АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

Спичак Станислав Викторович

УДК 517.9: 519.46

СИММЕТРИЙНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ СПИНОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
член-корреспондент АН УССР,
профессор ФУЩИЧ В.И.

Киев – 1991

С О Д Е Р Ж А Н И Е

В В Е Д Е Н И Е

В современных исследованиях по математической физике возрастающую роль играет принцип симметрии. Это связано прежде всего с тем, что основные уравнения движения обладают локальной и нелокальной, геометрической и негеометрической симметриями.

К настоящему времени известны два основных принципа относительности, которым подчиняются все фундаментальные уравнения движения физики, механики и гидродинамики: принцип относительности Галилея и Лоренца-Пуанкаре-Эйнштейна. Другими словами, эти уравнения инвариантны либо относительно группы Галилея $G(1,3)$, либо относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$ соответственно. Такие дифференциальные уравнения в частных производных /ДУЧП/, как линейные, так и нелинейные, можно полностью описать [46]. Из сказанного следует, что самые разнообразные по своей природе процессы описываются сравнительно небольшим набором уравнений [42,50,54,12,35].

Следующей по своей фундаментальности характеристикой ДУЧП является, по-видимому, конкретное представление его групп инвариантности. Представление определяет такие физические величины как масса, спин, спиральность, и т.д. Если уравнению отвечают различные представления группы инвариантности, то оно может описывать как фермионы /полуцелый спин/, так и бозоны /целый спин/, и в этом случае следует ожидать наличие супералгебры симметрии. Такие системы представляют особый интерес.

Следующий шаг в изучении систем ДУЧП является нахождение более широкой чем $G(1,3)$ или $P(1,3)$ группы симметрии, которой отвечают естественные физические преобразования: дилатация, инверсия [38] /группы $\tilde{P}(1,3)$, $G_1(1,3)$, $C(1,3)$ и т.д./. Отсюда возникает задача отыскания соответствующего класса пуанкаре- и галилеевско-инвариантных уравнений [27] . Кроме того, чем шире группа симметрии ДУЧП, тем более широкий класс его точных решений можно найти. Группа инвариантности позволяет также вычислить интегралы движения.

Из всего сказанного следует актуальность задач, которые рассматриваются в данной диссертации.

Первая глава посвящается описанию систем ДУЧП второго порядка с заданной группой. В качестве таких групп выбираются $P(1,3)$, $\tilde{P}(1,3)$ /расширенная группа Пуанкаре/ и $C(1,3)$ /конформная группа.

Во второй главе исследуются различные системы линейных и нелинейных уравнений Дирака /УД/. Хорошо известно [5], что эти системы описывают фермионное поле, поскольку они инвариантны относительно алгебры Пуанкаре, операторы которой образуют представление со спином $S=\frac{1}{2}$. Показано, что УД инвариантно также относительно $AP(1,3)$, представлению которой отвечают спины $S=0,1$, и, следовательно, УД пригодно для описания бозонных полей. У широкого класса нелинейных УД установлено наличие супералгебры симметрии. Получены формулы, связывающие решения безмассового УД с решениями уравнений Максвелла / $S=0,1$ / и Рариты-Швингера / $S=\frac{3}{2}$ /. Построены анзацы и точные решения рассмотренных уравнений.

В третьей главе изучаются ДУЧП первого порядка, инвариантные относительно группы Галилея $G(1,3)$. Описаны нелинейные обобщения уравнений для частицы со спином $S=\frac{1}{2}$ [6,55] , инвариантные относительно групп $G(1,3)$, $G_1(1,3)$, $G_2(1,3)$. Установлены формулы, связывающие решения безмассового спинорного уравнения с решениями $G(1,3)$ -инвариантных уравнений электродинамики /скорость света $c \to \infty$ /. Показана двойственная $G(1,3)$ -инвариантность / $S=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$; $S=0,1$ / многих нелинейных уравнений, а также наличие у них суперсалгебр симметрии. Получены анзацы и точные решения рассмотренных уравнений.

В диссертационной работе использован теоретико-алгебраический подход для построения уравнений, инвариантных относительно заданных групп, а также для нахождения групп симметрий данного уравнения. Метод исследования групповых свойств ДУЧП был впервые предложен С.Ли [56]. Основные определения и теоремы этой теории приведены, например, в [10,19]. Из них приведем лишь самые необходимые для нас.

Теорема 0.1. Множество всех симметрийных преобразований системы ДУЧП образует многопараметрическую группу Ли, и, следовательно, всякой системе соответствует алгебра инвариантности /АИ/ Ли $\{Q_\alpha\}$, $\alpha=\overline{1,l}$, где Q_α – базисные операторы АИ с коммутационными соотношениями.

Следствие 0.1. Из этой теоремы вытекает, что для отыскания группы симметрии системы ДУЧП достаточно найти такое множество операторов симметрии $\{Q_\beta\}$, $\beta=\overline{1,m}$, $m\leq l$, что из них с помощью коммутационных соотношений можно получить любой оператор из АИ $\{Q_\alpha\}$, $\alpha=\overline{1,l}$.

Пусть система ДУЧП записывается в виде

$$L^\eta(u^\nu,x^\mu)=0\ ,\ \mu=\overline{1,n}\ ,\ \nu=\overline{1,m}\ ,\ \eta=\overline{1,k} \qquad /0.1/$$

x^μ – независимые, u^ν – зависимые переменные. Условием того, что оператор Q есть оператор симметрии для уравнения /0.1/ является соотношение:

$$\underset{2}{Q}L(u^\nu,x^\mu)=\Lambda(x,u)\,L(u,x)\,, \qquad /0.2/$$

где $L=\{L^\eta\}$, $\Lambda(x,u)$ – матрично-дифференциальный оператор /размерности $k\times k$ /, $\underset{2}{Q}$ – второе продолжение оператора Q /см.[19]/. /Если $L(u,x)$ – уравнение первого порядка, то достаточно взять первое продолжение $\underset{1}{Q}$ /. Можно показать, что если Q – локальный оператор, то Λ будет матричной функцией.

В первой главе изучаются уравнения вида

$$\Box\Psi^{\nu} + L^{\nu}(x^{\mu}, \Psi^{\eta}, \partial_{\alpha}\Psi^{\eta}) = 0, \mu, \nu, \eta, \alpha = \overline{0,3}\ , \qquad /0.3/$$

среди которых ищутся уравнения, инвариантные относительно операторов:

$$Q = \xi^{\mu}(x)\partial_{\mu} + A^{\mu\nu}(x)\Psi_{\nu}\,\partial_{\Psi^{\mu}}\ ,$$

$$/0.4/$$

$$\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}},\ \partial_{\Psi^{\mu}} \equiv \frac{\partial}{\partial \Psi^{\mu}},\ \xi^{\mu}(x)\ ,\ A^{\mu\nu}(x) - \text{ матрица.}$$

Наиболее простой алгоритм поиска таких уравнений, по-видимому, состоит в следующем. Оператору /0.4/ соответствует однопараметрическая группа, в которой параметр ε положим бесконечно малым:

$$(x^{\mu})' = x^{\mu} + \varepsilon\xi^{\mu}(x) + 0(\varepsilon), (\Psi^{\nu})' = \Psi^{\nu} + \varepsilon A^{\nu\mu}(x)\Psi_{\mu} + 0(\varepsilon)\ , \qquad /0.5/$$

$$\frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon} \longrightarrow 0, \quad \varepsilon \longrightarrow 0\ .$$

Отсюда получаем:

$$\partial_{\alpha} \sim \partial_{\alpha}' + \varepsilon\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\partial_{\beta}\ , \quad \partial_{\alpha}' = \frac{\partial}{\partial(x^{\alpha})'}\ ,$$

$$\partial_{\alpha}u^{\nu} \sim [\partial_{\alpha}u^{\nu}]' + \varepsilon\left[\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\partial_{\beta}u^{\nu} + \partial_{\alpha}A^{\nu\mu}\Psi_{\mu} + A^{\nu\mu}\Psi_{\mu\alpha}\right],$$

где $\quad [\partial_{\alpha}u^{\nu}]' = \partial_{\alpha}'(u^{\nu})', \quad \Psi_{\mu\alpha} = \dfrac{\partial\Psi_{\mu}}{\partial x^{\alpha}}$

знак " $\sim$ " означает равенство с точностью до $0(\varepsilon)$, $\varepsilon \longrightarrow 0$ /по повторяющимся индексам подразумевается суммирование/. Продолжая вычислять вторые производные /с точностью до $0(\varepsilon)$/ можно получить, используя формулы для $\underset{2}{Q}$, что

$$\Box\Psi + L(x, \Psi, \partial_{\alpha}\Psi) \sim [\Box\Psi + L(x, \Psi, \partial_{\alpha}\Psi)]' -$$

$$/0.6/$$

$$-\varepsilon\underset{2}{Q}[\Box\Psi + L]\ ,\ L' = L(x', u', \partial_{\alpha}'u')\ .$$

Для операторов /0.4/ будет иметь место соотношение:

$$\underset{2}{Q}\,\Box\Psi = \Lambda(x)\Box\Psi + \mathcal{P}(x, \Psi, \partial_{\alpha}\Psi)$$

где $\Lambda(x)$ – матричная функция, $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}^{\nu}\}$, $\nu = \overline{0,3}$. Отсюда и из /0.6/ можно получить условие инвариантности уравнений /0.3/

относительно $\mathbf{Q}$ /0.4/:

$$\mathcal{P}(x,\Psi,\partial_\alpha\Psi) + \underset{1}{Q}\, L(x,\Psi,\partial_\alpha\Psi) = \Lambda(x)\, L(x,\Psi,\partial_\alpha\Psi)\ . \qquad /0.7/$$

Аналогичный подход применяется и в 3 главе для поиска нелинейных уравнений первого порядка, с заданной АИ.

Другие определения и соотношения будут вводиться в диссертации по мере необходимости.

В заключении дана краткая характеристика основных результатов исследования. Основное содержание опубликовано в [20,21,22, 36,49].

Автор выражает благодарность научному руководителю члену-корреспонденту АН УССР В.И.Фущичу, кандидату физ.-мат. наук В.М. Штеленю за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ГЛАВА 1. ПУАНКАРЕ-ИНВАРИАНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ СПИНОРНОГО ПОЛЯ.

Настоящая глава посвящена теоретико-алгебраическому исследованию уравнений, инвариантных относительно алгебры Пуанкаре, расширенной алгебры Пуанкаре и конформной алгебре.

§ 1.1. Нелинейные волновые уравнения с дополнительными условиями.

Ковариантное представление [26] алгебры Пуанкаре задается операторами:

$$P_\mu = \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}\ , \quad J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + S_{\mu\nu}\ , \qquad /1.1.1/$$

$S_{\mu\nu}$ - матрицы, $\mu, \nu = 0{,}3 \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$,

где метрика $g_{\mu\nu} = diag\{1, -1, -1, -1\}$.

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0\ ;\ [P_\sigma, J_{\mu\nu}] = g_{\sigma\mu} P_\nu - g_{\sigma\nu} P_\mu\ , \qquad /1.1.2/$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = g_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} J_{\mu\rho}\ .$$

1. Рассмотрим нелинейное уравнение вида

$$\Box\Psi + F(\bar\Psi\Psi, \bar\Psi\gamma^4\Psi)\Psi = 0\ , \qquad /1.1.3/$$

где $\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu$, $\gamma^4 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, γ^μ - матрицы Дирака, Ψ - 4-х компонентная комплекснозначная функция, $\bar\Psi = \Psi^+\gamma^0$ - 4-х компонентная строка, F - произвольная функция. Уравнение /1.1.3/ описывает поле как со спином $S = 0$, так и с $S = \frac{1}{2}$, поскольку оно инвариантно относительно алгебры /1.1.1/ с матрицами $S_{\mu\gamma} = 0 \ (S = 0)$ и с

$$S_{\mu\gamma} = \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \qquad /1.1.4/$$

/ $S = \frac{1}{2}$, спинорное представление [4] /, $\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$

Это следует из того, что величины $\bar\Psi\Psi$, $\bar\Psi\gamma^4\Psi$ являются инвариантами операторов из обоих представлений алгебры $AP(1,3)$.

В работе [23] поставлена задача об исследовании симметрии

/1.1.3/ с одним из условий:

$$\lambda\partial_\mu(\bar\Psi\gamma^\mu\Psi)+\nu\partial_\mu i(\bar\Psi\gamma^4\gamma^\mu\Psi)=G(\bar\Psi\Psi,\bar\Psi\gamma^4\Psi)\,, \qquad /1.1.5/$$

$$\lambda\bar\Psi\gamma\partial\Psi+\nu\bar\Psi\gamma^4\gamma\partial\Psi=H(\bar\Psi\Psi,\bar\Psi\gamma^4\Psi)\,, \qquad /1.1.6/$$

H, G – произвольные функции, $\gamma\partial\equiv\gamma^\mu\partial_\mu$. Кроме того, можно рассматривать следующее условие:

$$\lambda\Psi^T\gamma^0\gamma^2\gamma\partial\Psi+\nu\Psi^T\gamma^0\gamma^2\gamma^4\gamma\partial\Psi=R(\bar\Psi\Psi,\bar\Psi\gamma^4\Psi)\,, \qquad /1.1.7/$$

которое является релятивистским инвариантным / $S=\frac{1}{2}$ /, поскольку слагаемые в левой части являются инвариантами группы $P(1,3)$. Действительно, можно проверить, что преобразование двух величин

$\Psi'=e^{\theta_{\mu\nu}S_{\mu\nu}}\Psi$, $\chi'=e^{\theta_{\mu\nu}S_{\mu\nu}}\chi$ / $\theta_{\mu\nu}$ – параметры преобразования/

дает соотношение

$$(\Psi^T\gamma^0\gamma^2\chi)'=\Psi^T e^{\theta_{\mu\nu}S^T_{\mu\nu}}\gamma^0\gamma^2 e^{\theta_{\mu\nu}S_{\mu\nu}}\chi=\Psi^T\gamma^0\gamma^2\chi\,.$$

Поскольку величина $\gamma\partial\Psi$ преобразуется как χ , то получим данное утверждение.

Нахождение алгебры инвариантности /АИ/ уравнения /1.1.3/ совместно с одним из дополнительных условий /1.1.5/ – /1.1.7/ сводится к нахождению АИ этого дополнительного условия.

<u>Теорема 1.1.1.</u> Пусть A – есть АИ уравнения /1.1.5/, $\tilde A$ – АИ системы /1.1.3/, /1.1.5/. Тогда $\tilde A$ является подалгеброй A.

Доказательство. Пусть Q – оператор, принадлежащий $\tilde A$, но не оператор симметрии уравнения /1.1.5/, которое обозначим через $L(\Psi)=0$. Рассмотрим выражение $\underset{1}{Q}L(\Psi)$, где $\underset{1}{Q}$ – первое продолжение оператора Q . В это выражение входят только первые производные от Ψ /см.0.2//, поэтому:

$$\underset{1}{Q}L(\Psi)\Big|_{\substack{L(\Psi)=0\\ \Box\Psi+F\Psi=0}}=\underset{1}{Q}L(\Psi)\Big|_{L(\Psi)=0}\,.$$

Тогда по предположению левая часть равна нулю, а правая не равна, т.е. противоречие.

Теорема доказана.

Аналогичная теорема справедлива для систем /1.1.3/, /1.1.6/, или /1.1.7/.

Следствие 1.1.1. Максимальной АИ системы /1.1.3/, /1.1.5/ является $AP(1,3)$ / $S=\frac{1}{2}$ /, поскольку, как нетрудно показать, максимальной АИ для уравнения /1.1.5/ будет $AP(1,3)$. Для системы /1.1.3/, /1.1.7/ оператором симметрии будет также γ^4.

Следствие 1.1.2. Максимальной АИ системы

$$\begin{aligned} &\Box\Psi + F(\bar\Psi(1+\gamma^5)\Psi)\Psi = 0 , \\ &\bar\Psi(1+\gamma^5)\gamma\partial\Psi = H(\bar\Psi(1+\gamma^5)\Psi), \quad \gamma^5 = i\gamma^4 \end{aligned}$$

является 27-мерная алгебра Ли

$$A_{27} = \left\langle AP(1,3), \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 0 & 0 & i\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\rho \end{pmatrix} \right\rangle, \begin{array}{l} a,b,\dots,h\in C, \\ \rho\in R. \end{array} \qquad /1.1.8/$$

/Заметим, что уравнение $(1+\gamma^5)\gamma\partial\Psi = 0$ описывает поле со спиральностью $\frac{1}{2}$ [18] /.

Для доказательства достаточно проверить /методом Ли/, что операторы /1.1.8/ образуют максимальную АИ второго уравнения системы и являются операторами симметрии первого. Причем, γ^μ – матрицы представляются в виде $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma a \\ -\sigma a & 0 \end{pmatrix}$,

σa – матрицы Паули.

Рассмотрим следующую систему уравнений [23]

$$\begin{aligned} &\Box\Psi + m^2\Psi = 0 \\ &\bar\Psi(i\gamma\partial - m)\Psi = 0 \end{aligned} \qquad /1.1.9/$$

Очевидно, не всякое решение первого уравнения является решением системы. Но всякое решение уравнения Дирака /УД/

$$(i\gamma\partial - m)\Psi_- = 0 \qquad /1.1.10/$$

является решением для /1.1.9/. Мы найдем такое решение для /1.1.9/, которое не будет удовлетворять УД, и это означает, что $AP(1,3)$ реализуется на множестве, которое шире, чем множество решений УД, но ~~уже~~ множества решений уравнений Д'Аламбера.

Искомое решение ищем в виде $\Psi = \Psi_- + \Psi_+$, $\Psi_+ \neq 0$, где Ψ_- – решение для /1.1.10/, а Ψ_+ – решение уравнения

$$(i\gamma\partial + m)\Psi_+ = 0 \ . \qquad /1.1.11/$$

Очевидно, что Ψ удовлетворяет первому из уравнений /1.1.9/, а дополнительное условие, с учетом /1.1.10/, /1.1.11/ сводится к уравнению:

$$(\bar{\Psi}_+ + \bar{\Psi}_-)(\gamma\partial - m)(\Psi_+ + \Psi_-) = (\bar{\Psi}_+ + \bar{\Psi}_-)(-2m\Psi_+) = 0 . \qquad /1.1.12/$$

Частным решением /1.1.10/ будет [24] :

$$\Psi_- = (\gamma^0 + \gamma^1)\, exp\{-i(m\gamma^3\omega_3 + f(\omega_1))\}\chi_- \ , \qquad /1.1.13/$$

где $\omega_1 = x_0 + x_1$, $\omega_3 = x_3$, f – произвольная гладкая функция, χ_- – постоянный спинор. Тогда решением уравнения /1.1.11/ является

$$\Psi_+ = (\gamma^0 + \gamma^1)\, exp\{i(m\gamma^3\omega_3 + g(\omega_1))\}\chi_+ \neq 0 \qquad /1.1.14/$$

/ g – произвольная функция/. Из /1.1.13/, /1.1.14/ получаем, что условие /1.1.12/ выполнено, т.к. $(\gamma^0 + \gamma^1)^2 = 0$.

Таким образом, наряду с уравнениями первого порядка /Дирака, Гюрши, Гейзенберга и т.д./ существует широкий класс систем уравнений, описывающих поля со спином $S = \frac{1}{2}$.

2. Уравнения типа /1.1.3/, /1.1.6/ могут быть дополнительно инвариантны относительно алгебры Пуанкаре с операторами в классе матрично-дифференциальных /нелокальных/, если эти уравнения рассматривать вместе с сопряженными. Следующая система

$$(\Box + m^2)\Psi = 0\ ,$$
$$(\Box + m^2)\widetilde{\Psi} = 0\ , \qquad /1.1.15/$$

$$\overline{(i\gamma\partial-\lambda)\Psi}\,\Psi+\overline{\Psi}\,(i\gamma\partial-\lambda)\,\Psi=0, \qquad /1.1.16/$$

где $\overline{\Psi} = \gamma^0\Psi^*$, $\lambda = \sqrt{m^2+1}$, совместна, т.к. ей удовлетворяет решение $\Psi = \Psi_- + \Psi_+$, где Ψ_- и Ψ_+ функции /1.1.13/, /1.1.14/.

Теорема 1.1.2. На множестве решений системы /1.1.15/, /1.1.16/ реализуются следующее представление алгебры Пуанкаре:

$$P_\mu = \partial_\mu\ , \quad \widetilde{J}_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} + \Sigma_{\mu\nu} \qquad /1.1.17/$$

где $J_{\mu\nu}$ - операторы из спинорного представления /1.1.1/, $\Sigma_{\mu\nu}$ - нелокальные операторы:

$$\Sigma_{01} = \frac{1}{2} i\gamma^0\gamma^2\widetilde{\Psi}\partial_\Psi - \frac{1}{2} i\gamma^0\gamma^2\Psi\partial_{\widetilde{\Psi}}\ ,$$

$$\Sigma_{02} = \frac{1}{2}\gamma^0\gamma^2\widetilde{\Psi}\partial_\Psi + \frac{1}{2}\gamma^0\gamma^2\Psi\partial_{\widetilde{\Psi}}\ ,$$

$$\Sigma_{03} = \frac{1}{2}\gamma^5(i\gamma\partial-\lambda)\Psi\partial_\Psi + \frac{1}{2}\gamma^5(i\gamma^T\partial+\lambda)\widetilde{\Psi}\partial_{\widetilde{\Psi}}\ , \qquad /1.1.18/$$

$$\Sigma_{12} = -\frac{1}{2} i\Psi\partial_\Psi + \frac{1}{2} i\widetilde{\Psi}\partial_{\widetilde{\Psi}}\ ,$$

$$\Sigma_{13} = \frac{1}{2}\gamma^3\gamma^1(i\gamma^T\partial+\lambda)\widetilde{\Psi}\partial_\Psi - \frac{1}{2}\gamma^3\gamma^1(i\gamma\partial-\lambda)\Psi\partial_{\widetilde{\Psi}}\ ,$$

$$\Sigma_{23} = \frac{1}{2} i\gamma^1\gamma^3(i\gamma^T\partial+\lambda)\widetilde{\Psi}\partial_\Psi - \frac{1}{2} i\gamma^3\gamma^1(i\gamma\partial-\lambda)\Psi\partial_{\widetilde{\Psi}}\ ,$$

$$\gamma^T\partial \equiv (\gamma^\mu)^T\partial_\mu\ , \quad \lambda = \sqrt{m^2+1}\ .$$

Доказательство. Каждому решению системы /1.1.15/, /1.1.16/ взаимоодноэначно соответствует решение следующей системы

$$(i\Gamma^\mu\partial_\mu - \lambda)\Psi = \Phi\ ,$$

$$(i\Gamma^\mu\partial_\mu + \lambda)\Phi = -\Psi\ , \qquad /1.1.19/$$

$$\overline{\Phi}\Psi + \overline{\Psi}\Phi = 0\ .$$

Здесь $\Gamma^{\mu}=\begin{pmatrix}\gamma^{\mu} & 0\\ 0 & -(\gamma^{\mu})^{T}\end{pmatrix}$ – матрицы 8×8, $\Psi=(\psi,\tilde{\bar\psi})$, $\bar\Psi=(\bar\psi,\psi^{T})$ – 8-компонентные столбец и строка, соответственно /см.§2.1/. Также определяется Φ и $\bar\Phi$. Нетрудно проверить, что система /1.1.19/ инвариантна относительно матричных операторов $\hat{Q}_{\mu\nu}$ /2.4.10/, которые действуют в пространстве 16-компонентных столбцов (Ψ,Φ). Переходя к 4-х компонентной функции ψ и учитывая второе из уравнений /1.1.19/, получим инвариантность относительно операторов /1.1.18/. Поскольку $\hat{Q}_{\mu\nu}$ образуют алгебру Лоренца /операторы в /1.1.2/, то эту же алгебру образуют $\Sigma_{\mu\nu}$. Кроме того, они коммутируют $J_{\mu\nu}$. Поэтому $\tilde{J}_{\mu\nu}$ образуют алгебру Лоренца.

Теорема доказана.

Операторы $\tilde{J}_{\mu\nu}$ /1.1.17/ являются нелокальными в силу того, что выражения при дифференциале ∂_{ψ} зависят от произвольных /см.10/. Более того, не существует такого линейного преобразования $\psi=L\chi$, которое переводило бы $\tilde{J}_{\mu\nu}$ в локальные операторы.

§ 1.2. Обощения нелинейных уравнений для спинорного поля.

В предыдущем параграфе показано, что нелинейные волновые уравнения, не зависящие от первых производных, инвариантны относительно алгебры $AP(1,3)$ со спином $S=\frac{1}{2}$, если к нему добавить дополнительное условие.

В данном параграфе уравнения обобщаются так, чтобы они были инвариантны относительно $AP(1,3)$ с операторами только из спинорного представления без дополнительных условий.

В работе [23] была поставлена задача об исследовании симметрии и нахождении точных решений уравнений вида $\Box\psi+F(\bar\psi\psi,\partial_{\alpha}\bar\psi,\partial_{\beta}\psi)\psi=0$. Здесь мы рассмотрим следующий класс уравнений:

$$L(\psi)\equiv\Box\psi+F^{1}(u,v,j^{\mu},n^{\mu},\rho)\,\gamma\partial\psi+F^{2}(u,v,j^{\mu},n^{\mu},\rho)\,\psi=0, \qquad /1.2.1/$$

где F^1, F^2 – матрицы 4×4, зависящие от величин:

$$u=\bar{\Psi}\Psi \ , \ v=i\bar{\Psi}\gamma^5\Psi \ , \ j^\mu=\partial_\mu(\bar{\Psi}\Psi) \ , \qquad /1.2.2/$$
$$n^\mu=\partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^4\Psi) \ , \ \rho=\partial_\mu\bar{\Psi}\,\partial^\mu\Psi \ .$$

Из множества уравнений /1.2.1/, /1.2.2/ выделим такие, которые инвариантны относительно алгебры $AP(1,3)$ /1.1.1/, $S_{\mu\nu}=\frac{1}{4}[\gamma^4,\gamma^\nu]$

Теорема 1.2.1. Уравнения /1.2.1/, /1.2.2/ инвариантны относительно алгебры /1.1.1/, /1.1.2/ тогда и только тогда, когда функции F^1, F^2 имеют вид:

$$F^1=(f^1+\gamma^5g^1)\gamma j+(h^1+\gamma^5q^1)\gamma n+(l^1+\gamma^5p^1) \ , \qquad /1.2.3/$$
$$F^2=(f^2+\gamma^5g^2)\gamma j+(h^2+\gamma^5q^2)\gamma n+(l^2+\gamma^5p^2) \ ,$$

где

$$\gamma j\equiv\gamma_\mu j^\mu \ , \ jn\equiv n^\mu\gamma_\mu \ , \ f^i, g^i, h^i, q^i, l^i, p^i \ (i=1,2)$$

произвольные функции от переменных u, v, ρ.

Доказательство. Рассмотрим оператор $J_{01}=x^0\partial_1+x^1\partial_0-\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^1$ Инфинитоземальные преобразования зависимых и независимых переменных, порождаемые этим оператором следующие /см. введение/:

$$x_0'=x^0+\varepsilon x^1 \ , \ x^{1\prime}=x^1+\varepsilon x^0 \ , \ \partial_0=\partial_0'+\varepsilon\partial_1 \ ,$$
$$\partial_1'=\partial_1+\varepsilon\partial_0 \ , \ \Psi=\Psi'-\varepsilon\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^1\Psi \ , \ \partial_2=\partial_2' \ , \ \partial_3=\partial_3' \ . \qquad /1.2.4/$$

Величина ρ /как и величины u и v / являются инвариантами группы $P(1,3)$. Действительно, подействуем на ρ преобразованием /1.2.4/:

$$\rho=\rho'+\varepsilon[\partial_0\bar{\Psi}\partial_1\Psi+\partial_1\bar{\Psi}\partial_0\Psi-\partial_1\bar{\Psi}\partial_0\Psi-\partial_0\bar{\Psi}\partial_1\Psi+$$
$$+\frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^0\gamma^1\partial^\mu\Psi-\frac{1}{2}\partial_\mu\Psi\gamma^0\gamma^1\partial^\mu\Psi]=\rho' \ .$$

Точно также, ρ – инвариантно относительно остальных операторов $J_{\mu\nu}$.

Величины j^μ , n^μ под действием /1.2.4/ преобразуются как вектор ∂_μ . Кроме того, нетрудно показать, что

$$\gamma\partial\Psi = (\gamma\partial\Psi)' + \varepsilon\,[-\tfrac{1}{2}\gamma^0\gamma^1\gamma\partial\Psi]\,.$$

Зная теперь как преобразуются указанные выражения, получаем:

$$\begin{aligned} L(\Psi) = [L(\Psi)]' + \varepsilon\,[&-\tfrac{1}{2}\gamma^0\gamma^1\Box\Psi + F^1(-\tfrac{1}{2}\gamma^0\gamma^1\gamma\partial\Psi) + \\ &+ \partial_{j^0}F^1 j^1\gamma\partial\Psi + \partial_{j^1}F^1 j^0\gamma\partial\Psi + \partial_{n^0}F^1 n^1\gamma\partial\Psi + \\ &+ \partial_{n^1}F^1 n^0\gamma\partial\Psi + F^2(-\tfrac{1}{2}\gamma^0\gamma^1\Psi) + (\partial_{j^0}F^2 j^1 + \\ &+ \partial_{j^1}F^2 j^0 + \partial_{n^0}F^2 n^1 + \partial_{n^1}F^2 n^0)\Psi]\,. \end{aligned} \qquad /1.2.5/$$

Из формул /0.6/, /0.7/ вытекает, что необходимым и достаточным условием инвариантности $L(\Psi)=0$ относительно J_0, являются два уравнения:

$$\partial_{j^0}F^i j^1 + \partial_{j^1}F^i j^0 + \partial_{n^0}F^i n^1 + \partial_{n^1}F^i n^0 - \tfrac{1}{2}F^i\gamma^0\gamma^1 = -\tfrac{1}{2}\gamma^0\gamma^1 F^i,$$
$$i = 1,2\;, \quad \partial_{j^0} = \frac{\partial}{\partial j^0} \quad \text{и т.д.}$$

Совершенно аналогично получаем необходимое и достаточное условие инвариантности относительно операторов J_{0a}, $a = 1,2,3$:

$$\begin{aligned} &\partial_{j^0}F^i j^a + \partial_{j^a}F^i j^a + \partial_{n^0}F^i n^a + \partial_{n^a}F^i n^0 - \\ &-\tfrac{1}{2}F^i\gamma^0\gamma^a = -\tfrac{1}{2}\gamma^0\gamma^a F^i\,. \end{aligned} \qquad /1.2.6/$$

Для того, чтобы решить эти матричные уравнения, можно представить F^i в виде:

$$F^i = m^i + \gamma^\mu m^i_\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu m^i_{\mu\nu} + \gamma^5\gamma^\mu S^i_\mu + \gamma^5 S^i\,.$$

Т.к. 16 матриц 1, γ^μ, $\gamma^\mu\gamma^\nu$, $\gamma^5\gamma^\mu$, γ^5 линейно независимы, то из /1.2.6/ получаем систему уравнений для 16 функций. Общее решение такой системы дает функции /1.2.3/. Инвариантность /1.2.1/ /1.2.3/ относительно P_μ – очевидна. Из следствия 0.1 заключаем, что эти уравнения инвариантны относительно всех $J_{\mu\nu}$, поскольку J_{ab} можно получить из J_{0a} с помощью коммутационных соотношений. Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что если $F^1 \not\equiv 0$, то полученные уравнения инвариантны относительно алгебры $AP(1,3)$, операторы которой образуют представление с матрицами $S_{\mu\nu}=0$ и соответствуют спину $S=0$. Таким образом, мы нашли класс уравнений второго порядка, которые, в отличие, например, от уравнений Клейна-Фока, описывают поле с определенным спином.

