КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.Т.Г.ШЕВЧЕНКО

На правах рукописи

СТОГНИЙ Валерий Иванович

УДК 517.42:519.46

ТЕОРЕТИКО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬИЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность - 01.01.02 - дифференциальные
уравнения и математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
член-корреспондент АН УССР,
доктор физико-математических
наук, профессор В.И.ФУЕИЧ

Киев - 1989

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время интенсивно развиваются теоретико-алгебраические методы, успешно применяемые для исследования уравнений математической физики и построения математических моделей, обладающих заданными симметрийными свойствами. Одним из таких методов является теория групповых (симметрийных) свойств дифференциальных уравнений, основы которого были заложены С.Ли в конце прошлого века. Эта теория успешно применяется для нахождения многопараметрических семейств точных решений и интегралов движения как линейных, так и нелинейных уравнений. Возможность применения теории С.Ли к исследованию многомерных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) имеет особую ценность, так как к настоящему времени не существует эффективных аналитических методов решения таких уравнений.

Под симметрией дифференциальных уравнений будем понимать их инвариантность относительно некоторой группы преобразований. Непрерывные группы преобразований являются математическим выражением свойств окружающего нас мира. Например, инвариантность уравнений относительно группы Пуанкаре есть следствие однородности и изотропности пространства и времени.

Уравнения математической и теоретической физики обладают, как правило, широкой симметрией и именно этим свойством они выделены среди множества других уравнений математики. Так, например, уравнение Ньютона, Кортевега де Фриза, Шредингера инвариантны относительно группы Галилея, уравнения Максвелла, Дирака, волновое уравнение инвариантны относительно группы Пуанкаре.

При исследовании групповых свойств уравнений выделают прямую и обратную задачи группового анализа. Прямая задача заключается в нахождении симметрии заданного уравнения. Описание уравнений, инвариантных относительно определенных групп преобразований будем называть обратной симметрийной задачей. Современное изложение теории групп С.Ли и ее приложение и исследование дифференциальных уравнений дано в монографиях [15,25,42].

Основным элементом группового анализа является понятие однопараметрической непрерывной локальной группы Ли, которое представляет собой обьединение в одном обьекте алгебраической и топологической структур, связанных между собой требованием непрерывности операции группового умножения.

Будем рассматривать локальные преобразования $\mathbf{R}^n$ т.е. преобразования открытых множеств $M \subset \mathbf{R}^n$ в открытые множества; Δ - симметрический интервал относительно нуля в $\mathbf{R}$.

Локальной однопараметрической группой Ли G_1 локальных преобразований $\mathbf{R}^n$ называется такое однопараметрическое семейство локальных преобразований $f: M \times \Delta \to \mathbf{R}^n$, которое обладает следующими свойствами:

1. $f(x,0)=x, \ \forall x \in M.$
2. $f(f(x,a),b)=f(x,a+b), \forall a,b,a+b \in \Delta, x \in M.$
3. Если $a \in \Delta$ и $f(x,a)=x, \forall x \in M$, то $a=0$.
4. $f \in C^\infty(M \times \Delta).$

Для фиксированной $x \in \mathbf{R}^n$ множество $G_1(x)$ всех ее образов $f(x,a)$, $a \in \Delta$ образует локальное многообразие в $\mathbf{R}^n$. Это многообразие называется орбитой точки x . Орбита точки $x \in \mathbf{R}^n$ представляет собой кривую $a \mapsto f(x,a)$ в $\mathbf{R}^n$, проходящую через x . Касательный вектор к этой кривой в точке x имеет вид

$$\xi(x)=\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\bigg|_{a=0} . \qquad (0.1)$$

Формула (0.I) определяет касательные векторное поле $\xi: R^n \to R^n$ группы G_1 . Векторное поле (0.I) записывается также в виде линейного дифференциального оператора первого порядка

$$X=\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (0.2)$$

и называется инфинитезимальным оператором или кратко оператором однопараметрической группы G_1 . Теорема Ли устанавливает соответствие между группой G_1 и ее инфинитезимальным оператором (0.2). А именно, орбита $G_1(x)$ точки x является кривой уравнения Ли

$$\frac{df}{da}=\xi(f), \quad f\big|_{a=0}=x .$$

Обратно, для любого заданного векторного поля $\xi: R^n \to R^n$ и любой точки $x \in R^n$ существует, притом единственное, решение уравнения Ли.

Подобно тому как определили однопараметрическую группу, определяется r -параметрическая группа G_r . Если для каждой однопараметрической подгруппы G_r построить соответствующее касательное векторное поле, то эти поля образуют r -мерное векторное пространство L_r . Пространство L_r является алгеброй Ли относительно умножения, для соответствующих инфинитезимальных операторов $X=\xi_1^i\frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y=\xi_2^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, которое определяется
следующей формулой

$$[X,Y]=XY-YX=\left(X(\xi_2^i)-Y(\xi_1^i)\right)\frac{\partial}{\partial x_i} .$$

С помощью теорем о соответствии между группами и алгебрами Ли, доказанных С.Ли, можно свести изучение непрерывных групп, допускаемых уравнениями, к изучению соответствующих алгебр, для нахождения которых существует более эффективные методы.

Пусть отображение $F : R^n \to R^n$ дифференцируемо и m - мерное многообразие M в R^n задано уравнением

$$F(x) = 0, \tag{0.3}$$

тогда уравнение (0.3) инвариантно относительно оператора Q , если имеет соотношение

$$QF(x)\Big|_{F(x)=0} = 0 . \tag{0.4}$$

Уравнение (0.4) обычно называется определяющим уравнением.

Рассмотрим алгоритм Ли нахождения алгебры инвариантности системы дифференциальных уравнений [15,25,42].

Пусть

$$F^\beta(x, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{k}{u}) = 0, \quad \beta = \overline{1,m} \tag{0.5}$$

система m дифференциальных уравнений в частных производных k -го порядка, где

$$x=(x_1,\dots,x_n), \quad u=(u^1,\dots,u^l),$$

$$\underset{k}{u} = \left(\frac{\partial^k u^\alpha}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_s}}\right) \begin{array}{l} \alpha=\overline{1,l} \\ j_s=\overline{1,n} \\ s=\overline{1,k} \end{array} ,$$

F^β - произвольные функции, дифференцируемые по всем своим переменным.

Дифференциальный оператор, соответствующий группе G, относительно которого инвариантна система (0.5), ищем в виде

$$X = \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{0.6}$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

Все такие операторы описываются определяющими уравнениями

$$\overset{k}{X} F^\beta(x,u,\underset{1}{u},\ldots,\underset{m}{u})\Big|_{\substack{F^1=0\\ \cdots\\ F^m=0}} = 0\,, \quad \beta=\overline{1,m}, \tag{0.7}$$

где $\overset{k}{X}$ - продолжение порядка k оператора X, которое вычисляется следующим образом:

$$\overset{1}{X} = X + \tau_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overset{k+1}{X} = \overset{k}{X} + \tau^\alpha_{ii_1\ldots i_s}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{ii_1\ldots i_s}}\,,$$

$$\tau_i^\alpha = \underset{k-1}{D}_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha \underset{k-1}{D}_i(\xi^j)\,, \tag{0.8}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\eta^{\alpha}_{ii_1\dots i_s} = \underset{k-1}{D}_i\left(\eta^{\alpha}_{i_1\dots i_s}\right) - u^{\alpha}_{i_1\dots i_s j}\, D_i(\xi^j),$$

$$\underset{s}{D}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u^{\alpha}_i \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} + u^{\alpha}_{ii_1} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{i_1}} + \dots + u^{\alpha}_{ii_1\dots i_s} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{i_1\dots i_s}} .$$

Формулы продолжения (0.8) показывают, что уравнение (0.7) представляет собой системы линейных однородных дифференциальных уравнений относительно координат ξ, η оператора X. Решая эти уравнения, получаем множество решений определяющего уравнения, которое образует алгебру Ли. Соответствующие этой алгебре локальные группы Ли представляют собой максимальные группы, допускаемые данной системой дифференциальных уравнений (0.3).

