}') - [\mathrm{V}, \mathrm{R}']) \leq n + r$, де $r = \deg \mathrm{R}' = \deg \mathrm{R}$. Якщо $p > 0$, то прирівнюючи до нуля коефіцієнт при D^{r+n}, отримаємо

$$[\rho_r', \Lambda] = 0. \tag{1.24}$$

Як добре відомо з лінійної алгебри, оскільки матриця Λ діагональна і $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, в силу (1.24) матриця ρ_r' також діагональна.

Якщо $p > 1$, то прирівнюючи до нуля коефіцієнт при D^{r+n-1}, маємо

$$n\Lambda D(\rho'_r) - r\rho'_r D(\Lambda) - [\rho'_{r-1}, \Lambda] = 0.$$

Беручи діагональну і антидіагональну частини цього рівняння, дістаємо

$$n\Lambda D(\rho'_r) - r\rho'_r D(\Lambda) = 0 \tag{1.25}$$

$$[\rho'_{r-1}, \Lambda] = 0. \tag{1.26}$$

Отже, матриці ρ'_r,$\rho'_{r-1}, \dots$ комутують з Λ. Більше того, вони також комутують одна з іншою, бо усі вони діагональні. Тому для аналізу рівняння (1.23) можна використовувати міркування, аналогічні наведеним вище для випадку скалярного еволюційного рівняння (1). Слід лише підкреслити, що потрібно використовувати означення дробових степенів формального ряду V з діагональними коефіцієнтами, аналогічне до наведеного в [36], формула (2.10), тобто коефіцієнти цих дробових степенів *a priori* повинні вибиратися діагональними (легко показати, що такий їх вибір завжди можливий, пор. [36], с.14). Це забезпечує комутативність дробових степенів V, яка суттєво використовується в наших доведеннях. Справді, за побудовою $\mathrm{V} = \mathrm{diag}(\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_s)$, $\mathrm{V}^{j/n} = \mathrm{diag}(\mathrm{V}_1^{j/n}, \dots, \mathrm{V}_s^{j,n})$, і отже $[\mathrm{V}^{i/n}, \mathrm{V}^{j/n}] = \mathrm{diag}([\mathrm{V}_1^{i/n}, \mathrm{V}_1^{j/n}], \dots, [\mathrm{V}_s^{i/n}, \mathrm{V}_s^{j/n}]) = 0$, бо в силу (1.10) дробові степені формальних рядів V_a зі *скалярними* коефіцієнтами комутують між собою. Відповідно до цього визначимо корені n-го степеня з діагональної матриці (наприклад, Λ) так, щоб вони теж були діагональними матрицями.

З рівнянь (1.25),(1.26) аналогічно випадку скалярного рівняння (1) знаходимо, що

$$\rho'_r = c_r(t)\Lambda^{r/n}, \tag{1.27}$$

де $c_r(t)$ – довільна діагональна $s \times s$ матриця, що залежить від t.

Проводячи подальші міркування за аналогією з скалярним випадком і використовуючи комутативність діагональних матриць ρ'_r,$\rho'_{r-1}, \dots$ і Λ, дістаємо наступні аналоги Леми 1.2.1, Наслідку 1.2.1, Теореми 1.2.1 та Твердження 1.2.1 для невироджених слабко діагоналізовних систем (5):

Лема 1.4.1 *Будь-яку формальну симетрію* R *степеня* r *і рангу* $p > 1$ *слабко діагоналізовної системи (5) з* $\det \Phi \neq 0$ *можна подати у вигляді*

$$\mathrm{R} = \tilde{\mathrm{R}} + \sum_{j=r-\min(p,n)+2}^{r} \mathrm{T}^{-1} d_j(t) \mathrm{V}^{j/n} \mathrm{T}, \tag{1.28}$$

де $\tilde{\mathrm{R}}$ *– деякий формальний ряд,* $\deg \tilde{\mathrm{R}} < r - \min(p,n) + 2$*,* $d_j(t)$ *– діагональні* $s \times s$ *матриці.*

Твердження 1.4.1 *Будь-яку формальну симетрію* R *степеня* r *і рангу* $p > n$ *слабко діагоналізовної системи (5) з* $\det \Phi \neq 0$ *можна представити у вигляді*

$$\begin{gathered}\mathrm{R} = \tilde{\mathrm{R}} + \sum_{j=r-n+1}^{r} \mathrm{T}^{-1} d_j(t) \mathrm{V}^{j/n} \mathrm{T} + \mathrm{T}^{-1} \Bigg(\frac{1}{n} \dot{d}_r(t) D^{-1}(\Lambda^{-1/n}) - \\ \frac{r}{n} d_r(t) D^{-1}(D_t(\Lambda^{-1/n})) \Bigg) \mathrm{V}^{\frac{r-n+1}{n}} \mathrm{T},\end{gathered} \tag{1.29}$$

де $d_j(t)$ *– деякі діагональні* $s \times s$ *матриці, а* $\tilde{\mathrm{R}}$ *– деякий формальний ряд,* $\deg \tilde{\mathrm{R}} < r - n + 1$.

Наслідок 1.4.1 *Для будь-якої симетрії* G *порядку* $k > n + n_0 - 2$ *слабко діагоналізовної системи (5) з* $\det \Phi \neq 0$

$$\begin{gathered}G_* = \mathrm{N} + \sum_{j=k-n+1}^{k} \mathrm{T}^{-1} c_j(t) \mathrm{V}^{j/n} \mathrm{T} + \mathrm{T}^{-1} \Bigg(\frac{1}{n} \dot{c}_k(t) D^{-1}(\Lambda^{-1/n}) - \\ \frac{k}{n} c_k(t) D^{-1}(D_t(\Lambda^{-1/n})) \Bigg) \mathrm{V}^{\frac{k-n+1}{n}} \mathrm{T},\end{gathered} \tag{1.30}$$

де $c_j(t)$ *– деякі діагональні* $s \times s$ *матриці, а* N *– деякий формальний ряд,* $\deg \mathrm{N} < k - n + 1$.

Для $n_0 \leq k \leq n + n_0 - 2$

$$G_* = \mathrm{N} + \sum_{j=n_0}^{k} \mathrm{T}^{-1} c_j(t) \mathrm{V}^{j/n} \mathrm{T}, \ \deg \mathrm{N} < n_0. \tag{1.31}$$

Теорема 1.4.1 *Якщо для всіх власних значень* λ_i *матриці* Φ $\lambda_i^{-1/n} \notin \operatorname{Im} D$, *а* $\nabla_F(\lambda_i^{-1/n}) \in \operatorname{Im} D$, *то невироджена слабко діагоналізовна система (5) з* $\dfrac{\partial F}{\partial t} = 0$ *не має залежних від часу симетрій порядку вище* n.

Доведення. Розглянемо представлення (1.30) для G_*. Оскільки узагальнення правила Лейбніца для довільного $s \in \mathbb{Z}$ має вигляд ([42], с.583)

$$D^s(f(x,t,u,\dots)g(x,t,u,\dots)) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s(s-1)\dots(s-j+1)}{j!} D^j(f) D^{s-j}(g),$$

з (1.30) очевидно, що коли для власного значення λ_i матриці Φ маємо $\lambda_i^{-1/n} \notin \operatorname{Im} D$, а $\nabla_F(\lambda_i^{-1/n}) \in \operatorname{Im} D$, вираз для G_*, а отже і для G, стане нелокальним, бо "перетворення подібності" за допомогою ряду T не може ліквідувати цю нелокальність, але, з іншого боку, воно не призведе до появи нових нелокальностей. Очевидно, що появи цієї нелокальності можна уникнути лише у випадку, коли $(\dot{c}_k(t))_{ii} = 0$, де A_{ij} позначає (i,j)-й матричний елемент матриці A. Оскільки матриця $c_k(t)$ діагональна, то з умови $(\dot{c}_k(t))_{ii} = 0$ для всіх $i = 1, \dots, s$ випливає, що $\dot{c}_k(t) = 0$. Подальші міркування цілком аналогічні скалярному випадку, оскільки Лема 1.2.3 очевидно застосовна і до матричнозначної функції $c_k(t)$. $\Box$

Приклад. Розглянемо інтегровну систему Вадаті – Конно – Ішікави (див. [123] та [124], с.122-123)

$$u_t = D^2(u(1+uv)^{-1/2}),$$
$$v_t = -D^2(v(1+uv)^{-1/2}).$$

Для неї λ_i залежать лише від u і v, тому ясно, що $\lambda_i^{-1/2} \notin \operatorname{Im} D$. Однак $\nabla_F(\lambda_i^{-1/2}) \in \operatorname{Im} D$, і отже розглядувана система задовольняє умови Теореми 1.4.1, а тому вона не має залежних від t узагальнених симетрій порядку вище 2. Обчислення симетрій порядків $0, \dots, 2$ показує, що єдиною залежною від t локальною узагальненою симетрією цієї системи є дилатація $\mathcal{D} = (xu_1 + 2tD^2(u(1+uv)^{-1/2}))\partial/\partial u + (xv_1 - 2tD^2(v(1+uv)^{-1/2}))\partial/\partial v$, яка еквівалентна точковій симетрії Лі.

Наведемо тепер узагальнення Тверджень 1.3.1 і 1.3.2 та Наслідків 1.3.1 і 1.3.2 на випадок невироджених слабко діагоналізовних систем (5):

Твердження 1.4.2 *Нехай* P, Q *– формальні симетрії невиродженої слабко діагоналізовної системи (5),* $\deg \mathrm{P} = p$*,* $\deg \mathrm{Q} = q$*, і ранги* P *і* Q *вище* n*. З Твердження 1.4.1 випливає, що* $\mathrm{P} = \mathrm{T}^{-1} c_p(t) \mathrm{V}^{p/n} \mathrm{T} + \tilde{\mathrm{P}}$ *і* $\mathrm{Q} = \mathrm{T}^{-1} d_q(t) \mathrm{V}^{p/n} \mathrm{T} + \tilde{\mathrm{Q}}$*,* $\deg \tilde{\mathrm{P}} < p$*,* $\deg \tilde{\mathrm{Q}} < q$*.*

Тоді $\deg[\mathrm{P}, \mathrm{Q}] \leq p + q - n$ *і*

$$[\mathrm{P}, \mathrm{Q}] = -\mathrm{T}^{-1} \frac{1}{n} (q \dot{c}_p(t) d_q(t) - p c_p(t) \dot{d}_q(t)) \mathrm{V}^{\frac{p+q-n}{n}} \mathrm{T} + \tilde{\mathrm{R}}, \qquad (1.32)$$

де $\tilde{\mathrm{R}}$ *– деякий формальний ряд,* $\deg \tilde{\mathrm{R}} < p + q - n$*.*

Наслідок 1.4.2 *Для невиродженої слабко діагоналізовної системи простори* $FS^{(q)}_{F,r}$ *інваріантні відносно приєднаної дії* $FS^{(n)}_{F,m}$ *для всіх цілих* q*, якщо* $r > n$ *і* $m > n$*.*

Наслідок 1.4.3 *Для невиродженої слабко діагоналізовної системи простори* $FS^{(q)}_{F,r}$ *для всіх цілих* $q \leq n$*,* $r > n$ *є підалгебрами Лі в* $FS_{F,r}$*.*

Твердження 1.4.3 *Нехай* P, Q *– симетрії невиродженої слабко діагоналізовної системи (5),* $\mathrm{ord}\, P = p$*,* $\mathrm{ord}\, Q = q$*,* $p, q > n + n_0 - 2$*. В силу (1.27) маємо* $\partial P / \partial u_p = \Omega^{-1} c_p(t) \Lambda^{p/n} \Omega$*,* $\partial Q / \partial u_q = \Omega^{-1} d_q(t) \Lambda^{q/n} \Omega$*.*

Тоді $\mathrm{ord}\{P, Q\} \leq p + q - n$ *і*

$$\{P, Q\} = \frac{1}{n} \Omega^{-1} (q \dot{c}_p(t) d_q(t) - p c_p(t) \dot{d}_q(t)) \Lambda^{\frac{p+q-n}{n}} \Omega u_{p+q-n} + \tilde{R}, \qquad (1.33)$$

де $\tilde{R}$ *– деяка локальна вектор-функція,* $\mathrm{ord}\, \tilde{R} < p + q - n$*.*

Доведення цих результатів здійснюється у наступний спосіб: спочатку переходимо від рядів P та Q до $\mathrm{P}' = \mathrm{T}\mathrm{P}\mathrm{T}^{-1}$ та $\mathrm{Q}' = \mathrm{T}\mathrm{Q}\mathrm{T}^{-1}$ (у доведенні Твердження 1.4.3 відповідно від P_* та Q_* до $\mathrm{P}' = \mathrm{T} P_* \mathrm{T}^{-1}$ та $\mathrm{Q}' = \mathrm{T} Q_* \mathrm{T}^{-1}$) і обчислюємо ведучий член комутатора $[\mathrm{P}', \mathrm{Q}']$ аналогічно скалярному випадку, але з використанням Твердження 1.4.1 та Наслідку 1.4.1 замість Твердження 1.2.1 та Наслідку 1.2.1, а також наступної леми:

Лема 1.4.2 *Нехай для залишкового члена* $\tilde{\mathrm{R}}$ *у Твердженні 1.4.1 чи Лемі 1.4.1 маємо* $\tilde{\mathrm{R}}' = \mathrm{T}\tilde{\mathrm{R}}\mathrm{T}^{-1} \equiv \kappa D^p + \ldots$, $p = r - n$ *для Твердження 1.4.1,* $p = r - \min(p, n) + 1$ *для Леми 1.4.1.* $[\kappa, \Lambda] = 0$.

Доведення леми. Розглянемо $\tilde{\mathrm{R}}$ з Твердження 1.4.1 (у випадку Леми 1.4.1 все аналогічно). Підставимо

$$\mathrm{TRT}^{-1} = \tilde{\mathrm{R}}' + \sum_{j=r-n+1}^{r} d_j(t)\mathrm{V}^{j/n} + \frac{1}{n}D^{-1}\left(\dot{d}_r(t)\Lambda^{-1/n} - rd_r(t)D_t(\Lambda^{-1/n})\right)\mathrm{V}^{\frac{r-n+1}{n}}$$

до (1.23). Збираючи коефіцієнти при D^r у цьому рівнянні та користуючись комутативністю дробових степенів $\mathrm{V}^{j/n}$, дістанемо $[\Lambda, \kappa] = 0$, що і потрібно було довести. □

Після цього в повній аналогії зі скалярним випадком знаходимо ведучий член комутатора $[\mathrm{P}, \mathrm{Q}]$ (або $[P_*, Q_*]$), користуючись формулою $[\mathrm{P}, \mathrm{Q}] = \mathrm{T}^{-1}[\mathrm{P}', \mathrm{Q}']\mathrm{T}$, що і завершує доведення.

Проілюструємо цю схему на прикладі доведення Твердження 1.4.2. В силу Твердження 1.4.1 маємо наступні представлення для P' і Q':

$$\mathrm{P}' = \tilde{\mathrm{P}}' + \sum_{j=p-n+1}^{p} c_j(t)\mathrm{V}^{j/n} + \frac{1}{n}D^{-1}\left(\dot{c}_p(t)\Lambda^{-1/n} - pc_p(t)(D_t(\Lambda^{-1/n})\right)\mathrm{V}^{\frac{p-n+1}{n}},$$

$$\mathrm{Q}' = \tilde{\mathrm{Q}}' + \sum_{j=q-n+1}^{q} d_j(t)\mathrm{V}^{j/n} + \frac{1}{n}D^{-1}\left(\dot{d}_q(t)\Lambda^{-1/n} - qd_q(t)D_t(\Lambda^{-1/n})\right)\mathrm{V}^{\frac{q-n+1}{n}},$$

де $c_j(t), d_j(t)$ – деякі $s \times s$ матриці, $\tilde{\mathrm{P}}'$, $\tilde{\mathrm{Q}}'$ – деякі формальні ряди, $\deg \tilde{\mathrm{P}}' < p - n + 1$, $\deg \tilde{\mathrm{Q}}' < q - n + 1$.

Підставляючи отримані вирази до $[\mathrm{P}', \mathrm{Q}']$ і користуючись тим, що $[\mathrm{V}^{r/n}, \mathrm{V}^{s/n}] = 0$ для всіх цілих r і s, дістаємо

$$[\mathrm{P}', \mathrm{Q}'] = \left[\tilde{\mathrm{P}}' + \sum_{j=p-n+1}^{p} c_j(t)\mathrm{V}^{j/n} + \frac{1}{n}D^{-1}\left(\dot{c}_p(t)\Lambda^{-1/n} - pc_p(t)D_t(\Lambda^{-1/n})\right)\mathrm{V}^{\frac{p-n+1}{n}},\right.$$

$$\left.\tilde{\mathrm{Q}}' + \sum_{j=q-n+1}^{q} d_j(t)\mathrm{V}^{j/n} + \frac{1}{n}D^{-1}\left(\dot{d}_q(t)\Lambda^{-1/n} - qd_q(t)D_t(\Lambda^{-1/n})\right)\mathrm{V}^{\frac{q-n+1}{n}}\right] =$$

$$\left[\tilde{\mathrm{P}}' + \frac{1}{n}D^{-1}\left(\dot{c}_p(t)\Lambda^{-1/n} - pc_p(t)D_t(\Lambda^{-1/n})\right)\mathrm{V}^{\frac{p-n+1}{n}}, \sum_{j=q-n+1}^{q} d_j(t)\mathrm{V}^{j/n}\right] +$$

$$\left[\tilde{\mathrm{P}}' + \sum_{j=p-n+1}^{p} c_j(t)\mathrm{V}^{j/n} + \frac{1}{n}D^{-1}\left(\dot{c}_p(t)\Lambda^{-1/n} - pc_p(t)D_t(\Lambda^{-1/n})\right)\mathrm{V}^{\frac{p-n+1}{n}},\right.$$

$$\left.\tilde{\mathrm{Q}}' + \frac{1}{n}D^{-1}\left(\dot{d}_q(t)\Lambda^{-1/n} - qd_q(t)D_t(\Lambda^{-1/n})\right)\mathrm{V}^{\frac{q-n+1}{n}}\right].$$

Тепер неважко перевірити, що, оскільки в силу Леми 1.4.2 старші коефіцієнти формальних рядів $\tilde{\mathrm{P}}'$ і $\tilde{\mathrm{Q}}'$ комутують з Λ, в повній аналогії зі скалярним випадком вклад з найвищим степенем D до нашого комутатора дадуть члени

$$\left[c_p(t)\mathrm{V}^{p/n}, \frac{1}{n}D^{-1}\left(\dot{d}_q(t)\Lambda^{-1/n} - qd_q(t)D_t(\Lambda^{-1/n})\right)\mathrm{V}^{\frac{q-n+1}{n}}\right] +$$

$$\left[\frac{1}{n}D^{-1}\left(\dot{c}_p(t)\Lambda^{-1/n} - pc_p(t)D_t(\Lambda^{-1/n})\right)\mathrm{V}^{\frac{p-n+1}{n}}, d_q(t)\mathrm{V}^{q/n}\right] =$$

$$\left[c_p(t)\mathrm{V}^{p/n}, \frac{1}{n}D^{-1}\left(\dot{d}_q(t)\Lambda^{-1/n} - qd_q(t)D_t(\Lambda^{-1/n})\right)\right]\mathrm{V}^{\frac{q-n+1}{n}} +$$

$$\left[\frac{1}{n}D^{-1}\left(\dot{c}_p(t)\Lambda^{-1/n} - \frac{p}{n}c_p(t)D_t(\Lambda^{-1/n})\right), d_q(t)\mathrm{V}^{q/n}\right]\mathrm{V}^{\frac{p-n+1}{n}} =$$

$$\frac{1}{n}\left(pc_p(t)\dot{d}_q(t) - qd_q(t)\dot{c}_p(t)\right)\mathrm{V}^{\frac{p+q-n}{n}} + \ldots.$$

Оскільки $[\mathrm{P}, \mathrm{Q}] = \mathrm{T}^{-1}[\mathrm{P}', \mathrm{Q}']\mathrm{T}$, звідси безпосередньо випливає Твердження 1.4.2. $\square$

На завершення зазначимо, що Твердження 1.3.3 має місце для довільних невироджених слабко діагоналізовних систем (5) при $n_0 = 0, 1$.

Справді, для $k = 0$ цей результат доводиться шляхом безпосередньої перевірки. Розглянемо тепер випадок $k \geq n_0$. В повній аналогії з випадком скалярного рівняння (1) доводиться, що $\deg \nabla_P(Q_*) \leq \max(0, q+n_0-2)$ і $\deg \nabla_Q(P_*) \leq \max(0, p+n_0-2)$ для $n_0 = 0, 1$ і $p, q \geq n_0$. Звідси в силу (1.2) ясно, що при $k \geq n_0$ $\operatorname{ord} R = \deg R_* = \deg[Q_*, P_*]$, де $R = \{P, Q\}$, $P, Q \in S_F^{(k)}$. Подальша оцінка $\deg[Q_*, P_*]$ з використанням при $k < n$ представлень (1.31) для P_* і Q_*, а також Леми 1.4.2, а при $k = n$ – Твердження 1.4.2, негайно дає нам доводжуваний результат.

Зауважимо також, що отримані вище результати можна досить ефективно застосовувати для опису структури операторів рекурсії.

Практично всі відомі на сьогодні оператори рекурсії еволюційних систем (5) мають наступний вигляд:

$$\mathrm{R} = \sum_{i=0}^{k} a_i D^i + \sum_{j=1}^{p} G_j \otimes D^{-1} \circ \gamma_j, \tag{1.34}$$

де a_i – деякі $s \times s$-матричнозначні, а G_j, γ_j – s-компонентні локальні функції, причому G_j і γ_j є відповідно симетріями і косиметріями (означення останніх див. напр. у [124], с.66) системи (5).

Якщо структуру нелокальної частини R в широкому класі випадків досить легко описати, використовуючи результати Розділів 4 і 6 роботи [124], знаходження a_i за допомогою відомих методів (безпосереднього розв'язування визначального рівняння для оператора рекурсії чи перебору доданків певної "ваги" у випадку масштабно інваріантних систем) потребує досить значного обсягу обчислень. Оскільки оператор рекурсії є формальною симетрією нескінченного рангу, використання отриманих нами вище результатів дозволяє значно спростити ці обчислення.

Для довільного формального ряду $\mathrm{H} = \sum\limits_{j=-\infty}^{m} h_i D^i$ позначимо $\mathrm{H}_{\geq r} = \sum\limits_{j=r}^{m} h_i D^i$. Тоді за Теоремою 1.4.1 у випадку $k \geq n-1$ дістаємо

$$\begin{gathered}\mathrm{R}_{\geq k-n+1} = \sum_{i=k-n+1}^{k} a_i D^i = \sum_{j=k-n+1}^{k} \left(\mathrm{T}^{-1} d_j(t) \mathrm{V}^{j/n} \mathrm{T}\right)_{\geq k-n+1} + \\ \left(\mathrm{T}^{-1} \left(\frac{1}{n} \dot{d}_k(t) D^{-1}(\Lambda^{-1/n}) - \frac{k}{n} d_k(t) D^{-1}(D_t(\Lambda^{-1/n}))\right) \mathrm{V}^{\frac{k-n+1}{n}} \mathrm{T}\right)_{\geq k-n+1}.\end{gathered} \tag{1.35}$$

Зазначимо, що коли відомо, що оператор рекурсії не залежить явно від часу t, $d_j(t)$ у (1.35) є сталими, що далі спрощує його знаходження.

У досить типовому випадку $k = n - 1$ формула (1.35) дає повний опис структури диференціальної частини $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i D^i$ оператора рекурсії. В такому разі підстановка (1.34) з відомими G_j, γ_j та $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i D^i$ з (1.35) до (4) після прирівнювання до нуля коефіцієнтів при степенях D дає систему звичайних диференціальних рівнянь на $d_j(t)$ (або алгебраїчних рівнянь на сталі діагональні $s \times s$ матриці d_j у випадку, коли R не залежить явно від t).

Розглянемо, наприклад, циліндричне рівняння Кортевега – де Фріза (див. напр. [124], с.111)

$$u_t = u_3 + uu_1 - u/(2t),$$

оператор рекурсії якого має $k = 2$ і нелокальну частину $(tu_1/3+1/6)D^{-1}$.

Оскільки це рівняння скалярне, маємо $\mathrm{T} = 1$, $\mathrm{V} = F_*$, і (1.35) дає

$$\sum_{i=0}^{2} a_i D^i = c_2(t)(D^2 + 2u/3) + c_1(t)D + (x/3)\dot{c}_2(t) + c_0(t).$$

Підстановка $\mathrm{R} = c_2(t)(D^2+2u/3)+c_1(t)D+(x/3)\dot{c}_2(t)+c_0(t)+(tu_1/3+1/6)D^{-1}$ до (4) і прирівнювання до нуля коефіцієнтів при степенях D дають наступну (перевизначену) систему рівнянь на $c_j(t)$:

$$\dot{c}_2(t) = 1, \dot{c}_0(t) = 0, \dot{c}_1(t) = 0, c_2(t) = t, c_1(t) = 0,$$

розв'язуючи яку і відкидаючи тривіальний член $c_0(t) = \mathrm{const}$, ми дістаємо відомий оператор рекурсії циліндричного рівняння КдФ

$$\mathrm{R} = t(D^2 + 2u/3) + x/3 + (tu_1/3 + 1/6)D^{-1}.$$

Висновки до Розділу 1

В першому підрозділі Розділу 1 проведено аналіз структури загального розв'язку визначальних рівнянь (1.5) для локальних узагальнених симетрій довільного (1+1)-вимірного скалярного еволюційного рівняння $u_t = F(x, t, u, \ldots, u_n)$, $n \geq 2$.

З використанням цих результатів в другому підрозділі отримано формули для кількох перших ведучих членів формальних симетрій та похідних Фреше узагальнених симетрій таких рівнянь, а також знайдено достатню умову відсутності у такого рівняння залежних від часу симетрій порядку вище n для випадку $\partial F/\partial t = 0$. З допомогою цієї достатньої умови повністю описано алгебри Лі локальних узагальнених симетрій рівняння Гаррі Дима, рівняння Кавальканте – Тененблат та рівняння нелінійної теплопровідності $u_t = uu_2 + u_1^2$.