Из множества уравнений /1.2.1/, /1.2.3/ выделим такие, которые инвариантны относительно масштабных преобразований:

$$x_\mu \to x'_\mu = e^\theta x_\mu\,, \quad \Psi(x) \to \Psi'(x) = e^{-\theta\kappa}\Psi(x).$$

Генератором такого преобразования является оператор

$$D = x^\mu \partial_\mu + \kappa\,, \qquad /1.2.7/$$

который вместе с операторами /1.1.1/ образуют алгебру Пуанкаре $A\widetilde{P}(1,3)$ с коммутационными соотношениями /1.1.2/ и

$$[P_\mu, D] = P_\mu\,, \qquad [J_{\mu\nu}, D] = 0 \qquad /1.2.8/$$

Соответствующие инфинитоземальные преобразования

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon x_\mu\,, \quad \partial_\mu = \partial'_\mu + \varepsilon\partial_\mu\,, \quad \Psi = \Psi' + \varepsilon\kappa\Psi. \qquad /1.2.9/$$

Теорема 1.2.2. Уравнения /1.2.1/, /1.2.3/ инвариантны относительно алгебры $A\widetilde{P}(1,3)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} F^1 &= u^{-1}(\tilde f^1 + \gamma^5 \tilde g^1)\gamma j + v^{-1}(\tilde h^1 + \gamma^5 \tilde q^1)\gamma n + \\ &\quad + u^{1/2\kappa}(\tilde l^1 + \gamma^5 \tilde p^1)\,, \\ F^2 &= u^{-\frac{2\kappa+1}{2\kappa}}(\tilde f^2 + \gamma^5 \tilde g^2)\gamma j + v^{-\frac{2\kappa+1}{2\kappa}}(\tilde h^2 + \gamma^5 \tilde q^2)\gamma n + \\ &\quad + u^{1/\kappa}(\tilde l^2 + \gamma^5 \tilde p^2)\,, \end{aligned} \qquad /1.2.10/$$

где $\tilde f^i$, $\tilde g^i$, $\tilde h^i$, $\tilde q^i$, $\tilde l^i$, $\tilde p^i$ $(i=1,2)$ произвольные функции от величин:

$$\frac{u}{v}\,, \quad \frac{u^{\kappa+1}}{\rho^\kappa} \qquad /1.2.11/$$

которые являются инвариантами группы $\widetilde{P}(1,3)$

Доказательство. Из /1.2.9/ получаем, что величины /1.2.2/ преобразуются так:

$$u = u' + \varepsilon 2\kappa u \quad , \quad j^\mu = j^{\mu\prime} + \varepsilon(2\kappa+1) j^\mu \ ,$$
$$v = v' + \varepsilon 2\kappa v \quad , \quad n^\mu = n^{\mu\prime} + \varepsilon(2\kappa+1) n^\mu ,$$
$$\rho = \rho' + \varepsilon(2\kappa+2)\rho .$$

Отсюда и из /1.2.9/ получаем для /1.2.1/, /1.2.3/:

$$\begin{aligned} L(\Psi) = {} & [L(\Psi)]' + \varepsilon[(\kappa+2)\Box\Psi + f'\gamma j(\kappa+1)\gamma\partial\Psi + \\ & + f'(2\kappa+1)\gamma j\gamma\partial\Psi + \{2\kappa u f'_u + 2\kappa v f'_v + \\ & + (2\kappa+2)\rho f'_\rho\}\gamma j\gamma\partial\Psi + \{\ldots\}\gamma^5\gamma j\gamma\partial\Psi + \\ & + \{\ldots\}\gamma n\gamma\partial\Psi + \{\ldots\}\gamma^5\gamma n\gamma\partial\Psi + \{\ldots\}\gamma\partial\Psi + \\ & + \{\ldots\}\gamma^5\gamma\partial\Psi + \{\ldots\}\gamma j\Psi + \{\ldots\}\gamma^5\gamma j\Psi + \\ & + \{\ldots\}\gamma n\Psi + \{\ldots\}\gamma^5\gamma n\Psi + \{\ldots\}\Psi + \gamma^5\{\ldots\}\Psi] \end{aligned} \qquad /1.2.12/$$

Здесь мы выписали все слагаемые, содержащие множитель $\gamma j\gamma\partial\Psi$ Как и при доказательстве предыдущей теоремы получаем, что необходимое и достаточное условие инвариантности уравнения $L(\Psi)=0$ является то, что выражение, стоящее в квадратных скобках, равно $(\kappa+2)L(\Psi)$. Поскольку уравнение имеет второй порядок, то все множители после фигурных скобок $\{.....\}$ независимы /в том числе и $\gamma j\gamma\partial\Psi$ / друг от друга. Учитывая это и полученное условие, находим:

$$2\kappa u f'_u + 2\kappa v f'_v + (2\kappa+2)\rho f'_\rho = -2\kappa f' . \qquad /1.2.13/$$

и соответствующие уравнения для остальных функций. Общее решение /1.2.13/ задается формой $f' = u^{-1}\tilde{f}'$, где $\tilde{f}'$ зависит от величин /1.2.10/. Из других уравнений получаем вид остальных функций f^i , g^i , h^i , q^i , l^i , p^i .

Теорема доказана.

Как мы увидим в следующем параграфе, решения некоторого подмножества уравнений, полученных в теоремах 1.2.1, 1.2.2 содержат все решения уравнений первого порядка, инвариантных относительно $AP(1,3)$, либо $A\tilde{P}(1,3)$ /т.е. уравнений Дирака, его обобщений и т.д./. В этом смысле мы получили расширение известных уравнений.

§ 1.3. Конформно-инвариантные уравнения второго порядка и их редукция.

В этом параграфе находятся конформно-инвариантные уравнения второго порядка. Известно, много таких уравнений первого порядка 40,24 Например, безмассовое уравнение Дирака

$$i\gamma\partial\Psi = 0 \qquad /1.3.1/$$

инвариантно относительно конформной алгебры $AC(1,3)$ с базисными операторами P_μ, $J_{\mu\nu}$, D /1.1.1/, /1.2.7/ и

$$K_\mu = 2x^\mu D - x^2 P_\mu + 2S_{\mu\nu}x^\nu, \ \mu,\nu=\overline{0,3}, \ x^2 \equiv x_\mu x^\mu. \qquad /1.3.2/$$

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям /1.1.2/ /1.2.8/ и

$$\begin{aligned}&[K_\mu, K_\nu] = 0, \ [K_\sigma, J_{\mu\nu}] = g_{\sigma\mu}K_\nu - g_{\sigma\nu}K_\mu,\\ &[K_\mu, D] = -K_\mu, \ [K_\mu, P_\nu] = -2(g_{\mu\nu}D + J_{\mu\nu}).\end{aligned} \qquad /1.3.3/$$

Постоянная K /конформная степень/ для УД /1.3.1/ равна $\frac{3}{2}$

Обобщением /1.3.1/ является нелинейное уравнение Дирака-Гюрши [52, 24] :

$$i\gamma\partial\Psi + \lambda(\bar{\Psi}\Psi)^{1/3}\Psi = 0, \qquad \lambda = \mathrm{const}, \qquad /1.3.4/$$

также инвариантное относительно /1.3.2/ / $K = \frac{3}{2}$ /.

Из /1.3.1/ следует, что каждая компонента спинора Ψ

удовлетворяет волновому уравнению

$$\square \Psi = 0 . \qquad /1.3.5/$$

Однако /1.3.5/ /без /1.3.1// не инвариантно относительно $AC(1,3)$ с операторами /1.3.2/. Поэтому $C(1,3)$ -инвариантные уравнения нужно искать среди нелинейных уравнений /1.2.1/, /1.2.10/.

1. <u>Теорема 1.3.1.</u> Уравнения /1.2.1/, /1.2.10/ инвариантны относительно алгебры $AC(1,3)$ /1.3.2/ тогда и только тогда, когда они имеют вид:

$$L(\Psi) = \square\Psi + \Big[-\frac{1}{3}\frac{\gamma j}{u} + (f+\gamma^5 g)\Big(\frac{\gamma j}{u} - \frac{\gamma n}{v}\Big) + u^{1/3}(q+\gamma^5 l)\Big]\gamma\partial\Psi + u^{2/3}(y+\gamma^5 z)\Psi = 0 , \qquad /1.3.6/$$

где f , g , q , l , y , z - функции от $\frac{u}{v}$, и когда $K = \frac{3}{2}$.

Доказательство. Из соотношений /1.3.3/, а также следствия 0.1 заключаем, что достаточно найти все уравнения, инвариантные относительно оператора

$$K_0 = x_\mu x_\mu \partial_0 + 2x_0 x_i \partial_i + 2Kx_0 - \gamma^0\gamma^i x^i . \qquad /1.3.7/$$

Инфинитоземальные преобразования, порождаемые этим оператором, такие:

$$x_0' = x_0 + \varepsilon x^\nu x^\nu, \quad x_i' = x_i + \varepsilon 2x_0 x_i ,$$
$$\partial_0 = \partial_0' + \varepsilon 2x^\nu \partial_\nu , \quad \partial_i = \partial_i' + \varepsilon 2(x^0\partial_i + x^i\partial_0) , \qquad /1.3.8/$$
$$\Psi = \Psi' + \varepsilon(-\gamma^0\gamma^i x^i + 2Kx^0)\Psi .$$

Из /1.3.8/ можно получить следующие преобразования:

$$u = u' + \varepsilon 4 \kappa u \ , \quad v = v' + \varepsilon 4 \kappa v \ , \quad \frac{u}{v} = \left(\frac{u}{v}\right)' \ ;$$

$$\gamma\partial\Psi = [\gamma\partial\Psi]' + \varepsilon[(-\gamma^0\gamma^i x^i + (2\kappa+2)x^0]\gamma\partial\Psi +$$

$$+(2\kappa-3)\gamma^0\Psi] \ ;$$

$$\Box\Psi \equiv \gamma\partial\gamma\partial\Psi = [\Box\Psi]' + \varepsilon[(-\gamma^0\gamma^i x^i + (2\kappa+4)x^0)\Box\Psi +$$

$$+2\gamma^0\gamma\partial\Psi + 2(2\kappa-3)\partial_0\Psi] \ ;$$

$$\gamma j\gamma\partial\Psi = [\gamma j\gamma\partial\Psi]' + \varepsilon[4\kappa\gamma^0\gamma\partial\Psi + (-\gamma^0\gamma^i x^i + \qquad /1.3.9/$$

$$+(2\kappa+4)x^0)\frac{\gamma j}{u}\gamma\partial\Psi + \frac{\gamma j}{u}(2\kappa-3)\gamma^0\Psi] \ ;$$

$$\frac{\gamma n}{v}\gamma\partial\Psi = [\frac{\gamma n}{v}\gamma\partial\Psi]' + \varepsilon[4\kappa\gamma^0\gamma\partial\Psi + (-\gamma^0\gamma^i x^i +$$

$$+(2\kappa+4)x^0)]\frac{\gamma n}{v}\gamma\partial\Psi + \frac{\gamma n}{v}(2\kappa-3)\gamma^0\Psi \ .$$

Предположим, что все функции зависят от $\frac{u}{v}$. Тогда уравнение /1.2.1/, /1.2.10/, учитывая /1.3.8/, /1.3.9/, преобразуются так:

$$L(\Psi) = [L(\Psi)]' + \varepsilon\{(-\gamma^0\gamma^i x^i + (2\kappa+4)x^0)\Box\Psi +$$

$$+2\gamma^0\gamma\partial\Psi + 2(2\kappa-3)\partial_0\Psi + (\tilde{f}^1 + \gamma^5\tilde{g}^1) \ \times$$

$$\times \ [4\kappa\gamma^0\gamma\partial\Psi + (-\gamma^0\gamma^i x^i + (2\kappa+4)x^0)\frac{\gamma j}{u}\gamma\partial\Psi +$$

$$+\frac{\gamma j}{u}(2\kappa-3)\gamma^0\Psi] + (\tilde{h}^1 + \gamma^5\tilde{q}^1)[4\kappa\gamma^0\gamma\partial\Psi +$$

$$+(-\gamma^0\gamma^i x^i + (2\kappa+4)x^0)\frac{\gamma n}{v}\gamma\partial\Psi + \qquad /1.3.10/$$

$$+\frac{\gamma n}{v}(2k-3)\gamma^0\Psi]+(\tilde{f}^2+\gamma^5\tilde{g}^2)[(-\gamma^0\gamma^i x^i+$$

$$+(2k+4)x^0)\gamma j u^{-\frac{2k+1}{2k}}\Psi+4k u^{1/2k}\gamma^0\Psi]+$$

$$+(\tilde{h}^2+\gamma^5\tilde{q}^2)[v^{-\frac{2k+1}{2k}}(-\gamma^0\gamma^i x^i+(2k+4)x^0)\times$$

$$\times\gamma n\Psi+4k v^{1/2k}\gamma^0\Psi]+u^{1/2k}(\tilde{l}^1+\gamma^5\tilde{p}^1)\times$$

$$\times[(-\gamma^0\gamma^i x^i+(2k+4)x^0)\gamma\partial\Psi+(2k-3)\gamma^0\Psi]+$$

$$+u^{1/k}(\tilde{l}^2+\gamma^5\tilde{p}^2)(-\gamma^0\gamma^i x^i+(2k+4)x^0)\Psi\}.$$

Обозначим выражение, стоящее в фигурных скобках, через $N(\Psi)$. Как и при доказательстве предыдущих теорем, получаем необходимое и достаточное условие инвариантности уравнения $L(\Psi)=0$ относительно K_0 :

$$N(\Psi)=(-\gamma^0\gamma^i x^i+(2k+4)x^0)L(\Psi). \qquad /1.3.11/$$

Собирая в $N(\Psi)$ выражение, стоящее в правой части /1.3.11/, получаем уравнение на оставшиеся члены в /1.3.10/:

$$[2\gamma^0+4k(\tilde{f}^1+\tilde{h}^1)\gamma^0]\gamma\partial\Psi+2(2k-3)\partial_0\Psi+$$

$$+\gamma^5(\tilde{g}^1+\tilde{q}^1)4k\gamma^0\gamma\partial\Psi+\gamma^5(2k-3)(\tilde{g}^1\frac{\gamma j}{u}+$$

$$+\tilde{q}^1\frac{\gamma n}{v})\gamma^0\Psi+4k[(\tilde{f}^2+\gamma^5\tilde{g}^2)u^{1/2k}+(\tilde{h}^2+\gamma^5\tilde{q}^2)\times$$

$$\times v^{1/2k}]\gamma^0\Psi+u^{1/2k}(2k-3)\gamma^0\Psi=0.$$

причем все производные от Ψ рассматриваются как независимые переменные. Из этого условия получаем:

$$K=-\frac{3}{2}\,,\quad \tilde{f}^1+\tilde{h}^1=-\frac{1}{3}\,,\quad \tilde{q}^1=-\tilde{g}^1=-g\,,$$

что и дает вид уравнения /1.3.6/.

При доказательстве мы предположили, что функции в /1.2.10/ зависят только от одной из величин /1.2.11/ $\frac{u}{v}$. В общем случае доказательство аналогично, но более громоздко.

Теорема доказана.

Итак, мы получили широкий класс спинорных уравнений второго порядка, инвариантных относительно $C(1,3)$ с конформной степенью $K=\frac{3}{2}$. Однако любой конформной степени K отвечают естественные физические преобразования, порождаемые операторами /1.3.2/. Поэтому интересно выяснить: нельзя ли уравнения /1.3.6/ обобщить так, чтобы обобщенные уравнения были инвариантны относительно /1.3.2/. Уравнения первого порядка, обладающие этим свойством, известны, например [58]:

$$i D_\mu \gamma^\mu \chi + \lambda (\bar{\chi}\chi)^{\frac{1}{3}(2s+1)} \chi = 0\,, \qquad /1.3.12/$$

где χ – 4-х компонентный спинор,

$$S=\frac{1}{2K}\left(\frac{3}{2}-K\right),\quad D_\mu=\partial_\mu+S\,\partial_\mu \ln(\bar{\chi}\chi) \qquad /1.3.13/$$

Уравнение /1.3.12/ можно получить из /1.3.4/ с помощью замены $\Psi=(\bar{\chi}\chi)^s\chi$.

<u>Теорема 1.3.2.</u> Уравнение

$$\begin{aligned} &D_\mu D^\mu \Psi + (2s+1)\Big[-\frac{1}{3}\frac{\gamma j}{u} + (f+\gamma^5 g)\,\times \\ &\times\left(\frac{\gamma j}{u}-\frac{\gamma n}{v}\right) + u^{\frac{1}{3}(2s+1)}(q+\gamma^5 l)\Big]\gamma D\Psi + \\ &+ u^{\frac{2}{3}(2s+1)}(y+\gamma^5 z)\Psi = 0\,, \end{aligned} \qquad /1.3.14/$$

где $\gamma D \equiv \gamma^{\mu} D_{\mu}$, D_{μ} – выражения /1.3.13/, f, g, q, l, y, z – произвольные функции от $\frac{u}{v}$, инвариантно относительно алгебры $AC(1,3)$ /1.3.2/.

Доказательство. Нетрудно видеть, что если Ψ преобразуется согласно операторам /1.3.2/ с произвольной степенью K, то $(\bar{\Psi}\Psi)^{5}\Psi$ преобразуется также в соответствии с этими операторами с $K=\frac{3}{2}$. Поэтому для того, чтобы получить требуемые уравнения, нужно сделать замену $\Psi \to (\bar{\Psi}\Psi)^{5}\Psi$ в /1.3.6/. При этом получается, что $\partial_{\mu}\Psi \to (\bar{\Psi}\Psi)^{5} D_{\mu}\Psi$, $\Box\Psi \to (\bar{\Psi}\Psi)^{5} D_{\mu} D^{\mu}\Psi$.

Сделав все эти замены и умножив затем уравнение на $(\bar{\Psi}\Psi)^{-5}$, получим /1.3.14/.

Теорема доказана.

Среди уравнений /1.3.6/ рассмотрим следующие:

$$\Box\Psi - \frac{1}{3}\partial_{\mu} \ln(\bar{\Psi}\Psi)\,\gamma^{\mu}\gamma\partial\Psi - i\lambda(\bar{\Psi}\Psi)^{1/3}\gamma\partial\Psi + \mu(\bar{\Psi}\Psi)^{2/3}\Psi = 0, \qquad \lambda, \mu = \text{const}. \qquad /1.3.15/$$

Отсюда получаем

Следствие 1.3.1. Каждое решение безмассового УД /1.3.1/ является решением для /1.3.15/, когда $\lambda = \mu = 0$.

Следствие 1.3.2. Каждое решение уравнения Дирака-Гюрши /1.3.4/ является решением для /1.3.15/, когда $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$.

В заключение построим частные решения уравнения /1.3.15/. Для этого рассмотрим анзац [43] :

$$\Psi(x) = \frac{\gamma x}{(xx)^{2}}\varphi(\omega), \quad \omega = \frac{\beta x}{xx}, \quad \beta_{\nu} = \text{const}. \qquad /1.3.16/$$

Подставив /1.3.16/ в /1.3.15/, найдем систему редуцированных обыкновенных дифференциальных уравнений /ОДУ/:

$$\varphi'' - \frac{1}{3}\frac{(\bar\varphi\varphi)'}{\bar\varphi\varphi}\varphi' + i\lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/3}\varphi' + \frac{\mu}{\beta^2}(\bar\varphi\varphi)^{2/3}\varphi = 0 \qquad /1.3.17/$$

1. Пусть $\lambda = \mu = 0$. Нетрудно видеть, что /1.3.17/ удовлетворяет уравнению $\varphi' = (\bar\varphi\varphi)^{1/3}\eta$, $\eta = \mathrm{const}$, откуда получаем решение $\varphi = \omega^3 \chi$, χ - постоянный спинор. Отметим, что найденное решение $\Psi(x) = \dfrac{\gamma x}{(xx)^2}\omega^3\chi$ не является решением УД /1.3.1/.

Поэтому из следствия 1.3.1. вытекает, что /1.3.15/ описывает более широкое множество решений, чем УД.

2. Пусть $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$. Ищем решение /1.3.17/ в виде

$\varphi = \omega^{-3/2}\chi$, $\chi = \mathrm{const}$. Тогда получим, что:

$$\frac{15}{4}\omega^{-7/2}\chi + \omega^{-7/2}\chi + \frac{\mu}{\beta^2}(\bar\chi\chi)^{2/3}\omega^{-7/2}\chi = 0 .$$

Отсюда

$$\bar\chi\chi = \sqrt{-\left(\frac{19}{4}\frac{\beta^2}{\mu}\right)^3} \quad , \quad \frac{\beta^2}{\mu} < 0 .$$

ГЛАВА 2. ДУАЛЬНАЯ ПУАНКАРЕ-ИНВАРИАНТНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ СПИНОРНЫХ УРАВНЕНИЙ.

В этой главе исследуются симметрийные свойства линейных и нелинейных уравнений Дирака /УД/. Показано, что безмассовое УД, а также различные системы двух УД инвариантны относительно алгебры Пуанкаре, операторы которой образуют представление как со спином $S=\frac{1}{2}$ /спинорное представление/, так и со спином $S=0,1$. Кроме того, некоторые уравнения инвариантны относительно суперагебр. Получены формулы, связывающие решения безмассового УД с решениями уравнений Максвелла / $S=0,1$ / и Рариты-Швингера / $S=\frac{3}{2}$ /. Построены анзацы /в том числе и нелокальные/ и решения нелинейных спинорных уравнений.

§ 2.1. О связи между решениями уравнений Дирака и Максвелла.

Здесь мы, следуя [49], получим формулы, позволяющие по любому решению безмассового УД строить решения уравнений Максвелла /УМ/ для вакуума и наоборот.

Рассмотрим безмассовое УД вместе с его сопряженным:

$$i\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi=0, \qquad /2.1.1/$$

где $\Gamma^{\mu}=\begin{pmatrix}\gamma^{\mu} & 0\\ 0 & -(\gamma^{\mu})^{T}\end{pmatrix}$, γ^{μ} - матрицы Дирака 4×4, $\mu=0,3$,

$$\partial_{\mu}=\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \quad x\in R(1,3),$$

$\Psi=(\psi,\tilde{\psi})$ - 8-компонентный столбец, ψ - 4-х компонентная комплекснозначная функция $\tilde{\psi}=\gamma^{0}\psi^{*}$

Выберем для удобства следующие представления γ - матриц

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & -I_2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a \\ -\sigma_a & 0 \end{pmatrix},$$

где σ_a - матрицы Паули. Тогда произвольное решение УД /2.1.1/ представим в виде [57] :

$$\Psi = \Psi_{real} + i\Psi_{imag} = \begin{pmatrix} -D^1 \\ D^3 \\ -B^2 \\ -G \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} D^2 \\ -F \\ -B^1 \\ B^3 \end{pmatrix} . \qquad /2.1.2/$$

Установим связь между решениями системы /2.1.1/ и решениями УМ:

$$\partial_t \vec{E} = \mathrm{rot}\, \vec{H}, \quad div\, \vec{E} = 0 , \qquad /2.1.3/$$

$$\partial_t \vec{H} = -\mathrm{rot}\, \vec{E}, \quad div\, \vec{H} = 0 .$$

<u>Теорема 2.1.1.</u> Решения уравнений Максвелла /2.1.3/ строятся по решениям /2.1.1/, /2.1.2/ по следующим формулам:

$$\vec{E} = \vec{D} + \vec{\nabla} \int_{t_0}^{t} G(\tau, \vec{x})\, d\tau + \vec{\nabla} \tilde{G}(t_0, \vec{x}) ,$$

$$\vec{H} = \vec{B} + \vec{\nabla} \int_{t_0}^{t} F(\tau, \vec{x})\, d\tau + \vec{\nabla} \tilde{F}(t_0, \vec{x}) , \qquad /2.1.4/$$

где $\tilde{G}(t_0, \vec{x})$, $\tilde{F}(t_0, \vec{x})$ -решения уравнений Пуассона:

$$\Delta \tilde{G}(t_0, \vec{x}) = \frac{\partial G}{\partial \tau}\Big|_{\tau = t_0}, \quad \Delta \tilde{F}(t_0, \vec{x}) = \frac{\partial F}{\partial \tau}\Big|_{\tau = t_0}, \qquad /2.1.5/$$

t_0 - произвольная фиксированная точка,

$$\vec{D} = \{D^1, D^2, D^3\}, \quad \vec{B} = \{B^1, B^2, B^3\} .$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что УД /2.1.1/ в обозначениях /2.1.2/ принимает вид УМ с токами:

$$\partial_t \vec{D} - \mathrm{rot}\, \vec{B} = -\vec{\nabla} G, \quad div\, \vec{D} = -\partial_t G,$$
$$\partial_t \vec{B} + \mathrm{rot}\, \vec{D} = -\vec{\nabla} F, \quad div\, \vec{B} = -\partial_t F. \qquad /2.1.6/$$

Подставляя /2.1.4/ в /2.1.3/, получаем, учитывая /2.1.6/:

$$\partial_t \vec{E} - \mathrm{rot}\, \vec{H} = \partial_t \vec{D} + \vec{\nabla} G - \mathrm{rot}\, \vec{B} = 0,$$

$$div\, \vec{B} = div\, \vec{D} + \int_{t_0}^{t} \Delta G(\tau, \vec{x})\, d\tau + \Delta \tilde{G}(t_0, \vec{x}) =$$

$$= div\, \vec{D} + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2}\, d\tau + \Delta \tilde{G}(t_0, \vec{x}) = div\, \vec{D} +$$

$$+ \partial_t G - \frac{\partial G}{\partial \tau}\Big|_{\tau = t_0} + \Delta \tilde{G}(t_0, \vec{x}) = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что каждая компонента функции Ψ /2.1.2/ удовлетворяет волновому уравнению $\Delta G(\tau, \vec{x}) = \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2}$ а также равенствам /2.1.5/. Совершенно аналогично доказывается справедливость теоремы для второй пары УМ /2.1.3/.

Теорема доказана.

Справедливо также обратное утверждение.

<u>Теорема 2.1.2.</u> Пусть $\vec{E}$, $\vec{H}$ – произвольное решение УМ /2.1.3/, F , G – произвольные скалярные функции, удовлетворяющие волновому уравнению

$$\Box F = \Box G = 0. \qquad /2.1.7/$$

Тогда функция /2.1.2/ с компонентами F , G ,

$$\vec{D} = \vec{E} - \vec{\nabla} \int_{t_0}^{t} G(\tau, \vec{x})\, d\tau - \vec{\nabla} \tilde{G}(t_0, \vec{x}),$$
$$\vec{B} = \vec{H} - \vec{\nabla} \int_{t_0}^{t} F(\tau, \vec{x})\, d\tau - \vec{\nabla} \tilde{F}(t_0, \vec{x}), \qquad /2.1.8/$$

где $\tilde{G}(t_0,\vec{x})$, $\tilde{F}(t_0,\vec{x})$ находятся из уравнений /2.1.5/, является решением УД /2.1.1/.

Доказательство. Воспользуемся эквивалентностью УД /2.1.1/ и системы /2.1.6/. Подставив /2.1.8/ в /2.1.6/ и учитывая /2.1.3/, /2.1.7/, /2.1.5/, находим:

$$\partial_t \vec{D} - \mathrm{rot}\,\vec{B} + \vec{\nabla} G = \partial_t \vec{E} - \vec{\nabla} G - \mathrm{rot}\,\vec{H} + \vec{\nabla} G = 0\,,$$

$$div\,\vec{D} + \partial_t G = div\,\vec{E} - \int_{t_0}^{t} \Delta G(\tau, x)\,d\tau - \Delta\tilde{G} + \partial_t G = 0\,.$$

Аналогично проверяется выполнимость второй пары уравнений системы /2.1.6/. Теорема доказана.

Замечание 2.1.1. При $F = G = 0$ из /2.1.8/ следует: $\vec{D} = \vec{E}$, $\vec{B} = \vec{H}$, и в этом случае решение УД /2.1.1/ с строится по формуле /2.1.2/ по решениям УМ /2.1.3/.

Замечание 2.1.2. Преобразования /2.1.4/, /2.1.8/ осуществляются, как видно из /2.1.5/, с точностью до величин $\vec{\nabla} f(\vec{x})$, $\vec{\nabla} g(\vec{x})$, где функции f , g удовлетворяют уравнению Лапласа. Это следует и из инвариантности УМ относительно указанных величин. Для однозначности преобразований /2.1.4/, /2.1.8/ следует выбирать какое-либо частное решение уравнений /2.1.5/.

Таким образом, из теоремы 2.1.1 следует, что по каждому решению УД строится одно решение УМ, а из теоремы 2.1.2., что для любого решения УМ строится множество /континуум/ решений УД. Кроме того, всякое решение УМ есть решение УД /в обозначениях /2.1.2//. Другими словами, поле Ψ /2.1.2/ с помощью преобразований типа калибровочных /см.§ 2.3./ можно перевести в электромагнитное поле $\{\vec{E}, \vec{H}\}$.

Пример 1. Нетрудно проверить, что вектора

$$\vec{E} = \vec{\alpha} \times \vec{x}\,,\ \vec{H} = -2\vec{\alpha}\,t\ ,$$

где $\vec{\alpha}$ – произвольный постоянный вектор, является решением уравнений Максвелла. Выберем функции F , G в виде

$$F = G = 3t^2 + \vec{x}^2 .$$

С помощью /2.1.8/, /2.1.5/ находим решение УД в виде /2.1.2/:

$$\Psi = \begin{pmatrix} -[(\vec{\alpha}\times\vec{x})_1 - 2tx_1] + i\,[(\vec{\alpha}\times\vec{x})_2 - 2tx_2] \\ [(\vec{\alpha}\times\vec{x})_3 - 2tx_3] - i\,[3t^2 + \vec{x}^2] \\ 2t(\alpha_2 + x_3) + 2it\,(\alpha_1 + x_1) \\ -(3t^2 + \vec{x}^2) - 2it\,(\alpha_3 + x_3) \end{pmatrix}$$

Отметим, что $\bar{\Psi}\Psi = \vec{\alpha}^2\vec{x}^2 - (\vec{\alpha}\vec{x})^2 - 4t^2(\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\,\vec{x})$.

Пример 2. Нетрудно проверить, что

$$\Psi = \frac{1}{(xx)^2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \\ +x_1 \mp i x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

является решением УД. Отсюда $D_1 = D_2 = 0$, $D_3 = \frac{x_0}{(x_\mu x^\mu)^2}$,

$$B_1 = +\frac{x_2}{(x_\mu x^\mu)^2}\ , \quad B_2 = \mp\frac{x_1}{(x_\mu x^\mu)^2}\ , \quad B_3 = 0\ , \quad G = +\frac{x_3}{(x_\mu x^\mu)^2}\ , \quad F = 0 .$$

Из /2.1.5/ найдем, что $\tilde{G} = \tilde{F} = 0$. Тогда из /2.1.4/ получим /опуская подробные вычисления/:

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} \frac{3x_1x_3}{4\rho^5}\left(-\frac{2t\rho}{xx} + \ln\left|\frac{t+\rho}{t-\rho}\right|\right) - \frac{x_1x_3t^3}{\rho^4(xx)^2} \\ \frac{3x_2x_3}{4\rho^5}\left(-\frac{2t\rho}{xx} + \ln\left|\frac{t+\rho}{t-\rho}\right|\right) - \frac{x_2x_3t^3}{\rho^4(xx)^2} \\ \frac{3x_3^2 - \rho^2}{4\rho^5}\left(-\frac{2t\rho}{xx} - \ln\left|\frac{t+\rho}{t-\rho}\right|\right) - \frac{x_3^2t^3}{\rho^4(xx)^2} \end{bmatrix}$$

$\vec{H} = \vec{B}$, где $\rho = \sqrt{x_a^2}$,

есть решение уравнений Максвелла.