Таким образом, с помощью описанного алгоритма можно найти все операторы симметрии в смысле Ли (т.е. дифференциальные операторы первого порядка) как линейных, так и нелинейных дифференциальных уравнений.

Знание группы, допускаемой уравнением или системой, позволяет приводить их к более удобному для решения виду, находить законы сохранения, строить многопараметрические семейства решений по одному известному решению. В работах [41,43] для исследования симметрийных свойств линейных дифференциальных уравнений предложен нелиевский метод. С его помощью удалось обнаружить ранее неизвестную дополнительную инвариантность уравнений Максвелла, Дирака и многих других уравнений квантовой механики, которую нельзя в принципе получить классическим методом Ли. Существенным отличием этого метода от подхода С.Ли является то обстоятельство, что базисные элементы алгебр инвариантности дифференциальных уравнений являются интегро-дифференциальными операторами.

Для исследования симметрийных свойств дифференциальных уравнений используется также метод дифференциальных форм. Еще Бейтман [57] с успехом применил его для нахождения группы инвариантности уравнений Максвелла с токами. Исследования Э.Картана [17] дали возможность применять метод дифференциальных форм для описания законов сохранения дифференциальных уравнений. В работах [7, 21, 59, 67] эти идеи обрели современную дифференциально-геометрическую трактовку и широко используются для исследования дифференциальных уравнений.

Характерной особенностью этого метода является то, что пользуясь техникой дифференциальных форм, можно эффективно описывать точечную симметрию не только дифференциальных уравнений, но и интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) [30,46], для которых классический метод С.Ли непригоден. На несомненную важность изучения ИДУ с теоретико-алгебраической точки зрения особое внимание обращено в работе [44], где предложен способ построения алгебры инвариантности линейных псевдодифференциальных уравнений.

В настоящей диссертации решено несколько задач симметрийного анализа с помощью методов С.Ли и дифференциальных форм.

Изучены симметрийные свойства дифференциальных уравнений и ИДУ, построены законы сохранения и найдены семейства точных решений систем дифференциальных уравнений.

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Первая глава посвящена применению метода дифференциальных форм к нахождению симметрии, законов сохранения для дифференциальных и ИДУ, а также решению обратной задачи теоретико-алгебраического анализа для некоторых ИДУ. В § I изложен метод исследования симметрийных свойств дифференциальных и ИДУ, основанный на технике дифференциальных форм. В § 2 рассматривается касательная симметрия релятивистского уравнения Гамильтона-Якоби и уравнения Монжа-Ампера. В § 3 описан способ определения законов сохранения дифференциальных уравнений и найдены законы сохранения для систем уравнений Даламбера-Эйконала. В § 4 рассматриваются ИДУ инвариантные относительно подгрупп группы Шредингера и конформной группы. В § 5 изучаются симметрийные свойства уравнений типа Хартри, а также находятся их точные решения. В § 6 исследованы групповые свойства псевдодифференциальных уравнений.

Во второй главе исследованы теоретико-алгебраические свойства одномерных и двумерных уравнений Фоккера-Планка и построены точные решения. В § 7 рассмотрены условия, когда уравнение Фоккера-Планка сводится к уравнению теплопроводности. В § 8 изучены симметрийные свойства уравнения Крамерса. В § 9 построены точные решения уравнения Крамерса.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [34 - 38] . Часть из них докладывалась на семинарах кафедры математической физики Киевского государственного университета им.Т.Г.Шевченко, а также на семинарах отдела прикладных исследований Института математики АН УССР.

Выражаю искреннюю благодарность моему научному руководителю члену-корреспонденту АН УССР В.И.Фущичу за постоянное внимание к работе и старшему научному сотруднику Штеленю В.М. за сотрудничество в процессе работы над диссертацией.

ГЛАВА I

СИММЕТРИЙНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Первая глава посвящена применению методов дифференциальных форм к нахождению симметрии, законов сохранения дифференциальных уравнений, симметрии и частных решений интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ), а также описанию ИДУ, инвариантных относительно определенных групп преобразований.

§ I. Метод дифференциальных форм исследования симметрии дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений

В настоящем параграфе, следуя [59] , изложим метод дифференциальных форм и обобщим его на случай ИДУ. Симметрийные свойства ИДУ мало изучены. Для изучения групповых свойств ИДУ классический метод Ли непригоден и поэтому методы дифференциальной геометрии будут очень полезными.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных κ -го порядка

$$F^{\beta}\left(x_1,\dots,x_n,\varphi^1(x),\dots,\varphi^m(x),\frac{\partial^{|\sigma|}\varphi}{\partial x^{\sigma}}\right)=0 \qquad (I.I)$$

относительно вектор функции $\varphi(x)=(\varphi^1(x),\dots,\varphi^m(x))$, $x=(x_1,\dots,x_n)$. Здесь $1\leqslant\beta\leqslant r$, $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ - - мультииндексы, $|\sigma|=\sigma_1+\dots+\sigma_n\leqslant\kappa$. Все функции предполагаются гладкими (класса C^{∞}) в некоторой области M . Опишем систему (I.I) в геометрических терминах - в эквивалентном виде с помощью дифференциальных форм. С этой целью введем набор форм Картана

$$\theta^l = d\varphi^l - p_j^l dx_j,$$
$$\theta_j^l = dp_j^l - p_{js}^l dx_s, \qquad (1.2)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\theta_{j_1\cdots j_k}^l = dp_{j_1\cdots j_{k-1}}^l - p_{j_1\cdots j_{k-1}s}^l dx_s,$$
$$T_{j_1\cdots j_k}^l = d\theta_{j_1\cdots j_k}^l ,$$

всюду по повторяющимся индексам идет суммирование от 1 до n ; $l = \overline{1,m}$; d - внешний дифференциал.

Рассмотрим пространство $J^k(n,m)$, точки которого определяются координатами $(x_1,\dots,x_n,\varphi^1,\dots,\varphi^m,p_j^l,\dots p_{j_1\dots j_k}^l)$. Символ $p_{j_1\cdots j_k}^l$ соответствует производной -й компоненты функции $\varphi(x)$:

$$p_{j_1\cdots j_k}^l \leftrightarrow \frac{\partial\varphi^l}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_k}}.$$

При таком соответствии каждой функции $F^\beta\left(x,\varphi,\dfrac{\partial^{|\sigma|}\varphi}{\partial x^\sigma}\right)$, входящей в систему дифференциальных уравнений (I.I), отвечает функция $F^\beta(x,\varphi,p_{j_1\cdots j_k}^l)$ на пространстве $J^k(n,m)$, а системе (I.I) замкнутое подмногообразие в этом пространстве.

Таким образом, на этом подмногообразии система (I.I) эквивалентна системе дифференциальных форм:

$$\left\{\Omega^\beta = F^\beta(x,\varphi,p_{j_1\cdots j_k}^l)dx_1\wedge dx_2\wedge\dots\wedge dx_n, \theta, T\right\}, \qquad (1.3)$$

где θ и T имеют вид (I.2), а $\wedge$ - знак внешнего произведения.

