КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им.Т.Г.ШЕВЧЕНКО

На правах рукописи

СЕРОВ Николай Иванович

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и
математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор ФУЩИЧ В.И.

Киев – 1982

2

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Принципы симметрии играют фундаментальную роль в естествознании. Законы сохранения энергии, импульса, момента количества движения являются следствием однородности, изотропности четырехмерного пространства-времени.

"Симметрию в математической и теоретической физике можно рассматривать как принцип, с помощью которого из всевозможных логически допустимых моделей (уравнений, соотношений) отбираются только те, которые инвариантны относительно групп или подгрупп Евклида, Галилея, Пуанкаре, Лоренца, Вейля, Шредингера и т.д. Все основные уравнения математической физики (уравнения Ньютона, Лапласа, Д"Аламбера, Шредингера, Лиувилля, Дирака, Максвелла и т.д.) обладают высокой симметрией. Именно этим свойством они выделены среди множества других дифференциальных уравнений, рассматриваемых в математике [38] ".

Исходя из симметрийных свойств дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), выделим два класса: релятивистские и нерелятивистские. К первым отнесем ДУЧП, инвариантные относительно конформной группы и ее подгрупп (группы Вейля, Пуанкаре, Лоренца). Ко вторым - ДУЧП, инвариантные относительно группы Шредингера и ее подгруппы Галилея.

Заметим, что ДУЧП 2-го порядка гиперболического типа относятся к релятивистским, а параболического типа - к нерелятивистским.

Кроме того, симметрийный принцип классификации применим не только к ДУЧП 2-го порядка, но и к уравнениям произвольного порядка, а также к системам ДУЧП. Более того, при помощи симметрийных свойств можно классифицировать интегральные и интегро-дифференциальные уравнения.

Также интересна и важна задача об использовании группы инвариантности ДУЧП для нахождения таких замен, при помощи которых данное уравнение сводилось бы по возможности к наиболее простой и удобной для отыскания конкретных решений дифференциальной структуре.

Задача разделения переменных в ДУЧП при помощи групповых методов для линейных уравнений решена У.Миллером [19].

Перечисленные выше и некоторые другие, более специальные, задачи образуют широкую область приложения теоретико-групповых методов к исследованию дифференциальных уравнений.

Математические основы теории симметрии дифференциальных уравнений заложил Софус Ли (1881-1885 гг.). Он же первый применил эту теорию к конкретным уравнениям и нашел, используя преобразования групп, их решения. С.Ли установил многие фундаментальные положения теории групповых свойств дифференциальных уравнений.

Впоследствии многие исследователи использовали и развивали теорию С.Ли. Особенно эффективно использовал симметрию линейных волновых уравнений для нахождения точных решений Г.Бейтмен. Он впервые использовал конформную инвариантность линейного уравнения Д"Аламбера для построения новых решений по известным. Важные идеи по отысканию инвариантных решений предложил Г.Биркгоф [3].

Групповое размножение решений применимо не только к линейным ДУЧП, но и к нелинейным, для которых не справедлив линейный принцип суперпозиции. Размножение решений нелинейных ДУЧП в некотором смысле можно назвать симметрийным нелинейным принципом суперпозиции.

Современному изложению теории С.Ли и ее дальнейшему развитию за последнее время посвящена фундаментальная монография Л.В.Овсянникова [24] . Им, в частности, построена теория инвариантных и частично-инвариантных решений ДУЧП. С помощью этой теории в [24] Л.В.Овсянников провел всесторонний анализ и нашел некоторые классы частных решений уравнений газовой динамики. В настоящее время эта теория получила широкое применение

Новый подход к исследованию алгебр инвариантности ДУЧП предложен В.И.Фущичем в [37] . Этот метод существенно отличается от классического метода С.Ли. Основное отличие состоит в том, что базисные элементы алгебры инвариантности соответствующих уравнений являются, как правило, интегродифференциальными (псевдодифференциальными) операторами. По этой причине эти алгебры порождают нелокальные (неточечные) преобразования. В инфинитезимальном методе С.Ли, как хорошо известно, базисные элементы алгебры инвариантности того или иного ДУЧП принадлежат классу линейных дифференциальных операторов первого порядка. Эта алгебра Ли операторов первого порядка порождает локальные (точечные) преобразования. Такой в принципе отличающийся от лиевского метод получил название: нелиевский метод исследования симметрийных свойств ДУЧП.

С помощью нелиевского метода обнаружены новые, ранее неизвестные, симметрии даже для таких хорошо изученных уравнений Максвелла, Дирака [37] , Ламе [40] и др.

Один из возможных алгоритмов для отыскания классов точных решений для нелинейных ДУЧП сформулирован и в явном виде реализован в [38] , [41] .

Настоящая диссертация посвящена изучению групповых свойств линейных и нелинейных ДУЧП. Групповые свойства исследованных уравнений в основном используются для решения следующих 5-ти задач:

- для данного ДУЧП найти максимальную группу преобразований, относительно которых оно инвариантно;

- по заданной группе преобразований найти уравнения, инвариантные относительно этой группы (эту задачу в дальнейшем мы будем называть обратной симметрийной задачей);

- построение точных решений;

- нахождение замены, приводящей дифференциальное уравнение по возможности к наиболее простому, удобному для нахождения решений, виду;

- "размножение" решений дифференциальных уравнений, т.е. построение новых решений по известным при помощи преобразований группы инвариантности.

В первой главе установлена конформная инвариантность поливолнового уравнения, уравнения $\mathcal{K}_\mu \mathcal{K}^\mu u = 0$ и нелинейного уравнения эйконала. Для нелинейного поливолнового уравнения и квазилинейного волнового уравнения решены обратные симметрийные задачи. Используя симметрийные свойства, для квазилинейного волнового уравнения и уравнения эйконала найдены локальные замены, приводящие их к более простому виду.

Во второй главе предложен способ нахождения точных решений скалярных нелинейных ДУЧП, основанный на результатах [38] , [41], [43] , [57] . Решена обратная симметрийная задача для нелинейного волнового уравнения. При помощи указанного алгоритма построены многопараметрические классы точных решений уравнений Лиувилля, $\sin$-Гордона, Борна-Инфельда, эйконала, нелинейного волнового уравнения. Получены формулы "размножения" решений конформноинвариантных уравнений эйконала и волнового уравнения со степенной нелинейностью.

В третьей главе исследована симметрия так называемого релятивистского аналога уравнений Навье-Стокса. Решено несколько обратных симметрийных задач для нелинейных уравнений Ламе и Вейля. Алгоритм нахождения точных решений обобщен на случай систем ДУЧП. Найдены точные решения системы нелинейных уравнений Вейля.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доктору физ.-мат.наук профессору В.И.Фущичу за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Г Л А В А I

КОНФОРМНО ИНВАРИАНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Настоящая глава посвящена изучению групповых свойств дифференциальных уравнений в частных производных.

В первом параграфе найдены максимальные алгебры инвариантности линейных уравнений: поливолнового и $\mathcal{K}_\mu \mathcal{K}^\mu u=0$. Симметрия нелинейного уравнения эйконала исследована в § 4.

В §§ 2–3 решена обратная симметрийная задача для нелинейного поливолнового и квазилинейного волнового уравнений. Отметим, что обратной симметрийной задачей мы называем задачу нахождения дифференциальных уравнений, инвариантных относительно наперед заданной группы преобразований.

Кроме того, в 3-м и 4-м параграфах, исходя из симметрийных свойств дифференциальных уравнений, найдены локальные замены, приводящие эти уравнения к более простому виду.

§ I. Линейное поливолновое уравнение и уравнение $\mathcal{K}_\mu \mathcal{K}^\mu u = 0$

I. Рассмотрим поливолновое уравнение

$$\Box^m u = 0, \qquad \text{(I.I.I)}$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$, $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta$, $\Box^1 = \Box$, $\Box^m = \Box \Box^{m-1}$, $m=1,2,\dots$ и исследуем его групповые свойства.

Известно, что уравнение

$$\Box u \equiv p_\mu p^\mu u = 0 \tag{I.I.2}$$

инвариантно относительно конформной алгебры

$$p_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0},\ p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a},\quad a=\overline{1,n-1}$$
$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu,\quad D = x_\nu p^\nu + \frac{n-2}{2}i, \tag{I.I.3}$$
$$K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu,\quad \mu,\nu=\overline{0,n-1},\ I = u\frac{\partial}{\partial u}$$

с коммутационными соотношениями

$$[p_\alpha, p_\beta] = [K_\alpha, K_\beta] = [J_{\alpha\beta}, D] = 0,\ [p_\alpha, J_{\beta\gamma}] = i(g_{\alpha\beta}p_\gamma -$$
$$- g_{\alpha\gamma}p_\beta),\ [K_\alpha, J_{\beta\gamma}] = i(g_{\alpha\beta}K_\gamma - g_{\alpha\gamma}K_\beta),\ [p_\alpha, D] = ip_\alpha,$$
$$[K_\alpha, D] = -iK_\alpha,\ [p_\alpha, K_\beta] = 2i(g_{\alpha\beta}D - J_{\alpha\beta}), \tag{I.I.4}$$
$$[J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] = i(g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma}),$$
$$\alpha,\beta,\gamma,\delta = \overline{0,n-1},$$

где $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор, $A_\mu B^\mu = A_0 B_0 - A_a B_a$. Здесь и дальше по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Т е о р е м а I.I.I. Максимальной алгеброй инвариантности поливолнового уравнения (I.I.I) при $(n,m) \neq (2,1)$ является $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ -мерная алгебра Ли, базисные элементы которой задаются операторами

$$p_\mu^m = p_\mu^1 = p_\mu,\quad J_{\mu\nu}^m = J_{\mu\nu}^1 = J_{\mu\nu},$$
$$D^m = x_\nu p^\nu + \frac{(n-2m)i}{2},\ K_\mu^m = 2x_\mu D^m - x_\nu x^\nu p_\mu \tag{I.I.5}$$

с коммутационными свойствами (I.I.4). В формулах (I.I.5) индекс вверху обозначает алгебру, соответствующую степени оператора $\Box$ в уравнении (I.I.I).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим метод математической индукции.

I. При $m=2$ уравнение (I.I.I) – дифференциальное уравнение в частных производных (ДУЧП) четвертого порядка

$$Lu \equiv u_{0000}+u_{1111}+\ldots+u_{n-1n-1n-1n-1}-2(u_{0011}+\ldots+ \tag{I.I.6}$$

$$+u_{00n-1n-1}-u_{1122}-\ldots-u_{n-2n-2n-1n-1})=0,$$

где индекс внизу означает дифференцирование по соответственному аргументу. Допускаемый оператор будем искать в виде (см. [24])

$$X=\xi^{\mu}(x,u)\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}+\eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{I.I.7}$$

Из условия инвариантности уравнения (I.I.6) относительно оператора (I.I.7)

$$\overset{4}{X}(Lu)\Big|_{Lu=0}=0, \tag{I.I.8}$$

где $\overset{4}{X}=X+\zeta^{\mu}\frac{\partial}{\partial u_{\mu}}+\sigma^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial u_{\mu\nu}}+\tau^{\mu\nu\alpha}\frac{\partial}{\partial u_{\mu\nu\alpha}}+\omega^{\mu\nu\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial u_{\mu\nu\alpha\beta}}$ – четвертое продолжение оператора $X^{\mu\nu}$, а

$$
\begin{aligned}
&\zeta^{\mu}=D_{\mu}(\eta)-u_t D_{\mu}(\xi^t),\ D_{\mu}=\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}+u_{\mu}\frac{\partial}{\partial u},\\
&\sigma^{\mu\nu}=\overset{1}{D}_{\mu}(\eta)-u_{t\nu}D_{\mu}(\xi^t),\ \overset{1}{D}_{\mu}=D_{\mu}+u_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial u_{\nu}},\\
&\tau^{\mu\nu\alpha}=\overset{2}{D}_{\mu}(\eta)-u_{t\nu\alpha}D_{\mu}(\xi^t),\ \overset{2}{D}_{\mu}=\overset{1}{D}_{\mu}+u_{\mu\nu\alpha}\frac{\partial}{\partial u_{\nu\alpha}},\\
&\omega^{\mu\nu\alpha\beta}=\overset{3}{D}_{\mu}(\eta)-u_{t\nu\alpha\beta}D_{\mu}(\xi^t),\ \overset{3}{D}_{\mu}=\overset{2}{D}_{\mu}+u_{\mu\nu\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial u_{\nu\alpha\beta}}
\end{aligned}
\qquad (I.I.9)
$$

после довольно громоздких преобразований находим систему определяющих уравнений относительно координат инфинитезимального оператора (I.I.7) ξ^{μ} и η :

$$
\begin{aligned}
&\xi^{\mu}_{u}=\eta_{uu}=\eta_{u\mu}=0,\ \xi^{0}_{0}=\xi^{1}_{1}=\ldots=\xi^{n-1}_{n-1},\ \xi^{0}_{\mu}=\xi^{\mu}_{0},\\
&\xi^{a}_{b}=-\xi^{b}_{a},\ \ L\eta=0,\ \ \mu=\overline{0,n-1},\ a\neq b,\ a,b=\overline{1,n-1}.
\end{aligned}
\qquad (I.I.10)
$$

Из уравнений (I.I.10) получаем алгебру инвариантности уравнения (I.I.6) с базисными операторами

$$
\begin{aligned}
&\overset{2}{P}_{\mu}=i g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}},\quad \overset{2}{J}_{\mu\nu}=x_{\mu}P_{\nu}-x_{\nu}P_{\mu},\\
&\overset{2}{D}=x_{\nu}P^{\nu}=\overset{1}{D}-i,\ \overset{2}{K}_{\mu}=2x_{\mu}\overset{2}{D}-x_{\nu}x^{\nu}P_{\mu},\ \mu,\nu=\overline{0,n-1},
\end{aligned}
\qquad (I.I.11)
$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям (I.I.4).

Этот результат можно получить и другим способом.

Поскольку уравнение (I.I.6) линейное, то условие инвариантности запишем таким образом (см. [38]):

$$
[L,\overset{2}{Q}_{\mu}]=\lambda_{\mu}(x)L, \qquad (I.I.12)
$$

где $\lambda_\mu(x)$ – некоторые функции, а Q^2_μ – операторы алгебры инвариантности уравнения (I.I.6), $[\ ,\ ]$ – означает коммутатор.

Зная операторы $K^1_\mu \equiv K_\mu$ алгебры (I.I.3), операторы K^2_μ будем искать в виде

$$K^2_\mu = K^1_\mu + icx_\mu, \qquad (I.I.I3)$$

где c – неизвестная постоянная.

Подставляя (I.I.I3) в (I.I.I2) и используя формулу

$$[\Box, x_\mu] = 2ip_\mu, \quad [\Box, K_\mu] = 4ix_\mu\Box \qquad (I.I.I4)$$

имеем

$$[\Box^2, K^2_\mu] = \Box[\Box, K^2_\mu] + [\Box, K^2_\mu]\Box = \Box[\Box, K^1_\mu] +$$
$$+\Box[\Box, icx_\mu] + [\Box, K^1_\mu]\Box + [\Box, icx_\mu]\Box =$$
$$= \Box 4ix_\mu\Box + ic\Box 2ip_\mu + 4ix_\mu\Box^2 + ic2ip_\mu\Box =$$
$$= -4cp_\mu\Box + 4ix_\mu\Box^2 + 4i(x_\mu\Box + 2ip_\mu)\Box =$$
$$= 8ix_\mu\Box^2 - 4(c+2)p_\mu\Box.$$

Откуда заключаем, что для выполнения условия (I.I.I2) надо выбрать $c = -2$. Тогда $K^2_\mu = K^1_\mu - 2ix_\mu$ или $D^2 = D^1 - i = x_\nu p^\nu$. Так как

$$[\Box, p_\mu] = [\Box, J_{\mu\nu}] = 0,$$

то проверка равенств $p^2_\mu = p^1_\mu$, $J^2_{\mu\nu} = J^1_{\mu\nu}$ тривиальна. Следовательно, первый шаг доказательства завершен.

2. Предположим, что (I.I.II) выполняется при $m = k-1$ т.е.

$$P_\mu^{k-1} = P_\mu^1 , \quad \mathcal{J}_{\mu\nu}^{k-1} = \mathcal{J}_{\mu\nu}^1 , \quad \mathcal{D}^{k-1} = \mathcal{D}^1 - (k-2)i ,$$
$$\mathcal{K}_\mu^{k-1} = \mathcal{K}_\mu^1 - 2(k-2)i\,x_\mu . \tag{I.I.I5}$$

3. Докажем, что при $m = k$

$$P_\mu^k = P_\mu^1 , \quad \mathcal{J}_{\mu\nu}^k = \mathcal{J}_{\mu\nu}^1 , \quad \mathcal{D}^k = \mathcal{D}^1 - (k-1)i ,$$
$$\mathcal{K}_\mu^k = \mathcal{K}_\mu^{k-1} - 2i\,x_\mu = \mathcal{K}_\mu^1 - 2(k-1)i\,x_\mu . \tag{I.I.I6}$$

Формулу (I.I.I6) докажем только для $\mathcal{K}_\mu^k$. Для остальных операторов доказательство аналогичное. Для доказательства формулы (I.I.I6) достаточно показать выполнения условия (I.I.I2).

Принимая во внимание формулу

$$[\Box^k, x_\mu] = 2ik\,P_\mu \Box^{k-1}, \tag{I.I.I7}$$

имеем

$$[\Box^k, \mathcal{K}_\mu^k] = \Box[\Box^{k-1}, \mathcal{K}_\mu^k] + [\Box, \mathcal{K}_\mu^k]\Box^{k-1} =$$
$$= \Box[\Box^{k-1}, \mathcal{K}_\mu^{k-1} - 2i\,x_\mu] + [\Box, \mathcal{K}_\mu^1 - 2(k-1)i\,x_\mu]\Box^{k-1} =$$
$$= \Box[\Box^{k-1}, \mathcal{K}_\mu^{k-1}] - 2i\Box[\Box^{k-1}, x_\mu] + [\Box, \mathcal{K}_\mu^1]\Box^{k-1} -$$
$$- 2(k-1)i[\Box, x_\mu]\Box^{k-1} = \Box\cdot 4(k-1)i\,x_\mu \Box^{k-1} -$$
$$- 2i\Box 2i(k-1)P_\mu \Box^{k-2} + 4i\,x_\mu \Box\Box^{k-1} - 2(k-1)i\,2i\,P_\mu \Box^{k-1} =$$
$$= 4(k-1)i(x_\mu \Box + 2i\,P_\mu)\Box^{k-1} + 8(k-1)P_\mu \Box^{k-1} + 4i\,x_\mu \Box^k =$$
$$= 4ki\,x_\mu \Box^k ,$$

т.е. (I.I.I2) действительно выполняется. Теорема доказана.

Замечание I.I.I. Случай, когда в уравнении (I.I.I) $m=1$ и $n=2$, является особенным. Рассмотрим его отдельно.

Уравнение (I.I.I) имеет вид

$$u_{00}-u_{11}=0, \qquad (I.I.18)$$

где $u=u(x)$, $x=(x_0,x_1)$. Применяя алгоритм Ли-Овсянникова [24] находим, что координаты инфинитезимального оператора (I.I.7) должны удовлетворять следующей системе определяющих уравнений:

$$\xi^{\mu}_{u}=\eta_{uu}=\eta_{u\mu}=0,\ \mu=0,1,\ \xi^0_0=\xi^1_1,\ \xi^0_1=\xi^1_0,\ \Box\eta=0. \qquad (I.I.19)$$

Решив последнюю систему, имеем

$$\begin{aligned}
&\xi^0=f(x_0+x_1)+g(x_0-x_1),\\
&\xi^1=f(x_0+x_1)-g(x_0-x_1)+c_1,\\
&\eta=c_2u+F(x_0+x_1)+G(x_0-x_1),
\end{aligned} \qquad (I.I.20)$$

где $f,\ g,\ F,\ G$ — произвольные функции из класса $C^2(R^1)$, а c_1, c_2 — $const$.

Из формул (I.I.20) следует, что уравнение (I.I.18) инвариантно относительно бесконечномерной алгебры операторов, вид которых задается формулами (I.I.7), (I.I.20).

П. Исходя из того, что операторы K_μ алгебры (I.I.3) удовлетворяют таким же коммутационным соотношениям, как и операторы P_μ, поставим задачу: исследовать групповые свойства уравнения

$$\mathcal{K}_\mu \mathcal{K}^\mu u = 0, \qquad (I.I.2I)$$

где $\mathcal{K}_\mu$ задаются формулой (I.I.3) при $\mathcal{D} = x_\nu p^\nu + ki$.

Т е о р е м а I.I.2. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (I.I.2I), есть конформная алгебра $C(1, n-1)$ с базисными операторами

$$\tilde{p}_\mu = p_\mu + \frac{2(k-1)}{x_\nu x^\nu} i x_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu,$$
$$\mathcal{D} = x_\nu p^\nu + i, \quad \mathcal{K}_\mu = 2x_\mu \mathcal{D} - x_\nu x^\nu p_\mu, \quad \mu,\nu = \overline{0, n-1}. \qquad (I.I.22)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем применяя алгоритм Ли-Овсянникова [24]. В обозначениях [24] уравнение (I.I.2I) запишется следующим образом:

$$Lu \equiv [x_\nu x^\nu \Box + 4(k-1) x_\nu \partial_{x_\nu} + 4k(k-1)] u = 0 \qquad (I.I.23)$$

при условии, что $x_\nu x^\nu \neq 0$.

Используя условие инвариантности уравнения (I.I.23) относительно оператора (I.I.7), для координат этого оператора получим определяющие уравнения

$$\xi^\mu_u = \eta_{uu} = 0, \quad \mu = \overline{0, n-1}, \qquad (I.I.24)$$

которые дают $\xi^\mu = \xi^\mu(x)$, $\eta = a(x) u + b(x)$,

$$\xi^0_0 = \xi^1_1 = \ldots = \xi^{n-1}_{n-1}, \quad \xi^a_b = -\xi^b_a, \quad a \neq b, \quad a, b = \overline{1, n-1}, \qquad (I.I.25)$$

$$x_\nu x^\nu (a_\mu - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} \Box \xi^\nu) = 2(k-1)(x_\nu \xi^\mu_\nu - -2 g_{\mu\nu} g_{\mu\lambda} x_\nu \xi^\mu_\lambda + \frac{2x^\nu \xi^\nu}{x_\lambda x^\lambda} x_\mu + \xi^\mu), \quad \mu,\nu = \overline{0, n-1}, \qquad (I.I.26)$$

$$x_\nu x^\nu \Box a + 4(k-1) x_\nu a_\nu = 8k(k-1)\left(\frac{x^\nu \xi^\nu}{x_\lambda x^\lambda} - \xi^0_0\right), \qquad (I.I.27)$$

$$L b = 0. \qquad (I.I.28)$$

Так как уравнение (I.I.27) является следствием уравнений (I.I.25)-(I.I.26), а (I.I.28) лишь тривиальным образом отражает линейность уравнения (I.I.23) (см.[21 , с.35]), то остается решить только уравнения (I.I.25) и (I.I.26).