В третьому підрозділі знайдено формулу для ведучого члена комутатора двох формальних симетрій рангу вище n для довільного рівняння $u_t = F(x, t, u, \ldots, u_n)$, $n \geq 2$. Користуючись цією формулою, ми знайшли ведучий член дужки Лі двох локальних узагальнених симетрій достатньо високого порядку такого рівняння (Твердження 1.3.1) і показали, що простори $S_F^{(k)}$ симетрій порядку не вище k є підалгебрами Лі у S_F для $k = 0, \ldots, n$ (Твердження 1.3.2). Відзначимо, що Твердження 1.3.1 дає розв'язок відомої задачі про "оцінку згори" (див. [12] та [13], с.304) алгебри Лі S_F для *довільного* рівняння (1), в той час як аналогічні результати в літературі було доведено лише для деяких конкретних рівнянь (наприклад, в [12] – для рівнянь Бюргерса і КдФ).

Нарешті, в четвертому підрозділі отримано узагальнення перелічених вище результатів на випадок невироджених слабко діагоналізовних систем (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь.

Основні результати Розділу 1 опубліковано в роботах [48, 117].

РОЗДІЛ 2

Про залежність симетрій еволюційних рівнянь від x і t

Вступ

В значній кількості застосувань використовуються еволюційні рівняння (1) і системи (5), коефіцієнти яких не залежать від x і t. Зокрема, це справедливо для переважної більшості відомих прикладів інтегровних рівнянь і систем (1), (5).

На основі отриманих в попередньому розділі результатів, а також загальних Теорем 3.1 і 3.2 статті А.В. Шаповалова та І.В. Широкова [58] про структуру узагальнених симетрій трансляційно-інваріантних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних[1] нам вдалося отримати в цьому розділі ряд тверджень, що достатньо повно описують залежність від t і x узагальнених симетрій рівнянь (1) і невироджених слабко діагоналізовних систем (5), інваріантних відносно зсувів по цих змінних. Використання цих результатів дозволило, зокрема, знайти всі узагальнені симетрії системи Бакірова.

Крім того, для випадку інтегровних рівнянь (1) і невироджених слабко діагоналізовних систем (5) з незалежними від t коефіцієнтами нам вдалося отримати достатні умови відсутності у них поліноміальних по t (за винятком стаціонарних) локальних узагальнених симетрій достатньо

[1]Примітка. Допоміжне твердження, на яке спираються доведення цих теорем в [58], – хибне. В підрозділі 1 цього розділу ми наводимо строге і коректне доведення цих результатів.

високого порядку, що в свою чергу, дозволило запропонувати ефективну схему знаходження всіх нестаціонарних локальних узагальнених симетрій таких рівнянь і систем, і, зокрема, знайти з її допомогою всі такі симетрії для модифікованого рівняння КдФ, потенціальних рівнянь КдФ і мКдФ, рівняння Калоджеро – Дегаспеніса – Фокаша та системи Хіроти – Сацуми.

2.1. Про структуру узагальнених симетрій трансляційно-інваріантних диференціальних рівнянь в частинних похідних

2.1.1. Основні означення. Розглянемо систему ДРЧП

$$F_\nu(x,u,\dots,u^{(d)})=0,\quad \nu=1,\dots,f, \tag{2.1}$$

де $u=u(x)=(u_1,\dots,u_n)^T$ – невідома вектор-функція m незалежних змінних $x=(x_1,\dots,x_m)$; $u^{(s)}$ позначає сукупність похідних u по x порядку s; ^{T} позначає транспонування матриці.

Означення 2.1.1 (див. [42], с.371–372). *Диференціальний оператор* Q *вигляду*

$$\mathrm{Q}=\sum_{i=1}^{m}\xi_i(x,u,\dots,u^{(q)})\partial/\partial x_i+\sum_{\alpha=1}^{n}\eta_\alpha(x,u,\dots,u^{(q)})\partial/\partial u_\alpha \tag{2.2}$$

називається узагальненою симетрією порядку q системи ДРЧП (2.1), якщо його продовження $\mathbf{pr}\mathrm{Q}$ *анулює (2.1) на множині M (достатньо гладких) розв'язків (2.1):*

$$\mathbf{pr}\mathrm{Q}[F_\nu]\mid_M=0,\quad \nu=1,\dots,f. \tag{2.3}$$

Позначимо Sym алгебру Лі над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел[2] (відносно т.зв. дужки Лі [,] [42], с.387) усіх узагальнених симетрій невід'ємних

[2]Примітка. Насправді всюди в даному підрозділі (окрім прикладу) $\mathbb{C}$ можна замінити довільним алгебраїчно замкненим полем $\mathbb{K}$, бо Наслідок 1 Теореми $3'$ з §2 Розділу VIII [15], який використовується в доведенні Теореми 2.1.1, залишається вірним і в цьому випадку.

порядків системи (2.1), $Sym^{(q)}$ – лінійний простір узагальнених симетрій порядку не вище q системи (2.1), $Sym_q \equiv Sym^{(q)}/Sym^{(q-1)}$ $(q \neq 0)$, $Sym_0 \equiv Sym^{(0)}$. Для систем ДРЧП максимального рангу Sym_0 – підалгебра Лі у Sym [42],с.161. Узагальнені симетрії системи (2.1), що належать Sym_0 (тобто ліївські симетрії) можна розглядати як векторні поля на многовиді 0-джетів $M^{(0)}$ (див. Розділ 2 у [42]) з локальними координатами z_A: $z_i = x_i, i = 1, \ldots, m, z_{m+\alpha} = u_\alpha, \alpha = 1, \ldots, n$ (індекси $A, B, C, D, \ldots$ пробігатимуть тут і надалі від 1 до $m+n$, $\partial_A \equiv \partial/\partial z_A$). Більше того, дужка Лі двох ліївських симетрій системи (2.1) $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2$ співпадає з комутатором відповідних векторних полів.

На завершення введемо ще наступні позначення:

а) Op – лінійний простір усіх диференціальних операторів вигляду (2.2) довільного скінченного порядку $q = 0, 1, 2, \ldots$;

б) $Op_{A_1,\ldots,A_g}$ – простори операторів, які можна отримати з елементів Op, поклавши $z_{A_1} = 0, \ldots, z_{A_g} = 0$ в їх коефіцієнтах.

2.1.2. Явні формули для симетрій.

Має місце наступна

Теорема 2.1.1 *Нехай V – лінійний підпростір Sym, $V^{(r)} \equiv V \bigcap Sym^{(r)}$, $v^{(r)} \equiv \mathrm{dim} V^{(r)}$, $A_1, \ldots, A_g$ – фіксовані цілі числа з діапазону $1, \ldots, m+n$; $g \leq m+n$, $A_i \neq A_j$, якщо $i \neq j$. Нехай також для деякого q_1 $v^{(q_1)} < \infty$ і для будь-якої узагальненої симетрії $\mathrm{Q} \in V^{(q_1)}$ системи (2.1) $\partial \mathrm{Q}/\partial z_{A_s} \in V, s = 1, \ldots, g$.*

Тоді в кожному з підпросторів $V^{(q)}$, $q = 0, \ldots, q_1$, існує базис лінійно незалежних узагальнених симетрій $\mathrm{Q}_l^{(q,\gamma)}$, $l = 1, \ldots, r_\gamma^{(q)}$, $\gamma = 1, \ldots, \rho^{(q)}$ ($\rho^{(q)} \leq v^{(q)}$, $\sum_{\gamma=1}^{\rho^{(q)}} r_\gamma^{(q)} = v^{(q)}$) вигляду

$$\mathrm{Q}_l^{(q,\gamma)} = \exp\Big(\sum_{s=1}^{g} \lambda_\gamma^{(q,A_s)} z_{A_s}\Big) \sum_{j_1=0}^{k_\gamma^{(q,A_1)}-1} \ldots \sum_{j_g=0}^{k_\gamma^{(q,A_g)}-1} (z_{A_1})^{j_1} (z_{A_2})^{j_2} \ldots (z_{A_g})^{j_g} \mathrm{C}_{l,j_1,\ldots,j_g}^{(q,\gamma)}, \quad (2.4)$$

де $\mathrm{C}_{l,j_1,\ldots,j_g}^{(q,\gamma)}$ – деякі лінійні диференціальні оператори з $Op_{A_1,\ldots,A_g}$ порядку

q або нижче; $\lambda_\gamma^{(q,A_s)} \in \mathbb{C}$ – деякі константи, а $k_\gamma^{(q,A_s)}, s = 1, \dots, g$ – деякі фіксовані цілі числа з діапазону $1, \dots, r_\gamma^{(q)}$.

Доведення. Нехай $\mathrm{Q}_1^{(s)}, \dots, \mathrm{Q}_{v_s}^{(s)}$ – деякий базис у V_s, де $V_s = V^{(s)}/V^{(s-1)}$, $s \neq 0$, $V_0 = V^{(0)}$. Згідно умов теореми $\partial \mathrm{Q}_l^{(s)}/\partial z_{A_i}$ є узагальненими симетріями системи (2.1), що, очевидно, належать до $V^{(s)}$ (але не обов'язково до V_s). Таким чином, множина диференціальних операторів $\partial/\partial z_{A_i}$ має скінченновимірні (бо $v^{(s)} \leq v^{(q_1)}$ для $s \leq q_1$) інваріантні простори $V^{(s)}$, $s = 0, \dots, q_1$. Позначимо через $\mathrm{G}^{(s,A_i)}$ скінченновимірний лінійний оператор, що є зображенням $\partial/\partial z_{A_i}$ на $V^{(s)}$. Оскільки $\partial^2 \mathrm{Q}_l^{(s)}/\partial z_{A_i} \partial z_{A_j} = \partial^2 \mathrm{Q}_l^{(s)}/\partial z_{A_j} \partial z_{A_i}$, тобто оператори $\partial/\partial z_{A_i}$, $\partial/\partial z_{A_j}$ комутують, комутують і їхні зображення:

$$\mathrm{G}^{(s,A_i)}\mathrm{G}^{(s,A_j)} = \mathrm{G}^{(s,A_j)}\mathrm{G}^{(s,A_i)}, \quad i, j = 1, \dots, g, s = 0, \dots, q_1. \tag{2.5}$$

Отже, згідно Наслідку 1 Теореми $3'$ з §2 Розділу VIII [15], простір $V^{(q)}$ $(q \leq q_1)$ можна розкласти в пряму суму таких спільних інваріантних просторів $I_\gamma^{(q)}$ лінійних операторів $\mathrm{G}^{(q,A_1)}, \dots, \mathrm{G}^{(q,A_g)}$, що мінімальні поліноми $\mathrm{G}^{(q,A_s)}$ на $I_\gamma^{(q)}$ будуть мати вигляд

$$(\mathrm{G}^{(q,A_s)} - \lambda_\gamma^{(q,A_s)})^{k_\gamma^{(q,A_s)}} = 0 \tag{2.6}$$

для деяких $\lambda_\gamma^{(q,A_s)} \in \mathbb{C}$ і $k_\gamma^{(q,A_s)}$ ($k_\gamma^{(q,A_s)}$ – фіксовані цілі числа з множини $1, \dots, r_\gamma^{(q)}$, де $r_\gamma^{(q)}$ позначає розмірність простору $I_\gamma^{(q)}$), $\gamma = 1, \dots, \rho^{(q)}$, $s = 1, \dots, g$. Щоб уникнути неоднозначності у визначенні просторів $I_\gamma^{(q)}$, накладемо таку вимогу: зображення операторів $\mathrm{G}^{(q,A_i)}$ на кожному $I_\gamma^{(q)}$, $i = 1, \dots, g$ повинно бути нерозкладним.

Цей факт дозволяє нам обмежитися розглядом одного $r_\gamma^{(q)}$-вимірного підпростору $V^{(q)}$ $I_\gamma^{(q)}$ $V^{(q)}$ і деякого базису $\mathrm{Q}_l^{(q,\gamma)}$, $l = 1, \dots, r_\gamma^{(q)}$ в ньому. Нехай $\mathrm{R}^{(q,\gamma)} \equiv (\mathrm{Q}_1^{(q,\gamma)}, \mathrm{Q}_2^{(q,\gamma)}, \dots, \mathrm{Q}_{r_\gamma^{(q)}}^{(q,\gamma)})^T$ і $\mathrm{G}_\gamma^{(q,A_s)}$ позначає обмеження $\mathrm{G}^{(q,A_s)}$ на $I_\gamma^{(q)}$.

Тоді маємо

$$\frac{\partial \mathrm{R}^{(q,\gamma)}}{\partial z_{A_i}} = \mathrm{G}_\gamma^{(q,A_i)} \mathrm{R}^{(q,\gamma)},$$

де ми ототожнили оператор $\mathrm{G}_\gamma^{(q,A_i)}$ з його матрицею в базисі $\mathrm{Q}_l^{(q,\gamma)}$, $l = 1, \ldots, r_\gamma^{(q)}$.

Кожна така система сумісна, бо матриці $\mathrm{G}_\gamma^{(q,A_i)}$ комутують в силу (2.5), і її загальний розв'язок має вигляд

$$\mathrm{R}^{(q,\gamma)} = \exp(\sum_{i=1}^{g} \mathrm{G}_\gamma^{(q,A_i)} z_{A_i})\, \mathrm{C}^{(q,\gamma)}, \tag{2.7}$$

де $\mathrm{C}^{(q,\gamma)}$ $-r_\gamma^{(q)}$-вимірний вектор з диференціальних операторів з $Op_{A_1,\ldots,A_g}$ порядку не вище q, тобто коефіцієнти цих операторів не залежать від $z_{A_1}, \ldots, z_{A_g}$. В силу (2.6) маємо

$$\begin{aligned} &\exp(\mathrm{G}_\gamma^{(q,A_i)} z_{A_i}) \equiv \exp(\lambda_\gamma^{(q,A_i)} z_{A_i}) \exp((\mathrm{G}_\gamma^{(q,A_i)} - \lambda_\gamma^{(q,A_i)}) z_{A_i}) = \\ &= \exp(\lambda_\gamma^{(q,A_i)} z_{A_i}) \textstyle\sum_{s=0}^{k_\gamma^{(q,A_i)}-1} \frac{(z_{A_i})^s}{s!} (\mathrm{G}_\gamma^{(q,A_s)} - \lambda_\gamma^{(q,A_i)})^s. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Підстановка (2.8) до (2.7) дає формули (2.4). $\square$

Зауваження 1. Часто (наприклад, якщо V – ідеал в Sym або якщо V – підалгебра Лі в Sym, що містить $\partial/\partial z_{A_i}$ або еквівалентні їм узагальнені симетрії) достатньою умовою для того, щоб $\partial \mathrm{Q}/\partial z_{A_s} \in V, s = 1, \ldots, g$ (коли $\mathrm{Q} \in V^{(q_1)}$) є існування ліївських симетрій $\partial/\partial z_{A_s}$, $s = 1, \ldots, g$ у системи (2.1), бо $\partial \mathrm{Q}/\partial z_A = [\partial/\partial z_A, \mathrm{Q}]$ і дужка Лі двох узагальнених симетрій системи (2.1) знов є узагальненою симетрією цієї системи (див. напр. [42], с.388).

Зауваження 2. В умові Теореми 2.1.1 можна покласти $q_1 = \infty$, врахувавши, що за побудовою $V^{(\infty)} \equiv V$ і замінивши вимогу $v^{(q_1)} < \infty$ наступною: $v_q < \infty$ для всіх $q = 0, 1, \ldots$, де v_q – це розмірність V_q.

Зауваження 3. Якщо $V = Sym^{(0)}$, $v^{(0)} < \infty$ і система (2.1) допускає ліївські симетрії $\partial/\partial z_A, A = 1, \ldots, m+n$, Теорема 2.1.1 дозволяє знайти залежність *всіх* ліївських симетрій від *усіх* змінних x, u, тобто звести задачу знаходження усіх ліївських симетрій системи (2.1) до розв'язування системи алгебраїчних рівнянь у повній аналогії зі зведенням ДРЧП до алгебраїчних рівнянь в теорії квазіточнорозв'язних моделей.

Отже, якщо умови Теореми 2.1.1 виконано, можна без втрати загальності шукати *всі* узагальнені симетрії системи (2.1) з простору $V^{(q)}$ $(q \leq q_1)$ у вигляді

$$\mathrm{Q} = \exp(\sum_{s=1}^{g} \lambda^{(q,A_s)} z_{A_s}) \sum_{j_1=0}^{v^{(q)}-1} \dots \sum_{j_g=0}^{v^{(q)}-1} (z_{A_1})^{j_1} (z_{A_2})^{j_2} \dots (z_{A_g})^{j_g} \mathrm{C}_{j_1,\dots,j_g}, \quad (2.9)$$

де $\lambda^{(q,A_s)} \in \mathbb{C}$, а $\mathrm{C}_{j_1,\dots,j_g}$ – це диференціальні оператори з $Op_{A_1,\dots,A_g}$ порядку q або нижче. Таким чином, підстановка (2.9) до (2.3) дає рівняння на коефіцієнти операторів $\mathrm{C}_{j_1,\dots,j_g}$, і якщо вдається знайти усі незалежні розв'язки цих рівнянь, підстановка їх у (2.9) дасть *усі* лінійно незалежні узагальнені симетрії системи (2.1) з $V^{(q)}$, $q \leq q_1$. Інакше кажучи, ми знайшли в явному вигляді залежність коефіцієнтів *усіх* узагальнених симетрій системи (2.1) з $V^{(q_1)}$ від змінних $z_{A_1}, \dots, z_{A_g}$.

Приклад. Нехай $m = 2$, $n = 1$, $u_1 \equiv u$, $x = (x_1 \equiv t, x_2 \equiv x)$ (2.1) – це рівняння Кортевега – де Фріза

$$\partial u/\partial t = u_3 + uu_1, \quad (2.10)$$

де ми повернулися до позначення з Розділу 1 $u_l = \partial^l u/\partial x^l$, Op – лінійний простір диференціальних операторів вигляду (2.2) з $\xi_i \equiv 0$, причому їхній коефіцієнт $\eta \equiv \eta_1$, котрий називається характеристикою симетрії (див. [42], с.374), залежить лише від $x, u, u_1, u_2, \dots$, але не від t; $V = Op \bigcap Sym$.

Відомо (див. напр. [32]), що для такого V $v_q \leq 1$ при $q = 1, 2, \dots$, і що елементи V не залежать від x. Отже, $\forall Q \in V$ маємо

$$\{Q, u_1\} = \partial Q/\partial x = 0. \quad (2.11)$$

Рівняння Кортевега – де Фріза має симетрію $G = (tu_1 + 1)\partial/\partial u$, що відповідає інваріантності відносно перетворень Галілея (див. напр. [26], с.188). З (2.11) випливає, що (див. там же) $\forall Q \in V \quad \{Q, G\} = -\partial Q/\partial u$.

Ясно, що $\partial\{Q, G\}/\partial t = 0$, і отже $\{Q, G\} \in V^{(q)}$, якщо $Q \in V^{(q)}$. Таким чином, простір $V^{(q)}$ інваріантний відносно $\partial/\partial u$, і в силу Теореми 2.1.1 усі його елементи є квазіполіномами по u порядку не вище $v^{(q)}-1$. Отже, характеристика узагальненої симетрії рівняння (2.10) з $V^{(q)}$ є лінійною комбінацією виразів вигляду

$$\eta = \exp(\lambda u) \sum_{j=0}^{v^{(q)}-1} \eta_j(u_1, \ldots, u_q)u^j, \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.12}$$

Оскільки (див. [26], с.189) для будь-якої узагальненої симетрії $\mathrm{Q} \in V$ порядку $q \geq 0$ рівняння Кортевега – де Фріза $\partial\eta/\partial u_q = \mathrm{const}$, в (2.12) $\lambda = 0$, тобто узагальнені симетрії рівняння Кортевега – де Фріза порядку $q \geq 0$ з простору V є поліномами по u степеня не вище, ніж $v^{(q)} - 1$.

Розглянутий приклад показує, що для застосування Теореми 2.1.1 не обов'язково, щоб оператор $Q = \partial/\partial z_A$, що залишає простір V інваріантним, був симетрією Лі системи ДРЧП (2.1).

Відзначимо, що результат Теореми 2.1.1 можна узагальнити. А саме, вимогу, щоб $\partial\mathrm{Q}/\partial z_{A_i} \in V$, $i = 1, \ldots, g$ для будь-якого $\mathrm{Q} \in V$, можна замінити наступною: існує g векторних полів $\mathrm{K}_s = \sum_{A=1}^{m+n} \omega_A^{(s)}(z)\partial/\partial z_A$, $s = 1, \ldots, g$, таких, що $[\mathrm{K}_i, \mathrm{K}_j] = 0$ для усіх $i, j = 1, \ldots, g$, $[\mathrm{K}_i, \mathrm{Q}] \in V$ для будь-якого $\mathrm{Q} \in V$, $i = 1, \ldots, g$, і в точці загального положення многовиду $M^{(0)}$ $\mathrm{rank}\, \| \omega_A^{(s)} \|_{A=\overline{1,m+n}, s=\overline{1,g}} = g$. Справді, у цьому випадку існує [59] така заміна координат на $M^{(0)}$ (яка, однак, може бути заданою лише локально в кожній карті $M^{(0)}$, але не глобально) $z \to z'$, що в нових координатах $\mathrm{K}_s = \partial/\partial z'_{A_s}$, $A_s \in \{1, \ldots, m+n\}$, $s = 1, \ldots, g$ і $[\mathrm{K}_i, \mathrm{Q}] = \partial\mathrm{Q}/\partial z'_{A_i} \in V, i = 1, \ldots, g$ для будь-якого $\mathrm{Q} \in V$, тобто ми повертаємося до ситуації, розглянутої в Теоремі 2.1.1.

На завершення зауважимо, що хоча результат Теореми 2.1.1 було сформульовано в [58] у вигляді Теорем 3.1 та 3.2 (окремо для зсувів по незалежних і залежних змінних і для частинного випадку $V \subset Sym/Triv$, де $Triv$ – простір тривіальних симетрій системи (2.1), тобто таких симетрій, які зникають на множині розв'язків (2.1)), але доведення цих теорем у [58] базується на помилковому твердженні про те, що кілька комутуючих матриць можна одночасно звести до жорданової нормальної форми. Насправді для доведення потрібен дещо інший результат про структуру спільних інваріантних просторів таких матриць, а саме Наслідок 1 Теореми 3′ з §2 Розділу VIII [15], і коректне доведення тверджень, сформульованих в [58], наскільки нам відомо, досі було відсутнє в літературі (його було опубліковано автором цієї дисертації в [115]).

Покажемо на прикладі хибність твердження про можливість одночасного приведення комутуючих матриць до жорданової нормальної форми. Розглянемо пару комутуючих матриць

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицю A вже зведено до жорданової нормальної форми, тому залишається звести до неї матрицю B перетворенням подібності $B' = TBT^{-1}$.

В силу єдиності жорданової нормальної форми матриці A очевидно, що матриця T повинна комутувати з A, щоб зберегти її жорданову нормальну форму. Загальний вигляд такої матриці дається формулою

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & \sigma & \rho \\ 0 & \lambda & \sigma \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Але для таких T маємо $B' = TBT^{-1} = B$, і отже матрицю B не можна звести до жорданової нормальної форми одночасно з A, що і доводить хибність розглядуваного твердження.

2.2. Залежність від t симетрій еволюційних рівнянь

Нехай G – симетрія порядку $k \geq n_0$ рівняння (1) з $\partial F/\partial t = 0$.

Результат інтегрування (1.9) та (1.7) тоді можна представити у вигляді

$$G = G_1(x, t, u, \ldots, u_k) + G_0(x, t, u, u_1), \tag{2.13}$$

де G_0 грає роль сталої інтегрування. Для $n_0 = 0$ $G_0 = G_0(x, t)$ і для $n_0 = 1$ $G_0 = G_0(x, t, u)$. Без втрати загальності вважатимемо надалі, що G_1 зникає, якщо $c_j(t) \equiv 0$, $j = n_0, \ldots, k$. Отже, в силу (1.9) можна подати G_1 у вигляді

$$G_1 = \sum_{p=n_0}^{k} \sum_{r=0}^{[\frac{p-n_0}{n-1}]} \zeta_{p,r}(x, u, u_1, \ldots, u_k) \partial^r c_p / \partial t^r. \tag{2.14}$$

Підстановка (2.13) до (1.1) дає

$$\partial G_0/\partial t + \{F, G_0\} = R, \tag{2.15}$$

де $R = -\partial G_1/\partial t - \{F, G_1\}$.

Зауважимо, що, оскільки G_1 отримано інтегруванням функцій (1.9), що задовольняють рівняння (1.5) з $l = n+n_0-1, \ldots, n+k-1$, $\mathrm{ord}\, R \leq n+n_0-2$. З іншого боку, безпосередня перевірка показує, що для довільного $H(x, t, u, u_1)$, такого, що при $n_0 \leq 1$ $\partial H/\partial u_j = 0$, $j = n_0, \ldots, 1$, маємо $\mathrm{ord}\{F, H\} \leq n + n_0 - 2$.

Диференціюючи (2.15) по t і підставляючи $\partial G_0/\partial t$ з (2.15) до отриманого рівняння, дістаємо

$$\partial^2 G_0/\partial t^2 - \{F, \{F, G_0\}\} = \partial R/\partial t - \{F, R\}. \tag{2.16}$$

Як випливає з (2.15), (2.16), і вищенаведених міркувань,

$$\partial\{F, G_0\}/\partial u_s = \partial R/\partial u_s, s = n_0, \ldots, n + n_0 - 2 \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial\{F, \{F, G_0\}\}}{\partial u_s} = \partial(\partial R/\partial t - \{F, R\})/\partial u_s, s = n_0, \ldots, n + n_0 - 2. \tag{2.18}$$

Має місце наступна

Лема 2.2.1 [31]. *Якщо* $\dim S_F^{(1)} < \infty$, *то загальний розв'язок системи*

$$\partial\{F,K\}/\partial u_s = 0, s = 2,3,\dots, \tag{2.19}$$

$$\partial\{F,\{F,K\}\}/\partial u_s = 0, s = 2,3,\dots. \tag{2.20}$$

в класі локальних функцій K, *що задовольняють умову* $\operatorname{ord} K \leq 1$, *є лінійною комбінацією (з залежними від часу* t *коефіцієнтами) деякої скінченної кількості* $\tilde{m}_F$ *лінійно незалежних (над довільним полем* $\mathbb{T}$ *функцій часу* t*) розв'язків.*

Доведення леми. У [31] показано, що твердження леми про скінченновимірність над $\mathbb{T}$ простору розв'язків (2.19), (2.20) за умови $\dim S_F^{(1)} < \infty$ справедливе вже для розв'язків підсистеми (2.19) розглядуваної системи для всіх F, за винятком кількох особливих випадків і тих F, які можна отримати з цих випадків контактними перетвореннями. Однак там же показано, що для вказаних особливих випадків підпростір простору розв'язків підсистеми (2.19), утворений тими розв'язками, що задовольняють умови (2.20), вже є скінченновимірним над $\mathbb{T}$. $\square$

Цікаво, що в [31] цю лему в явному вигляді сформульовано не було.