§ 2.2. Построение решений уравнений Рариты-Швингера по решениям уравнения Дирака.

Уравнения Рариты-Швингера /УРШ/ /см.,например, [15]/ для частицы со спином $S = \frac{3}{2}$ могут быть записаны вместе с сопряженными уравнениями в виде /масса $m = 0$ /:

$$i\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi_{\nu} = 0 , \qquad /2.2.1/$$

$$\Gamma^{\nu}\Psi_{\nu} = 0 , \quad \mu, \nu = \overline{0,3} , \qquad /2.2.2/$$

где $\Psi_{\nu} = (\psi_{\nu}, \tilde{\psi}_{\nu})$ /см. /2.1.1//.
Систему /2.2.1/, /2.2.2/ можно рассматривать как четыре УД с дополнительными условиями. И задачу, поставленную в этом параграфе, можно сформулировать так: по решениям УД /2.2.1/ $\{\Psi_{\nu}\}$ построить решения УРШ /2.2.1/ - /2.2.2/. Эту задачу можно решить, если на решения $\{\Psi_{\nu}\}$ наложить одно условие, более слабое, чем /2.2.2/.

<u>Теорема 2.2.1.</u> Если решения УД /2.2.1/ $\{\Psi_{\nu}\}$ удовлетворяют условию

$$\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\left[\Gamma^{0}\Gamma^{\mu}\Psi_{\mu}\right] = 0 , \qquad /2.2.3/$$

то по ним можно построить решения $\{\Psi'_{\nu}\}$ УРШ /2.2.1/ - /2.2.2/.

Прежде чем доказывать теорему, заметим, что если выполняется условие /2.2.2/, то выполняется и /2.2.3/ /т.е. /2.2.3/ является более слабым/. Кроме того, если положить $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0$, $\Psi_0 \neq 0$, то /2.2.3/ выполняется для любого решения УД Ψ_0 . Явные формулы построения решений будут даны в следующей теореме.

Доказательство теоремы. Представим каждое из уравнений

/2.2.1/ в виде [57]:

$$\partial_\alpha A_{\nu\beta} - \partial_\beta A_{\nu\alpha} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(\partial^\gamma B^\delta_\nu - \partial^\delta B^\gamma_\nu) = 0 ,$$

$$\partial_\alpha A^\alpha_\nu = \partial_\beta B^\beta_\nu = 0 ; \quad \alpha,\beta,\gamma,\delta,\nu = \overline{0,3} , \qquad /2.2.4/$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ – антисимметричный тензор,

$$\Psi_\nu = \Psi^{real}_\nu + i\,\Psi^{imag}_\nu = \begin{pmatrix} -A^2_\nu \\ -B^0_\nu \\ -B^1_\nu \\ B^3_\nu \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -A^1_\nu \\ A^3_\nu \\ B^2_\nu \\ -A^0_\nu \end{pmatrix} . \qquad /2.2.5/$$

Здесь $A_{\nu\alpha} = g_{\alpha\beta} A^\beta_\nu$, $\partial^\gamma = g^{\gamma\rho}\partial_\rho$. Будем рассматривать пока 4-х компонентную форму уравнений /2.2.1/. Из уравнений /2.2.4/ нетрудно видеть, что они инвариантны относительно следующих калибровочных преобразований:

$$A^\alpha_\nu \to (A^\alpha_\nu)' + \partial^\alpha f_\nu , \qquad B^\alpha_\nu = (B^\alpha_\nu)' + \partial^\alpha g_\nu , \qquad /2.2.6/$$

где функции f_ν , g_ν удовлетворяют волновому уравнению:

$$\Box f_\nu = \Box g_\nu = 0 . \qquad /2.2.7/$$

Далее, пусть Ψ_ν – произвольное решение УД /2.2.1/, не обязательно удовлетворяющее /2.2.2//. Представим выражение

$$\varphi = \gamma^0 \gamma^\nu \Psi_\nu$$

в обозначениях /2.2.5/ /сомножитель γ^0 взят для удобства/:

$$\varphi = \begin{bmatrix} -A_0^2 + B_1^3 - A_2^0 - B_3^1 - i\,(A_0^1 + A_1^0 + B_2^3 - B_3^2) \\ -B_0^0 - B_1^1 - B_2^2 - B_3^3 + i\,(A_0^3 + A_3^0 + B_1^2 - B_2^1) \\ -B_0^1 - B_1^0 + A_2^3 - A_3^2 + i\,(B_0^2 + B_2^0 + A_1^3 - A_3^1) \\ B_0^3 + B_3^0 + A_2^1 - A_1^2 - i\,(A_0^0 + A_1^1 + A_2^2 + A_3^3) \end{bmatrix} \qquad /2.2.8/$$

При преобразованиях /2.2.6/, /2.2.7/ Ψ_ν переходят в функции Ψ'_ν, которые снова являются решениями УД /2.2.1/, поскольку /2.2.1/ эквивалентно /2.2.4/. При этом величина φ /2.2.8/ преобразуется следующим образом:

$$\varphi \to \varphi' = \varphi -$$

$$- \begin{bmatrix} -\partial_2 f^0 + \partial_0 f^2 + \partial_3 g^1 - \partial_1 g^3 - i\,(\partial_1 f^0 - \partial_0 f^1 + \partial_3 g^2 - \partial_2 g^3) \\ \partial_0 g^0 - \partial_1 g^1 - \partial_2 g^2 - \partial_3 g^3 + i\,(\partial_3 f^0 - \partial_0 f^3 + \partial_2 g^1 - \partial_1 g^2) \\ \partial_0 g^1 - \partial_1 g^0 + \partial_3 g^2 - \partial_2 g^3 + i\,(\partial_2 g^0 - \partial_0 g^2 + \partial_3 g^1 - \partial_1 g^3) \\ \partial_3 g^0 - \partial_0 g^3 + \partial_1 g^2 - \partial_2 g^1 + i\,(\partial_0 g^0 - \partial_1 g^1 - \partial_2 g^2 - \partial_3 g^3) \end{bmatrix} = \qquad /2.2.9/$$

$$= \varphi - \theta \ ,$$

$$f^\nu = g^{\nu\mu} f_\mu \ , \quad g^\nu = g^{\nu\mu} g_\mu \ .$$

Из /2.2.9/ нетрудно найти, что

$$\theta \equiv \varphi - \varphi' = \gamma\,\partial x \ , \qquad /2.2.10/$$

где
$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} f^2 \\ g^0 \\ -g^1 \\ g^3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} f^1 \\ -f^3 \\ g^2 \\ -f^0 \end{pmatrix} . \qquad /2.2.11/$$

Потребуем, чтобы преобразованное выражение φ' стало нулевым;

$$\varphi' \equiv \gamma^0 \gamma^\nu \Psi'_\nu = 0$$

/отсюда и будут получаться искомые решения $\{\Psi'_\nu\}$/. Тогда из /2.2.10/, /2.2.11/ следует, что

$$\gamma\partial\mathcal{X} = \varphi = \gamma^0\gamma^\nu\Psi_\nu\,, \quad \Box\mathcal{X} = 0 \qquad /2.2.12/$$

/последнее уравнение вытекает из /2.2.7/, /2.2.11//.

Пусть теперь Ψ_ν - удовлетворяет /2.2.3/, т.е.

$$\gamma\partial\varphi = 0\,. \qquad /2.2.13/$$

Преобразование /2.2.6/, /2.2.7/, или функцию $\mathcal{X}$ /2.2.11/, ищем из уравнения /2.2.12/. Получим, что

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 + \eta \qquad /2.2.14/$$

где $\mathcal{X}_0$ - частное решение /оно всегда существует, т.к. уравнение линейно/, а η - произвольное решение УД. Тогда

$$\Box\mathcal{X} = \Box\mathcal{X}_0 \equiv \gamma\partial\gamma\partial\mathcal{X}_0 = \gamma\partial\varphi = 0\;,$$

т.е. условие /2.2.7/ выполняется. Теорема доказана.

Установим теперь явную формулу построения решений УРШ /2.2.1/-/2.2.2/ через 8-компонентные функции $\{\Psi_\nu\}$.

<u>Теорема 2.2.2.</u> Пусть $\{\Psi_\nu\}$, $\nu = \overline{0,3}$ - решения УД /2.2.1/ удовлетворяющее уловию

$$\Gamma\partial(\Gamma^0\Gamma^\mu\Psi_\mu) = 0\,. \qquad /2.2.15/$$

Тогда функции

$$\Psi_\nu^1 = \Psi_\nu + 4\partial_\eta S_{0\eta} A S_{0\nu} X \ , \qquad /2.2.16/$$

удовлетворяют УРШ /2.2.1/-/2.2.2/.

Здесь X - произвольное решение уравнения

$$\Gamma\partial X = \Gamma^0 \Gamma^\nu \Psi_\nu \ , \qquad /2.2.17/$$

$$S_{0\eta} = -\frac{1}{2}\Gamma^0\Gamma^\eta \ , \qquad \eta = \overline{0,3} \ ,$$

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & I_4 \end{pmatrix}(\Gamma^3\Gamma^5 - \Gamma^0) \ , \qquad /2.2.18/$$

$$\Gamma^5 = \begin{pmatrix} i_4 & 0 \\ 0 & -i_4 \end{pmatrix}\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3 \ .$$

Доказательство. Из /2.2.5/, /2.2.6/ следует, что

$$\Psi_\nu^1 = \Psi_\nu + \begin{bmatrix} -\partial^2 f_\nu - i\partial^1 f_\nu \\ -\partial^0 g_\nu + i\partial^3 f_\nu \\ -\partial^1 g_\nu + i\partial^2 g_\nu \\ \partial^3 g_\nu - i\partial^0 f_\nu \\ -\partial^2 f_\nu + i\partial^1 f_\nu \\ -\partial^0 g_\nu - i\partial^3 f_\nu \\ \partial^1 g_\nu + i\partial^2 g_\nu \\ -\partial^3 g_\nu - i\partial^0 f_\nu \end{bmatrix} \qquad /2.2.19/$$

Из /2.2.11/ получаем:

$$X = \begin{bmatrix} f^2 + i f^1 \\ g^0 - i f^3 \\ -g^1 + i g^2 \\ g^3 - i f^0 \\ f^2 - i f^1 \\ g^0 + i f^3 \\ g^1 + i g^2 \\ -g^3 - i f^0 \end{bmatrix} = (x, \tilde{x}) . \qquad /2.2.20/$$

Из /2.2.19/, /2.2.20/ можно получить, что

$$\Psi'_\nu = \Psi_\nu + 4\partial_\eta S_{0\eta} A S_{0\nu} X \quad ,$$

где $S_{0\eta}$, A - матрицы /2.2.18/. Если X - решение уравнения /2.2.17/, то сравнивая его с /2.2.12/, заключаем, что последнее соотношение дает решение уравнений /2.2.1/-/2.2.2/.

Теорема доказана.

Следствие 2.2.1. Пусть Ψ_0 - произвольное решение УД. Тогда функции

$$\Psi'_0 = \Psi_0 + 4\partial_\eta L_{\eta 0} X , \quad \Psi'_\alpha = 4\partial_\eta L_{\eta\alpha} X , \qquad /2.2.21/$$

где

$$\Gamma\partial X = \Psi_0 , \quad L_{\eta\mu} = S_{0\eta} A S_{0\nu} ,$$

удовлетворяют УРШ.

Следствие 2.2.2. В силу линейности УРШ и того, что X в /2.2.17/ определяется с точностью до решений УД, получим из /2.2.16/:

$$\Psi_\nu = 4\partial_\eta L_{\eta\nu}\Psi \qquad /2.2.22/$$

суть решения УРШ, если Ψ - произвольное решение УД.

Пример. $\Psi_0 = \frac{\Gamma x}{(xx)^2}\eta$, $\Psi_i \equiv 0$, η –постоянный спинор. Тогда из /2.2.21/ /опуская вычисления/ получим:

$$\Psi_0^1 = \frac{\Gamma x}{(xx)^2}\eta + \Gamma^0\frac{\Gamma x}{(xx)^2}A\eta \ ,$$

$$\Psi_i^1 = \Gamma^0\frac{\Gamma x}{(xx)^2}A\Gamma^0\Gamma^i\eta \ .$$

Формула /2.2.22/ позволяет по решению УД сразу строить решение УРШ.

§ 2.3. Инвариантность безмассового уравнения Дирака относительно трех неэквивалентных представлений алгебры Пуанкаре.

В работе [49] показано, что УД /2.1.1/ инвариантно относительно алгебры Пуанкаре, операторы которой могут образовывать три различных представления со спинами $S = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; $1, 0$; $1, 1$; соответственно, а также относительно трех различных супералгебр.

Известно [11], что максимальной, в смысле Ли, группой инвариантности УД /2.1.1/ является 23-параметрическая группа Ли G_{23}, содержащая 15-параметрическую конформную группу $C(1,3) \supset P(1,3)$ /подробно о конформной симметрии см. [24]/ и 8-параметрическую группу G_8 матричных преобразований. /Отметим, что инвариантность /2.1.1/ относительно группы $C(1,3)$ была установлена еще Дираком, а относительно - Паули и Тушеком /см., например, [14]//. Как уже было сказано во введении, под инвариантностью относительно алгебры Пуанкаре $AP(1,3)$ понимается такая, когда Ψ - функция преобразуется по спинорному представлению:

$$D(\tfrac{1}{2},0) \oplus D(0,\tfrac{1}{2}) \oplus D(\tfrac{1}{2},0) \oplus D(0,\tfrac{1}{2}) . \qquad /2.3.1/$$

Однако оказывается, что инвариантность /2.1.1/ относительно алгебры матричных преобразований AG_8 позволяет выделить еще два представления $AP(1,3)$, реализуемые на множестве решений /2.1.1/

$$D(1,0) \oplus D(0,1) \oplus D(0,0) \oplus D(0,0) , \qquad /2.3.2/$$

$$D(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \oplus D(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) , \qquad /2.3.3/$$

что означает, что УД /2.1.1/ описывает не только поле со спином $\frac{1}{2}$ /фермионное/, но и поля со спином 1 , 0 /бозонное/.

Прежде чем выписать явный вид генераторов $AP(1,3)$, соответствующих представлениям /2.3.1/–/2.3.3/, дадим определение спина для произвольного поля $\Psi(x)$, пригодное как для линейных, так и для нелинейных уравнений [25] .

Определение 2.3.1. Если уравнение для $\Psi(x)$ инвариантно относительно 10 операторов $AP(1,3)$ /1.1.1/ и, кроме того, имеет место равенства /в случае неприводимого представления/:

$$W_\mu W^\mu = S(S+1) P_\mu P^\mu , \qquad /2.3.4/$$

где W_μ – вектор Любанского-Паули

$$W_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\delta} J^{\nu\rho} P^\sigma , \qquad /2.3.5/$$

то будем говорить, что поле Ψ , преобразующееся по представлению, задаваемому /1.1.1/, имеет спин S .

В случае приводимого представления $AP(1,3)$ необходимо найти значения собственных чисел

$$W_\mu W^\mu = \begin{pmatrix} S_1(S_1+1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & S_1(S_1+1) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & S_2(S_2+1) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & S_2(S_2+1) \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & S_K(S_K+1) \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & S_K(S_K+1) \end{pmatrix} P_\mu P^\mu \qquad /2.3.6/$$

В данном случае будем говорить, что поле Ψ представляет собой совокупность полей со спинами S_i , $i=\overline{1,K}$.

Явный вид базисных операторов $AP(1,3)$ для представлений /2.3.1/–/2.3.3/, соответственно, таков:

$$AP^{(K)}(1,3)=\langle P_\mu , J^{(K)}_{\mu\nu}=x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + S^{(K)}_{\mu\nu} \rangle ,\ K=1,2,3. \qquad /2.3.7/$$

где

$$S^{(1)}_{\mu\nu}=\frac{1}{4}\left[\Gamma_\mu , \Gamma_\nu\right], \quad S^{(2)}_{\mu\nu}=S^{(1)}_{\mu\nu}+Q_{\mu\nu},$$

$$S^{(3)}_{\mu\nu}=\Big\{ S^{(3)}_{01}=S^{(2)}_{01},\quad S^{(3)}_{02}=S^{(2)}_{02},\quad S^{(3)}_{03}=S^{(2)}_{03}-2Q_{03},$$

$$S^{(3)}_{12}=S^{(2)}_{12},\quad S^{(3)}_{13}-2Q_{13},\quad S^{(3)}_{23}=S^{(2)}_{23}-2Q_{23}\Big\}. \qquad /2.3.8/$$

Здесь $Q_{\mu\nu}$ задаются матрицами [11]:

$$Q_{01}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0_4 & -i\gamma^0\gamma^2 \\ i\gamma^0\gamma^2 & 0_4 \end{pmatrix},\quad Q_{02}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\gamma^0\gamma^2 \\ -\gamma^0\gamma^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_{03}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\gamma^5 & 0 \\ 0 & \gamma^5 \end{pmatrix} \qquad /2.3.9/$$

$$Q_{12}=\frac{i}{2}\begin{pmatrix} -I_4 & 0_4 \\ 0_4 & I_4 \end{pmatrix},\quad Q_{13}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \gamma^1\gamma^3 \\ \gamma^1\gamma^3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_{23}=\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & \gamma^3\gamma^1 \\ -\gamma^3\gamma^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операторы /2.3.7/–/2.3.9/ действуют в пространстве 8-компонентных функций $\Psi(x)$.

Операторы /2.3.7/ удовлетворяют соотношениям /1.1.2/ в силу того, что $Q_{\mu\nu}$ /2.3.9/ образуют алгебру Лоренца и коммутируют со всеми матрицами $S^{(1)}_{\mu\nu}$. А то, что $AP^{(K)}(1,3)$, $K=1,2,3$ образуют представления /2.3.1/–/2.3.3/ можно убедиться, если найти собственные значения матриц:

$$(j^{(K)}_a)^2, \quad (\tau^{(K)}_a)^2,$$

где

$$j_a^{(K)} = \frac{1}{2}(S_a^{(K)} + i N_a^{(K)}), \quad \tau_a^{(K)} = \frac{1}{2}(S_a^{(K)} - i N_a^{(K)}),$$
$$S_a^{(K)} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc} S_{bc}^{(K)}, \quad N_a^{(K)} = S_{0a}^{(K)}, \quad a, b, c = 1, 2, 3 . \qquad /2.3.10/$$

/подробнее см. [25, 4]/.

Инвариантность УД /2.1.1/ относительно алгебры $AP(1,3)$ с операторами из представлений /2.3.2/, /2.3.3/ становится очевидной, если вспомнить, что поле Ψ можно представить как совокупность векторных полей $\vec{D}$ и $\vec{B}$ / $S=1$ / и двух скалярных полей F и G / $S=0$ / /см. /2.2.5//, спины которых равны 1 /см.определение 2.3.1/. При этом УД /2.1.1/ представляется в виде уравнений /2.1.6/, которые, очевидно, инвариантны относительно $AP(1,3)$ с операторами из представления /2.3.2/, или в виде уравнений /2.2.4/, которые инвариантны относительно $AP(1,3)$ из представления /2.3.3/.

2. Рассмотрим три множества операторов симметрии УД /2.1.1/:

$$SA^{(K)} = \{ P_\mu, J_{\mu\nu}^{(K)}, \Gamma_4, I; Q_{\mu\nu} \} , \qquad /2.3.11/$$

где $J_{\mu\nu}^{(K)}$ определены в /2.3.7/, /2.3.8/, $\Gamma_4 = \Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3$, $Q_{\mu\nu}$ заданы в /2.3.9/. Эти множества операторов образуют как алгебры Ли, так и супералгебры [53, 27]. Операторы P_μ, $J_{\mu\nu}^{(K)}$, Γ_4, I – являются четными, а $Q_{\mu\nu}$ – нечетными в соответствующих супералгебрах.

Для доказательства этого утверждения приведем коммутационные и антикоммутационные соотношения для операторов из $SA^{(K)}$ /2.3.11/. Операторы P_μ, $J_{\mu\nu}^{(K)}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям /1.1.2/; Γ_4 , I коммутируют со всеми операторами из $SA^{(K)}$.

Для дальнейшего удобно ввести обозначения:

$$R_a = Q_{oa} , \quad T_a = \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} Q_{bc} ,$$
$$L_a^{(K)} = J_{oa}^{(K)} , \quad M_a^{(K)} = \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} J_{bc}^{(K)} . \qquad /2.3.12/$$

Нетрудно убедиться, что выполняются соотношения:

$$\{ R_a , R_b \} \equiv R_a R_b + R_b R_a = \frac{1}{2} \delta_{ab} ,$$
$$\{ T_a , T_b \} = - \frac{1}{2} \delta_{ab} , \ \{ R_a T_b \} = \delta_{ab} \Gamma_4 . \qquad /2.3.13/$$

Операторы R_a , T_a из $SA^{(1)}$ коммутируют со всеми четными операторами $SA^{(1)}$. Для $SA^{(2)}$ имеем:

$$[P_\mu , R_a] = [P_\mu , T_a] = 0 ,$$
$$[L_a^{(2)} , R_b] = [R_a , R_b] = \varepsilon_{abc} T_c ,$$
$$[L_a^{(2)} , T_b] = [R_a , T_b] = - \varepsilon_{abc} R_c , \qquad /2.3.14/$$
$$[M_a^{(2)} , R_b] = [T_a , R_b] = - \varepsilon_{abc} R_c ,$$
$$[M_a^{(2)} , T_b] = [T_a , T_b] = - \varepsilon_{abc} T_c .$$

Супералгебра $SA^{(3)}$ изоморфна $SA^{(2)}$. Изоморфизм достигается заменой:

$$R_3 \to R_3' = - R_3 , \ T_1 \to T_1' = - T_1 , \ T_2 = T_2' = - T_2 .$$

Таким образом, структуры супералгебр $SA^{(K)}$, $K = 1,2,3$ описаны.

С физической точки зрения наличие супералгебры у УД /2.1.1/ связано с тем, что оно описывает как фермионное, так и бозонное поля. Конкретная связь между бозонными и фермионными решениями посредством нечетных операторов $Q_{\mu\nu}$ будет установлена при нахождении точных решений.

3. Мы рассматривали 8-компонентное УД /2.1.1/ потому, что операторы из $AP^{(2)}(1,3)$, $AP^{(3)}(1,3)$ /2.3.7/ действуя на функцию $\Psi=(\psi,\tilde{\psi})$ "перепутывают" компоненты ψ и $\tilde{\psi}$, т.е. имеют вид:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \gamma^0 B^* \gamma^0 & \gamma^0 A^* \gamma^0 \end{pmatrix}, \qquad /2.3.15/$$

где A, B – матрицы 4×4, $B \neq 0$. При этом не существует такого представления γ^μ – матриц, чтобы 4-х компонентное УД было бы инвариантно относительно алгебры $AP(1,3)$, имеющей три различных представления. Это следует из того, что для 4-х компонентного УД имеется только 3 матричных оператора симметрии: I, iI, γ^5 из которых вместе с $AP^{(1)}(1,3)$ нельзя составить другого представления $AP(1,3)$.

Оказывается, УД можно записать в такой форме, что оно будет инвариантно относительно алгебры Пуанкаре с операторами, образующими следующие представления:

$$D(\tfrac{1}{2},0) \oplus D(0,\tfrac{1}{2}), \qquad /2.3.16/$$

$$D(1,0) \oplus D(0,0), \qquad /2.3.17/$$

$$D(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}), \qquad /2.3.18/$$

причем операторы из этих представлений действуют на 4-х компонентную функцию $\mathcal{X}(x)$.

Рассмотрим формулировку уравнений Максвелла /2.3.1/, впервые предложенную в работе [2, 59]. Обозначим символами α_1 , α_2 , α_3 четырехрядные матрицы

$$\alpha_1 = i\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad /2.3.19/$$

$$\alpha_3 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а символом $\mathcal{X}_0(t,\vec{x})$ - 4-х компонентную функцию, первая компонента которой тождественно равна нулю:

$$\mathcal{X}_0(t,\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ E^1 - iH^1 \\ E^2 - iH^2 \\ E^3 - iH^3 \end{pmatrix} . \qquad /2.3.20/$$

Используя обозначения /2.3.19/, /2.3.20/, уравнения Максвелла можно представить в форме:

$$\frac{\partial \mathcal{X}_0}{\partial t} + \alpha_i \frac{\partial \mathcal{X}_0}{\partial x^i} = 0 . \qquad /2.3.21/$$

Матрицы α_i /2.3.19/ удовлетворяют алгебре Клиффорда-Дирака:

$$\alpha_a \alpha_b + \alpha_b \alpha_a = 2\delta_{ab} . \qquad /2.3.22/$$

Введем теперь функцию:

$$\mathscr{X} = \begin{pmatrix} -F - iG \\ D^1 - iB^1 \\ D^2 - iB^2 \\ D^3 - iB^3 \end{pmatrix} , \qquad /2.3.23/$$

и рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial \mathscr{X}}{\partial t} + \alpha_i \frac{\partial \mathscr{X}}{\partial x^i} = 0 . \qquad /2.3.24/$$

Оказывается, что если в уравнении /2.3.24/ покомпонентно выделить вещественную и мнимую части, то полученные 8 уравнений совпадут с уравнениями /2.1.6/, а оно, в свою очередь, эквивалентно 4-х компонентному УД. Таким образом, существует взаимнооднозначное соответствие между решениями /2.1.1/ и /2.3.24/, хотя эти уравнения не связаны линейным преобразованием, т.е. не существует такой матрицы α_0 , чтобы матрицы α_0 , $\alpha_0 \alpha_a$ образовывали алгебру Клиффорда: $\beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu = 2g_{\mu\nu}$. Справедлива следующая

<u>Теорема 2.3.1.</u> Явный вид базисных элементов симметрии уравнения /2.3.24/ $AP(1,3)$, соответствующих представлениям /2.3.16/-/2.3.18/, соответсвенно, таков:

$$AP^{(K)}(1,3) = \langle P_\mu , J^{(K)}_{\mu\nu} \rangle , \quad K = 1,2,3 \qquad /2.3.25/$$

где

а) $S^{(1)}_{0a} = -\frac{1}{2}\alpha_a$, $S^{(1)}_{ab} = \frac{i}{2}\varepsilon_{abc}\alpha_c$,

$$\text{б)} \quad S^{(2)}_{0a} = \begin{pmatrix} 0 & 0\;0\;0 \\ 0 & \\ 0 & iS_a \\ 0 & \end{pmatrix} , \quad S^{(2)}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0\;0\;0 \\ 0 & \\ 0 & \varepsilon_{abc}S_c \\ 0 & \end{pmatrix} , \qquad /2.3.26/$$

где
$$S_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad S_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad S_3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

в) $S^{(3)}_{01}=S^{(2)}_{01}$, $S^{(3)}_{02}=S^{(2)}_{02}$, $S^{(3)}_{12}=S^{(2)}_{12}$,

$$S^{(3)}_{03}=\begin{pmatrix}0&0&0&i\\0&&&\\0&&0_3&\\-i&&&\end{pmatrix},\quad S^{(3)}_{13}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&&&\\1&&0_3&\\0&&&\end{pmatrix},$$

$$S^{(3)}_{23}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&&&\\0&&0_3&\\0&&&\end{pmatrix}.$$

Для доказательства нужно проверить, что преобразования функций Ψ и $\mathcal{X}$ в соответствии с одним из представлений $AP^{(K)}(1,3)$ //2.3.7/ и /2.3.25//, соответственно, дают одно и то же преобразование компонент F, G, $\vec{D}$, $\vec{B}$ в уравнениях /2.1.6/.

Представление /2.3.22/, /2.3.23/ имеет еще и то преимущество, что, используя результаты § 2.1.1, можно сравнительно просто записать связь между решениями уравнения Максвелла /2.3.21/ и УД /2.3.24/ не переходя к компонентам F, G, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$.

Теорема 2.3.2. Решения уравнений /2.3.21/ строятся по решениям уравнения /2.3.24/ следующим образом:

$$\mathcal{X}_0=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\L_1&1&0&0\\L_2&0&1&0\\L_3&0&0&1\end{bmatrix}\mathcal{X}, \qquad /2.3.27/$$

где L_a – оператор, имеющий вид:

$$L_a = i\,\nabla_a \left(\int_{t_0}^{t} (\cdot)\,d\tau + \Delta^{-1} D_{t_0}(\cdot) \right). \qquad /2.3.28/$$

Здесь t_0 - фиксированная точка, $D_{t_0}(\cdot)$ оператор $\left.\frac{\partial(\cdot)}{\partial t}\right|_{t=t_0}$

$$\Delta^{-1} f(\vec{x})$$

означает произвольное решение уравнения Пуассона:

$$\Delta g(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 2.3.3. Пусть $\mathcal{X}_0$ - произвольное решение для /2.3.21/, F , G - скалярные функции, удовлетворяющие волновому уравнению $\Box F = \Box G = 0$. Тогда функция

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -L_1 & 0 & 0 & 0 \\ -L_2 & 0 & 0 & 0 \\ -L_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -F - iG \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где L_a - операторы /2.3.28/, является решением УД /2.3.24/.

§ 2.4. Алгебра и супералгебры симметрии системы уравнений Дирака с массами m и $-m$.

В этом параграфе, следуя [49] рассматривается случай, когда масса частицы ненулевая. УД с массой

$$(i\gamma\partial - m)\psi = 0 \qquad /2.4.1/$$

не инвариантно относительно замены $m \to -m$. Таким свойством обладает система двух УД:

$$(i\gamma\partial - m)\Psi_- = 0 \ ,$$
$$(i\gamma\partial + m)\Psi_+ = 0 \ , \qquad /2.4.2/$$

На множестве решений этой системы реализуется наиболее полное представление $AP(1,3)$ [45], поскольку /2.4.2/, в отличие от /2.4.1/, соответствуют оба знака массы. Другими словами, с точки зрения общих принципов симметрии частицу массы m и спина $S=\frac{1}{2}$ предпочтительней описывать системой /2.4.2/ /см. также [62] /. В связи с этим представляет интерес вопрос о максимальной в смысле Ли АИ системы /2.4.2/. /Максимальная АИ УД /2.4.1/ – 14 мерная алгебра Ли [11]

$$A_{14} = \langle AP^{(1)}(1,3)\,,\, I\,,\, Q\,,\, \tilde{Q}\,,\, R \rangle \quad ,$$

где I – генератор тождественного преобразования, Q и $\tilde{Q}$ генераторы зарядовых преобразований, R – генератор фазового преобразования/.