Система (I.I.25) представляет собой систему уравнений Киллинга, решение которой

$$\xi^\mu = -b_\mu x_\nu x^\nu + 2 x_\mu b_\nu x^\nu + c_{\mu\nu} x^\nu + d_\mu, \quad \mu = \overline{0, n-1} \qquad (I.I.29)$$

где b_μ , $c_{\mu\nu}$, d_μ - постоянные параметры, причем $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$, $c_{00} = c_{aa}$, $\mu,\nu = \overline{0, n-1}$, $a = \overline{1, n-1}$.

Используя (I.I.29) и (I.I.26) имеем

$$a = -2k b_\nu x^\nu + \frac{2(k-1)}{x_\nu x^\nu} d_\nu x_\nu + c, \qquad (I.I.30)$$

где $c - const$.

Из соотношений (I.I.29)-(I.I.30) получаем (I.I.22). Теорема доказана.

§ 2. Нелинейное поливолновое уравнение

В первом параграфе исследована симметрия линейного поливолнового уравнения (I.I.I). Ниже мы рассмотрим нелинейное поливолновое уравнение вида

$$S: \Box^m u + F(x, u) = 0 \qquad \text{(I.2.I)}$$

и найдем все функции $F(x, u)$, при которых уравнение (I.2.I) инвариантно относительно той же конформной алгебры $C(1, n-1)$ что и уравнение (I.I.I).

Заметим, что при $m=1$ этот вопрос исследовал Ибрагимов [11]. В [11] установлено, что $F(x,u)=\lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}$, где $\lambda - const$, $n \neq 2$.

Т е о р е м а I.2.I. Для того, чтобы максимальной алгеброй инвариантности нелинейного поливолнового уравнения (I.2.I) была конформная алгебра $C(1, n-1)$ с операторами (I.I.5) необходимо и достаточно, чтобы $n \neq 2m$ и

$$F(x, u) = \lambda u^{\frac{n+2m}{n-2m}}, \qquad \text{(I.2.2)}$$

где $\lambda - const$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем только необходимость. Достаточность доказывается непосредственной проверкой применяя алгоритм [24].

Пусть $\overset{2m}{X}$ – $2m$ – продолжение инфинитезимального оператора (I.I.7). Тогда из условия инвариантности уравнения (I.2.I)

$$\overset{2m}{X}(S)\Big|_{S=0} = 0 \qquad \text{(I.2.3)}$$

имеем, что

$$\xi^{\mu} = -a_{\mu} x_{\nu} x^{\nu} + 2 x_{\mu} a_{\nu} x^{\nu} + c_{\mu\nu} x^{\nu} + d_{\mu},$$
$$\eta = \frac{2m-n}{2} (2 a_{\nu} x^{\nu} + c_{00}) u + b(x), \quad \text{(I.2.4)}$$

где a_{μ} , $c_{\mu\nu}$, $d - const$, $b(x)$ – произвольная функция из класса $C^2(R^4)$, а функция $F(x,u)$ должна удовлетворять следующему уравнению

$$XF - (\eta_u - 2m\xi^0_0)F + \square^m \eta = 0. \quad \text{(I.2.5)}$$

Так как $n \neq 2m$, то, используя формулы (I.2.4), уравнения (I.2.5) можно переписать в виде

$$\xi^{\mu} \frac{\partial F}{\partial x_{\mu}} + \eta \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{n+2m}{n-2m} \eta_u F + \square^m b = 0. \quad \text{(I.2.6)}$$

Запишем уравнение (I.2.6) для всех операторов группы конформных преобразований, полученных из (I.2.4)

$$P_{\mu} = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} + b_{\mu}(x) \frac{\partial}{\partial u},$$
$$D = x_{\nu} P^{\nu} + i \left[\frac{2m-n}{2} u + b_n(x)\right] \frac{\partial}{\partial u}, \quad \text{(I.2.7)}$$
$$K_{\mu} = 2 x_{\mu} x_{\nu} P^{\nu} - x_{\nu} x^{\nu} P_{\mu} + i \left[(2m-n) x_{\mu} u + b_{n+1+\mu}(x)\right] \frac{\partial}{\partial u},$$

где b_{α}, $\alpha = \overline{0, 2n}$ – произвольные функции от x . (Операторы вращений здесь не понадобятся).

$$\frac{\partial F}{\partial x_{\mu}} + b_{\mu}(x) \frac{\partial F}{\partial u} + \square^m b_{\mu}(x) = 0, \quad \text{(I.2.8 a)}$$

$$x_\nu \frac{\partial F}{\partial x_\nu} + \left(\frac{2m-n}{2} + b_n(x)\right)\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{2m+n}{2} F + \\ + \Box^m b_n(x) = 0, \qquad (I.2.8\ б)$$

$$2x_\mu x_\nu \frac{\partial F}{\partial x_\nu} - x_\nu x^\nu \frac{\partial F}{\partial x_\mu} + \left[(2m-n)x_\mu u + \right. \\ \left. + b_{n+1}(x)\right]\frac{\partial F}{\partial u} + (2m+n)x_\mu F + \Box^m b_{n+1+\mu}(x) = 0. \qquad (I.2.8\ в)$$

После несложных преобразований уравнений (I.2.8) имеем

$$\begin{aligned} &\left(x_\nu b_\nu - b_n - \frac{2m-n}{2}u\right)\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{2m+n}{2}F + x_\nu \Box^m b_\nu - \Box^m b_n = 0, \\ &\left(x_\nu x^\nu b_\mu - 2x_\mu b_n + b_{n+1+\mu}\right)\frac{\partial F}{\partial u} + x_\nu x^\nu \Box^m b_\mu - 2x_\mu \Box^m b_n + \Box^m b_{n+1+\mu} = 0. \end{aligned} \qquad (I.2.9)$$

Обозначив через

$$\begin{aligned} &A(x,u) = x_\nu b_\nu - b_n - \frac{2m-n}{2}u, \quad B(x) = x_\nu \Box^m b_\nu - \Box^m b_n, \\ &A_\mu(x) = x_\nu x^\nu b_\mu - 2x_\mu b_n + b_{n+1+\mu}, \quad B_\mu(x) = x_\nu x^\nu \Box^m b_\mu - 2x_\mu \Box^m b_n + \Box^m b_{n+1+\mu}, \end{aligned} \qquad (I.2.10)$$

уравнения (I.2.9) перепишем в виде

$$A(x,u)\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{2m+n}{2}F + B(x) = 0, \qquad (I.2.11\ а)$$

$$A_\mu(x)\frac{\partial F}{\partial u} + B_\mu(x) = 0. \qquad (I.2.11\ б)$$

Из (I.2.11) имеем

$$A(x,u) \neq 0, \quad A_\mu(x) = B_\mu(x) = 0. \qquad (I.2.12)$$

Из условия совместности уравнений (I.2.8 а) и первого уравнения (I.2.II) получаем уравнения относительно функций b_μ:

$$b_\mu = \frac{\partial q}{\partial x_\mu}, \tag{I.2.I3}$$

$$\Box^m b_\mu = -\frac{2}{2m+n} \frac{\partial B}{\partial x_\mu}, \tag{I.2.I4}$$

где $q = \frac{2}{2m-n}(x_\nu b_\nu - b_n)$. Из уравнения (I.2.I3), учитывая формулу

$$\Box^m x_\mu = x_\mu \Box^m + 2m \Box^{m-1} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \tag{I.2.I5}$$

находим, что

$$B = -\frac{2m+n}{2} \Box^m q . \tag{I.2.I6}$$

Уравнение (I.2.II а) принимает теперь вид

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{n+2m}{n-2m} \frac{F + \Box^m q}{u - q}, \tag{I.2.I7}$$

общее решение которого

$$F = \lambda(x)(u-q)^{\frac{n+2m}{n-2m}} - \Box^m q, \tag{I.2.I8}$$

где $\lambda(x)$ – произвольная функция из класса $C^2(R^4)$. Подставив (I.2.I8) в (I.2.8), получаем

$$(u-q)^{\frac{n+2m}{n-2m}} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} = 0, \qquad \mu = \overline{0, n-1}. \tag{I.2.I9}$$

Откуда $\lambda = const$. Как видно, после замены $V = u - q(x)$ получим формулу (I.2.2). Теорема доказана.

Заметим, что при $n = 2m$ из уравнения (I.2.II a) следует, что уравнение (I.2.I) не будет конформно инвариантно при любых функциях $F(x, u)$, нелинейных относительно u .

Следствие I.2.I. Если уравнение (I.2.I) инвариантно относительно алгебры Вейля

$$W(1, n-1) = \{P(1, n-1), D\}, \qquad (I.2.20)$$

то возможны два случая:

$$1. \quad F(x, u) = \lambda_1 u^k, \qquad (I.2.21)$$

$$2. \quad F(x, u) = \lambda_2 \exp u, \qquad (I.2.22)$$

где λ_1, λ_2, k – произвольные постоянные.

Доказательство. Формулы (I.2.4) и (I.2.6) будут теперь иметь вид:

$$\begin{aligned} \xi^\mu &= c_{\mu\nu} x^\nu + d_\mu , \\ \eta &= a u + b , \end{aligned} \qquad (I.2.23)$$

где $a - const$ и

$$\begin{aligned} &(c_{\mu\nu} x^\nu + d_\mu) \frac{\partial F}{\partial x_\mu} + (a u + b(x)) \frac{\partial F}{\partial u} - (a - 2m c_{00}) F = 0, \qquad (I.2.24) \\ &\Box^m b = 0. \end{aligned}$$

Расщепляя уравнение (I.2.24) по параметрам группы d_μ , получим

$$\frac{\partial F}{\partial x_\mu} = 0, \quad \mu = \overline{0, n-1}, \qquad (I.2.25)$$

$$(au+b)\frac{\partial F}{\partial u}+(2mc_{oo}-a)F=0, \qquad (I.2.26)$$

причем в формуле (I.2.26) b уже постоянная величина.

Для уравнения (I.2.26) имеем два неприводимых случая:

I. $a \neq 0$, $b=0$

2. $a=0$, $b\neq 0$.

Рассмотрим первый случай. Выбрав a кратным c_{oo} : $a=\alpha c_{oo}$ (I.2.26) можно записать следующим образом

$$\alpha u\frac{\partial F}{\partial u}+(2m-\alpha)F=0. \qquad (I.2.27)$$

Общим решением уравнения (I.2.27) является функция

$$F=\lambda_1 u^k, \qquad (I.2.28)$$

где $\lambda_1 - const$, $k=\frac{\alpha-2m}{\alpha}$.

Во втором случае, выбрав $b=-2mc_{oo}$, получим формулу (I.2.22).

З а м е ч а н и е I.2.I. Если $F(x,u)$ в уравнении (I.2.I) задается формулами (I.2.2I)-(I.2.22), то операторы алгебры $P(1,n-1)$ имеют стандартный вид (см., например, формулы (I.I.3)), а оператор дилатации выражается формулой

$$D=x_\nu p^\nu+\frac{2m}{k-1}i, \qquad (I.2.29)$$

$$D=x_\nu p^\nu+2m\frac{\partial}{\partial u} \qquad (I.2.30)$$

в каждом случае соответственно.

С л е д с т в и е I.2.2. Если уравнение (I.2.I) инвариантно относительно алгебры Пуанкаре $P(1,n-1)$, то

$$F = F(u), \tag{I.2.31}$$

т.е. F может быть произвольной функцией, дифференцируемой достаточное количество раз.

Доказательство очевидно, если учесть, что в этом случае $\eta = 0$.

§ 3. Квазилинейное волновое уравнение

В работе Бицадзе [4] предложена замена

$$V = F(x,u) \tag{I.3.I}$$

при помощи которой квазилинейное волновое уравнение специального вида

$$a_{\mu\nu}(x)\left[u_{\mu\nu} + c(x,u)u_\mu u_\nu\right] + b_\mu(x,u)u_\mu + d(x,u) = 0 \tag{I.3.2}$$

приводится к уравнению, линейному относительно производных функции V :

$$A_{\mu\nu}(x)V_{\mu\nu} + B_\mu(x,V)V_\mu + \mathcal{D}(x,V) = 0. \tag{I.3.3}$$

В работе Овсянникова [20] полностью решен вопрос о линеаризации произвольного нелинейного уравнения с частными производными второго порядка:

$$S(x, u, u_\mu, u_{\mu\nu}) = 0 \tag{I.3.4}$$

при помощи локальной замены (I.3.I). В [20] показано, что уравнение (I.3.4) для этого должно иметь вид (I.3.2).

Отметим, что в обеих работах [4] и [20] замена (I.3.I) имеет вид

$$F(x,u)=\alpha(x)\int \exp\left(\int c(x,u)\,du\right)du+\beta(x). \qquad (I.3.5)$$

Ниже мы изучим симметрийные свойства уравнения (I.3.2) и с групповой точки зрения получим замену (I.3.5).

Пусть

$$\Box u+f(u)u_\nu u^\nu+\Phi(x,u)=0 \qquad (I.3.6)$$

каноническая форма уравнения (I.3.2).

Так как замена (I.3.5) "убирает" только второе слагаемое в уравнении (I.3.2), то мы сначала рассмотрим уравнение

$$\Box u+f(u)u_\nu u^\nu=0. \qquad (I.3.7)$$

Методом Ли-Овсянникова [24] нетрудно доказывается.

Т е о р е м а I.3.I. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (I.3.7) в классе дифференциальных операторов первого порядка является конформная алгебра $C(1,n-1)$ с операторами

$$\begin{gathered}P_\mu=ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu},\quad J_{\mu\nu}=x_\mu P_\nu-x_\nu P_\mu,\\ D=x_\nu P^\nu-\frac{i}{2}(n-2)I,\quad K_\mu=2x_\mu D-x_\nu x^\nu P_\mu,\\ I=\left[\exp\left(-\int f(u)du\right)\int\exp\left(\int f(u)du\right)du\right]\frac{\partial}{\partial u}.\end{gathered} \qquad (I.3.8)$$

Сравнив алгебру (I.3.8) с алгеброй (I.I.3), относительно которой инвариантно линейное уравнение $\Box W=0$, мы видим, что они отличаются только операторами I. Если мы найдем локальную замену, при помощи которой алгебра (I.3.8) приводится к алгебре (I.I.3), то тем самым мы решим задачу о приведении нелинейного уравнения (I.3.7) к линейному уравнению (I.I.2).

Приравнивая операторы I алгебр (I.I.3) и (I.378) имеем уравнение

$$\frac{dw}{w} = \frac{du}{exp(-\int f(u)du)\int exp(\int f(u)du)du} \qquad (I.3.9)$$

решением которого будет функция (I.3.5).

Таким образом пример уравнения (I.3.7) наглядно демонстрирует как групповыми методами находить замену, линеаризирующую нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных.

Исследуем теперь вопрос: при каких $\Phi(x,u) \neq 0$ уравнение (I.3.6) инвариантно относительно той же конформной алгебры $C(1,n-1)$, что и уравнение (I.3.7).

Т е о р е м а I.3.2. Для того, чтобы уравнение (I.3.6) было инвариантно относительно конформной алгебры необходимо и достаточно, чтобы

$$\Phi(x,u) = \lambda\, exp(-\int f(u)du)\left[\int exp(\int f(u)du)du\right]^{\frac{n+2}{n-2}}, \qquad (I.3.10)$$

где $\lambda - const$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия инвариантности уравнения (I.3.6) относительно конформной алгебры $C(1,n-1)$ получаем необходимые и достаточные условия на функцию $\Phi(x,u)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} = 0, \quad \mu = \overline{0,n-1},$$
$$X\Phi - (\eta_u - 2\xi^0_0)\Phi + \Box\eta = 0, \qquad (I.3.11)$$

где оператор X и функции η и ξ^μ, $\mu=\overline{0,n-1}$ те же, что и в формуле (I.I.7), причем ξ^μ задаются формулами (I.2.28), а

$$\eta=\left[\frac{2-n}{2}(2b_\nu x^\nu+c_{00})\int exp\left(\int f(u)du\right)du+b(x)\right]exp\left(-\int f(u)du\right), \qquad (I.3.I2)$$

$b(x)$ – произвольное решение уравнения $\Box b=0$.

Подставляя формулы (I.I.28), (I.3.I2) в (I.3.II), получим, что Φ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\left[f(u)-\frac{n+2}{n-2}\frac{exp\left(\int f(u)du\right)}{\int exp\left(\int f(u)du\right)du}\right]\Phi=0. \qquad (I.3.I3)$$

Решив последнее уравнение, получим формулу (I.3.I0). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е I.3.I. Заменой (I.3.5) уравнение

$$\Box u+f(u)u_\nu u^\nu+\lambda exp\left(-\int f(u)du\right)\left[\int exp\left(\int f(u)du\right)du\right]^{\frac{n+2}{n-2}}=0 \qquad (I.3.I4)$$

приводится к уравнению

$$\Box w+\lambda w^{\frac{n+2}{n-2}}=0 \qquad (I.3.I5)$$

исследованному Ибрагимовым в [11].

Исходя из результатов теорем I.3.I, I.3.2 и теоремы § I3 из [11], поставим теперь задачу: описать все квазилинейные волновые уравнения вида

$$\Box u + F(x, u_\mu) = 0, \qquad (I.3.16)$$

инвариантные относительно конформной алгебры $C(1,n-1)$.

Оказывается, что кроме уравнения (I.3.14) нет других уравнений из класса (I.3.16), инвариантных относительно конформной алгебры. Этот факт доказывает следующая теорема.

Теорема I.3.3. Для того, чтобы уравнение (I.3.16) было инвариантно относительно конформной алгебры $C(1,n-1)$, необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид (I.3.14), а значит, в силу замечания I.2.I, было эквивалентно уравнению (I.3.15).

Доказательство. Применив метод Ли-Овсянникова [24], получим, что координаты инфинитезимального оператора (I.I.7) ξ^μ задаются формулами (I.I.28), а η и F должны удовлетворять следующему уравнению

$$\begin{aligned}&[\eta_\nu + u_\nu(\eta_\nu - 2b_\nu x^\nu - c_{oo}) - u_\mu(2b_\nu x^\mu - 2b^\mu x_\nu + c_{\mu\nu})]F_{u_\nu} + \\ &+ \eta F_u - (\eta_u - 4b_\nu x^\nu - 2c_{oo})F + u_\nu u^\nu \eta_{uu} + 2\eta_{u\nu} u^\nu + \\ &+ 2(n-2)b_\nu u_\nu + \Box\eta = 0,\end{aligned} \qquad (I.3.17)$$

где $\mu \neq \nu$.

Так как η не зависит от $u_\mu \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x_\mu}$, а F не зависит от x, то третье слагаемое в уравнении (I.3.17), содержащее выражение $u_\mu x^\mu$, не может быть "скомпенсировано" ни одним из остальных слагаемых этого уравнения. Поэтому

$$u_\mu(2b_\nu x^\mu - 2b^\mu x_\nu + c_{\mu\nu})F_{u_\nu} = 0. \qquad (I.3.18)$$

В силу того,т что $b_\mu \neq 0$, $c_{\mu\nu} \neq 0$, $\mu,\nu=\overline{0,n-1}$ последнее равенство возможно только при

$$F_{u_\nu} = A(u, u_\mu) u^\nu \tag{I.3.19}$$

или, что равносильно,

$$\frac{F_{u_0}}{u^0} = \frac{F_{u_1}}{u^1} = \dots = \frac{F_{u_{n-1}}}{u^{n-1}} = A(u, u_\mu). \tag{I.3.20}$$

Решением системы (I.3.20) будет функция

$$F = F(u, \omega), \tag{I.3.21}$$

где $\omega = u_\nu u^\nu$. Тогда уравнение (I.3.17) с учетом формул (I.3.18) и (I.3.21) будет иметь вид

$$\begin{aligned} &2\left[\eta_\nu u^\nu + (\eta_u - 2b_\nu x^\nu - c_{00})\omega\right] F_\omega + \eta F_u - \\ &-(\eta_u - 4b_\nu x^\nu - 2c_{00})F + \eta_{uu}\omega + 2\eta_{u\nu} u^\nu + \\ &+ 2(n-2) b_\nu u_\nu + \Box \eta = 0. \end{aligned} \tag{I.3.22}$$

Расщепляя уравнение (I.3.22) по u^ν и ω получим три соотношения:

$$\eta_\nu F_\omega + \eta_{u_\nu} + (n-2) b_\nu = 0, \tag{I.3.23 а}$$

$$2(\eta_u - 2b_\nu x^\nu - c_{00})\omega F_\omega + \eta_u F - (\eta_u - 4b_\nu x^\nu - 2c_{00})F + \eta_{uu}\omega = 0, \tag{I.3.23 б}$$

$$\Box \eta = 0. \tag{I.3.23 в}$$

Далее, расщепляя уравнения (I.3.23) по параметрах группы

b_μ и c_{oo} , получим

$$\eta = a(u)(2b_\nu x^\nu + c_{oo}), \qquad (I.3.24)$$

$$2aF_\omega + 2a' + n - 2 = 0, \qquad (I.3.25)$$

$$2(a'-1)\omega F_\omega + aF_u - (a'-2)F + a''\omega = 0 \qquad (I.3.26)$$

Из уравнения (I.3.25) получаем, что

$$F(u,\omega) = G(u) - \frac{a' + \frac{n}{2} - 1}{a}\omega. \qquad (I.3.27)$$

Подставляя (I.3.27) в (I.3.26), приходим к уравнению

$$aG' - (a'-2)G = 0, \qquad (I.3.28)$$

общее решение которого

$$G(a) = \lambda a \exp\left(-2\int\frac{du}{a}\right), \qquad (I.3.29)$$

где λ - const.

Обозначим в формуле (I.3.27) коэффициент при ω через $f(u)$. Тогда

$$a' + f(u)a + \frac{n}{2} - 1 = 0 \qquad (I.3.30)$$

откуда

$$a = \frac{2-n}{2}\exp\left(-\int f(u)du\right)\int\exp\left(\int f(u)du\right)du. \qquad (I.3.31)$$

Из формул (I.3.24), (I.3.27), (I.3.29) и (I.3.31) получаем, что

$$\eta = \frac{2-n}{2}(2b_\nu x^\nu + C_{00})\exp\left(-\int f(u)du\right) \times \tag{I.3.32}$$
$$\times \left[\int \exp\left(\int f(u)du\right)du + c_1\right],$$

$$F = f(u)u_\nu u^\nu + \lambda \exp\left(-\int f(u)du\right)\left[\int \exp\left(\int f(u)du\right)du\right]^{\frac{n+2}{n-2}}. \tag{I.3.33}$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е I.3.2. Из теоремы I.3.3 непосредственно следует такое утверждение. Если уравнение (I.3.16) конформно инвариантно, и функция F не зависит от u, то это уравнение имеет вид (I.3.7) и заменой (I.3.5) приводится к линейному уравнению $\Box W = 0$.