Условие инвариантности системы (I.3) относительно инфинитезимальных преобразований, порождаемых оператором

$$\mathbf{X}=\xi^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}+\eta^{l}\frac{\partial}{\partial \varphi^{l}}+\tau^{l}_{j}\frac{\partial}{\partial p^{l}_{j}}+\cdots+$$

$$+\tau^{l}_{j_1\cdots j_k}\frac{\partial}{\partial p^{l}_{j_1\cdots j_k}},$$

$$l=\overline{1,m};\ \ j_k=\overline{1,n};\ \ \mu=\overline{1,n},$$

записывается через производную Ли. Производная Ли дифференциальной формы ω по направлению векторного поля $\mathbf{X}$ задается формулой

$$\mathbf{L}_{\mathbf{X}}\omega=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t\omega-\omega}{t},$$

где φ_t - однопараметрическая группа преобразований, порожденная векторным полем $\mathbf{X}$.

Поскольку производная Ли $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}$ не меняет степень формы, то условия инвариантности указанной системы форм можно записать в виде

$$\mathbf{L}_{\mathbf{X}}\Omega=h\Omega+\mathbf{H}\Theta+\mathbf{R}\mathbf{T},$$

$$\mathbf{L}_{\mathbf{X}}\Theta=\tilde{\mathbf{H}}\Theta,\ \mathbf{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}=\lambda\Theta+\text{æ}\mathbf{T}. \tag{I.4}$$

Здесь Θ , $\mathbf{T}$ - вектор формы $\Theta=\left\{\Theta^{l}_{j_1\cdots j_k}\right\},\ \mathbf{T}=\left\{\mathbf{T}^{l}_{j_1\cdots j_k}\right\}$;

$h,\mathbf{H},\mathbf{R},\tilde{\mathbf{H}},\lambda,\text{æ}$ - матрицы - формы соответствующих степеней: $(\mathbf{H}\Theta)_{\alpha}=\mathbf{H}_{\alpha\gamma}\Theta_{\gamma}$, символ γ нумерует компоненты формы.

Из инвариантности форм Картана следует закон преобразования производных, при этом координаты $\eta_j^l, \dots, \eta_{j_1 \dots j_k}^l$ векторного поля $\mathbf{X}$ будут иметь вид (0.8). Зная закон преобразования производных, можно найти симметрию Ω рассматриваемого уравнения.

Проиллюстрируем изложенный выше метод вычисления симметрии на примере четырехмерного уравнения

$$\Box u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = \lambda u^3, \tag{I.5}$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, λ – произвольная постоянная.

Эквивалентная система дифференциальных форм для уравнения (I.5) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\Omega &= (p_{00} - p_{11} - p_{22} - p_{33} - \lambda u^3)\, dx, \\
\theta &= du - p_0 dx_0 - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - p_3 dx_3, \\
\theta_0 &= dp_0 - p_{00} dx_0 - p_{01} dx_1 - p_{02} dx_2 - p_{03} dx_3, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\theta_3 &= dp_3 - p_{30} dx_0 - p_{31} dx_1 - p_{32} dx_2 - p_{33} dx_3, \\
T &= dx_0 \wedge dp_0 + dx_1 \wedge dp_1 + dx_2 \wedge dp_2 + dx_3 \wedge dp_3, \\
T_0 &= dx_0 \wedge dp_{00} + dx_1 \wedge dp_{01} + dx_2 \wedge dp_{02} + dx_3 \wedge dp_{03}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
T_3 &= dx_0 \wedge dp_{30} + dx_1 \wedge dp_{31} + dx_2 \wedge dp_{32} + \\
&\qquad + dx_3 \wedge dp_{33}.
\end{aligned} \tag{I.6}$$

Исследуем инвариантность относительно такого оператора

$$X=\xi^{\mu}(x)\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}+\eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}+ \tag{I.7}$$

$$+\tau^{\mu}(x,u,p_{\mu})\frac{\partial}{\partial p_{\mu}}+\tau^{\mu\nu}(x,u,p_{\mu},p_{\mu\nu})\frac{\partial}{\partial p_{\mu\nu}},\ \mu,\nu=\overline{0,3}.$$

Из инвариантности форм Картана $\{\Theta,\Theta_{\mu},T,T_{\mu}\}$ следует, что

$$\tau^{\mu}=D_{\mu}(\eta)-p_j D_{\mu}(\xi^j),$$

$$\tau^{\mu\nu}=D_{\nu}(\tau^{\mu})-p_{\mu j} D_{\nu}(\xi^j),$$

где

$$D_{\mu}=\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}+p_{\mu}\frac{\partial}{\partial u}+p_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial u_{\nu}},\quad \mu,\nu,j=\overline{0,3}.$$

Из условия инвариантности формы Ω получаем, что уравнение (I.5) инвариантно относительно конформной группы $C(1,3)$.

Интересно заметить, что уравнение (I.5) можно заменить как системой (I.6), так и системой таких дифференциальных форм:

$$\Omega=dp_0dx_1dx_2dx_3-dp_1dx_0dx_3dx_2-$$
$$-dp_2dx_0dx_1dx_3-dp_3dx_0dx_2dx_1-$$
$$-\lambda u^3dx_0dx_1dx_2dx_3,$$

$$\Omega_0=du\,dx_1dx_2dx_3-p_0dx_0dx_1dx_2dx_3,$$

$$\Omega_1=du\,dx_0dx_3dx_2-p_1dx_0dx_1dx_2dx_3,$$

$$\Omega_2=du\,dx_0dx_1dx_3-p_2dx_0dx_1dx_2dx_3,$$

$$\Omega_3 = du\,dx_0\,dx_2\,dx_1 - p_3\,dx_0\,dx_1\,dx_2\,dx_3 ,$$

которая также эквивалентна уравнению (I.5). Здесь $du\,dx_1 \times \times dx_2\,dx_3 = du \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. В системе (I.8) нет переменных $p_{\mu\nu}$. Таким образом, достаточно рассмотреть оператор (I.7) в таком виде

$$X = \xi^{\mu}(x)\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + \tau^{\mu}(x,u,p_{\nu})\frac{\partial}{\partial p_{\mu}} . \qquad (I.9)$$

Вычисления относительно оператора (I.9) также дают конформную группу $C\,(1,3)$.

Рассмотрим теперь интегро-дифференциальное уравнение, заданное отображением $F: J^{k}(n,m) \to R^{m}$

$$F(x,\varphi^{l},\varphi^{l}_{j},\ldots,\varphi^{l}_{j_1\cdots j_k}) = \Phi(x,\ldots,\varphi^{l}_{j_1\cdots j_k}) +$$

$$+\lambda\int\limits_{M}\mathcal{K}(x,y,\varphi^{l}_{j_1\cdots j_k}(y))\,dy ,$$

где λ - произвольная постоянная, функции и производные под интегралом определены в точке $y \in M$.