1. Для исследования симметрии системы /2.4.2/ запишем ее вместе с сопряженными уравнениями в виде:

$$[\, i\hat{\Gamma}^{\mu}\partial_{\mu} - m\,]\,\hat{\Psi} = 0 \ , \qquad /2.4.3/$$

где

$$\hat{\Gamma}^{\mu} = \begin{pmatrix} \Gamma^{\mu} & 0_8 \\ 0_8 & -\Gamma^{\mu} \end{pmatrix} - 16\times 16 \ , \qquad /2.4.4/$$

$\hat{\Psi}$ – 16-компонентная функция-столбец

$$(\Psi_-\,,\Psi_+) = (\Psi_-\,,\tilde{\Psi}_-\,,\Psi_+\,,\tilde{\Psi}_+)\,, \qquad \tilde{\Psi}_{\pm} = \gamma^0\Psi^*_{\pm} \ .$$

Теорема 2.4.1. [49] Максимальной в смысле Ли АИ уравнения /2.4.2/ является 26-мерная алгебра Ли

$A_{26} = \langle \widehat{AP}^{(1)}(1,3) \quad , A_{16} \rangle$ где

$$\widehat{AP}^{(1)}(1,3) = \langle P_\mu , \hat{J}^{(1)}_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + S^{(1)}_{\mu\nu} \rangle , \qquad /2.4.5/$$

$\hat{S}^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} [\hat{\Gamma}_\mu , \hat{\Gamma}_\nu]$, $\quad \hat{\Gamma}^\mu = g^{\mu\nu} \hat{\Gamma}_\nu$ – матрицы /2.4.4/;

базисные элементы A_{16} – это матрицы 16×16 вида:

$$\begin{pmatrix} \Lambda & \Sigma \\ \tilde{\Sigma} & \tilde{\Lambda} \end{pmatrix} , \qquad /2.4.6/$$

$\Lambda , \Sigma , \tilde{\Sigma} , \tilde{\Lambda}$ – матрицы 8×8

$\langle \Lambda , \tilde{\Lambda} \rangle = \{ I, Q, \tilde{Q}, R \}$, $\langle \Sigma , \tilde{\Sigma} \rangle = \{ Q_{13}, Q_{23}, Q_{03}, \Gamma_4 \}$.

Явный вид матриц Q_{13}, Q_{23}, Q_{03} , $Q = Q_{01}$, $\hat{Q} = Q_{02}$, $R = Q_{12}$ указан в /2.3.9/. /Генераторы /2.4.5/, /2.4.6/ действуют в пространстве функций-столбцов $\hat{\Psi}$ /.

Доказательство. Оператор симметрии ищем в виде

$$Q = \xi^\mu (x, \Psi) \partial_\mu + L(x, \Psi) .$$

Пусть Q^I означает такие операторы Q , для которых не все ξ^μ тождественно равны нулю. Теперь заметим, что $\hat{\Gamma}^\mu$ – матрицы /2.4.4/ образуют алгебру Клиффорда $\hat{\Gamma}^\mu \hat{\Gamma}^\nu + \hat{\Gamma}^\nu \hat{\Gamma}^\mu = 2g^{\nu\mu}$ Поэтому доказательство того, что максимальное множество Q^I -симметрии составляет алгебру $\widehat{AP}^{(1)}(1,3)$ /2.4.5/, совершенно аналогично, как и для 4-х компонентного уравнения /2.4.1/ / $\hat{\Gamma}^\mu \to \gamma^\mu$, $\hat{\Psi} \to \Psi$ /. Таким образом, остается найти все матричные операторы /2.4.6/. Расщепляя уравнение /2.4.3/ на две части для Ψ_- и Ψ_+ находим условие его инвариантности относительно /2.4.6/:

$$
\begin{aligned}
&(i\Gamma\partial - m)\Lambda\Psi_- + (i\Gamma\partial - m)\Sigma\Psi_+ = 0\,, \\
&(i\Gamma\partial + m)\tilde{\Sigma}\Psi_- + (i\Gamma\partial + m)\tilde{\Lambda}\Psi_+ = 0
\end{aligned}
\qquad /2.4.7/
$$

на решениях уравнений

$$(i\Gamma\partial - m)\Psi_- = 0\,, \qquad (i\Gamma\partial + m)\Psi_+ = 0\,.$$

Поскольку два последних уравнения, а также Ψ_- и Ψ_+ – независимы, то условия /2.4.7/ расщепляются на такие:

$$(i\Gamma\partial - m)\Lambda\Psi_-\Big|_{(i\Gamma\partial - m)\Psi_- = 0} = 0\,,$$

$$(i\Gamma\partial + m)\tilde{\Lambda}\Psi_+\Big|_{(i\Gamma\partial + m)\Psi_+ = 0} = 0\,,$$

$$(i\Gamma\partial - m)\Sigma\Psi_+\Big|_{(i\Gamma\partial + m)\Psi_+ = 0} = 0\,,$$

$$(i\Gamma\partial + m)\tilde{\Sigma}\Psi_-\Big|_{(i\Gamma\partial - m)\Psi_- = 0} = 0\,.$$

Все матричные симметрии Λ и $\tilde{\Lambda}$ для первых двух уравнений найдены в [11] и совпадают с $\langle\, I\,,\ Q\,,\ \tilde{Q}\,,\ R\,\rangle$. Из третьего уравнения получаем

$$(i\Gamma\partial - m)\Sigma\Psi_+ = \lambda(i\Gamma\partial + m)\Psi_+\,,$$

где λ – какая-либо матрица 8×8. С помощью прямого вычисления /считая Σ, λ – неизвестными, Ψ_+, $\partial_\nu\Psi_+$ – независимыми переменными/ находим:

$$\Sigma = \{Q_{13}, Q_{23}, Q_{03}, \Gamma_4\}\,,\ \lambda = -\Sigma\,.$$

Аналогично находится общий вид матрицы $\tilde{\Sigma}$ из четвертого уравнения. Теорема доказана.

Инвариантность уравнения /2.4.3/ относительно матричных преобразований /2.4.6/ позволяет выделить еще одно представление $AP(1,3)$, реализуемое на множестве решений /2.4.3/, а именно:

$$2(D(1,0) \oplus D(0,1)) \oplus 4D(0,0) . \qquad /2.4.8/$$

Это представление задается следующими операторами:

$$\hat{AP}^{(2)}(1,3) = \langle P_\mu , \hat{J}^{(2)}_{\mu\nu} = \hat{J}^{(1)}_{\mu\nu} + \hat{Q}_{\mu\nu} \rangle , \qquad /2.4.9/$$

где $\hat{J}^{(1)}_{\mu\nu}$ указаны в /2.4.5/,

$$\hat{Q}_{\mu\nu} = \begin{cases} \begin{pmatrix} Q_{\mu\nu} & 0_8 \\ 0_8 & Q_{\mu\nu} \end{pmatrix}, & (\mu,\nu) = (0,1), (0,2), (1,2) ; \\ \begin{pmatrix} 0_8 & Q_{\mu\nu} \\ Q_{\mu\nu} & 0_8 \end{pmatrix}, & (\mu\nu) = (0,3), (1,3), (2,3) . \end{cases} \qquad /2.4.10/$$

Следовательно уравнение /2.4.3/, /2.4.2/ описывает как фермионное поле /спин $S = \frac{1}{2}$ /, так и бозонное / $S = 0,1$/. Поэтому не удивительно, что оно обладает супералгебрами симметрии.

2. Рассмотрим два множества операторов симметрии уравнения /2.4.3/:

$$SA^{(l)} = \{ P_\mu , \hat{J}^{(l)}_{\mu\nu} , \hat{\Gamma}_u , I ; \hat{Q}_{\mu\nu} \} , \quad l = 1,2 , \qquad /2.4.11/$$

где $\hat{\Gamma}_4 = \begin{pmatrix} 0_8 & \Gamma_4 \\ \Gamma_4 & 0_8 \end{pmatrix}$ /см. /2.3.11//. Эти множества операторов образуют как алгебру Ли, так и супералгебры. Операторы P_μ , $\hat{J}^{(l)}_{\mu\nu}$, $\hat{\Gamma}_4$, I – четные, а $\hat{Q}_{\mu\nu}$ – нечетные в соответствующих суперaлгебрах. $SA^{(1)}$, $SA^{(2)}$ /2.4.11/ изоморфны суперaлгебрам $SA^{(l)}$, $l=1,2$ /2.3.11/. Изоморфизм достигается с помощью преобразования:

$$P_\mu \to P_\mu, \quad J^{(K)}_{\mu\nu} \to \hat{J}^{(K)}_{\mu\nu}, \quad \Gamma_4 \to \hat{\Gamma}_4, \quad I_4 \to I_8, \quad Q_{\mu\nu} \to \hat{Q}_{\mu\nu}, \; K=1,2.$$

§ 2.5. Нелинейные спинорные уравнения, обладающие дуальной пуанкаре-инвариантностью.

Известно много нелинейных обобщений УД /2.4.1/, которые инвариантны относительно алгебры Пуанкаре, с операторами из спинорного представления [24]. В этом параграфе построены нелинейные обобщения 16-компонентного УД /2.4.3/, инвариантные относительно $AP(1,3)$, операторы которого могут образовывать два различных представления.

1. Теорема 2.5.1. [49] Уравнение

$$[i\hat{\Gamma}^\mu\partial_\mu\hat{\Psi} - F(\hat{\bar{\Psi}}\hat{\Psi}, \hat{\bar{\Psi}}M\hat{\Psi}, \hat{\bar{\Psi}}\Lambda\hat{\Psi}, \hat{\bar{\Psi}}\Lambda M\hat{\Psi})\hat{\Psi} = 0, \qquad /2.5.1/$$

где $\hat{\bar{\Psi}}$ – 16-компонентная строка

$$(\bar{\Psi}_-, \Psi^T_-, \bar{\Psi}_+, \Psi^T_+), \quad \Lambda = \hat{\Gamma}^0\hat{\Gamma}^1\hat{\Gamma}^2\hat{\Gamma}^3, \quad M = \begin{pmatrix} 0_8 & I_8 \\ I_8 & 0_8 \end{pmatrix},$$

F – произвольная действительная гладкая функция, инвариантно относительно алгебр $\hat{AP}^{(l)}(1,3)$, $l=1,2$ /2.4.5/ и /2.4.9/.

Доказательство. Поскольку линейное уравнение /2.4.3/ инвариантно относительно операторов /2.4.5/, /2.4.9/, то достаточно показать, что величины

$$u = \hat{\bar{\Psi}}\hat{\Psi}, \quad v = \hat{\bar{\Psi}}\Lambda\hat{\Psi}, \quad r = \hat{\bar{\Psi}}M\hat{\Psi}, \quad S = \hat{\bar{\Psi}}\Lambda\hat{\Psi} \qquad /2.5.2/$$

есть инварианты групп $\hat{P}^{(l)}(1,3)$. Действительно, из /2.4.5/, /2.4.9/ получаем:

$$\hat{\bar{\Psi}}' = \hat{\bar{\Psi}} \exp\{-\hat{S}^{(l)}_{\mu\nu}\theta_{\mu\nu}\} \qquad / \quad \theta_{\mu\nu} \text{ - параметры группы/.}$$

Тогда, учитывая, что M, Λ коммутируют со всеми матрицами $\hat{S}^{(l)}_{\mu\nu}$ получаем, что величины /2.5.2/ - инвариантны.

Теорема доказана.

Отметим, что величины /2.5.2/ выражаются через 4-х компонентные спиноры Ψ_-, Ψ_+ следующим образом:

$$u = 2(\bar{\Psi}_-\Psi_- + \bar{\Psi}_+\Psi_+), \quad v = 2(\bar{\Psi}_+\gamma^5\Psi_+ + \bar{\Psi}_-\gamma^5\Psi_-),$$

$$\tau = 2(\bar{\Psi}_+\Psi_- + \bar{\Psi}_-\Psi_+), \quad S = 2(\bar{\Psi}_+\gamma^5\Psi_- + \bar{\Psi}_-\gamma^5\Psi_+).$$

Для существования супералгебры уравнению /2.5.1/ "не хватает" операторов $\hat{\Gamma}_4$, I. Однако, среди этих уравнений есть инвариантные относительно $\hat{\Gamma}_4$, I.

<u>Теорема 2.5.2.</u> $A\hat{P}^{(l)}(1,3)$ - инвариантные уравнения вида:

$$i\hat{\Gamma}\partial\hat{\Psi} - F\left(\frac{u+S}{\tau+v}, \frac{u-S}{\tau-v}\right)\hat{\Psi} = 0, \qquad /2.5.3/$$

где u, S, τ, v - величины /2.5.2/ инвариантны относительно супералгебр /2.4.11/.

Доказательство. Найдем инварианты $\omega_i(u, S, \tau, v)$, $i=1,2,3$ оператора $\hat{\Gamma}_4$. Нетрудно убедиться, что инфинитоземальное преобразование $\hat{\Psi} = \hat{\Psi}' + \varepsilon\hat{\Gamma}_4\hat{\Psi}$ дает следующее преобразование величин /2.5.2/:

$$u = u' + \varepsilon(-2iS), \quad v = v' - \varepsilon 2i\tau,$$
$$\tau = \tau' - \varepsilon 2iv, \qquad S = S' - \varepsilon 2iu.$$

Отсюда получаем уравнение для инвариантов

$$S\omega_u + u\omega_s + v\omega_r + r\omega_v = 0 \quad .$$

Из этого уравнения находим независимые инварианты:

$$\omega_1 = u^2 - S^2 , \;\; \omega_2 = r^2 - v^2 , \;\; \omega_3 = ur - Sv \; .$$

Далее, нетрудно проверить, что величины:

$$f_1(\omega_i) = \frac{\omega_1}{\omega_3 + \sqrt{\omega_3^2 - \omega_1\omega_2}} \; , \quad f_2(\omega_i) = \frac{\omega_1}{\omega_3 - \sqrt{\omega_3^2 - \omega_1\omega_2}}$$

являются независимыми инвариантами оператора I . Подставив выражения $\omega_i(u,v,r,S)$ в f_1 , f_2 получим:

$$f_1 = \frac{u+S}{r+v} \; , \qquad f_2 = \frac{u-S}{r-v} \quad .$$

Таким образом, величина $F\left(\frac{u+S}{r+v} , \frac{u-S}{r-v}\right)$ - инвариант всех операторов супералгебры /2.4.11/. Поскольку для $F = m = const$ утверждение теоремы верно, то оно справедливо и для уравнения /3.5.3/. Нетрудно убедиться, что $\frac{u+S}{r+v} \not\equiv const$, положив например, $\Psi_- = 0$ /. Теорема доказана.

2. В [3] рассматривалось уравнение

$$i\gamma\partial\Psi - \lambda\gamma^5\gamma^\mu\bar{\Psi}\gamma^5\gamma_\mu\Psi\Psi = 0 \qquad /2.5.4/$$

в качестве одного из фундаментальных уравнений теории поля. Там же введена система уравнений для двух спиноров Ψ_I и Ψ_{II} Мы будем рассматривать систему

$$i\gamma\partial\Psi_I - \lambda\gamma^5\gamma^\mu(\bar{\Psi}_I\gamma^5\gamma_\mu\Psi_I - \bar{\Psi}_{II}\gamma^5\gamma_\mu\Psi_{II})\Psi_I = 0 \; , \qquad /2.5.5/$$

$$i\gamma\partial\Psi_{II} - \lambda\gamma^5\gamma^\mu(\bar{\Psi}_I\gamma^5\gamma_\mu\Psi_I - \bar{\Psi}_{II}\gamma^5\gamma_\mu\Psi_{II})\Psi_{II} = 0 \; ,$$

которая отличается от упомянутой знаком в круглых скобках. Выбор /2.5.5/ можно обосновать следующими причинами.

Система /2.5.5/ C, P, T – инвариантна /в отличие от рассматриваемой в [3]/. Соответствующими дискретными преобразованиями являются:

$$\Psi_{I}(x) \to \gamma^2\gamma^4\Psi^*_{II}(x),\ \Psi_{II}(x) \to \gamma^2\gamma^4\Psi^*_{I}(x) - \ C\text{-инвариантность},$$

$$\Psi_{I,II}(t,\vec{x}) \to \gamma^0\Psi_{I,II}(t,-\vec{x}) - \qquad P\text{-инвариантность},$$

$$\Psi_{I}(t,\vec{x}) \to \gamma^0\Psi_{II}(-t,\vec{x}),\ \Psi_{II}(t,\vec{x}) \to \gamma^0\Psi_{I}(-t,\vec{x}) - T\text{-инвариантность}.$$

Кроме того, если положить $\Psi_I = \Psi_{II} = \Psi$, то $i\gamma\partial\Psi = 0$, т.е. уравнения /2.5.5/ включают решение безмассового УД. Наконец, система /2.5.5/ имеет дуальную пуанкаре-инвариантность.

Представим /2.5.5/ вместе с сопряженными уравнениями в следующем виде /$\lambda \to 2\lambda$/ :

$$i\hat{\Gamma}^\mu\partial_\mu\hat{\Psi} - \lambda\hat{\Gamma}^5\hat{\Gamma}^\mu\hat{\bar{\Psi}}\hat{\Gamma}^5\hat{\Gamma}_\mu\hat{\Psi}\hat{\Psi} = 0, \qquad /2.5.6/$$

где $\hat{\Gamma}^\mu$ – матрицы /2.4.4/, $\hat{\Psi}$, $\hat{\bar{\Psi}}$ – 16-компонентные столбец и строка.

$$\hat{\Gamma}^5 = \hat{Q}_{12}\hat{\Gamma}^0\hat{\Gamma}^1\hat{\Gamma}^2\hat{\Gamma}^3. \qquad /2.5.7/$$

Тогда справедлива

<u>Теорема 2.5.3.</u> Уравнение /2.5.6/, где $\lambda \in \mathbb{R}$, инвариантно относительно алгебр $\hat{AP}^{(l)}(1,3)$, $l = 1,2$, /2.4.5/ и /2.4.9/, масштабного преобразования $D = x^\mu\partial_\mu + \frac{1}{2}$ и пяти матричных операторов:

$$\Lambda_{01} = \begin{pmatrix} Q_{01} & 0 \\ 0 & -Q_{01} \end{pmatrix},\quad \Lambda_{02} = \begin{pmatrix} Q_{02} & 0 \\ 0 & -Q_{02} \end{pmatrix},\quad \Lambda_{12} = \begin{pmatrix} Q_{12} & 0 \\ 0 & -Q_{12} \end{pmatrix}, \qquad /2.5.8/$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_4 \\ -\Gamma_4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{Q}_{12}\hat{\Gamma}^5,$$

где $\hat{Q}_{\mu\nu}$ - матрицы /2.3.9/.

Доказательство проводится как и в теореме 2.5.1, а именно проверяется, что величины $J_\nu = \hat{\bar{\Psi}}\hat{\Gamma}^5\hat{\Gamma}_\nu\hat{\Psi}$ есть инварианты всех матричных операторов $\hat{Q}_{\mu\nu}$, /2.5.8/, и что $\hat{\Gamma}^\mu$ - матрицы одновременно либо коммутируют, либо антикоммутируют с этими опереторами. Теорема доказана.

В уравнении /2.5.6/ можно ввести другие нелинейные члены:

$$\begin{gathered} i\nu\hat{\Gamma}^5\hat{\Gamma}^\mu\hat{\bar{\Psi}}\hat{\Gamma}^5\hat{\Gamma}_\mu\Gamma_7\hat{\Psi}\hat{\Psi}, \quad \nu\in\mathbb{R}, \\ i\nu\hat{\Gamma}^\mu\hat{\bar{\Psi}}\hat{\Gamma}^5\hat{\Gamma}_\mu\hat{\Psi}\hat{\Psi}, \quad \nu\hat{\Gamma}^\mu\hat{\bar{\Psi}}\hat{\Gamma}^5\hat{\Gamma}_\mu\Gamma_7\hat{\Psi}\hat{\Psi}, \end{gathered} \qquad /2.5.9/$$

где $$\Gamma_7 = \begin{pmatrix} 0_8 & I_4 & 0 \\ I_4 & 0 & -I_4 \\ 0 & -I_4 & 0_8 \end{pmatrix}.$$

При этом теорема 2.5.3 остается верной. В обозначениях Ψ_I, Ψ_{II} указанным членам /2.5.9/ соответствуют выражения:

$$i\nu\gamma^5\gamma^\mu(\bar{\Psi}_I\gamma^5\gamma_\mu\Psi_{II} - \bar{\Psi}_{II}\gamma^5\gamma_\mu\Psi_I),$$

$$i\nu\gamma^\mu(\bar{\Psi}_I\gamma^5\gamma_\mu\Psi_I - \bar{\Psi}_{II}\gamma^5\gamma_\mu\Psi_{II}),$$

$$\nu\gamma^\mu(\bar{\Psi}_I\gamma^5\gamma_\mu\Psi_{II} - \bar{\Psi}_{II}\gamma^5\gamma_\mu\Psi_I).$$

Если в уравнении /2.5.6/ вместо нелинейного члена /2.5.9/ добавить выражения

$$\begin{gathered} \nu\hat{\Gamma}^5\hat{\Gamma}^\mu\hat{\bar{\Psi}}\hat{\Gamma}_\mu\hat{\Psi}\hat{\Psi}; \quad i\nu\hat{\Gamma}^5\hat{\Gamma}^\mu\hat{\bar{\Psi}}\hat{\Gamma}_\mu\Gamma_7\hat{\Psi}\hat{\Psi}, \\ i\nu\hat{\Gamma}^\mu\hat{\bar{\Psi}}\hat{\Gamma}_\mu\hat{\Psi}\hat{\Psi}; \quad \nu\hat{\Gamma}^\mu\hat{\bar{\Psi}}\hat{\Gamma}_\mu\Gamma_7\hat{\Psi}\hat{\Psi}, \quad \nu\in\mathbb{R}, \end{gathered}$$

то теорема остается справедливой, если вместо матриц $\hat{Q}_{\mu\nu}$ /2.4.10/ взять:

$$\Sigma_{oa} = \begin{pmatrix} 0 & Q_{oa} \\ Q_{oa} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_{ab} = \begin{pmatrix} Q_{ab}, & 0 \\ 0 & Q_{ab} \end{pmatrix}, \quad a,b = 1,2,3 \ ,$$

а вместо $\Lambda_{01}, \Lambda_{02}, \Lambda_{12}$ /2.5.8/ взять

$$L_{ab} = \begin{pmatrix} Q_{ab} & 0 \\ 0 & -Q_{ab} \end{pmatrix} .$$

3. Здесь /как и в § 1.1/ покажем, что если добавить к полученным линейным и нелинейным уравнениям Дирака /2.4.3/, /2.5.1/, /2.5.6/ некое минимальное дополнительное условие, то эти уравнения теряют свойство двойственной пуанкаре-инвариантности. И действительно, нетрудно проверить, что каждое из следующих дополнительных условий:

$$\bar{\hat{\Psi}} (\lambda + \mu \hat{\Gamma}^5) \hat{\Psi} = F \ ,$$

$$\lambda (\bar{\hat{\Psi}} \hat{\Gamma}_\mu \hat{\Psi})^2 + \mu (\bar{\hat{\Psi}} \hat{\Gamma}^5 \hat{\Gamma}_\mu \hat{\Psi})^2 = F, \qquad /2.5.10/$$

$$\lambda \frac{\partial (\bar{\hat{\Psi}} \hat{\Gamma}^\mu \hat{\Psi})}{\partial x^\mu} + \mu \frac{\partial (\bar{\hat{\Psi}} \hat{\Gamma}^5 \hat{\Gamma}^\mu \Psi)}{\partial x^\mu} = F \ ,$$

где λ, μ – параметры, $\hat{\Gamma}^5$ – матрица /2.5.7/, F – произвольная функция от величин /2.5.2/,
инвариантно относительно только алгебры $\hat{AP}^{(1)}(1,3)$ /2.4.5/.

С другой стороны, условие :

$$\Lambda(\bar{\hat{\Psi}}\hat{S}^{(2)}_{\mu\nu}\hat{\Psi})(\bar{\hat{\Psi}}\hat{S}^{(2)\mu\nu}\hat{\Psi}) +$$

$$+\mu(\bar{\hat{\Psi}}\hat{\Gamma}^5\hat{S}^{(2)}_{\mu\nu}\hat{\Psi})(\bar{\hat{\Psi}}\hat{\Gamma}^5\hat{S}^{(2)\mu\nu}\hat{\Psi}) = F \,, \qquad /2.5.11/$$

где $\hat{S}^{(2)}_{\mu\nu} = \hat{S}^{(1)}_{\mu\nu} + \hat{Q}_{\mu\nu}$ /см./2.4.5/ и /2.4.10//. инвариантно относительно только алгебры $A\hat{P}^{(2)}(1,3)$ /2.4.9/.

Таким образом, если какое-либо уравнение, найденное в §§ 2.4, 2.5 рассмотреть с одним из условий /2.5.10/, /2.5.11/, то такое уравнение будет инвариантно относительно /см. теорему 1.1.1/ $AP(1,3)$, с операторами только из представления /2.4.5/, либо только из представления /2.4.9/.

§ 2.6 $\hat{P}^{(l)}(1,3)$ – неэквивалентные анзацы и редукция нелинейных уравнений.

Для редукции уравнений /2.4.3/, /2.5.1/, /2.5.6/ будем использовать $P(1,3)$– неэквивалентные анзацы.

Определение 2.6.1. Скалярная функция $\omega(x)$ называется инвариантом оператора Q /0.4/, если

$$\xi^{\mu}(x)\,\partial_\mu\,\omega(x) = 0 \,.$$

Определение 2.6.2. Анзацем назовем поле $\hat{\Psi}(x)$, инвариантное относительно 3-х мерной подалгебры $\langle Q_1, Q_2, Q_3\rangle$ алгебры Пуанкаре, т.е. $Q_i \cdot \hat{\Psi}(x) = 0$, $i = 1,2,3$. Общий вид анзаца [43]:

$$\Psi(x) = A(x)\,\Phi(\omega) \,, \qquad /2.6.1/$$

где $A(x)$– матрица 16 16, Φ – 16-компонентный столбец, $(\varphi_-, \tilde{\varphi}_- = \gamma^0\varphi_-^*, \varphi_+, \tilde{\varphi}_+)$, $\omega(x)$ – инвариант операторов Q_i

Множеством $P(1,3)$ - неэквивалентных анзацев назовем анзацы, инвариантные относительно неэквивалентных 3-мерных подалгебр алгебры $AP(1,3)$ [48].

Заметим, что 3-х мерные подалгебры найдены в [51, 60]. В следующей таблице приведены $P(1,3)$ - неэквивалентные анзацы для обеих представлений /2.4.5/, /2.4.9/ $\hat{AP}^{(l)}(1,3)$ / см. также [43]/. В ней указаны подалгебры, матрицы $A(x)$ /2.6.1/ и инварианты $\omega(x)$.

№	$\langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle$	$A(x)$	$\omega(x)$
1.	P_0, P_1, P_2	I	x_3
2.	P_1, P_2, P_3	I	x_0
3.	$P_0 - P_3, P_1, P_2$	I	$x_0 + x_3$
4.	$\hat{J}_{03}^{(l)}, P_1, P_2$	$exp\{-\hat{S}_{03}^{(l)} \ln(x_0 + x_3)\}$	$x_0^2 - x_3^2$
5.	$\hat{J}_{03}^{(l)}, P_0 - P_3, P_1$	$exp\{-\hat{S}_{03}^{(l)} \ln(x_0 + x_3)\}$	x_2
6.	$\hat{J}_{03}^{(l)} + \alpha P_2, P_0, P_3$	$exp\left\{-\frac{x_2}{\alpha} \hat{S}_{03}^{(l)}\right\}$	x_1
7.	$\hat{J}_{03}^{(l)} + \alpha P_2, P_0 - P_3, P_1$	$exp\left\{-\frac{x_2}{\alpha} \hat{S}_{03}^{(l)}\right\}$	$\alpha \ln(x_0 + x_3) - x_2$
8.	$\hat{J}_{12}^{(l)}, P_0, P_3$	$exp\left\{\hat{S}_{12}^{(l)} \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2}\right\}$	$x_1^2 + x_2^2$
9.	$\hat{J}_{12}^{(l)} - \alpha P_0, P_1, P_2$	$exp\left\{\frac{x_0}{\alpha} \hat{S}_{12}^{l}\right\}$	x_3

10.	$\hat{J}^{(l)}_{12}+\alpha P_3,\ P_1,\ P_2$	$\exp\left\{-\frac{x_3}{2}\hat{S}^{(l)}_{12}\right\}$	x_0
11.	$\hat{J}^{(l)}_{12}-P_0+P_3,\ P_1,\ P_2$	$\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_3-x_0)\,\hat{S}^{(l)}_{12}\right\}$	x_0+x_3
12.	$G^{(l)}_1,\ P_0-P_3,\ P_2$	$\exp\left\{-\frac{x_1}{x_0+x_3}(\hat{S}^{(l)}_{01}+\hat{S}^{(l)}_{31})\right\}$	x_0+x_3
13.	$G^{(l)}_1,\ P_0-P_3,\ P_1+\alpha P_2$	$\exp\left\{\frac{x_2-\alpha x_1}{\alpha(x_0+x_3)}(\hat{S}^{(l)}_{01}+\hat{S}^{(l)}_{31})\right\}$	x_0+x_3
14.	$G^{(l)}_1+P_2,\ P_0-P_3,\ P_1$	$\exp\left\{-x_2(\hat{S}^{(l)}_{01}+\hat{S}^{(l)}_{31})\right\}$	x_0+x_3
15.	$G^{(l)}_1-P_0,\ P_0-P_3,\ P_2$	$\exp\left\{(x_0+x_3)(\hat{S}^{(l)}_{01}+\hat{S}^{(l)}_{31})\right\}$	$2x_1+(x_0+x_3)^2$
16.	$G^{(l)}_1-P_0,\ P_1+\alpha P_2,\ P_0-P_3$	$\exp\left\{(x_0+x_3)(\hat{S}^{(l)}_{01}+\hat{S}^{(l)}_{31})\right\}$	$2(x_2-\alpha x_1)-\alpha(x_0+x_3)^2$
17.	$\hat{J}^{(l)}_{03}+\alpha\hat{J}^{(l)}_{12},\ P_0,\ P_{13}$	$\exp\left\{\frac{1}{\alpha}(\hat{S}^{(l)}_{03}+\hat{S}^{(l)}_{12})\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_1}{x_2}\right\}$	$x_1^2+x_2^2$

18.	$\hat{J}^{(l)}_{03}+\alpha\hat{J}^{(l)}_{12}$, P_1, P_2	$exp\{-(\hat{S}^{(l)}_{03}+\alpha\hat{S}^{(l)}_{12})\ln(x_0+x_3)\}$	$x_0^2-x_3^2$
19.	$G^{(l)}_1, G^{(l)}_2$, P_0-P_3	$exp\{-\frac{1}{x_0+x_3}([\hat{S}^{(l)}_{01}+\hat{S}^{(l)}_{31}]x_1+$ $+[\hat{S}^{(l)}_{02}+\hat{S}^{(l)}_{32}]x_2)\}$	x_0+x_3
20.	$G^{(l)}_1+P_2$, $G^{(l)}_2+$ $+\alpha P_1+\beta P_2$, P_0-P_3	$exp\{\frac{\alpha x_2-(x_0+x_3+\beta)x_1}{(x_0+x_3)(x_0+x_3+\beta)-\alpha}\times$ $\times(\hat{S}^{(l)}_{01}+\hat{S}^{(l)}_{31})-\frac{x_1-(x_0+x_3)x_2}{(x_0+x_3)(x_0+x_3+\beta)-\alpha}\times$ $\times(\hat{S}^{(l)}_{02}+\hat{S}^{(l)}_{32})\}$	x_0+x_3
21.	$G^{(l)}_1, G^{(l)}_2+$ $+P_1+\beta P_2$, P_0-P_3	$exp\{-\frac{x_1}{x_0+x_3}(\hat{S}^{(l)}_{01}+\hat{S}^{(l)}_{31})-$ $-\frac{x_2}{(x_0+x_3+\beta)}(\hat{S}^{(l)}_{02}+\hat{S}^{(l)}_{32})+$ $+\frac{x_2}{(x_0+x_3)(x_0+x_3+\beta)}(\hat{S}^{(l)}_{01}+\hat{S}^{(l)}_{31})\}$	x_0+x_3
22.	$G^{(l)}_1, G^{(l)}_2+P_2$, P_0-P_3	$exp\{-\frac{x_1}{x_0+x_3}(\hat{S}^{(l)}_{01}+\hat{S}^{(l)}_{31})-$ $-\frac{x_2}{x_0+x_3+1}(\hat{S}^{(l)}_{02}+\hat{S}^{(l)}_{32})\}$	x_0+x_3
23.	$G^{(l)}_1, \hat{J}^{(l)}_{03}, P_2$	$exp\{-\frac{x_1}{x_0+x_3}(\hat{S}^{(l)}_{01}+\hat{S}^{(l)}_{31})\times$	$x_0^2-x_1^2-x_2^2$

		$\times \exp\left\{-\hat{S}_{03}^{(l)} \ln(x_0+x_3)\right\}$	
24.	$\hat{J}_{03}^{(l)}+\alpha P_1+\beta P_2$, $G_1^{(l)}$, P_0-P_3	$\exp\left\{\frac{\alpha \ln(x_0+x_3)-x_1}{x_0+x_3} \times\right.$ $\left.\times(\hat{S}_{01}^{(l)}+\hat{S}_{31}^{(l)})\right\} \times$ $\times \exp\left\{-\hat{S}_{03}^{(l)} \ln(x_0+x_3)\right\}$	$x_2-\beta \ln(x_0+x_3)$
25.	$\hat{J}_{12}^{(l)}-P_0+P_3$, $G_1^{(l)}$, $G_2^{(l)}$	$\exp\left\{-\frac{1}{x_0+x_3}([\hat{S}_{01}^{(l)}+\hat{S}_{31}^{(l)}]x_1+\right.$ $\left.+[\hat{S}_{02}^{(l)}+\hat{S}_{32}^{(l)}]x_2)\right\} \times$ $\times \exp\left\{\frac{xx}{2(x_0+x_3)}\hat{S}_{12}^{(l)}\right\}$	x_0+x_3
26.	$\hat{J}_{03}^{(l)}+\alpha \hat{J}_{12}^{(l)}$, $G_1^{(l)}$, $G_2^{(l)}$	$\exp\left\{-\frac{1}{x_0+x_3}([\hat{S}_{01}^{(l)}+\hat{S}_{31}^{(l)}]x_1+\right.$ $\left.+[\hat{S}_{02}^{(l)}+\hat{S}_{32}^{(l)}]x_2)\right\} \times$ $\times \exp\left\{-(\hat{S}_{03}^{(l)}+\alpha\hat{S}_{12}^{(l)})\ln(x_0+x_3)\right\}$	xx

Примечание:

$$G_K^{(l)}=\hat{J}_{0K}^{(l)}+\hat{J}_{3K}^{(l)}=(x_0+x_3)P_K-x_K(P_3-P_0)+(\hat{S}_{0K}^{(l)}+\hat{S}_{3K}^{(l)}),$$

$\exp\{Q\}=I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}Q^n$, $\quad$ I – единичная матрица 16×16,

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\quad \hat{S}_{\mu\nu}^{(l)}$ – матрицы из представлений /2.4.5/ и /2.4.9/.