§ 4. Уравнение эйконала

Одним из основных уравнений геометрической оптики является уравнение эйконала

$$u_\nu u^\nu = F(u), \tag{I.4.1}$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$, F – некоторая дифференцируемая функция.

Симметрия уравнения (I.4.I) при $F \equiv 0$ и $F \equiv 1$ установлена в [58]. При $F \equiv 0$ уравнение (I.4.I) инвариантно относительно бесконечномерной конформной группы преобразований вида

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + a\xi^\mu(x,u) + O(a^2), \quad \mu = \overline{0, n-1}, \\ u' &= u + a\eta(x,u) + O(a^2), \end{aligned} \tag{I.4.2}$$

где

$$\xi^{\mu}(x,u)=-b_{\mu}x_{\nu}x^{\nu}+2x_{\mu}b_{\nu}x^{\nu}+c_{00}x_{\mu}+c_{\mu\lambda}x^{\lambda}+d_{\mu},$$

$$\eta(x,u)=\eta(u), \quad \mu,\nu,\lambda=\overline{0,n-1}, \quad \lambda\neq\mu, \tag{I.4.3}$$

b_{μ}, $c_{\mu\nu}$, d_{μ}, η – произвольные дифференцируемые функции аргумента u, причем $c_{\mu\nu}=-c_{\nu\mu}$, $\mu\neq\nu$.

При $F\equiv 1$ уравнение (I.4.I) инвариантно относительно $\frac{1}{2}(n+2)(n+3)$ – параметрической конформной группы $C(1,n)$, где $x_n=u$. В последнем случае формулы (I.4.3) имеют вид

$$\xi^{\sigma}(x,x_n)=-b_{\sigma}(x_{\nu}x^{\nu}-x_n^2)+2x_{\sigma}(b_{\nu}x^{\nu}-b_n x_n)+c_{00}x_{\sigma}+c_{\sigma\lambda}x^{\lambda}+d_{\sigma}, \tag{I.4.4}$$

где $\sigma,\lambda=\overline{0,n}$, $\sigma\neq\lambda$, $\nu=\overline{0,n-1}$, $\xi^{n}=\eta$, b_{σ}, $c_{\sigma\lambda}$, d_{σ} – произвольные постоянные, $c_{\sigma\lambda}=-c_{\lambda\sigma}$.

Исследуем симметрию уравнения (I.4.I) при произвольной дифференцируемой функции $F(u)$. Для этого рассмотрим два случая

1. $F=const.$
2. $F\neq const.$

Очевидно, что в первом случае уравнение (I.4.I) всегда приводится к одному из таких уравнений

$$u_{\nu}u^{\nu}=1 \tag{I.4.5}$$

или

$$u_{\nu}u^{\nu}=-1. \tag{I.4.6}$$

Как отмечалось выше, симметрия уравнения (I.4.5) исследована, поэтому остается найти симметрию только уравнения (I.4.6).

Применив алгоритм Ли–Овсянникова [24], находим, что для уравнения (I.4.6) формулы (I.4.4) имеют вид

$$\xi^{\sigma}(x,x_n)=-b_{\sigma}(x_{\nu}x^{\nu}+x_n^2)+2x_{\sigma}(b_{\nu}x^{\nu}+b_n x_n)+c_{00}x_{\sigma}+c_{\sigma\lambda}x^{\lambda}+d_{\sigma}\,, \tag{I.4.7}$$

где b_{σ}, $c_{\sigma\lambda}$, d_{σ} – постоянные.

Из (I.4.7) и (I.4.2) получаем, что уравнение (I.4.6) инвариантно относительно конформной группы $C(2,n-1)$.

В случае 2 для определения функций $\xi^{\mu}(x,u)$ и $\eta(x,u)$ методом [24] получаем определяющие уравнения

$$\begin{gathered}\xi^{a}_{0}=\xi^{0}_{a}\,,\ \xi^{0}_{0}=\xi^{1}_{1}=\ldots=\xi^{n-1}_{n-1}\,,\ \ \xi^{a}_{b}=-\xi^{b}_{a}\,,\\ \eta_0=F\xi^{0}_{u}\,,\eta_a=-F\xi^{a}_{u}\,,\ F'\eta=2F(\eta_u-\xi^{0}_{0})\,.\end{gathered} \tag{I.4.8}$$

Если $F(u)=f(u)$, где $f(u)>0$, то решением уравнений (I.4.8) будут функции

$$\begin{aligned}\xi^{\mu}(x,u)=&-b_{\mu}\left[x_{\nu}x^{\nu}-\left(\int\frac{du}{\sqrt{f}}\right)^2\right]+2x_{\mu}\Big(b_{\nu}x^{\nu}-\\ &-b_n\int\frac{du}{\sqrt{f}}\Big)+c_{00}x_{\mu}+c_{\mu\lambda}x^{\lambda}+c_{\mu n}\int\frac{du}{\sqrt{f}}+d_{\mu}\,,\\ \eta(x,u)=&\sqrt{f}\Big\{-b_n\left[x_{\nu}x^{\nu}-\left(\int\frac{du}{\sqrt{f}}\right)^2\right]+2\int\frac{du}{\sqrt{f}}\Big(b_{\nu}x^{\nu}-\\ &-b_n\int\frac{du}{\sqrt{f}}\Big)+c_{00}\int\frac{du}{\sqrt{f}}+c_{n\mu}x^{\mu}+d_n\Big\}\,.\end{aligned} \tag{I.4.9}$$

Аналогично как и в предыдущем параграфе, находим замену, которая переводит алгебру, соответствующую группе (I.4.2) и (I.4.4) в алгебру, соответствующую группе (I.4.2), (I.4.9). Эта замена имеет вид

$$x_n \equiv V = \int \frac{du}{\sqrt{f}} \ . \qquad (I.4.10)$$

Нетрудно непосредственной проверкой убедиться в том, что заменой (I.4.10) уравнение (I.4.I) приводится к уравнению (I.4.5).

Если $F(u) = -f(u)$, $-f(u) > 0$, то уравнение (I.4.I) той же заменой приводится к уравнению (I.4.6).

Таким образом мы снова, как и в § 3, групповыми методами нашли замену, приводящую уравнение (I.4.I) к более простому уравнению (I.4.5) или (I.4.6).

ГЛАВА II

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ СКАЛЯРНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Главным результатом второй главы является нахождение точных решений уравнений Лиувилля, $\sin$-Гордона, Борна-Инфельда, эйконала, нелинейного волнового уравнения.

В основе нашего подхода к отысканию точных решений дифференциальных уравнений лежит формула (см. [38])

$$u(x) = f(x)\varphi(\omega) + g(x),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ - известные функции, $\varphi(\omega)$ - некоторая неизвестная функция от новых переменных $\omega = \omega(x) = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$ (независимых инвариантов группы инвариантности данного дифференциального уравнения), число которых на единицу меньше, чем переменных $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$.

В последнем параграфе этой главы решена задача "размножения" решений для специального нелинейного волнового уравнения и уравнения эйконала.

§ I. "Разделение" переменных

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение в частных производных (ДУЧП)

$$S(x, u) = 0, \qquad (2.I.I)$$

где $x = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in R^n$ - независимые переменные, а $u = u(x)$ - искомая функция.

Решения уравнения (2.I.I) образуют некоторое многообразие

$$\Phi(x,u)=0, \qquad (2.I.2)$$

заданное в пространстве $(x,u)\in \mathcal{Z}=R^n\times R^1$.

Предположим известной и фиксированной некоторую группу Ли G_r преобразований пространства $\mathcal{Z}$

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + a\cdot\xi^\mu(x,u)+O(a^2), \quad \mu=\overline{0,n-1}, \\ u' &= u + a\cdot\eta(x,u)+O(a^2), \end{aligned} \qquad (2.I.3)$$

допускаемую уравнением (2.I.I), причем

$$X=\xi^\mu(x,u)\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} \qquad (2.I.4)$$

инфинитезимальный оператор группы G_r.

Поставим задачу о нахождении решений уравнения (2.I.I), инвариантных относительно группы G_r.

Критерием инвариантности многообразия (2.I.2) относительно группы G_r является условие

$$X\Phi\Big|_{\Phi=0}=0. \qquad (2.I.5)$$

Последнее условие - это линейное ДУЧП первого порядка относительно функции $\Phi(x,u)$. Общее решение уравнения (2.I.5) записывается в виде

$$\Phi(\omega_1,\ldots,\omega_n)=0, \qquad (2.I.6)$$

где $\omega_k=\omega_k(x,u)$, $k=\overline{1,n}$ - фундаментальная система первых интегралов системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\frac{dx_0}{\xi^0(x,u)} = \dots = \frac{dx_{n-1}}{\xi^{n-1}(x,u)} = \frac{du}{\eta(x,u)}, \qquad (2.I.7)$$

соответствующей уравнению (2.I.5). Причем $\omega_k(x,u)$, $k=\overline{1,n}$ по определению (см. [24]) составляют также и фундаментальную систему инвариантов группы G_r .

При нахождении инвариантов $\omega_k(x,u)$ возникает затруднение, заключающееся в том, что интегрирование системы (2.I.7) зависит от значений параметров группы G_r , входящих в функции $\xi^\mu(x,u)$ и $\eta(x,u)$. Вообще говоря, существует бесконечное множество значений этих параметров, при которых получаются различные наборы инвариантов $\omega_k(x,u)$, $k=\overline{1,n}$. Чтобы обойти эту трудность, Овсянников в [21], [24] предложил алгоритмы нахождения так называемых H -инвариантных решений уравнения (2.I.I). Он заключается в том, что находятся решения, инвариантные относительно несопряженных подгрупп группы G_r , из которых посредством продолжения можно получить все остальные решения, соответствующие тому или иному набору параметров группы G_r .

Таким образом вопрос о нахождении инвариантных решений ДУЧП можна было бы считать решенным, но появилась новая трудность, заключащаяся в перечислении всех несопряженных подгрупп группы G_r (или несопряженных подалгебр алгебры A_r , соответствующей группе G_r). Последним вопросам посвящены работы [7], [67] и др. Из этих работ видно, что количество несопряженных подалгебр алгебры A_r резко возростает с увеличением числа независимых переменных x в уравнении (2.I.I). Например, в [67] показано, что алгебра Пуанкаре $P(1,4)$

имеет 264 несопряженные подалгебры. Поэтому даже в случае небольших размерностей $n \leq 4$ только для некоторых алгебр перечислены все несопряженные подалгебры.

Очевидно, что в общем случае задача об интегрировании системы (2.I.7) практически неосуществима даже в таком H - инвариантном подходе.

Мы исследуем частный, однако весьма широкий класс групп G_r, для которых известными методами интегрируется система (2.I.7) и устанавливается критерий существования конечного числа случаев независимых наборов параметров этих групп.

Для простоты рассмотрим случай "разделения" переменных в инвариантах $\omega_k(x,u)$, $k=\overline{1,n}$, особо отмеченный и в [24]. Он заключается в том, что уравнение (2.I.6) содержит только один инвариант, например, ω_n, зависящий от всех переменных x и u, а остальные $n-1$ инвариантов зависят только от переменных x. Т.е.

$$\omega_a=\omega_a(x), \quad a=\overline{1,n-1}, \quad \omega_n=\omega_n(x,u). \tag{2.I.8}$$

Достаточным условием разделения переменных в инвариантах $\omega_k(x,u)$, $k=\overline{1,n}$ является следующая лемма.

Л е м м а 2.I.I. Если в формулах (2.I.3) преобразований группы G_r функции ξ^μ не зависят от переменной u:

$$\xi^\mu=\xi^\mu(x), \quad \mu=\overline{0,n-1}, \tag{2.I.9}$$

то инварианты этой группы имеют вид (2.I.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что при интегрировании первых $n-1$ уравнений системы (2.I.7)

$$\frac{dx_0}{\xi^0(x)} = \cdots = \frac{dx_{n-1}}{\xi^{n-1}(x)} \qquad (2.I.I0)$$

мы получим $n-1$ инвариантов, зависящих только от переменных x : $\omega_a = \omega_a(x)$, $a=\overline{1,n-1}$. Интегрирование последнего уравнения системы (2.I.7) дает $\omega_n = \omega_n(x,u)$.

Инварианты (2.I.8) выделяются потому, что в этом случае инвариантные решения уравнения (2.I.I) имеют вид

$$\omega_n(x,u) = \varphi(\omega), \qquad (2.I.II)$$

где $\omega = \omega(x) = \{\omega_1(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)\}$ или

$$u = F(\varphi(\omega), x). \qquad (2.I.I2)$$

После подстановки (2.I.I2) в (2.I.I) получим уравнение

$$S(\omega, \varphi) = 0 \qquad (2.I.I3)$$

относительно переменных независимых переменных ω и искомой функции φ . Это уравнение содержит на одну переменную меньше чем уравнение (2.I.I). Если известно решение уравнения (2.I.I3), то решение уравнения (2.I.I) получаем из формулы (2.I.I2).

Возвратимся теперь снова к вопросу интегрирования системы ОДУ (2.I.7). Мы будем рассматривать только те группы, для которых ξ^μ являются линейными функциями переменных x :

$$\xi^\mu(x) = c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu, \quad \mu = \overline{0,n-1}, \qquad (2.I.I4)$$

где $c_{\mu\nu}$ и d_μ , $\mu,\nu = \overline{0,n-1}$ – постоянные параметры группы. Самой широкой группой, для которой выполняются условия

(2.I.I4), является группа линейных неоднородных преобразований $\mathcal{Y}GL(n,R)$. Эта группа содержит в себе в качестве подгрупп группы Вейля $W(1,n-1)$, Пуанкаре $P(1,n-1)$, Галилея $G(n)$, Лоренца $O(1,n-1)$, группу вращений n-мерного пространства $O(n)$ и др.

Выделение группы $\mathcal{Y}GL(n,R)$ и перечисленных ее подгрупп существенно по двум причинам. Во-первых многие дифференциальные уравнения математической физики инвариантны относительно этих групп. Уравнения, описывающие релятивистские процессы, как правило, инвариантны относительно группы Пуанкаре $P(1,n-1)$ или группы Лоренца $O(1,n-1)$, а уравнения нерелятивистской физики инвариантны относительно группы Галилея $G(n)$. Во-вторых представление этих групп, т.е. выполнение условий (2.I.I4) дает возможность перечислить все независимые решения системы (2.I.7). Этот факт устанавливается следующей леммой.

Л е м м а 2.I.2. Если в формулах (2.I.3) функции ξ^{μ} имеют вид (2.I.I4), то количество независимых решений системы (2.I.7) конечно и полностью перечисляется количеством различных корней $\vec{\lambda}$ характеристического уравнения

$$\det \| A - \lambda E \| = 0, \tag{2.I.I5}$$

где $A = \| C_{\mu\lambda} \|$ – матрица размерности $n-1 \times n-1$, E – единичная матрица, $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем следующее обозначение

$$\frac{dx_0}{\xi^0} = \cdots = \frac{dx_{n-1}}{\xi^{n-1}} = \frac{du}{\eta} = dt. \tag{2.I.I6}$$

Тогда система (2.I.I6) будет эквивалентна системе ОДУ первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\dot{X} = AX + B, \tag{2.I.I7}$$

где $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$, $\dot{x}_\mu = \dfrac{dx_\mu}{dt}$, $\mu = \overline{0, n-1}$ и дифференциального уравнения

$$\dot{u} = \eta(x, u). \tag{2.I.I8}$$

Так как утверждение леммы справедливо для системы (2.I.I7), то оно будет справедливо и для системы (2.I.7). Лемма доказана.

В последующих параграфах этой главы на основании предидущих рассуждений найдены инвариантные решения нелинейного волнового уравнения, уравнения Лиувилля, синус Гордона, Борна-Инфельда и эйконала. Для всех этих уравнений, кроме последнего, решение ищем в виде (см. [38])

$$u(x) = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \tag{2.I.I9}$$

где $\omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}\}$ – инварианты группы G_p, $f(x)$ и $g(x)$ – известные функции, а $\varphi(\omega)$ – неизвестная функция, для нахождения которой необходимо решить уравнение (2.I.I3).

§ 2. Нелинейные волновые уравнения, инвариантные относительно алгебры $\widetilde{P}(1, n-1)$.

Рассмотрим волновое уравнение следующего вида

$$\Box u + F(x, u) = 0, \tag{2.2.I}$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$, F – некоторая дифференцируемая функция.

Как отмечалось в I главе, требование конформной инвариантности уравнения (2.2.I) очень жесткое по отношению к функции F (см. § I, гл.I). В то же время хорошо известно, что уравнение (2.2.I) инвариантно относительно группы Пуанкаре $P(1,n-1)$ при произвольной функции $F = F(u)$. В этом параграфе мы исследуем при каких $F(x,u)$ уравнение (2.2.I) инвариантно относительно обобщенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,n-1) \equiv \{P(1,n-1), D\}$ – группы Пуанкаре и масштабных преобразований.

Т е о р е м а 2.2.I. Нелинейное волновое уравнение (2.2.I) инвариантно относительно алгебры $\tilde{P}(1,n-1)$ тогда и только тогда, когда

I. $F(x,u) = \lambda_1 u^k$, λ_1 и k – произвольные постоянные,

2. $F(x,u) = \lambda_2 \exp u$, λ_2 – произвольная постоянная, $n \geqslant 3$, причем в обеих случафх операторы алгебры Пуанкаре $P(1,n-1)$ имеют стандартный вид

$$p_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad \mu,\nu = \overline{0, n-1}, \qquad (2.2.2)$$

а оператор дилатации задается формулой

$$D = x_\nu p^\nu + \frac{2i}{1-k} u \frac{\partial}{\partial u} \qquad (2.2.3)$$

и

$$D = x_\nu p^\nu - 2i \frac{\partial}{\partial u} \qquad (2.2.4)$$

в первом и втором случае соответственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим метод [24]. Так как уравнение (2.2.I) линейное относительно производных, то инфинитезимальный оператор группы инвариантности будет иметь вид

$$X=\xi^{\mu}(x)\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}+[a(x)u+b(x)]\frac{\partial}{\partial u}. \qquad (2.2.5)$$

I. Необходимость. Пусть уравнение (2.2.I) инвариантно относительно алгебры $\tilde{P}(1,n-1)$. Покажем, что тогда $F(x,u)=\lambda_1 u^k$ или $F(x,u)=\lambda_2 \exp u$.

Использовав условие инвариантности уравнения (2.2.I) (см. [24]) после довольно громоздких преобразований получим определяющие уравнения для функций $\xi^{\mu}(x)$, $\mu=\overline{0,n-1}$, $a(x)$, $b(x)$ и $F(x,u)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_{\mu}}=0,\ \xi^0_a=\xi^a_0,\ \xi^a_b=-\xi^b_a,\ \xi^0_0=\xi^1_1=\dots=\xi^{n-1}_{n-1}, \qquad (2.2.6)$$
$$2g_{\mu\nu}a_\nu=\Box\xi^{\mu},\ [a(x)u+b(x)]\frac{\partial F}{\partial u}-[a(x)-2\xi^0_0]F+$$
$$+\Box(a(x)u+b(x))=0,$$

где $\mu,\nu=\overline{0,n-1}$, $a,b=\overline{1,n-1}$, $a\neq b$, индекс внизу означает дифференцирование по соответственному аргументу.

Из уравнений (2.2.6) с учетом того, что уравнение (2.2.I) инвариантно относительно алгебры $P(1,n-1)$ получим

$$\xi^{\mu}(x)=c_{00}x_{\mu}+c_{\mu\lambda}x^{\lambda}+d_{\mu},\ a(x)=a=const,\ b(x)=b=const, \qquad (2.2.7)$$

а функция F удовлетворяет уравнению

$$(au+b)\frac{\partial F}{\partial u}+(2c_{00}-a)F=0. \qquad (2.2.8)$$

В формулах (2.2.7) и (2.2.8) $c_{\mu\nu}$, d_{μ} — постоянные параметры, $\lambda, \mu = \overline{0, n-1}$, $\mu \neq \lambda$, $c_{\mu\lambda} = -c_{\lambda\mu}$.

Так как в уравнение (2.2.8) входит только параметр дилатации C_{oo}, то отсюда вытекает, что алгебра $P(1,n-1)$ допускается при любых $F = F(u)$.

Решим теперь уравнение (2.2.8). Возможны два независимых случая

I. $a \neq 0$, $b = 0$.

2. $a = 0$, $b \neq 0$.

В первом случае решением уравнения (2.2.8) будет функция

$$F = \lambda_1 u^{1 - \frac{2C_{oo}}{a}}, \tag{2.2.9}$$

а во втором

$$F = \lambda_2 \exp\left(-\frac{2C_{oo}}{a} u\right). \tag{2.2.10}$$

Выбрав в формулах (2.2.9) и (2.2.10)

$$1 - \frac{2C_{oo}}{a} = k \quad \text{и} \quad b = -2C_{oo}$$

получим утверждение теоремы.

Для завершения доказательства рассмотрим случай уравнения (2.2.8) при $a \neq 0$, $b \neq 0$ и покажем, что он приводится к случаю I. Кроме того, в уравнении (2.2.10), вообще говоря $-\frac{2C_{oo}}{b} = \alpha \neq 1$. Покажем так же, что этот случай сводится к случаю $\alpha = 1$.

Если в уравнении (2.2.8) $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то его общее решение имеет вид

$$F = \lambda_1 \left(u + \frac{b}{a}\right)^k.$$

Тогда уравнение (2.2.I)

$$\Box \mathcal{U} + \lambda_1 \left(\mathcal{U} + \frac{b}{a}\right)^k = 0$$

заменой $V = \mathcal{U} + \frac{b}{a}$ приводится к уравнению

$$\Box V + \lambda_1 V^k = 0.$$

Если $-\frac{2C_{00}}{b} = \alpha$, то уравнение (2.2.I)

$$\Box \mathcal{U} + \lambda_2 \exp(\alpha \mathcal{U}) = 0$$

заменой $\alpha \mathcal{U} = V$ приводится к уравнению

$$\Box V + \lambda_3 \exp V = 0,$$

где $\lambda_3 = \alpha \lambda_2$. Необходимость доказана.
Достаточность доказывается непосредственной проверкой при помощи алгоритма Ли-Овсянникова [24].