Оскільки рівняння (2.17), (2.18) не містять похідних G_0 по t, частинний розв'язок неоднорідної системи (2.17), (2.18) можна подати у вигляді $G_0 = \sum\limits_{p=n_0}^{k} \sum\limits_{r=0}^{[\frac{p-n_0}{n-1}]+2} \eta_{p,r}(x,u,u_1)\partial^r c_p/\partial t^r$, де для $n_0 \leq 1$ $\dfrac{\partial \eta_{p,r}}{\partial u_j} = 0$, $j = n_0,\dots,1$.

В свою чергу, загальний розв'язок системи (2.17), (2.18) можна, очевидно, представити у вигляді

$$G_0 = \sum_{j=1}^{m_F} d_j(t) H_j + \sum_{p=n_0}^{k} \sum_{r=0}^{[\frac{p-n_0}{n-1}]+1} \eta_{p,r}(x,u,u_1)\partial^r c_p/\partial t^r,$$

де $d_j(t)$ – довільні функції t, m_F – кількість лінійно незалежних (над довільним полем $\mathbb{T}$ функцій часу t) локальних розв'язків системи

$$\partial K/\partial u_j = 0, \partial\{F,K\}/\partial u_j = 0, \partial\{F,\{F,K\}\}/\partial u_j = 0, j = n_0, n_0+1,\dots,$$

а H_q, $q = 1, \ldots, m_F$ – деякий базис в просторі таких розв'язків. Ця система містить (2.19), (2.20) як підсистему, і отже, якщо $\dim S_F^{(1)} < \infty$, то і $m_F \leq \tilde{m}_F < \infty$.

Об'єднуючи цей результат з (2.13), (2.14), ми бачимо, що G можна подати у наступному вигляді:

$$G = \sum_{j=1}^{m_F} d_j(t) H_j + \sum_{p=n_0}^{k} \sum_{r=0}^{[\frac{p-n_0}{n-1}]+2} \gamma_{p,r}(x, u, \ldots, u_k) \partial^r c_p / \partial t^r, \tag{2.21}$$

Таким чином, G може містити щонайбільше $N_F^{(k)} \equiv m_F + \sum\limits_{p=n_0}^{k} ([\frac{p-n_0}{n-1}]+3)$ довільних функцій часу t ($d_j(t)$, $\partial^r c_p/\partial t^r$), і отже розмірність простору $S_F^{(k)}$ над довільним полем $\mathbb{T}$ функцій часу t не перевищує $N_F^{(k)}$, якщо $\dim S_F^{(1)} < \infty$. В силу Леми 1 статті [31] $\dim_{\mathbb{C}} S_F^{(k)} = \dim_{\mathbb{T}} S_F^{(k)}$ для довільного поля $\mathbb{T}$ функцій t, і отже має місце

Теорема 2.2.1 *Якщо* $\dim S_F^{(1)} < \infty$ *і* $\partial F/\partial t = 0$, *то для всіх* $k \geq n_0$

$$\dim S_F^{(k)} \leq m_F + \sum_{p=n_0}^{k} \left(\left[\frac{p-n_0}{n-1} \right] + 3 \right) < \infty. \tag{2.22}$$

Виконання умови $\dim S_F^{(1)} < \infty$ еквівалентне тому, що рівняння (1) не можна лінеаризувати за допомогою контактного перетворення [31].

Зауважимо (див. п.1.2), що, оскільки при розв'язуванні рівнянь (1.5) з $l < k+n-1$ доводиться обертати оператор D, що не завжди можливо, розв'язок цих рівнянь у класі локальних функцій G, взагалі кажучи, може не існувати, або ж його існування може накладати нетривіальні умови на функції $c_j(t)$ (пор. §7 у [50]). Але з доведення Теореми 2.2.1 цілком очевидно, що обмеження такого сорту можуть лише зменшити розмірність простору $S_F^{(k)}$ порівняно з оцінкою, вказаною в Теоремі 2.2.1, і отже твердження цієї теореми залишається вірним і в таких випадках.

Оскільки простір $S_F^{(k)}$ очевидним чином інваріантний відносно $\partial/\partial t$, бо за припущенням $\partial F/\partial t = 0$, і в силу Теореми 2.2.1 $\dim S_F^{(k)} < \infty$, з цієї теореми та з Теореми 2.1.1 випливає

Наслідок 2.2.1 *Якщо* $\dim S_F^{(1)} < \infty$ *і* $\partial F/\partial t = 0$*, то будь-яка симетрія* $G \in S_F^{(k)}$ *рівняння (1) є лінійною комбінацією симетрій вигляду*

$$Q = \exp(\lambda t) \sum_{j=0}^{q} Q_j(x, u, \ldots, u_k) t^j, \tag{2.23}$$

де $\lambda \in \mathbb{C}$*,* $q \le \dim S_F^{(k)} - 1$*.*

В свою чергу, з цього наслідку і Наслідку 3.1 з [58] негайно випливає

Наслідок 2.2.2 *Якщо рівняння (1) з* $\partial F/\partial t = 0$ *і* $\dim S_F^{(1)} < \infty$ *має симетрію вигляду* $\mathcal{D} = tF + h(x, u, u_1)$*, то всі симетрії рівняння (1) є поліномами по* t*.*

Доведення є частинним випадком доведення Наслідку 3.1 з [58]. Нехай симетрія $K \in S_F^{(k)}$ має найвищий можливий степінь p полінома по t у (2.23) і для неї $\lambda \neq 0$. Очевидно, що $\{\mathcal{D}, K\} \in S_F^{(k)}$. Користуючись (1.1) для $G = K$, знаходимо $\{\mathcal{D}, K\} = -t\partial K/\partial t + \{h, K\} \in S_F^{(k)}$.

Але звідси ясно, що для симетрії $\{\mathcal{D}, K\}$ теж маємо $\lambda \neq 0$, і степінь полінома по t при $\exp(\lambda t)$ для неї дорівнює $p + 1$, що суперечить припущенню про те, що найбільший можливий степінь такого полінома для симетрій з простору $S_F^{(k)}$ дорівнює p. Суперечність зникає лише у випадку $\lambda = 0$, що і завершує доведення. $\square$

Розглянемо довільну симетрію Q (2.23). Діючи на неї при $\lambda \neq 0$ оператором $(\partial/\partial t - \lambda)^q$ і при $\lambda = 0$ оператором $\partial^{q-1}/\partial t^{q-1}$, дістанемо симетрії вигляду $G_1 = \exp(\lambda t) Q_0$ та $G_2 = Q_0 + Q_1 t$ відповідно.

Підставляючи їх до (1.1), отримаємо

$$\{F, Q_0\} = -\lambda Q_0, \quad \lambda \neq 0, \tag{2.24}$$

$$\{F, Q_0\} = -Q_1. \tag{2.25}$$

Оскільки в силу Наслідку 2.2.1 будь-яка симетрія порядку не вище k рівняння (1) є лінійною комбінацією симетрій вигляду (2.23), звідси очевидно, що коли жодне з рівнянь (2.24), (2.25) не має незалежних від t локальних розв'язків Q_0, Q_1, то рівняння (1) з $\dim S_F^{(1)} < \infty$ і $\partial F/\partial t = 0$ взагалі не має залежних від часу t узагальнених симетрій.

Має місце також наступне підсилення Наслідку 2.2.1:

Твердження 2.2.1 *Якщо* $\dim S_{F,k} < \infty$, $k \geq n_0$, *і* $\partial F/\partial t = 0$, *будь-яка симетрія* $G \in S_{F,k}$ *є лінійною комбінацією симетрій вигляду*

$$Q = \exp(\lambda t) \sum_{j=0}^{s} Q_j(x, u, \dots, u_k) t^j, \tag{2.26}$$

де $\lambda \in \mathbb{C}$, $s \leq \dim S_{F,k} - 1$.

Доведення. Нехай $q = \dim S_{F,k} < \infty$ і G_j, $j = 1, \dots, q$ – деякий базис у $S_{F,k}$. В силу (1.7) маємо $\partial G_j/\partial u_k = h^{(j)}(t)(\partial F/\partial u_n)^{k/n}$. Очевидно, що функції $h^{(j)}(t)$ лінійно незалежні між собою, і отже можна побудувати такий лінійний диференціальний оператор B порядку q вигляду

$$B = \sum_{j=0}^{q} b_j(t) \partial^j/\partial t^j, \; b_q(t) \neq 0,$$

що $B(h^{(j)}(t)) = 0$, $j = 1, \dots, q$, причому без втрати загальності можна вважати, що $b_q(t) = \text{const}$.

За побудовою ясно, що для довільної симетрії $G \in S_F^{(k)}$ $\operatorname{ord} B(G) < k$ (для $n_0 = 0$ і $k = 0$ $B(G)$ буде функцією лише x і t). Оскільки за припущенням $\partial F/\partial t = 0$, це вірно зокрема для симетрій $\partial G_j/\partial t$, звідки випливає, що $B(\partial h^{(j)}(t)/\partial t) = 0$, $j = 1, \dots, q$.

Отже, $\partial/\partial t$ є симетрією лінійного диференціального рівняння $B(h(t)) = 0$, а тому, як добре відомо, має виконуватися комутаційне співвідношення $[B, \partial/\partial t] = R \circ B$, де R – деякий лінійний диференціальний оператор.

Однак при $R \neq 0$ це співвідношення суперечливе, бо порядок оператора $R \circ B$ не нижче q, а порядок $[B, \partial/\partial t] = -\partial B/\partial t$ в силу припущення, що $b_q = \text{const}$, очевидно не перевищує $q - 1$. Таким чином маємо $\partial B/\partial t = 0$, звідки $\partial b_j/\partial t = 0$, $j = 0, \dots, q - 1$.

Але тоді в силу Леми 1.2.3 $B(G_j) = 0$, $j = 1, \dots, q$, оскільки $B(h^{(j)}(t)) = 0$ і $\partial b_s/\partial t = 0$, $s = 0, \dots, q$, звідки і з класичних результатів про структуру розв'язків звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами випливає доводжуване твердження. □

Цікаво порівняти отримані нами результати з результатами статті Ма [97], де вивчалися деякі загальні властивості симетрій еволюційних рівнянь і систем (1) з $\partial F/\partial t = 0$. Автор цієї статті розглядав симетрії з *a priori* фіксованою залежністю від часу t вигляду

$$K = \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{j=-j_{0,i}}^{j_{1,i}} \exp(\lambda_i t^{l_i}) t^j q_{ij}(x, u, u_1, \dots),$$

де $i_0 \in \mathbb{N}$, $j_{0,i}, j_{1,i}$ – невід'ємні цілі числа, l_i – ненульові цілі числа, а $\lambda_i \in \mathbb{C}$ попарно різні, і показав, що K може бути симетрією рівняння чи системи (1) з $\partial F/\partial t = 0$ лише у випадку, коли $l_i = 1$ і $j_{0,i} = 0$ для всіх i, тобто K повинна бути лінійною комбінацією симетрій типу (2.23) з $q = j_{1,i}$, $\lambda = \lambda_i$.

На відміну від [97], ми *довели*, що для будь-якого рівняння (1) з $\partial F/\partial t = 0$ і $\dim S_F^{(1)} < \infty$ *всі* його узагальнені симетрії *вичерпуються* лінійними комбінаціями квазіполіномів по t вигляду (2.23). Підкреслимо, що ми не робили жодних апріорних припущень про вигляд залежності симетрій від часу t. Більше того, ми оцінили згори (див. Наслідок 2.2.1 і Твердження 2.2.1) степінь q полінома по t у (2.23) для будь-якого $H \in S_F^{(k)}$, в той час як будь-який результат такого типу відсутній у [97].

Отже, для частинного випадку рівнянь (1) з $\partial F/\partial t = 0$ і $\dim S_F^{(1)} < \infty$ отримані нами результати значно сильніші за результати статті [97].

2.3. Залежність симетрій трансляційно-інваріантних еволюційних рівнянь від x

2.3.1. Загальний випадок. Нехай у рівнянні (1) $\partial F/\partial x = 0$. Очевидно, що тоді $\partial F_*/\partial x = 0$, а отже і $\partial F_*^{s/n}/\partial x = 0$. Тому в силу

Наслідку 1.2.1 для симетрії G порядку k $\partial^2 G/\partial u_i \partial x = 0$ для $i = \max(k-n+2, n_0), \ldots, k$. Отже, $\operatorname{ord} \partial G/\partial x \le \max(\max(k-n+2, n_0)-1, 0)$. Але оскільки $\partial F/\partial x = 0$, u_1, а отже і $\partial G/\partial x = \{G, u_1\}$ є симетрією рівняння (1) і до $\partial G/\partial x$ теж можна застосувати наведені вище міркування, і т.д.

В силу сказаного вище симетрії порядку $k < n + n_0 - 2$ розглядуваного рівняння (1) мають вигляд

$$G = \chi(x, t, u, u_1) + h(t, u, \ldots, u_k), \tag{2.27}$$

причому при $n_0 < 2$ $\partial\chi/\partial u_j = 0, \quad j = n_0, \ldots, 1$.

Нехай $r_{k,n,-1} = \left[\dfrac{k}{n-1}\right]$ і для $q = 0, 1$

$$r_{k,n,q} = \begin{cases} \left[\dfrac{k}{n-1}\right] \text{ для } k \not\equiv 0, \ldots, q \pmod{n-1}, \\ \max(0, \left[\dfrac{k}{n-1}\right] - 1) \text{ для } k \equiv 0, \ldots, q \pmod{n-1}. \end{cases}$$

$[s]$ позначає тут цілу частину числа s.

Обертаючи тепер наведені вище міркування і інтегруючи симетрію (2.27) r_{k,n,n_0-1} разів по x, ми дістаємо наступний результат:

Теорема 2.3.1 *Будь-яку симетрію G порядку k рівняння (1) з $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$ можна представити у вигляді*

$$G = \psi(t, x, u, u_1) + \sum_{j=0}^{m} x^j g_j(t, u, \ldots, u_{k-j(n-1)}), \quad m \le r_{k,n,n_0-1}, \tag{2.28}$$

причому при $n_0 \le 1$

$$\partial\psi/\partial u_r = 0, \quad r = n_0, \ldots, 1. \tag{2.29}$$

Розглянемо ілюстративний приклад потенціального рівняння Бюргерса $u_t = u_2 + u_1^2$. Для нього $n_0 = 1$, і в силу щойно доведеної теореми будь-яка його узагальнена симетрія порядку $k \ge 1$ має вигляд

$$G = \psi(t, x, u) + \sum_{j=0}^{k-1} x^j g_j(t, u, \ldots, u_{k-j}).$$

Цікаво, що в даному випадку має місце "насичення", тобто для кожного k існують такі симетрії, для яких $g_{k-1} \neq 0$. Їх можна отримати, діючи оператором рекурсії на симетрії першого і нульового порядків.

Нехай
$$\mathcal{B}_F = \begin{cases} \Theta_F, & \text{якщо} \quad n_0 = 0, \\ S_F^{(n_0-1)} & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Якщо $b \equiv \dim \mathcal{B}_F < \infty$, результат Теореми 2.3.1 для рівнянь (1) і слабко діагоналізовних систем (5) можна дещо уточнити.

А саме, за побудовою ясно, що $\partial^{m+1}\psi/\partial x^{m+1} \in \mathcal{B}_F$. Оскільки простір $\mathcal{B}_F$ скінченновимірний і, очевидно, інваріантний відносно дії $\partial/\partial x$, в силу Теореми 3.1 з [58] будь-який його елемент, і зокрема $\partial^{m+1}\psi/\partial x^{m+1}$, є лінійною комбінацією квазіполіномів по x вигляду $Q = \exp(\lambda x) \sum\limits_{j=0}^{q} q_j(t, u, u_1) x^j$, де $\lambda \in \mathbb{C}$, $q \leq b - 1$.

Таким чином,
$$\partial^{m+1}\psi/\partial x^{m+1} = \sum_{j=0}^{d} \exp(\lambda_j x) P_j(x),$$
де $P_j(x)$ – поліноми по x степеня p_j, $p_j \leq b-1$, причому будемо вважати, що $\lambda_0 = 0$, а при $j \neq 0$ $\lambda_j \neq 0$. Для скорочення запису ми опустили в $P_j(x)$ залежність від t, u, u_1.

Інтегруючи це звичайне диференціальне рівняння для ψ, дістаємо
$$\psi = \sum_{j=m+1}^{m+p_0+1} h_{0,j-m-1} x^j / j! + \sum_{j=1}^{d} (\mathcal{R}(\lambda_j, p_j))^{m+1} (\exp(\lambda_j x) P_j(x)).$$
Тут $\mathcal{R}(\lambda, p) = \sum\limits_{i=0}^{p} (-1)^i \lambda^{-i-1} (\partial/\partial x - \lambda)^i$, $h_{0,j}$ – коефіцієнти полінома P_0 (тобто $P_0 = \sum\limits_{j=0}^{p_0} h_{0,j} x^j / j!$) і використано відому формулу для інтеграла від квазіполінома по x (див. [9], с.69) та очевидне комутаційне співвідношення $(\partial/\partial x - \lambda) \circ \exp(\lambda x) = \exp(\lambda x) \circ \partial/\partial x$. Крім того, ми виключили з ψ загальний розв'язок однорідного рівняння $\partial^{m+1}\psi/\partial x^{m+1} = 0$, який завжди можна включити до $\sum\limits_{j=0}^{m} g_j x^j$ у (2.28).

Очевидно, що $\mathcal{R}^r(\lambda_j, p_j)(\exp(\lambda_j x)P_j(x)) \in \mathcal{B}_F$, бо $\exp(\lambda_j x)P_j(x) \in \mathcal{B}_F$ і простір $\mathcal{B}_F$ інваріантний відносно $\partial/\partial x$, оскільки $\partial F/\partial x = 0$.

Зі сказаного безпосередньо випливає, що коли $\partial F/\partial x = 0$ і $b = \dim \mathcal{B}_F < \infty$, для симетрій з простору $S_F/\mathcal{B}_F$ без втрати загальності можна вважати, що у (2.28)

$$\psi = \sum_{j=m+1}^{m+p_0+1} h_{0,j-m-1} x^j/j!,$$

і зокрема, що ψ є поліномом по x степеня не вище $m + b \leq r_{k,n,n_0-1} + b$.

Якщо ж $\mathcal{B}_F$ взагалі не містить поліномів по x, то, очевидно, можна вважати, що для симетрій з простору $S_F/\mathcal{B}_F$ $\psi = 0$.

На завершення цього пункту відзначимо наступну цікаву обставину. Нехай $\tilde{S}_F = \{G \in S_F | \partial G/\partial x = 0\}$, $\tilde{S}_F^{(k)} = \tilde{S}_F \bigcap S_F^{(k)}$, $\tilde{S}_{F,k} = \tilde{S}_F \bigcap S_{F,k}$, $\tilde{\Theta}_F = \tilde{S}_F \bigcap \Theta_F$, $\widetilde{Ann}_F = \tilde{S}_F \bigcap Ann_F$, $\tilde{D} = D - \partial/\partial x$, причому під $\operatorname{Im} \tilde{D}$ будемо розуміти образ під дією $\tilde{D}$ простору таких локальних функцій, що явно не залежать від x.

Безпосередньо очевидно, що у випадку $\partial F/\partial x = 0$ Теореми 1.2.1, 1.4.1 (а також і Теореми 2.4.1, 2.4.2) залишаться справедливими для незалежних від x симетрій, якщо в їх формулюваннях, у означенні числа $p_{_F}$ і у формулі (7) замінити S_F, $S_F^{(k)}$, $S_{F,k}$, Θ_F, Ann_F, D, $\operatorname{Im} D$ на $\tilde{S}_F$, $\tilde{S}_F^{(k)}$, $\tilde{S}_{F,k}$, $\tilde{\Theta}_F$, $\widetilde{Ann}_F$, $\tilde{D}$, $\operatorname{Im} \tilde{D}$, оскільки доведення цих тверджень залишаться формально вірними після такої заміни.

Наприклад, оскільки для рівнянь зі сталою сепарантою $u_t = u_n + f(u, \ldots, u_{n-1})$ маємо $(\partial F/\partial u_n)^{-1/n} = 1 \notin \operatorname{Im} \tilde{D}$, в силу вищеописаної модифікації Теореми 1.2.1 такі рівняння не можуть мати залежних від t, але незалежних від x узагальнених симетрій порядку вище n.

2.3.2. Про стаціонарні симетрії еволюційних рівнянь. Надалі аж до початку п.2.3.3 обмежимося розглядом множини Ann_F *стаціонарних* симетрій рівняння (1), тобто симетрій G, для яких $\partial G/\partial t = 0$.

Нехай $Ann_F^{(k)} = S_F^{(k)} \bigcap Ann_F$. За Теоремою 1 з [50] для будь-якого рівняння (1) з $\partial F/\partial t = 0$ $\dim Ann_F^{(k)} \leq n + k + 2$. Якщо до того ж виконується умова $\partial F/\partial x = 0$, то очевидно, що простір $Ann_F^{(k)}$ інваріантний відносно $\partial/\partial x$, тому за Теоремою 3.1 з [58] будь-яка симетрія з $Ann_F^{(k)}$ є лінійною комбінацією квазіполіномів по x вигляду $\exp(\lambda x) \sum\limits_{j=0}^{q} g_j(u, \ldots, u_k) x^j$, $\lambda \in \mathbb{C}$, причому $q \leq \dim Ann_F^{(k)} - 1 \leq n+k+1$.

Якщо порядок розглядуваної симетрії не нижчий за n_0, то підставивши цей вираз для симетрії до (1.7), ми бачимо, що $\lambda = 0$, тобто така симетрія обов'язково є поліномом по x порядку не вище $\dim Ann_F^{(k)} - 1 \leq n+k+1$.

Об'єднуючи цей результат з Теоремою 2.3.1, дістаємо

Наслідок 2.3.1 *Для симетрії $G \in Ann_F$ порядку $k \geq n_0$ рівняння (1) з $\partial F/\partial t = \partial F/\partial x = 0$ має місце представлення вигляду (2.28), у якому $\psi(x, u, u_1)$ є поліномом по x порядку не вище* $\dim Ann_F^{(k)} - 1 \leq n + k + 1$.

Цей результат можна значно посилити, якщо розглядуване рівняння (1) з $\partial F/\partial t = 0$ і $\partial F/\partial x = 0$ володіє формальною симетрією L ненульового степеня і нескінченного рангу з незалежними від x і t коефіцієнтами. Без втрати загальності (див. [35], с.243), що $\deg \mathrm{L} = 1$.

Для будь-якої симетрії $G \in Ann_F$ порядку $k \geq n_0$ з (1.4) випливає, що $\deg[\nabla_F - F_*, G_*] = \deg \nabla_G(F_*) \leq n + n_0 - 2$, тому в силу Леми 9 з [50]

$$G_* = \sum_{j=n_0}^{k} b_j \mathrm{L}^j + \mathrm{N},$$

де b_j – деякі сталі, N –деякий формальний ряд з незалежними від t коефіцієнтами, $\deg \mathrm{N} < n_0$.

Звідси ясно, що $\deg \partial G_*/\partial x \leq n_0 - 1$, бо $\partial L/\partial x = 0$. Отже, в розглядуваному випадку довільну симетрію $G \in Ann_F$ порядку $k \geq n_0$ можна представити у вигляді

$$G = g_0(u, \ldots, u_k) + \psi(x, u, u_1),$$

причому при $n_0 < 2$ $\dfrac{\partial \psi}{\partial u_j} = 0$, $j = n_0, \ldots, 1$, і $\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \in Ann_F$.

2.3.3. Достатня умова (квазі)поліноміальності симетрій по t.

Розглянемо тепер частинний випадок рівняння (1), для якого $\partial F/\partial t = 0$, $\partial F/\partial x = 0$, $(\partial F/\partial u_n)^{-1/n} = a + K(u, \ldots, u_n)$, де $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $K \in \operatorname{Im} \tilde{D}$ і $\nabla_F(K) \in \operatorname{Im} \tilde{D}$, де $\tilde{D} = D - \partial/\partial x$.

Нехай G – симетрія такого рівняння (1), $\operatorname{ord} G \equiv k > n + n_0 - 2$. Тоді в силу формули (1.15) Наслідку 1.2.1 ясно, що

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u_{k-n+1}\partial x} = (a/n)(a + K(u, \ldots, u_n))^{-k-n+1}\frac{\partial c_k(t)}{\partial t}, \tag{2.30}$$

оскільки, як вже зазначалося при доведенні Теореми 2.3.1, з $\partial F/\partial x = 0$ випливає $\partial F_*^{s/n}/\partial x = 0$. Аналогічні міркування можна застосувати до симетрії $\partial G/\partial x$ і т.д., в результаті чого дістанемо наступну формулу для симетрії $Q = \partial^r G/\partial x^r \in S_F^{(n-2+n_0)}$, $r = r_{k,n,n_0-1}$:

$$\partial Q/\partial u_q = (a/n)^r (a+K(u, \ldots, u_n))^{-\frac{k-r(n-1)}{n}} \partial^r c_k(t)/\partial t^r, q \equiv \operatorname{ord} Q. \tag{2.31}$$

Користуючись нею, ми можемо узагальнити результат Магадєєва і Соколова [32] про поліноміальність по t симетрій рівняння Кортевега – де Фріза у наступний спосіб:

Теорема 2.3.2 *Якщо для рівняння (1) з* $\dfrac{\partial F}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\left(\dfrac{\partial F}{\partial u_n}\right)^{-\frac{1}{n}} = a + K(u, \ldots, u_n)$, *де* $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $K \in \operatorname{Im} \tilde{D}$, $\nabla_F(K) \in \operatorname{Im} \tilde{D}$, *і всі симетрії з простору* $S_F^{(n-2+n_0)}/\mathcal{B}_F$ *є поліномами (або лінійними комбінаціями квазіполіномів) по* t, *то таку ж властивість мають усі симетрії цього рівняння з простору* $S_F/\mathcal{B}_F$.

Доведення. З формули (2.31) і умов теореми випливає, що $\partial^r c_k(t)/\partial t^r$ є поліномом (або лінійною комбінацією квазіполіномів) по t, а тому, як легко бачити, і сама функція $c_k(t)$ має таку ж властивість.