Представим отображение F посредством форм

$$\int\limits_{M} F\,dx = \int\limits_{M}\Phi\,dx + \lambda\int\limits_{M\times M}\mathcal{K}\,dy\,dx . \qquad (I.8)$$

Поскольку интеграл по многообразию есть интеграл от формы, то задача состоит в том, чтобы найти условие, при выполнении которого сумма форм (I.8) будет инвариантна. В данном случае критерий инвариантности (I.4) для уравнения (I.8) можно представить в следующем виде

$$L_X(\Phi dx + \lambda \mathcal{K} dy dx) = \\ = h(\Phi dx + \lambda \mathcal{K} dy dx) + H\Theta + RT + H'\Theta' + R'T', \tag{I.9}$$

где формы Картана Θ', T' определены в точке y многообразия M. Помимо (I.9) в условие инвариантности необходимо включить, аналогично (I.4), условие инвариантности форм Θ, T, Θ', T'

$$L_X\Theta = H_1\Theta, \quad L_X\Theta' = H_1'\Theta',$$

$$L_X T = \lambda\Theta + \varkappa T, \quad L_X T' = \lambda'\Theta' + \varkappa T'.$$

Поскольку формы $\Phi dx + \lambda \mathcal{K} dy dx$ в (I.9) разных степеней, то преобразуются они независимо

$$L_X \Phi dx = h\Phi dx + H\Theta + RT,$$

$$L_X \mathcal{K} dy dx = h\mathcal{K} dy dx + H'\Theta' + R'T'.$$

Связь между преобразованиями этих форм задается одной и той же формой h, что обеспечивает инвариантность уравнения (I.8).

В последующих параграфах этой главы мы применим описанный выше способ для нахождения симметрии дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

§ 2. Касательная симметрия релятивистского уравнения Гамильтона-Якоби и уравнения Монжа-Ампера

В настоящем параграфе изучим касательные преобразования релятивистского уравнения Гамильтона-Якоби первого порядка и уравнения второго порядка Монжа-Ампера. Покажем, что касательные преобразования можно находить не только классическим методом Ли-Бэклунда, но и с помощью метода дифференциальных форм.

I. Естественное обобщение идеи продолжения точечных преобразований приводит к касательным преобразованиям Ли. Рассмотрим группу G преобразований

$$\begin{aligned} x'^i &= f^i(x, u, u_\nu, a), \\ u'^k &= \varphi^k(x, u, u_\nu, a), \\ u_i'^k &= \varphi_i^k(x, u, u_\nu, a) \end{aligned} \tag{2.1}$$

в пространстве переменных $x = (x^1, \ldots, x^n), u = (u^1, \ldots, u^m)$, $u_\nu = \partial u / \partial x^\nu$. Преобразования (2.I) называют касательными первого порядка, если группа G сохраняет уравнение

$$u'_\nu = \frac{\partial u'(x')}{\partial x'^\nu}, \tag{2.2}$$

выражающее условие касания первого порядка. Для касательных преобразований достаточно рассматривать случай $m = 1$, так как при $m > 1$ касательные преобразования совпадают с продолженными точечными.

Таким образом, интерес представляет случай, когда $m = 1$, с учетом условия (2.2) получаем такое требование на оператор группы G [15].

Оператор группы

$$X = \xi^i(x,u,u_\nu)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x,u,u_\nu)\frac{\partial}{\partial u} + \qquad (2.3)$$

$$+\tau^i(x,u,u_\nu)\frac{\partial}{\partial u^i}$$

является инфинитезимальным оператором группы касательных преобразований тогда и только тогда, когда

$$\xi^i = -\frac{\partial w}{\partial u_i}, \eta = w - u_i\frac{\partial w}{\partial u_i}, \tau^i = \frac{\partial w}{\partial x^i} + u_i\frac{\partial w}{\partial u} \qquad (2.4)$$

с некоторой функцией $w = w(x,u,u_\nu)$.

Явный вид w определяется из условия инвариантности

$$XF\Big|_{F=0} = 0,$$

где $F = 0$ - символическая запись исследуемого уравнения, XF означает действие оператора (2.3) на F.

Конечные касательные преобразования получаются путем интегрирования следующей системы уравнений Ли :

$$\frac{\partial x'^i}{\partial a} = \xi^\nu(x',u',u'_\nu),$$

$$\frac{\partial u'(x')}{\partial a} = \eta(x',u',u'_\nu), \qquad (2.5)$$

$$\frac{\partial u'_i(x')}{\partial a} = \tau^i(x',u',u'_\nu).$$

С помощью классического метода Ли [25] изучена симметрия релятивистского уравнения Гамильтона-Якоби (ГЯ)

$$u_\nu u^\nu \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 1 \qquad (2.6)$$

в классе точечных и касательных преобразований исследованы в работе [52] . В [71] показано, что максимальная группа точечных преобразований инвариантности уравнения (2.6) есть 21 - параметрическая группа конформных преобразований $C(1,4)$ в (1+4)-мерном пространстве Пуанкаре-Минковского с метрикой $\rho = x^\nu x_\nu - u^2$.

Используя метод дифференциальных форм, получим преобразования, найденные в [52] , а также покажем, что помимо этих преобразований уравнение (2.6) допускает преобразования, которые, вообще говоря, не являются ни точечными, ни касательными (их нельзя представить с помощью характеристической функции w) и потому с помощью метода Ли [25] не могут быть получены.

Представим уравнение (2.6) в эквивалентном виде с помощью системы дифференциальных форм. Для этого определим такие переменные: $z_\nu = \partial u / \partial x^\nu$ и рассмотрим в 9-мерном пространстве зависимых и независимых переменных $\{x_\nu, u, z_\nu\}$ такие базисные формы: $\{dx_\nu, du, dz_\nu\}$. Тогда уравнение (2.6) может быть представлено следующей системой дифференциальных форм:

$$\alpha_1 = z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 1,$$

$$\alpha_2 = d\alpha_1 = 2z_0 dz_0 - 2z_1 dz_1 - 2z_2 dz_2 - 2z_3 dz_3,$$

$$\alpha_3 = du - z_0 dx_0 - z_1 dx_1 - z_2 dx_2 - z_3 dx_3 ,$$
$$\alpha_4 = d\alpha_3 = dx_0 dz_0 + dx_1 dz_1 + dx_2 dz_2 + dx_3 dz_3 . \tag{2.7}$$

Здесь $dx_\nu dz_\nu = dx_\nu \wedge dz_\nu$, $\wedge$ - знак внешнего произведения, d - оператор внешнего дифференцирования.

Оператор симметрии X , допускаемый системой (2.7), ищем в виде

$$X = \xi^\mu(x,u,z)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta(x,u,z)\frac{\partial}{\partial u} + \tau^\mu(x,u,z)\frac{\partial}{\partial z_\mu} . \tag{2.8}$$

Обозначим через $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \rangle = \langle \alpha_\nu \rangle$ кольцо, порождаемое формами $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$. Кольцом дифференциальных форм $\langle \alpha_\nu \rangle$ называется множество дифференциальных форм вида

$$\beta = \sum_{i=1}^{4} \gamma_i \wedge \alpha_i , \tag{2.9}$$

где γ_i - дифференциальные формы, подчиненные условию, чтобы степень каждого члена правой части (2.9) была одна и та же. Очевидно, что $d\alpha_i \in \langle \alpha_\nu \rangle$, т.е. система (2.7) образует идеал. Условие инвариантности этого идеала относительно инфинитезимальных преобразований, порождаемых оператором (2.8), записывается через производную Ли.

С учетом того, что производной Ли дифференциальной формы степени k соответствует форма той же степени, условие инвариантности форм $\{\alpha_\nu\}$ относительно векторного поля X состоит в следующем:

$$L_X\alpha_1 \in \langle \alpha_1 \rangle, \tag{2.10}$$

$$L_X\alpha_2 \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle, \tag{2.11}$$

$$L_X\alpha_3 \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle, \tag{2.12}$$

$$L_X\alpha_4 \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \rangle, \tag{2.13}$$

где L_X - произвольная Ли вдоль поля X .