З а м е ч а н и е 2.2.I. При $n=2$ уравнение Лиувилля

$$\Box \mathcal{U} + \lambda \exp \mathcal{U} = 0, \tag{2.2.II}$$

где $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x)$, $x = (x_0, x_1)$, инвариантно относительно бесконечномерной группы Ли вида (2.I.3), где

$$\begin{aligned} \xi^0(x) &= F(x_0 + x_1) + G(x_0 - x_1), \\ \xi^1(x) &= F(x_0 + x_1) - G(x_0 - x_1) + c_1, \\ \eta(x) &= -2 \frac{\partial}{\partial x_0} \xi^0(x), \end{aligned} \tag{2.2.I2}$$

F и G - произвольные дифференцируемые функции.

§ 3. Точные решения волнового уравнения со степенной нелинейностью

В этом параграфе мы рассмотрим уравнение

$$\Box u + \lambda u^{k} = 0, \qquad (2.3.I)$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$, λ, k – постоянные, $n \geqslant 2$, $k \neq 1,2$, $\lambda \neq 0$.

Из теоремы 2.2.I имеем, что максимальной алгеброй инвариантности (МАИ) уравнения (2.3.I) есть алгебра $\tilde{P}(1, n-1)$ с операторами (2.2.2)–(2.2.3). Кроме того инфинитезимальный вид преобразований группы $\tilde{P}(1, n-1)$ для уравнения (2.3.I) имеет вид (2.I.3) при

$$\xi^{\mu} = c_{00} x_{\mu} + c_{\mu\lambda} x^{\lambda} + d_{\mu}, \qquad (2.3.2\ а)$$

$$\eta = \frac{2c_{00}}{1-k} u, \qquad (2.3.2\ б)$$

где $\mu, \lambda = \overline{0, n-1}$, $\mu \neq \lambda$, $c_{\mu\lambda} = -c_{\lambda\mu}$.

Так как формулы (2.3.2 а) являются частным случаем формул (2.I.I4), то для нахождения точных решений уравнения (2.3.I) можно применить метод, предложенный в § I главы П. Причем из явного вида η (2.3.2 б) следует, что формула (2.I.I9) имеет вид

$$u(x) = f(x)\varphi(\omega). \qquad (2.3.3)$$

Ниже мы отдельно рассмотрим случаи $n=2$, $n=3$, $n=4$, $n \geqslant 5$, где n – количество независимых переменных в уравнении (2.3.I).

А. $n=2$, $x=(x_0,x_1)$.

Уравнение (2.3.I) имеет вид

$$u_{00}-u_{11}+\lambda u^{k}=0. \qquad (2.3.4)$$

Запишем уравнения Лагранжа

$$\frac{dx_0}{c_{00}x_0+c_{01}x_1+d_0}=\frac{dx_1}{c_{01}x_0+c_{00}x_1+d_1}=\frac{du}{\frac{2c_{00}}{1-k}u}. \qquad (2.3.5)$$

В зависимости от соотношений между коэффициентами $c_{\mu\nu}$ и d_μ, $\mu=\overline{0,n-1}$, имеем случаи:

а) $\omega=(y_0-y_1)(y_0+y_1)^{a}$, $f(x)=(y_\nu y^\nu)^{\frac{1}{1-k}}$, $y_\mu=x_\mu+a_\mu$, a_μ, a – постоянные.

Для функции $\varphi(\omega)$ получим уравнение

$$4a\omega^2\varphi_{\omega\omega}+4\left(a+\frac{a+1}{1-k}\right)\omega\varphi_\omega+\frac{4}{(1-k)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0, \qquad (2.3.6)$$

которое заменой

$$\varphi_t=y(x),\ x=\varphi,\ t=-\frac{1}{k-1}\ln\omega \qquad (2.3.7)$$

приводится к уравнению I-го порядка относительно функции

$$ayy'+(a+1)y+x+\frac{\lambda}{4}(1-k)^2x^k=0. \qquad (2.3.8)$$

б) $\omega=y_0\mp y_1+a\ln(y_0\pm y_1)$, $f(x)=(y_0\pm y_1)^{\frac{1}{1-k}}$.

Функция $\varphi(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$4a\varphi_{\omega\omega}+\frac{4}{1-k}\varphi_\omega+\lambda\varphi^k=0, \qquad (2.3.9)$$

которое заменой

$$\varphi_\omega=y(x),\ x=\varphi \qquad (2.3.10)$$

приводится к уравнению

$$a y y' + \frac{1}{1-k} y + \frac{\lambda}{4} x^k = 0. \qquad (2.3.11)$$

в) $\omega = y_0 \mp y_1$, $f(x) = (y_0 \pm y_1)^{\frac{1}{1-k}}$.

Функция $\varphi(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{4}{1-k} \varphi_\omega + \lambda \varphi^k = 0, \qquad (2.3.12)$$

общее решение которого имеет вид

$$\varphi = \left[c - \frac{\lambda}{4}(1-k)^2 \omega\right]^{\frac{1}{1-k}}, \qquad (2.3.13)$$

где c - постоянная интегрирования.

Тогда, учитывая (2.3.3) имеем решение уравнения (2.3.4):

$$u = \alpha \left[x_\nu x^\nu + c_0(x_0 + x_1) + c_1(x_0 - x_1) + c_0 c_1\right]^{\frac{1}{1-k}}, \qquad (2.3.14)$$

где $\alpha = \left[-\frac{\lambda}{4}(1-k)^2\right]^{\frac{1}{1-k}}$, c_0 , c_1 - постоянные.

г) $\omega = y_\nu y^\nu$, $f(x) = 1$.

Функция $\varphi(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\omega \varphi_{\omega\omega} + \varphi_\omega + \frac{\lambda}{4} \varphi^k = 0, \qquad (2.3.15)$$

частное решение которого

$$\varphi = \left[-\frac{\lambda}{4}(1-k)^2 \omega\right]^{\frac{1}{1-k}}. \qquad (2.3.16)$$

Решение уравнения (2.3.4), полученное из (2.3.3) и (2.3.16), совпадает с решением (2.3.14).

д) $\omega = \frac{y_1}{y_0}$, $f(x) = y_0^{\frac{2}{1-k}}$.

Функция $\varphi(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$(\omega^2-1)\varphi_{\omega\omega}+2\frac{k+1}{k-1}\omega\varphi_\omega+\frac{2(k+1)}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0. \qquad (2.3.17)$$

е) $\omega=d_\nu x^\nu$, $f(x)=1$, $d_\nu d^\nu=a=\frac{-\lambda(1-k)^2}{2(1+k)}$.

Функцияя $\varphi(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$a\varphi_{\omega\omega}+\lambda\varphi^k=0, \qquad (2.3.18)$$

общее решение которого задается эллиптическим интегралом

$$\int_0^\varphi\frac{dx}{\sqrt{c_1+x^{k+1}}}=\frac{\pm 2}{1-k}\omega+c_2, \qquad (2.3.19)$$

где c_1 , c_2 – постоянные.

В частности, при $c_1=0$ получим

$$\varphi=[c_2+\omega]^{\frac{2}{1-k}}. \qquad (2.3.20)$$

Тогда

$$u=(d_\nu x^\nu+c_2)^{\frac{2}{1-k}} - \qquad (2.3.21)$$

решение уравнения (2.3.4).

В). $n=3$, $x=(x_0,x_1,x_2)$.

Уравнение (2.3.1) имеет вид

$$u_{00}-u_{11}-u_{22}+\lambda u^k=0. \qquad (2.3.22)$$

Как и в пункте А, в зависимости от соотношений между коэффициентами группы $c_{\mu\nu}$ и d_μ , $\mu,\nu=\overline{0,2}$, будем иметь случаи:

а) $\omega_1 = \dfrac{\alpha_\nu y^\nu}{(\beta_\nu y^\nu)^a}$, $\omega_2 = \dfrac{y_\nu y^\nu}{(\beta_\nu y^\nu)^2}$, $f(x) = (\beta_\nu y^\nu)^{\frac{2}{1-k}}$,

α_ν , β_ν – постоянные, $\alpha_\nu \alpha^\nu = \alpha_\nu \beta^\nu = 0$, $\beta_\nu \beta^\nu = b \neq 0$.
Функция $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ удовлетворяет уравнению

$$a^2 b \omega_1^2 \varphi_{11} + 4\omega_1(ab\omega_2 - a + 1)\varphi_{12} + 4\omega_2(b\omega_2 - 1)\varphi_{22} +$$
$$+ ab\left(a + 1 - \frac{4}{k-1}\right)\omega_1 \varphi_1 + \frac{2}{1-k}\left((3k+1)b\omega_2 - 2(k+1)\right)\varphi_2 + \tag{2.3.23}$$
$$+ 2b\frac{k+1}{(k-2)^2}\varphi + \lambda\varphi^k = 0.$$

Если предположить, что в уравнении (2.3.23) $\varphi = \varphi(\omega_1)$, то оно будет иметь вид

$$a^2 b \omega_1^2 \varphi_{11} + ab\omega_1\left(a + 1 + \frac{4}{k-1}\right)\varphi_1 + 2b\frac{k+1}{(k-1)^2}\varphi + \lambda\varphi^k = 0 \tag{2.3.24}$$

и заменой

$$\varphi = y(x)\cdot x^{\frac{k+1}{k-1}} , \quad x = \omega_1^{-1/a} \tag{2.3.25}$$

приводится к уравнению Эмдена-Фаулера

$$xy'' + 2y' + \frac{\lambda}{b} x^k y^k = 0. \tag{2.3.26}$$

б) $\omega_1 = \dfrac{\beta_\nu x^\nu}{\alpha_\nu y^\nu} + \ln \alpha_\nu y^\nu$, $\omega_2 = \dfrac{y_\nu y^\nu}{(\alpha_\nu y^\nu)^2}$, $f(x) = (\alpha_\nu y^\nu)^{\frac{2}{1-k}}$,

$\alpha_\nu \alpha^\nu = \alpha_\nu \beta^\nu = 0$, $\beta_\nu \beta^\nu = b = \dfrac{-\lambda(1-k)^2}{2(1+k)}$.

Функция $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ удовлетворяет уравнению

$$b\varphi_{11}+4\varphi_{12}-4\omega_2\varphi_{22}-2\frac{k+3}{k-1}\varphi_2+\lambda\varphi^k=0. \qquad (2.3.27)$$

Если $\varphi=\varphi(\omega_1)$, то уравнение (2.3.27) будет иметь вид (2.3.18). Тогда из (2.3.19)–(2.3.20) получим решение уравнения (2.3.22):

$$u=\left[\beta_\nu y^\nu+\alpha_\nu y^\nu(c_2+\ln\alpha_\nu y^\nu)\right]^{\frac{2}{1-k}}. \qquad (2.3.28)$$

Если $\varphi=\varphi(\omega_2)$, то из (2.3.27) получим уравнение

$$4\omega_2\varphi_{22}+2\frac{k+3}{k-1}\varphi_2-\lambda\varphi^k=0, \qquad (2.3.29)$$

частное решение которого

$$\varphi=\left[\frac{\lambda(k-1)^2}{2(k-3)}\,\omega_2\right]^{\frac{1}{1-k}}. \qquad (2.3.30)$$

Тогда

$$u=\left[\frac{\lambda(k-1)^2}{2(k-3)}\,y_\nu y^\nu\right]^{\frac{1}{1-k}} \qquad (2.3.31)$$

решение уравнения (2.3.22).

в) $\omega_1=\ln\alpha_\nu y^\nu+b\,\mathrm{arctg}\,\frac{\gamma_\nu y^\nu}{\beta_\nu y^\nu}$, $\omega_2=\frac{y_\nu y^\nu}{(\alpha_\nu y^\nu)^2}$, $f(x)=(\alpha_\nu y^\nu)^{\frac{2}{1-k}}$,

$\alpha_\nu\alpha^\nu=a\neq 0$, $\alpha_\nu\beta^\nu=\alpha_\nu\gamma^\nu=\beta_\nu\gamma^\nu=0$, $\beta_\nu\beta^\nu=\gamma_\nu\gamma^\nu=c\neq 0$,

$(\beta_\nu y^\nu)^2+(\gamma_\nu y^\nu)^2=c\left[(\beta_\nu y^\nu)^2-a\,y_\nu y^\nu\right].$

Функция $\varphi(\omega_1,\omega_2)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(a-\frac{1}{a\omega_2-1}\right)\varphi_{11}-4(a\omega_2-1)(\varphi_{12}-\omega_2\varphi_{22})+a\frac{3+k}{1-k}\varphi_1+$$
$$+4\left(\frac{1+k}{1-k}-\frac{3-k}{1-k}a\omega_2\right)\varphi_2+2a\frac{1+k}{(1-k)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0 \tag{2.3.32}$$

г) $\omega_1=\beta_\nu y^\nu e^{\alpha_\nu y^\nu}$, $\omega_2=\dfrac{\beta_\nu y^\nu}{\sqrt{\gamma_\nu z^\nu}}$, $f(x)=(\beta_\nu y^\nu)^{\frac{2}{1-k}}$,

где $z_\nu=x_\nu+\frac{1}{2}a_\nu$, $\alpha_\nu\alpha^\nu=\alpha_\nu\beta^\nu=\beta_\nu\gamma^\nu=\gamma_\nu\gamma^\nu=0, \alpha_\nu\gamma^\nu\neq 0, \alpha_\nu\beta^\nu=b\neq 0.$

Функция $\varphi(\omega_1,\omega_2)$ удовлетворяет уравнению

$$\omega_1^2\varphi_{11}+2\omega_1\omega_2(a\omega_1^2+1)\varphi_{12}+\omega_2^2\varphi_{22}+$$
$$+\frac{4}{1-k}(\omega_1\varphi_1+\omega_2\varphi_2)+\frac{2(1+k)}{(1-k)^2}\varphi+\frac{\lambda}{b}\varphi^k=0, \tag{2.3.33}$$

где $a=\dfrac{\alpha_\nu\gamma^\nu}{2b}$.

Если $\varphi=\varphi(\omega_a)$, $a=1,2$, то из (2.3.33) получим

$$\omega_a^2\varphi_{aa}+\frac{4}{1-k}\omega_a\varphi_a+2\frac{1+k}{(1-k)^2}\varphi+\frac{\lambda}{b}\varphi^k=0. \tag{2.3.34}$$

Тогда заменой

$$\varphi=\omega_a^{\frac{k+1}{k-1}}y(\omega_a) \tag{2.3.35}$$

уравнения (2.3.34) приводятся к уравнению Эмдена-Фаулера (2.3.26).

д) $\omega_1=(\beta_\nu y^\nu)^2+y_\nu y^\nu$, $\omega_2=\beta_\nu y^\nu+a\ln\alpha_\nu y^\nu$, $f(x)=1$,

$$\alpha_\nu \alpha^\nu = \alpha_\nu \beta^\nu = 0, \quad \beta_\nu \beta^\nu = 1.$$

Функция $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ удовлетворяет уравнению

$$4\omega_1 \varphi_{11} + 4a\varphi_{12} - \varphi_{22} + 4\varphi_1 + \lambda\varphi^k = 0. \qquad (2.3.36)$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_1)$, то из (2.3.36) получим уравнение

$$\omega_1 \varphi_{11} + \varphi_1 + \frac{\lambda}{4}\varphi^k = 0, \qquad (2.3.37)$$

частное решение которого

$$\varphi = \left[-\frac{\lambda}{4}(1-k)^2 \omega_1\right]^{\frac{1}{1-k}}. \qquad (2.3.38)$$

Тогда

$$u = \left\{-\frac{\lambda}{4}(1-k)^2\left[(\beta_\nu y^\nu)^2 + y_\nu y^\nu\right]\right\}^{\frac{1}{1-k}} - \qquad (2.3.39)$$

решение уравнения (2.3.22).

Если $\varphi = \varphi(\omega_2)$, то для определения функции φ получим уравнение (2.3.I8), решение которого дается формулами (2.3.I9)–(2.3.20). Тогда решение уравнения (2.3.22) будет иметь вид

$$u = \left[c_2 \pm (1-k)\sqrt{\frac{-\lambda}{2(1+k)}}\,(\beta_\nu y^\nu + a \ln \alpha_\nu y^\nu)\right]^{\frac{2}{1-k}}.$$

е) $\omega_1 = (\beta_\nu y^\nu)^2 + y_\nu y^\nu$, $\omega_2 = \beta_\nu y^\nu + b \operatorname{arctg} \dfrac{\gamma_\nu y^\nu}{\alpha_\nu y^\nu}$, $f(x) = 1$,

$\alpha_\nu \alpha^\nu = \gamma_\nu \gamma^\nu \neq 0$, $\alpha_\nu \beta^\nu = \alpha_\nu \gamma^\nu = \beta_\nu \gamma^\nu = 0$, $\beta_\nu \beta^\nu = -1$,

$(\alpha_\nu y^\nu)^2 + (\gamma_\nu y^\nu)^2 = -\omega_1$.

Функция $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ удовлетворяет уравнению

$$4\omega_1\varphi_{11}+\left(\frac{b^2}{\omega_1}-1\right)\varphi_{22}+4\varphi_1+\lambda\varphi^k=0. \qquad (2.3.40)$$

ж) $\omega_1=\frac{1}{2}(\alpha_\nu y^\nu)^2+a\beta_\nu y^\nu,\ \omega_2=\frac{1}{3}(\alpha_\nu y^\nu)^3+a\alpha_\nu y^\nu\beta_\nu y^\nu+a^2\gamma_\nu y^\nu,$

$f(x)=1,\ \alpha_\nu\alpha^\nu=\alpha_\nu\beta^\nu=\beta_\nu\gamma^\nu=0,\ \alpha_\nu\gamma^\nu=-\beta_\nu\beta^\nu=\gamma_\nu\gamma^\nu=b=\frac{\lambda(1-k)^2}{2(1+k)}.$

Функция $\varphi(\omega_1,\omega_2)$ удовлетворяет уравнению

$$-\varphi_{11}+(2\omega_1+a^2)\varphi_{22}+\frac{\lambda}{a^2b}\varphi^k=0 \qquad (2.3.41)$$

При $\varphi=\varphi(\omega_1)$ получим результаты (2.3.18)-(2.3.20). Тогда

$$u=\left[\beta_\nu y^\nu+\frac{1}{2a}(\alpha_\nu y^\nu)^2+c_2\right]^{\frac{2}{1-k}} - \qquad (2.3.42)$$

решение уравнения (2.3.22).

з) $\omega_1=\alpha_\nu x^\nu,\ \omega_2=x_\nu x^\nu,\ f(x)=1,\ \alpha_\nu\alpha^\nu=a\neq 0.$

Функция $\varphi(\omega_1,\omega_2)$ удовлетворяет уравнению

$$a\varphi_{11}+4\omega_1\varphi_{12}+4\omega_2\varphi_{22}+b\varphi_2+\lambda\varphi^k=0. \qquad (2.3.43)$$

При $\varphi=\varphi(\omega_1)$ или $\varphi=\varphi(\omega_2)$ полученные результаты совпадают с (2.3.21), (2.3.31).

и) $\omega_1=\frac{\beta_\nu y^\nu}{\alpha_\nu y^\nu},\ \omega_2=\frac{\gamma_\nu y^\nu}{\alpha_\nu y^\nu},\ f(x)=(\alpha_\nu y^\nu)^{\frac{2}{1-k}}$

$\alpha_\nu\alpha^\nu=a,\ \beta_\nu\beta^\nu=b,\ \gamma_\nu\gamma^\nu=c,\ \alpha_\nu\beta^\nu=\alpha_\nu\gamma^\nu=\beta_\nu\gamma^\nu=0.$

Функция $\varphi(\omega_1,\omega_2)$ удовлетворяет уравнению

$$(a\omega_1^2+b)\varphi_{11}+2a\omega_1\omega_2\varphi_{12}+(a\omega_2^2+c)\varphi_{22}+$$

$$+2a\frac{k+1}{k-1}(\omega_1\varphi_1+\omega_2\varphi_2)+2a\frac{k+1}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0 \qquad (2.3.44)$$

к) $\omega_1 = \alpha_\nu x^\nu$, $\omega_2 = \beta_\nu x^\nu$, $f(x) = 1$, $\alpha_\nu\alpha^\nu = -\beta_\nu\beta^\nu = 1$, $\alpha_\nu\alpha'^\nu = 0$.

Функция $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ удовлетворяет двумерному уравнению (2.3.I)

$$\varphi_{11} - \varphi_{22} + \lambda\varphi^k = 0. \qquad (2.3.45)$$

Выше мы получили несколько решений уравнения (2.3.22) предполагая, что $\varphi = \varphi(\omega_2)$. В этом случае уравнения для функции φ были обыкновенными дифференциальными уравнениями и некоторые из них удалось решить. Если $\varphi = \varphi(\omega_1, \omega_2)$, то для функции φ имеем дифференциальное уравнение в частных производных. Попытаемся найти их решения тем же методом, что и исходного уравнения. Т.е. применим второй шаг исследования симметрии.

Проиллюстрируем это на примере уравнения (2.3.43). Прежде всего приведём его к каноническому виду. Заменой

$$t_0 = \sqrt{\omega_1^2 - a\omega_2}, \quad t_1 = \omega_1$$

уравнение (2.3.43) приводится к нелинейному уравнению Дарбу вида

$$\varphi_{00} - \varphi_{11} + \frac{\varphi_0}{t_0} + \mu\varphi^k = 0, \qquad (2.3.46)$$

где $\varphi_0 = \frac{\partial\varphi}{\partial t_0}$, $\varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}$, $\mu = -\frac{\lambda}{a}$.

Т е о р е м а 2.3.I. Нелинейное уравнение Дарбу (2.3.46) инвариантно относительно группы преобразований (2.I.3), где функции $\xi^\mu(t)$, $\eta(t,\varphi)$ задаются формулами

$$\xi^0(t) = C_{00}t_0, \quad \xi^1(t) = C_{00}t_1 + d_1, \quad \eta(t,\varphi) = \frac{2C_{00}}{[illegible]} \qquad (2.3.47)$$

где $t=(t_0,t_1)$.

Т е о р е м а 2.3.2. Нелинейное уравнение Дарбу

$$\Box u + \lambda_1 \frac{u_0}{x_0} + \lambda_2 u^k = 0, \tag{2.3.4}$$

где $u=u(x)$, $x=(x_0,\ldots,x_{n-1})$, λ_1, λ_2, k – постоянны при

I) $n \geqslant 2$, $k=\dfrac{n+2+\lambda_1}{n-2+\lambda_1}$, $\lambda_2 \neq 2-n$ (2.3.4

инвариантно относительно конформной алгебры $C(n-1)$ с операторами

$$P_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a},\ J_{ab}=x_aP_b-x_bP_a,\ D=x_\nu P^\nu+\frac{n-2+\lambda_1}{2}i,$$

$$K_a=2x_aD-x_\nu x^\nu P_a,\quad a,b=\overline{1,n-1}. \tag{2.3.}$$

2) $k \neq \dfrac{n+2+\lambda_1}{n-2+\lambda_1}$

инвариантно относительно алгебры Вейля $W(n-1)$ с операт

$$P_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a},\ J_{ab}=x_aP_b-x_bP_a,\ D=x_\nu P^\nu+\frac{2i}{k-1}. \tag{2.3.}$$

В формулах (2.3.50)–(2.3.5I) $P_0=i\dfrac{\partial}{\partial x_0}$.