Замечание 2.6.1. Для безмассового УД /2.1.1/ можно построить соответствующую таблицу для 3-х представлений /2.3.7/ $AP^{(K)}(1,3)$, $K=1,2,3$.

Результатом подстановки анзаца /2.6.1/ в одно из уравнений /2.5.1/, /2.5.6/ будет редуцированное обыкновенное дифференциальное уравнение /ОДУ/. Приведем лишь результат такого редуцирования с помощью анзацев из таблицы /каждому номеру редуцированного уравнения отвечает соответствующий анзац в таблице/:

1°. $i\hat{\Gamma}^3\dot{\Phi}+R=0,$

2°. $i\hat{\Gamma}^0\dot{\Phi}+R=0,$

3°. $i(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3)\dot{\Phi}+R=0,$

4°. $-i(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3)\hat{S}^{(l)}_{03}\Phi+i[\omega(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3)+(\hat{\Gamma}^0-\hat{\Gamma}^3)]\dot{\Phi}+$
$+R=0,$

5°. $-(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3)\hat{S}^{(l)}_{03}\Phi+i\hat{\Gamma}^2\dot{\Phi}+R=0,$

6°. $-\dfrac{i\hat{\Gamma}^2}{\alpha}\hat{S}^{(l)}_{03}\Phi+i\hat{\Gamma}^1\dot{\Phi}+R=0,$

7°. $-\dfrac{i\hat{\Gamma}^2}{\alpha}\hat{S}^{(l)}_{03}\Phi+i[\alpha(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3)l^{-\omega/\alpha}-\hat{\Gamma}^2]\dot{\Phi}+R=0,$

8°. $i\omega^{-1/2}\hat{\Gamma}^1\hat{S}^{(l)}_{12}\Phi+2i\omega^{1/2}\hat{\Gamma}^2\dot{\Phi}+R=0,$

9°. $-\dfrac{i\hat{\Gamma}^0}{\alpha}\hat{S}^{(l)}_{12}\Phi+i\hat{\Gamma}^3\dot{\Phi}+R=0,$

10°. $-\dfrac{i\hat{\Gamma}^3}{\alpha}\hat{S}^{(l)}_{12}\Phi+i\hat{\Gamma}^0\dot{\Phi}+R=0,$

$$11^\circ.\ -\frac{i}{2}(\hat\Gamma^0-\hat\Gamma^3)\,\hat S^{(l)}_{12}\Phi+i(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)\,\dot\Phi+R=0\,,$$

$$12^\circ.\ -i\omega^{-1}\hat\Gamma^1(\hat S^{(l)}_{01}+\hat S^{(l)}_{31})\Phi+i(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)\dot\Phi+R=0\,,$$

$$13^\circ.\ \frac{i\omega^{-1}}{\alpha}(\hat\Gamma^2-\alpha\hat\Gamma^1)(\hat S^{(l)}_{01}+\hat S^{(l)}_{31})\Phi+i(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)\dot\Phi+R=0\,,$$

$$14^\circ.\ -i\hat\Gamma^2(\hat S^{(l)}_{01}+\hat S^{(l)}_{31})\Phi+i(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)\dot\Phi+R=0\,,$$

$$15^\circ.\ i(\hat S^{(l)}_{01}+\hat S^{(l)}_{31})(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)\Phi+2i\hat\Gamma^1\dot\Phi+R=0\,,$$

$$16^\circ.\ i(\hat S^{(l)}_{01}+\hat S^{(l)}_{31})(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)\Phi+2i(\hat\Gamma^2-\alpha\hat\Gamma^1)\dot\Phi+R=0\,,$$

$$17^\circ.\ \frac{i\hat\Gamma^1}{\alpha}\omega^{-1/2}(\hat S^{(l)}_{03}+\alpha\hat S^{(l)}_{12})\Phi+2i\omega^{1/2}\hat\Gamma^2\dot\Phi+R=0\,,$$

$$18^\circ.\ -i(\hat\Gamma^0+\Gamma^3)(\hat S^{(l)}_{03}+\alpha\hat S^{(l)}_{12})\Phi+i[\omega(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)+\hat\Gamma^0-\hat\Gamma^3]\dot\Phi+$$
$$+R=0\,,$$

$$19^\circ.\ -i\omega^{-1}[\hat\Gamma^1(\hat S^{(l)}_{01}+\hat S^{(l)}_{31})+\hat\Gamma^2(\hat S^{(l)}_{02}+\hat S^{(l)}_{32})]\Phi+$$
$$+i(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)\dot\Phi+R=0\,,$$

20°. $$i\,[\omega(\omega+\beta)-\alpha]^{-1}\{[\alpha\hat{\Gamma}^{2}-(\omega+\beta)\hat{\Gamma}^{1}](\hat{S}^{(l)}_{01}+\hat{S}^{(l)}_{31})+ +[\hat{\Gamma}^{1}-\omega\hat{\Gamma}^{2}](\hat{S}^{(l)}_{02}+\hat{S}^{(l)}_{32})\}\Phi+i\,(\hat{\Gamma}^{0}+\hat{\Gamma}^{3})\dot{\Phi}+R=0\,,$$

21°. $$i\,[(-\hat{\Gamma}^{1}+(\omega+\beta)^{-1}\hat{\Gamma}^{2})\omega^{-1}(\hat{S}^{(l)}_{01}+\hat{S}^{(l)}_{31})- -\hat{\Gamma}^{2}(\omega+\beta)^{-1}(\hat{S}^{(l)}_{02}+\hat{S}^{(l)}_{32})]\Phi+i\,(\hat{\Gamma}^{0}+\hat{\Gamma}^{3})\dot{\Phi}+R=0,$$

22°. $$i\,[-\frac{\hat{\Gamma}^{1}}{\omega}(\hat{S}^{(l)}_{01}+\hat{S}^{(l)}_{31})-\frac{\hat{\Gamma}^{2}}{\omega+1}(\hat{S}^{(l)}_{02}+\hat{S}^{(l)}_{32})]\Phi+ +i\,(\hat{\Gamma}^{0}+\hat{\Gamma}^{3})\dot{\Phi}+R=0,$$

/2.6.2/

23°. $$-i\,[(\hat{\Gamma}^{0}+\hat{\Gamma}^{3})\hat{S}^{(l)}_{03}+\hat{\Gamma}^{1}(\hat{S}^{(l)}_{01}+\hat{S}^{(l)}_{31})]\Phi+ +i\,[\omega(\hat{\Gamma}^{0}+\hat{\Gamma}^{3})+\hat{\Gamma}^{0}-\Gamma^{3}]\dot{\Phi}+R=0\,,$$

24°. $$-i\,[(\hat{\Gamma}^{0}+\hat{\Gamma}^{3})\hat{S}^{(l)}_{03}+\hat{\Gamma}^{1}(\hat{S}^{(l)}_{01}+\hat{S}^{(l)}_{31})]\Phi+ +i\,[\hat{\Gamma}^{2}-\beta(\hat{\Gamma}^{0}+\hat{\Gamma}^{3})]\dot{\Phi}+R=0\,,$$

25°. $$i\,[(2\hat{S}^{(l)}_{03}(\hat{\Gamma}^{0}+\hat{\Gamma}^{3})\omega^{-1}+\frac{\hat{S}^{(l)}_{12}}{2}(\hat{\Gamma}^{0}-\hat{\Gamma}^{3})]\Phi+ +i(\hat{\Gamma}^{0}+\hat{\Gamma}^{3})\dot{\Phi}+R=0,$$

$$26^{\circ}. -i\left[(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3)\hat{S}^{(l)}_{03}+(\hat{S}^{(l)}_{01}+\hat{S}^{(l)}_{31})\hat{\Gamma}^1+(\hat{S}^{(l)}_{02}+\hat{S}^{(l)}_{32})\hat{\Gamma}^2\right]\times$$

$$\times\ \Phi+i\left[(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3)\omega+\hat{\Gamma}^0-\hat{\Gamma}^3\right]\dot{\Phi}+R=0\,.$$

В /2.6.2/ мы использовали обозначения

$$\dot{\Phi}=\frac{d\Phi}{d\omega}\,,\quad R\equiv-F(\bar{\Phi}\Phi,\ \bar{\Phi}M\Phi,\ \bar{\Phi}\Lambda\Phi,\ \bar{\Phi}\Lambda M\Phi)\,\Phi\,,$$

если редуцируется уравнение /2.5.1/, и

$R\equiv-\lambda\,\hat{\Gamma}^5\hat{\Gamma}^{\mu}\bar{\Phi}\,\Gamma^5\hat{\Gamma}_{\mu}\Phi_{-}\Phi$, если редуцируется /2.5.6/,

$\bar{\Phi}=(\bar{\varphi}_{-},\varphi^{\Gamma}_{-},\bar{\varphi}_{+},\varphi^{\Gamma}_{+})$- 16-компонентная строка.

1. Найдем частные решения некоторых ОДУ /2.6.2/. Мы будем рассматривать ОДУ, полученные с помощью представления $\hat{AP}^{(2)}(1,3)$ / $l=2$ / / случай $l=1$ подробно описан в [43]/.

В ОДУ 12° всякое решение представляется в виде

$$\Phi=(\hat{S}^{(1)}_{01}+\hat{S}^{(1)}_{31})\,\varkappa_1(\omega)+(\hat{Q}_{01}+\hat{Q}_{31})\,\varkappa_2(\omega)\ ,$$

если $F\not\equiv 0$. Подставляя его в уравнение, получим:

$$\begin{aligned}&-i\omega^{-1}\hat{\Gamma}^1\left[(\hat{S}^{(1)}_{01}+\hat{S}^{(1)}_{31})(\hat{Q}_{01}+\hat{Q}_{31})\varkappa_2+(\hat{Q}_{01}+\hat{Q}_{31})\ \times\right.\\&\left.\times\ (\hat{S}^{(1)}_{01}+\hat{S}^{(1)}_{31})\varkappa_1\right]+i(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3)(\hat{Q}_{01}+\hat{Q}_{31})\varkappa_2'-\\&-F\cdot\left[(\hat{S}^{(1)}_{01}+\hat{S}^{(1)}_{31})\varkappa_1+(\hat{Q}_{01}+\hat{Q}_{31})\varkappa_2\right]=0.\end{aligned}\qquad /2.6.3/$$

Умножая это уравнение на $\hat{S}^{(1)}_{01}+\hat{S}^{(1)}_{31}$ получим:

$$(\hat{S}^{(1)}_{01}+\hat{S}^{(1)}_{31})(\hat{Q}_{01}+\hat{Q}_{31})\varkappa_2=0\,,$$

а, умножая $\hat{Q}_{01} + \hat{Q}_{31}$, получим:

$(\hat{S}^{(1)}_{01} + \hat{S}^{(1)}_{31})(\hat{Q}_{01} + \hat{Q}_{31})\varkappa_1 = 0$, откуда следует, учитывая /2.6.3/, что $\Phi \equiv 0$. / Здесь мы использовали тождества

$$(\hat{S}^{(1)}_{01} + \hat{S}^{(1)}_{31})^2 = (\hat{Q}_{01} + \hat{Q}_{31})^2 = 0, \quad [\hat{S}^{(1)}_{\mu\nu}, \hat{Q}_{\mu'\nu'}] = 0 \qquad /.$$

Таким образом, нетривиальные решения для 12° получаются, если $F \equiv 0$, т.е. множитель, определяющий нелинейный характер ОДУ /2.6.2/ исчезает.

Аналогичные результаты получаются для уравнений 3°, 13°, 14°, 19°-22°. Такие уравнения не будем рассматривать.

Выберем в /2.6.2/ нелинейность в виде

$$F = -\lambda(\bar{\Phi}\Phi)^{1/2K} \quad /\text{см. } [43]/, \quad K \neq 0 \qquad /2.6.4/$$

Уравнение 5° перепишется так:

$$\dot{\Phi} = -\hat{\Gamma}^2(\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^3)\hat{S}^{(2)}_{03}\Phi + i\hat{\Gamma}^2\lambda(\bar{\Phi}\Phi)^{1/2K}\Phi. \qquad /2.6.5/$$

Для нахождения частного решения /2.6.5/ поступим следующим образом. Найдем сначала какому уравнению удовлетворяет функция

$$X(\omega) = \bar{\Phi}\Phi(\omega) ; \qquad /2.6.6/$$

затем частное решение $X_2(\omega)$ этого уравнения подставим в /2.6.5/ и найдем общее решение $\Phi_0(\omega)$ полученного линейного уравнения. Затем, приравняв $\bar{\Phi}_0\Phi(\omega) = X_z(\omega)$, найдем значение соответсвующих констант. Перечислив все частные решения $X_z(\omega)$ для /2.6.6/ можно получить общее решение ОДУ /2.6.5/.

Приведем соответствующие вычисления. Из /2.6.5/ вытекает:

$$(\bar{\Phi}\Phi)'_\omega \equiv \bar{\Phi}\Phi'_\omega + \bar{\Phi}'_\omega\Phi = -2\bar{\Phi}\hat{\Gamma}^2(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3)\hat{Q}_{03}\Phi = -2Y(\omega),$$

$$Y'_\omega = 2i\lambda(\bar{\Phi}\Phi)^{1/2K}\bar{\Phi}(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3)\hat{Q}_{03}\Phi = 2\lambda(\bar{\Phi}\Phi)^{1/2K}Z(\omega),$$

$$Z'_\omega = 2\lambda(\bar{\Phi}\Phi)^{1/2K}\bar{\Phi}\hat{\Gamma}^2(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3)Q_{03}\Phi = 2\lambda(\bar{\Phi}\Phi)^{1/2K}Y(\omega).$$

Из этой системы уравнений для $X(\omega)$, $Y(\omega)$, $Z(\omega)$ можно найти, что $X(\omega)$ удовлетворяет уравнению:

$$X'' = 4\lambda X^{1/2K}\left(\frac{2\lambda K}{1+2K} X^{\frac{1+2K}{2K}} + C\right), \quad K \neq -\frac{1}{2}, \qquad /2.6.7/$$

где C - произвольная константа. Нетрудно убедиться, что частное решение для /2.6.7/ можно получить, решив уравнение:

$$X'_\tau(\omega) = \frac{4\lambda K}{1+2K} X_\tau^{\frac{1+2K}{2K}}. \qquad /2.6.8/$$

Общее решение для /2.6.8/:

$$X_\tau(\omega) = \left(C_0 - \frac{2\lambda}{1+2K}\omega\right)^{-2K}, \quad C_0 = \mathrm{const} \qquad /2.6.9/$$

Отсюда:

$$F(X_\tau) = \lambda X_\tau^{1/2K} = \lambda\left(C_0 - \frac{2\lambda}{1+2K}\omega\right)^{-1}. \qquad /2.6.10/$$

Подставляя /2.6.10/ в /2.6.5/, получаем общее решение линейного уравнения /подробные вычисления опускаем/:

$$\Phi_0 = exp\left\{\frac{i}{2}\hat{\Gamma}^2 \ln\left(C_0 - \frac{2\lambda}{1+2K}\omega\right)^{-(1+2K)}\right\} \times$$

$$\times\, exp\left\{-\frac{1+2K}{4\lambda}(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3)\hat{S}^{(2)}_{03}\left[\hat{\Gamma}^2\left(\frac{\left(C_0 - \frac{2\lambda\omega}{1+2K}\right)^{2K+2}}{2K+2}\right. - \right.\right. \qquad /2.6.11/$$

$$- \frac{\left(c_0 - \frac{2\lambda}{1+2k}\omega\right)^{-2k}}{2k} \Big) + i\Big(\frac{\left(c_0 - \frac{2\lambda}{1+2k}\omega\right)^{2k+2}}{2k+2} +$$

$$- \frac{\left(c_0 - \frac{2\lambda}{1+2k}\omega\right)^{-2k}}{2k} \Big)\Big]\Big\} x , \quad k \neq -1 , -\frac{1}{2} \quad ,$$

где x - постоянный 16-компонентный столбец. Из /2.6.11/ находим, что:

$$X_0(\omega) = \bar{\Phi}_0 \Phi = c_1 + c_2\left(\frac{1+2k}{2\lambda}\right) \times$$

$$\times \left[\frac{\left(c_0 - \frac{2\lambda}{1+2k}\omega\right)^{-2k}}{2k} - \frac{\left(c_0 - \frac{2\lambda}{1+2k}\omega\right)^{2k+2}}{2k+2} \right] +$$

$$+ c_3\left(\frac{1+2k}{2\lambda}\right)\left[\frac{\left(c_0 - \frac{2\lambda}{1+2k}\omega\right)^{-2k}}{2k} + \frac{\left(c_0 - \frac{2\lambda}{1+2k}\omega\right)^{2k+2}}{2k+2} \right],$$

где $c_1 = \bar{x} x$, $c_2 = \bar{x}(\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^3)\hat{Q}_{03}\hat{\Gamma}^2 x$,

$$c_3 = - i \bar{x} (\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^3) \hat{Q}_{03} x .$$

Сравнивая $X_0(\omega)$ с $X_\tau(\omega)$ /2.6.9/, получим:

$$c_1 = 0 \ , \quad c_2 = c_3 = \frac{2\lambda k}{1+2k} \qquad /2.6.12/$$

/3 действительных условия на 16 действительных компонент/. Таким образом, /2.6.11/ с условиями /2.6.12/ является решением /2.6.5/.

Заметим, что в случае представления $\hat{AP}^{(1)}(1,3)$ ОДУ 5° имеет общее решение

$$\Phi = exp\left[\omega \hat{\Gamma}^2\left(\frac{1}{2}(\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^3) + i\lambda(\bar{x}x)^{1/2k}\right)\right] x , x = \text{const} .$$

Решение /2.6.11/ обладает еще и тем интересным свойством, что является неаналитическим по κ в точках $\kappa=-\frac{1}{2}$, $\kappa=-1$, хотя само уравнение /2.6.5/ определено в этих точках.

Перечислим теперь те из ОДУ /2.6.2/, которые решаются описанным методом для ОДУ 5°. Приведем для них уравнения, соответствующие уравнению /2.6.7/, а также частные решения Φ_0.

1°. $X'_\omega=0$, $\Phi_0=exp\left\{i\hat\Gamma^2\lambda(\bar{x}x)^{1/2\kappa}\omega\right\}x$.

2°. $X'_\omega=0$, $\Phi_0=exp\left\{-\hat\Gamma^0\lambda(\bar{x}x)^{1/2\kappa}\omega\right\}x$.

15°. $X''=\lambda X^{1/2\kappa}\left(\frac{2\lambda\kappa}{1+2\kappa}X^{\frac{1+2\kappa}{2\kappa}}+c\right)$; $\kappa\neq-\frac{1}{2}$,

$$\Phi_0=exp\left\{\frac{i}{2}\hat\Gamma^1\beta(\omega)\right\}exp\left\{\frac{1}{2}\hat\Gamma^1(\hat Q_{01}+\hat Q_{31})(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\int ch\beta d\omega+i\hat\Gamma^1\int sh\beta(\omega)d\omega\right]\right\}x,$$

$$\beta(\omega)=ln\left(c_0-\frac{\lambda}{1+2\kappa}\omega\right)^{-(1+2\kappa)}$$

$$\bar{x}x=0,\quad \bar{x}\hat\Gamma^1(\hat Q_{01}+\hat Q_{31})(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)x=$$

$$=i\bar{x}(\hat Q_{01}+\hat Q_{31})(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)x=\frac{2\kappa\lambda}{1+2\kappa}.$$

16°. $X''=(1+\alpha^2)^{-1}\lambda X^{1/2\kappa}\left(\frac{2\lambda\kappa}{1+2\kappa}X^{\frac{1+2\kappa}{2\kappa}}+c\right)$, $\kappa\neq-\frac{1}{2}$

$$\Phi_0=exp\left\{\frac{1}{2}(1+\alpha^2)^{-1}(\hat\Gamma^2-\alpha\hat\Gamma^1)i\beta(\omega)\right\}\times$$

$$\exp\left\{\frac{(\hat{Q}_{01}+\hat{Q}_{31})(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3)}{2(1+\alpha^2)}\left[(\hat{\Gamma}^1-\alpha\hat{\Gamma}^2)\int \mathrm{ch}\left(\frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)d\omega+\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\sqrt{1+\alpha^2}\int \mathrm{sh}\left(\frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)d\omega\right]\right\}\chi ,$$

$$\beta = \ln\left(c_0-\frac{\lambda}{(1+2\kappa)\sqrt{1+\alpha^2}}\,\omega\right)^{-(1+2\kappa)},$$

$$\bar{\chi}\chi=0 , \quad \bar{\chi}(\hat{Q}_{01}+\hat{Q}_{31})(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3)(\hat{\Gamma}^1-\alpha\hat{\Gamma}^2)\chi =$$

$$= i\sqrt{1+\alpha^2}\,\bar{\chi}(\hat{Q}_{01}+\hat{Q}_{31})(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3)\chi = \frac{2\kappa\lambda(1+\alpha^2)}{1+2\kappa} .$$

Уравнение 24°, когда $\beta = 0$, удалось линеаризовать, т.е. получить уравнение:

$$X'' = 4\lambda X^{1/2\kappa}\left(\frac{2\lambda\kappa}{1+2\kappa}X^{\frac{1+2\kappa}{2\kappa}}+c_1\right)-4c_2 , \quad \kappa \neq -\frac{1}{2} ,$$

где

$$c_2 = \bar{\Phi}\,\hat{\Gamma}^1(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3)(\hat{Q}_{01}+\hat{Q}_{31})\Phi = \mathrm{const}$$

что нетрудно вывести из уравнения 24°.

2. Рассмотрим теперь редукцию линейного уравнения /2.4.3/ / $F = m$ /. Для этого возьмем анзац, инвариантный относительно двумерной алгебры $\langle \hat{J}^{(2)}_{23} , P_0 - P_1 \rangle$:

$$\hat{\Psi}(x) = \exp\left\{\hat{S}^{(2)}_{23}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_3}\right\}\Phi(\bar{\omega}) ,$$

$$\bar{\omega} = \{\omega_1 , \omega_2\} = \{x_0+x_1 , (x_2^2+x_3^2)^{1/2}\} . \qquad /2.6.13/$$

Так как уравнение /2.4.3/ расщепляется на 4-х компоненты Ψ_- , Ψ_+ , то будем интересоваться лишь решением Ψ_- для УД /2.4.1/.

Принимая во внимание соотношение

$$\hat{S}^{(2)}_{23} = \hat{S}^{(1)}_{23} + \hat{Q}_{23}, \quad [\hat{S}^{(1)}_{23}, \hat{Q}_{23}] = 0,$$

выделим в анзаце /2.6.1/ первые четыре компоненты Ψ_- :

$$\Psi_- = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x_3 - \gamma^2\gamma^3 x_2}{\omega_2}\right)\varphi_-(\bar{\omega}) - \frac{i}{2}\left(\frac{\gamma^3 x_2 - \gamma^2 x_3}{\omega_2} + \gamma^2\right)\gamma^1\tilde{\varphi}_+ \qquad /2.6.14/$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$Z(\bar{\omega}) = \frac{1}{2\omega_2}\varphi_- + \frac{i}{2\omega_2}\gamma^2\gamma^1\tilde{\varphi}_+, \quad H = \frac{1}{2}\varphi_- - \frac{i}{2}\gamma^2\gamma^1\tilde{\varphi}_+ . \qquad /2.6.15/$$

Тогда в новых переменных /2.6.15/ анзац /2.6.14/ запишется в виде:

$$\Psi_- = (x_3 - \gamma^2\gamma^3 x_2)\, Z(\bar{\omega}) + H(\bar{\omega}) . \qquad /2.6.16/$$

Подставляя /2.6.16/ в /2.4.1/, получим систему редуцированных уравнений:

$$2\gamma^3 Z + (\gamma^0 + \gamma^1) H_1 + \gamma^3\omega_2 Z_2 = -imH ,$$

$$(\gamma^0 + \gamma^1)\,\omega_2^2 Z_1 + \gamma^3\omega_2 H_2 = -im\omega_2^2 Z ,$$

где индекс в Z и H означает производную по переменным ω_1 , ω_2 . Будем искать решение системы в виде:

$$Z = \omega_2^{-2} A(\omega_2)\, exp\left\{i(\gamma^0 + \gamma^1) f(\omega_1)\right\}\chi ,$$

$$H = B(\omega_2)\, exp\left\{i(\gamma^0 + \gamma^1) f(\omega_1)\right\}\chi ,$$

где A и B – некоторые матрицы 4×4, f – произвольная гладкая функция. Опуская дальнейшие выкладки приведем результат для /2.6.16/:

$$\Psi_-(x) = \left[\frac{\gamma^2 x^2 + \gamma^3 x^3}{\omega_2} J_1(im\omega_2) + J_0(im\omega_2)\right] exp\left\{i(\gamma^0 + \gamma^1) f\right\}\chi . \qquad /2.6.17/$$

где J_1 и J_0 – функции Бесселя.

Заметим, что анзац /2.6.16/ не сводится к локальному анзацу вида $\Psi_- = A(x)\,N(\bar{\omega})$ и имеет не спинорную, а векторную природу. Решение /2.6.17/ УД /2.4.1/ не может быть получено в рамках представления Ψ как спинора.

Нетрудно показать, что анзац /2.6.16/ инвариантен относительно $P_0 - P_3$ и оператора второго порядка /нелокального/:

$$J_{23}^2 + \frac{1}{4}\ , \text{ где } \ J_{23} = x^2 P_3 - x^3 P_2 - \frac{1}{2}\gamma^2\gamma^3 .$$

В заключении отметим, что $\hat{P}^{(1)}(1,3)$ -неэквивалентные анзацы /спинорные/ связаны с $\hat{P}^{(2)}(1,3)$ -неэквивалентными анзацами /векторными/ следующим соотношением:

$$\hat{\Psi}^{(2)} = exp\left\{ f(x)\,\hat{Q} \right\} \hat{\Psi}^{(1)}\ , \qquad /2.6.18/$$

где $f(x)$- некоторая функция, $\hat{Q}$ - элемент алгебры $\langle \hat{Q}_{\mu\nu} \rangle$. Явный вид $f(x)$ и $\hat{Q}$ может быть найден из анзацев 1°-26° в таблице, если принять во внимание, что:

$$\hat{S}^{(1)}_{\mu\nu} = \hat{S}^{(1)}_{\mu\nu} + \hat{Q}_{\mu\nu}\ .$$

Соотношения /2.6.18/ естественно считать как преобразование бозонного поля в фермионное посредством нечетных операторов $\hat{Q}_{\mu\nu}$, т.е. как суперпреобразование.

ГЛАВА 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ГАЛИЛЕЯ.

В этой главе описаны линейные и нелинейные уравнения, инвариантные относительно группы Галилея $G(1,3)$, а также расширенной и обобщенной группы Галилея $G_1(1,3)$ и $G_2(1,3)$. Среди этих уравнений имеются инвариантные относительно алгебры $AG(1,3)$, операторы которой реализуют представления со спинами $S=0,1$ и $S=\frac{1}{2}$, а также относительно супералгебр. Построены формулы, связывающие решения безмассового спинорного уравнения / $S=\frac{1}{2}$ / и уравнений для электромагнитного поля. Построены анзацы и точные решения уравнений.

§ 3.1. О связи между решениями уравнений нерелятивистской электродинамики и уравнения для частицы со спином.

В § 2.1 была найдена связь между решениями УД /2.1.1/ и УМ /2.1.3/. Оба эти уравнения являются релятивистски-инвариантными. Поэтому можно предположить, что существует аналогичная связь между решениями уравнений нерелятивистской электродинамики [25]

$$\begin{gathered} div\,\overline{H}=0\ , \quad div\,\overline{E}=0\ , \\ rot\,\overline{H}=0\ , \quad \partial_0\overline{H}+rot\,\overline{E}=0 \end{gathered} \qquad /3.1.1/$$

и спинорного уравнения [55]:

$$i\tilde{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi=0 \qquad /3.1.2/$$

где $\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0 + \gamma^4$, $\tilde{\gamma}^a = \gamma^a$ - матрицы Дирака. Уравнения /3.1.1/, /3.1.2/ являются галилеевски-инвариантными //3.1.1/ получаются из УМ /2.1.3/, когда скорость света $c \to \infty$; в /2.1.3/ $c = 1$ /.

Введем следующие обозначения для произвольного решения уравнения /3.1.2/:

$$\Psi = \Psi_{real} + i\Psi_{imag} = \begin{pmatrix} -D^1 \\ D^3 \\ -B^2 + D^2 \\ G - F \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} D^2 \\ -F \\ -B^1 + D^1 \\ B^3 - D^3 \end{pmatrix} , \qquad /3.1.3/$$

где все восемь компонент действительные функции. Установим связь между решениями /3.1.2/, /3.1.3/ и /3.1.1/.