Если условия (2.10) и (2.12) выполнены, то условия (2.11), (2.13) удовлетворяются, поскольку $\alpha_2 = d\alpha_1, \alpha_4 = d\alpha_3$ и $L_X d\gamma = d(L_X\gamma)$ (последнее верно для произвольной формы γ и произвольного векторного поля X). Перепишем условия (2.10) и (2.12) в таком виде:

$$\begin{aligned} L_X\alpha_1 &= h\alpha_1, \\ L_X\alpha_3 &= \theta\alpha_1 + \gamma\alpha_2 + \omega\alpha_3, \end{aligned} \tag{2.14}$$

где $h, \theta, \gamma, \omega$ - некоторые дифференциальные формы соответствующих степеней.

В системе (2.14) можно положить $\theta = 0$ (этим мы исключили из рассмотрения тривиальный случай, когда координаты оператора на решениях уравнения (2.6) тождественно равны нулю). Применяя формулу

$$L_X\alpha = X \lrcorner d\alpha + d(X \lrcorner \alpha),$$

где $\lrcorner$ - знак внутреннего произведения, и приравнивая коэффициенты возле базисных форм к нулю, из (2.14) для ξ^M , η , τ^M получаем систему определяющих уравнений

$$2z_0\tau^0-2z_1\tau^1-2z_2\tau^2-2z_3\tau^3=h(z_0^2-z_1^2-z_2^2-z_3^2-1),$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x_\nu}-z_\mu\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x_\nu}-\tau^\nu=-\omega z_\nu,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial u}-z_\mu\frac{\partial\xi^\mu}{\partial u}=\omega,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial z_0}-z_\mu\frac{\partial\xi^\mu}{\partial z_0}=2z_0\gamma, \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial z_\alpha}-z_\mu\frac{\partial\xi^\mu}{\partial z_\alpha}=-2z_\alpha\gamma;\ \ \alpha=1,2,3;\ \ \nu,\mu=\overline{0,3}.$$

При $\gamma=0$ общее решение системы задается формулами

$$\xi^\mu=-\frac{\partial w}{\partial u_\mu},\ \eta=w-u_\mu\frac{\partial w}{\partial u_\mu},$$

$$\tau^\mu=\frac{\partial w}{\partial x_\mu}+u_\mu\frac{\partial w}{\partial u}, \tag{2.16}$$

где

$$w=w(x_0-u_0u,\,x_\alpha+u_\alpha u,\,u_\nu),$$

и соответствующие операторы (2.3) определяют бесконечномерную алгебру касательной симметрии уравнения (2.6). Если рассмотреть оператор симметрии $\mathbf{X}$ в таком виде:

$$\mathbf{X}=\xi^\mu(x,u)\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}+\tau^\mu(x,u,z)\frac{\partial}{\partial z_\mu},$$

то из системы (2.I5) видно, что группа инвариантности уравнения в классе точечных преобразований является конформная группа $C(1,4)$.

Пусть $\gamma = 0$, тогда, как легко убедиться, одним из решений системы (2.I5) будут функции

$$\xi^0 = -2z_0,\ \xi^1 = 2z_1,\ \xi^2 = 2z_2,\ \xi^3 = 0, \qquad (2.17)$$
$$\eta = -z_3^2,\ \zeta^{\mu} = 0,$$

которые нельзя представить с помощью характеристической функции w . Это очевидно, так как $\xi^3 = 0$, то $\partial w / \partial u_3 = 0$. Отсюда $\partial \eta / \partial u_3 = 0$, а это противоречит тому, что $\eta = -u_3^2$. Это говорит о том, что преобразования, порождаемые оператором (2.3), (2.I7)

$$x_0' = x_0 + \varepsilon(-2u_0) + o(\varepsilon^2),\ x_1' = x_1 + \varepsilon(2u_1) + o(\varepsilon^2),$$
$$x_2' = x_2 + \varepsilon(2u_2) + o(\varepsilon^2),\ x_3' = x_3 + o(\varepsilon^2),$$
$$u' = u + \varepsilon(-u_3^2) + o(\varepsilon^2),\ u_\nu' = u_\nu + o(\varepsilon^2)$$

не входят в класс стандартных касательных преобразований (2.I7). Однако, они весьма близки к ним, поскольку на решениях уравнения (2.6) $-u_3^2 = 1 + u_1^2 + u_2^2 - u_0^2$ и тогда (2.I7) можно переписать в виде

$$\xi^0 = -2z_0,\ \xi^1 = 2z_1,\ \xi^2 = 2z_2,\ \xi^3 = 0, \qquad (2.18)$$
$$\eta = 1 + u_1^2 + u_2^2 - u_0^2,\ \zeta^{\mu} = 0.$$

Координаты ξ^{μ}, η, τ^{μ} (2.18) можно представить с помощью характеристической функции $w = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 + 1$ в виде (2.16).

Рассмотрим дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Вычисления показывают, что группа касательных преобразований уравнений Даламбера, Борна-Инфельда совпадают с продолженной точечной. Изучим симметрию уравнения Монжа-Ампера

$$\det\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \right\| = 0 \qquad (2.19)$$

в классе касательных преобразований. В классе точечных преобразований симметрия этого уравнений изучена в работе [47] . Уравнение инвариантно относительно 35-параметрической алгебры инвариантности $\{IGL(5,R), C(5)\}$, базисные элементы алгебры Ли которой имеют вид

$$P_A = i g^{AB} \frac{\partial}{\partial x_B}, \quad L_{AB} = x_A P_B,$$

$$K_A = x_A D, \; D = i g^{AB} x_A \frac{\partial}{\partial x_B}, \quad A,B = \overline{0,4}, \; x_4 = u,$$

где g^{AB} - метрический тензор в 5-мерном пространстве, $IGL(5,R)$ группа линейных неоднородных преобразований пространства R^5, $C(5)$ - конформная группа в R^5 . Исследование симметрии можно проводить методом дифференциальных форм аналогично как в первом пункте. Избегая громоздкости вычислений, изучим касательную симметрию классическим методом Ли-Бэклунда. Для этого воспользуемся формулами (2.4) и найдем второе продолжение оператора (2.3). Он будет иметь вид

$$\overset{2}{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + \tau^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial u_{\mu\nu}} ,$$

где $\mathbf{X}$ взят из (2.3), а

$$\tau^{\mu\nu} = \mathbf{D}_\mu(\tau^\nu) - u_{\nu k} \mathbf{D}_\mu(\xi^k) .$$

Здесь оператор $\mathbf{D}_\mu$ с учетом зависимости выражения τ^ν от переменных u_μ принимает вид

$$\mathbf{D}_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} + u_\mu \frac{\partial}{\partial u} + u_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial u_\nu} .$$

Критерий инвариантности уравнения (2.9) относительно группы имеет вид

$$\overset{2}{\mathbf{X}}\left(\det \| u_{\mu\nu} \|\right)\Big|_{\det \| u_{\mu\nu} \| = 0} = 0 .$$

Рассмотрим касательные преобразования, когда $w = w(u_\mu)$. Тогда получаем на функцию w такие условия

$$w_{u_\mu u_\nu} = w_{u_i u_j} , \quad \mu, \nu, i, j = \overline{0,3} . \tag{2.20}$$

Решением уравнений (2.20) будет функция

$$w = w\left(\sum_{\mu=0}^{3} u_\mu \right) . \tag{2.2I}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 2.I</u>. Уравнение (2.I9) инвариантно относительно бесконечномерной алгебры касательных преобразований, генерируемых операторами вида (2.3), где функция w имеет вид (2.2I).

§ 3. Симметрийные свойства и законы сохранения некоторых систем дифференциальных уравнений в частных производных

В настоящем параграфе рассматривается вопрос о законах сохранения систем нелинейных дифференциальных уравнений, допускающих непрерывную группу преобразований.

I. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$F^r(x, u, u_\mu, u_{\mu\nu}, \dots) = 0, \tag{3.I}$$

$$r = 1, \dots, k; \quad \mu, \nu = \overline{0, n},$$

где $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $u = (u^1, \dots, u^m)$, $u_\mu = \partial u / \partial x^\mu$. Многоточие в системе (3.I) означает, что в уравнения могут входить производные более высокого порядка.

Говорят, что система дифференциальных уравнений (3.I) имеет закон сохранения, если существует такой $n+1$ -мерный вектор

$$\vec{j} = (j^0, \dots, j^n) \tag{3.2}$$

с компонентами $j^i = j^i(x, u, u_\mu, u_{\mu\nu}, \dots)$, $i = \overline{0, n}$, который на любом решении (3.I) удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 . \tag{3.3}$$

Вектор $\vec{j}$ называют сохраняющимся током, а формулу (3.3) - уравнением непрерывности.

Пусть $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$, $i, k = \overline{0, n}$ - произвольный набор функций, зависящих от x, u, u_μ и т.д. Тогда ток

$$j^i = \sum_k \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial x_k}$$

будет, очевидно, сохраняющимся, независимо от того, является ли $u(x)$ решением (3.I) или нет. Такие токи физически неинтересны и мы их назовем тривиальными. Два сохраняющихся тока $\vec{j}$ и $\vec{j}'$ назовем эквивалентными, если $\vec{j} - \vec{j}'$ тривиальный ток. Если токи эквивалентны, то они определяют одну и ту же "сохраняющуюся величину", или закон сохранения.

В случае произвольных систем дифференциальных уравнений (3.I) не существует общего конструктивного метода отыскания законов сохранения. Поэтому в каждом конкретном случае приходится проводить специальное исследование этого вопроса.

Например, если известны групповые свойства системы и она получается из вариационного принципа, то для построения законов сохранения есть определенный алгоритм, основанный на теореме Нетер.

Однако, существуют системы дифференциальных уравнений, которые нельзя получить из вариационного принципа, например, известное уравнение Лоренца-Дирака и поэтому теорема Нетер неприменима. В настоящем параграфе мы рассмотрим системы дифференциальных уравнений, для которых функция Лагранжа не существует, однако, применяя методы дифференциальной геометрии, удается построить законы сохранения,соответствующие операторам симметрии.

Опишем метод дифференциальных форм, с помощью которого можно находить в явном виде законы сохранения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Для этого необходимо представить системы (3.I) в эквивалентном виде с помощью системы дифференциальных форм n -го порядка. В зависимости от порядка уравнения и количества переменных, получается различное количество N -дифференциальных форм. Предположим, что система задается эквивалентной системой дифференциальных форм α_μ, $\mu = \overline{0,N}$ где N - натуральное число.

Обозначим через $\langle \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N \rangle$ кольцо, порождаемое формами $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$. Кольцом дифференциальных форм $\langle \alpha_N \rangle$ называется множество дифференциальных форм вида $\beta = f^i \alpha_i$, $i = \overline{1,N}$ где f_i - дифференциальные формы нулевой степени, т.е. функции.

Законы сохранения, соответствующие данному уравнению, связаны с существованием точных дифференциальных форм n -го порядка, содержащихся в кольце $\langle \alpha_\mu \rangle$. Если найдем такую форму β, для которой $d\beta = 0$, то тогда будет существовать форма ω, степени $(n-1)$ такая, что $d\beta = \omega$. Законы сохранения будут результатом применения теоремы Стокса:

$$\int_{M^{n-1}} \omega = \int_{M^n} d\omega ,$$

записанной для n -мерного многообразия M^n, где определена форма ω и $(n-1)$ -мерной границы M^{n-1}. Если в качестве M^n выбрать многообразие S^n, которое аннулирует формы α_i, то будем иметь

$$d\tilde{\omega} = \tilde{\beta} = 0 , \tag{3.4}$$

где тильда показывает, что форма рассматривается на многообразии решений. Из (3.4) следует, что

$$\int\limits_{S^{n-1}} \tilde{\omega} = 0 .$$

Таким образом, возле базисных $(n-1)$ -дифференциальных форм $dx_1 dx_2 \dots dx_n$, $dx_0 dx_2 \dots dx_n$, $dx_0 dx_1 \dots dx_{n-1}$ будут сохраняющиеся токи.

В следующих пунктах рассмотрим ряд примеров на отыскание законов сохранения с помощью метода дифференциальных форм.

2. Применим рассмотренный метод для нахождения законов сохранения нелинейного волнового уравнения

$$\Box u + \lambda u^3 = 0 , \tag{3.5}$$

где $u(x)$ - действительная функция от $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\Box \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, λ - действительная произвольная постоянная.

Как известно [14], уравнение (3.5) при любом значении постоянной λ инвариантно относительно 15 -параметрической группы конформных преобразований $C(1,3)$. Инфинитезимальные операторы этой группы имеют следующий вид:

$$P_\mu = p_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \; J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu , \tag{3.6}$$

$$D = x_\nu p^\nu - i u \frac{\partial}{\partial u} ,$$

$$K_\mu = 2 x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu , \quad \mu, \nu = \overline{0,3} .$$

В работе [14] найдены законы сохранения уравнения (3.5) при помощи функции Лагранжа.

Для уравнения (3.5) она имеет вид

$$L = |\nabla u|^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 + \frac{\lambda}{2} u^4 , \qquad (3.7)$$

где $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right)$ - градиент функции. При этом векторы (3.2), удовлетворяющие законам сохранения (3.3), имеют координаты

$$j_\mu = -2(\eta - u_\nu \xi^\nu) u_\mu + \xi^\mu L , \qquad (3.8)$$
$$\mu, \nu = \overline{0,3} ,$$

где L - функция Лагранжа (3.7), ξ^μ, η - координаты инфинитезимальных операторов (3.6). Таким образом, имеется I5 независимых законов сохранения.

Найдем законы сохранения методом дифференциальных форм.

Представим уравнение (3.5) в эквивалентном виде с помощью системы дифференциальных форм. Для этого определим такие переменные $z_\nu = \partial u / \partial x^\nu$ и рассмотрим в 9-мерном пространстве зависимых и независимых переменных $\{x_\nu, u, z_\nu\}$ базисные формы $\{dx_\nu, du, dz_\nu\}$. Тогда уравнение может быть представлено следующей системой дифференциальных форм четвертого порядка:

$$\alpha_0 = d(u x_{123}) - z_0 d(x_{0123}), \alpha_1 = d(u x_{032}) - z_1 d(x_{0123}),$$
$$\alpha_2 = d(u x_{013}) - z_2 d(x_{0123}), \alpha_3 = d(u x_{021}) - z_3 d(x_{0123}),$$
$$\alpha_4 = d(z_0 x_{032}) - d(z_1 x_{123}), \alpha_5 = d(z_2 x_{123}) - d(z_0 x_{013}),$$

$$\alpha_6 = d(z_0 x_{021}) - d(z_3 x_{123}), \alpha_7 = d(z_1 x_{013}) - d(z_2 x_{032}),$$

$$\alpha_8 = d(z_3 x_{032}) - d(z_1 x_{021}), \alpha_9 = d(z_2 x_{021}) - \tag{3.9}$$

$$- d(z_3 x_{013}),$$

$$\alpha_{10} = d(z_0 x_{123}) - d(z_1 x_{032}) - d(z_2 x_{013}) - d(z_3 x_{021}) +$$

$$+ \lambda u^3 d(x_{0123}).$$

Здесь $d(u x_{123}) = du \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, $\wedge$ - знак внешнего произведения, d - оператор внешнего дифференцирования.