Теоремы 2.3.I и 2.3.2 доказываются методом Ли–Овсянникова [

Исходя из формул (2.3.47), решения уравнения (2.3.46) ищем в виде

$$\varphi(t)=\psi(w)\,g(t), \tag{2.3.}$$

где $W=\frac{t_1+\frac{d_1}{c_{00}}}{t_0}$, $g(t)=t_0^{\frac{2}{1-k}}$, а функция $\psi(W)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(1-W^2)\psi_{WW}+\frac{3+k}{1-k}W\psi_W-\frac{4}{(1-k)^2}\psi-\mu\psi^k=0. \qquad (2.3.53)$$

Если известно решение уравнения (2.3.53), то решение уравнения (2.3.22) получаем по формулам (2.3.3), (2.3.52). В частности, при $k=5$, уравнение (2.3.53) будет нелинейным уравнением Лежандра:

$$\frac{d}{dW}\left[(1-W^2)\frac{d\psi}{dW}\right]-\frac{1}{4}\psi-\mu\psi^5=0 \qquad (2.3.54)$$

В заключение этого параграфа приведем решения уравнения (2.3.I), содержащие произвольные функции. Наличие таких решений позволяет решать довольно широкий класс краевых и начальных задач для уравнения (2.3.I).

Из полученных решений уравнения (2.3.I) видно, что они, как правило, имеют вид

$$u=[f(y)+g(z)]^{\alpha}, \qquad (2.3.55)$$

где α принимает значения $\frac{1}{1-k}$, $\frac{2}{1-k}$, а $y=(y^0,\dots,y^{n-1})$, $z=(z^0,\dots,z^{n-1})$, $y^\mu=y^\mu(x)$, $z^\mu=z^\mu(x)$, $\mu=\overline{0,n-1}$.

Решения уравнения (2.3.I) будем теперь искать в виде (2.3.55). После подстановки (2.3.55) в (2.3.I) получим, что функции f, g, y^μ и z^μ, $\mu=\overline{0,n-1}$, должны удовлетворять уравнению

$$
\begin{aligned}
&(\alpha-1)F_\mu F^\mu + (f+g)(f_{\nu\lambda}\, y^\nu_\mu\, y^{\lambda\mu} + g_{\nu\lambda}\, z^\nu_\mu\, z^{\lambda\mu} + \\
&+ f_\nu \Box y^\nu + g_\nu \Box z^\nu) + \frac{\lambda}{\alpha}(f+g)^{\alpha(k-1)+2} = 0,
\end{aligned}
\qquad (2.3.56)
$$

где

$$
\begin{aligned}
&F_\mu = f_\nu\, y^\nu_\mu + g_\nu\, z^\nu_\mu\,, \\
&f_\nu = \frac{\partial f}{\partial y^\nu}\,, \quad f_{\nu\lambda} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^\nu \partial y^\lambda}\,, \\
&g_\nu = \frac{\partial g}{\partial z^\nu}\,, \quad g_{\nu\lambda} = \frac{\partial^2 g}{\partial z^\nu \partial z^\lambda}\,, \\
&y^\nu_\mu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x_\mu}\,, \quad z^\nu_\mu = \frac{\partial z^\nu}{\partial x_\mu}\,, \quad \mu, \nu, \lambda = \overline{0, n-1}.
\end{aligned}
$$

Приведем несколько частных решений уравнения (2.3.55).

а) $n \geq 3$, $\alpha = \frac{1}{1-k}$.

$$
\begin{aligned}
&f(y) = (y^0 + c)^2, \\
&g(z) = z^0 z^1, \\
&y^0 = \alpha_\nu x^\nu, \quad z^0 = \beta_\nu x^\nu, \quad z^1 = \gamma_\nu x^\nu,
\end{aligned}
\qquad (2.3.57)
$$

где c, α_ν, β_ν, γ_ν, $\nu = \overline{0, n-1}$ — постоянные, удовлетворяющие условиям

$$
\alpha_\nu \beta^\nu = \alpha_\nu \gamma^\nu = \beta_\nu \beta^\nu = \gamma_\nu \gamma^\nu = 0, \quad 2\alpha_\nu \alpha^\nu = \beta_\nu \gamma^\nu = \frac{\lambda (k-1)^2}{k-3}.
$$

б) $n \geq 3$, $\alpha = \frac{2}{1-k}$.

$$
\begin{aligned}
&f(y) = y^1 \varphi(y^0), \quad g(z) = z^1 \psi(z^0), \\
&y^0 = z^0 = \alpha_\nu x^\nu, \quad y^1 = \beta_\nu x^\nu, \quad z^1 = \gamma_\nu x^\nu,
\end{aligned}
\qquad (2.3.58
$$

где φ и ψ – произвольные дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию

$$\varphi^2+\psi^2 = \frac{\lambda(k-1)^2}{2(k+1)}, \tag{2.3.59}$$

а $\alpha_\nu\alpha^\nu=\alpha_\nu\beta^\nu=\alpha_\nu\gamma^\nu=\beta_\nu\gamma^\nu=0,\ \beta_\nu\beta^\nu=\gamma_\nu\gamma^\nu=1.$

в) $n\geq 3$, $\alpha=\frac{2}{1-k}$.

$f(y)=f(y^0)$ – произвольная дифференцируемая функция

$$g(z)=z^0,\ y^0=\alpha_\nu x^\nu,\ z^0=\beta_\nu x^\nu, \tag{2.3.60}$$

где $\alpha_\nu\alpha^\nu=\alpha_\nu\beta^\nu=0,\ \ \beta_\nu\beta^\nu=\frac{-\lambda(1-k)^2}{2(1+k)}$.

Тогда из (2.3.55) и (2.3.57)–(2.3.60) соответственно получаем решения уравнения (2.3.I):

$$U=\left[(\alpha_\nu x^\nu+c)^2+\beta_\nu x^\nu\cdot\gamma_\nu x^\nu\right]^{\frac{1}{1-k}}, \tag{2.3.6I}$$

где $\alpha_\nu\beta^\nu=\alpha_\nu\gamma^\nu=\beta_\nu\beta^\nu=\gamma_\nu\gamma^\nu=0,\ 2\alpha_\nu\alpha^\nu=\beta_\nu\gamma^\nu=\frac{\lambda(k-1)^2}{k-3}$.

$$U=\left[\beta_\nu x^\nu\varphi(\alpha_\nu x^\nu)+\gamma_\nu x^\nu\psi(\alpha_\nu x^\nu)\right]^{\frac{2}{1-k}}, \tag{2.3.62}$$

где $\alpha_\nu\alpha^\nu=\alpha_\nu\beta^\nu=\alpha_\nu\gamma^\nu=\beta_\nu\gamma^\nu=0,\ \beta_\nu\beta^\nu=\gamma_\nu\gamma^\nu=-1,$
$\varphi^2+\psi^2=\frac{\lambda(k-1)^2}{2(k+1)}$.

$$U=\left[f(\alpha_\nu x^\nu)+\beta_\nu x^\nu\right]^{\frac{2}{1-k}}, \tag{2.3.63}$$

где $\alpha_\nu\alpha^\nu=\alpha_\nu\beta^\nu=0,\ \ \beta_\nu\beta^\nu=-\frac{\lambda(1-k)^2}{2(1+k)}$.

§ 4. Уравнение Лиувилля

В параграфе 2 главы II решая обратную задачу теоретико-группового анализа, т.е. нелинейного волнового уравнения относительно группы $\tilde{P}(1,n-1)$, мы пришли к выводу, что ее решением будут только два уравнения: уравнение (2.3.I) и уравнение Лиувилля

$$\Box u + \lambda \exp u = 0, \tag{2.4.I}$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$.

§ 3 этой главы был посвящен нахождению точных решений уравнения (2.3.I). В настоящем параграфе мы найдем многопараметрический класс решений уравнения Лиувилля (2.4.I). Так как функции $\xi^{\mu}(x)$ для уравнения (2.4.I) совпадают с формулами (2.3.2 а), а

$$\eta(x) = -2c_{00} \tag{2.4.2}$$

то инварианты группы инвариантности уравнения (2.4.I) будут такие же, как и для уравнения (2.3.I). Другой будет только формула представления решений:

$$u(x) = \varphi(\omega) + g(x). \tag{2.4.3}$$

Кроме того, в силу замечания 2.2.I, случай уравнения (2.4.I) при $n=2$ особенный. Поэтому он будет существенно отличаться от соответствующего уравнения (2.3.I).

А. $n=2$. Уравнение (2.4.I) имеет вид

$$u_{00} - u_{11} + \lambda \exp u = 0. \tag{2.4.4}$$

В этом случае хорошо известно решение уравнения (2.4.4), полученное еще Лиувиллем [64]

$$u = \ln\left\{\frac{8F'(x_0 + x_1)\,G'(x_0 - x_1)}{-\lambda\left[F(x_0 + x_1) + G(x_0 - x_1)\right]^2}\right\}, \tag{2.4.5}$$

где F и G - произвольные дифференцируемые функции.

В силу формул (2.2.I2) и (2.4.3, решение уравнения (2.4.4) ищем в виде

$$u = \varphi(\omega) + \ln\left\{\frac{8F'(x_0 + x_1)\,G'(x_0 - x_1)}{-\lambda\left[F(x_0 + x_1) + G(x_0 - x_1)\right]^2}\right\}, \tag{2.4.6}$$

где $\omega = \dfrac{F(x_0 + x_1) - G(x_0 - x_1) + c}{F(x_0 + x_1) + G(x_0 - x_1)}$. После подстановки (2.4.6) в (2.4.4) для функции $\varphi(\omega)$ получаем уравнение

$$(\omega^2 - 1)\varphi_{\omega\omega} + 2\omega\varphi_\omega + 2 = 2\exp\varphi. \tag{2.4.7}$$

Как видно, $\varphi \equiv 0$ есть частным решением уравнения (2.4.7). Тогда из формулы (2.4.6) при $\varphi(\omega) \equiv 0$ получаем формулу Лиувилля (2.4.5).

3. $n = 3$. Уравнение (2.4.I) имеет вид

$$u_{00} - u_{11} - u_{22} + \lambda \cdot \exp u = 0. \tag{2.4.8}$$

Так как инварианты в этом случае совпадают с инвариантами пункта В § 3 главы П, а функция $g(x)$ из (2.4.3) связана с функцией $f(x)$ из (2.3.3) следующей формулой

$$g(x) = (k-1)\ln f(x), \tag{2.4.9}$$

то мы приведем здесь только решения уравнения (2.4.8). Во всех случаях они имеют вид

$$
\begin{aligned}
&U(x) = -2\ln\left[\sqrt{\frac{-\lambda}{2bc_1^2}}\,\mathcal{P}(x)\,sh\,(c_1 Q(x) + c_2)\right],\\
&U(x) = -2\ln\left[\sqrt{\frac{\lambda}{2bc_1^2}}\,\mathcal{P}(x)\,ch\,(c_1 Q(x) + c_2)\right],\\
&U(x) = -2\ln\left[\sqrt{\frac{-\lambda}{2bc_1^2}}\,\mathcal{P}(x)\cos(c_1 Q(x) + c_2)\right],\\
&U(x) = -2\ln\left[\sqrt{\frac{-\lambda}{2b}}\,\mathcal{P}(x)\,(Q(x) + c_2)\right],
\end{aligned}
\tag{2.4.10}
$$

где b, c_1, c_2 – постоянные, $\mathcal{P}(x)$ и $Q(x)$ – функции, принимающие несколько значений:

$$
\begin{aligned}
&\text{а)}\quad \mathcal{P}(x) = \frac{1}{\varphi(\alpha_\nu y^\nu)}, \quad Q(x) = \beta_\nu y^\nu \varphi(\alpha_\nu y^\nu),\\
&\text{б)}\quad \mathcal{P}(x) = \beta_\nu y^\nu, \quad Q(x) = \frac{\sqrt{y_\nu y^\nu}}{\beta_\nu y^\nu},\\
&\text{в)}\quad \mathcal{P}(x) = \frac{1}{\varphi(\alpha_\nu y^\nu)}, \quad Q(x) = \beta_\nu y^\nu \varphi(\alpha_\nu y^\nu) - \ln\varphi(\alpha_\nu y^\nu),\\
&\text{г)}\quad \mathcal{P}(x) = \frac{1}{2}\omega_1^{-1/2}, \quad Q(x) = \ln\omega, \ \omega = \frac{(\beta_\nu y^\nu)^2}{-b} + y_\nu y^\nu,\\
&\text{д)}\quad \mathcal{P}(x) = 1, \quad Q(x) = \varphi(\alpha_\nu y^\nu) + \beta_\nu y^\nu.
\end{aligned}
\tag{2.4.11}
$$

В случаях а)–д) $y_\nu = x_\nu + a_\nu$, φ – произвольная дифференцируемая функция, a_ν, α_ν, β_ν – постоянные, $\alpha_\nu \alpha^\nu = \alpha_\nu \beta^\nu = 0$, $\beta_\nu \beta^\nu = b \neq 0$.

$$
U = \ln\left\{\frac{8\,F'(\alpha_\nu x^\nu)\cdot G'(\beta_\nu x^\nu)}{-\lambda\left[F(\alpha_\nu x^\nu) + G(\beta_\nu x^\nu)\right]^2}\right\},
\tag{2.4.12}
$$

$$u = -\ln\left[\frac{\lambda}{2(n-2)}\ x_\nu x^\nu\right],$$

где F и G – произвольные дифференцируемые функции,
$\alpha_\nu\alpha^\nu = -\beta_\nu\beta^\nu = 1$, $\alpha_\nu\beta^\nu = 0$.

Замечание 2.4.I. Формулы (2.4.I0)–(2.4.I2)
решение уравнения (2.4.I) и при $n \geqslant 3$, только суммирова
в выражениях $A_\nu B^\nu$ необходимо от 0 до $n-1$.

§ 5. Волновое уравнение с произвольной нелинейностью, уравнение sin-Гордона

В этом параграфе мы рассмотрим уравнение

$$\Box u + F(u) = 0, \qquad (2.5$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$. Пусть $F(u)$ – произволь
дифференцируемая функция, причем $F(u) \neq \lambda_1 u^k$,
$F(u) \neq \lambda_2 \exp u$. Тогда максимальной группой инвариант
ти уравнения (2.5.I) будет группа Пуанкаре $P(1,n-1)$, пре
зования которой имеют вид (2.I.3) с $\xi^\mu(x)$ и η из (2.3.
при $C_{00} = 0$. Как и в предыдущих двух параграфах, ставится
задача об отыскании точных решений уравнения (2.5.I) мето
описанным в § I гл.П.

Так как $\eta = 0$, то инвариантные решения уравнения
(2.5.I) имеют вид

$$u(x) = \varphi(\omega), \qquad (2.$$

где φ и ω такие, как в (2.I.I9).

Все случаи независимых инвариантов ω для уравнения (2.5.I) совпадают со случаями д)–з) и к) пункта В § 3 гл.II. Поэтому и уравнения для функции $\varphi(\omega)$ будут совпадать с уравнениями (2.3.36), (2.3.40), (2.3.4I), (2.3.43) и (2.3.45), только вместо $\lambda\varphi^k$ в них надо писать $F(\varphi)$.

Если предположить, что функция φ зависит только от одного инварианта, то получим три различных случая:

I) $\omega = \beta_\nu x^\nu + f(\alpha_\nu x^\nu)$, $\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0$, $\beta_\nu\beta^\nu = \pm 1$,

f – произвольная дифференцируемая функция.

$$\varphi_{\omega\omega} \pm F(\varphi) = 0. \tag{2.5.3}$$

Решение уравнения (2.5.3) дается эллиптическим интегралом

$$\int\limits_0^\varphi \frac{d\xi}{\sqrt{C_1 \mp \int\limits_0^\xi F(\tau)d\tau}} = \omega + C_2 . \tag{2.5.4}$$

2) $\omega = x_\nu x^\nu$. Для функции φ имеем уравнение

$$4\omega\varphi_{\omega\omega} + 2n\varphi_\omega + F(\varphi) = 0. \tag{2.5.5}$$

3) $\omega = (\alpha_\nu y^\nu)^2 - y_\nu y^\nu$, $\alpha_\nu\alpha^\nu = 1$. Тогда φ удовлетворяет уравнению

$$4\omega\varphi_{\omega\omega} + 2(n-1)\varphi_\omega + F(\varphi) = 0, \tag{2.5.6}$$

где n – количество переменных x.

Как частный пример уравнения (2.5.I), рассмотрим уравнение $\sin$-Гордона. Для этого необходимо положить: $F(u) = \sin u$.

Уравнение (2.5.I) тогда будет иметь вид

$$\Box u + \sin u = 0 \qquad (2.5.7$$

Если в формула (2.5.4) $C_1 = 2$, то получим

$$\int_0^{\varphi/2} \frac{d\theta}{\sin\theta} = \omega + \ln C_0 \quad \text{при} \quad \beta_\nu \beta^\nu = -1, \qquad (2.5.8)$$

$$\int_0^{\varphi/2} \frac{d\theta}{\cos\theta} = \omega + C_2 \quad \text{при} \quad \beta_\nu \beta^\nu = +1. \qquad (2.5.9)$$

Из (2.5.8) получаем

$$\varphi = 4\,\mathrm{arctg}\,(C_0 \exp\omega), \qquad (2.5.10)$$

а из (2.5.9) имеем

$$\varphi = 4\,\mathrm{arctg}\,[\mathrm{th}\,(\omega + C_2)], \qquad (2.5.11)$$

Тогда решения уравнения $\sin$ -Гордона (2.5.7) имеют вид

$$u = 4\,\mathrm{arctg}\{C_0 \exp[\beta_\nu x^\nu + f(\alpha_\nu x^\nu)]\}, \quad \beta_\nu\beta^\nu = -1, \qquad (2.5.12)$$

$$u = 4\,\mathrm{arctg}\{\mathrm{th}\,[C_2 + \beta_\nu x^\nu + f(\alpha_\nu x^\nu)]\}, \quad \beta_\nu\beta^\nu = +1, \qquad (2.5.13)$$

где $\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0$.

При $C_1 = 2\left(\frac{2}{k^2} \mp 1\right) \neq 2$ решения уравнения (2.5.7) задаются эллиптическими функциями

$$k\int_0^{\varphi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 \mp k^2 \sin^2\theta}} = \omega + C_2. \qquad (2.5.14)$$

В частности, при $\ell \equiv 0$ из (2.5.I2) и (2.5.I4) получаем известные решения уравнения синус Гордона (см., например, [52], [68]).

Отметим еще, что кроме решений (2.5.I2)–(2.5.I4) уравнения $\sin$-Гордона, мы получили еще два обыкновенных дифференциальных уравнения (2.5.5), (2.5.6), решив которые, можно тоже получить решения уравнения (2.5.I).

§ 6. Симметрия и точные решения уравнения Борна–Инфельда

Некоторый класс точных решений нелинейного уравнения Борна–Инфельда

$$u_{00} - u_{11} + u_0^2 u_{11} + u_1^2 u_{00} - 2 u_0 u_{01} = 0, \tag{2.6.I}$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1)$, $u_\mu = \dfrac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu} = \dfrac{\partial u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $\mu = 0,1$,

найден в [1] . Решения Барбашова и Черникова [1] , как показано в [35] , можно получить с помощью преобразований годографа.

В этом параграфе, используя групповые свойства уравнения (2.6.I), найдем новые классы точных решений уравнения (2.6.I

Т е о р е м а 2.6.I. Уравнение Борна–Инфельда (2.6.I) инвариантно относительно 5-мерной алгебры Ли с базисными операторами

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_1 = -i\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad J_{01} = x_0 P_1 - x_1 P_0,$$
$$D = x_\nu P^\nu - i, \quad Q = \frac{\partial}{\partial u}. \tag{2.6.2}$$

Доказательство теоремы проводится с помощью метода Ли-Овсянникова [24] .

Алгебра (2.6.2) порождает инфинитезимальные преобразования (2.I.3) с

$$\xi^{\mu}=c_{00}x_{\mu}+c_{\mu\nu}x^{\nu}+d_{\mu}, \quad \nu,\mu=0,1, \quad \nu\neq\mu,$$
$$\eta=c_{00}u+d_{2}, \tag{2.6.3}$$

где $c_{01}=-c_{10}$, d_{μ}, d_{2} – произвольные постоянные.

Решения уравнения (2.6.I) ищем в виде (2.I.I9).

Не вдаваясь в подробности решения системы (2.I.7), выпишем явный вид функций $f(x)$, $g(x)$ и инварианта $\omega=\omega(x)$. В зависимости от соотношений между $c_{\mu\nu}$, d_{μ} и d_{2}, как и в предыдущих параграфах этой главы, будем иметь несколько случаев.

а) $\omega=\alpha_{\nu}x^{\nu}$, $f(x)=1$, $g(x)=\beta_{\nu}x^{\nu}$, α_{ν}, β_{ν} – произвольные постоянные. Для функции $\varphi(\omega)$ имеем уравнение

$$[\alpha_{\nu}\alpha^{\nu}+(\alpha_{0}\beta_{1}-\alpha_{1}\beta_{0})^{2}]\varphi_{\omega\omega}=0. \tag{2.6.4}$$

В том случае, когда $\alpha_{\nu}\alpha^{\nu}+(\alpha_{0}\beta_{1}-\alpha_{1}\beta_{0})^{2}\neq 0$ решением уравнения (2.6.I) является линейная функция $u=\gamma_{\nu}x^{\nu}+c$, где γ_{ν}, c – произвольные постоянные величины. В случае, когда $\alpha_{\nu}\alpha^{\nu}+(\alpha_{0}\beta_{1}-\alpha_{1}\beta_{0})^{2}=0$, решением уравнения (2.6.I) будет

$$\mathcal{U} = \varphi(\alpha_\nu x^\nu) + \beta_\nu x^\nu, \tag{2.6.5}$$

где φ – произвольная дважды дифференцируемая функция. Это решение совпадает с решением [1], когда $\alpha_1 = \pm\alpha_0$, $\beta_1 = \beta_0 = 0$.

б) $\omega = y_\nu y^\nu$, $f(x) = 1$, $g(x) = a \ln(y_0 + y_1)$, $y_\nu = x_\nu + a_\nu$, a_ν, a – постоянные.