Отже, існує диференціальний оператор $\Delta = \sum\limits_{l=0}^{m} a_l \partial^l/\partial t^l$ зі сталими коефіцієнтами $a_l \in \mathbb{C}$ такий, що $\Delta(c_k(t)) = 0$. Зокрема, якщо $c_k(t)$ – поліном по t степеня не вище p, можна взяти в якості Ω оператор $\Delta_0 = \partial^{p+1}/\partial t^{p+1}$.

Очевидно, ми без втрати загальності можемо вважати, що $G \in S_{F,k}$, $k > n_0$. Оскільки $\partial F/\partial t = 0$, в силу Леми 1.2.3 $\Delta(G) = 0$, бо $\Delta(c_k(t)) = 0$, і отже G має доводжувану властивість. $\square$

Зауважимо, що коли виконуються умови теореми, і отже всі симетрії з простору $S_F/\mathcal{B}_F$ є поліномами або лінійними комбінаціями квазіполіномів по t, всі симетрії з цього простору можна побудувати через т.зв. генератори степеня s (можливо з ненульовою характеристикою) для різних $s \in \mathbb{N}$, використовуючи відомі результати Фуксштайнера [86] та Ма [97].

Слід також відмітити, що в силу Наслідку 2.2.1 Теореми 2.2.1 будь-яке рівняння (1) з $\partial F/\partial t = 0$, яке не можна лінеаризувати контактним перетворенням, задовольняє умови Теореми 2.3.2, і, знову-таки в силу Наслідку 2.2.1 твердження Теореми 2.3.2 (якщо вона застосовна до нього) про те, що його симетрії є лінійними комбінаціями квазіполіномів по t, є тривіальним. Однак навіть в такому випадку Теорема 2.3.2 зберігає своє значення як проста і зручна достатня умова *поліноміальності* по t симетрій розглядуваного рівняння.

Приклад 1. Розглянемо рівняння

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_3 + uu_1,\\
&u_t = u_3 + u_1^2 + c,\\
&u_t = u_3 + u^2u_1 + cu_1,\\
&u_t = u_3 + u_1^3 + cu_1 + d,\\
&u_t = u_3 - u_1^3/2 + (a\exp(2u) + b\exp(-2u) + d)u_1.
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Тут $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Зауважимо, що ці рівняння (з точністю до перетворень еквівалентності) вичерпують список інтегровних еволюційних рівнянь вигляду $u_t = u_3 + f(u, u_1)$ (див. [35], с.257).

Покажемо, що всі симетрії цих рівнянь порядків 0 і 1 (як елементи Θ_F, так і $S_F^{(1)}/\Theta_F$) поліноміальні по t, а отже в силу Теореми 2.3.2 це справедливо взагалі для всіх узагальнених симетрій цих рівнянь.

Для рівняння Кортевега – де Фріза $u_t = u_3 + uu_1$ це вже було доведено Магадєєвим і Соколовим [32], тому розглянемо решту рівнянь.

Використовуючи визначальні рівняння (1.5) для $l = n + k - 2$ та $l = n + k - 1$ (або Наслідок 1.2.1), неважко показати (пор. [26], с.196, для випадку незалежних від часу симетрій), що, оскільки для всіх розглядуваних рівнянь $n_0 = 0$, для будь-якої симетрії G порядку 1 рівняння (1) з нашого списку маємо

$$G = g(t)u_1 + h(t)u + \chi(x,t). \tag{2.33}$$

Всі рівняння списку мають вигляд $u_t = u_3 + f(u, u_1) = F$, тому підставляючи наші F і G до визначального рівняння (1.4) і обчислюючи відповідну дужку Лі, дістанемо:

$$\begin{aligned} &\dot{g}(t)u_1 + \dot{h}(t)u + \dot{\chi}(x,t) = \\ &h(t)(f - u\partial f/\partial u) - \chi''' - \partial f/\partial u_1 \chi' - \chi \partial f/\partial u. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Штрих тут позначає похідну по x.

Подальші обчислення проведемо для випадку узагальненого модифікованого рівняння Кортевега – де Фріза з $f = u^2 u_1 + cu_1$ (в інших випадках викладки цілком аналогічні).

Збираючи в рівнянні (2.34) коефіцієнти при подібних членах, послідовно знаходимо: при uu_1: $\chi(x,t) = 0$, при $u^2 u_1$: $h(t) = 0$, при u_1 $\dot{g}(t) = 0$, а збирання коефіцієнтів при решті членів не дає нічого нового.

Зі знайдених рівнянь очевидним чином випливає, що для узагальненого модифікованого рівняння Кортевега – де Фріза простір $S^{(1)}_{gmKdV}$ одновимірний і породжений генератором u_1 зсуву по x, який взагалі не залежить від t, а отже задовольняє умови Теореми 2.3.2, тому всі його узагальнені симетрії поліноміальні по t.

Проводячи аналогічні викладки для решти рівнянь списку (2.32), ми бачимо, що всі їхні симетрії порядків 0 і 1 поліноміальні по t, а отже в силу Теореми 2.3.2 це справедливо для всіх їхніх узагальнених симетрій.

Розглянемо тепер узагальнення знайдених в цьому підрозділі результатів на випадок невироджених слабко діагоналізовних систем (5). Якщо $\partial F^\alpha/\partial x = 0$, $\alpha = 1, \ldots, m$, то ясно, що без втрати загальності матриці Ω, Ω_j можна вважати незалежними від x. В свою чергу, звідси очевидно, що тоді V, а отже і дробові степені $\mathrm{V}^{j/n}$, також не залежать від x, тому з Леми 1.4.1 випливає, що $\operatorname{ord} \partial G/\partial x = \deg \partial G_*/\partial x \leq k - \min(k - n_0 + 2, n) + 1$. Звідси ясно, що коли в доведенні Теореми 2.3.1 використати Наслідок 1.4.1 замість Наслідку 1.2.1, то твердження цієї теореми залишається вірним для довільних невироджених слабко діагоналізовних систем з $\partial F^\alpha/\partial x = 0$, $\alpha = 1, \ldots, m$.

Аналогічно, використовуючи Наслідок 1.4.1, легко переконатися в тому, що має місце наступний аналог Теореми 2.3.2:

Теорема 2.3.3 *Якщо для невиродженої слабко діагоналізовної системи (5) з* $\partial F/\partial t = 0$, $\partial F/\partial x = 0$, $\lambda_i^{-1/n} = a_i + K_i(u, \ldots, u_n)$, *де* $a_i \in \mathbb{C}$, $a_i \neq 0$, $K_i \in \operatorname{Im} \tilde{D}$, $\nabla_F(K_i) \in \operatorname{Im} \tilde{D}$, $i = 1, \ldots, s$, *і усі симетрії з простору* $S_F^{(n-2+n_0)}/\mathcal{B}_F$ *є поліномами або лінійними комбінаціями квазіполіномів по* t, *то таку ж властивість мають усі симетрії цього рівняння з простору* $S_F/\mathcal{B}_F$.

Доведення. Очевидно, що в розглядуваному випадку без втрати загальності можна вважати, що $\partial\Omega/\partial x = 0$, $\partial\Omega/\partial t = 0$, $\partial\mathrm{T}/\partial x = 0$, $\partial\mathrm{T}/\partial t = 0$. Тому з Наслідку 1.4.1 випливає, що для симетрії $G \in S_F$ порядку $k > n + n_0 - 2$ маємо

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial u_{k-n+1}} = \Omega^{-1}(A/n)\partial c_k/\partial t \Lambda^{\frac{k-n+1}{n}}\Omega,$$

де $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$. Застосовуючи аналогічні міркування до $\partial G/\partial x$ і т.д., дістанемо наступний аналог формули (2.31):

$$\partial Q/\partial u_q = \Omega^{-1}(A/n)^r \Lambda^{\frac{k-r(n-1)}{n}} \partial^r c_k(t)/\partial t^r \Omega, \; q \equiv \operatorname{ord} Q. \tag{2.35}$$

де $Q = \partial^r G/\partial x^r \in S_F^{(n-2+n_0)}$, $r = r_{k,n,n_0-1}$.

Як і в скалярному випадку, з формули (2.35) і умов теореми випливає, що $\partial^r c_k(t)/\partial t^r$ є поліномом (або лінійною комбінацією квазіполіномів) по t, а тому, як легко бачити, і сама матриця-функція $c_k(t)$ має таку ж властивість.

Отже, існує диференціальний оператор $\Delta = \sum\limits_{l=0}^{m} a_l \partial^l/\partial t^l$ зі сталими коефіцієнтами $a_l \in \mathbb{C}$ такий, що $\Delta(c_k(t)) = 0$. Як і для скалярного рівняння (1), коли $c_k(t)$ – поліном по t степеня не вище p, можна взяти в якості Δ оператор $\Delta_0 = \partial^{p+1}/\partial t^{p+1}$.

Без втрати загальності будемо вважати, що $G \in S_{F,k}$, $k > n - 2 + n_0$. Оскільки $\partial F/\partial t = 0$, в силу Леми 1.2.3, яка, очевидно, застосовна і до випадку, коли $c_k(t)$ – матриця, $\Delta(G) = 0$, бо $\Delta(c_k(t)) = 0$, і отже G має доводжувану властивість. $\square$

Ясно, що формула (2.35) з $A = \operatorname{diag}(a_1(t), \ldots, a_n(t))$ виконується і у випадку коли $\partial F/\partial t \neq 0$, $\partial F/\partial x = 0$, $\lambda_i^{-1/n} = a_i(t) + K_i(t, u, \ldots, u_n)$, де $a_i \in \mathbb{C}$, $a_i \neq 0$, $K_i \in \operatorname{Im} \tilde{D}$, $\nabla_F(K_i) \in \operatorname{Im} \tilde{D}$, $i = 1, \ldots, s$.

Її використання дозволяє оцінити $\dim S_{F,k}$ і, зокрема, дещо уточнити результат Твердження 2.2.1. А саме, оскільки $Q \in S_F^{(k-r(n-1))}$ можна представити у вигляді $Q = Q_0 + Q_1$, $Q_0 \in S_F^{(k-r(n-1)-1)}$, $Q_1 \in S_{F,k-r(n-1)}$, причому в силу (1.7)

$$\partial Q/\partial u_{k-r(n-1)} = \partial Q_1/\partial u_{k-r(n-1)} = \Omega^{-1} h(t) \Lambda^{\frac{k-r(n-1)}{n}} \Omega,$$

де $h(t)$ – деяка $s \times s$ діагональна матриця-функція t, з (2.35) дістаємо звичайне диференціальне рівняння на *діагональну матрицю* $c_k(t)$:

$$\partial^r c_k(t)/\partial t^r = n^r A^{-r} h(t), r = r_{k,n,n_0-1},$$

з якого очевидно, що для невиродженої слабко діагоналізовної системи (5) з $\partial F/\partial x = 0$, $\lambda_i^{-1/n} = a_i(t) + K_i(t, u, \ldots, u_n)$, де $a_i \in \mathbb{C}$, $a_i \neq 0$, $K_i \in \operatorname{Im} \tilde{D}$, $\nabla_F(K_i) \in \operatorname{Im} \tilde{D}$, $i = 1, \ldots, s$ при $k > n + n_0 - 2$

$$\dim S_{F,k} \leq s\, r_{k,n,n_0-1} + \dim S_{F,k-r(n-1)}.$$

Зокрема, в силу сказаного вище і Твердження 2.2.1 будь-яка симетрія $G \in S_{F,k}$, $k > n + n_0 - 2$, рівняння (1) з $\partial F/\partial t = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\left(\dfrac{\partial F}{\partial u_n}\right)^{-\frac{1}{n}} = a + K(u, \ldots, u_n)$, де $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $K \in \operatorname{Im} \tilde{D}$, $\nabla_F(K) \in \operatorname{Im} \tilde{D}$, є лінійною комбінацією симетрій вигляду

$$Q = \exp(\lambda t) \sum_{j=0}^{s} Q_j(x, u, \ldots, u_k) t^j, \tag{2.36}$$

де $\lambda \in \mathbb{C}$, $s \leq \dim S_{F,k} - 1 \leq r + \dim S_{F,k-r(n-1)} - 1$.

Наприклад, для потенціального рівняння Бюргерса $u_t = u_2 + u_1^2$ елементи $S_F^{(1)}/S_F^{(0)} = S_{F,1}$ є лінійними функціями t і $\dim S_{F,1} = 2$ (див. [42], с.380-381), тому в силу Теореми 2.3.2 і (2.36) симетрії цього рівняння з простору $S_{F,k}$, $k > 1$, будуть поліномами по t порядку не вище k.

Достатню умову поліноміальності симетрій по t з Теорем 2.3.2 і 2.3.3 можна ефективно використати для знаходження всіх локальних узагальнених симетрій еволюційних рівнянь (1) і невироджених слабко діагоналізовних систем (5) з $\partial F/\partial t = 0$, для яких не виконуються необхідні умови існування формальних симетрій нескінченного рангу і ненульового степеня. Підкреслимо, що ми завжди розглядаємо формальні симетрії, коефіцієнти яких є локальними функціями.

Оскільки скалярні рівняння є частинним випадком невироджених слабко діагоналізовних систем, провадитимемо подальший розгляд саме для таких систем.

Нехай для такої системи канонічні щільності ρ_m^a, $a = 1, \ldots, s$ для деякого $m \in \{-1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ і $a \in \{1, \ldots, s\}$ не задовольняють умову $D_t(\rho_m^a) \in \operatorname{Im} D$, причому для $j < m$ $D_t(\rho_j^a) \in \operatorname{Im} D$ для всіх $a = 1, \ldots, s$.

В силу Теореми 3.1 (див. [36], с.18) ця система не має незалежних від часу t (тобто стаціонарних) формальних симетрій ненульового степеня і рангу вище $n + m + 1$, але має стаціонарні формальні симетрії рангу $n + m$ ненульового степеня.

Нагадаємо, що канонічні щільності визначаються як

$$\rho_m^a = (\operatorname{res} \mathrm{T}\mathrm{L}^m\mathrm{T}^{-1})_{aa}, m \neq 0, \rho_0^a = (\operatorname{res} \ln \mathrm{T}\mathrm{L}\mathrm{T}^{-1})_{aa},$$

де L – стаціонарна формальна симетрія нескінченного рангу і степеня 1 невиродженої слабко діагоналізовної системи (5) (тобто ці щільності визначаються в припущенні існування такої симетрії, а порушення умов $D_t(\rho_m^a) \in \operatorname{Im} D$ веде до відсутності формальної симетрії достатньо високого рангу, див. подробиці у [36], с.16 і далі). Тут B_{ij} позначає (i,j)-й матричний елемент матриці B, а лишок $\operatorname{res} \mathrm{H}$ і логарифмічний лишок $\operatorname{res} \ln \mathrm{H}$ довільного формального ряду $\mathrm{H} = \sum\limits_{j=-\infty}^{p} h_j D^j$ визначаються як $\operatorname{res} \mathrm{H} = h_{-1}$ і $\operatorname{res} \ln \mathrm{H} = h_{m-1} h_m^{-1}$ відповідно [36],с.15.

Звичайно, $\operatorname{res} \ln \mathrm{H}$ добре визначений лише у випадку $\det h_m \neq 0$, тому надалі ми вважатимемо (як легко бачити, без втрати загальності), що коефіцієнт при D формальної симетрії L, а отже і відповідний коефіцієнт у $\mathrm{T}\mathrm{L}\mathrm{T}^{-1}$, – невироджені матриці.

Далі, оскільки для будь-якої симетрії G порядку $k \geq n_0$ розглядуваної системи (5) в силу (1.4) ясно, що G_* є формальною симетрією рангу $k - n_0 + 2$, і отже за зроблених припущень ця система не матиме незалежних від t локальних узагальнених симетрій порядку вище $n + m + n_0 - 1$.

Тепер використаємо наступний майже очевидний наслідок Леми 1.2.3:

Наслідок 2.3.2 *Якщо рівняння (1) чи невироджена слабко діагоналізовна система (5) з* $\partial F/\partial t = 0$ *має поліноміальні по* t *симетрії з простору* $S_{F,k}$, $k \geq n_0$, *то вона обов'язково має лінійні по* t *і незалежні від* t *симетрії, що належать до цього простору.*

Доведення. Нехай симетрія $G \in S_{F,k}$ є поліномом по t порядку s, $G = \sum\limits_{j=0}^{s} t^j g_j(x, u, \ldots, u_k)$, $g_s \neq 0$. Нехай $c_k(t)$ – функція (а у випадку систем – $s \times s$ діагональна матриця), визначена рівністю (1.7) для скалярного рівняння (1) і рівністю $\partial G/\partial u_k = \Omega^{-1} c_k(t) \Lambda^{k/n} \Omega$ для невироджених слабко діагоналізовних систем.

В силу Леми 1.2.3 з $L = \partial^s/\partial t^s$ ясно, що $c_k(t)$ також є поліномом по t порядку s, $c_k(t) = \sum\limits_{j=0}^{s} t^j c_{k,j}$, $c_{k,s} \neq 0$. Тому симетрія $\tilde{G} = \partial^{s-1}G/\partial t^{s-1}$ має вигляд $\tilde{G} = tA + B$, $\partial A/\partial t = 0$, $\partial B/\partial t = 0$, $\operatorname{ord} A = q$, причому $A = \partial^s G/\partial t^s \in S_{F,k}$, бо в супротивному випадку порушувалася б Лема 1.2.3 з $L = \partial^s/\partial t^s$.

Крім того, оскільки ми розглядаємо залежні від часу симетрії з точністю до додавання незалежних від часу симетрій, без втрати загальності можна вважати, що $\tilde{G} \in S_{F,k}$.

Отже, ми побудували за поліноміальною по t симетрією $G \in S_{F,k}$ незалежну від t симетрію A і лінійну по t симетрію $\tilde{G}$ з простору $S_{F,k}$. $\square$

З наслідку 2.3.2 ясно, що порушення умови $D_t(\rho_m^a) \in \operatorname{Im} D$, $a = 1, \ldots, s$, і викликана ним відсутність стаціонарних симетрій порядку вище $n + m + n_0 - 1$ ведуть до відсутності довільних поліноміальних по t симетрій з простору $S_F/S_F^{(n+m+n_0-1)}$, а якщо можна довести, користуючись Теоремами 2.3.2 і 2.3.3 або іншими методами, що всі симетрії з цього простору *вичерпуються* поліномами по t, то розглядуване рівняння або невироджена слабко діагоналізовна система взагалі не має узагальнених симетрій порядку вище $n + m + n_0 - 1$.

З іншого боку, симетрії порядків $0, \ldots, n + m + n_0 - 1$ завжди можна знайти безпосереднім обчисленням (з використанням при потребі комп'ютерної алгебри), причому ми щойно показали, що за зроблених припущень вони вичерпують всю множину S_F локальних узагальнених симетрій даного рівняння чи системи.

Приклад 2. Розглянемо неінтегровне еволюційне рівняння, що описує деякі процеси нелінійної теплопровідності

$$u_t = u_2 + a\ln^2(u), a \neq 0,$$

для якого $\rho_1 = (a/u)\ln u, D_t(\rho_1) \notin \operatorname{Im} D$, а $D_t(\rho_j) = 0 \in \operatorname{Im} D, j = -1, 0$.

Легко перевірити, що в даному випадку $n_0 = 0$ і всі симетрії цього рівняння з простору $S_F^{(0)}$ поліноміальні по t, а отже в силу Теореми 2.3.2 взагалі всі узагальнені симетрії цього рівняння поліноміальні по t, тому в силу сказаного вище воно не має узагальнених симетрій порядку вище 2.

Обчислення симетрій порядків $0, \dots, 2$ показує, що це рівняння має лише дві симетрії u_1 та $u_2 + a\ln^2(u)$, що еквівалентні точковим симетріям Лі і відповідають очевидній інваріантності відносно зсувів по x і t.

Розглянемо тепер приклад, в якому застосування наших результатів дозволяє знайти *всі* узагальнені симетрії системи, що має формальну симетрію нескінченного рангу, але не має незалежних від x, t узагальнених симетрій порядку вище шести.

Приклад 3. Система Бакірова [61]

$$\begin{aligned} u_t &= u_4 + v^2 \\ v_t &= v_4/5. \end{aligned} \tag{2.37}$$

І.М. Бакіровим [61] за допомогою комп'ютерної алгебри було показано, що ця система не має незалежних від x і t узагальнених симетрій, крім наведених нижче у (2.38) до порядку 53 включно.

Ф. Бойкерсом, Я. Сандерсом і Дж. П. Ванг [65] було строго доведено, що (2.37) не має незалежних від x і t узагальнених симетрій порядку вище шести і що K (див. (2.38)) – єдина узагальнена симетрія з цього класу, що нееквівалентна точковій симетрії Лі. Доведемо, що аналогічний результат має місце для всіх узагальнених симетрій цієї системи, в тому числі для тих, що залежать від x і t.

Безпосереднє обчислення узагальнених симетрій порядків $0, \dots, 6$ показує, що будь-яка симетрія порядку не вище шести є лінійною комбінацією симетрій

$$\begin{aligned} &X = u_1\partial/\partial u + v_1\partial/\partial v, T = (u_4 + v^2)\partial/\partial u + (1/5)v_4\partial/\partial v, \\ &\mathcal{D}_0 = 2u\partial/\partial u + v\partial/\partial v, \mathcal{D} = 4tT + xX + 2v\partial/\partial v, \\ &W_\alpha = \alpha(x,t)\partial/\partial u, \\ &K = (u_6 + (5/11)(5vv_2 + 4v_1^2))\partial/\partial u + (1/11)v_6\partial/\partial v, \end{aligned} \tag{2.38}$$

де $\alpha(x,t)$ – довільний достатньо гладкий розв'язок рівняння $\alpha_t = \alpha_4$.

Очевидно, що всі ці симетрії, за винятком K, еквівалентні точковим симетріям Лі. Надалі ми, як і завжди, ототожнюватимемо симетрії з їх характеристиками і записуватимемо їх у вигляді двохкомпонентних векторів, тобто замість $G = G_1\partial/\partial u + G_2\partial/\partial v$ будемо писати $G = (G_1, G_2)^T$, де ^{T} позначає матричне транспонування.

Перш за все покажемо, що для системи Бакірова

$$Ann_{Bak}\bigcap(S_{Bak}/\Theta_{Bak}) = \widetilde{Ann}_{Bak}\bigcap(S_{Bak}/\Theta_{Bak}),$$

тобто всі її стаціонарні симетрії, які залежать не тільки від змінної x, а і від $u, u_1, \ldots, v, v_1, \ldots$ насправді не залежать від x.

Як показано у [66], ця система має формальну симетрію L степеня 2 нескінченного рангу, коефіцієнти якої не залежать від x і t.

Розглянемо формальний ряд $\mathrm{P} = \mathrm{T}G_*\mathrm{T}^{-1}$ для $G \in Ann_{Bak}$. Оскільки $\partial G/\partial t = 0$, з (1.4) дістаємо

$$[\nabla_F - \mathrm{V}, \mathrm{P}] = \mathrm{T}\nabla_G(F_*)\mathrm{T}^{-1}.$$

У випадку системи Бакірова легко бачити, що $\deg \mathrm{T}\nabla_G(F_*)\mathrm{T}^{-1} = \deg \nabla_G(F_*) \leq 0$, і отже $\deg\,[\nabla_F - \mathrm{V}, \mathrm{P}] \leq 0$.

Оскільки L за визначенням задовольняє рівняння $[\nabla_F - F_*, \mathrm{L}] = 0$, для $\mathrm{L}' = \mathrm{TLT}^{-1}$ маємо $[\nabla_F - \mathrm{V}, \mathrm{L}'] = 0$, причому (див. [35], с.248–249) коефіцієнти формального ряду L' є діагональними матрицями.

В повній аналогії з Лемою 9 статті [50] можна показати, що оскільки $\deg\,[\nabla_F - \mathrm{V}, \mathrm{P}] \leq 0$, P можна представити у вигляді

$$\mathrm{P} = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j (\mathrm{L}')^{\frac{j}{2}} + \mathrm{B},$$

де α_j – сталі діагональні 2×2 матриці, а B – деякий формальний ряд з незалежними від t коефіцієнтами, $\deg \mathrm{B} < 0$, а отже

$$G_* = \mathrm{T}^{-1}\left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_j (\mathrm{L}')^{\frac{j}{2}} + \tilde{\mathrm{B}}\right)\mathrm{T}.$$

Оскільки, очевидно, $\partial \mathrm{T}/\partial x = \partial \mathrm{L}'/\partial x = 0$, $\partial G_*/\partial x = \mathrm{T}^{-1}\partial \mathrm{B}/\partial x \mathrm{T}$. Але ясно, що $\deg \partial G_*/\partial x \geq 0$, в той час як $\deg \mathrm{T}^{-1}\partial \mathrm{B}/\partial x \mathrm{T} < 0$. Звідси безпосередньо випливає, що $\partial G_*/\partial x = 0$.

Отже, довільну симетрію $G \in Ann_{Bak}$, $k \equiv \operatorname{ord} G \geq 0$ можна представити у вигляді

$$G = G_0(u, \dots, u_k, v, \dots, v_k) + \phi(x),$$

причому очевидно, що $\partial \phi/\partial x \in Ann_{Bak}$.

Звідси і з (2.38) зрозуміло, що

$$\phi_1(x) = \sum_{j=1}^{4} c_j \frac{x^j}{j!},$$
$$\phi_2(x) = 0.$$

Тут c_j – деякі сталі, а сталі інтегрування включено до G_0.

Оскільки $(x^j, 0)^T$ для $j = 0, 1, 2, 3$ є симетріями системи Бакірова, для того, щоб довести, що $Ann_{Bak} \bigcap (S_{Bak}/\Theta_{Bak}) = \widetilde{Ann}_{Bak} \bigcap (S_{Bak}/\Theta_{Bak})$, нам залишається показати, що система Бакірова не має симетрій вигляду $G = G_0(u, \dots, u_k, v, \dots, v_k) + \phi(x)$ з $\phi(x) = (cx^4/4!, 0)^T$, $c = \mathrm{const}$, $c \neq 0$.

За визначенням така симетрія задовольняє рівняння $\{F, G\} = 0$, яке еквівалентне рівнянню

$$\{F, G_0\} = -4(c, 0)^T \equiv -H. \tag{2.39}$$

Але оскільки $(1, 0)^T$ є стаціонарною симетрією системи Бакірова, виконання (2.39) очевидним чином еквівалентне існуванню у цієї системи залежної від часу t симетрії вигляду $Q = G_0 + tH$.