<u>Теорема 3.1.1.</u> Решения уравнений /3.1.1/ строятся по решениям $\{ \bar{D} , \bar{B} , G , F \}$ /3.1.3/ уравнения /3.1.2/ по следующим формулам:

$$\bar{E} = \bar{D} - \frac{1}{3} \int_0^{\bar{x}} \partial_0 G \, d\bar{x} + \bar{\mu}(x) , \qquad /3.1.4/$$

$$\bar{H} = \bar{B} + \frac{1}{3} \int_0^{\bar{x}} \times \bar{\nabla} G \, d\bar{x} + \int_0^t \bar{\nabla} F \, d\tau + \bar{\lambda}(x) ,$$

где $\bar{\mu}(x)$, $\bar{\lambda}(x)$ - две вектор-функции, удовлетворяющие следующей системе:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \bar{\lambda}(x) = 0 , \\ &\operatorname{div} \bar{\mu}(x) = 0 , \\ &\partial_0 \bar{\lambda}(x) = -\operatorname{rot} \bar{\mu}(x) , \\ &(\operatorname{rot} \bar{\lambda}(x))_a = \frac{1}{3} \left. \frac{\partial G(x)}{\partial x^a} \right|_{x^a = 0} \end{aligned} \qquad /3.1.5/$$

В уравнениях /3.1.4/ введены обозначения:

$$\int_0^{\bar{x}} \partial_0 G d\bar{x}\,, \quad \int_0^{\bar{x}} \times \bar{\nabla} G d\bar{x}\,, \quad \int_0^t \bar{\nabla} F d\tau \; -$$

векторы с компонентами:

$$\Big(\int_0^{\bar{x}} \partial_0 G d\bar{x}\Big)_a = \int_0^{x_a} \partial_0 G(\xi_a, x_b, x_c)\, d\xi_a\,, \qquad /3.1.6/$$

$$\Big(\int_0^{\bar{x}} \times \bar{\nabla} G d\bar{x}\Big)_a = \varepsilon_{abc} \int_0^{x_c} \partial_b G(x_a, x_b, \xi_c)\, d\xi_c\,, \qquad /3.1.7/$$

$$\Big(\int_0^t \bar{\nabla} F d\tau\Big)_a = \int_0^t \partial_a F(\bar{x}, \tau)\, d\tau\;. \qquad /3.1.8/$$

Замечание 3.1.1. Подчеркнем, что для построения решения $\{\bar{E}, \bar{H}\}$ по любому решению /3.1.3/ достаточно взять любое частное решение уравнения /3.1.5/.

Доказательство. Прежде всего отметим, что уравнение /3.1.2/ в обозначениях /3.1.3/ принимает вид уравнений /3.1.1/ с токами:

$$\begin{aligned} &div\, \bar{B} = 0\,, \\ &div\, \bar{D} = \partial_0 G\,, \\ &\mathrm{rot}\, \bar{B} = -\bar{\nabla} G\,, \\ &\partial_0 \bar{B} + \mathrm{rot}\, \bar{D} = -\bar{\nabla} F\;. \end{aligned} \qquad /3.1.9/$$

Подставляя /3.1.4/ в /3.1.1/, получим, учитывая /3.1.9/, /3.1.5/

$$a)\; div\, \bar{H} = div\, \bar{B} + \frac{1}{3} div \int_0^{\bar{x}} \times \bar{\nabla} G d\bar{x} + \int_0^t \Delta F d\tau + div\, \bar{\lambda}(x)\;.$$

Предоставим читателю самому убедиться, что /см./3.1.7//:

$$div \int_0^{\bar{x}} \times \bar{\nabla} G \equiv 0 \qquad /3.1.10/$$

Кроме того, из уравнения /3.1.2/ следует, что каждая компонента в /3.1.3/ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta F = 0 \qquad /3.1.11/$$

Отсюда находим, что $div\,\overline{H} = 0$,

$$б)\; div\,\overline{E} = div\,\overline{D} - \frac{1}{3}\,div\int_0^{\overline{x}} \partial_0 G\,d\overline{x} + div\,\overline{\mu}\,(x) =$$

$$= div\,\overline{D} - \partial_0 G + div\,\overline{\mu}\,(x) = 0 \quad ;$$

$$в)\; rot\,\overline{H} = rot\,\overline{B} + \frac{1}{3}\,rot\int_0^{\overline{x}} x\,\overline{\nabla} G\,d\overline{x} + \int_0^t rot\,\overline{\nabla} F\,d\tau +$$

$$+ rot\,\lambda(x) .$$

Найдем первую компоненту во втором члене:

$$(rot\int_0^{\overline{x}} x\,\overline{\nabla} G\,d\overline{x})_1 = \partial_2 (\int_0^{x_2} \partial_1 G\,d\xi_2 - \int_0^{x_1} \partial_2 G\,d\xi_1) -$$

$$- \partial_3 (\int_0^{x_1} \partial_3 G\,d\xi_1 - \int_0^{x_3} \partial_1 G\,d\xi_3) = 2\partial_1 G -$$

$$- \int_0^{x_1} (\partial_{22} + \partial_{33}) G\,d\xi_1 = 2\partial_1 G + \int_0^{x_1} \partial_{11} G\,d\xi_1 =$$

$$= 3\partial_1 G - \partial_1 G\Big|_{x_1 = 0} .$$

Здесь мы учли /3.1.11/ для G . Аналогично находятся остальные компоненты. Отсюда, и из /3.1.9/, /3.1.5/ получаем:

$$(rot\,\overline{H})_a = (rot\,\overline{B})_a + \partial_a G - \frac{1}{3}\partial_a G\Big|_{x_a = 0} + rot\,\lambda(x) = 0$$

г) $$\partial_0 \overline{H} + \mathrm{rot}\, \overline{E} = \partial_0 \overline{B} + \mathrm{rot}\, \overline{D} + \nabla F + \frac{1}{3}\int_0^{\overline{x}} \times \overline{\nabla}\, \partial_0 G\, d\overline{x} + $$
$$+ \partial_0 \lambda(x) - \frac{1}{3}\, \mathrm{rot} \int_0^{\overline{x}} \partial_0 G\, d\overline{x} + \mathrm{rot}\, \overline{\mu}\,(x) =$$
$$= \frac{1}{3}\Big[\int_0^{\overline{x}} \times \overline{\nabla}\, \partial_0 G d\overline{x} - \mathrm{rot} \int_0^{\overline{x}} \partial_0 G d\overline{x} + \partial_0 \lambda(x) + \mathrm{rot}\, \overline{\mu}\,(x) =$$
$$= \partial_0 \lambda(x) + \mathrm{rot}\, \overline{\mu}\,(x) \quad .$$

Тогда из /3.1.5/ вытекает /3.1.1/.

Теорема доказана.

Справедливо также обратное утверждение.

Теорема 3.1.2. Пусть $\overline{E}$, $\overline{H}$ - произвольное решение уравнения /3.1.1/, F , G - произвольные скалярные функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа ~~/3.1.8/~~ с компонентами F , G ,

$$\overline{D} = \overline{E} + \frac{1}{3}\int_0^{\overline{x}} \partial_0 G d\overline{x} - \overline{\mu}\,(x) \quad , \qquad /3.1.12/$$
$$\overline{B} = \overline{H} - \frac{1}{3}\int_0^{\overline{x}} \times \overline{\nabla}\, G\, d\overline{x} - \int_0^{t} \overline{\nabla}\, F d\tau - \lambda\,(x)$$

где $\overline{\mu}$, λ - удовлетворяют /3.1.5/,

является решением уравнения /3.1.2/.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1.1. Для этого нужно подставить /3.1.12/ в /3.1.9/ и учесть соответствующие уравнения.

Следствие 3.1.1. Из /3.1.5/ видно, что $\{\lambda, \overline{\mu}\} = \{\lambda_0, \overline{\mu}_0\} + \{\lambda_z, \mu_z\}$, где $\{\lambda_z, \overline{\mu}_z\}$ - частное решение /3.1.5/, а $\{\lambda_0, \overline{\mu}_0\}$ - произвольное решение уравнений /3.1.1/, т.е. преобразования /3.1.4/, /3.1.12/ определены с "точностью" до решения /3.1.1/. Если положить $\lambda_0 = \overline{\mu} = 0$, а $\{\lambda_z, \overline{\mu}_z\}$ фиксировать, то для каждого решения уравнения /3.1.2/ строится одно решение уравнения /3.1.1/. А для каждого решения

/3.1.1/ строится множество /континуум/ решений для /3.1.2/. Кроме того, каждое решение /3.1.1/ является решением для /3.1.2/ / $F = G = 0$ /. Другими словами, поле ψ /3.1.3/ можно преобразовать в электромагнитное поле $\{\bar{E}, \bar{H}\}$ /ср. с § 2.1/.

Следствие 3.1.2. Положив $G = 0$, а также в /3.1.5/ $\lambda = \bar{\mu} = 0$, получим:

$$\bar{D} = \bar{E}\,, \qquad \bar{B} = \bar{H} - \int_0^t \bar{\nabla} F d\tau\,, \quad \Delta F = 0\,. \qquad /3.1.13/$$

Для полноты приведем частное решение /3.1.5/ для любого G; выраженное через интегралы.

<u>Теорема 3.1.3.</u> Частным решением /3.1.5/ является

$$\lambda = \frac{1}{6}\int_0^{\bar{x}} \times \bar{D} G d\bar{x} - \frac{1}{6}\bar{\nabla}\Delta^{-1} div \int_0^{\bar{x}} \times \bar{D} G d\bar{x}\,,$$

$$\bar{\mu} = \bar{S} - \frac{1}{3}\int_0^{\bar{x}} \times (\partial_0 \lambda + \mathrm{rot}\,\bar{S}) d\bar{x} -$$
$$- \frac{1}{6}\int_0^{\bar{x}} \otimes (\partial_0 \lambda + \mathrm{rot}\,\bar{S}) d\bar{x} + \frac{1}{6}\bar{\nabla}\Delta^{-1} div \int_0^{\bar{x}} \otimes (\partial_0 \lambda + \mathrm{rot}\,\bar{S}) d\bar{x}\,, \qquad /3.1.14/$$

где $\bar{D}$ - векторный оператор,

$$D_a = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x^a}\Big|_{x^a = 0}$$

величина $\int_0^{\bar{x}} \times \bar{J} d\bar{x}$, где $\bar{J}$ - вектор, определяется из /3.1.7/, если сделать замену $\partial_a G \to J_a$; $\Delta^{-1} f(x)$ - какое-либо решение уравнения Пуассона $\Delta g(x) = f(x)$, $\bar{S}(x)$ - вектор, удовлетворяющий уравнениям

$$\Delta \bar{S} = \frac{1}{3}\bar{D}\,\partial_0 G\,, \qquad div\,\bar{S} = 0 \qquad /3.1.15/$$

/такое решение существует, поскольку $\partial_i D_i \partial_0 G = 0$ /;

$$\int_0^{\bar{x}} \otimes \bar{J} d\bar{x} = \int_0^{\bar{x}} \times \bar{J}' d\bar{x}\,, \quad \text{где} \quad \bar{J}'_a = J_a(\varkappa_b, \varkappa_a, 0_a) \qquad /3.1.16/$$

Доказательство. Подставим /3.1.14/ в /3.1.15/:

$$а)\ div\,\lambda = \frac{1}{6}\Big[div\int_0^{\bar x}\times\bar D G d\bar x - \Delta\Delta^{-1} div\int_0^{\bar x}\times\bar D G d\bar x\Big] \equiv 0\ .$$

$$б)\ \mathrm{rot}\,\lambda = \frac{1}{6}\,\mathrm{rot}\int_0^{\bar x}\times\bar D G d\bar x\ .$$

$$\Big(\mathrm{rot}\int_0^{\bar x}\times\bar D G\Big)_1 = \partial_2\Big(\int_0^{x_2} D_1 G d\xi_2 - \int_0^{x_1} D_2 G d\xi_1\Big) -$$

$$- \partial_3\Big(\int_0^{x_1}\partial_3 G d\xi_1 - \int_0^{x_3} D_1 G d\xi_3\Big) = 2D_1 G$$

отсюда:

$$\mathrm{rot}\,\lambda = \frac{1}{3}\,\bar D G\ .$$

$$в)\ \mathrm{rot}\,\bar\mu = \mathrm{rot}\,\bar S - \frac{1}{3}\,\mathrm{rot}\int_0^{\bar x}\times(\partial_0\lambda + \mathrm{rot}\,\bar S)d\bar x\ -$$

$$-\frac{1}{6}\,\mathrm{rot}\int_0^{\bar x}\otimes(\partial_0\lambda + \mathrm{rot}\,\bar S)d\bar x\ .$$

Нетрудно проверить, что второй член равен:

$$-(\partial_0\lambda + \mathrm{rot}\,\bar S) + \frac{1}{3}(\partial_0\lambda + \mathrm{rot}\,\bar S)' \qquad /\text{см.}/3.1.16//,$$

а третий: $-\frac{1}{3}(\partial_0\lambda + \mathrm{rot}\,\bar S)'$, откуда вытекает требуемое равенство

$$г)\ div\,\bar\mu = div\,\bar S - \frac{1}{3}\,div\int_0^{\bar x}\times(\partial_0\lambda + \mathrm{rot}\,\bar S)\,d\bar x\ .$$

В силу /3.1.15/ $\quad div\,\bar S = 0$;

$$div\int_0^{\bar x}\times\bar l\,d\bar x = \int_0^{\bar x}(\partial_2 l_3 - \partial_3 l_2)d\xi_1 + \int_0^{x_2}(\partial_3 l_1 - \partial_1 l_3)d\xi_2 +$$

$$+\int_0^{x_3}(\partial_1 l_2 - \partial_2 l_1)d\xi_3 = \sum_i\int_0^{x_i}(\mathrm{rot}\,\bar l)_i\,d\xi_i\ .$$

Но

$$\operatorname{rot}\bar{l} = \operatorname{rot}(\partial_0 \bar{\lambda} + \operatorname{rot}\bar{S}) = \partial_0 \operatorname{rot}\bar{\lambda} - \Delta\bar{S} =$$

$$= \frac{1}{3}\bar{D}\,\partial_0 G - \Delta\bar{S} = 0 \qquad \text{в силу /3.1.15/.}$$

Теорема доказана.

Пример. Нетрудно проверить, что векторы:

$$\bar{H} = g(t)\begin{pmatrix} 2x_1 \\ -2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{E} = g'(t)\begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_2x_3 \\ \frac{2}{3}x_1x_3 \\ -\frac{4}{3}x_1x_2 \end{pmatrix}$$

где $g(t)$ - произвольная функция, является решением уравнений /3.1.1/. Выберем функции F и G в виде $F = x_1x_2x_3$, $G = (x_1^2 - x_2^2)\,l(t)$. Тогда $\bar{D}G = 0$, и из /3.1.5/ следует, что можно положить $\bar{\lambda} = \bar{\mu} = 0$. Тогда с помощью /3.1.13/ находим решение /3.1.2/ в виде /3.1.3/:

$$\Psi = \begin{pmatrix} -g'(t)\frac{2}{3}x_2x_3 + ig'(t)\frac{2}{3}x_1x_3 \\ -g'(t)\frac{4}{3}x_1x_2 - ix_1x_2x_3 \\ -g(t)2x_2 - (t + \frac{2}{3}g'(t))x_1x_2 + i\left[-g(t)2x_1 + (t + \frac{2}{3}g')x_2x_3\right. \\ (x_1^2 - x_2^2)l(t) - x_1x_2x_3 + i(\frac{4}{3}g'(t) - t)\,x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

§ 3.2. Нелинейные галилей-инвариантные спинорные уравнения.

Определение 3.2.1. Операторы $\langle J_{ab}, G_a, P_\mu \rangle$, $a, b = \overline{1,3}$ образуют алгебру Галилея $AG(1,3)$, если для операторов J_{ab}, P_μ выполняются соотношения /1.1.2/, и кроме того:

$$[G_a, J_{bc}] = \delta_{ab} G_c - \delta_{ac} G_b, \qquad /3.2.1/$$
$$[P_0, G_a] = P_a .$$

1. В работах [55, 6] изучены линейные и нелинейные уравнения типа:

$$i\tilde{\gamma}\partial\Psi + \lambda(\bar{\Psi}\Psi)^k \Psi = 0 \qquad /3.2.2/$$

Это уравнение представляет собой нелинейное обобщение галилеевски-инвариантного уравнения /3.1.2/ с нулевой массой [54], описывающего частицу со спином $\frac{1}{2}$. Уравнение /3.2.2/ инвариантно относительно $AG(1,3)$, операторы которой образуют следующее представление [6]:

$$P_\mu = \partial_\mu, \quad J_{ab} = x^a P_b - x^b P_a - \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b], \qquad /3.2.3/$$
$$G_a = t\,\partial_a + \frac{1}{2}\gamma^a \tilde{\gamma}^0$$

/хотя, как показано в [6], это не максимальная АИ/.

В этом параграфе получен более широкий класс нелинейных уравнений, инвариантных относительно алгебры Галилея /3.2.3/, расширенной алгебры $AG_1(1,3)$ и обобщенной алгебры Галилея $AG_2(1,3)$.

<u>Лемма.</u> Величины

$$\tilde{j}_\mu = i\bar{\Psi}\tilde{\gamma}^0\gamma_\mu\Psi, \quad \gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu \qquad /3.2.4/$$

являются векторами относительно преобразований, порождаемых операторами /3.2.3/, т.е. преобразуются так же, как величины ∂_μ . Кроме того, величины

$$u = \bar{\Psi}\Psi , \qquad v = \bar{\Psi}\tilde{\gamma}^0\Psi \qquad /3.2.5/$$

являются инвариантами /скалярами/ алгебры /3.2.3/.

Доказательство проведем для операторов J_{12} , G_1 /для остальных операторов – аналогично/. Инфинитоземальные преобразования, порождаемые J_{12} , следующие:

$$\partial_1 = \partial_1' + \varepsilon\partial_2 , \ \partial_2 = \partial_2' - \varepsilon\partial_1 , \ \ \partial_0 = \partial_0' , \ \ \partial_3 = \partial_3' ,$$
$$\Psi = \Psi' - \varepsilon\frac{1}{2}\gamma^1\gamma^2\Psi . \qquad /3.2.6/$$

Отсюда получаем преобразование для j_μ :

$$\tilde{j}_1 = \tilde{j}_1' + \varepsilon\left[-\frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma^2\gamma^1\tilde{\gamma}^0\gamma_1\Psi - \frac{1}{2}\bar{\Psi}\tilde{\gamma}^0\gamma_1\gamma^1\gamma^2\Psi\right] =$$
$$= \tilde{j}_1' + \varepsilon\bar{\Psi}\tilde{\gamma}^0\gamma_2\Psi = \tilde{j}_1' + \varepsilon\tilde{j}_2 .$$

Аналогично:

$$\tilde{j}_2 = \tilde{j}_2' - \varepsilon\tilde{j}_1 , \quad \tilde{j}_3 = \tilde{j}_3' , \quad \tilde{j}_0 = \tilde{j}_0' .$$

Из инфинитоземальных преобразований для G_1

$$\partial_0 = \partial_0' + \varepsilon\partial_1 , \ \partial_a = \partial_a' , \ \Psi = \Psi' + \varepsilon\frac{1}{2}\gamma^1\tilde{\gamma}^0\Psi \qquad /3.2.7/$$

получаем

$$\tilde{j}^0 = \tilde{j}_0' + \varepsilon\left[\frac{1}{2}\bar{\Psi}\tilde{\gamma}^0\gamma^1\tilde{\gamma}^0\gamma_0\Psi + \frac{1}{2}\bar{\Psi}\tilde{\gamma}^0\gamma_0\gamma^1\tilde{\gamma}^0\Psi\right] =$$
$$= \tilde{j}_0' + \varepsilon\bar{\Psi}\tilde{\gamma}^0\gamma_0\gamma^1\tilde{\gamma}^0\Psi .$$

Нетрудно проверить, что $\tilde{\gamma}^0\gamma_0\gamma^1\tilde{\gamma}^0 = 2\tilde{\gamma}^0\gamma_1$, откуда $\tilde{j}_0 = \tilde{j}_0' + \varepsilon\tilde{j}_1$. Точно также $\tilde{j}_a = \tilde{j}_a'$. Сравнивая найденные преобразования для $\tilde{j}_\mu$ с /3.2.6/, /3.2.7/, заключаем, что $\tilde{j}_\mu$ – вектор. Аналогично показывается, что переменные /3.2.5/ – инварианты.

Лемма доказана.

Кроме величин /3.2.4/, /3.2.5/ существует еще 6 квадратичных форм /т.е. всего – 12/:

$$\tilde{F}_{ab} = \bar{\Psi}\tilde{\gamma}^0 \sigma_{ab}\Psi , \qquad \sigma_{ab} = \frac{i}{2}[\gamma^a, \gamma^b] \qquad /3.2.8/$$
$$\tilde{F}_{0a} = \frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^4\gamma^0\gamma_a\Psi .$$

Можно показать, что величины $\tilde{F}_{\mu\nu}$ являются тензорными относительно преобразований, порождаемых операторами /3.2.3/. А именно, обозначая

$$E^a = \tilde{F}_{0a} , \quad H^a = \varepsilon_{abc}\tilde{F}^{bc} \qquad /3.2.9/$$

получим для $\bar{E}$ и $\bar{H}$ следующие генераторы преобразований Галилея:

$$J_{ab} = x^a\partial_b - x^b\partial_a + E^a\partial_{E^b} - E^b\partial_{E^a} + H^a\partial_{H^b} - H^b\partial_{H^a} ,$$
$$G_a = t\partial_a - \varepsilon_{abc}H^b\partial_{E^c} \qquad /3.2.10/$$

Относительно этих операторов инвариантны уравнения /3.1.1/ /спин $S = 0,1$ /. Таким образом, зная анзацы для спинорного поля Ψ , по формулам /3.2.9/, а также /3.2.4/ можно строить анзацы для векторных величин $\{\vec{E}, \vec{H}\}$; $\{A_\mu\}$.

Поскольку Ψ и $\bar{\Psi}$ содержат только восемь действительных функций, то величины u , v , $\tilde{j}_\mu$, $\tilde{F}_{\mu\nu}$ не являются независимыми. Действительно, можно проверить справедливость следующих соотношений:

$$\tilde{j}_a^2 = v^2, \quad \tilde{F}_{ab} = -\varepsilon_{abc}\tilde{j}_c . \qquad /3.2.11/$$

Эти соотношения аналогичны тождествам Фирца–Паули [41]/релятивистский случай/.

С учетом соотношений /3.2.11/ будем искать галилеевски-инвариантные уравнения в классе, где нелинейность зависит от векторных и скалярных величин $\tilde{j}_\mu$, u , v /3.2.4/, /3.2.5/:

$$L(\Psi) = i\tilde{\gamma}\partial\Psi + S(\tilde{j}_\mu, u, v)\Psi = 0\,, \qquad /3.2.12/$$

где S – матрица 4×4.

Теорема 3.2.1. Уравнения /3.2.12/ инвариантны относительно алгебры $AG(1,3)$ /3.2.3/ тогда и только тогда, когда функция S имеет вид:

$$S = f(u,v)\tilde{\gamma}\tilde{j} + \tilde{\gamma}^0[g(u,v)\bar{\gamma}\bar{\tilde{j}} + h(u,v)] + q(u,v)\,, \qquad /3.2.13/$$

где $\tilde{\gamma}\tilde{j} \equiv \tilde{\gamma}^\mu \tilde{j}_\mu$, $\bar{\gamma}\bar{\tilde{j}} \equiv \gamma^a \tilde{j}_a$, f , g , h , q – –произвольные функции переменных /3.2.5/.

Доказательство. Инвариантность уравнений /3.2.12/ относительно P_μ – очевидна. Выделим из них те, которые инвариантны относительно J_{ab} . Используя преобразования вида /3.2.6/ для J_{12} и, учитывая, что $\tilde{j}_\mu$ – вектор, получим:

$$L(\Psi) = [L(\Psi)]' + \varepsilon\Big[\big(\partial_{\tilde{j}_a} S\tilde{j}_b - \partial_{\tilde{j}_b} S\tilde{j}_a - \frac{1}{2}S\gamma^a\gamma^b\big)\Psi +$$
$$+\big(-\frac{1}{2}\gamma^a\gamma^b\tilde{\gamma}\partial\Psi\big)\Big]$$

Отсюда видно, что необходимое и достаточное условие инвариантности относительно J_{ab} – следующее /см./0.7/ и § 1.2/:

$$\partial_{\tilde{j}_a} S\tilde{j}_b - \partial_{\tilde{j}_b} S\tilde{j}_a - \frac{1}{2}S\gamma^a\gamma^b = -\frac{1}{2}\gamma^a\gamma^b S\ .$$

Общее решение этого уравнения:

$$S=[f_1+g_1\gamma^0+h_1\gamma^4+q_1\gamma^0\gamma^4]\bar{\gamma}\tilde{\tilde{j}}+$$
$$+[f_2+g_2\gamma^0+h_2\gamma^4+q_2\gamma^0\gamma^4]\ , \qquad /3.2.14/$$

где f_i, g_i, h_i, q_i – функции, зависящие от $\tilde{j}_0$, и v. Применяя далее к уравнению /3.2.12/, /3.2.14/ преобразование /3.2.7/, аналогичным образом получаем необходимое и достаточное условие инвариантности относительно G_1:

$$[f_1'+g_1'\gamma^0+h_1'\gamma^4+q_1'\gamma^0\gamma^4]\bar{\gamma}\tilde{\tilde{j}}\tilde{j}_1+[f_2'+g_2'\gamma^0+$$
$$+h_2'\gamma^4+q_2'\gamma^0\gamma^4]\tilde{j}_1+\frac{1}{2}(f_1+g_1\gamma^0+h_1\gamma^4+q_1\gamma^0\gamma^4)\times$$
$$\times\bar{\gamma}\tilde{\tilde{j}}\gamma^1\tilde{\gamma}^0+\frac{1}{2}(f_2+g_2\gamma^0+h_2\gamma^4+q_2\gamma^0\gamma^4)\gamma^1\tilde{\gamma}^0=$$
$$=\frac{1}{2}\gamma^1\tilde{\gamma}^0(f_1+g_1\gamma^0+h_1\gamma^4+q_1\gamma^0\gamma^4)\bar{\gamma}\tilde{\tilde{j}}+$$
$$+\frac{1}{2}\gamma^1\tilde{\gamma}^0(f_2+g_2\gamma^0+h_2\gamma^4+q_2\gamma^0\gamma^4)=0\ ,$$

где $f_i'=\dfrac{\partial f_i}{\partial\tilde{j}_0}$ и т.д. Последнее уравнение есть полином по $\tilde{j}_a$. Поскольку $\tilde{j}_a$ – независимые переменные, то оно расщепляется на следующие уравнения:

$$f_1'=g_1'=h_1'=q_1'=0\ ,$$
$$[(f_i+g_i\gamma^0+h_i\gamma^4+q_i\gamma^0\gamma^4),\ \ \gamma^1\tilde{\gamma}^0]=0\ ,\qquad i=1,2\ ,$$
$$(f_2'+g_2'\gamma^0+h_2'\gamma^4+q_2'\gamma^0\gamma^4)-\frac{1}{2}(f_1+g_1\gamma^0+h_1\gamma^4+$$
$$+q_1\gamma^0\gamma^4)\tilde{\gamma}^0=\frac{1}{2}\tilde{\gamma}^0(f_1-g_1\gamma^0-h_1\gamma^4+q_1\gamma^0\gamma^4)\ .$$

Приравняв в этих уравнениях коэффициенты, стоящие при 1, γ^0, γ^4, $\gamma^0\gamma^4$ получим систему уравнений /линейную/ для f_i, g_i, h_i, q_i. Подставив в /3.2.14/ найденные решения, получим /3.2.13/. Поскольку с помощью коммутационных соотношений /3.2.1/ из операторов J_{ab}, G_1 можно получить G_2, G_3, то уравнение /3.2.12/, /3.2.13/ инвариантно относительно $AG(1,3)$.

Теорема доказана.

Определение 3.2.2. Алгебра $AG(1,3)$, дополненная оператором дилатации D, образует расширенную алгебру Галилея $AG_1(1,3)$, если выполняются соотношения /3.2.1/ и

$$[P_\mu, D] = P_\mu\ , \quad [J_{ab}, D] = [G_a, D] = 0\ . \qquad /3.2.15/$$

Из множества уравнений /3.2.12/, /3.2.13/ выделим такие, которые инвариантны относительно оператора

$$D = x^\mu \partial_\mu + \kappa\ , \qquad /3.2.16/$$

/масштабное преобразование/.

Теорема 3.2.2. Уравнения /3.2.12/, /3.2.13/ инвариантны относительно расширенной алгебры $AG_1(1,3)$, тогда и только тогда, когда:

$$S = u^{\frac12\kappa-1} f\left(\frac{u}{v}\right)\tilde{\gamma}\tilde{j} + \tilde{\gamma}^0\left[u^{\frac12\kappa-1} g\left(\frac{u}{v}\right)\tilde{\gamma}\tilde{\tilde{j}} + u^{\frac12\kappa} h\left(\frac{u}{v}\right)\right] + u^{\frac12\kappa} q\left(\frac{u}{v}\right)\ , \qquad /3.2.17/$$

где f, g, h, q – произвольные функции.

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей теоремы. Используя инфинитоземальные преобразования, порождаемые D /3.2.16/ $\partial_\mu = \partial'_\mu + \varepsilon\partial_\mu$, $\psi = \psi' + \varepsilon\kappa\psi$, получаем необходимое и достаточное условие инвариантности /3.2.12/, /3.2.13/ относительно D :

$$2\kappa u f_u + 2\kappa v f_v + (2\kappa-1) f = 0 \ ,$$

$$2\kappa u g_u + 2\kappa v g_v + (2\kappa-1) g = 0 \ ,$$

$$2\kappa u h_u + 2\kappa v h_v - h = 0 \ ,$$

$$2\kappa u q_u + 2\kappa v q_v - q = 0 \ .$$

Отсюда и получаем /3.2.17/. Теорема доказана.