В этом случае для функции φ_ω получаем уравнение Абеля.

$$(\omega + a^2)\varphi_{\omega\omega} - 2\omega\varphi_\omega^3 - 3a\varphi_\omega^2 + \varphi_\omega = 0. \tag{2.6.6}$$

Общее решение уравнения (2.6.6) имеет вид

$$\varphi = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\left[c\left(\frac{b\sqrt{\omega+a^2} - a\sqrt{\omega+b^2}}{b\omega\sqrt{\omega+a^2} + a\omega\sqrt{\omega+b^2}}\right)^a\left(\frac{\sqrt{\omega+a^2}+\sqrt{\omega+b^2}}{\sqrt{\omega+a^2}-\sqrt{\omega+b^2}}\right)^b\right], \\ \frac{1}{2}\ln\left[c\left(\frac{b\sqrt{\omega+a^2} - a\sqrt{b^2-\omega}}{b\omega\sqrt{a^2+\omega} + a\omega\sqrt{b^2-\omega}}\right)^a\right] + b\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{a^2+\omega}}{\sqrt{b^2-\omega}}, \\ \ln\left[c\left(\sqrt{\omega+a^2}+a\right)^{-a}\right] + \sqrt{\omega+a^2} \end{cases} \tag{2.6.7}$$

Решения уравнения (2.6.I) можно записать в виде

$$\mathcal{U} = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\left\{c\left(\frac{y_0+y_1}{y_0-y_1}\right)^a \mathrm{th}^a\left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{y_\nu y^\nu + b^2}{y_\nu y^\nu + a^2}\,\frac{a^2}{b^2}\right)\right]\mathrm{cth}^b\left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{y_\nu y^\nu + b}{y_\nu y^\nu + a}\right)\right]\right\}, \\ \frac{1}{2}\ln\left\{c\left(\frac{y_0+y_1}{y_0-y_1}\right)^a \mathrm{th}^a\left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{a^2}{b^2}\,\frac{b^2 - y_\nu y^\nu}{a^2 + y_\nu y^\nu}\right)\right]\right\} + b\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a^2+y_\nu y^\nu}{b^2-y_\nu y^\nu}}, \\ a\ln\left[c(y_0+y_1)\left(\sqrt{y_\nu y^\nu + a^2}+a\right)^{-1}\right] + \sqrt{y_\nu y^\nu + a^2}. \end{cases} \tag{2.6.8}$$

в) $\omega = \frac{y_1}{y_0}$, $f(x) = y_0$, $g(x) = const$.

Функция $\varphi(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$(\varphi^2 + \omega^2 - 1)\varphi_{\omega\omega} = 0. \qquad (2.6.9)$$

Помимо линейной функции от ω , решением уравнения (2.6.I) будет функция

$$u = c \pm \sqrt{y_0 y^0}. \qquad (2.6.I0)$$

г) $\omega = y_0 + y_1$, $f(x) = (y_0 - y_1)^{1/2}$, $g(x) = const$.

Функция $\varphi(\omega)$ находится из уравнения

$$\varphi^2 \varphi_{\omega\omega} - 3\varphi\varphi_\omega^2 + 2\varphi_\omega = 0. \qquad (2.6.II)$$

С помощью нелинейной замены

$$\varphi_\omega = z(x) \;, \quad x = \varphi \qquad (2.6.I2)$$

нелинейное уравнение (2.6.II) сводится к линейному

$$x^2 z' - 3xz + 2 = 0, \qquad (2.6.I3)$$

общее решение которого задается формулой

$$z = \frac{c\,x^4 + 1}{2x}. \qquad (2.6.I4)$$

Решениями уравнения (2.6.I) будут функции

$$\mathcal{U}=\begin{cases}\pm\left\{\dfrac{y_0-y_1}{c_1}\,th\left[c_1(y_0+y_1)+c_2\right]\right\}^{1/2}+c_3\;, \\ \pm\left\{\dfrac{y_0-y_1}{c_1}\,cth\left[c_1(y_0+y_1)+c_2\right]\right\}^{1/2}+c_3\;, \\ \pm\left\{\dfrac{y_0-y_1}{c_1}\,tg\left[c_1(y_0+y_1)+c_2\right]\right\}^{1/2}+c_3\;, \\ \pm\left[\,y_0y^0+c_2(y_0-y_1)\right]^{1/2}+c_3\;. \end{cases} \qquad (2.6.15)$$

д) $\omega=y_0-y_1+a\ln(y_0+y_1)\,,\ f(x)=(y_0+y_1)^{1/2},\ g(x)=const.$

Функция $\varphi(\omega)$ находится из уравнения

$$(\varphi^2+4a)\varphi_{\omega\omega}-4a\,\varphi_\omega^3-3\varphi\varphi_\omega^2+2\varphi_\omega=0, \qquad (2.6.16)$$

которое с помощью замены (2.6.12) приводится к уравнению Риккати

$$(x^2+4a)z'=4a\,z^2+3xz-2. \qquad (2.6.17)$$

Общее решение уравнения (2.6.17) имеет вид

$$z=\frac{2a-x\left(c_1\sqrt{x^2+4a}-x\right)}{2a\left(c_1\sqrt{x^2+4a}-x\right)}. \qquad (2.6.18)$$

Подставляя (2.6.18) в (2.6.12), получаем уравнение для функции φ

$$\varphi_\omega=\frac{2a-\varphi\left(c_1\sqrt{\varphi^2+4a}-\varphi\right)}{2a\left(c_1\sqrt{\varphi^2+4a}-\varphi\right)}. \qquad (2.6.19)$$

В зависимости от значений постоянной c_1 получим следующие решения для уравнения (2.6.1)

$$u = \pm\left\{c_2 \exp\left[c_3(y_0-y_1)\right] + \frac{2(y_0+y_1)}{c_3}\right\}^{1/2} + c_4, \quad c_1=0. \qquad (2.6.20)$$

Для всех других значений c_1 решения уравнения (2.6 получаем в неявном виде

$$\psi \cdot \exp\left(u\psi + \frac{y_0-y_1}{2a}\right) = c_2, \quad \psi = \left(u - \sqrt{u^2+4a(y_0+y_1)}\right)^{-1}, \qquad (2.6.21$$

для $C_1 = 1$.

В том случае, когда $c_1^2 - 1 > 0$ решение уравнения (2.6.1) имеет вид

$$\frac{(V+1)^{A}(V-1)^{1/A}(V-K_+)^{B_-}(V-K_-)^{B_+}}{(y_0+y_1)\exp\left(\frac{y_0-y_1}{a}\right)} = c_2, \qquad (2.6.22)$$

где $V = u\left[u^2+4a(y_0+y_1)\right]^{-1/2}$, $A = \frac{1-c_1}{1+c_1}$,

$$B_\pm = \frac{(c_1^2+1)(c_1^2-1)^{1/2} \pm (c_1^3-1)}{(c_1^2-1)^{3/2}}, \quad K_\pm = c_1 \pm \sqrt{c_1^2-1}.$$

Если $c_1^2 - 1 < 0$, то решение уравнения (2.6.1) задается следующей неявной формулой .

$$\frac{(V-1)^{A}(V+1)^{1/A}\left(V^2-2c_1V+1\right)^{\frac{A}{2}+\frac{1}{2A}}}{(y_0+y_1)\exp\left[\frac{2c_1}{\sqrt{1-c_1^2}}\operatorname{arctg}\frac{V-c_1}{\sqrt{1-c_1^2}} + \frac{y_0-y_1}{a}\right]} = c_2. \qquad (2.6.23)$$

§ 7. Решения уравнения эйконала

Уравнение эйконала

$$u_\nu u^\nu = 0, \qquad (2.7.1)$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$, $u_\nu = \dfrac{\partial u}{\partial x_\nu}$, является одним из основных уравнений геометрической оптики. Оно является уравнением характеристик для линейного уравнения $\Box u = 0$ Но, как видно из § 1 и § 4 гл.I, уравнение (2.7.1) обладает намного большей симметрией, чем уравнение Д"Аламбера. Более того, никакое линейное уравнение не может обладать такой высокой симметрией.

Наличие такой широкой симметрии (см. формулы (1.4.3)) дает возможность различными способами искать точные решения уравнения (2.7.1).

В этом параграфе мы предложим два из таких способов.

1). Пусть в (1.4.3)

$$b_\mu(u) \equiv 0, \; c_{\mu\nu}(u) = c_{\mu\nu} - const, \; d_\mu(u) = d_\mu - const, \qquad (2.7.2)$$

$\gamma = \gamma(u)$ – произвольная дифференцируемая функция.

В этом предположении функции ξ^μ из (1.4.3) будут совпадать с функциями $\xi^\mu(x)$ из (2.3.2 a). Это даст возможность воспользоваться инвариантами, полученными в § 3 гл.II Решения же уравнения (2.7.1), в силу произвольности функции γ, будем находить в виде

$$u(x) = F(\varphi(\omega) + g(x)), \qquad (2.7.3)$$

где F – произвольная дифференцируемая функция, а φ, ω и g такие как в (2.I.19).

Из формулы (2.7.3) следует, что если мы имеем какое-то решение ур‥нения (2.7.I), то произвольная дифференцируемая функци‥ ‥ него будет тоже решением этого уравнения. Таким свойс‥‥м не обладает ни одно линейное уравнение.

‥ользуясь инвариантами ω § 3 гл.П и в случаях а)-г), ‥ормулой

$$g(x)=\frac{1-K}{2}\ln f(x), \tag{2.7.4}$$

где $g(x)$ – функция из (2.7.3), а $f(x)$ – из (2.3.3), выпишем уравнения для функции $\varphi(\omega)$ при $n=3$.

а). $a^2b\omega_1^2\varphi_1^2+4\omega_1(ab\omega_2-a+1)\varphi_1\varphi_2+4\omega_2(b\omega_2-1)\varphi_2^2-2ab\omega_1\varphi_1-$
$-4(b\omega_2-1)\varphi_2+b=0.$

б). $b\varphi_1^2+4\varphi_1\varphi_2-4\omega_2\varphi_2^2+4\varphi^2=0.$

в). $\left(a-\frac{1}{a\omega_2-1}\right)\varphi_1^2-4(a\omega_2-1)(\varphi_1-\omega_2\varphi_2)+2a\varphi_1-4(a\omega_2-1)\varphi_2+$
$+a=0.$

г). $\varphi_1^2+2(2\omega_2+a)\varphi_1\varphi_2+4\omega_2^2\varphi_2^2+2\varphi_1-4\omega_2\varphi_2+1=0.$

д). $4\omega_1\varphi_1^2+4a\varphi_1\varphi_2-\varphi_2^2-2\varphi_2-1=0$, $g(x)=\beta_\nu y^\nu.$

е). $-4\omega_1\varphi_1^2+\left(1-\frac{b^2}{\omega_1}\right)\varphi_2^2+2\varphi_2+1=0$, $g(x)=\beta_\nu y^\nu.$

ж). $-\varphi_1^2+(2\omega_1+a^2)\varphi_2^2+a^2b\varphi_2=0$, $g(x)=\alpha_\nu y^\nu.$

з). $\varphi_1^2+4\omega_1\varphi_1\varphi_2+4\omega_2\varphi_2^2+4\varphi_2=0$, $g(x)=\ln\beta_\nu x^\nu$,
$\alpha_\nu\alpha^\nu=a=1$, $\alpha_\nu\beta^\nu=\beta_\nu\beta^\nu=0.$

и). $(a\omega_1^2+b)\varphi_1^2+2a\omega_1\omega_2\varphi_1\varphi_2+(a\omega_2^2+c)\varphi_2^2-2a(\omega_1\varphi_1+$
$+\omega_2\varphi_2)+a=0.$

к). $\varphi_1^2-\varphi_2^2=0.$

В предположении, что φ зависит от одного инварианта, мы получим несколько обыкновенных уравнений. Приведем здесь только те, которые дают различные решения уравнения (2.7.I)

$$(a\omega_1\varphi_1 - 1)^2 = 0 \qquad \text{, (случай а).)} \qquad (2.7.5)$$

где $\omega_1 = \dfrac{\alpha_\nu y^\nu}{(\beta_\nu y^\nu)^a}$, $g(x) = \ln \beta_\nu y^\nu$.

Тогда

$$u = F(\alpha_\nu x^\nu), \quad \alpha_\nu \alpha^\nu = 0 \qquad (2.7.6)$$

решение уравнения (2.7.I).

$$4(a\omega_2 - 1)(\omega_2\varphi_2 - 1)\varphi_2 + a = 0 \qquad \text{(случай а).)} \qquad (2.7.7)$$

Общее решение уравнения (2.7.7) имеет вид

$$\varphi = \ln(1 \pm \sqrt{1 - a\omega_2}) + c_1. \qquad (2.7.8)$$

Тогда решением уравнения (2.7I) будет функция

$$u = F(\beta_\nu y^\nu \pm \sqrt{(\beta_\nu y_\nu)^2 - a\, y_\nu y^\nu}), \ \beta_\nu \beta^\nu = a \neq 0. \qquad (2.7.9)$$

$$(\omega_2\varphi_2 - 1)\,\varphi_2 = 0 \qquad \text{(случай б).)} \qquad (2.7.10)$$

Из уравнения (2.7.I0) и формулы (2.7.3) получаем следующее решение уравнения (2.7.I)

$$u = F\left(\frac{y_\nu y^\nu}{\alpha_\nu y^\nu}\right), \quad \alpha_\nu \alpha^\nu = 0 \qquad (2.7.11)$$

2. Пусть в (I.4.3)

$b_\mu(u) \equiv 0$, $c_{\mu\nu}(u)$, $d_\mu(u)$ – произвольные дифференцируемые функции и $\eta(u) \equiv 0$. (2.7.I2)

Так как $\eta = 0$, то одним из инвариантов уравнений Лагранжа (2.I.7) для уравнения (2.7.I) будет $\omega_n = u$. Подставив теперь $u = \omega_n$ в функции $c_{\mu\nu}(u)$ и $d_\mu(u)$, мы получим $c_{\mu\nu}(\omega_n)$ и $d_\mu(\omega_n)$ – постоянные величины.

Поэтому дальнейшие результаты интегрирования уравнений Лагранжа будут совпадать с результатами пункта I) этого параграфа, только в результате все постоянные в инвариантах $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ будут зависеть от ω_n, а значит, и от u.

Возникает вопрос, в каком виде искать теперь решение уравнения (2.7.I), ведь переменные в уравнении (2.I.6) не разделяются.

Здесь мы воспользуемся структурой самого уравнения эйконала (2.7.I). Поскольку в это уравнение входят только производные от функции u, то для подстановки (2.I.6) в (2.7.I) не нужно знать явный вид самого решения. Поэтому, определив (2.I.6), например, ω_n, решение уравнения (2.7.I) мы будем искать в виде

$$u = \varphi(\omega_1(x,u), \dots, \omega_{n-1}(x,u)). \qquad (2.7.13)$$

Ниже мы, воспользовавшись инвариантами, полученными в пункте I) этого параграфа, рассмотрим только случай $n=3$ а потом, как и для других уравнений, обобщим эти результаты на случай $n \geqslant 3$.

При $n=3$ формула (2.7.I3) будет иметь вид

$$u = \varphi(\omega_1, \omega_2). \qquad (2.7.14)$$

Определим из (2.7.I4) производные от функции u :

$$u_v = \frac{\omega_{1v}\varphi_1 + \omega_{2v}\varphi_2}{1-\omega_{1n}\varphi_1-\omega_{2n}\varphi_2}. \qquad (2.7.15)$$

Подставляя (2.7.I5) в (2.7.I), получим уравнение для функции $\varphi(\omega)$:

$$\omega_{1v}\omega_1^{\,v}\varphi_1^2 + 2\omega_{1v}\omega_2^{\,v}\varphi_1\varphi_2 + \omega_{2v}\omega_2^{\,v}\varphi_2^2 = 0. \qquad (2.7.16)$$

В силу того, что ω_1 , ω_2 являются инвариантами группы инвариантности уравнения (2.7.I), будут выполняться условия

$$\begin{gathered}\omega_{1v}\omega_1^{\,v} = A(\omega_1,\omega_2)\psi(x,u),\ \omega_{1v}\omega_2^{\,v} = B(\omega_1,\omega_2)\psi(x,u),\\ \omega_{2v}\omega_2^{\,v} = C(\omega_1,\omega_2)\psi(x,u).\end{gathered} \qquad (2.7.17)$$

После этого уравнение (2.7.I6) будет иметь вид

$$A(\omega_1,\omega_2)\varphi_1^2 + 2B(\omega_1,\omega_2)\varphi_1\varphi_2 + C(\omega_1,\omega_2)\varphi_2^2 = 0. \qquad (2.7.18)$$

Разрешив уравнение (2.7.I8) относительно $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$, получим систему линейных дифференциальных уравнений относительно функции φ :

$$\begin{gathered}A\varphi_1 + (B+\sqrt{B^2-AC})\varphi_2 = 0,\\ A\varphi_1 + (B-\sqrt{B^2-AC})\varphi_2 = 0,\end{gathered} \qquad (2.7.19)$$

общее решение которой имеет вид

$$\begin{gathered}\varphi = \varphi(J_1)\\ \varphi = \varphi(J_2),\end{gathered} \qquad (2.7.20)$$

где J_1 и J_2 соответственно первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\omega_1}{A} = \frac{d\omega_2}{B+\sqrt{B^2-AC}},$$
$$\frac{d\omega_2}{A} = \frac{d\omega_2}{B-\sqrt{B^2-AC}}. \qquad (2.7.21)$$

Далее, не проделывая каждый раз приведенных выше выкладок, мы выпишем только инварианты ω_1 , ω_2 , функции A , B , C , интегралы $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$ (если их удается определить из (2.7.21)) и решения уравнения (2.7.1), записанные с учетом формулы (2.7.14).

а). $\omega_1 = \dfrac{\alpha_\nu(u)\, y^\nu}{[\beta_\nu(u)\, y^\nu]^a}, \; \omega_2 = \dfrac{y_\nu y^\nu}{[\beta_\nu(u) y^\nu]^2}, \quad y_\nu = x_\nu + a_\nu(u),$

$\alpha_\nu(u)$, $\beta_\nu(u)$, $a_\nu(u)$, $a = a(u)$, $b = b(u)$ – произвольные дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям $\alpha_\nu \alpha^\nu = \alpha_\nu \beta^\nu = 0, \; \beta_\nu \beta^\nu = b$.

$$A = a^2 b\, \omega_1^2, \quad B = (ab\,\omega_2 + 1 - a)\,\omega_1, \quad C = 4\omega_2(b\,\omega_2 - 1).$$

Проинтегрировать систему (2.7.21) удалось при

$$\mathcal{Y}_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \mathcal{Y}_2 = \frac{\omega_2 - 1}{\omega_1}.$$

Тогда неявный вид решений уравнения (2.7.1) запишется следующим образом

$$\alpha_\nu(u)\, y^\nu \varphi^{-1}(u) = y_\nu y^\nu,$$
$$\alpha_\nu(u)\, y^\nu \varphi^{-1}(u) + [\beta_\nu(u) y^\nu]^2 = y_\nu y^\nu, \qquad (2.7.22)$$

где φ^{-1} – функция, обратная к φ .

б) $\omega_1 = \dfrac{\beta_\nu(u)y^\nu}{\alpha_\nu(u)y^\nu} + \ln[\alpha_\nu(u)y^\nu],\ \omega_2 = \dfrac{\gamma_\nu y^\nu}{[\alpha_\nu(u)y^\nu]^2},\ \alpha_\nu\alpha^\nu =$

$= \alpha_\nu\beta^\nu = 0\ ,\quad \beta_\nu\beta^\nu = b(u) = 1,$

$A = b\ ,\ B = 2\ ,\ C = 4\omega_2\ ,$

$y_{1,2} = -\omega_1 \pm \sqrt{1+\omega_2} - \ln(1 \pm \sqrt{1+\omega_2}).$

Решения уравнения (2.7.I) имеют вид

$$\frac{\beta_\nu(u)y^\nu \pm \sqrt{\gamma_\nu y^\nu + [\beta_\nu(u)y^\nu]^2}}{\beta_\nu(u)y^\nu} + \ln\left\{\beta_\nu(u)y^\nu \pm \sqrt{\gamma_\nu y^\nu + [\beta_\nu(u)y^\nu]^2}\right\} = \varphi(u). \quad (2.7.23)$$

в) $\omega_1 = \ln[\alpha_\nu(u)y^\nu] + b(u)\operatorname{arctg}\dfrac{\gamma_\nu(u)y^\nu}{\beta_\nu(u)y^\nu},\ \omega_2 = \dfrac{\gamma_\nu y^\nu}{[\alpha_\nu(u)y^\nu]^2},\ \alpha_\nu\alpha^\nu = a(u),$

$\beta_\nu\beta^\nu = \gamma_\nu\gamma^\nu = c(u)\ ,\quad \alpha_\nu\beta^\nu = \alpha_\nu\gamma^\nu = \beta_\nu\gamma^\nu = 0,$

$(\beta_\nu y^\nu)^2 + (\gamma_\nu y^\nu)^2 = c(\alpha_\nu y^\nu)^2(1-\omega_2),$

$A = a - \dfrac{1}{a\omega_2 - 1},\ B = -2(a\omega_2 - 1),\ C = 4\omega_2(a\omega_2 - 1).$

Уравнения (2.7.2I) проинтегрировать не удалось.

г) $\omega_1 = \alpha_\nu(u)y^\nu + \ln[\beta_\nu(u)y^\nu],\ \omega_2 = \dfrac{\gamma_\nu y^\nu}{[\beta_\nu(u)y^\nu]^2},\quad \alpha_\nu\beta^\nu = \alpha_\nu\alpha^\nu =$

$= \gamma_\nu\gamma^\nu = \beta_\nu\gamma^\nu = 0,\quad \alpha_\nu\gamma^\nu = a(u)\ ,\ \beta_\nu\beta^\nu = b(u),$

$A = 1,\ B = 2\omega_2 + a\ ,\ C = 4\omega_2^2.$

Уравнения (2.7.2I) удалось проинтегрировать при $a = 2$:

$y_{1,2} = \omega_1 - \ln(\sqrt{\omega_2 + 1} \pm 1).$

Тогда решения уравнения (2.7.I) имеют вид

$$\alpha_\nu(u)y^\nu - \ln\frac{\sqrt{\gamma_\nu(u)y^\nu + [\beta_\nu(u)y^\nu]^2} \pm \beta_\nu(u)y^\nu}{[\beta_\nu(u)y^\nu]^2} = \varphi^{-1}(u) \qquad (2.7.24)$$

д) $\omega_1 = [\beta_\nu(u)y^\nu]^2 + \gamma_\nu y^\nu$, $\omega_2 = \beta_\nu(u)y^\nu + a\ln[\alpha_\nu(u)y^\nu]$, $\alpha_\nu\alpha^\nu =$

$= \alpha_\nu\beta^\nu = 0$, $\beta_\nu\beta^\nu = 1$,

$A = 4\omega_1$, $B = 2a$, $C = -1$.