Оскільки для розглядуваної системи матриця Φ діагональна, $\Phi = \Lambda$, і її власні значення дорівнюють $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/5$. Очевидно, $\lambda_i^{-1/4} \notin \operatorname{Im} \tilde{D}$, де $\tilde{D} = D - \partial/\partial x$. Але тоді в силу модифікованої (див. кінець п.2.3.1) Теореми 1.4.1, в якій $\operatorname{Im} D$ замінено на $\operatorname{Im} \tilde{D}$, система (2.37) не має залежних від t, але незалежних від x узагальнених симетрій порядку вище чотирьох.

Однак з (2.38) ясно, що таких симетрій порядку чотири і нижче у розглядуваної системи немає. Таким чином, ми довели, що

$$Ann_{Bak}\bigcap(S_{Bak}/\Theta_{Bak}) = \widetilde{Ann}_{Bak}\bigcap(S_{Bak}/\Theta_{Bak}),$$

звідки і з (2.38) негайно випливає, що $Ann_{Bak} = \widetilde{Ann}_{Bak}\bigcup\Upsilon$, $\Upsilon = \{(x^j, 0)^T, j = 1, 2, 3\}$. Отже, Ann_{Bak} не містить елементів порядку вище шести.

Оскільки для (2.37) $n_0 = 0$ і в силу (2.38) всі елементи простору $S^{(2)}_{Bak}/\Theta_{Bak}$ є поліномами по t, в силу Теореми 2.3.3 це справедливо і для всіх елементів простору S_{Bak}/Θ_{Bak}.

Звідси і з Наслідку 2.3.2 випливає, що система (2.37) взагалі не має залежних від часу t узагальнених симетрій порядку вище шести, а всі її симетрії порядків $0, \ldots, 6$ перераховано у (2.38).

Отже, нами доведено, що K з (2.38) – єдина узагальнена симетрія системи Бакірова (2.37), яка не еквівалентна точковій симетрії Лі. Цим підсилено аналогічний результат Ф. Бойкерса, Я. Сандерса і Дж.П. Ванг [65] для узагальнених симетрій, що не залежать від x і t, і дано остаточну негативну відповідь на питання, поставлене П. Олвером у [103], с.381, чи має система Бакірова узагальнені симетрії, відмінні від K, що нееквівалентні точковим симетріям Лі.

Отриманий результат остаточно спростовує фольклорне припущення про те, що для еволюційних систем наявність однієї вищої симетрії обов'язково веде до наявності нескінченної кількості таких симетрій.

2.4. Поліноміальні по часу t симетрії інтегровних еволюційних рівнянь і систем

2.4.1. Скалярні рівняння. У цьому пункті ми розглядатимемо інтегровне еволюційне рівняння (1) з $\partial F/\partial t = 0$, причому в якості критерія інтегровності виберемо наявність незалежної від часу ($\partial \mathrm{L}/\partial t = 0$)

формальної симетрії L ненульового степеня p і нескінченного рангу, яка за визначенням задовольняє рівняння

$$[\nabla_F - F_*, \mathrm{L}] = 0. \tag{2.40}$$

Для будь-якого цілого q $c\mathrm{L}^{q/p}$, $c = \mathrm{const}$, також є формальною симетрією рівняння (1) (див. напр. [35], с. 243) нескінченного рангу, тому без втрати загальності вважатимемо надалі, що $\deg \mathrm{L} = 1$ і $\mathrm{L} = \Phi^{1/n} D + \dots$

Нагадаємо (див. [50], с.161), що може існувати щонайбільше одна (з точністю до додавання лінійної комбінації незалежних від часу симетрій $Z = Z(x, u, u_1, \dots)$ рівняння (1) з $\partial F / \partial t = 0$, для яких $[\nabla_Z - Z_*, \mathrm{L}] = 0$) незалежна від часу симетрія Y рівняння (1) з $\partial F / \partial t = 0$ така, що $[\nabla_Y - Y_*, \mathrm{L}] \neq 0$.

Виберемо симетрію Y так, щоб вона мала найменший можливий порядок r (додаючи до неї, якщо потрібно, підходящу лінійну комбінацію симетрій $Z \in Ann_F$, для яких $[\nabla_Z - Z_*, \mathrm{L}] = 0$).

Очевидно, що тоді для будь-якої незалежної від часу симетрії $P = P(x, u, u_1, \dots) \in S_F / S_F^{(r)}$ без втрати загальності можна вважати, що

$$[\nabla_P - P_*, \mathrm{L}] = 0, \tag{2.41}$$

що ми і припускатимемо в подальшому.

Припустимо також, що $\Phi^{-1/n} \in \operatorname{Im} D$, тобто необхідну умову існування залежних від часу симетрій порядку вище n (див. Теорему 1.2.1) виконано.

Розглянемо поліноміальні по t симетрії порядку q рівняння (1) з простору $S_{F,q}$, $q \geq n_0$. В силу Наслідку 2.3.2 необхідною умовою існування таких симетрій є існування лінійних по t симетрій з цього ж простору $S_{F,q}$, тобто рівняння (1) повинне мати (хоча б одну) симетрію вигляду $Q = K + tH \in S_{F,q}$, $\partial K / \partial t = \partial H / \partial t = 0$, $\operatorname{ord} Q = \operatorname{ord} H = q$, $H \in S_{F,q}$. Очевидно, що

$$\{F, H\} = 0. \tag{2.42}$$

Оскільки $Q \in S_{F,q}$, ясно, що $k \equiv \operatorname{ord} K \leq q$. Підстановка $G = Q$ та $P = F$ до (1.1) і (1.4) дає

$$\{F, K\} = -H \tag{2.43}$$

$$\nabla_K(F_*) - \nabla_F(K_*) + [F_*, K_*] = H_*. \tag{2.44}$$

Оскільки для довільних F і K $\operatorname{ord}\{F, K\} \leq k+n-1$, з (2.43) випливає, що $k + n - 1 \geq q$, і отже $k \geq q - n + 1$.

Поклавши $t = 0$ у представленні (1.15) для симетрії Q, дістаємо наступне представлення для K_*, що справедливе за умови $q > n + n_0 - 2$:

$$K_* = \sum_{j=q-n+1}^{k} \kappa_j F_*^{j/n} + D^{-1}\left(\frac{\gamma}{n}\Phi^{-1/n} - \delta_{k,q}\frac{k}{n}\kappa_k\nabla_F(\Phi^{-1/n})\right) F_*^{\frac{q-n+1}{n}} + \mathrm{N}, \tag{2.45}$$

де $\kappa_j \in \mathbb{C}$, $\gamma = \Phi^{-q/n}\partial H/\partial u_q \in \mathbb{C}$, $\gamma \neq 0$; N – деякий формальний ряд з незалежними від часу коефіцієнтами, $\deg \mathrm{N} < q - n + 1$; $\delta_{k,q}$ – символ Кронекера.

Зазначимо, що при $k = q$, $\kappa_k \neq 0$, ми завжди можемо розглядати симетрію $Q' = Q - (\kappa_q/\gamma)H = tH + K' \in S_{F,q}$, $\operatorname{ord} Q' = q$ замість Q, і для Q' маємо $\operatorname{ord} K' < q$. Таким чином, без втрати загальності будемо надалі вважати, що $\operatorname{ord} K < q$ і

$$\kappa_k\delta_{k,q} = 0. \tag{2.46}$$

Продовжимо тепер аналіз структури симетрії $Q = K + tH$, $\operatorname{ord} Q = \operatorname{ord} H = q$, $q > \max(r, n + n_0 - 2)$. Користуючись тотожністю Якобі, (2.41) для $P = H$, (2.43), (2.40) і (1.2), (1.3) для $P = F$, $Q = K$, дістаємо, що для всіх цілих s

$$\begin{aligned}&[\nabla_F - F_*, [\mathrm{L}^s, \nabla_K - K_*]] = \\ &-[\nabla_K - K_*, [\nabla_F - F_*, \mathrm{L}^s]] - [\mathrm{L}^s, [\nabla_K - K_*, \nabla_F - F_*]] = \\ &-[\mathrm{L}^s, [\nabla_K - K_*, \nabla_F - F_*]] = [\mathrm{L}^s, \nabla_H - H_*] = 0.\end{aligned}$$

Тому за Лемою 8 з [50]

$$[\mathrm{L}^s, \nabla_K - K_*] = \sum_{j=-\infty}^{k_s} c_{j,s}\mathrm{L}^j, c_{j,s} \in \mathbb{C}. \tag{2.47}$$

Оцінимо $\deg[\mathrm{L}^s, \nabla_K - K_*]$ для $q > n + n_0 - 2$, користуючись представленням (2.45) для Q_*. Оскільки Q_* є формальною симетрією рангу вище n, оцінюючи ведучий член комутатора $[\mathrm{L}^s, Q_*]$ з використанням Твердження 1.3.1, дістаємо формулу

$$[\mathrm{L}^s, \nabla_Q - Q_*] = -(s\gamma/n)F_*^{\frac{s+q-n}{n}} + \dots,$$

а поскільки $[\mathrm{L}^s, \nabla_K - K_*] = [\mathrm{L}^s, \nabla_Q - Q_*]|_{t=0}$, $\gamma \neq 0$ і $s \neq 0$, звідси безпосередньо випливає, що $\deg[\mathrm{L}^s, \nabla_K - K_*] = s + q - n$ для всіх можливих значень n_0, якщо $q > n$, і отже

$$[\mathrm{L}^s, \nabla_K - K_*] = \sum_{j=-\infty}^{s+q-n} c_{j,s}\mathrm{L}^j, c_{j,s} \in \mathbb{C}, c_{s+q-n,s} \neq 0. \tag{2.48}$$

Оскільки $\operatorname{res} \nabla_G(\mathrm{L}^s) = 0$ для $s \leq -2$ і $\operatorname{res} \mathrm{L}^j = 0$ для $j < -1$, для таких s з (2.48) дістаємо

$$\operatorname{res}[\mathrm{L}^s, K_*] = -\sum_{j=-\infty}^{s+q-n} c_{j,s}\operatorname{res}\mathrm{L}^j = -\sum_{j=-1}^{s+q-n} c_{j,s}\operatorname{res}\mathrm{L}^j. \tag{2.49}$$

Але лишок комутатора двох формальних рядів завжди належить до $\operatorname{Im} D$ в силу відомої теореми Адлера (див. напр. [42], с.587). З іншого боку, $\rho_j = \operatorname{res}\mathrm{L}^j$, $j = -1, 1, 2, 3, \dots$ і $\rho_0 = \operatorname{res}\ln\mathrm{L}$ – це не що інше, як *щільності канонічних законів збереження* (або, коротше, *канонічні щільності*) для рівняння (1) з $\partial F/\partial t = 0$ [100], тобто $\nabla_F(\rho_j) \in \operatorname{Im} D$. Нагадаємо, що щільність ρ_j називається *нетривіальною*, якщо $\rho_j \notin \operatorname{Im} D$, і *тривіальною* в супротивному випадку. Оскільки $c_{s+q-n,s} \neq 0$, ясно, що коли щільність ρ_{s+q-n} нетривіальна (вважаємо, що $s + q - n \geq 1$, бо щільність $\rho_{-1} = \Phi^{-1/n}$ тривіальна за припущенням), а щільності ρ_j, $j = -1, \dots, s + q - n - 1$, $j \neq 0$ – тривіальні, (2.49) містить суперечність, а саме: її ліва сторона належить до $\operatorname{Im} D$, а ненульовий член $c_{s+q-n,s}\rho_{s+q-n}$ у її правій стороні не належить до $\operatorname{Im} D$.

Зазначимо також, що нерівності $s+q-n \geq 1$ and $s \leq -2$ сумісні для непорожньої множини значень s тоді і тільки тоді, коли $q > n+2$. Отже, множиною значень s, для якої виконується (2.49), є $n-q+1, \ldots, -2$.

Таким чином, якщо для $q > \max(n,r)$ хоча б одна з щільностей $\rho_1, \ldots, \rho_{q-n-2}$ нетривіальна, рівняння (2.47) (а отже і (2.43) з $H \in S_{F,q}$) не мають незалежних від часу розв'язків K серед локальних функцій.

$$\text{Нехай } p_{_F} = \begin{cases} m+n+1, \text{ якщо (2.41) виконується } \forall P \in Ann_F, \\ \max(r, m+n+1) \text{ в іншому випадку,} \end{cases}$$

де $m \in \mathbb{N}$ – найменше число, таке, що $\rho_m \notin \operatorname{Im} D$, в той час як для $j = -1, 1, \ldots, m-1$, $j \neq 0$, $\rho_j \in \operatorname{Im} D$ ($\rho_{-1} \in \operatorname{Im} D$ за припущенням!).

Зі сказаного ясно, що рівняння (1) з $\partial F/\partial t = 0$ не має поліноміальних по t симетрій з простору $S_F/S_F^{(p_{_F})}$. Цим доведено наступну теорему:

Теорема 2.4.1 *Якщо рівняння (1) з $\partial F/\partial t = 0$ має незалежну від часу формальну симетрію нескінченного рангу* L, $\deg \mathrm{L} \neq 0$, *і для деякого* $m \in \mathbb{N}$ $\rho_m \notin \operatorname{Im} D$, *причому для* $j = -1, 1, \ldots, m-1$, $j \neq 0$, $\rho_j \in \operatorname{Im} D$, *то це рівняння не має поліноміальних по t симетрій (крім, можливо, стаціонарних) з простору $S_F/S_F^{(p_{_F})}$.*

Аналогічно Наслідку 1.2.2 доводиться

Наслідок 2.4.1 *Якщо виконано умови Теореми 2.4.1, то рівняння (1), з $\partial F/\partial t = 0$ не має незалежних від часу локальних сильних мастерсиметрій порядку вище $p_{_F}$.*

Ясно, що коли всі симетрії з простору $S_F/S_F^{(p_{_F})}$ поліноміальні по t, то, як і в Теоремі 1.2.1, з Теореми 2.4.1 випливає відсутність залежних від часу t симетрій порядку вище $p_{_F}$ рівняння (1).

Підкреслимо, що застосування Теореми 2.4.1 *не* вимагає перевірки тривіальності щільності ρ_0, як показує приклад рівняння Бюргерса

$$u_t = u_2 + uu_1,$$

що має незалежну від часу формальну симетрію степеня 1 нескінченного рангу і поліноміальні по t симетрії всіх порядків (див. напр. [13], с.309), причому $D_t(\rho_0) = D(u_1 + u^2/2)$ - його єдиний нетривіальний закон збереження (див. напр. [49], с.289–290), і $\rho_0 = u \notin \operatorname{Im} D$.

Вкажемо ще один цікавий наслідок Теореми 2.4.1. Розглянемо інтегровне еволюційне рівняння (1) з $\partial F/\partial t = 0$ і $\dim S_F^{(1)} < \infty$, що задовольняє умови Теореми 2.4.1 або Теореми 1.2.1. Воно не має поліноміальних по часу t (або взагалі залежних від t) локальних узагальнених симетрій порядку вище $p_{_F}(m)$ або відповідно n, і оскільки в силу Теореми 2.2.1 $\dim S_F^{(p_{_F})} < \infty$ і $\dim S_F^{(n)} < \infty$, кількість поліноміальних по t локальних узагальнених симетрій такого рівняння скінченна.

З іншого боку, інтегровні еволюційні рівняння (1) та системи (5) з $\partial F/\partial t = 0$ як правило володіють т.зв. спадковою алгеброю, що складається з нескінченної кількості (взагалі кажучи, нелокальних) стаціонарних симетрій K_l та мастерсиметрій τ_m і має наступні комутаційні співвідношення (див. [67], с.73, а також [43, 105, 106, 89] і §4 Розділу 5 [34]):

$$\begin{aligned} &\{K_i, K_j\} = 0,\\ &\{K_l, \tau_m\} = -(\rho + \alpha l) K_{l+m}, \\ &\{\tau_i, \tau_j\} = \alpha(i - j)\tau_{i+j}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Тут $i, j, l, m = 0, 1, 2, \ldots$; $\alpha, \rho = \text{const} \neq 0$, $\alpha = \text{const}$, $\{,\}$ позначає дужку Лі, розширену на випадок нелокальних симетрій, і $K_0 = F$.

Звідси очевидно, що такі рівняння мають нескінченну кількість лінійних по t (можливо, нелокальних) симетрій $T_j = \rho t K_j + \tau_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Але якщо $\partial F/\partial t = 0$, $\dim S_F^{(1)} < \infty$ і розглядуване рівняння задовольняє умови Теореми 2.4.1 або Теореми 1.2.1, то в силу сказаного вище воно має щонайбільше скінченну кількість лінійних по часу t локальних узагальнених симетрій, звідки безпосередньо випливає наступне

Твердження 2.4.1 *Якщо рівняння (1) з* $\partial F/\partial t = 0$ *і* $\dim S_F^{(1)} < \infty$ *задовольняє умови Теореми 2.4.1 або Теореми 1.2.1 і володіє спадковою* *алгеброю (2.50), то ця алгебра обов'язково містить нескінченну кількість елементів τ_j, що залежать від нелокальних змінних.*

Доведені Теореми 1.2.1 та 2.4.1 виявляють новий цікавий аспект двоїстості між симетріями та законами збереження, відмінний від добре відомих результатів типу теореми Ньотер та двоїстості, пов'язаної з існуванням гамільтонової структури (чи кількох таких структур) даного інтегровного еволюційного рівняння. А саме, в силу цих теорем з існування нетривіальних канонічних щільностей законів збереження, за винятком ρ_0, випливає відсутність поліноміальних по часу (крім таких, які взагалі не залежать від часу) локальних узагальнених симетрій достатньо високого порядку для розглядуваного рівняння. З іншого боку, існування нескінченного набору (можливо тривіальних) локальних канонічних щільностей є необхідною умовою існування формальної симетрії нескінченного рангу та нескінченної кількості незалежних від часу локальних узагальнених симетрій розглядуваного рівняння.

Може виникнути враження, що ці результати суперечать один одному. Однак уявна суперечність між ними зникає, якщо розглядати не тільки локальні, а і нелокальні симетрії, оскільки, як вже зазначалося вище, інтегровні еволюційні рівняння і системи як правило володіють нескінченною кількістю поліноміальних по часу t *нелокальних* симетрій, причому нелокальні змінні, від яких залежать ці симетрії, є не що інше, як інтеграли від щільностей нетривіальних законів збереження розглядуваного рівняння чи системи.

На завершення цього пункту розглянемо питання про існування "дефектної" симетрії $Y \in Ann_F$, що не задовольняє умову $[\nabla_Y - Y_*, \mathrm{L}] = 0$.

Для більшості відомих інтегровних рівнянь (1) їхні оператори рекурсії є спадковими (див. напр. [109, 124]), і це дозволяє легко довести відсутність такої симетрії, звідки негайно випливає, що для таких рівнянь у Теоремі 2.4.1 $p_F(m) = m + n + 1$.

Передовсім нагадаємо, що (пор. [42], с.395) оператором рекурсії рівняння (1) називається будь-який лінійний оператор R такий, що для всіх $G \in \Upsilon$, де Υ – деяка підмножина S_F, $R(G) \in S_F$. Як правило, в літературі розглядають оператори рекурсії, що мають вигляд формальних рядів по степенях D, і вимагають, щоб вони були формальними симетріями нескінченного рангу розглядуваного рівняння (1) (див. напр. [94], с.272, [67], с.59), тому ми також вимагатимемо в подальшому, щоб оператор рекурсії задовольняв ці умови.

Принагідно зауважимо, що загальне поняття оператора рекурсії було введено П. Олвером [102], а огляд результатів по цій тематиці і тісно пов'язаній з нею теорії гамільтонових структур інтегровних рівнянь, яку ми тут не розглядаємо, можна знайти у [42, 67, 78, 94, 124].

Оператор рекурсії R рівняння (1) або системи (5) з $\partial F/\partial t = 0$ називається *спадковим* (або оператором Нієнхейса), якщо для всіх незалежних від t локальних функцій K, що належать до його області визначення Ω, виконується рівність (див. [103], с.315)

$$[\nabla_{\tilde{K}} - \tilde{K}_*, \mathrm{R}] = \mathrm{R}[\nabla_K - K_*, \mathrm{R}], \tag{2.51}$$

де $\tilde{K} = \mathrm{R}(K)$.

Для рівнянь (1) і систем (5) з $\partial F/\partial t = 0$ в літературі в основному розглядають оператори рекурсії з незалежними від t коефіцієнтами і $\Upsilon \subset Ann_F$. Ми надалі також дотримуватимемося цих припущень.

Достатньою умовою відсутності "дефектної" симетрії $Y \in Ann_F$, що не задовольняє умову $[\nabla_Y - Y_*, \mathrm{L}] = 0$, є існування спадкового оператора рекурсії R з незалежними від t коефіцієнтами, якщо усі елементи Ann_F породжуються його повторним застосуванням до одного (або іноді кількох) елементів $Z \in Ann_F$, що задовольняють умову $[\nabla_Z - Z_*, \mathrm{R}] = 0$.

Справді, тоді в якості формальної симетрії L, яка згадується в умові Теореми 2.4.1, можна взяти $\mathrm{L} = \mathrm{R}^{1/r}$, де $r = \deg \mathrm{R}$, а в силу виконання умови (2.51) з рівності $[\nabla_Z - Z_*, \mathrm{R}] = 0$ випливає, що $[\nabla_{\tilde{Z}} - \tilde{Z}_*, \mathrm{R}] = 0$ для всіх $\tilde{Z} = \mathrm{R}^k(Z)$, $k \in \mathbb{N}$. За припущенням елементи вигляду $\mathrm{R}^k(Z)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ утворюють базис в Ann_F, тому для всіх $P \in Ann_F$ $[\nabla_P - P_*, \mathrm{R}] = 0$, а отже $[\nabla_P - P_*, \mathrm{L}] = 0$, і $p_{_F} = m + n + 1$.

На завершення наведемо приклад рівняння, що має "дефектну" симетрію Y (див. [50], с.161):

$$u_t = D\left(\frac{u_2}{u^3} - 3\frac{u_1^2}{u^4}\right) + 1.$$

Це рівняння має незалежні від часу симетрії як завгодно високого порядку, які поліноміально залежать від x, і формальну симетрію L нескінченного рангу, коефіцієнти якої також поліноміально залежать від x, тому для $Y = u_1$ маємо $[\nabla_Y - Y_*, \mathrm{L}] \neq 0$.

Цікаво, що для цього рівняння $\rho_{-1} = (\partial F/\partial u_3)^{-1/3} = u \notin \operatorname{Im} D$, але $\nabla_F(\rho_{-1}) \in \operatorname{Im} D$, тому воно підпадає під дію не лише Теореми 2.4.1, а і Теореми 1.2.1, а отже не має залежних від часу симетрій порядку вище 3.

2.4.2. Невироджені слабко діагоналізовні системи. Спробуємо тепер узагальнити результат Теореми 2.4.1 на випадок інтегровних слабко діагоналізовних систем з $\det \Phi \neq 0$.

Нехай L – формальна симетрія степеня 1 і нескінченного рангу розглядуваної системи, причому $\partial L/\partial t = 0$, $\mathrm{L}' = \mathrm{T}\mathrm{L}\mathrm{T}^{-1}$, а $\rho_j^d = (\operatorname{res}(\mathrm{L}')^j)_{dd}$, $j = -1, 1, 2, 3, \ldots$ і $\rho_0^d = (\operatorname{res} \ln \mathrm{L}')_{dd}$, $d = 1, \ldots, s$ – *канонічні щільності законів збереження* для (5) з $\partial F/\partial t = 0$ [35], с.249. Має місце наступна

Теорема 2.4.2 *Якщо слабко діагоналізовна система (5) з* $\det \Phi \neq 0$ *і* $\partial F/\partial t = 0$ *має незалежну від часу формальну симетрію* L, $\deg \mathrm{L} \neq 0$, *нескінченного рангу, для всіх* $P \in Ann_F$ *виконуеться (7), і існує таке* $m \in \{-1, 1, 2, 3, \ldots\}$, *що* $\rho_m^l \notin \operatorname{Im} D$ *для всіх* $l = 1, \ldots, s$ *в той час як для* $j = -1, 1, \ldots, m-1$ $\rho_j^a \in \operatorname{Im} D$ *для всіх* $a = 1, \ldots, s$, *то система*

(5) не має поліноміальних по часу локальних узагальнених симетрій (крім, можливо, стаціонарних) з простору $S_F/S_F^{(m+n+1)}$.

Доведення. Усі міркування, що мали місце при доведенні Теореми 2.4.1 до рівності (2.47), крім рівності (2.46), очевидним чином застосовні і до розглядуваного класу систем еволюційних рівнянь, з тією поправкою, що формула (2.45) замінюється на

$$\begin{aligned}&\mathrm{T}K_*\mathrm{T}^{-1} = \sum_{j=q-n+1}^{k} \kappa_j \mathrm{V}_*^{j/n} + \Big(\frac{\gamma}{n} D^{-1}(\Lambda^{-1/n}) - \\ &\delta_{k,q}\frac{k}{n}\kappa_k D^{-1}(\nabla_F(\Lambda^{-1/n}))\Big) F_*^{\frac{q-n+1}{n}} + \mathrm{N},\end{aligned} \tag{2.52}$$

де κ_j, γ – деякі сталі $s \times s$ матриці, причому $\gamma \neq 0$ і матриця γ визначається з рівності $\Omega\partial H/\partial u_q \Omega^{-1} = \gamma\Lambda^{q/n}$; N – деякий формальний ряд з незалежними від часу коефіцієнтами, $\deg \mathrm{N} < q - n + 1$; $\delta_{k,q}$ – символ Кронекера.

Крім того, у випадку систем (5), взагалі кажучи $\mathrm{ord}\{F, K\} \leq k + n$, тому з рівності $\{F, K\} = -H$ випливає, що $k \geq q - n$, а не $k \geq q - n + 1$, як у скалярному випадку, але це, очевидно, не впливає на подальший хід доведення.

Далі зауважимо (див. [35], с.249) що перетворення $\mathrm{L}' = \mathrm{TLT}^{-1}$ приводить L до діагональної форми, тому доцільно перетворити рівність $[\nabla_F - F_*, [\mathrm{L}^p, \nabla_K - K_*]] = 0$, помноживши її на T зліва і на T^{-1} справа. В результаті дістанемо

$$\begin{aligned}&\mathrm{T}[\nabla_F - F_*, [\mathrm{L}^p, \nabla_K - K_*]]\mathrm{T}^{-1} = \\ &[\nabla_F - \mathrm{V}, [(\mathrm{L}')^p, \nabla_K - \mathrm{W}]] = 0,\end{aligned}$$

де $\mathrm{W} = \nabla_K(\mathrm{T})\mathrm{T}^{-1} + \mathrm{T}K_*\mathrm{T}^{-1}$.