Аналогично как и в § 2 обозначим через $\langle \alpha_\nu \rangle$ кольцо дифференциальных форм, которое состоит из форм вида

$$\beta = \sum_{i=1}^{10} f_i \alpha_i \,, \tag{3.10}$$

где $f_i(x, u, z)$ - дифференциальные формы нулевой степени. Сохраняющиеся токи, соответствующие данной системе, связаны с существованием точных форм четвертой степени, содержащихся в кольце $\langle \alpha_\nu \rangle$. Таким образом, необходимо решить систему ДУЧП

$$d\beta = 0 \tag{3.11}$$

относительно f_i .

Решением системы (3.11) с α_i из (3.10) будут такие функции

$$f^\mu = -\lambda u^3 - \eta_{x_\mu} + \eta_u z_\mu \,,$$

$$f^4=-\xi^0 z_1-\xi^1 z_0,\quad f^7=-\xi^1 u_2+\xi^2 u,$$
$$f^5=\xi^2 z_0+\xi^0 z_2,\quad f^8=\xi^1 u_3-\xi^3 u_1,$$
$$f^6=-\xi^0 u_3-\xi^3 u_0,\quad f^9=\xi^1 u_3-\xi^3 u_1,$$
$$f^{10}=\xi^\mu z_\mu+\eta,\quad \mu=\overline{0,3};$$
$$\eta_{x_\mu}=\frac{\partial\eta}{\partial x_\mu},\quad \eta_u=\frac{\partial\eta}{\partial u},$$

где ξ^μ, η - координаты инфинитезимального оператора, соответствующего конформной группе $C(1,3)$.

Подставим найденные f^i, $i=0,10$ и проинтегрируем форму β. Заменяя z_ν на $u_\nu=\partial u/\partial x^\nu$, получаем возле базисных форм

$$dx_{123},\ dx_{032},\ dx_{013},\ dx_{021}$$

сохраняющиеся токи (3.8).

3. Исследуем симметрию и построим сохраняющиеся токи следующей системы переопределенных ДУЧП

$$\begin{cases} \Box u=F(u), \\ u_\mu u^\mu=1, \end{cases} \tag{3.12}$$

где

$$x\in R(1,3),\ u_\mu=\frac{\partial u}{\partial x^\mu},\ \Box\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Эта система возникает при редукции уравнения Дирака [42,69].

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Система (3.12) инвариантна относительно следующих алгебр:

1) $\mathbf{AC}(1,3)$, если $\mathbf{F}(u)=\frac{3}{u}$;

2) $\mathbf{AP}(1,4)$, если $\mathbf{F}(u)=0$;

3) $\mathbf{A\widetilde{P}}(1,3)$, если $\mathbf{F}(u)=\frac{\lambda}{u}$,

где λ - произвольная действительная постоянная.

Доказательство теоремы производится методом дифференциальных форм, изложенным в § I.

Необходимо заметить, что система не получается, подобно уравнениям механики, из вариационного принципа, поскольку для нее не существует функция Лагранжа.

Рассмотрим систему (3.I2) с $\mathbf{F}(u)=0$, т.е.

$$\begin{cases} \Box u = 0, \\ u_\mu u^\mu = 1. \end{cases} \tag{3.I3}$$

Аналогично как и во втором пункте, вводя переменные $z_\nu = \partial u / \partial x_\nu$ и рассматривая в 9-мерном пространстве зависимых и независимых переменных $\{x_\nu, u, z_\nu\}$ такие базисные формы $\{dx_\nu, du, dz_\nu\}$, систему (3.I3) можно представить следующей системой дифференциальных форм четвертого порядка:

$$\alpha_0 = d(ux_{123}) - z_0 d(x_{0123}), \alpha_1 = d(ux_{032}) - z_1 d(x_{0123}),$$

$$\alpha_2 = d(ux_{013}) - z_0 d(x_{0123}), \alpha_3 = d(ux_{021}) - z_3 d(x_{0123}),$$

$$\alpha_4 = d(z_0 x_{032}) - d(z_1 x_{123}), \alpha_5 = d(z_2 x_{123}) - d(z_0 x_{013}),$$

$$\alpha_6 = d(z_0 x_{021}) - d(z_3 x_{123}), \alpha_7 = d(z_1 x_{013}) - d(z_2 x_{032}),$$

$$\alpha_8 = d(z_3 x_{032}) - d(z_1 x_{021}), \alpha_9 = d(z_2 x_{021}) - d(z_3 x_{013}),$$

$$\alpha_{10} = d(z_0 x_{123}) - d(z_1 x_{032}) - d(z_2 x_{013}) - d(z_3 x_{021}),$$

$$\alpha_{11} = z_0 d(u x_{123}) - z_1 d(u x_{032}) - z_2((u x_{013}) -$$

$$- z_3 d(u x_{021}) - d(x_{0123}) .$$

Здесь обозначения такие же, как и во втором пункте. Для нахождения сохраняющихся токов необходимо решить систему ДУЧП (3.II).

Дифференциальная форма β имеет вид

$$\beta = \sum_{i=1}^{11} f_i \alpha_i ,$$

где $f_i(x, u, z)$ - дифференциальные формы нулевой степени.

Например, рассмотрим форму $\beta = u\alpha_{10} + \alpha_{11}$. Нетрудно проверить, что $d\beta = 0$. По форме β строим форму ω такую, что $d\omega = \beta$, заменяя затем z_ν на $u_\nu = \partial u / \partial x^\nu$, получаем в форме ω сохраняющиеся токи вида

$$j_\mu = u u_\mu - \frac{x_\mu}{4}, \quad \mu = \overline{0,3} . \qquad (3.14)$$

Легко проверить, что ток j_μ (3.I4) удовлетворяет уравнению непрерывности на решениях системы (3.I3). Действительно,

$$\partial^\mu j_\mu = u_\mu u^\mu + \Box u - 1 = 0 .$$

Система (3.13) инвариантна относительно 16-параметрической группы $\tilde{\mathbf{P}}(1,4)$, генерируемой операторами вида

$$X=-\frac{\partial w}{\partial u_\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\left(w-u_\mu\frac{\partial w}{\partial u_\mu}\right)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.15}$$

где w может принимать значения

$$w=1,\quad w=x_\mu-u_\mu u,\quad w=u_\mu x_\nu-u_\nu x_\mu, \tag{3.16}$$
$$w=u_\mu,\quad w=u_\mu x^\mu-u,\quad \mu,\nu=0,3.$$

Если вместо f_{11} поочередно брать w (3.16), заменяя при этом u_μ на z_μ, то решая уравнение (3.13), получаем остальные f_i и, соответственно, 16 форм β.