Решения уравнения (2.7.2I) имеют вид

$$\omega_{1,2} = \omega_2 \pm \sqrt{\omega_1 + a^2} + a\ln(\sqrt{\omega_1^2 + a^2} - a).$$

Тогда имеем решения уравнения (2.7.I):

$$\beta_\nu(u)y^\nu \pm \sqrt{(\beta_\nu(u)y^\nu)^2 + \gamma_\nu y^\nu + a^2} - a\ln\frac{\sqrt{\beta_\nu(u)y^\nu + \gamma_\nu y^\nu + a^2} - a}{\alpha_\nu(u)y^\nu} = \varphi^{-1}(u). \qquad (2.7.25)$$

е). $\omega_1 = [\beta_\nu(u)y^\nu]^2 + \gamma_\nu y^\nu$, $\omega_2 = \beta_\nu(u)y^\nu + b(u)\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\gamma_\nu(u)y^\nu}{\alpha_\nu(u)y^\nu}$,

$\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\gamma^\nu = a(u) \neq 0$, $\alpha_\nu\beta^\nu = \gamma_\nu\gamma^\nu = 0$, $\beta_\nu\beta^\nu = 1$,

$A = -4\omega_1$, $B = 0$, $C = 1 - \dfrac{b^2}{\omega_1}$.

Решения уравнения (2.7.I) имеет вид

$$\beta_\nu y^\nu \pm \sqrt{(\beta_\nu y^\nu)^2 + \gamma_\nu y^\nu - b^2} + b\left[\mathrm{arctg}\frac{\gamma_\nu y^\nu}{\alpha_\nu y^\nu} \mp \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{(\beta_\nu y^\nu)^2 + \gamma_\nu y^\nu - b^2}}{b}\right] = \varphi^{-1}(u). \qquad (2.7.26)$$

ж). $\omega_1 = \frac{1}{2}\left[\alpha_\nu(u)y^\nu\right]^2 + a(u)\beta_\nu(u)y^\nu$, $\omega_2 = \frac{1}{3}\left[\alpha_\nu(u)y^\nu\right]^3 + a(u)\alpha_\nu(u)y^\nu\beta_\nu(u)y^\nu +$
$+ a^2(u)\gamma_\nu(u)y^\nu$,

$\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = \beta_\nu\gamma^\nu = 0, \ \frac{1}{2}\alpha_\nu\gamma^\nu = -\beta_\nu\beta^\nu = \gamma_\nu\gamma^\nu = b(u) \neq 0,$

$A = -1, \ B = 0, \ C = 2\omega_1 + a^2$

$\mathcal{Y}_{1,2} = 3\omega_2 \pm (2\omega_1 + a^2)^{3/2}.$

В этом случае решениями уравнения (2.7.I) будут функции, определяемые из соотношения

$$\left[\alpha_\nu(u)y^\nu\right]^3 + 3a(u)\alpha_\nu(u)y^\nu\cdot\beta_\nu(u)y^\nu + 3a^2(u)\gamma_\nu(u)y^\nu \pm$$
$$\pm\left\{\left[\alpha_\nu(u)y^\nu\right]^2 + 2a(u)\beta_\nu(u)y^\nu + a^2(u)\right\}^{3/2} = \varphi^{-1}(u). \qquad (2.7.27)$$

з). $\omega_1 = \alpha_\nu(u)x^\nu, \ \omega_2 = x_\nu x^\nu, \ \alpha_\nu\alpha^\nu = 1.$

$A = 1, \ B = 2\omega_1, \ C = 4\omega_2,$

$\mathcal{Y}_{1,2} = \omega_1 \pm \sqrt{\omega_1^2 - \omega_2^2}.$

Решения уравнения (2.7.I) имеют вид

$$\alpha_\nu(u)x^\nu \pm \sqrt{\left[\alpha_\nu(u)x^\nu\right]^2 - x_\nu x^\nu} = \varphi^{-1}(u). \qquad (2.7.28)$$

и). $\omega_1 = \dfrac{\beta_\nu(u)y^\nu}{\alpha_\nu(u)y^\nu}, \ \omega_2 = \dfrac{\gamma_\nu(u)y^\nu}{\alpha_\nu(u)y^\nu}, \ \alpha_\nu\alpha^\nu = 1, \ \beta_\nu\beta^\nu = b(u) \neq 0,$

$\gamma_\nu\gamma^\nu = c(u) \neq 0, \ \alpha_\nu\beta^\nu = \alpha_\nu\gamma^\nu = \beta_\nu\gamma^\nu = 0,$

$A = \omega_1^2 + b, \ B = \omega_1\omega_2, \ C = \omega_2^2 + c.$

Проинтегрировать систему (2.7.2I) нам не удалось.

§ 8. "Размножение" решений

Знание группы инвариантности дифференциального уравнения позволяет по известным решениям при помощи преобразований данной группы строить новые решения этого уравнения.

Таким образом, зная хотя бы одно решение дифференциального уравнения можно построить целое семейство решений этого уравнения.

Этим вопросам и посвящен настоящий параграф.

Пусть

$$u = F(x) \tag{2.8.I}$$

какое-то частное решение некоторого дифференциального уравнения, допускающего группу инвариантности вида

$$\begin{cases} x' = f(x, u, a) \\ u' = g(x, u, a), \end{cases} \tag{2.8.2}$$

или

$$\begin{cases} x = \tilde{f}(x', u', a), \\ u = \tilde{g}(x', u', a). \end{cases} \tag{2.8 2 a}$$

Тогда новые решения данного уравнения ищутся из формулы

$$u' = F(x'),$$

т.е. заданы неявно

$$g(x, u, a) = F(f(x, u, a)). \tag{2.8.3}$$

Формулой (2.8.3) мы будем пользоваться в дальнейшем.

Как мы уже отмечали выше, известно, что при $K=\frac{n+2}{n-2}$ уравнение (2.3.I)

$$\square u+\lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}=0 \qquad (2.8.4)$$

конформно инвариантно и формулы (2.8.2) для этого уравнения имеют вид (см., например, [39])

$$\begin{aligned} x'_\mu &= \frac{1}{\sigma}\left(x_\mu+b_\mu x_\nu x^\nu\right),\\ u' &= \sigma^{\frac{n-2}{2}}u, \end{aligned} \qquad (2.8.5)$$

где

$$\sigma=1-2b_\nu x^\nu+b_\mu b^\mu x_\nu x^\nu, \qquad (2.8.6)$$

а b_μ – постоянные.

В этом случае формула (2.8.3) имеет вид

$$u=\sigma^{\frac{2-n}{2}}F\left(\frac{x_0-b_0x_\nu x^\nu}{\sigma},\ldots,\frac{x_{n-1}-b_{n-1}x_\nu x^\nu}{\sigma}\right). \qquad (2.8.7)$$

Таким образом, по известному решению $F(x)$ уравнения (2.8.4) мы можем построить новое решение $u(x)$ по формуле (2.8.7).

В параграфе 3 настоящей главы мы получили несколько решений уравнения (2.3.I) при произвольном K. Положив теперь в этих решениях $K=\frac{n+2}{n-2}$, по формуле (2.8.7) мы будем иметь новые решения уравнения (2.8.4). Например, функция

$$U = \left[f(\alpha_\nu x^\nu) + \beta_\nu x^\nu \right]^{\frac{2-n}{2}}, \qquad (2.8.8)$$

где $\alpha_\nu \alpha^\nu = \alpha_\nu \beta^\nu = 0$, $\beta_\nu \beta^\nu = \dfrac{4\lambda}{n(2-n)}$, является решением уравнения (2.8.4). Тогда из (2.8.7) имеем новое решение этого уравнения

$$U = \left[\sigma f\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu - \alpha_\nu b^\nu x_\mu x^\mu}{\sigma} \right) + \beta_\nu x^\nu - \beta_\nu b^\nu x_\mu x^\mu \right]^{\frac{2-n}{2}} \qquad (2.8.9)$$

Аналогичными рассуждениями "размножим" решения уравнения эйконала (2.7.I). Формулы (2.8.2) для этого уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x'_\mu = \frac{1}{\sigma}\left(x_\mu - b_\mu x_\nu x^\nu \right), \\ U' = U, \end{cases} \qquad (2.8.10)$$

а формула (2.8.3) будет следующей

$$U(x) = F\left(\frac{x_0 - b_0 x_\nu x^\nu}{\sigma}, \ldots, \frac{x_{n-1} - b_{n-1} x_\nu x^\nu}{\sigma} \right). \qquad (2.8.11)$$

Тогда, воспользовавшись формулами (2.7.6), (2.7.9), (2.8.II) будем иметь новые решения уравнения (2.7.I):

$$U = F\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu - \alpha_\mu b^\mu x_\nu x^\nu}{\sigma} \right), \quad \alpha_\nu \alpha^\nu = 0,$$

$$U = F\left(\frac{\beta_\nu x^\nu - \beta_\nu b^\nu x_\mu x^\mu \pm \sqrt{(\beta_\nu x^\nu - \beta_\nu b^\nu x_\mu x^\mu)^2 - a\sigma x_\nu x^\nu}}{\sigma} \right), \qquad (2.8.12)$$

где F — произвольная дифференцируемая функция.

ГЛАВА III

СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Обобщая результаты второй главы на случай систем ДУЧП, решения последних будем искать в виде

$$\mathcal{U}(x) = A(x)\varphi(\omega) + B(x), \tag{3.0.1}$$

где $\mathcal{U}(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}^0 \\ \vdots \\ \mathcal{U}^{m-1} \end{pmatrix}$, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi^{m-1} \end{pmatrix}$ – неизвестные функции,

$\omega = \omega(x) = \{\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}\}$ – инварианты группы инвариантности данных ДУЧП, $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$, $A(x)$ и $B(x)$ – известные переменные матрицы размерности $m \times m$ и $m \times 1$ соответственно.

Отметим, что формула (3.0.1) пригодна для отыскания решений систем ДУЧП, допускающих группу инвариантности вида

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + a\,\xi^\mu(x,\mathcal{U}) + O(a^2), \quad \mu = \overline{0, n-1}, \\ \mathcal{U}^{\nu\prime} &= \mathcal{U}^\nu + a\,\eta^\nu(x,\mathcal{U}) + O(a^2), \quad \nu = \overline{0, n-1}, \end{aligned} \tag{3.0.2}$$

если в последних формулах

$$\xi^\mu = \xi^\mu(x), \quad \eta^\nu = a_{\nu\lambda}\mathcal{U}^\lambda + b^\nu(x), \tag{3.0.3}$$

$a_{\nu\lambda}$ – постоянные, $\xi^\mu(x)$ и $b^\nu(x)$ – произвольные дифференцируемые функции.

Хотя условия (3.0.3) определяют частный вид преобразований группы (3.0.2), тем не менее они справедливы для многих классических уравнений математической физики: уравнений Максвелла, Дирака, Вейля, Ламе, Навье-Стокса, Д"Аламбера, Шредингера и др. Поэтому выделение групп, имеющих вид (3.0.2)-(3.0.3), вполне оправдано.

В настоящей главе исследована симметрия систем нелинейных ДУЧП гиперболического типа. Для нелинейных уравнений Ламе и Вейля решено несколько обратных симметрийных задач. Приведенным выше методом найдены точные решения нелинейного уравнения Вейля.

§ I. Релятивистский аналог уравнений Навье-Стокса

Уравнения Навье-Стокса, описывающие процессы гидродинамики, имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{u}) = 0, \\ p = f(\rho), \end{cases} \tag{3.I.I}$$

где $\vec{u}=\vec{u}(t,\vec{x})$ – скорость движения жидкости, $p=p(t,\vec{x})$ – давление жидкости, $\rho=\rho(t,\vec{x})$ – плотность жидкости, $\nu=\nu(\rho)$ – коэффициент вязкости.

Если плотность жидкости постоянная, то из уравнений (3.I.I) получим следующую систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\,\vec{\nabla})\vec{u} = \lambda \Delta \vec{u}, \\ div\,\vec{u} = 0. \end{cases} \qquad (3.I.2)$$

В [24], [49] изучены групповые свойства уравнений (3.I.I), (3.I.2). В этих работах установлено, в частности, что максимальной группой инвариантности уравнений (3.I.2) является группа $\tilde{G}(3) = \{G(3), D\}$ – группа Галилея и масштабных преобразований.

Системы (3.I.I) и (3.I.2) являются уравнениями параболического типа. В настоящем параграфе мы рассмотрим релятивистский аналог системы (3.I.2).

$$\begin{cases} (u\cdot\partial)u = \lambda \Box u, \\ \partial u = 0, \end{cases} \qquad (3.I.3)$$

где $u = u(x) = \{u^0, \vec{u}\}$, $\partial = (\partial_0, \vec{\partial})$, $x = (x_0, \vec{x})$ – четырех-векторы, $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$, $\vec{u} = (u^1, u^2, u^3)$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, и исследуем ее групповые свойства.

Для исследования симметрии уравнений (3.I.3) применим алгоритм [24].

Инфинитезимальный оператор группы инвариантности ищем в виде

$$X = \xi^{\mu}(x,u)\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + \eta^{\nu}(x,u)\frac{\partial}{\partial u^{\nu}}. \qquad (3.I.4)$$

После довольно громоздких преобразований получим, что координаты инфинитезимального оператора (3.I.4) имеют вид

$$\xi^0(x) = C_{00}x_0 + C_{0b}x_b + d_0,$$
$$\xi^a(x) = C_{00}x_a + C_{0a}x_0 + C_{ab}x_b + d_a, \qquad (3.I.5)$$
$$\eta^0(x) = C_{00}U^0 - C_{0b}U^b,$$
$$\eta^a(x) = C_{00}U^a - C_{0b}U^0 + C_{ab}U^b,$$

где $C_{\mu\nu}$, d_μ — постоянные, $C_{ab} = -C_{ba}$, $a \neq b$, $a,b = 1,2,3$.

Используя формулы (3.I.5), базисные элементы соответствующей алгебры инвариантности уравнения (3.I.3) запишем следующим образом

$$P_\mu = i g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu - i S_{\mu\nu},$$
$$D = x_\nu P^\nu - i, \quad \mu,\nu = \overline{0,3}, \qquad (3.I.6)$$

где $S_{\mu\nu}$ следующие матрицы

$$S_{01} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \qquad S_{02} = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$S_{03} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}, \qquad S_{12} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \qquad (3.I.7)$$

$$S_{13} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&-1\\ 0&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}, \qquad S_{23} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&-1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

Операторы (3.I.6)-(3.I.7) образуют алгебру $\widetilde{P}(1,3) = \{P(1,3), D\}$ — алгебру Пуанкаре и дилатации.

В результате можно сформулировать следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.I.I. Максимальной алгеброй инвариантности уравнений (3.I.3) является алгебра Пуанкаре и дилатации $\tilde{P}(1,3)$ с базисными операторами (3.I.6)-(3.I.7).

§ 2. Симметрия нелинейных уравнений Ламе и Вейля

В этом параграфе мы решим обратные симметрийные задачи для уравнений Ламе

$$\Box \vec{u} + \lambda_1 \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} = 0, \tag{3.2.I}$$

где $\vec{u} = \vec{u}(x) = \{u^1, u^2, u^3\}$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$,
$\lambda = const$ и Вейля

$$\sigma_\mu p^\mu u = 0 \tag{3.2.2}$$

где σ_μ – матрицы Паули, $u = u(x) = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$,
$p_\mu = i \frac{\partial}{\partial x_\mu}$.

Известно (см. [40] и [45]), что максимальной локальной группой инвариантности линейного уравнения Ламе (3.2.I) является восьмимерная группа Ли $\mathcal{G}_p$ с генераторами

$$p_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu},\ J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a - i(u^a \partial_{u^b} - u^b \partial_{u^a}), \quad a, b = 1, 2, 3, \quad D = x_\nu p^\nu. \tag{3.2.3}$$

Обратная симметрийная задача для уравнения Ламе (3.2.I) состоит в следующем: найти такие функции $\vec{F}(x,\vec{u})$, при которых нелинейное уравнение Ламе

$$\Box\vec{u} + \lambda_1 \vec{\nabla}\, div\, \vec{u} + \vec{F}(x,\vec{u}) = 0 \qquad (3.2.4)$$

оставалось бы инвариантным относительно той же 8-мерной группы Ли, что и линейное уравнение (3.2.I).

Т е о р е м а 3.2.I. Для того, чтобы максимальной группой инвариантности нелинейного уравнения Ламе (3.2.4) была группа Ли G_8, необходимо и достаточно, чтобы

$$\vec{F}(x,\vec{u}) = \lambda_2 (\vec{u}^2)^K \vec{u} \qquad (3.2.5)$$

где λ_2 и $K \neq 0$ – постоянные. Причем генераторы группы имеют вид (3.2.3) за исключением оператора дилатации

$$\mathcal{D} = x_\nu p^\nu + \frac{1}{K} \qquad (3.2.3\ а)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Применив алгоритм [24], после громоздких преобразований получаем, что координаты инфинитезимального оператора для уравнения (3.2.4) имеют вид

$$\begin{aligned} &\xi^0(x) = c_{00} x_0 + d_0,\ \xi^a(x) = c_{ab} x_b + d_a, \\ &\eta^a(x) = a_{ab} u^b, \end{aligned} \qquad (3.2.6)$$

где c_{ab}, $c_{\mu\nu}$, d_μ – постоянные, $a,b=\overline{1,3}$, $\mu,\nu=\overline{0,3}$, причем $c_{00} = c_{11} = c_{22} = K a_{11} = K a_{22} = K a_{33}$, $a_{ab} = c_{ab} = -c_{ba}$, а функция $\vec{F}(x,\vec{u})$ должна удовлетворять следующей системе ДУЧП

$$F^a_{x_\mu}=0 \ , \ a=\overline{1,3} \ , \ \mu=\overline{0,3}, \tag{3.2.7 а}$$

$$u^b F^a_{u^c} - u^c F^a_{u^b} = g_{ac} F^b, \ a\neq b, \ c\neq b, \ a,b,c=\overline{1,3} \tag{3.2.7 б}$$

$$u^b F^a_{u^b} = (2k+1) F^a \ , \ a=\overline{1,3}, \tag{3.2.7 в}$$

где F^a – координаты вектора $\vec{F}$, $F^a_{x_\mu}=\dfrac{\partial F^a}{\partial x_\mu}$,
$F^a_{u^b}=\dfrac{\partial F^a}{\partial u^b}$, g_{ab} – метрический тензор.

Из уравнения (3.2.7 а) получаем, что $\vec{F}$ не зависит от переменных x .

$$\vec{F}=\vec{F}(u) \ . \tag{3.2.8}$$

Тогда, принимая во внимание (3.2.8), из уравнений (3.2.7 б) имеем

$$\vec{F}=\varphi(\vec{u}^2)\,\vec{u} \ , \tag{3.2.9}$$

где φ – произвольная дифференцируемая функция. И, наконец, подставляя (3.2.9) в (3.2.7 в), для функции φ получим уравнение

$$\vec{u}^2\varphi' = k\varphi \tag{3.2.10}$$

общее решение которого

$$\varphi=\lambda_2(\vec{u}^2)^k. \tag{3.2.11}$$

Подставляя (3.2.11) в (3.2.9), получим формулу (3.2.5). Формулы (3.2.3), (3.2.3 а) следуют из (3.2.6).

Достаточность доказывается непосредственной проверкой.

Рассмотрим теперь уравнение Вейля (3.2.2). Хорошо известно (см. [28]), что максимальной алгеброй этого уравнения является конформная алгебра $C(1,3)$ с базисными операторами

$$
\begin{aligned}
&P_\mu = i g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + S_{\mu\nu}, \\
&D = x_\nu P^\nu + \frac{3}{2}i, \quad K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x^\nu P_\mu + \\
&+ 2S_{\mu\nu}x^\nu, \qquad \mu,\nu = \overline{0,3},
\end{aligned}
\tag{3.2.12}
$$

где $S_{0a} = \frac{i}{2}\sigma_a$, $S_{ab} = \frac{1}{2}\sigma_c$, $a,b,c = \overline{1,3}$.

Для уравнения Вейля мы решим несколько обратных симметрийных задач: при каких $F(x,u)$ уравнение

$$
\sigma_\mu P^\mu u + F(x,u) = 0 \tag{3.2.13}
$$

инвариантно относительно конформной алгебры $C(1,3)$ (3.2.12), а также относительно некоторых ее подалгебр. Введем следующие обозначения.

$$
\begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}, \quad \psi(x,v) = \begin{pmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix},
$$

$$
L = \sigma_\mu P^\mu, \qquad M = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L^* \end{pmatrix}. \tag{3.2.14}
$$

Звездочка вверху означает комплексное сопряжение.

В обозначениях (3.2.14) уравнение (3.2.13) запишется следующим образом

$$M v + \Psi(x, v) = 0. \qquad (3.2.15)$$

Уравнение (3.2.15) мы назовем нелинейным уравнением Вейля.

Т е о р е м а 3.2.2. Для того, чтобы нелинейное уравнение Вейля (3.2.15) было инвариантно относительно алгебры A необходимо и достаточно, чтобы $\Psi = \Phi$. Причем

1. если $A = C(1,3)$, то $\Phi \equiv 0$, (3.2.16 а)

2. если $A = \widetilde{P}(1,3)$, то $\Phi \equiv 0$, (3.2.16 б)

3. если $A = P(1,3)$, то $\Phi = \lambda \Sigma v$, (3.2.16 в)

4. если $A = \widetilde{E}(1,3) = \{P_\mu, J_{ab}, D\}$, то $\Phi = \lambda (v^+ v)^\kappa v$, (3.2.16 г)

где $P(1,3)$ – алгебра Пуанкаре, $\{J_{ab}\}$ – алгебра пространственных вращений, матрица $\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$, v^+ – эрмитово сопряжение функции v, λ и κ – постоянные.

Т е о р е м а 3.2.2. доказывается аналогично теореме 3.2.1.

§ 3. Точные решения нелинейного уравнения Вейля

Из всех случаев теоремы 3.2.2. только четвертый дает нам нелинейное уравнение Вейля. Поэтому ниже мы рассмотрим уравнение

$$\sigma_\mu p^\mu u + \lambda (u^+ u)^\kappa u = 0 \qquad (3.3.1)$$

Используя формулы (3.2.12), (3.2.16 г), известным способом (см. [21]) получим, что функции $\xi^\mu(x, u)$ и $\eta^a(x, u)$

из (3.I.3) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\xi^0(x) = c_{00} x_0 + d_0 \\
&\xi^a(x) = c_{00} x_a + c_{ab} x_b + d_a, \ a \neq b, \ a, b = \overline{1,3}, \\
&\eta^0(u) = \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{c_{00}}{k} + i c_{12}\right) u^0 + \tfrac{1}{2}\left(-c_{13} + i c_{23}\right) u^1, \\
&\eta^1(u) = \tfrac{1}{2}\left(c_{13} + i c_{23}\right) u^0 + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{c_{00}}{k} - i c_{12}\right) u^1,
\end{aligned} \tag{3.3.2}
$$

где $c_{\mu\nu}$ и d_μ — постоянные, $c_{ab} = -c_{ba}$.