В повній аналогії з Лемою 8 з [50] легко довести, що з умови $[\nabla_F - \mathrm{V}, \mathrm{A}] = 0$ для довільного формального ряду A степеня d з незалежними від t коефіцієнтами випливає, що

$$\mathrm{A} = \sum_{j=-\infty}^{d} \alpha_j (\mathrm{L}')^j,$$

де α_j – сталі діагональні $s \times s$ матриці.

Справді, нехай $\mathrm{A} \equiv \sum\limits_{j=-\infty}^{d} a_j(x, u, u_1, \ldots) D^j$. Тоді, прирівнюючи до нуля коефіцієнт при D^{n+d} у $[\nabla_F - \mathrm{V}, \mathrm{A}] = 0$, дістаємо $[\Lambda, a_d] = 0$, звідки випливає,що a_d – діагональна матриця.

Далі, прирівнюючи до нуля коефіцієнт при D^{n+d-1} у $[\nabla_F - \mathrm{V}, \mathrm{A}] = 0$, знаходимо

$$n\Lambda D(a_d) - d a_d D(\Lambda) + [\Lambda, a_{d-1}] = 0.$$

Діагональна частина цього рівняння дає $n\Lambda D(a_d) - d a_d D(\Lambda) = 0$, звідки, оскільки за припущенням $\partial a_d / \partial t = 0$ і $\partial \Lambda / \partial t = 0$, знаходимо $a_d = \alpha_d \Lambda^{d/n}$, де α_d – стала діагональна $s \times s$ матриця.

Звідси, в свою чергу, випливає, що A можна представити у вигляді $\mathrm{A} = \tilde{\mathrm{A}} + \alpha_k \mathrm{L}^{k/n}$, $\deg \tilde{\mathrm{A}} \le k-1$. Користуючись тим, що $[\nabla_F - \mathrm{V}, \mathrm{L}] = 0$, а отже і $[\nabla_F - \mathrm{V}, \alpha_k \mathrm{L}^{k/n}] = 0$ в силу прийнятої раніше угоди про те, що дробові степені формальних рядів з діагональними коефіцієнтами за визначенням мають діагональні коефіцієнти, ми бачимо, що $[\nabla_F - \mathrm{V}, \tilde{\mathrm{A}}] = 0$, і до $\tilde{\mathrm{A}}$ можна застосувати ті ж міркування, що і до A. Продовжуючи далі по індукції, ми бачимо, що A дійсно можна подати у вигляді $\mathrm{A} = \sum\limits_{j=-\infty}^{d} \alpha_j (\mathrm{L}')^j$.

Застосовуючи цей результат до ряду $[(\mathrm{L}')^p, \nabla_K - \mathrm{W}]$, дістаємо

$$[(\mathrm{L}')^p, \nabla_K - \mathrm{W}] = \sum_{j=-\infty}^{k_p} c_{j,p} (\mathrm{L}')^j, \tag{2.53}$$

де $c_{j,p}$ – сталі діагональні $s \times s$ матриці.

В повній аналогії з випадком скалярного рівняння оцінимо, користуючись представленням (1.30) для Q_*, $\deg[(\mathrm{L}')^p, \nabla_K - \mathrm{W}]$ для $q > n + n_0 - 2$. Використовуючи цього разу Твердження 1.4.2, в кінцевому підсумку дістанемо, що

$$[(\mathrm{L}')^p, \nabla_K - \mathrm{W}] = -p\gamma/n\Lambda^{\frac{p+q-n}{n}} D^{p+q-n} + \dots,$$

а отже $\deg[(\mathrm{L}')^p, \nabla_K - \mathrm{W}] = p+q-n$ і

$$[(\mathrm{L}')^p, \nabla_K - \mathrm{W}] = \sum_{j=-\infty}^{p+q-n} c_{j,p}\mathrm{L}^j, c_{p+q-n,p} \neq 0. \tag{2.54}$$

Оскільки $\operatorname{res} \nabla_K((\mathrm{L}')^p) = 0$ для $p \leq -2$, (2.54) для цих p дає

$$\operatorname{res}\,[(\mathrm{L}')^p, \mathrm{W}] = -\sum_{j=-\infty}^{p+q-n} c_{j,p}\operatorname{res}\,(\mathrm{L}')^j = -\sum_{j=-1}^{p+q-n} c_{j,p}\operatorname{res}\,(\mathrm{L}')^p, \tag{2.55}$$

бо $\operatorname{res}\,(\mathrm{L}')^j = 0$ для $j < -1$.

Далі, покажемо, що всі коефіцієнти w_j формального ряду $\mathrm{W} \equiv \sum\limits_{j=-\infty}^{k} w_j D^j$ діагональні. Справді, оскільки всі коефіцієнти рядів L', $\nabla_K(\mathrm{L}')$ діагональні, збираючи коефіцієнти при степенях D^{j+n-1} у (2.54) з $p = n$, дістанемо рівняння вигляду

$$n\Lambda D(w_j) - jw_j D(\Lambda) + [\Lambda, w_{j-1}] = \Omega_j(w_{j+1}, w_{j+2}, \dots). \tag{2.56}$$

Крім того, з (2.52) і означення W знаходимо, що $w_k = \kappa_k \Lambda^{k/n}$ – діагональна матриця. Тому, оскільки всі коефіцієнти рядів L', $\nabla_K(\mathrm{L}')$ діагональні, легко бачити, що матриця Ω_k діагональна, і беручи антидіагональну частину (2.56) з $j = k$, дістаємо $[\Lambda, w_{k-1}] = 0$, звідки випливає, що матриця w_{k-1} також діагональна. Аналогічний аналіз (2.56) з $j = k-1, k-2, \dots$ показує, що всі коефіцієнти w_j є діагональними матрицями.

Отже, усі коефіцієнти при степенях D в (2.55) є діагональними матрицями, і це рівняння розпадається на s скалярних рівнянь

$$\operatorname{res}\,[(\mathrm{L}')^p_b, \mathrm{W}_b] = -\sum_{j=-1}^{p+q-n} (c_{j,p})_{bb}\operatorname{res}\,(\mathrm{L}')^p_b, \quad b = 1, \dots, s, \tag{2.57}$$

де $\mathrm{L}' = \operatorname{diag}(\mathrm{L}'_1, \dots, \mathrm{L}'_s)$, $\mathrm{W} = \operatorname{diag}(\mathrm{W}_1, \dots, \mathrm{W}_s)$.

Оскільки $c_{p+q-n,p} \neq 0$, ясно, що коли щільності ρ^a_{p+q-n} нетривіальні для всіх a (вважаємо, що $p+q-n \geq 1$, бо якщо усі щільності $\rho^j_{-1} = \lambda_j^{-1/n}$

нетривіальні, то можна використати Теорему 1.4.1), рівність (2.57) хоча б для одного b містить суперечність, а саме: її ліва сторона належить до $\operatorname{Im} D$, а у її правій стороні член $(c_{p+q-n,p})_{bb}\rho^b_{s+q-n}$, який ненульовий в силу зроблених припущень, не належить до $\operatorname{Im} D$.

Зазначимо також, що нерівності $p+q-n \geq 1$ and $p \leq -2$ сумісні для непорожньої множини значень p тоді і тільки тоді, коли $q > n+2$. Отже, множиною значень p, для якої виконується (2.49), є $n-q+1, \ldots, -2$.

Таким чином, якщо для $q > \max(n, r)$ хоча б для одного $d \in \{1, \ldots, q-n-2\}$ усі щільності ρ^j_d, $j = 1, \ldots, s$ нетривіальні, рівняння (2.47) (а отже і (2.43) з $H \in S_{F,q}$) не мають незалежних від часу локальних розв'язків K.

Зі сказаного ясно, що за виконання умов доводжуваної теореми система (5) з $\partial F/\partial t = 0$ не має поліноміальних по t (окрім, можливо, стаціонарних) симетрій з простору $S_F/S_F^{(m+n+1)}$. $\square$

Аналогічно Наслідку 1.2.2 доводиться

Наслідок 2.4.2 *Якщо виконано умови Теореми 2.4.1, то слабко діагоналізовна система (5) з* $\det \Phi \neq 0$ *і* $\partial F/\partial t = 0$ *не має незалежних від часу локальних сильних мастерсиметрій порядку вище* $m+n+1$.

Зауважимо, що вимоги Теореми 2.4.2 можна дещо послабити. Припустимо, що серед щільностей ρ^a_j, $j < m$, $j \neq 0$, є нетривіальні, але лише при $j = m$ $\rho^l_m \in \operatorname{Im} D$ для всіх $l = 1, \ldots, s$, причому для всіх $a = 1, \ldots, s$ щільності ρ^a_m лінійно незалежні від нетривіальних щільностей ρ^a_j, $j < m$, $j \neq 0$ з тим же a. Очевидно, що наведене вище доведення Теореми 2.4.2 з незначними модифікаціями залишається при цьому в силі, і отже результат цієї теореми матиме місце і в такому випадку.

В повній аналогії з випадком скалярного рівняння (1), якщо вдається довести поліноміальність по t усіх симетрій з простору $S_F/S_F^{(m+n+1)}$, тоді, як і в Теоремі 1.4.1, з Теореми 2.4.2 випливає відсутність залежних від часу симетрій порядку вище $m+n+1$ системи (5).

2.4.3. Знаходження всіх залежних від часу узагальнених симетрій інтегровних еволюційних рівнянь і систем. Використання наведених вище результатів дозволяє значно спростити (в порівнянні з безпосереднім обчисленням симетрій достатньо високого порядку та знаходженням перепон до існування залежних від часу симетрій) процес розв'язування задачі про знаходження всіх, в тому числі залежних від часу, узагальнених симетрій даного інтегровного еволюційного рівняння (1) з $\partial F/\partial t = 0$, і зробити його майже алгоритмічним.

А саме, знаючи вигляд формальної симетрії розглядуваного рівняння, треба спершу знайти таке найменше $m \in \{-1, 1, 2, \ldots\}$, що щільність ρ_m нетривіальна. Якщо $m \neq -1$, слід перевірити, чи всі симетрії з простору $S_F/S_F^{(p_F)}$ вичерпуються поліномами по t, користуючись Наслідком 2.2.2 та Теоремою 2.3.2 або іншими методами. Далі, якщо $m = -1$ або поліноміальність по t справді має місце, то за Теоремою 1.2.1 або 2.4.1 не існує залежних від часу симетрій порядку вище n або p_F відповідно. Нарешті, усі залежні від часу симетрії порядків $0, \ldots, n$ або $0, \ldots, p_F$ можна знайти шляхом безпосереднього обчислення з використанням при потребі засобів комп'ютерної алгебри, а незалежні від часу симетрії – наприклад, з допомогою оператора рекурсії (див. напр. Розд. 5 у [42]).

Ця схема не спрацьовує, якщо ρ_j тривіальні для всіх $j = -1, 1, 2, \ldots$ або неможливо (для $m \neq -1$) довести, що усі симетрії з простору $S_F/S_F^{(p_F)}$ вичерпуються поліномами по t. Однак такі ситуації типові для лінеаризовних рівнянь, в той час як для суттєво нелінійних інтегровних рівнянь застосування вищеописаного алгоритму не викликає труднощів.

Покажемо, зокрема, що в рамках нашої схеми вдається повністю описати алгебри узагальнених симетрій всіх інтегровних рівнянь вигляду $u_t = u_3 + f(u, u_1)$. Досі аналогічний результат було отримано лише для рівняння КдФ [32] шляхом досить складних і громіздких обчислень, в той час як отримані нами вище теореми дозволяють зробити отримання аналогічних результатів значно легшим і практично алгоритмічним.

Розглянемо спершу рівняння $u_t = u_3 + u^2 u_1 + c u_1$. Точковим перетворенням $x' = x + ct$, $t' = t$, $u' = u$ завжди можна добитись, щоб $c = 0$, тобто звести розглядуване рівняння до звичайного рівняння мКдФ, тому ми надалі обмежимось розглядом саме рівняння мКдФ $u_t = u_3 + u^2 u_1$.

Воно має спадковий оператор рекурсії (див. напр. [124], с.52) $\mathrm{R} = D^2 + \dfrac{2}{3}u^2 - \dfrac{2}{3}u_1 D^{-1} \circ u$, і легко перевірити, що елементи $\mathrm{R}^k(u_1)$ утворюють базис у Ann_{mKdV} і що $P = u_1$ задовольняє (2.41), звідки, в силу того, що R є спадковим, випливає, що (2.41) виконується для всіх $P \in Ann_{mKdV}$ (див. зауваження на с.87-89 цієї дисертації). В якості формальної симетрії L степеня 1 візьмемо $\mathrm{L} = \mathrm{R}^{1/2}$.

Для еволюційного рівняння вигляду $u_t = u_3 + f(u, u_1)$ кілька перших канонічних щільностей ρ_j мають вигляд [100]

$$\rho_{-1} = 1, \rho_0 = 0, \rho_1 = \partial f/\partial u_1, \rho_2 = \partial f/\partial u, \rho_3 = D^{-1}(D_t(\rho_1)), \qquad (2.58)$$

і зокрема для рівняння мКдФ щільність $\rho_1 = u^2$ нетривіальна (але $\rho_{-1} \in \operatorname{Im} D$). З цього і зі сказаного вище очевидно, що $p_{mKdV} = 5$.

У Прикладі 1 попереднього підрозділу показано, що всі симетрії рівняння мКдФ поліноміальні по часу, тому з Теореми 2.4.1 випливає, що це рівняння не має залежних від часу симетрій порядку вище 5.

Отже, щоб знайти всі залежні від часу узагальнені симетрії рівняння мКдФ, нам залишається обчислити його симетрії порядків $0, \dots, 5$.

Перш за все, в силу (1.7) довільна симетрія $G \in S^{(5)}_{mKdV}$ має вигляд

$$G = h(t)u_5 + \tilde{G}(x, t, u, u_1, \dots, u_4).$$

Підставимо цей вираз до (1.1) і будемо збирати коефіцієнти при степенях u_5, u_6 та прирівнювати їх до нуля. Оскільки $\mathrm{ord}\{u_3 + u^2 u_1, h(t)u_5 + \tilde{G}(x, t, u, u_1, \dots, u_4)\} \le 6$, збирати коефіцієнти при степенях $u_7, u_8, \dots$ нема потреби. В результаті дістанемо визначальні рівняння, які після ряду перетворень можна записати у вигляді

$$\dot h(t)=0,\quad \frac{\partial\tilde G}{\partial u_4}=0,\quad \frac{\partial^2\tilde G}{\partial u_1\partial u_3}=0,$$
$$\frac{\partial^2\tilde G}{\partial u_3^2}=0,\quad \frac{\partial^2\tilde G}{\partial u_1^2}=10h(t)u_1,\quad \frac{\partial\tilde G}{\partial u_2}=\frac{20}{3}h(t)uu_1,$$

$$u\frac{\partial\tilde G}{\partial u}+u_1\frac{\partial\tilde G}{\partial u_1}+\frac{\partial\tilde G}{\partial u_3}(u_3-2u^2u_1)-\tilde G-\frac{10}{3}h(t)(u^2u_3+2uu_1u_2+u_1^3)=0,$$
$$u\frac{\partial\tilde G}{\partial x}-u_1\left(\tilde G-u_1\frac{\partial\tilde G}{\partial u_1}-u_3\frac{\partial\tilde G}{\partial u_3}+\frac{10}{3}h(t)u_1^3\right)=0,$$
$$u\frac{\partial\tilde G}{\partial t}=\left(10h(t)u_1^3+3\left(\tilde G-u_3\frac{\partial\tilde G}{\partial u_3}-u_1\frac{\partial\tilde G}{\partial u_1}\right)\right)(u_3+u^2u_1).$$

З першого рівняння випливає, що $h(t)=h=\mathrm{const}$. Користуючись цим, а також другим рівнянням, ми можемо переписати G у вигляді

$$G=hK+g(t,x,u,\ldots,u_3),$$

де $K=\mathrm{R}(u_3+u^2u_1)=u_5+(16/3)uu_1u_2+(5/3)u^2u_3+(5/3)u_1^3+(8/9)u^4u_1$ – узагальнена симетрія 5-го порядку рівняння мКдФ.

Але оскільки K і G є симетріями мКдФ, g також має бути симетрією цього рівняння, тому з (1.7) очевидно, що g можна представити у вигляді $g=a(t)(u_3+u^2u_1)+\tilde g(t,x,u,u_1,u_2)$.

Тепер ми можемо знову використати отримані вище визначальні рівняння для знаходження g, зробивши в них підстановку $\tilde G=a(t)(u_3+u^2u_1)+\tilde g(t,x,u,u_1,u_2)$, $h(t)=0$. Випишемо ті рівняння, які не задовольняються тотожно внаслідок зробленої підстановки:

$$\frac{\partial^2\tilde g}{\partial u_1^2}=0,\quad \frac{\partial\tilde g}{\partial u_2}=0, u\frac{\partial\tilde g}{\partial u}+u_1\frac{\partial\tilde g}{\partial u_1}-\tilde g=0, u\frac{\partial\tilde g}{\partial x}-u_1(\tilde g-u_1\frac{\partial\tilde g}{\partial u_1})=0,$$
$$u\frac{\partial\tilde g}{\partial t}+u\dot a(t)(u_3+u^2u_1)=3\left(\tilde g-u_1\frac{\partial\tilde g}{\partial u_1}\right)(u_3+u^2u_1).$$

З перших двох рівнянь очевидно, що $\tilde g=g_1(t,x,u)u_1+g_0(t,x,u)$. Підставляючи цей вираз до решти рівнянь і збираючи коефіцієнти при степенях u_1 та u_3, знаходимо

$$\begin{aligned}
&\partial g_1/\partial u = 0, \quad u\partial g_0/\partial u = g_0, u\partial g_1/\partial x = g_0, \quad \partial g_0/\partial x = 0,\\
&u\dot{a}(t) = 3g_0, \quad u\partial g_1/\partial t + \dot{a}(t)u^3 = 3g_0u^2, \quad u\partial g_0/\partial t = 0.
\end{aligned}$$

Отже, $g_0 = \dot{a}(t)u/3$, звідки в силу третього рівняння дістаємо, що $g_1 = \dot{a}(t)x/3 + \gamma(t)$, а в силу останнього рівняння бачимо, що $\ddot{a}(t) = 0$, і таким чином $a(t) = a_0 + a_1t$. Звідси маємо $g_0 = a_1u/3$, $g_1 = \gamma(t) + xa_1/3$. Підстановка знайдених виразів до передостаннього рівняння дає $\dot{\gamma}(t) = 0$.

Звідси ясно, що довільна локальна узагальнена симетрія 5-го порядку рівняння мКдФ має вигляд

$$G = hK + a_0(u_3 + u^2u_1) + bu_1 + a_1(t(u_3 + u^2u_1) + (xu_1 + u)/3),$$

де a_0, a_1, h, b –довільні сталі, і отже це рівняння має лише одну залежну від часу t симетрію $B = t(u_3 + u^2u_1) + (xu_1 + u)/3$.

Нехай $\mathcal{D} = 3B$, $K_j = \mathrm{R}^j(u_1)$. Користуючись (1.21) і комутативністю алгебри Ann_{mKdV}, яка, як легко перевірити, є лінійною оболонкою K_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, можна показати, що комутаційні співвідношення алгебри Лі S_{mKdV} мають вигляд

$$\begin{aligned}
&\{K_i, K_j\} = 0, \quad i, j = 0, 1, 2, 3, \ldots\\
&\{\mathcal{D}, K_j\} = (2j + 1)K_j, \quad j = 0, 1, 2, 3, \ldots,
\end{aligned} \tag{2.59}$$

і ця алгебра розв'язна. Цікаво, що авторам [13] не вдалося обчислити цю алгебру в рамках запропонованої ними схеми пошуку узагальнених симетрій еволюційних рівнянь.

В повній аналогії з отриманим вище результатом можна знайти всі залежні від часу узагальнені симетрії інших інтегровних рівнянь вигляду $u_t = u_3 + f(u, u_1)$ зі списку (2.32), а саме (див. [35], с.257)

$$\begin{aligned}
&u_t = u_3 + uu_1,\\
&u_t = u_3 + u_1^2 + c,\\
&u_t = u_3 + u_1^3 + cu_1 + d,\\
&u_t = u_3 - u_1^3/2 + (a\exp(2u) + b\exp(-2u) + d)u_1.
\end{aligned}$$

Оскільки для першого рівняння списку – рівняння КдФ – це вже було зроблено Магадєєвим і Соколовим [32], ми наведемо тут результати для решти рівнянь.

Передовсім зауважимо, що друге рівняння списку заміною $x' = x, t' = t, u' = u - ct$ зводиться до потенціального рівняння КдФ $u_t = u_3 + u_1^2$, а третє заміною $x' = x + tc, t' = t, u' = u - td$ – до потенціального модифікованого рівняння КдФ $u_t = u_3 + u_1^3$.

Подальші обчислення показують, що потенціальне рівняння КдФ $u_t = u_3 + u_1^2$ має дві залежні від часу узагальнені симетрії: $\mathcal{G} = x + 2tu_1$ та $\mathcal{D} = u + 3t(u_3 + u_1^2) + xu_1$, потенціальне модифіковане рівняння КдФ $u_t = u_3 + u_1^3$ – одну таку симетрію $\mathcal{D}_{pmKdV} = 3t(u_1^3 + u_3) + xu_1$, а рівняння Калоджеро – Дегасперіса – Фокаша [68] $u_t = u_3 - u_1^3/2 + (a\exp(2u) + b\exp(-2u) + d)u_1$ при $a \neq 0$ і $b \neq 0$ взагалі не має залежних від часу симетрій, при $a = 0$, $b \neq 0$ має одну таку симетрію $\mathcal{D}_{KDF}^{(1)} = 3t(u_3 - (1/2)u_1^3 + b\exp(-2u) + d/3)u_1) + xu_1 - 1$ і при $a \neq 0$, $b = 0$ також одну таку симетрію $\mathcal{D}_{KDF}^{(2)} = xu_1 + 3t(u_3 + (a\exp(2u) + d)u_1 - u_1^3/2) + 3$. В усіх цих випадках знайдені залежні від часу узагальнені симетрії еквівалентні точковим симетріям Лі.

Алгебра Лі S_{KDF} (при $a = 0$, $b \neq 0$ чи $a \neq 0$, $b = 0$) розв'язна і має такі ж комутаційні співвідношення, як і S_{mKdV}, з точністю до заміни $\mathcal{D}$ на $\mathcal{D}_{KDF}^{(1)}$ чи $\mathcal{D}_{KDF}^{(2)}$ відповідно, якщо вважати, що $K_j = \mathrm{R}^j(u_1)$, де R – оператор рекурсії цього рівняння. Для рівняння Калоджеро – Дегасперіса – Фокаша з $a \neq 0$ і $b \neq 0$ в силу сказаного вище $S_{KDF} = Ann_{KDF}$ – комутативна алгебра Лі з базисом $K_j = \mathrm{R}^j(u_1)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Алгебра Лі S_{pmKdV} має комутаційні співвідношення

$$\begin{aligned}
&\{K_i, K_j\} = 0, \quad i, j = -1, 0, 1, 2, \ldots, \\
&\{\mathcal{D}_{pmKdV}, K_j\} = (2j + 1)K_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \\
&\{\mathcal{D}_{pmKdV}, K_{-1}\} = 0,
\end{aligned}$$

де $K_{-1} = 1$, $K_j = \mathrm{R}^j(u_1)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, R – оператор рекурсії потенціального рівняння мКдФ.

Нарешті, комутаційні співвідношення алгебри Лі S_{pKdV} мають вигляд

$$\{K_i, K_j\} = 0, \quad i, j = 0, 1, 2, 3, \dots$$
$$\{\mathcal{D}, K_j\} = (2j+1)K_j,\ j = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

$$\{\mathcal{G}, K_j\} = (4j-2)K_{j-1},\ j = 1, 2, 3, \dots,$$
$$\{\mathcal{G}, \mathcal{D}\} = -6\mathcal{G}, \{\mathcal{G}, K_0\} = 0.$$

Тут $K_j = \mathrm{R}^j(1)$, R – оператор рекурсії потенціального рівняння КдФ.

Алгебра S_{pKdV} є напівпрямою сумою комутативної алгебри Ann_{pKdV}, породженої K_j, і двовимірної розв'язної алгебри Лі з базисом $\mathcal{G}$ і $\mathcal{D}$.

Цікаво відзначити, що в усіх щойно розглянутих прикладах алгебри S_F ізоморфні підалгебрам аффінної алгебри Лі $\widehat{sl(2)}$.

На завершення зауважимо, що запропонована вище схема знаходження усіх узагальнених симетрій інтегровних скалярних еволюційних рівнянь з очевидними модифікаціями (типу заміни Теорем 1.2.1 і 2.4.1 на Теореми 1.4.1 і 2.4.2 і додаткової вимоги виконання (7) для всіх $P \in Ann_F$ при $m \neq -1$), переноситься на інтегровні невироджені слабко діагоналізовні системи еволюційних рівнянь (5).

Як приклад, розглянемо систему Хіроти – Сацуми (див. [90], а також [124], с.123 і наведені там посилання):

$$\begin{aligned} u_t &= u_3/2 + 3uu_1 - 6vv_1, \\ v_t &= -v_3 - 3uv_1. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Користуючись формулами для канонічних щільностей систем двох еволюційних рівнянь типу КдФ [99], неважко показати, що вона задовольняє умови Теореми 2.4.2 з $m = 1$ ($\rho_1^a \sim u \notin \operatorname{Im} D$, $a = 1, 2$). Всі симетрії цієї системи поліноміальні по t, бо воно задовольняє умови Теореми 2.3.3, а множина Θ_F для неї порожня. Отже, система Хіроти – Сацуми не має залежних від t узагальнених симетрій порядку вище 5.

Подальші обчислення показують, що вона має лише одну залежну від часу t узагальнену симетрію $\mathcal{D} = (2t(u_3/2 + 3uu_1 - 6vv_1) + xu_1))\partial/\partial u +$

$(2t(-v_3 - 3v_1u) + xv_1)\partial/\partial v$, що еквівалентна точковій симетрії Лі і при $v = 0$ після зміни масштабу u і x переходить в дилатацію рівняння КдФ.

Висновки до Розділу 2

В Розділі 2 досліджено залежність від t і/або x узагальнених симетрій рівнянь (1) і слабко діагоналізовних систем (5) з $\dfrac{\partial F}{\partial t} = 0$ і/або $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$.

В підрозділі 1 Розділу 2 вперше в літературі подано строге доведення Теорем 3.1 та 3.2 статті [58], які в дисертації об'єднано у вигляді Теореми 2.1.1 і розглянуто трохи більш загальний випадок, ніж у [58], а саме, коли $V \subset Sym$, а не $V \subset Sym/Triv$, і відмічено хибність допоміжного твердження про те, що кілька комутуючих матриць завжди можна одночасно звести до жорданової нормальної форми, на яке спиралися доведення цих теорем у [58].