Из множества уравнений /3.2.12/, /3.2.17/ выделим такие, которые инвариантны относительно проективного преобразования, а именно преобразования, порождаемого оператором

$$A = x_0^2 \partial_0 + 2 x^a x_0 \partial_a + 2\kappa x_0 + x^a \gamma^a \tilde{\gamma}^0 \ . \qquad /3.2.18/$$

<u>Теорема 3.2.3.</u> Уравнение /3.2.12/, /3.2.17/ инвариантно относительно оператора A /3.2.18/ тогда и только тогда, когда $\kappa = \frac{3}{2}$

Доказательство. Инфинитоземальные преобразования, порождаемые /3.2.18/, следующие:

$$\partial_0 = \partial_0' + \varepsilon (2 x_0 \partial_0 + 2 x^a \partial_a) \ , \quad \partial_a = \partial_a' + \varepsilon 2 x_0 \partial_a \ , \qquad /3.2.19/$$

$$\Psi = \Psi' + \varepsilon (x^a \gamma^a \tilde{\gamma}^0 + 2\kappa x_0) \ .$$

Отсюда находим, что

$$u^{1/2-1} = (u^{1/2-1})' + \varepsilon (2-4\kappa) x_0 u^{1/2\kappa-1} ,$$

$$u^{1/2\kappa} = (u^{1/2\kappa})' + \varepsilon 2 x_0 u^{1/2\kappa} \ ,$$

$$\tilde{j}_0 = (\tilde{j}_0)' + \varepsilon\left[4\kappa x_0 \tilde{j}_0 + 2x^a \tilde{j}_a\right] \;,$$

$$\tilde{j}_a = \tilde{j}_a' + \varepsilon 4\kappa x_0 \tilde{j}_a \;, \quad \frac{u}{v} = \left(\frac{u}{v}\right)' \;,$$

Используя эти преобразования и /3.2.19/, имеем:

$$L(\psi) = [L(\psi)]' + \varepsilon\Big\{(x^a \gamma^a \tilde{\gamma}^0 + (2\kappa+2)x_0)\tilde{\gamma}\partial\psi +$$
$$+ (2\kappa-3)\tilde{\gamma}^0\psi + [u^{\frac{1}{2}\kappa-1} f \tilde{\gamma}\tilde{j} +$$
$$+ \tilde{\gamma}^0 (u^{\frac{1}{2}\kappa-1} g \overline{\gamma} \tilde{\tilde{j}} + u^{\frac{1}{2}\kappa} h) + u^{\frac{1}{2}\kappa} q] \times$$
$$\times (x^a \gamma^a \tilde{\gamma}^0 + (2\kappa+2)x_0)\psi \,.$$

Отсюда получаем, что необходимое и достаточное условие инвариантности является то, что выражение в фигурных скобках равно

$$(x^a \gamma^a \tilde{\gamma}^0 + (2\kappa+2)x_0)\, L(\psi) \,.$$

С другой стороны, это выражение, как нетрудно подсчитать, равно

$$(x^a \gamma^a \tilde{\gamma}^0 + (2\kappa+2)x_0)L(\psi) + (2\kappa-3)\tilde{\gamma}^0\psi \,,$$

откуда $(2\kappa-3)=0$. Теорема доказана.

Обратим внимание на то, что операторы из $AG_1(1.3)$ и A /3.2.18/ не образуют алгебру. Алгебру образует следующее множество операторов:

$$\widetilde{AG}(1,3) = \langle\langle AG_1(1,3)\rangle, A, \tilde{G}_a \rangle \,, \qquad /3.2.20/$$

где $AG_1(1,3)$ алгебра /3.2.1/, /3.2.16/, A , $\tilde{G}_a$ коммутируют с операторами из /3.2.20/ следующим образом:

$$[P_0, A] = 2D\,,\ [P_a, A] = 2G_a\,,\ [J_{ab}, A] = 0\,,$$
$$[G_a, A] = \tilde{G}_a\,,\ [D, A] = A\,,\ [\tilde{G}_a, A] = 0\,, \qquad /3.2.21/$$
$$[\tilde{G}_a, G_a] = 0\,.$$

а операторы $\langle P_\mu, J_{ab}, \tilde{G}_a, D \rangle$ образуют алгебру $AG_1(1,3)$:

Таким образом, из теоремы 3.2.3 и /3.2.21/ получаем, что уравнения /3.2.12/, /3.2.17/ с $k=\frac{3}{2}$ инвариантны относительно алгебры $AG_1(1,3)$, операторы которой могут образовывать два представления: /3.2.3/, а для второго представления

$$\tilde{G}_a = 2x_0 G_a \qquad /3.2.22/$$

Кроме того, широкий класс уравнений обладает аналогичной двойственной $G(1,3)$ -инвариантностью.

<u>Теорема 3.2.4.</u> Уравнения /3.2.12/, /3.2.13/ инвариантны относительно алгебры Галилея <u>с операторами</u>

, где $\tilde{G}_a$ – операторы /3.2.22/.

2. Далее получим широкий класс нелинейных уравнений, описывающих частицу со спином $S=\frac{1}{2}$ и массой m. Таковым является линейное уравнение [28]:

$$i\tilde{\gamma}\partial\Psi + m(\gamma^0-\gamma^4)\Psi = 0 . \qquad /3.2.23/$$

Определение 3.2.3. Алгеброй Галилея с массой m назовем алгебру

$$AG_m(1,3) = \langle P_\mu, J_{ab}, G_a, M = -2im \rangle , \qquad /3.2.24/$$

где оператор M коммутирует со всеми операторами; P_μ, J_{ab}, G_a подчиняются соотношениям /3.2.1/, кроме соотношений для P_a и G_b :

$$[P_\mu, G_b] = -2i\delta_{ab} m = \delta_{ab} M \qquad /3.2.25/$$

Уравнение /3.2.23/ инвариантно относительно $AG_m(1,3)$ /3.2.24/, /3.2.25/ с генераторами:

$$P_\mu=\partial_\mu\,,\ J_{ab}=x^a\partial_b-x^b\partial_a-\frac{1}{4}\left[\gamma^a,\gamma^b\right],$$
$$G_a=t\partial_a-2imx^a+\frac{1}{2}\gamma^a\tilde{\gamma}^0,\qquad M=-2im\ . \tag{3.2.26}$$

$G_m(1,3)$ -инвариантные уравнения будем искать, как и в предыдущем пункте, в виде /3.2.12/, или, что эквивалентно, в виде:

$$L(\Psi)=i\tilde{\gamma}\partial\Psi+m(\gamma^0-\gamma^4)\Psi+S(\tilde{j}^\mu,u,v)\Psi=0\,. \tag{3.2.27}$$

Выбор класса уравнений /3.2.27/ можно обосновать тем, что величины u , v , $\tilde{j}^\mu$, $\tilde{F}_{\mu\nu}$ /3.2.4/, /3.2.5/, /3.2.8/ являются скалярами, векторами и тензорами относительно алгебры /3.2.26/. Это вытекает из леммы, и из того, что они инвариантны относительно $2imx^a$.

<u>Теорема 3.2.5.</u> Уравнение /3.2.27/ инвариантно относительно алгебры $AG_m(1,3)$ /3.2.26/ тогда и только тогда, когда матричная функция S имеет вид /3.2.13/.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.2.1.

Прежде чем приводить следующие теоремы, покажем, что в уравнениях /3.2.27/, /3.2.13/ без ограничения общности можно положить $f(u,v)\equiv g(u,v)\equiv 0$. Это вытекает из следующей теоремы.

<u>Теорема 3.2.6.</u> Для произвольного спинора Ψ имеет место тождество

$$\bar{\Psi}\tilde{\gamma}^0\gamma_\mu\Psi\tilde{\gamma}^\mu\Psi=\bar{\Psi}\tilde{\gamma}^0\Psi\Psi,\ \text{т.е.}\ \tilde{j}\tilde{\gamma}\Psi=v\Psi \tag{3.2.28}$$

Доказательство. Воспользуемся известным тождеством [41] для произвольных спиноров Ψ_I и Ψ_{II} :

$$\bar{\Psi}_I\gamma_\mu\Psi_{II}\gamma^\mu\Psi_{II}=\bar{\Psi}_I\Psi_{II}\Psi_{II}+\gamma^4\bar{\Psi}_I\gamma^4\Psi_{II}\Psi_{II}\ . \tag{3.2.29}$$

Отсюда:

$$\bar{\Psi}\tilde{\gamma}^0\gamma_\mu\Psi\tilde{\gamma}^\mu\Psi = \bar{\Psi}\gamma^0\gamma_\mu\Psi\tilde{\gamma}^\mu\Psi + \bar{\Psi}\gamma^4\gamma_\mu\Psi\tilde{\gamma}^\mu\Psi =$$

$$= \bar{\Psi}\gamma^0\gamma_\mu\Psi\gamma^\mu\Psi + \bar{\Psi}\Psi\gamma^4\Psi + \bar{\Psi}\gamma^4\gamma_\mu\Psi\gamma^\mu\Psi +$$

$$+ \bar{\Psi}\gamma^4\gamma^0\Psi\gamma^4\Psi = \bar{\Psi}\gamma^0\Psi\Psi + \bar{\Psi}\gamma^0\gamma^4\Psi\gamma^4\Psi + \gamma^4\bar{\Psi}\Psi\Psi +$$

$$+ \bar{\Psi}\gamma^4\Psi\Psi - \gamma^4\bar{\Psi}\Psi\Psi + \gamma^4\bar{\Psi}\gamma^4\gamma^0\Psi\Psi = \bar{\Psi}\gamma^0\Psi\Psi +$$

$$+ \bar{\Psi}\gamma^4\Psi\Psi = \bar{\Psi}\tilde{\gamma}^0\Psi\Psi .$$

Теорема доказана.

Таким образом, класс уравнений /3.2.27/, /3.2.13/ можно записать эквивалентным образом:

$$L(\Psi) = i\tilde{\gamma}\partial\Psi + m(\gamma^0 - \gamma^4)\Psi + [\tilde{\gamma}^0 h(u,v) + q(u,v)]\Psi = 0 \qquad /3.2.30/$$

Определение 3.2.4. Алгебра $\overline{AG_m(1,3)}$, дополненная оператором масштабных преобразований D, образует расширенную алгебру Галилея $AG_{m,1}(1,3)$, если для опереатора D выполняются соотношения

$$[P_0, D] = 2P_0 , \quad [P_a, D] = P_a ,$$
$$[J_{ab}, D] = 0 , \quad [G_a, D] = -G_a . \qquad /3.2.31/$$

Уравнение /3.2.23/ инвариантно относительно $AG_{m,1}(1,3)$ с операторами /3.2.26/ и [28]

$$D = 2x^0\partial_0 + x^a\partial_a + 2 - \frac{1}{2}\gamma^0\gamma^4 \qquad /3.2.32/$$

<u>Теорема 3.2.7.</u> Уравнения /3.2.30/ инвариантны относительно алгебры $AG_{m,1}(1,3)$ /3.2.31/, /3.2.32/ тогда и только тогда, когда

$$h(u,v)=w_1\left(\frac{u^3}{v^4}\right)u^{1/2}\,;\quad g(u,v)=u^{1/4}w_2\left(\frac{u^3}{v^4}\right)\,. \qquad /3.2.33/$$

Доказательство. Пользуясь методом инфинитоземальных преобразований для оператора /3.2.32/, находим:

$$u=u'+\varepsilon 4u\,,\quad v=v'+\varepsilon 3v\,;$$

а из /3.2.30/:

$$L(\Psi)=[L(\Psi)]'+\varepsilon\Big\{(3-\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^4)(i\tilde{\gamma}\partial\Psi+m(\gamma^0-\gamma^4)\Psi)+$$
$$+\tilde{\gamma}^0[4uh_u+3vh_v]\Psi+(4ug_u+3vg_v)\Psi+$$
$$+[\tilde{\gamma}^0h+g](2-\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^4)\Psi\Big\}\,.$$

Из условия инвариантности получаем, что выражение в фигурных скобках равно:

$$(3-\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^4)L(\Psi)\,.$$

Из этого условия, приравняв коэффициенты при матрицах 1, $\tilde{\gamma}^0$, найдем уравнения:

$$4uh_u+3vh_v=2h\,,$$
$$4ug_u+3vg_v=g\,,$$

откуда и получаем соотношения /3.2.33/.

Теорема доказана.

Определение 3.2.5. Алгебру $AG_{m,1}(1,3)$, дополненную проективным оператором A_m, назовем обобщенной алгеброй Галилея $AG_{m,2}(1,3)$, если для оператора A_m выполняются следующие соотношения:

$$[P_0,A_m]=D,\ [P_a,A_m]=G_a,\ [J_{ab},A_m]=0, \qquad /3.2.34/$$
$$[D,A_m]=2A_m\,.$$

Уравнение /3.2.23/ инвариантно относительно $AG_{m,2}(1,3)$,где

$$A_m = x_0^2\partial_0 + x_0 x^a\partial_a + x_0(2-\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^4) + \frac{1}{2}x^a\gamma^a\tilde{\gamma}^0 - im\bar{x}^2. \qquad /3.2.35/$$

Теорема 3.2.8. Уравнение /3.2.30/, /3.2.33/ инвариантно относительно алгебры $AG_{m,2}(1,3)$ /3.2.34/, /3.2.35/ тогда и только тогда, когда оно ~~имеет вид:~~

$$i\tilde{\gamma}\partial\psi + m(\gamma^0-\gamma^4)\psi + u^{1/4} w\left(\frac{u^3}{v^4}\right)\psi = 0. \qquad /3.2.36/$$

Доказательство. Используя ~~инфинитоз~~емальные преобразования для оператора /3.2.35/, получим условие инвариантности: $w_1 \equiv 0$ /производных от w_1 и w_2 не возникает, т.к. $\frac{u_3}{v^4}$ - инвариант оператора A_m /. Теорема доказана.

Из всех приведенных теорем в данном параграфе нетрудно получить несколько следствий для уравнений /3.2.12/ - /3.2.16/ / $m=0$ /.

Следствие 3.2.1. Уравнение вида

$$i\tilde{\gamma}\partial\psi + \tilde{\gamma}^0 u^{1/2k}\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{2k-2}{k}} c_1\psi + u^{1/2k}\left(\frac{u}{v}\right)^{1-\frac{2}{k}} c_2\psi = 0,$$

где c_1, c_2 - произвольные константы, инвариантно относительно алгебры $\langle AG_1(1,3), D\rangle$ /3.2.15/, /3.2.32/, т.е. как относительно $AG_1(1,3)$, так и относительно $AG_{m,1}(1,3)$.

Следствие 3.2.2. Уравнение вида

$$i\tilde{\gamma}\partial\psi + u^{1/2k}\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{k-2}{k}} c\psi = 0, \quad c = \text{const},$$

инвариантно относительно алгебры $\langle AG_1(1,3), D, A_0\rangle$, где A_0 - оператор /3.2.35/ с $m=0$; т.е. относительно алгебр $AG_1(1,3)$ и $AG_{0,2}(1,3)$ / $m=0$ /.

Следствие 3.2.3. Уравнение вида:

$$i\tilde{\gamma}\partial\psi + \tilde{\gamma}^0 \frac{u}{v^{2/3}} c_1 \psi + c_2 v^{1/3} \psi = 0 , \quad c_1 , c_2 = \mathrm{const} ,$$

инвариантно относительно алгебры $\langle \widetilde{AG}(1,3) , D \rangle$, т.е. относительно $\widetilde{AG}(1,3)$ и $AG_{m,1}(1,3)$ /3.2.20/, /3.2.32/.

Следствие 3.2.4. Уравнение вида

$$i\tilde{\gamma}\partial\psi + v^{1/3} c \psi = 0 , \quad c = \mathrm{const} ,$$

инвариантно относительно множества операторов $\{ \widetilde{AG}(1,3) , D , A_0 \}$, т.е. относительно алгебр $\widetilde{AG}(1,3)$ и $AG_{02}(1.3)$ /3.2.34/.

Заметим, что указанное множество не образует алгебру, т.е. из него можно построить новые операторы симметрии для уравнения.

§ 3.3. Алгебры симметрии уравнения для частицы со спином $\frac{1}{2}$.

Во второй главе показано, что безмассовое уравнение Дирака инвариантно относительно алгебры Пуанкаре, операторы которой могут образовывать три различных представления, а также относительно суперaлгебр. Аналогичный результат можно получить и для безмассового уравнения /3.1.2/, которое напишем вместе с сопряженным:

$$i\tilde{\Gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi = 0, \qquad /3.3.1/$$

где $\tilde{\Gamma}^0 = \begin{pmatrix} \gamma^0+\gamma^4 & 0 \\ 0 & -(\gamma^0+\gamma^4) \end{pmatrix}$, $\tilde{\Gamma}^a = \begin{pmatrix} \gamma^a & 0 \\ 0 & -(\gamma^a)^T \end{pmatrix}$,

$\Psi = (\psi, \tilde{\psi})$ - восьмикомпонентный столбец, $\tilde{\psi} = \gamma^0 \psi^*$.

Найдем все чисто матричные / $\xi^{\mu}=0$ / операторы симметрии уравнения /3.3.1/.

Теорема 3.3.1. Максимальную АИ вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \gamma^0 B^* \gamma^0 & \gamma^0 A^* \gamma^0 \end{pmatrix} \qquad /3.3.2/$$

для /3.3.1/ образуют операторы I_8, $\Lambda=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \tilde{\gamma}^0 & 0 \\ 0 & \tilde{\gamma}^0 \end{pmatrix}$,

а также 6 матриц:

$$Q_{12}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i_4 & 0 \\ 0 & -i_4 \end{pmatrix},\quad Q_{13}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \gamma^3\gamma^1 \\ \gamma^3\gamma^1 & 0 \end{pmatrix},\quad Q_{23}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i\gamma^1\gamma^3 \\ -i\gamma^1\gamma^3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad /3.3.3/$$

$$R_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i\gamma^2\tilde{\gamma}^0 \\ -\gamma^2\tilde{\gamma}^0 & 0 \end{pmatrix},\quad R_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \gamma^2\tilde{\gamma}^0 \\ \gamma^2\tilde{\gamma}^0 & 0 \end{pmatrix},\quad R_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i\tilde{\gamma}^0 & 0 \\ 0 & i\tilde{\gamma}^0 \end{pmatrix}. \qquad /3.3.4/$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что либо $B=0$, либо $A=0$ в /3.3.2/ в силу линейности /3.3.1//. Пусть $B=0$. Условием инвариантности /3.3.1/ является

$i\tilde{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}A\Psi=\lambda i\tilde{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi$, λ – некоторая матрица.

Отсюда $\tilde{\gamma}^{\mu}A=\lambda\tilde{\gamma}^{\mu}$. Из этого соотношения находим:

$$A=\{I_4,\, i_4,\, \tilde{\gamma}^0,\, -i\tilde{\gamma}^0\}.$$

Пусть $A=0$. Соответствующим условием является:

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}B\gamma^0\Psi^*\equiv-\big[(i(\gamma^0-\gamma^4)\partial_0+i\gamma^1\partial_1-i\gamma^2\partial_2+$$
$$+i\gamma^3\partial_3)\,B^*\gamma^0\Psi\big]^*=-\big[\lambda i\tilde{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi\big]^*.$$

Приравнивая в обеих частях последнего равенства коэффициенты при ∂_μ , получим, что $B=\{\gamma^3\gamma^1, i\gamma^3\gamma^1, i\gamma^2\tilde{\gamma}^0, \gamma^2\tilde{\gamma}^0\}$.

Теорема доказана.

Следствие 3.3.1. Нетрудно убедиться, что уравнение /3.3.1/ инвариантно относительно однородной алгебры Галилея:

$$\langle Q_{ab}\rangle \oplus \langle R_a\rangle \quad . \qquad /3.3.5/$$

Инвариантность относительно /3.3.5/ позволяет выделить еще два представления алгебры $AG(1,3)$, помимо /3.2.3/, реализуемые на множестве решений /3.3.1/.

Обозначим через

$$AG^{(1)}(1,3)=\langle P_\mu, J^{(1)}_{ab}, G^{(1)}_a\rangle \qquad /3.3.6/$$

представление /3.2.3/ в 8-компонентной форме $/\tilde{\gamma}^\mu \to \tilde{\Gamma}^\mu/$. Тогда указанные два представления выражаются как:

$$AG^{(2)}(1,3)=\langle P_\mu, J^{(2)}_{ab}=J^{(1)}_{ab}+Q_{ab}, G^{(2)}_a=G^{(1)}_a\rangle, \qquad /3.3.7/$$

$$AG^{(3)}(1,3)=\langle P_\mu, J^{(3)}_{ab}=J^{(2)}_{ab}, G^{(3)}_a=G^{(2)}_a+R_a\rangle . \qquad /3.3.8/$$

В [26] показано, что если два ковариантные представления $AG^{(i)}(1,3)$ эквивалентны, то эквивалентны соответствующие элементы алгебры /т.е. $J^{(1)}_{ab}\sim J^{(2)}_{ab}$ и т.д./. Поскольку $J^{(1)}_{ab}$ неэквивалентно $J^{(2)}_{ab}$ /см. § 2.3/, а также $G^{(1)}_1$ неэквивалентно $G^{(2)}_1$ /простая проверка/, то представления /3.3.6/-/3.3.8/ неэквивалентны между собой.

Рассмотрим три множества операторов симметрии:

$$SA^{(K)}=\{P_\mu, J^{(K)}_{ab}, G^{(K)}_a, I, \Lambda; Q_{ab}, R_a\} \qquad /3.3.9/$$

Эти множества образуют как алгебры Ли, так и супералгебры. Операторы $\langle AG^{(K)}(1,3)\rangle$, I , Λ - являются четными, а Q_{ab} , R_a - нечетными в соответствующих супералгебрах. Приведем коммутационные и антикоммутационные соотношения.

Операторы $\langle AG^{(K)}(1,3)\rangle$ удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Галилея, I , Λ - коммутируют со всеми операторами из $SA^{(K)}$. Для дальнейшего удобно ввести обозначения:

$$T_a=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}Q_{bc}\ ,\quad M_a^{(K)}=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}J_{bc}^{(K)}\ .$$

Нетрудно убедиться, что выполняются соотношения:

$$\{T_a\,,T_b\}\equiv T_aT_b+T_bT_a=-\frac{1}{2}\delta_{ab}\ ,$$

$$\{R_a,R_b\}=0\ ,\quad \{T_a\,,R_b\}=\delta_{ab}\Lambda\ .$$

Операторы R_a , T_a из $SA^{(1)}$ коммутируют со всеми четными операторами. Для $SA^{(2)}$ имеем:

$$[P_\mu\,,R_a]=[P_\mu\,,T_a]=0\ , \qquad /3.3.10/$$

$$[M_a^{(2)},R_b]=[T_a\,,R_b]=-\varepsilon_{abc}R_c\ ,$$

$$[M_a^{(2)},T_b]=[T_a\,,T_b]=-\varepsilon_{abc}T_c\ ,$$

$$[G_a^{(2)},R_b]=[G_a^{(2)},T_b]=0\,.$$

Для супералгебры $SA^{(3)}$ все соотношения такие же, как и для $SA^{(2)}$, кроме последнего в /3.3.10/. В этом случае:

$$[G_a^{(3)},T_b]=-\varepsilon_{abc}R_c$$

Таким образом, структуры супералгебр $SA^{(K)}$, $K=1,2,3$ описаны.

§ 3.4. Линейные и нелинейные спинорные уравнения, обладающие дуальной галилей-инвариантностью.

В этом параграфе пастроены уравнения, инвариантные относительно алгебры $AG(1,3)$, операторы которой образуют различные ковариантные представления, а также супералгебры. /Пример нековариантного представления мы уже приводили – см. теорему 3.2.4/.

1. Рассмотрим уравнения /3.2.12/, /3.2.13/ в 8-компонентной форме /с учетом теоремы 3.2.6/:

$$i\tilde{\Gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi+(\Gamma^{0}+\Gamma^{4})\hbar(u,v)\Psi+\bar{q}(u,v)\Psi=0\ , \qquad /3.4.1/$$

где $\Gamma^{0}+\Gamma^{4}=\begin{pmatrix}\gamma^{0}+\gamma^{4} & 0\\ 0 & \gamma^{0}+\gamma^{4}\end{pmatrix},\quad \hbar=\begin{pmatrix}hI_{4} & 0\\ 0 & h^{*}I_{4}\end{pmatrix}$,

$$\bar{q}=\begin{pmatrix}qI & 0\\ 0 & q^{*}I\end{pmatrix},\quad u=\bar{\Psi}\Psi\ ,\quad v=\bar{\Psi}(\Gamma^{0}+\Gamma^{4})\Psi\ ,$$

$\bar{\Psi}=(\bar{\psi},\psi^{T})$ – 8-компонентная строка.

Теорема 3.4.1. Уравнение /3.4.1/ инвариантно относительно алгебры $AG^{(2)}(1,3)$ /3.3.7/ тогда и только тогда, когда оно имеет вид:

$$i\tilde{\Gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi+i\tilde{\Gamma}^{0}h(u,v)\Psi+\bar{q}(u,v)\Psi=0\ , \qquad /3.4.2/$$

где $h(u,v)$, $iq(u,v)$ – действительные функции.

Замечание. Среди уравнений /3.4.2/ содержится

$$i\tilde{\gamma}\partial\psi+im\psi=0\ . \qquad /3.4.3/$$

Подействовав на него оператором $i\tilde{\gamma}\partial$, получим

$$\Delta\psi-m\tilde{\gamma}\partial\psi=(\Delta+m^{2})\psi=0\ ,$$

т.е. каждое решение для /3.4.3/ является решением уравнения Гельмгольца.

<u>Теорема 3.4.2.</u> Среди $AG^{(2)}(1,3)$ -инвариантных уравнений /3.4.2/ инвариантными относительно алгебры $AG^{(3)}(1,3)$ будут такие:

$$i\tilde{\Gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi + i\tilde{\Gamma}^{0}h(u,v)\Psi = 0\,, \qquad /3.4.4/$$

а если $h(u,v) = const$, то /3.4.4/ инвариантно относительно супералгебр /3.3.9/.

<u>2.</u> Пусть теперь $m \neq 0$, Ψ_+ , Ψ_- - два 4-х компонентные спинора. Введем следующие величины:

$$\tilde{u} = \bar{\Psi}_+\Psi_+ + \bar{\Psi}_-\Psi_- \,, \quad \tilde{v} = \bar{\Psi}_+\tilde{\gamma}^0\Psi_+ + \bar{\Psi}_-\tilde{\gamma}^0\Psi_- \,,$$
$$S = \bar{\Psi}_+\Psi_- + \bar{\Psi}_-\Psi_+ \,, \quad \tau = \bar{\Psi}_+\tilde{\gamma}^0\Psi_- + \bar{\Psi}_-\tilde{\gamma}^0\Psi_+ \,, \qquad /3.4.5/$$

и рассмотрим систему уравнений /ср. § 2.5/:

$$i\tilde{\gamma}\partial\Psi_+ + m(\gamma^0 - \gamma^4)\Psi_+ + \tilde{\gamma}^0 F\Psi_+ + G\Psi_+ = 0\,,$$
$$i\tilde{\gamma}\partial\Psi_- - m(\gamma^0 - \gamma^4)\Psi_- - \tilde{\gamma}^0 F^*\Psi_- - G^*\Psi_- = 0\,, \qquad /3.4.6/$$

где F , G - произвольные функции, F^*, G^* - сопряженные к ним, зависящие от переменных /3.4.5/. Если к каждому из уравнений /3.4.6/ добавить сопряженное, то их можно записать в компактной форме

$$i\tau^{\mu}\partial_{\mu}\hat{\Psi} + m(\hat{\Gamma}^0 - \hat{\Gamma}^4)\hat{\Psi} + (\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^4)\hat{F}(\tilde{u},\tilde{v},s,\tau)\hat{\Psi} + \hat{G}\hat{\Psi} = 0 \qquad /3.4.7/$$

где $\tau^{\mu} = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}^{\mu} & 0_8 \\ 0_8 & -\tilde{\Gamma}^{\mu} \end{pmatrix}$, $\hat{\Gamma}^0 = \begin{pmatrix} \Gamma^0 & 0_8 \\ 0_8 & \Gamma^0 \end{pmatrix}$, $\hat{\Gamma}^4 = \begin{pmatrix} \Gamma^4 & 0_8 \\ 0_8 & \Gamma^4 \end{pmatrix}$, алгебры

$$\hat{AG}^{(3)}(1,3) = \langle P_\mu, \hat{J}^{(3)}_{ab} = \hat{J}^{(2)}_{ab}, \; \hat{G}^{(3)}_a = \hat{G}^{(2)}_a + \hat{R}_a \rangle , \qquad /3.4.12/$$

$$\hat{R}_1 = \begin{pmatrix} R_1 & 0_8 \\ 0_8 & R_1 \end{pmatrix}, \; \hat{R}_2 = \begin{pmatrix} R_2 & 0_8 \\ 0_8 & R_2 \end{pmatrix}, \; \hat{R}_3 = \begin{pmatrix} 0_8 & R_3 \\ R_3 & 0_8 \end{pmatrix}, \qquad /3.4.13/$$

R_1, R_2, R_3 - матрицы /3.3.4/, тогда и только тогда, когда F, G - действительные функции.

Среди этих уравнений выделим те, которые инвариантны относительно еще двух операторов

I_{16}, $\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0_8 & \Lambda \\ \Lambda & 0_8 \end{pmatrix}$, где Λ оператор из /3.3.9/. В этом случае найденные уравнения будут инвариантны относительно трех супералгебр:

$$\hat{SA}^{(K)} = \{ \langle \hat{AG}^{(K)}(1,3) \rangle, I, \hat{\Lambda}; \quad \hat{Q}_{ab}, \hat{R}_a \rangle \qquad /3.4.14/$$

где $\hat{Q}_{ab}$ - матрицы /2.4.10/, $\hat{R}_a$ - /3.4.13/. Суперaлгебры $\hat{SA}^{(K)}$ изоморфны соответственно $SA^{(K)}$ /3.3.9/:

$$\langle \hat{AG}^{(K)}(1,3) \rangle \to \langle AG^{(K)}(1,3) \rangle, \; \hat{\Lambda} \to \Lambda ,$$

$$\hat{Q}_{ab} \to Q_{ab}, \quad \hat{R}_a \to R_a .$$

Теорема 3.4.5. $\hat{G}^{(K)}(1,3)$ -инвариантные уравнения / $K = 1, 2, 3$ / тогда и только тогда инвариантны относительно суперaлгебр /3.4.14/, когда они имеют вид:

$$i\tau^\mu \partial_\mu \hat{\Psi} + (\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^4) F(w_1, w_2) \hat{\Psi} + G(w_1, w_2) \hat{\Psi} = 0 \qquad /3.4.15/$$

где F, G - действительные функции величин

$$W_1=\frac{S\tau-\tilde{u}\,\tilde{v}}{\tau^2}\,,\qquad W_2=\frac{S\tau-\tilde{u}\,\tilde{v}}{\tilde{v}^2}\quad. \qquad /3.4.16/$$

/Нетрудно убедиться, что W_1 , $W_2 \not\equiv \mathrm{const}$, т.е. /3.4.15/ не сводится к линейному уравнению, как в 8-компонентном уравнении /3.4.4//.

Замечание. Доказательства всех теорем в этом параграфе аналогичны доказательствам соответствующих теорем в параграфах 2.4.3 - 2.4.5.

В заключение приведем следующую

Теорему 3.4.6. 8-компонентное уравнение

$$i\tilde{\Gamma}\partial\Psi+i\lambda(\Gamma^0-\Gamma^4)\Psi+\left[i\tilde{\Gamma}^0 h\left(\tfrac{u}{v}\right)+iq\left(\tfrac{u}{v}\right)\right]\Psi=0, \qquad /3.4.17/$$

инвариантно относительно алгебр

$$AG^{(\kappa)}_{i\lambda}(1,3)=\langle P_\mu, J^{(\kappa)}_{ab}, G_a\rangle\ ,\ \kappa=1,2\ ,\quad \lambda\in\mathbb{R}\ , \qquad /3.4.18/$$

где $J^{(\kappa)}_{ab}$ - операторы из /3.3.6/, /3.3.7/

$$G_a=t\partial_a+2\lambda x^a+\frac{1}{2}\tilde{\Gamma}^a\tilde{\Gamma}^0$$

Можно сказать, что алгебрам $AG^{(\kappa)}_{i\lambda}(1,3)$ соответствует "мнимая масса" /ср. с теоремой 3.4.3/.

§ 3.5. Редукция и точные решения уравнений, обладающих двойственной инвариантностью.

В этом параграфе проведем редукцию уравнения /3.4.7/ как наиболее общего среди описанных в этой главе. В случае $m\neq 0$, оно инвариантно относительно алгебр $\hat{AG}^{(i)}(1,3)$, $i=1,2$, а в случае $m=0$ - еще относительно $\hat{AG}^{(3)}(1,3)$.