Т.е. преобразования группы инвариантности уравнения (3.3.I) удовлетворяют условиям (3.0.3).

Поэтому решения нелинейного уравнения Вейля (3.3.I) ищем в виде (в формулах (3.0.3) $b^a(x) \equiv 0$).

$$
u = A(x)\varphi(\omega), \tag{3.3.3}
$$

где $A(x) = \begin{pmatrix} f^{00}(x) & f^{01}(x) \\ f^{10}(x) & f^{11}(x) \end{pmatrix}$, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \end{pmatrix}$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

В зависимости от соотношений между коэффициентами $c_{\mu\nu}$ и d_μ в формулах (3.3.2) имеем несколько случаев (см. лемму 2.I.2).

а). $\omega_1 = \dfrac{\alpha_a y_a}{y_0}$, $\omega_2 = \dfrac{\beta_a y_a}{y_0}$, $\omega_3 = \dfrac{\gamma_a y_a}{y_0}$,

$$
A(x) = i \begin{pmatrix} \alpha - \alpha_3 & \alpha_1 - i\alpha_2 \\ -\alpha_1 - i\alpha_2 & \alpha - \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0^{a_+} & 0 \\ 0 & y_0^{a_-} \end{pmatrix} \equiv B \begin{pmatrix} y_0^{a_+} & 0 \\ 0 & y_0^{a_-} \end{pmatrix}, \tag{3.3.4}
$$

где $y_\mu = x_\mu + a_\mu$, $\mu = \overline{0,3}$, $a_\pm = \dfrac{c_{00} \pm i\alpha k}{-2k\, c_{00}}$,

$$\vec{\alpha} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (c_{23}, -c_{13}, c_{12}), \quad |\vec{\alpha}| = \alpha,$$

$$\vec{B} \equiv (\alpha_1 \alpha_3 \sin a - \alpha_1 \alpha_2 \cos a,\ \alpha_2 \alpha_3 \sin a + \alpha \alpha_1 \cos a,\ (\alpha_3^2 - \alpha^2) \sin a),$$

$\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{B}}{da}$, $\quad a_\mu$ – произвольные постоянные,

$a = a(x_0) = \frac{\alpha}{c_{00}} \ln y_0$.

После подстановки (3.3.3), (3.3.4) в уравнение (3.3.I) для функции $\varphi(\omega)$ получим уравнение в пространстве трех независимых переменных $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$:

$$\begin{cases} (\omega_1 + \alpha)\varphi_1^0 + (\omega_2 - \frac{\alpha}{c_{00}}\omega_2)\varphi_2^0 + (\omega_3 + \frac{\alpha}{c_{00}}\omega_2)\varphi_3^0 + \alpha(\alpha_2 + i\alpha_1) \times \\ \times (\varphi_2^1 - i\varphi_3^1) - a_+ \varphi^0 + i\mu(\varphi^+\varphi)^k \varphi^0 = 0, \\ (\omega_1 - \alpha)\varphi_1^1 + \alpha(\alpha_2 - i\alpha_1)(\varphi_2^0 + i\varphi_3^0) + (\omega_2 - \frac{\alpha}{c_{00}}\omega_3)\varphi_2^1 + \\ + (\omega_3 + \frac{\alpha}{c_{00}}\omega_2)\varphi_3^1 - a_- \varphi^1 + i\mu(\varphi^+\varphi)^k \varphi^1 = 0, \end{cases} \tag{3.3.5}$$

где $\mu = \lambda[2\alpha(\alpha - \alpha_3)]^k$.

Если предположить, что $\varphi = \varphi(\omega_2, \omega_3)$, то для функции получим уравнения в пространстве 2-х независимых переменных $\omega = (\omega_2, \omega_3)$:

$$\begin{cases} (\omega_2 - \frac{\alpha}{c_{00}}\omega_3)\varphi_2^0 + (\omega_3 + \frac{\alpha}{c_{00}}\omega_2)\varphi_3^0 + \alpha(\alpha_2 + i\alpha_1)(\varphi_2^1 - i\varphi_3^1) - a_+\varphi^0 + \mu(\varphi^+\varphi)^k\varphi = 0, \\ \alpha(\alpha_2 - i\alpha_1)(\varphi_2^0 + i\varphi_3^0) + (\omega_3 - \frac{\alpha}{c_{00}}\omega_2)\varphi_2^1 + (\omega_3 + \frac{\alpha}{c_{00}}\omega_2)\varphi_3^1 - a_-\varphi^1 + i\mu(\varphi^+\varphi)^k\varphi = 0. \end{cases} \tag{3.3.6}$$

Если же $\varphi = \varphi(\omega_1)$, то для функции φ получим ОДУ

$$\begin{cases} (\omega_1 + \alpha)\varphi^0_1 - a_+ \varphi^0 + i\mu(\varphi^+\varphi)^k \varphi^0 = 0, \\ (\omega_1 - \alpha)\varphi^1_1 - a_- \varphi^1 + i\mu(\varphi^+\varphi)^k \varphi^1 = 0. \end{cases} \quad (3.3.7)$$

Последнюю систему ОДУ удалось решить:

$$\begin{cases} \varphi^0 = C_0(\alpha + \omega_1)^{b_+}, \\ \varphi^1 = C_1(\alpha - \omega_1)^{b_-}, \end{cases} \quad (3.3.8)$$

где C_0, C_1 – постоянные интегрирования,

$b_\pm = i\mu(2b\alpha)^k + a_\pm, (-2b\alpha)^k 2i\, \mathcal{J}m\mu = 1 + \frac{1}{k}, \ |C_0|^2 = |C_1|^2 = b.$

Тогда из (3.3.3), (3.3.4) и (3.3.8) имеем решение уравнения Вейля (3.3.I):

$$U = y_0^{\,ih} B \begin{pmatrix} C_0(\alpha y_0 + \alpha_a y_a)^{b_+} \\ C_1(\alpha y_0 - \alpha_a y_a)^{b_-} \end{pmatrix}, \quad (3.3.9)$$

где $h = \mu(2b\alpha)^k$.

б) $\omega_1 = \alpha_a x_a + \frac{a}{\alpha} z_0, \ \omega_2 = \beta_a x_a + a \sin z_0 + b \cos z_0,$

$$\omega_3 = \gamma_a x_a + a \cos z_0 - b \sin z_0,$$
$$A(\vec{x}) = B \cdot \begin{pmatrix} \exp(-\frac{iz_0}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(\frac{iz_0}{2}) \end{pmatrix}, \quad (3.3.10)$$

где $\vec{\alpha}$ и B – такие, как и в предыдущем случае,

$\vec{\beta} = (\alpha_1\alpha_3 \sin z_0 - \alpha\alpha_2 \cos z_0, \alpha_2\alpha_3 \sin z_0 + \alpha\alpha_1 \cos z_0, (\alpha_3^2 - \alpha^2)\sin z_0),$

$\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{\beta}}{d z_0}$, $z_0 = \dfrac{\alpha}{\alpha_0} x_0$, a , b – произвольные постоянные.

Для функции $\varphi(\omega)$, после подстановки (3.3.3), (3.3.10) в (3.3.1) получим систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{\alpha} - \alpha\right)\varphi_1^0 + \frac{\alpha}{\alpha_0}\omega_3\varphi_2^0 - \frac{\alpha}{\alpha_0}\varphi_3^0 - \alpha(\alpha_2 + i\alpha_1)(\varphi_2^1 - i\varphi_3^1) - \\ - \frac{i\alpha}{2\alpha_0}\varphi^0 - i\mu(\varphi^{+}\varphi)^{\kappa}\varphi^0 = 0, \\ \alpha(-\alpha_2 + i\alpha_1)(\varphi_2^0 + i\varphi_3^0) + \left(\frac{a}{\alpha_0} + \alpha\right)\varphi_1^1 + \frac{\alpha}{\alpha_0}\omega_3\varphi_2^1 - \frac{\alpha}{\alpha_0}\omega_2\varphi_3^1 + \\ + \frac{i\alpha}{2\alpha_0}\varphi^1 - i\mu(\varphi^{+}\varphi)^{\kappa}\varphi^0 = 0. \end{cases} \tag{3.3.11}$$

Аналогично как и в предыдущем случае из (3.3.11) можно получить уравнения, в пространстве 3-х, 2-х и одной независимых переменных ω . Мы выпишем только ОДУ для функции $\varphi = \varphi(\omega_1)$:

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{\alpha_0} - \alpha\right)\varphi_1^0 - \frac{i\alpha}{2\alpha_0}\varphi^0 - i\mu(\varphi^{+}\varphi)^{\kappa}\varphi^0 = 0, \\ \left(\frac{a}{\alpha_0} + \alpha\right)\varphi_1^1 + \frac{i\alpha}{2\alpha_0}\varphi^1 - i\mu(\varphi^{+}\varphi)^{\kappa}\varphi^1 = 0. \end{cases} \tag{3.3.12}$$

Последние уравнения в случае действительной постоянной имеют решения

$$\begin{cases} \varphi^0 = c_0 \exp(ia + \omega_1), \\ \varphi^1 = c_1 \exp(ia - \omega_1), \end{cases} \tag{3.3.13}$$

где c_0 , c_1 – постоянные интегрирования,

$$\lambda_{\pm} = \frac{\mu d_0 S^{\kappa} \pm 2a}{2(a \mp \lambda d_0)}, \quad |c_0|^2 + |c_1|^2 = S .$$ Тогда из (3.3.3),

(3.3.I0) и (3.3.I3) имеем решение уравнения Вейля (3.3.I)

$$u = B \begin{pmatrix} c_0 \exp[i a_+ (\lambda_a x_a + \frac{a}{\lambda} x_0) - \frac{i}{2} x_0] \\ c_1 \exp[i a_- (\lambda_a x_a + \frac{a}{\lambda} x_0) + \frac{i}{2} x_0] \end{pmatrix}. \tag{3.3.I4}$$

в) $$\omega_a = \frac{y_a}{y_0}, \quad a = \overline{1,3}, \quad A(x) = y_0^{-\frac{1}{2\kappa}} E, \tag{3.3.I5}$$

где E —единичная матрица.

После подстановки (3.3.3), (3.3.I5) в (3.3.I) для функции $\varphi(\omega)$ получаем уравнения

$$\begin{gathered} -[\omega_1 \varphi_1^0 + \omega_2 \varphi_2^0 + (\omega_3 - 1)\varphi_3^0] + (\varphi_1^1 - i\varphi_2^1) - \frac{1}{2\kappa}\varphi^0 + \lambda(\varphi^+\varphi)^{\kappa}\varphi^0 = 0, \\ (\varphi_1^0 + i\varphi_2^0) - [\omega_1 \varphi_1^1 + \omega_2 \varphi_2^1 + (\omega_3 + 1)\varphi_3^1] - \frac{1}{2\kappa}\varphi^1 + \lambda(\varphi^+\varphi)^{\kappa}\varphi^1 = 0. \end{gathered} \tag{3.3.I6}$$

Например, в случае $\varphi = \varphi(\omega_1)$ имеем решение

$$\varphi^{\mu} = c_{\mu} \omega^{a}, \quad \mu = 0,1, \tag{3.3.I7}$$

где c_{μ} - постоянные интегрирования,

$a = \lambda S^{\kappa} - \frac{1}{2\kappa}$, $S = |c_0|^2 + |c_1|^2$. Тогда

$$u^{\mu} = c_{\mu} y_0^{-\frac{1}{2\kappa}} \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{a}. \tag{3.3.I8}$$

решение уравнения (3.3.I). Отметим, что последнее решение зависит только от переменных x_0 и x_1 .

г) $\omega_1 = \alpha_\nu x^\nu$, $\omega_2 = \beta_\nu x^\nu$, $\omega_3 = \gamma_\nu x^\nu$, $A(x) = E$, (3.3.I9)

где α_ν , β_ν , γ_ν - произвольные постоянные, $\nu = \overline{0,3}$.

После подстановки (3.3.3), (3.3.I9) в (3.3.I) для функции $\varphi(\omega)$ получим уравнение

$$i(\sigma_\mu \alpha^\mu \varphi_1 + \sigma_\mu \beta^\mu \varphi_2 + \sigma_\mu \gamma^\mu \varphi_3) + \lambda(\varphi^+\varphi)^k \varphi = 0. \qquad (3.3.20)$$

Например, если $\varphi = \varphi(\omega_1)$ и λ - действительное, то решением (3.3.20) будет

$$\varphi = [2\alpha(\alpha - \alpha_3)]^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 i & \alpha_1 - i\alpha_2 \\ \alpha - \alpha_3 & -\alpha_1 - \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \exp(ia + \omega_1) \\ C_1 \exp(ia - \omega_1) \end{pmatrix}, \qquad (3.3.2I)$$

где C_0 , C_1 - постоянные интегрирования, $a_\pm = -\frac{\lambda S^k}{\alpha_0 \mp \alpha}$, $S = |C_0|^2 + |C_1|^2$, $\alpha = \sqrt{\alpha_a \alpha_a}$. Тогда

$$U = [2\alpha(\alpha - \alpha_3)]^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \alpha_1 - i\alpha_2 & \alpha_1 - i\alpha_2 \\ \alpha - \alpha_3 & -\alpha_1 - i\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \exp(ia + \alpha_\nu x^\nu) \\ C_1 \exp(ia - \alpha_\nu x^\nu) \end{pmatrix} - \qquad (3.3.22)$$

решение уравнения Вейля (3.3.I).

Литература

1. Барбашов Б.М., Черников Н.А. Решение и квантование нелинейной двумерной модели типа поля Борна-Инфельда. ЖЭТФ, 1966, 50, с.1296–1308.
2. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. – М.: Мир, 1980, 1–2 т.
3. Биркгоф Г. Гидродинамика. – М.: ИЛ, 1963.
4. Бицадзе А.В. К теории одного класса нелинейных уравнений в частных производных. – Диф. ур–ния, 1977, 13, № 11, с.1994.
5. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
6. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представления групп. – М.: Наука, 1965.
7. Винтерниц П., Фриш И. Инвариантные разложения релятивистских амплитуд и подгруппы собственной группы Лоренца. – Ядерная физика, 1965, 1, вып.5, с.889–901.
8. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. – Гостехиздат, 1934. – 360 с.
9. Гюнтер П. Некоторые теоремы для дифференциальных уравнений типа Гюйгенса. – Вестник Киевского ун–та. Спец.вып. – Киев, 1967, с.110–130.
10. Джорджадзе Г.П., Погребков А.К., Поливанов М.К. Сингулярные решения уравнения $\Box\varphi + \frac{m^2}{2} \exp\varphi = 0$ и динамика особенностей. – ТМФ, 1979, 40, № 3, с.221–234.
11. Ибрагимов Н.Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики. – Новосибирский гос. ун–т, 1972. – 159 с.

I2. Ибрагимов Н.Х. Группы Ли-Беклунда и законы сохранения. – ДАН СССР, 1976, 240, № I.

I3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965.

I4. Катков В.Л. Точные решения некоторых задач конвекции. – ПММ, 1968, 32, № 3, с.482-486.

I5. Кошляков Н.С., Глинер Э.В., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: "Высшая школа", 1970.

I6. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. – М., ИЛ, 1950. – 426 с.

I7. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: "Мир", 1964. – 830 с.

I8. Курдгелаидзе Д.Ф. Нелинейное рассеяние в электродинамике и мезодинамике. – Вестник МГУ, 1954, вып.8, с.8I.

I9. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. – М.: "Мир", 198I, – 344 с.

20. Овсянников Л.В. О линеаризации уравнения с частными производными 2-го порядка. – ДАН СССР, 1955, I02, № 2, с.2I9-222.

2I. Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. – Новосибирск, НГУ, 1966.

22. Овсянников Л.В. Частичная инвариантность. – ДАН СССР, 1969, I86, № I, с.22-25.

23. Овсянников Л.В. Аналитические группы. – Новосибирск, НГУ, 1972.

24. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

25. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. – М.: Гостехиздат, 1954.

26. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1968. – 592 с.

27. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М., Гостехиздат, 1957.

26. Сулехман Н.А. О максимальной алгебре симметрии одной системы интегро-дифференциальных уравнений. – В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. – Ин-т математики АН УССР, 1981, с.125-131.

27. Серов Н.И. О конформной инвариантности некоторых дифференциальных уравнений в частных производных. – В кн.: Нелинейные краевые задачи. – Ин-т математики АН УССР, 1980, с.161-165.

28. Серов Н.И. Нелинейные волновые уравнения Ламе и Вейля. – В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. – Ин-т математики АН УССР, 1981, с.49-53.

29. Серов Н.И. Конформная инвариантность нелинейных волновых уравнений. – В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. – Ин-т математики АН УССР, 1981, с.59-63.

30. Смирнов В.И., Соболев С.Л. Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний. – Труды сейсмологического ин-та, 1932, вып.20, с.1-37.

31. Сибирский К.С. Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц. – Изд. "Штиинца", Кишинев, 1976.

32. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М., Гостехиздат, 1953.

33. Суровихин К.П. Инвариантный смысл инвариантов Римана. – ДАН СССР, 1965, 163, № 2, с.319-322.

34. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.

35. Уизем Д. Линейные и нелинейные волны. – М.: "Мир", 1977.

36. Филиппов Ю.Г. Применение инвариантно-группового метода к решению задачи определения течения неоднородного океана. – Метереология и гидрология, -1969, № 9, с.53.

37. Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики. – ДАН СССР, 1979, 246, № 4, с.846-850.

38. Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики. – В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. – Ин-т математики АН УССР, 1981, с.6-27.

39. Фущич В.И., Сегеда Ю.Н. О группах инвариантности некоторых уравнений релятивистской квантовой механики. – Укр. мат. журн., 1976, 28, № 6, с.836-841.

40. Фущич В.И., Наконечный В.В. Теоретико-алгебраический анализ уравнений Ламе. – Укр.мат.журн,, 1980, 32, № 2, с.267-272.

41. Фущич В.И., Серов Н.И., Москалюк С.С. О точных решениях нелинейных многомерных волновых уравнений. – В кн.: IX Международная конференция по нелинейным колебаниям (Киев, 30 августа – 6 сентября 1981 г.): Тез.докл. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981, с.338-339.

42. Фущич В.И., Серов Н.И., Москалюк С.С. О точных решениях нелинейных многомерных волновых уравнений. – В кн.: IX Международная конференция по нелинейным колебаниям (Киев, 30 августа – 6 сентября 1981 г.): Доклады. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983.

43. Фущич В.И., Серов Н.И. О точных решениях уравнения Борна-Инфельда. – ДАН СССР, 1982, 263, с.582-586.

44. Чеботарев Н.Г. Теория групп Ли. – М., Гостехиздат, 1949.

45. Черкунов Ю.А. Групповое свойство уравнений Ламе. – В кн.: Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1973, вып.14, с.128-130.

46. Чупахин А.П. Нелинейные конформно-инвариантные уравнения в пространстве V_n с нетривиальной конформной группой. – В кн.: Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1976, вып.25, с.12[illegible]

47. Штелень В.М. Об одной системе нелинейных дифференциальных уравнений, инвариантной относительно группы Шредингера. – В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. – Ин-т математики АН УССР, 1981, с.104-107.

48. Эйзенхарт Л. Непрерывные группы преобразований. – М., ИЛ, 1947.

49. Яненко Н.Н. Бегущие волны системы квазилинейных уравнений. – ДАН СССР, 1956, 109, № 1, с.44-47.

50. Actor A. Elliptic Function in φ^4 Theory and Yang-Mills Theory. – Annal. Phys., 1979, 121, p. 181-203.

51. Ames W.F. Nonlinear Partial Differential Equation in Engineering.- New York: Academic Press, 1972. - 304 p.

52. Barone A., Esposito F., Magee C.J., Scott A.C. Theory and application of the Sine-Gordon equation. - Rivista del Nuovo Cimento, 1971, 2, 1, p. 227-267.

53. Bateman H. The Transformation of the Electrodynamical Equations. - Proc. London Math. Soc., 1909, p. 223-264.

54. Birkhoff G. Analitical groups. - Trans. Amer. Math. Soc.,

I938, 43, I, p. 6I-I0I.

55. Birkhoff G. Dimensional analysis of partial differential equations. - Electr. Enging., I948, 67, p. II85-II88.

56. Burt P.B. Quantization of solitary waves in nonlinear fild theories. - Acta physica polonica, I976, 7, 9, p. 6I7-625.

57. Fushchich W.I., Moskaliuck S.S. On some exact solutions of the nonlinear Schrodinger equation in three spatial dimension. - Lett. Nuovo Cim., I98I, 3I, I6, p. 57I-576.

58. Fushchich W.I., Shtelen W.M. The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation. - Lett. Nuovo Cim., I982, 4I, 3, p. 372-374.

59. Hirota R. Exact N-soliton solutions of the wave equation of long waves in shallow-water and in nonlinear lottices. - J. Math. Phys., I973, I4, p. 8I0-8I5.

60. Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. - Communs Pure and Appl. Math., I950, 3, p. 20I-230.

6I. Lie S. Uber Differentialinvarianten. - Math. Ann., I884, 24, I, p. 52-89.

62. Lie S. Vorlesungen uber Continuierlichen Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen, G.Sheffers /ed./, Teubner, Leipzig, I893.

63. Lie S., Engel F. Teorie der Transformationsgruppen, I-3, Leipzig, Teubner, I888, I890, I893.

64. Liouville J. Sur l´equation aux diffences partcalles $d^2 \log x/du dv \pm \pm x/2q^2 = 0$. - J. Math. Pures Appl, I853, I8, p. 77.

65. Lorentz G.A. Electromagnetic Phenomena in a System Moving with Any Velocity Smaller then Theit of Light. - Proc. Acad. Sci.,

Amesterdam, I904, 6, p. 809-830.

66. Morgan A.J.A. The reduction by one of the number of independent variables in some systems of partial differential equations. - Quart. J. Math. Oxford., I952, 3, I2, p. 250-259.

67. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P. and Zassenhaus H. Subgroup of the Poincare group and their invariants. - J. Math. Phys., I976, I7, 6, p. 977-984.

68. Perk J.H., Popowich Z. Comment on New exact solution Sine-Gordon equation in 2+I and 3+I dimensions. - Phys. Rev., I98I, 23, IO, p. 2482-2483.

69. Poincare H. Sur la dynamique de I`electron. - Comptes Rendus Acad. Sei., I905, I40, p. I504-I506.