В підрозділі 2 Розділу 2 досліджено залежність від t узагальнених симетрій рівнянь (1), і зокрема показано, що коли рівняння (1) не можна лінеаризувати контактним перетворенням, то всі його узагальнені симетрії будуть лінійними комбінаціями квазіполіномів по t.

В підрозділі 3 Розділу 2 досліджено залежність від x узагальнених симетрій рівнянь (1) і невироджених слабко діагоналізовних систем (5) з $\partial F/\partial x = 0$ і знайдено достатні умови (квазі)поліноміаьності узагальнених симетрій таких рівнянь і систем по t для випадку $\partial F/\partial t = 0$. З допомогою цих результатів знайдено всі узагальнені симетрії системи Бакірова і доведено, зокрема, що вона має лише одну локальну вищу симетрію, чим посилено аналогічний результат Бойкерса, Сандерса і Ванг [65] для незалежних від x, t симетрій і остаточно спростовано відоме припущення про те, що наявність однієї локальної вищої симетрії завжди веде до існування нескінченної кількості таких симетрій.

Крім того, в цьому ж підрозділі показано, що коли для деякого $m \in \{-1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ $D_t(\rho_m^a) \notin \operatorname{Im} D$, $a = 1, \dots, s$, де ρ_m^a – щільності канонічних законів збереження невиродженої слабко діагоналізовної системи (5) з $\partial F/\partial t = 0$ (аналогічно, $D_t(\rho_m) \notin \operatorname{Im} D$ для випадку рівняння (1)), то розглядувана система (або рівняння) не мають поліноміальних по t узагальнених симетрій порядку вище $n+m+n_0-1$, чим узагальнено відомий аналогічний результат [36] для стаціонарних узагальнених симетрій. Зауважимо, що разом з отриманими вище умовами поліноміальності по t узагальнених симетрій достатньо високого порядку цей результат дозволяє, як і у випадку інтегровних систем, легко і майже алгоритмічно знаходити *всі* узагальнені симетрії широкого класу еволюційних рівнянь і систем, для яких $D_t(\rho_m^a) \notin \operatorname{Im} D$,$a=1,\ldots,s$.

В підрозділі 4 Розділу 2 знайдено достатні умови відсутності поліноміальних від часу (крім стаціонарних) узагальнених симетрій достатньо високого порядку інтегровних рівнянь (1) і невироджених слабко діагоналізовних систем (5) з $\partial F/\partial t = 0$. На основі цих результатів запропоновано конструктивну схему знаходження всіх залежних від часу узагальнених симетрій таких рівнянь і систем і реалізовано її для рівняння мКдФ, потенціальних рівнянь КдФ і мКдФ та рівняння Калоджеро – Дегаспеніса – Фокаша, а також для системи Хіроти – Сацуми.

Ця схема дозволяє, зокрема, просто і ефективно доводити повноту знайдених наборів локальних узагальнених симетрій для розглядуваного класу інтегровних еволюційних рівнянь і систем, що досі вважалося вельми складною і важкою задачею, яку треба було розв'язувати окремо для кожного конкретного випадку (див. напр. [32] для рівняння КдФ) і яка потребувала значної "обчислювальної винахідливості".

В свою чергу, знання всіх залежних від часу локальних узагальнених симетрій даного рівняння чи системи відкриває, наприклад, можливість провести вичерпну класифікацію гамільтонових систем з нестаціонарними гамільтоніанами, отриманих внаслідок симетрійної редукції розглядуваного рівняння чи системи по залежній від часу узагальненій симетрії, використовуючи результати роботи М. Угалья [121], а також дозволяє знайти всі розв'язки, інваріантні відносно таких симетрій.

Такі розв'язки знаходять найрізноманітніші застосування у задачах теоретичної і математичної фізики. Зокрема, вони включають в себе як частинний випадок автомодельні розв'язки, і широко використовуються при вивченні асимптотичної поведінки загального розв'язку розглядуваного рівняння при великих значеннях t (див. напр. [42], с.309, і Розділ 4 у [25]) та різного роду режимів з загостренням, а також при доведенні теорем про існування і єдиність розв'язків методом інваріантних мажорант (див. [26], с.32-38). Ці розв'язки пов'язані з неізоспектральними деформаціями L-оператора пари Лакса, і є відмінними від багатосолітонних і скінченнозонних (див. [39], с.251–253). В загальному випадку їх можна побудувати, використовуючи техніку ізомонодромних деформацій (див. [39], с.254, та наведені там посилання).

Основні результати Розділу 2 опубліковано в [47, 48, 114, 115, 116, 117].

РОЗДІЛ 3

Векторна частинка у полі Кулона

Вступ

В цьому розділі ми розглянемо один цікавий приклад узагальнених симетрій системи *лінійних* звичайних диференціальних рівнянь (якій можна надати еволюційної форми), а саме парасуперсиметрії рівнянь для радіальних функцій, що виникають після розділення змінних для модифікованого рівняння Штюкельберга з гіромагнітним відношенням $g = 2$ і нульовим параметром k_2 для випадку поля Кулона.

Щоб пояснити необхідність розгляду такого рівняння, перш за все нагадаємо, що одним з фундаментальних об'єктів сучасної теоретичної фізики є елементарні частинки, що описуються за допомогою квантованих полів [7, 20].Більше того, на даний момент вважається, що усі фундаментальні взаємодії описуються за допомогою лише векторних (спін 1) і тензорних (спін 2) калібрувальних полів [8, 44], що зумовлює визначальну роль частинок спіну 1 у сучасній КТП як переносчиків взаємодій (глюони, кванти електрослабкої взаємодії).

Калібрувальна інваріантність зумовлює їх безмасовість і практично однозначно визначає їх лагранжіани, а масу вони набувають завдяки спонтанному порушенню симетрії (ефект Хіггса) з збереженням перенормовності (див. напр. §11.3 [8]). Ситуація з a priori масивними частинками спіну 1, які належать до полів "матерії", дещо складніша, бо з точки зору сучасної "ортодоксальної" КТП вони складаються з більш елементарних (наприклад, кварків) і не є фундаментальними, тому їх слід описувати за допомогою рівняння типу Бете – Солпітера [3, 6, 44]. Але при пошуку розв'язків цього рівняння виникає типова для КТП (і досі остаточно не розв'язана) проблема виходу за рамки теорії збурень. Тому актуальним є пошук *феноменологічних* рівнянь, які б описували частинку з наперед заданими масою, спіном, магнітним моментом і т.ін.

Крім того, фундаментальні масивні частинки спіну 1 – неодмінний атрибут ряду суперсиметричних моделей КТП [11, 55], які становлять значний інтерес з точки зору квантування гравітації і об'єднання усіх відомих взаємодій. Цей факт також робить актуальним дослідження поведінки таких частинок у зовнішніх електромагнітних полях і пошук таких рівнянь для них, які б вже в одночастинковому наближенні були позбавлені ряду патологій, описаних нижче.

Як правило, за основу для побудови рівнянь, що задовільно описували б взаємодію частинки спіну 1 з електромагнітним полем в "напівкласичному" (в іншій термінології – одночастинковому) наближенні, тобто без вторинного квантування, беруть рівняння типу Прока (див. напр. [8], с.31) для вільної релятивістської частинки спіну 1, тобто рівняння

$$\partial_\mu(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) + M^2 B^\nu = 0. \tag{3.1}$$

Тут використовується "природна" система одиниць, в якій $\hbar = c = 1$, метричний тензор в 4-вимірному просторі Мінковського має вигляд $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}[1, -1, -1, -1]$, індекси, асоційовані з цим простором, позначаються малими грецькими літерами і пробігають значення від 0 до 3, $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, 4-вектори записуються у вигляді $J^\mu = (J^0, \mathbf{J})$, де жирна літера позначає тривимірний вектор (зокрема, $x^\mu = (t, \mathbf{r})$). Хвильовою функцією частинки є 4-вектор B^μ, а маса частинки дорівнює M.

Зауважимо, що наслідком (3.1) є (при $M \neq 0$) рівняння

$$\partial_\mu B^\mu = 0, \tag{3.2}$$

яке автоматично виключає з хвильової функції частинки зайву компоненту, що відповідає спіну 0.

Забігаючи дещо наперед, відзначимо, що за наявності взаємодіїї з електромагнітним полем виключення "зайвих" компонент зі спіном 0 з відповідних рівнянь часто становить вельми нетривіальну додаткову проблему (див. [56], с.194).

Після підстановки (3.2) назад до (3.1) ми бачимо, що при $M \neq 0$ кожна з компонент задовольняє рівняння Клейна – Гордона – Фока

$$\partial_\mu \partial^\mu B^\nu + M^2 B^\nu = 0,$$

звідки випливає, що рівняння (3.1) описує частинку маси M.

Якщо переписати рівняння Прока як систему рівнянь першого порядку, дістанемо відоме рівняння Кеммера – Деффіна – Петьє (КДП) (див. напр. [56] і наведені там посилання). Цікаво відзначити, що оригінальний підхід роботи [18] до опису динаміки масивних частинок спіну 1, що грунтується на локальній парасуперсиметрії, для вільної частинки також приводить до рівняння КДП.

Введення взаємодії з електромагнітним полем у таке рівняння (КДП або Прока) є неоднозначною процедурою, а використання стандартного способу введення такої взаємодії шляхом "видовження" похідних у відповідному лагранжіані веде до фізично незадовільних результатів: гіромагнітне відношення дорівнює 1, а не 2, всупереч теоретичним передбаченням [80] і експериментальним даним для єдиної відомої фундаментальної масивної зарядженої частинки спіну 1 – W-бозона, після вторинного квантування дістаємо неперенормовну теорію [20], а в кулонівському полі відсутні регулярні в початку координат розв'язки [73], причому набір станів дискретного спектру не є повним [52].

З іншого боку, наявність т.зв. аномального магнітного моменту призводить до необхідності введення немінімальної взаємодії з електромагнітним полем, але при значенні аномального магнітного моменту, яке відповідає гіромагнітному відношенню, рівному 2, тобто в найбільш фізично цікавому випадку W-бозона, виникають комплексні (а точніше, чисто уявні) власні значення енергії в постійному однорідному магнітному полі. В цьому випадку також має місце т.зв. аномалія Корбена – Швінгера [73]: неповнота набору нормовних станів дискретного спектру в полі Кулона: два стани, які мали б належати до дискретного спектру, ненормовні. Ясно, що такі ефекти мають означати народження електромагнітним полем пар частинка-античастинка, і порушують самоузгодженість одночастинкового наближення; крім того, для скалярних частинок, що описуються рівнянням Клейна–Гордона–Фока і спінорних, які описуються рівнянням Дірака, подібні патології відсутні [22].

Хоча створення супер-, а потім і парасуперсиметричної квантової механіки (див. [125, 62, 108] та огляди [17, 72] і наведені там посилання) дозволило після виявлення парасуперсиметрії у цій задачі намітити підхід до розв'язання проблеми комплексних енергій у постійному однорідному магнітному полі [63, 64] шляхом введення нової, нелінійної по тензору електромагнітного поля, взаємодії, але, на жаль, при цьому не вдається остаточно позбутися аномалії Корбена – Швінгера.

Тому природним кроком до побудови задовільної теорії масивних частинок спіну 1 в рамках релятивістської квантової механіки (тобто без вторинного квантування) є розгляд і детальне вивчення "іграшкових" моделей, структура рівнянь яких подібна до вишезгаданих рівнянь для частинок спіну 1, але для яких відсутні деякі проблеми, притаманні таким рівнянням. Одна з таких моделей описується розглянутою нижче модифікацією відомого рівняння типу Штюкельберга, що одночасно описує частинки спіну 0 і 1.

3.1. Узагальнення модифікованого рівняння типу Штюкельберга

Нагадаємо, що модифіковане за Бекерсом, Деберг і Нікітіним [64] рівняння Штюкельберга має вигляд

$$(\beta_\mu \pi^\mu - M + P_{ST}(\frac{e}{2M} S_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda e^{2\alpha}}{2^\alpha M^{4\alpha-1}} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^\alpha))\Psi = 0, \qquad (3.3)$$

де A^μ – це потенціали зовнішнього електромагнітного поля, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ – його тензор, $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ – т.зв. "видовжені" похідні, а $\pi_\mu = iD_\mu$ - "видовжені" імпульси (див. напр. [6], с.144), e і M – відповідно електричний заряд і маса частинки (частинок), що описуються рівнянням (3.3), α – дійсний параметр, Ψ – 11-компонентна комплексна хвильова функція, і введено 11×11 матриці

$$\begin{aligned}
&\beta_0 = i(-e_{4,8} + e_{5,9} + e_{6,10} + e_{7,11} + e_{8,4} - e_{9,5} - e_{10,6} - e_{11,7}),\\
&\beta_1 = i(-e_{2,11} + e_{3,10} + e_{4,9} - e_{5,8} - e_{8,5} + e_{9,4} + e_{10,3} - e_{11,2}),\\
&\beta_2 = i(e_{1,11} - e_{3,9} + e_{4,10} - e_{6,8} - e_{8,6} - e_{9,3} + e_{10,4} + e_{11,1}),\\
&\beta_3 = i(-e_{1,10} + e_{2,9} + e_{4,11} - e_{7,8} - e_{8,7} + e_{9,2} - e_{10,1} + e_{11,4}),\\
&S_{01} = e_{2,7} + e_{7,2} - e_{3,6} - e_{6,3} - e_{8,9} - e_{9,8},\\
&S_{02} = -e_{1,7} - e_{7,1} + e_{3,5} - e_{5,3} - e_{8,10} - e_{10,8},\\
&S_{03} = e_{1,6} + e_{6,1} - e_{2,5} - e_{5,2} - e_{8,11} - e_{11,8},\\
&S_{12} = i(-e_{1,2} + e_{2,1} - e_{5,6} + e_{6,5} - e_{9,10} + e_{10,9}),\\
&S_{23} = i(-e_{2,3} + e_{3,2} - e_{6,7} + e_{7,6} - e_{10,11} + e_{11,10}),\\
&S_{31} = i(e_{1,3} - e_{3,1} + e_{5,7} - e_{7,5} + e_{9,11} - e_{11,9}),\\
&P_{ST} = (e_{8,8} + e_{9,9} + e_{10,10} + e_{11,11}).
\end{aligned}$$

Тут $e_{i,j}$ – це 11×11 матриці, єдиним ненульовим елементом яких є одиниця, що знаходиться на (i,j)-му місці, а матриця $S_{\mu\nu}$ – кососиметрична: $S_{\mu\nu} = -S_{\nu\mu}$.

Легко показати, що в силу рівняння (3.3) перші 7 компонент Ψ можна виразити через 4 останніх компоненти $\Psi_8, \Psi_9, \Psi_{10}, \Psi_{11}$, причому утворений з цих компонент набір $B_0 = -\Psi_8$, $B_a = \Psi_{8+a}$, $a = 1, 2, 3$ перетворюється як 4-вектор відносно перетворень групи Пуанкаре.

Після виключення 7 перших компонент з рівняння (3.3) ми дістанемо наступне рівняння другого порядку для 4-вектора B

$$(D_\mu D^\mu + \tilde{m}^2_{eff})B^\nu + 2ieF^\nu_\rho B^\rho = 0, \tag{3.4}$$

де $\tilde{m}^2_{eff} = M^2(1 + \lambda(e^2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/2M^4)^\alpha)$.

Надалі ми обмежимось випадком $\alpha = 1/2$, коли рівняння лінійні по модулю вектора напруженості електричного чи магнітного поля у випадку чисто електричного чи чисто магнітного полів, причому, щоб уникнути появи комплексних власних значень енергії у випадку поля Кулона (інакше μ_i, а отже і власні значення дискретного енергетичного спектру E^{inj} будуть комплексними, див. нижче) ми замінимо $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ на $|F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}|$. Щоб уникнути плутанини, ми в подальшому використовуватимемо позначення k_2 замість λ. Крім того, ми дещо узагальнимо розгляд Бекерса, Деберг і Нікітіна [64], ввівши додатковий параметр g, що має фізичний зміст гіромагнітного відношення частинки (частинок), що описуються розглядуваним рівнянням.

Таким чином, далі у цьому розділі ми розглядатимемо рівняння

$$(D_\mu D^\mu + m^2_{eff})B^\nu + iegF^\nu_\rho B^\rho = 0, \tag{3.5}$$

де $m^2_{eff} = M^2 + k_2|e^2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/2|^{1/2}$.

У вільному випадку ($e = 0$) [64] це рівняння співпадає з звичайним рівнянням Штюкельберга, записаним у формалізмі другого порядку, і частинка, що описується рівнянням (3.5), має два можливих спінових стани: стани зі спінами 0 і 1 з однаковою масою M.

Отже, рівняння (3.5) є узагальненням модифікованого рівняння типу Штюкельберга з [64] при $\alpha = 1/2$ на випадок довільного гіромагнітного відношення g і електромагнітних полів з $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} < 0$.

Зазначимо також, що рівняння (3.5) подібне до двохчастинкового рівняння для позитронія (див. [56], с.355 і далі) з точністю до заміни m^2 на m_{eff}^2 і вибору значення g.

3.2. Поле Кулона

4-потенціал, що відповідає кулонівському полю притягання, має вигляд:

$$\mathbf{A} = 0, A^0 = -Ze/r, Z > 0. \tag{3.6}$$

Оскільки він статичний і сферично-симетричний, енергія E і повний момент $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ ($\mathbf{L}$ – кутовий момент, а $\mathbf{S}$ – спін) є інтегралами руху.

Розкладемо хвильові функції стаціонарних станів по базису спільних власних функцій $\mathbf{J}^2$ та $\mathbf{J}_z$ з власними значеннями $j(j+1)$ та m. Ці власні функції мають вигляд

$$B^0 = iF(r)Y_{jm}, \mathbf{B} = B^{(-1)}(r)\mathbf{Y}_{jm}^{(-1)} + B^{(0)}(r)\mathbf{Y}_{jm}^{(0)} + B^{(1)}(r)\mathbf{Y}_{jm}^{(1)}, \tag{3.7}$$

де $\mathbf{Y}_{jm}^{(\lambda)}$ – т.зв. сферичні вектори [10]

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_{jm}^{(-1)} &= \mathbf{n}Y_{jm},\\
\mathbf{Y}_{jm}^{(0)} &= (-i\mathbf{r} \times \nabla)Y_{jm}/\sqrt{j(j+1)},\\
\mathbf{Y}_{jm}^{(1)} &= (\nabla - \mathbf{n}\partial/\partial r)Y_{jm}/\sqrt{j(j+1)},
\end{aligned}$$

Y_{jm} – звичайні сферичні функції (див. напр. [37], с.79), а $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Для $j = 0$ $B^{(0)} = B^{(1)} \equiv 0$ [10].

Після підстановки (3.6) і (3.7) до (3.5) ми отримаємо наступні рівняння:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}W = (2/r^2)\mathrm{Q}W, \quad j = 0\\
&\mathrm{T}V = (2/r^2)\mathrm{P}V, \quad \mathrm{T}B^{(0)} = 0, \quad j \neq 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Тут $\beta = Ze^2, B^{(0)} \equiv K^{(0)}$, $a = \sqrt{j(j+1)}$, $b = \beta g/2$, † позначає матричне транспонування,

$$\mathrm{T} = (E + \beta/r)^2 + d^2/dr^2 + (2/r)d/dr - j(j+1)/r^2 - m_{eff}^2, \tag{3.9}$$

$$V = (FB^{(-1)}B^{(1)})^\dagger, \quad W = (FB^{(-1)})^\dagger,$$

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & -b & 0 \\ b & 1 & -a \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриці P і Q діагоналізовні. Власні значення Q дорівнюють

$$\lambda_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 - (\beta g/2)^2}, \tag{3.10}$$

а власні значення P –

$$\lambda_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{(j+1/2)^2 - (\beta g/2)^2}, \quad \lambda_3 = 0. \tag{3.11}$$

Після діагоналізації P і Q рівняння (3.8) набувають вигляду (для зручності позначимо $\lambda_0 \equiv \lambda_3$)

$$\mathrm{T}K^{(i)} = (2\lambda_i/r^2)K^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, 3. \tag{3.12}$$

Рівняння (3.12) формально співпадають з рівняннями для радіальних функцій задачі Кулона для довільного спіну (див. [56], §4.3). Зазначимо також, що їх, очевидно, можна переписати в еволюційній формі, тобто як систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язану відносно старших похідних, якщо ввести до розгляду додаткові змінні $\tilde{K}_i = dK_i/dr$. Користуючись результатами з [56], ми легко отримуємо відповідний дискретний енергетичний спектр:

$$E^{inj} = M/\sqrt{1 + \beta^2/(n + \mu_i + 1)^2} \tag{3.13}$$

де $n = 0, 1, 2, \ldots; j = 0, 1, 2 \ldots; i = 0, 1, 2, 3$ і

$$\mu_i = -1/2 + \sqrt{(j+1/2)^2 - \beta^2 + 2\lambda_i + k_2\beta} \tag{3.14}$$

(індекс i відповідає власному стану, для якого $K^{(i)} \neq 0$, а всі інші функції $K^{(l)} = 0$; для $j = 0$ маємо лише дві гілки, що відповідають $i = 1, 2$).

Гілки спектру для $i = 0$ та $i = 3$ повністю ідентичні, тобто має місце двократне виродження.

Власні функції дискретного спектру мають вигляд

$$K^{(i)nj} = c^{inj} x^{\mu_i} exp(-x/2) L_n^{\mu_i}(x) \tag{3.15}$$

де c^{inj} – нормувальні сталі, $x = 2r\sqrt{M^2 - E^2}$, $L_n^\alpha(x)$ – поліноми Лагерра.

Покажемо, що коли $k_2 = 0, j > 0, g = 2$ рівні (3.13) чотирикратно вироджені при $n > 1$. Для цього зауважимо, що для $k_2 = 0, j > 0, g = 2$

$$\mu_1 = \lambda_1, \mu_2 = \lambda_1 - 2, \mu_0 = \lambda_1 - 1 \tag{3.16}$$

і підставимо ці μ_i до (3.13). Ми отримаємо чотири повністю ідентичних набори рівнів (для $n > 1$).

Якщо ж ми виключимо одну з двох ідентичних гілок з $i = 0$ та $i = 3$, дістанемо трикратне виродження, типове для парасуперсиметрії [72].

3.2.1. Виключення компоненти зі спіном 0.

Добре відомо (див. напр. [8], с.35), що у вільному ($e = 0$) випадку можна виключити компоненту зі спіном 0, накладаючи умову

$$\partial_\mu B^\mu = 0, \tag{3.17}$$

У випадку поля Кулона легко перевірити, що для $k_2 = 0, j > 0, g = 2$ умова

$$D_\mu B^\mu = 0 \tag{3.18}$$

сумісна з рівняннями руху (3.12). Справді,

$$D_\mu B^\mu = (EK^{(3)} + R^{(1)} + R^{(2)}) Y_{jm}, \tag{3.19}$$

де ми ввели функції [73]

$$R^{(i)} = dK^{(i)}/dr + (1 + \lambda_i)K^{(i)}/r - \beta E K^{(i)}/\lambda_i \tag{3.20}$$

які задовольняють те ж рівняння, що і $K^{(3)}$

$$\mathrm{T}G = 0, \quad G \text{ – будь-яка з функцій } K^{(3)}, R^{(1)}, R^{(2)}, \tag{3.21}$$

з такими ж вимогами до регулярності в початку координат.

Отже, можна виразити $K^{(3)}$ через $R^{(i)}$ в силу (3.18), (3.19), (3.20), причому (3.12) все рівно буде виконуватись.

3.2.2. Парасуперсиметрія. В цьому пункті розглянемо випадок $k_2 = 0, g = 2, j > 0$, коли

$$\mu_1 = \lambda_1, \quad \mu_0 = \lambda_1 - 1, \quad \mu_2 = \lambda_1 - 2$$

і отже вищезгадані власні значення (3.13) енергетичного спектру додатково трикратно вироджені:

$$E^{1,n+1,j} = E^{0,n,j} = E^{3,n,j} = E^{2,n-1,j}, \quad n > 1. \tag{3.22}$$

Більше того, обмежимось розглядом станів зі спіном 1, накладаючи умову (сумісну з (3.5) для випадку поля Кулона, якщо $k_2 = 0$, $g = 2$, для станів з $j > 0$)

$$\begin{aligned} D_\mu B^\mu_{Ejm} = \{EK^{(3)}_{Ej} + \sum_{i=1}^{2} [dK^{(i)}_{Ej}/dr + \\ +(1+\lambda_i)K^{(i)}_{Ej}/r - E\beta K^{(i)}_{Ej}/\lambda_i]\} \exp(-iEt) Y_{jm} = 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Ми використовуємо тут термін "стани зі спіном 1" за аналогією з вільним ($e = 0$) випадком, пор. §4 Розділу 1 [8], тобто ми називаємо станами спіну 1 ті і тільки ті стани, які задовольняють (3.23).

В силу (3.23) компонента $K^{(3)}$ виражається через інші і вже не є незалежною, тому ми маємо тепер лише три гілки дискретного енергетичного спектру E^{inj}, $i = 0, 1, 2$.

Рівняння, які залишились після виключення $K^{(3)}$, можна переписати у вигляді

$$\mathrm{H}\psi = \varepsilon\psi, \tag{3.24}$$

де $\psi = (K^{(1)} K^{(0)} K^{(2)})^\dagger$, $\mathrm{H} = 2\,\mathrm{diag}\,[\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_0, \mathrm{H}_2]$,

$$\mathrm{H}_i = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\lambda_i(\lambda_i + 1)}{r^2} - \frac{2\beta E}{r} + \frac{\beta E}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) \qquad i = 1, 2,$$

$$\mathrm{H}_0 = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\lambda_1(\lambda_1 - 1)}{r^2} - \frac{2\beta E}{r} + \frac{\beta E}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right),$$

$$\varepsilon = \beta E\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) - 2(M^2 - E^2).$$

Ввведемо парасуперзаряди

$$\mathrm{Q}^{+} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{S}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{W}_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Q}^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{W}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{S}_2 & 0 \end{pmatrix},$$

де $\mathrm{W}_i = d/dr + (1+\lambda_i)/r - E\beta/\lambda_i$, $\mathrm{S}_i = -d/dr + (\lambda_i - 1)/r - E\beta/\lambda_i$.