Рассмотрим анзацы вида

$$\hat{\Psi}(x) = A(x)\,\Phi(\omega)\,, \qquad /3.5.1/$$

$A(x)$ - матрица 16×16, $\Phi(\omega)$ - 16-компонентный столбец, $\omega(x)$ - инвариантная переменная, инвариантные относительно 3-х мерных подалгебр $\langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle$ алгебры Галилея /см. § 2.6/. Классификация неэквивалентных подалгебр алгебры $AG(1,3)$ проведены в [61]. Мы рассмотрим 17 3-х мерных подалгебр /максимальное число для $m \neq 0$; для $m = 0$ их будет 36/. В приведенной ниже таблице операторы $\langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle$ могут быть взяты в случае $m \neq 0$ из представлений $A\hat{G}^{(i)}(1,3)$, $i = 1, 2$ /3.4.9/, /3.4.10/, а в случае $m = 0$ - еще из $A\hat{G}^{(3)}(1,3)$ /3.4.12/. Матрицы $\hat{S}_{ab}$, $\hat{\eta}_a$ в зависимости от представлений $i = 1, 2, 3$ имеют вид:

$$\hat{S}^{(1)}_{ab} = -\frac{1}{2}\tau^a\tau^b\,, \quad \hat{\eta}^{(1)}_a = -\frac{1}{2}\tau^a\tau^0; \qquad /см./3.4.7/$$

$$\hat{S}^{(2)}_{ab} = \hat{S}^{(1)}_{ab} + \hat{Q}_{ab}\,, \quad \hat{\eta}^{(2)}_a = \hat{\eta}^{(1)}_a\,;$$

$$\hat{S}^{(3)}_{ab} = \hat{S}^{(2)}_{ab}\,, \quad \hat{\eta}^{(3)}_a = \hat{\eta}^{(1)}_a + \hat{R}_a\,,$$

где $\hat{Q}_{ab}$, $\hat{R}_a$ - матрицы /2.4.10/, /3.4.13/. Заметим, что для представления $A\hat{G}^{(1)}(1,3)$ соответствующие анзацы найдены в [28].

Таблица.

№	$\langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle$	$A(t,\vec{x})$	$\omega(t,\vec{x})$
1.	$P_0,\ P_1,\ P_3$	I	x_3
2.	$J_{12} + \alpha P_0,\ P_1,\ P_2$	$exp\left\{-\frac{t}{\alpha}\hat{S}_{12}\right\}$	x_3
3.	$P_0 + i\alpha M,\ P_1,\ P_2$	$exp\left\{-i\alpha M t\right\}$	x_3

4.	J_{12}, P_0, P_3	$\exp\left\{\hat{S}_{12} \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right\}$	$x_1^2+x_2^2$
5.	$J_{12}+\alpha P_0+$ $+\beta G_3, P_1, P_2$	$\exp\left\{-\frac{2iM\beta t}{3\alpha^2}(\beta t^2-3\alpha x_3)-\right.$ $\left.-\frac{\beta t}{\alpha}\hat{\eta}_3-\frac{t}{\alpha}\hat{S}_{12}\right\}$	$\beta t^2-2\alpha x_3$
6.	$J_{12}+\alpha G_3,$ P_1, P_2	$\exp\left\{-\frac{x_3}{\alpha t}\hat{S}_{12}-\frac{x_3}{t}\hat{\eta}_3+\frac{iMx_3^2}{t}\right\}$	t
7.	$J_{12}+\alpha G_3,$ G_1, G_2	$\exp\left\{\frac{iM}{t}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\frac{1}{t}\hat{\eta}_a x_a\right\}\times$ $\times\exp\left\{-\frac{x_3}{2t}\hat{S}_{12}\right\}$	t
8.	$J_{12}+\alpha P_3,$ P_1, P_2	$\exp\left\{\frac{x_3}{\alpha}\hat{S}_{12}\right\}$	t
9.	$J_{12}+\alpha P_3,$ G_1, G_2	$\exp\left\{\frac{iM}{t}(x_1^2+x_2^2)-\frac{1}{t}(\hat{\eta}_1 x_1+\hat{\eta}_2 x_2)\right\}\times$ $\times\exp\left\{\frac{x_3}{\alpha}\hat{S}_{12}\right\}$	t
10.	P_1, P_2, P_3	I	t
11.	G_1, P_2, P_3	$\exp\left\{\frac{iMx_1^2}{t}-\frac{x_1}{t}\hat{\eta}_1\right\}$	t
12.	$G_1+\alpha P_1,$ G_2, P_3	$\exp\left\{\frac{iMx_2^2}{t}-\frac{x_2}{t}\hat{\eta}_2\right\}\times$ $\times\exp\left\{-\frac{iMx_1^2}{\alpha-t}+\frac{x_1}{\alpha-t}\hat{\eta}_1\right\}$	t

13.	$G_1+\alpha P_1$, $G_2+\beta P_2$, G_3	$\exp\left\{\frac{iMx_3^2}{t}-\frac{x_3}{t}\hat{\eta}_3\right\}\times \exp\left\{-\frac{iMx_1^2}{\alpha-t}+\frac{x_1}{\alpha-t}\hat{\eta}_1\right\}\times \exp\left\{-\frac{iMx_2^2}{\beta-t}+\frac{x_2}{\beta-t}\hat{\eta}_2\right\}$	t
14.	$G_1+\alpha P_0$, P_2, P_3	$\exp\left\{-\frac{2iMt}{3\alpha^2}(t^2-3\alpha x_1)-\frac{t}{\alpha}\hat{\eta}_1\right\}$	$t^2-2\alpha x_1$
15.	$J_{12}+i\alpha M$, P_0, P_3	$\exp\left\{(i\alpha M+\hat{S}_{12})\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right\}$	$x_1^2+x_2^2$
16.	$J_{12}+i\alpha M$, $P_0+i\beta M$, P_3	$\exp\left\{-i\beta Mt+(i\alpha M+\hat{S}_{12})\times \times\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right\}$	$x_1^2+x_2^2$
17.	$G_1+\alpha P_2$, $G_2+ +\alpha P_1+\beta P_2+ +(\alpha\lambda+\delta\beta)P_3$, $-G+\lambda G_1+ +\delta G_2+\alpha\delta P_1$	$\exp\left\{-\frac{iMx_1^2}{t}-\frac{x_1}{t}\hat{\eta}_1\right\}\times \exp\left\{-\frac{iM(\alpha x_1+x_2t)^2}{t[t(t-\beta)-\alpha^2]}+ +\frac{x_3}{(\alpha\lambda+\delta\beta)t}(\alpha\hat{\eta}_1+t\hat{\eta}_2)\right\}\times \exp\left\{\frac{iMw^2}{[t(t-\beta)-\alpha^2]f(t)}+\frac{w}{f(t)}\times \times\left[\left(\frac{\alpha}{\alpha\lambda+\delta\beta}-\frac{\alpha\delta}{t^2}\right)\hat{\eta}_1+ +\left(-\delta+\frac{t}{\alpha\lambda+\delta\beta}\right)\hat{\eta}_2+\hat{\eta}_3\right]\right\}$	t

Здесь α , β , λ , δ - произвольные действительные параметры.

Обозначим далее через $R(\Phi)$ матрицу вида:

$$R(\Phi) = -(\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^4)\hat{F}(\tilde{u},\tilde{v},s,z) - \hat{G}(\tilde{u},\tilde{v},s,z) - m(\hat{\Gamma}^0 - \hat{\Gamma}^4), \quad /3.5.2/$$

где $\hat{F}$, $\hat{G}$ - матричные функции величин $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, s , z /3.4.8/, в которых $\hat{\Psi}(x)$ заменены на $\Phi(\omega)$. Перечисленные анзацы дают следующий набор ОДУ для $\Phi(\omega)$ /соответствующие вычисления опускаем/:

1°. $i\tau^3\dot{\Phi} = R\Phi$;

2°. $i\tau^3\dot{\Phi} - \frac{i}{\alpha}\tau^0\hat{S}_{12}\Phi = R\Phi$;

3°. $i\tau^3\dot{\Phi} + \alpha M\tau^0\Phi = R\Phi$;

4°. $2i\tau^2\omega^{1/2}\dot{\Phi} + i\tau^1\hat{S}_{12}\omega^{-1/2}\Phi = R\Phi$;

5°. $-2i\alpha\tau^3\dot{\Phi} + \left[\frac{\beta\omega}{\alpha^2}\hat{\Gamma}^0 - \frac{i}{\alpha}\tau^0\hat{S}_{12}\right]\Phi = R\Phi$;

6°. $i\tau^0\dot{\Phi} + \left[\frac{i}{2\omega}\tau^0 - \frac{i}{\alpha\omega}\tau^3\hat{S}_{12}\right]\Phi = R\Phi$;

7°. $i\tau^0\dot{\Phi} + \left[\frac{i}{\omega}\tau^0 - \frac{i}{\alpha\omega}\tau^3\hat{S}_{12}\right]\Phi = R\Phi$;

8°. $i\tau^0\dot{\Phi} + i\tau^3\hat{S}_{12}\Phi = R\Phi$;

9°. $i\tau^0\dot{\Phi} + \left[\frac{i}{\alpha}\tau^3\hat{S}_{12} - \frac{i}{\omega}(\tau^1\hat{\eta}_1 + \tau^2\hat{\eta}_2)\right]\Phi = R\Phi$;

$$10^\circ.\quad i\tau^0\dot{\Phi} = R(\Phi)\ ;$$

$$11^\circ.\quad i\tau^0\dot{\Phi} - \frac{i}{\omega}\tau^1\hat{\eta}_1 = R\Phi\ ; \qquad /3.5.3/$$

$$12^\circ.\quad i\tau^0\dot{\Phi} + \left[\frac{i\tau^1\hat{\eta}_1}{\alpha-\omega} - \frac{i\tau^2\hat{\eta}_2}{\omega}\right]\Phi = R\Phi\ ;$$

$$13^\circ.\quad i\tau^0\dot{\Phi} + \left[\frac{i\tau^1\hat{\eta}_1}{\alpha-\omega} + \frac{i\tau^2\hat{\eta}_2}{\beta-\omega} - \frac{i\tau^3\hat{\eta}_3}{\omega}\right]\Phi = R\Phi\ ;$$

$$14^\circ.\ -2i\alpha\tau^1\dot{\Phi} + \frac{\omega}{\alpha^2}M\tau^0\Phi = R\Phi\ ;$$

$$15^\circ.\quad 2i\omega^{1/2}\tau^2\dot{\Phi} + i\omega^{-1/2}(\tau^1\hat{S}_{12} - i\alpha M\tau^1)\Phi = R\Phi\ ;$$

$$16^\circ.\ 2i\omega^{1/2}\tau^2\dot{\Phi} + \left[i\omega^{-1/2}(\tau^1\hat{S}_{12} - i\alpha M\tau^1) - \beta M\tau^0\right]\Phi = R\Phi\ ;$$

$$17.\ i\tau^0\dot{\Phi} + \left\{-i\tau^0\left[(2\omega f(\omega))^{-1}(\omega^3 + \alpha(\alpha+\lambda\tau)\omega - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\delta\tau\alpha^2) - \omega^{-1}\right] = R(\Phi)\ .$$

В /3.5.3/ $\dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{d\omega}$; нумерация $1^\circ - 17^\circ$ соответствует нумерации анзацев в таблице.

Найдем частные решения некоторых ОДУ /3.5.3/.

Пусть $m \neq 0$. Некоторые из уравнений $6^\circ - 13^\circ$, полученные из представлений $\hat{AG}^{(l)}(1,3)$, $l = 1,2$, удается линеаризовать благодаря тому, что величины

$$I_6 = \bar{\Phi}(\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^4)\Phi\omega,\quad I_7 = \bar{\Phi}(\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^4)\Phi\omega^2,$$

$$I_8=\bar{\Phi}(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^4)\Phi\,,\qquad I_9=\bar{\Phi}(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^4)\Phi\omega^2\,,$$

$$I_{10}=\bar{\Phi}(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^4)\Phi\,,\qquad I_{11}=\bar{\Phi}(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^4)\Phi\omega\,,$$

$$I_{12}=\bar{\Phi}(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^4)\Phi(\omega^2-\alpha\omega)\,,$$

$$I_{13}=\bar{\Phi}(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^4)\Phi\omega(\omega-\alpha)(\omega-\beta)$$

являются первыми интегралами. Покажем это для уравнения 6°, когда $l=2$ /случай $l=1$ см. в [28]/, и найдем его общее решение когда

$$R=(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^4)f_1(\tilde{v})+f_2(\tilde{v})$$

Поскольку все матрицы в этом уравнении диагональны относительно компонент $\varphi=\varphi_-$, φ_+ , то, без ограничения общности, его можно рассматривать в 4-х компонентной форме:

$$i\tilde{\gamma}^0\dot{\varphi}+\Big[m(\gamma^0-\gamma^4)+\frac{i}{2\alpha\omega}\gamma^0\gamma^4+\frac{\gamma^3}{2\alpha\omega}+ \qquad /3.5.4/$$

$$+\frac{i}{2\omega}\tilde{\gamma}^0\Big]\varphi=\big[(\gamma^0+\gamma^4)f_1(\bar{\varphi}\tilde{\gamma}^0\varphi)+f_2(\bar{\varphi}\tilde{\gamma}^0\varphi)\big]\varphi\,,$$

где f_1 , f_2 – действительные функции.

Домножим обе части уравнения на $\bar{\varphi}$ и из полученного выражения вычтем его сопряжение. В результате останется:

$$i(\bar{\varphi}\tilde{\gamma}^0\varphi)'+i\frac{\bar{\varphi}\tilde{\gamma}^0\varphi}{\omega}=0\,,$$

откуда и получаем: $\bar{\varphi}\tilde{\gamma}^0\varphi\omega=\lambda=\mathrm{const}$.

Общее решение уравнения /3.5.4/ может быть представлено в виде:

$$\Phi=\frac{1}{2}\big[h_1(\omega)\tilde{\gamma}^0+h_2(\omega)(1+\gamma^0\gamma^4)+ \qquad /3.5.5/$$

$$+h_3(\omega)\tilde{\gamma}^0\gamma^3+h_4(\omega)(1+\gamma^0\gamma^4)\gamma^3\big]\varkappa\,,$$

где $\varkappa$ – постоянный столбец. Подставив /3.5.5/ в /3.5.4/ и приравняв коэффициенты при матрицах $\tilde{\gamma}^0$, $1+\gamma^0\gamma^4$, $\tilde{\gamma}^0\gamma^3$, $(1+\gamma^0\gamma^4)\gamma^3$ нулю, получим систему ОДУ для h_i, $i=\overline{1,4}$:

$$2i\dot{h}_2-\frac{i}{2\alpha\omega}h_1+\frac{1}{4\alpha\omega}h_3+\frac{i}{2\omega}h_2=$$
$$=f_1\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)h_2+\frac{f_2\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)}{2}h_1\;; \qquad /3.5.6/$$

$$2i\dot{h}_4-\frac{i}{2\alpha\omega}h_3-\frac{1}{4\alpha\omega}h_1+\frac{i}{2\omega}h_4=$$
$$=f_1\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)h_4+\frac{1}{2}f_2\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)h_3\;;$$

$$mh_1+mh_2+\frac{i}{4\alpha\omega}h_2-\frac{1}{4\alpha\omega}h_4=\frac{1}{2}f_2\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)h_2\,,$$
$$mh_3+mh_4+\frac{i}{4\alpha\omega}h_4+\frac{1}{4\alpha\omega}h_2=\frac{1}{2}f_2\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)h_4\,.$$

Из этой системы получаем систему 2-х уравнений для h_2, h_4 :

$$2i\dot{h}_2+F(\omega)h_2-S(\omega)h_4=0\,, \qquad /3.5.7/$$

$$2i\dot{h}_4+F(\omega)h_4+S(\omega)h_2=0\,,$$

где
$$F(\omega)=\Big[-\frac{if_2\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)}{8\lambda\omega m}-\frac{f_2^2}{4m}+\frac{f_2}{2}-f_1\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)-$$
$$-\frac{3}{16\alpha^2\omega^2m}+\frac{i(\alpha+1)}{2\alpha\omega}\Big]\,,$$

$$S(\omega)=\Big[\frac{1}{4\alpha\omega}+\frac{3i}{16\alpha^2\omega^2m}\Big]\,.$$

Введем замену переменных:

$$h_2 = exp\left\{\frac{i}{2}\int F(\omega)\,d\omega\right\}\eta_2 \ , \qquad /3.5.8/$$

$$h_4 = exp\left\{\frac{i}{2}\int F(\omega)\,d\omega\right\}\eta_4 \ .$$

Тогда система /3.5.7/ переходит в такую:

$$2i\dot{\eta}_2 - S(\omega)\eta_4 = 0 \ ,$$

$$2i\dot{\eta}_4 + S(\omega)\eta_2 = 0 \ .$$

Нетрудно видеть, что первый интеграл этой системы

$$I = \eta_2^2 + \eta_4^2 = C_1^2$$

Отсюда находим общее решение:

$$\eta_2 = -C_1 \cos\left[-\frac{i}{2}\int S(\omega)\,d\omega + C_2\right] \ , \qquad /3.5.9/$$

$$\eta_4 = C_1 \sin\left[-\frac{i}{2}\int S(\omega)\,d\omega + C_2\right]$$

Теперь найдем величину $\bar{\varphi}\tilde{\gamma}^0\varphi$. Из /3.5.5/ получаем:

$$\bar{\varphi}\tilde{\gamma}^0\varphi = (|h_2|^2 + |h_4|^2)\bar{\varkappa}\tilde{\gamma}^0\varkappa + (h_2^* h_4 - h_2 h_4^*)\bar{\varkappa}\tilde{\gamma}^0\gamma^3\varkappa \ .$$

Тогда из /3.5.9/, /3.5.8/:

$$\bar{\varphi}\tilde{\gamma}^0\varphi = exp\left\{\frac{1}{8\alpha m}\int\frac{f_2(\frac{\lambda}{\omega})}{\omega}\,d\omega - \frac{(\alpha+1)}{2\alpha}\ln\omega\right\} \times$$

$$\times \frac{|C_1|^2}{2}\left[exp(2\,\mathcal{J}m\,C_2)\,\omega^{-\frac{1}{4\alpha}} + exp(-2\mathcal{J}m\,C_2)\,\omega^{\frac{1}{4\alpha}}\right) \times$$

$$\times\ \bar{\varkappa}\tilde{\gamma}^0\varkappa + (i\ exp(-2\,\mathcal{J}m\,C_2)\,\omega^{\frac{1}{4\alpha}} - i\ exp(2\mathcal{J}m\,C_2)\ \times$$

$$\times\ \omega^{-\frac{1}{4\alpha}})\,\bar{\varkappa}\tilde{\gamma}^0\gamma^3\varkappa\big] \ .$$

Отсюда нетрудно убедиться, что для того, чтобы выполнялось условие $\bar{\varphi}\tilde{\gamma}^0\varphi = \frac{\lambda}{\omega}$, достаточно выполнения условий

$$\bar{\mathscr{X}}\tilde{\gamma}^0(1+i\gamma^3)\mathscr{X}=0 \quad \text{и} \quad f_2 = 2m(3-2\alpha) \qquad /3.5.10/$$

либо:

$$\bar{\mathscr{X}}\tilde{\gamma}^0(1-i\gamma^3)\mathscr{X}=0 \quad \text{и} \quad f_2 = 2m(1-2\alpha) \qquad /3.5.11/$$

Теперь приведем решение h_i, /3.5.5/. Из /3.5.9/, /3.5.8/, /3.5.6/ и /3.5.10/, или//3.5.11// получаем:

$$h_2 = -\exp\left\{\mathcal{F}(\omega)\right\} c_1 \cos\left[\mathcal{P}(\omega)+c_2\right],$$

$$h_4 = \exp\left\{\mathcal{F}(\omega)\right\} c_1 \sin\left[\mathcal{P}(\omega)+c_2\right],$$

$$h_1 = \left[\frac{f_2}{2m} - 1 - \frac{i}{4\alpha\omega m}\right] h_2 + \frac{1}{4\alpha\omega m} h_4,$$

$$h_3 = \left[\frac{f_2}{2m} - 1 - \frac{i}{4\alpha\omega m}\right] h_4 - \frac{1}{4\alpha\omega m} h_2,$$

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{f_2 - 4m(\alpha+1)}{16\alpha m}\ln\omega + \frac{if_2(2m-f_2)}{8m}\omega +$$

$$+ \frac{3i}{32\alpha^2\omega m} - \frac{i}{2}\int f_1\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)d\omega;$$

$$\mathcal{P}(\omega) = -\left[\frac{i\ln\omega}{8\alpha} + \frac{3}{32\alpha^2\omega m}\right],$$

где

c_1, c_2, $\lambda \in \mathbb{R}$ – произвольные константы, и выполняется одно из условий /3.5.10/, /3.5.11/.

З А К Л Ю Ч Е Н И Е

В заключении сформулируем основные результаты.

Описаны нелинейные уравнения второго порядка для спинорных полей Ψ , инвариантные относительно алгебры Пуанкаре. Показано, что при определенных дополнительных условиях на множестве решений таких уравнений реализуется только спинорное представление группы Пуанкаре. Построены широкие классы уравнений, включающие первые производные, инвариантные относительно групп $P(1,3)$, $\tilde{P}(1,3)$, $G(1,3)$.

Установлено, что безмассовое УД инвариантно относительно алгебры $AP(1,3)$, операторы которой могут образовывать три неэквивалентных представления, соответствующих спинам $S=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $S=0,1$, а также относительно трех супералгебр. Получены формулы типа калибровочных преобразований, позволяющие по любому решению этого уравнения строить решения уравнений Максвелла / $S=0,1$/ и Рариты-Швингера / $S=\frac{3}{2}$ /; а также по любому решению уравнений Максвелла - множество решений УД. Построены нелинейные системы уравнений для двух спиноров Ψ_- и Ψ_+ , на множестве решений которых реализуется два неэквивалентных представления алгебры Пуанкаре / $S=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $S=0,1$/, а на некоторых системах - представления супералгебры.

Установлено, что четырехкомпонентное безмассовое спинорное уравнение для частицы инвариантно относительно группы $G(1,3)$, алгебра которой может реализовывать три неэквивалентных представления, а также относительно трех супералгебр. Получены формулы, позволяющие по любому решению этого уравнения строить решение $G(1,3)$ -инвариантных уравнений электродинамики. Построены обобщенные спинорные уравнения, инвариантные относительно групп $G(1,3)$, $G_1(1,3)$, $G_2(1,3)$ /спин $S=\frac{1}{2}$ /. Из них выделен подкласс уравнений, а также построены системы для двух спиноров Ψ_- и Ψ_+, на множестве решений которых реализуются различные представления группы $G(1,3)$, а также – супералгебры.

Построены анзацы и точные решения пуанкаре- и галилей-инвариантных уравнений. Основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Найденные системы уравнений можно использовать для описания физических явлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрейщев А.Ю. О некоторых точных решениях нелинейного уравнения Дирака //Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990, – с. 14-17.
2. Боргард А.А. Волновые уравнения фотона. – Журн. эксперим. и теорет. физики, 1958, 34 вып. 5, с. 1323-1325.
3. Гейзенберг В. Введение в единую полевую теорию элементарных частиц. – М: Мир, 1968. – 239 с.
4. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. – Москва: Государ. изд-во физико-математич. литературы, 1953. – 368 с.
5. Дирак П.А.М. Принципы волновой механики. пер. с англ., М., 1960.
6. Жданов Р.З. О нелинейном спинорном уравнении, допускающем бесконечнопараметрическую группу симметрии //Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – с. 44-47.
7. Жданов Р.З. Об общем решении одного двумерного нелинейного галилеевски инвариантного спинорного уравнения //Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – с. 30-33.
8. Жданов Р.З. Теоретико-алгебраический анализ и точные решения нелинейных спинорных уравнений //Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1987. – 12 с.
9. Ибрагимов Н.Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики.– Новосибирск.– Изд-во Новосиб. ун-та, 1972.– 200 с.
10. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1983. – 280 с.

11. Ибрагимов Н.Х. Об инвариантности уравнения Дирака //Докл. АН СССР .- 1969.- 185, № 6.- С.1225-1228.

12. Максвелл Д.К. Статьи и речи.- М: Наука, 1968.- 420 с.

13. Миллер У. мл. Симметрия и разделение переменных.- М.: Мир, 1981.- 342 с.

14. Нелинейная квантовая теория поля //под редакцией Иваненко Д.Д. - М.: Изд-во иностр. лит-ры.- 1959.- 464 с.

15. Никитин А.Г., Сегеда Ю.Н., Фущич В.И. О дополнительной инвариантности уравнений Кеммера-Дэффина и Рариты-Швингера.- Теор. и мат. физика, 1976.- 29, № 1, с. 82-93.

16. Никитин А.Г. Супералгебры операторов симметрии уравнения Дирака //Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990.- с. 43-46.

17. Никитин А.Г. Дифференциальные уравнения первого порядка, инвариантные относительно группы Галилея //Теоретико-алгебраические исследования в математической физики.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981.- с. 90-104.

18. Никитин А.Г. Операторы симметрии уравнения Вейля //Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985.- с. 34-39.

19. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.- М.: Наука, 1978.- 400 с.

20. Спичак С.В. О новом конформно-инвариантном уравнении второго порядка для спинорного поля //Симметрия и решения уравнений математической физики.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989.- с. 79-81.

21. Спичак С.В. Векторное представление алгебры Пуанкаре и точное решение уравнения Дирака //Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990.- с. 70-73.

22. Фущич В.И., Штелень В.М., Спичак С.В. О связи между решениями уравнений Дирака и Максвелла. Суперсимметрия уравнения Дирака. //Докл. АН УССР. Сер. А. 1990, № 3.- с. 36-40.

23. Фущич В.И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений //Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987.- с. 4-16.

24. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики.- Киев: Наук. думка, 1989.- 336 с.

25. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла.- Киев: Наук. думка, 1983.- 200 с.

26. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики.- Киев: Наук. думка, 1991.- 400 с.

27. Фущич В.И., Никитин А.Г. Нерелятивистские уравнения движения для частицы с произвольным спином //Физика элементар. частиц и атом. ядра.- 1981.- 12, вып. 5.- с. 1157-1219.

28. Фущич В.И., Жданов Р.З. Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения.- Киев: Наук. думка, 1991.- 280 с.

29. Фущич В.И. О пуанкаре-, галилеево-инвариантных нелинейных уравнениях и методах их решений //Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985.- с. 4-19.

30. Фущич В.И., Никитин А.Г. О новых и старых симметриях уравнений Максвелла и Дирака //Физика элементар. частиц и атомн. ядра. - 1983. - 14, № 1. - с. 6-57.

31. Фущич В.И., Штелень В.М. Об инвариантных решениях нелинейного уравнения Дирака //Докл. АН СССР. - 1983, 269, № 1.- с. 88-92.

32. Фущич В.И., Штелень В.М. О редукции и точных решениях нелинейного уравнения Дирака //Теорет. и мат. физика. - 1987.-

72, № 1. - с. 35-44.

33. Фущич В.И., Штелень В.М. О линейных и нелинейных системах дифференциальных уравнений, инвариантных относительно группы Шредингера //Теор. и мат. физика. - 1983. - 56, № 3. - с. 387-394.

34. Фущич В.И., Штелень В.М., Жданов Р.З. Конформно-инвариантное обобщение уравнения Дирака-Гейзенберга и его точные решения //Теоретико-групповые методы в физике. Труды 3-го междунар. семинара. - М.: Наука, 1986, т.1. - с. 497-501.

35. Шредингер Э. Квантование как задача о собственных значениях. IV . - Избранные труды по квантовой механике. - М.: Наука, 1976. - с.- 116-138.

36. Штелень В.М., Спичак С.В. Об инвариантности уравнения Дирака относительно различных представлений алгебры Пуанкаре //Симметрия и решения уравнений математической физики: сб. научн. тр. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. - с. 114-118.

37. Штелень В.М. О связи между решениями уравнений Максвелла и Дирака //там же, с. 110-113.

38. Уэрмер Дж. Теория потенциала. - М.: Мир, 1980. - 133 с.

39. Эйнштейн А. К электродинамики движущихся тел. - В кн.: Принципы относительности: Сб. работ классиков релятивизма. М.: Атомиздат, 1973, с. 97-117.

40. Bateman H. The transformation of electrodynamical equations // Proc. London Math. Soc. – 1906. – 8. – P. 223–264.
41. Crawford I. P. On the algebra of Dirae bispinor densities : factorization and inversion theorems // J. Math. Phys. – 1985. – 26, № 7. – P. 1439–1441.
42. Dirac P. A. M. Relativistic wave equations // Proc. Roy Soc. London. – 1936. – A 155. – P. 447–459.
43. Fushchich W. I., Shtelen W. M. On some exact solutions of the nonlinear Dirac equations. – J. Phys., 1983, 16 A. – P. 271–278.
44. Fushchich W. I., Shtelen W. M., Zhdanov R. Z. On the conformally invariant equations for spinor fields and their exact solutions // Phys. Lett. B. – № 2–3. – P. 189–191.
45. Fushchich W. I., P, T, C – properties of the Poincare invariant equations for massive particles. – Lett. nuovo cim., 1973, 6, № 4. – P. 133–137.
46. Fushchich W. I., Cherniha R. M. The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations // J. Phys. A. – 1985. – 18. – P. 3491–3503.
47. Fushchich W. I., Nibitin A. G. On the new invariance algebras and superalgebras of relativistic wave equations // J. Phys. A. – 1987. – 20, № 2. – P. 537–549.
48. Fushchich W. I. and Zhdanov R. Z. Symmetry and exact solutions of nonlinear spinor equations., Phys. Reports, 1989, 172, P. 123–174.
49. Fushchich W. I., Shtelen W. M., Spichak S. V. On the connection between solutions of Dirac and Maxwell equatior dual Poincare invariance and superalgebras of invariance and solutions of nonlinear Dirac equations // J. Phys. A. – 1991. – 24. – P. 1683–1698.

50. Heaviside O. – Phil. Trans. Roy Soc. London A, 1983, 183. – P. 423 – 430.
51. Grundlund A.M., Harnad T. and Winternitz P. Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations// J. Math. Phys. – 1984. – 25, №4. – P. 791 - 806.
52. Gursey F. On a conform-invariant spinor wave equation // Nuovo cim. – 1956. – 3, №5. – P. 988 - 1006.
53. Kac V. G., "Adv. math," 1977, v. 26. – P. 8-96.
54. Klein O. Quantentheorie and fündimensionale Relativitäts-theorie // Zeit Phys. – 1926. – 37, H. 12. – S. 895-906.
55. Levi-Leblond J.-M. Nonrelativistic particles and wave equations // Comm. Math. Phys. – 1967 – 6. – P. 286 - 311.
56. Lie S., Engel F. Theorie der Transformationsgruppen: in 3 Bd. – Leipzig: Teubner, 1888, 1890, 1893. – Bd. 1 – 3.
57. Ljolie K. Some remarks on variational formulations of physical fields. – Fortschr. Phys., 1988, 36, №1. P. 9-32.
58. Merve P. T. Space-Time Symmetries and nonlinear field theory // Nuovo cim. – 1980. – 4. – P. 247 - 264.
59. Moses H.E. A spinor representation of Maxwell equations // Nuovo cim. – Suppl., 1958, №1. – P. 1-18.
60. Patera T., Wintermitz P. and Zassenhans H. Continnons subgroups of the fundamental groups of physics. 1. General method and the Poincare group // J. Math. Phys. – 1975. – 16, №8. – P. 1597 - 1624.
61. Sorba P. The Galilei group and its connected subgroups// Ibid. – 1976. – 17, №6. – P. 941 - 953.
62. Vieger S. Second-order wave-equation for spin – $\frac{1}{2}$ fields // Phys. rev., D. – 1985. – v. 31, № 12. – P. 3157 - 3161.