Тепер легко перевірити, що Q^{+}, Q^{-}, $\mathrm{Q}_1 = (\mathrm{Q}^{+} + \mathrm{Q}^{-})/2$, $\mathrm{Q}_2 = (i/2)(\mathrm{Q}^{+} - \mathrm{Q}^{-})$ та H задовольняють комутаційні співвідношення т.зв. $p = 2$ парасуперсиметричної квантової механіки Рубакова – Спірідонова (див., наприклад, [72]):

$$\begin{gathered} (\mathrm{Q}^{\pm})^3 = 0, \qquad \mathrm{Q}_i^3 = \mathrm{HQ}_i, \qquad [\mathrm{Q}^{\pm}, \mathrm{H}] = 0, \\ \{\mathrm{Q}_i^2, \mathrm{Q}_{3-i}\} + \mathrm{Q}_i \mathrm{Q}_{3-i} \mathrm{Q}_i = \mathrm{HQ}_{3-i}, \qquad i = 1, 2, \end{gathered} \tag{3.25}$$

де $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}$, $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} = \mathrm{AB} + \mathrm{BA}$.

Парасуперзаряди Q^{+}, Q^{-} комутують з H і отже, є операторами симетрії рівняння (3.24). Їм відповідають узагальнені симетрії цього рівняння з характеристиками $\mathrm{Q}^{+}(\psi)$, $\mathrm{Q}^{-}(\psi)$ (про зв'язок операторів симетрії з узагальненими симетріями див. напр. [42], с.390). Підкреслимо, що ці узагальнені симетрії нееквівалентні точковим симетріям Лі, оскільки коефіцієнти при d/dr у Q^{+}, Q^{-} є матрицями, а не скалярними функціями.

Саме існування парасуперзарядів Q^{+}, Q^{-} і є причиною вищезгаданого додаткового трикратного виродження.

3.2.3. Про аномалію Корбена – Швінгера. При $k_2 = 0, j > 0, g = 2$ наші рівняння (3.5) з додатковою умовою (3.18) зводяться до рівнянь теорії Корбена – Швінгера векторної частинки з гіромагнітним відношенням $g = 2$ [73] в полі Кулона. Ця теорія має відому аномалію, котра полягає у відсутності нормовних власних станів дискретного спектру з $j = 0$ та одного зі станів з $j = 1$. Отже, набір власних станів виявляється неповним, що веде до численних труднощів, наприклад при вивченні розсіяння таких частинок (див. [73]).

Але звичайна умова нормування для рівняння (3.5) при $g = 2$

$$\int J^0 d^3x = e \tag{3.26}$$

пов'язана зі збереженням 4-струму

$$J^\mu = -ie[B^*_\nu D^\mu B^\nu - B_\nu (D^\mu B^\nu)^*], \tag{3.27}$$

який не включає члени, пропорційні $D_\mu B^\mu$, котрі і зумовлюють вищезгадану ненормовність у теорії Корбена – Швінгера [73] (там цей вираз пропорційний до просторової дельта-функції $\delta(\mathbf{r})$ і інтеграл у (3.26) стає розбіжним для усіх станів з $j = 0$ та одного стану з $j = 1$).

Це пояснюється тим, що в нашому випадку умова (3.18) накладається незалежно від рівнянь руху (3.5), а у теорії Корбена – Швінгера аналог (3.18) є наслідком відповідних рівнянь руху і містить у своїй правій частині не нуль, а дельта-функцію, наявність якої і призводить до описаної вище аномалії.

Отже, ми показали, що у нашій теорії аномалія Корбена – Швінгера для випадку $k_2 = 0, j > 0, g = 2$ відсутня. Це можна перевірити і безпосередньо, обчисливши інтеграли нормування для власних функцій (3.15) і переконавшись в тому, що вони збіжні.

Висновки до Розділу 3

В підрозділі 1 Розділу 3 запропоновано узагальнення модифікованого за Бекерсом – Деберг – Нікітіним рівняння Штюкельберга.

Для запропонованого рівняння в підрозділі 2 Розділу 3 знайдено власні функції і власні значення дискретного енергетичного спектру для випадку поля Кулона. Встановлено, що при певних значеннях параметрів моделі з'являється додаткове виродження станів дискретного спектру, і знайдено приховану парасуперсиметрію задачі, яка відповідає за нього.

Показано також, що запропонована модель позбавлена аномалії Корбена – Швінгера.

Для випадку постійного однорідного магнітного поля запропонована модель формально зводиться до розглянутої в [64], тому, як легко перевірити, за умови $k_2 \geq g - 1$ в ній не виникає комплексних власних значень енергії в такому полі.

Отже, модель (3.5) виявилася адекватною не лише для випадку постійного однорідного магнітного поля, а і для кулонова поля.

Отримані результати можуть бути застосовані, наприклад, для побудови зображення Фаррі (див. [6], с.540) в квантовій електродинаміці частинок, що описуються рівнянням (3.5), і зокрема для обчислення відповідного лембівського зсуву (пор. [3, 6, 7, 20]) та інших подібних ефектів.

Відзначимо, що, наскільки відомо автору, запропонована модель при $k_2 = 0$, $g = 2$ є першим прикладом парасуперсиметричної релятивістської системи з неосциляторною взаємодією.

Основні результати Розділу 3 опубліковано в роботах [46, 112, 113].

Висновки

Основні результати дисертації можна підсумувати таким чином:

1. Знайдено достатню умову (квазі)поліноміальності по часу узагальнених симетрій для широкого класу (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь порядку не нижче двох, інваріантних відносно зсувів по просторовій змінній x і по часу t, зокрема для рівнянь зі сталою сепарантою.

2. Знайдено достатню умову відсутності поліноміальних по часу (окрім стаціонарних) симетрій достатньо високого порядку для інтегровного (1+1)-вимірного еволюційного рівняння порядку не нижче двох з незалежними від часу t коефіцієнтами, що володіє нетривіальними канонічними щільностями законів збереження, і з її допомогою знайдено всі локальні узагальнені симетрії рівняння Гаррі Дима, модифікованого рівняння КдФ та деяких інших важливих рівнянь математичної фізики.

3. Описано загальний вигляд залежності від x узагальнених симетрій (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь порядку не нижче двох, інваріантних відносно зсуву по x.

4. Подано узагальнення названих вище результатів на випадок невироджених слабко діагоналізовних систем (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь порядку не нижче двох.

5. Знайдено повний набір станів дискретного енергетичного спектра в полі Кулона для модифікованого рівняння Штюкельберга і виявлено приховану парасуперсиметрію при певних значеннях параметрів моделі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Адлер В.Э. Ли-алгебраический подход к нелокальным симметриям интегрируемых систем//Теоретическая и математическая физика. — 1991. — Т.89, №3. — С.323–336.

[2] Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х., Квазилокальные симметрии уравнений математической физики, в сб.: Математическое моделирование. Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики. — М.: Наука, 1987. — С. 22–56.

[3] Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1981. – 432 с.

[4] Багров В.Г. и др. Точные решения релятивистских волновых уравнений. Новосибирск: Наука, 1982. — 182 с.

[5] Багров В.Г., Самсонов Б.Ф. Преобразование Дарбу уравнения Шредингера//Физика элементарных частиц и атомного ядра. — 1997. — Т.28, вып.4. — С.951–1012.

[6] Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. — Изд. 3-е, испр. — М. Наука, 1989. — 728 с.

[7] Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1973. — 416 с.

[8] Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Квантовые поля. — М.: Физматлит, 1993. — 336 с.

[9] Брычков Ю.А., Маричев О.И., Прудников А.П. Таблицы неопределеных интегралов: Справочник. — М.: Наука, 1986. — 192 с.

[10] Варшалович Д.А., Москалев В.К., Херсонский А.Н. Квантовая теория углового момента: Аппарат неприводимых тензоров, сферические функции, 3nj-тензоры. — Л.: Наука, 1974. — 439 с.

[11] Весс Ю., Беггер Дж. Суперсимметрия и супергравитация. — М.: Мир, 1986. — 186 с.

[12] Виноградов А.М., Красильщик И.С. Один метод вычисления высших симметрий нелинейных эволюционных уравнений и нелокальные симметрии // ДАН СССР. — 1980. — Т.253, №6. — С.1289–1293.

[13] Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986. — 336 с.

[14] Винтерниц П., Орлов А.Ю. P_∞-алгебра симметрий уравнений Кадомцева – Петвиашвили, свободные фермионы и 2-коцикл в алгебре Ли псевдодифференциальных операторов//Теоретическая и математическая физика. — 1997. — Т.113, № 2. — С.231–260.

[15] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

[16] Генденштейн Л.Э. Нахождение точных спектров уравнения Шредингера с помощью суперсимметрии//Письма в ЖЭТФ. — 1983. – Т. 38, вып. 6. — С.299–302.

[17] Генденштейн Л.Э., Криве И.В. Суперсимметрия в квантовой механике//Успехи физических наук. — 1985.– Т.146, №4. — С.553-590.

[18] Гершун В.Д.,Ткач В.И. Параграссмановы переменные и описание массивных частиц со спином, равным единице// Укр. физ. журн. — 1984. — Т.29, № 11. — С.1620-1627.

[19] Голод П.І., Клімик А.У. Математичні основи теорії симетрій. — К.: Наукова думка, 1992. — 368 с.

[20] Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях.— М.: Атомиздат, 1980.— 296 с.

[21] Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. — В 2-х т. — М. Наука, 1990.

[22] Давыдов А.С. Квантовая механика.— М.: Наука, 1973. — 704 с.

[23] Желобенко Д.П. Представления редуктивных алгебр Ли. — М.: Наука, 1994. —352 с.

[24] Жибер А.В, Шабат А.Б. Уравнения Клейна – Гордона с нетривиальной группой //ДАН СССР. — 1979. — Т.247, №5. — С.1103–1107.

[25] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980. — 319 с.

[26] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.

[27] Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. Эволюционные уравнения с нетривиальной алгеброй Ли – Беклунда// Функц. анализ и его прил. — 1980. — Т.14, в.1. — С.25–36.

[28] Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. О бесконечных алгебрах Ли – Беклунда// Функц. анализ и его прил. — 1980. — Т.14, в.4. — С.79–80.

[29] Капцов О.В. Расширение симметрии эволюционных уравнений//ДАН СССР. — 1982. — Т. 262, №5. — С. 1056–1059.

[30] Б.Г. Конопельченко, В.Г. Мохначев. К групповому анализу дифференциальных уравнений// Ядерная физика. — 1979. — Т.30, вып.2(8). — С.559–567.

[31] Магадеев Б.А. О групповой классификации нелинейных эволюционных уравнений//Алгебра и анализ. — 1993. — Т.5, вып.2. — С.141–156.

[32] Магадеев Б.А., Соколов В.В. О полной алгебре Ли – Беклунда уравнения Кортевега – де Фриза// Динамика сплошной среды. — 1981. — вып. 52. — С.48–55.

[33] Миллер У., мл. Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981. — 342 с.

[34] Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н.(мл.), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. — Киев: Наук. думка, 1987. – 296 с.

[35] Михайлов А.В., Шабат А.Б., Соколов В.В. Симметрийный подход к классификации интегрируемых уравнений//Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов/Под ред. В.Г. Барьяхтара и др. — К.: Наукова думка, 1990. — С.213–279.

[36] Михайлов А.В., Шабат А.Б., Ямилов Р.И. Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем//Успехи мат. наук. — 1987. — Т.42, вып.4. — С.3–53.

[37] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. Изд.2-е, перераб. и доп. — М.: Наука, 1984. — 344 с.

[38] Новиков С.П., Дынников И.А. Дискретные спектральные симметрии маломерных дифференциальных операторов на правильных решетках и двумерных многобразиях//Успехи мат. наук. — 1997. — Т. 52, вып. 5. — С.175–234.

[39] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. — М.: Мир, 1989. — 326 с.

[40] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[41] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности //ДАН СССР. — 1959. — Т.125, №3. — С.492–495.

[42] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 639 с.

[43] Орлов А.Ю., Шульман Е.И. Дополнительные симметрии нелинейного уравнения Шредингера// Теоретическая и математическая физика. — 1985. — Т.64, №2. — С.323–328.

[44] Райдер Л. Квантовая теория поля. — М.: Мир, 1987.— 511 с.

[45] Свинолупов С.И., Соколов В.В. Слабые нелокальности в эволюционных уравнениях//Матем. заметки. — 1990. — Т. 48, вып. 6. — С.91–97.

[46] Сергєєв А.Г. Парасуперсиметрія і точні розв'язки в задачі Кулона для модифікованого рівняння Штюкельберга// Матеріали VI Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, Київ, 15–17 трав. 1997 р. — Київ, 1997. — С. 348.

[47] Сергєєв А.Г. Про клас 1+1-вимірних еволюційних рівнянь з залежними від x стаціонарними симетріями // Матеріали VII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, Київ, 15–17 трав. 1997 р. — Київ, 1997. — С. 458.

[48] Сергєєв А.Г. Про структуру узагальнених симетрій нелінійних еволюційних рівнянь // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. — 1999. — № 3. — С.61-70.

[49] Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики/А.В. Бочаров, А.М. Вербовецкий, А.М. Виноградов и др./Под ред. А.М. Виноградова и И.С. Красильщика. — М.: Изд-во "Факториал", 1997. — 464 с.

[50] Соколов В.В. О симметриях эволюционных уравнений// Успехи мат. наук. – 1988. — Т. 43, № 5. – С.133–163.

[51] Соколов В.В. О структуре алгебры симметрий для однополевого єволюционного уравнения//ДАН СССР. — 1985. — Т.294, №5. — С.1065-1068.

[52] Тамм И.Е. Движение мезонов в электромагнитных полях// ДАН СССР. — 1940. – Т. 29, №8-9.— С.551 – 554.

[53] Ушверидзе А.Г. Квазиточнорешаемые модели квантовой механики// Физика элементарных частиц и атомного ядра. — 1989. — Т.20, №5. — С. 1185 – 1245.

[54] Ушверидзе А.Г. Квазиточнорешаемость. Новое явление в квантовой механике (Алгебраический подход) // Физика элементарных частиц и атомного ядра. — 1992. — Т.23, №1. — С. 1185 – 1245.

[55] П. Уэст. — Введение в суперсимметрию и супергравитацию. — М.: Мир, 1989. – 332 с.

[56] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1990. — 400 с.

[57] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. — К.: Наукова думка, 1983. — 200 с.

[58] Шаповалов А.В., Широков И.В. Об алгебре симметрии линейного дифференциального уравнения//Теоретическая и математическая физика. — 1992. — Т. 92, №1. — С. 3–12.

[59] Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. — М.: ИЛ, 1947. — 358 с.

[60] Andrianov A.A. and Ioffe M.V. From Supersymmetric Quantum Mechanics to a Parasupersymmetric One//Phys. Lett. B. — 1991. — V. 255, No.4. — P.543–548.

[61] Bakirov I.M. On the symmetries of some systems of evolution equations. — Ufa. — 1991. — 12 p. (Technical Report).

[62] Beckers J. and Debergh N. Parastatistics and Supersymmetry in Quantum Mechanics//Nucl. Phys. B. — 1990. — V. 340. — P.767–776.

[63] Beckers J., Debergh N. and Nikitin A.G. On Parasupersymmetries and Relativistic Descriptions for Spin one Particles: I. The Free Context//Fortschr. Phys. — 1995.— V. 43.— P.67–80.

[64] Beckers J., Debergh N. and Nikitin A.G. On Parasupersymmetries and Relativistic Descriptions for Spin one Particles: II. The Interacting Context with (Electro)Magnetic Fields // Fortschr. Phys. — 1995. — V. 43.— P.81–96.

[65] Beukers F., Sanders J.A., Wang J.P., One symmetry does not imply integrability//J. Differential Equations. — 1998. — V. 146, N1. — P. 251–260.

[66] Bilge A.H. A system with recursion operator but one higher symmetry// Lie Groups Appl. — 1994. — V.1. — P.132–139.

[67] Błaszak M. Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems. — Berlin etc.: Springer, 1998. — 350 p.

[68] Calogero F. and Degasperis A. Reduction technique for matrix nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform// J. Math. Phys. — 1981. — V.22, No.1. — P.23–31.

[69] Cavalcante J.A. and Tenenblat K. Conservation laws for nonlinear evolution equations// J. Math. Phys. — 1988. — V.29, No.4. — P.1044–1049.

[70] Cooper F., Ginocchio J.N., and Khare A. Relationship between Supersymmetry and Solvable Potentials // Phys. Rev. D. — 1987. — V. 36. — p.2458–2473.

[71] Cooper F., Ginocchio J.N., and Wipf A., Supersymmetry Operator Transformations and Exactly Solvable Potentials// J. Phys. A: Math. Gen. — 1989. — V. 22, No.17. — P.3707–3716.

[72] Cooper F., Khare A. and Sukhatme U. Supersymmetry and Quantum Mechanics// Phys.Rep. — 1995. — V. 251. — P.267–385.

[73] Corben H.C. and Schwinger J. The electromagnetic properties of mesotrons//Phys.Rev.— 1940. — V. 58. —P.953–968.

[74] CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations/Ed. Ibragimov N.H. — V.1. Symmetries, exact solutions, and conservation laws. — Boca Raton, Florida: CRC Press, 1994. — 443 p.

[75] CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations/Ed. Ibragimov N.H. – V.2. Applications in engineering and physical sciences. — Boca Raton, Florida: CRC Press, 1994. — 576 p.

[76] CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations/Ed. Ibragimov N.H. – V.3. New trends in theoretical developments and computational methods. — Boca Raton, Florida: CRC Press, 1996. — 552 p.

[77] Debergh N. and Nikitin A.G., Parasupersymmetric Quantum Mechanics with an Arbitrary Number of Parasupercharges and Orthogonal Lie Algebras// Helv. Phys. Acta. — 1995. — V. 68. — P.19–31.

[78] Dorfman I. Dirac structures and integrability of nonlinear evolution equations. — Nonlinear Science: Theory and Applications. — Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 1993. — 188 p.

[79] Fels M., Kamran N. Nonfactorizable separable systems and higher-order symmetries of the Dirac operator//Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1990. – V.428, No.1874. — P.229–249.

[80] Ferrara S., Porrati M. and Telegdi V.L. $g = 2$ as a natural value of gyromagnetic ratio// Phys. Rev. D. — 1992. — V. 46, No.8. — P.3529–3537.

[81] Flach B. The Structure of Higher Symmetries of Nonlinear Evolution Equations// Letters in Math. Phys. — 1989. — V.17, No.4. — P. 321–328.

[82] Fokas A.S. Symmetries and integrability// Studies in Appl. Math. — 1987. — V.77. — P. 253–299.

[83] Fokas A. S., Fuchssteiner B. Bäcklund transformations for hereditary symmetries// Nonlinear Anal. — 1981. — V.5, No. 4. — P.423–432.

[84] Fokas A. S., Fuchssteiner B. On the structure of symplectic operators and hereditary symmetries //Lett. Nuovo Cimento. — 1980. — V.28, No.8. — P.299–303.

[85] Fokas A.S., Liu Q.M. Generalized Conditional Symmetries and Exact Solutions of Non-Integrable Equations// Theor. Math. Phys. — 1994. – V.99, No.2. – P.571–582.

[86] Fuchssteiner B. Mastersymmetries, higher order time-dependent symmetries and conserved densities of nonlinear evolution equations// Progr. Theoret. Phys. — 1983. — V. 70, No.6. — P.1508–1522.

[87] Fuchssteiner B. Integrable nonlinear equations with time-dependent coefficients//J. Math. Phys. — 1993. — V. 34, No.11. — P.5140–5158.

[88] Fushchych W.I. and Nikitin A.G. Symmetries of Equations of Quantum Mechanics. N.Y.: Allerton Press, 1994. — 465 p.

[89] Grinevich P.G., Orlov A.Yu., Schulman E.I. On the symmetries of the integrable systems//Important developments in soliton theory. — Berlin - Heidelberg - New York: Springer-Verlag,, 1993. — P.283–301.

[90] Hirota R. and Satsuma J. Soliton solutions of the coupled Korteweg – de Vries equation//Phys. Lett. A. — 1981. — V.85. — P.407–408.

[91] Khare A. Parasupersymmetric Quantum Mechanics of Arbitrary Order//J. Phys. A: Math. Gen. — 1992. — V. 25. — P.L749–L754.

[92] Khare A. Parasupersymmetry in Quantum Mechanics// J. Math. Phys. — 1993. — V. 34. — P.1277–1294.

[93] Kiso K. Pseudopotentials and symmetries of evolution equations// Hokkaido Math. J. — 1989. — V.18, no.1. — P.125–136.

[94] Konopelchenko B.G. Nonlinear Integrable Equations. — Lecture Notes in Physics. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1987. — V.270. — 371 p.

[95] Lie S., Engel F. Theorie der Transformationsgruppen. — Bd. 1–3. Leipzig: Teubner, 1883–1893. — 623 s.;554 s.;830 s.

[96] Lie S., Scheffers G. Vorlesungen uber Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationsgruppen. – Leipzig: Teubner, 1891. — 568 s.

[97] Ma W.X. Generators of vector fields and time dependent symmetries of evolution equations// Sci. China Ser. A. —1991. — V.34, No.7. — P.769–782.

[98] Ma W. X., Bullough R. K., Caudrey P. J., Fushchych, W. I. Time-dependent symmetries of variable-coefficient evolution equations and graded Lie algebras// J. Phys. A: Math. Gen. — 1997. — V.30, No.14. — P.5141–5149.

[99] Meshkov A.G. Necessary conditions of integrability// Inverse Problems. — 1994. — V.10. — P.635–653.

[100] Mikhailov A.V., Yamilov R.I. Towards classification of $(2 + 1)$-dimensional integrable equations. Integrability conditions. I. // J. Phys. A: Math. Gen. — 1998. — V. 31. — P. 6707–6715.

[101] Noether E. Invariante Variationsprobleme //Nachr. König. Gessel. Wissen. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (1918), S.235–257.

[102] Olver P.J. Evolution equations possessing infinitely many symmetries // J. Math. Phys. – 1977. — V.18, No. 6. — P.1212–1215.

[103] Olver P.J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. — 2nd ed. — N.Y.: Springer, 1993. – 541 p.

[104] Olver P.J., Sokolov V.V. Integrable evolution equations on associative algebras// Comm. Math. Phys. —1998. — V.193, No.2. — P.245–268.

[105] Orlov A. Yu., Shulman E.I. Additional symmetries for integrable equations and conformal algebra representation// Lett. Math. Phys. — 1986. — V.12, No.3. — P.171–179.

[106] Orlov A. Yu. Vertex operator, $\overline{\partial}$-problem, symmetries, variational identities and Hamiltonian formalism for $2 + 1$ integrable systems // Plasma theory and nonlinear and turbulent processes in physics (Kiev, 1987). — Singapore: World Scientific Publishing. — 1988. — P.116–134.

[107] Orlov A. Yu., Winternitz P. Algebra of pseudodifferential operators and symmetries of equations in the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy// J. Math. Phys. — 1997. — V.38, No.9. — P.4644–4674.

[108] Rubakov V.A. and Spiridonov V.P. On Pararelativistic Quantum Mechanics// Mod. Phys. Lett. A. — 1988. — V. 3. — P.1337–1347.

[109] Sanders J.A., Wang J.P. On the integrability of homogeneous scalar evolution equations// J. Differential Equations. — 1998. — V.147, No.2. — P.410–434.

[110] Sattinger D.H. Group-Theoretic Methods in Bifurcation Theory, Lecture Notes in Math., No. 762, Springer-Verlag, N.Y., 1979.

[111] Semenov V.V. and Chumakov S.M. Generalizations of the Superalgebra Other than the Parasuperalgebra // Phys. Lett. B. — 1991. — V. 262. — P.451–454.

[112] Sergeyev A.G. On parasupersymmetries in a relativistic Coulomb problem for the modified Stueckelberg equation//Proc. 2nd Int. Conf. "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". — Kyiv. — 1997. — V.2. — P.331–335.

[113] Sergheyev A.G. A relativistic Coulomb problem for modified Stueckelberg equation// Укр. фіз. журн. — 1997. — V. 42, No.10. — P. 1171–1174.

[114] Sergheyev A.G. On time-dependent symmetries of evolution equations // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці: Праці Інституту математики НАН України. — 1998. — Т.19. — С.216–220.

[115] Sergheyev A.G. Generalized symmetries of partial differential equations and quasiexact solvability// Rep. Math. Phys. — 1998. — V.41, No.3. — P.279–286.

[116] Sergyeyev A. On symmetries of KdV-like evolution equations// Rep. Math. Phys. — 1999. — V.44, No.1/2. — P.183–190.

[117] Sergyeyev A. On local time-dependent symmetries of integrable evolution equations // Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics: Праці Інституту математики НАН України. — 2000. — Т.30, Ч.1. — С.196–203.

[118] Stahlholfen A. and Biedenharn L.C. Group-theoretical approach to scattering: the Dirac – Coulomb problem and relativistic supersymmetry// Group Theoretical Methods in Physics. Proc. of the XVI International Colloquium held at Varna, Bulgaria, June 15–20, 1987. Lecture Notes in Physics. — V.313. — Berlin etc.: Springer Verlag, 1987. – P.261–267.

[119] Sukumar C.V. Supersymmetry and the Dirac equation for a central Coulomb field// J.Phys. A: Math. Gen. — 1985. — V.18, No.12. — P.L697–L701.

[120] Tamm I.E. Mesons in a Coulomb Field//Phys. Rev. — 1940. — V.58.— P.952.

[121] Ugaglia M. On the Hamiltonian and Lagrangian structures of time-dependent reductions of Hamiltonian PDEs. — Trieste — 1999. — 46 p. (Preprint SISSA 11/99/FM).

[122] Ushveridze A.G. Quasi-exactly solvable problems in quantum mechanics. — Bristol: IOP Publishing, 1994. – 480 p.

[123] Wadati M., Konno K. and Ichikawa Y.H. New integrable nonlinear evolution equations//Journal of the Physical Society of Japan. — 1979. — V.43, No.5. — P.1698–1700.

[124] Wang J.P. Symmetries and Conservation Laws of Evolution Equations. – Ph.D. Thesis. – Vrije Universiteit, Amsterdam, 1998. – 166 p.

[125] Witten E. Dynamical Breaking of Supersymmetry// Nucl. Phys. B. — 1981. — V. 188, No.3. — P.513–540.

[126] Zhdanov R.Z. Conditional Lie-Bäcklund symmetry and reduction of evolution equations// J. Phys. A: Math. Gen. — 1995. — V.28, No.13. — P.3841–3850.

[127] Zhdanov R.Z. Conditional symmetry and spectrum of Schrödinger equation// J. Math. Phys. — 1996. — V.37, No.7. — P.3198–3217.