Для каждой формы β находим сохраняющиеся токи, которые можно записать в виде

$$j_\mu=u_\mu\int\limits_0^u w(v)dv-\frac{1}{4}wx_\mu+\frac{1}{4}\frac{\partial w}{\partial x^\mu}\sum_{\nu\neq\mu}u^\nu x_\nu-$$
$$-\frac{1}{4}u_\mu\sum_{\nu\neq\mu}\frac{\partial w}{\partial u^\mu}x^\nu+\frac{\partial^2 w}{\partial u^\mu\partial u}\cdot\frac{u^2}{2}+$$
$$+\frac{\partial^2 w}{\partial u^\mu\partial x^\mu}\left(-\frac{ux^\mu}{4}-u^\mu\frac{x_\nu x^\nu}{4}\right).$$

Аналогичным образом находятся сохраняющиеся токи для системы (3.12) с $F(u)={}^3\!/_u$. В этом случае система (3.12) инвариантна относительно 15-параметрической группы $AC(1,3)$ генерируемой операторами вида (3.15), где w может принимать значения

$$w = u_\mu, \quad w = u_\mu x_\nu - u_\nu x_\mu, \quad w = u_\mu x^\mu - u,$$

$$w = -u_\mu x_\nu x^\nu + 2x_\mu u_\nu x^\nu - 2u x_\mu, \quad \mu,\nu = \overline{0,3}.$$

Тогда соответствующие сохраняющиеся токи будут иметь вид

$$j_\mu = u_\mu \int_0^u w(v)dv - w x_\mu + \frac{\partial w}{\partial u^\mu}\left(x_\nu u^\nu - u\right) +$$

$$+ \sum_{\nu \neq \mu} \frac{\partial^2 w}{\partial u^\mu \partial x^\nu} u x^\nu - \frac{\partial^2 w}{\partial u^\mu \partial x^\mu}\left(4u x^\mu - \right.$$

$$\left. - \frac{7}{2} u^\mu u^2\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial x^\mu} u^3, \quad \mu,\nu = \overline{0,3}.$$

§ 4. Инвариантность интегро-дифференциальных уравнений относительно подгрупп конформной группы и группы Шредингера

В настоящем параграфе описаны интегро-дифференциальные уравнения (ИДУ), инвариантные относительно групп Галилея, Шредингера, Пуанкаре и конформной группы. Для этой цели используется метод дифференциальных форм [59], изложенный в § I.

I. Рассмотрим уравнение

$$\Box\varphi+\lambda_1 F(\varphi)+\lambda_2\int\limits_{R^4}\mathcal{K}(x,y,\varphi(x),\varphi(y))\,dy=0, \tag{4.I}$$

где

$$x=(x_0,x_1,x_2,x_3),\quad y=(y_0,y_1,y_2,y_3),$$

$$dy=dy_0\,dy_1\,dy_2\,dy_3,\quad \varphi=\varphi(x),$$

$\Box=-p_\mu p^\mu$ - оператор Даламбера, $p_\mu=ig_{\mu\nu}\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}$, $\mu=\overline{0,3}$, $g_{\mu\nu}$ - метрический тензор с сигнатурой $(1,-1,-1,-1)$; F, $\mathcal{K}$ - функции класса C^1 по всем своим переменным, λ_1, λ_2 - произвольные постоянные. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Уравнение типа (4.I) могут описывать самодействующее поле в среде с памятью и нелокальные взаимодействия.

Выясним, при каких функциях F и $\mathcal{K}$ уравнение (4.I) инвариантно относительно алгебр $AP(1,3)$, $A\tilde{P}(1,3)$, $AC(1,3)\supset A\tilde{P}(1,3)\supset AP(1,3)$. Симметрия относительно указанных алгебр сильно ограничивает выбор функций F и $\mathcal{K}$ и уравнений с перечисленными свойствами оказывается не слишком много.

Ответ на поставленный вопрос сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 4.I. Уравнение (4.I) инвариантно относительно

I) алгебры $AP(1,3)$, если

$$\mathcal{K}=\mathcal{K}(\rho,\varphi(x),\varphi(y)), \quad F=F(\varphi);$$

2) алгебры $A\tilde{P}(1,3)=P(1,3)+D$, если

$$\mathcal{K}=\rho^{-6}\mathcal{P}(\varphi(x)\rho^{-\beta},\varphi(y)\rho^{-\beta}), \quad F=\varphi^{s}, \quad s=\frac{\beta-2}{\beta},$$

$$\beta\neq 0;$$

$$D=D_1=x_\mu p^\mu+y_\mu\tilde{p}^\mu+i\beta(\varphi(x)\partial_{\varphi(x)}+\varphi(y)\partial_{\varphi(y)}),$$

или

$$\mathcal{K}=\rho^{-6}\mathcal{P}(\rho^{-\beta}\exp\{\varphi(x)\},\rho^{-\beta}\exp\{\varphi(y)\}),$$

$$F=\exp\{\gamma\varphi\}, \quad \gamma=-2/\alpha, \quad \alpha\neq 0,$$

$$D=D_2=x_\mu p^\mu+y_\mu\tilde{p}^\mu+i\alpha(\partial_{\varphi(x)}+\partial_{\varphi(y)});$$

3) алгебры $AC(1,3)$, если

$$\mathcal{K}=\rho^{-6}\varphi(y)\mathcal{F}(\rho(\varphi(x)\varphi(y))^{1/2}), \quad F=\varphi^{3},$$

где $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$ - произвольные дифференцируемые функции,

$$\rho^2=z_\mu z^\mu=z_0^2-z_1^2-z_2^2-z_3^2, \quad z_\mu=x_\mu-y_\mu,$$

$$\tilde{p}_\mu=ig_{\mu\nu}\partial/\partial y^\nu,$$

$+\!\!\!\supset$ - символ полупрямой суммы алгебр Ли; α, β - произвольные действительные числа.

Доказательство. Симметрию уравнения (4.I) находим методом дифференциальных форм, изложенным в § I. Таким образом, изучение групповых свойств уравнения (4.I) сводится к исследованию следующих дифференциальных форм:

$$\Omega = \left(db_0 dx_1 dx_2 dx_3 + db_1 dx_0 dx_2 dx_3 - db_2 dx_0 dx_1 dx_3 + db_3 dx_0 dx_1 dx_2\right) + \lambda \mathcal{K} dy \wedge dx,$$

$$\Omega_1(x) = d\varphi(x) - b_\mu dx_\mu, \quad \Omega_1(y) = d\varphi(y) - \bar{b}_\mu dy_\mu, \tag{4.2}$$

$$\Omega_2(x) = d\Omega_1(x), \quad \Omega_2(y) = d\Omega_1(y).$$

Здесь $db_0 dx_1 dx_2 dx_3 = db_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, $\wedge$ - знак внешнего произведения.

Условие инвариантности форм $\left\{\Omega, \Omega_1(x), \Omega_1(y), \Omega_2(x), \Omega_2(y)\right\}$ состоит в следующем:

$$L_{X_A}\Omega_1(x) = \overset{A}{h_1}\Omega_1(x), \quad L_{X_A}\Omega_1(y) = \overset{A}{\bar{h}_1}\Omega_1(y),$$

$$L_{X_A}\Omega_2(x) = \overset{A}{h_2}\Omega_2(x) + \Omega_1(x)\wedge\overset{A}{\omega}, \tag{4.3}$$

$$L_{X_A}\Omega_2(y) = \bar{h}_2\Omega_2(y) + \Omega_1(y)\wedge\overset{A}{\bar{\omega}},$$

$$L_{X_A}\Omega = h_A\Omega + \Omega_1(x)\wedge\overset{A}{\omega_1} + \Omega_1(y)\wedge\overset{A}{\bar{\omega}_1} + \Omega_2(x)\wedge\overset{A}{\omega_2} + \Omega_2(y)\wedge\overset{A}{\omega_2}.$$

Здесь L_{X_A} - производная Ли вдоль поля

$$X = \overset{\mu}{\xi}_A\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \overset{\mu}{\bar{\xi}}_A\frac{\partial}{\partial y_\mu} + \eta_A\frac{\partial}{\partial\varphi(x)} + \bar{\eta}_A\frac{\partial}{\partial\varphi(y)} + \overset{\mu}{\eta}_A\frac{\partial}{\partial b_\mu} + \overset{\mu}{\bar{\eta}}_A\frac{\partial}{\partial\bar{b}_\mu};$$

$h_A, h_1^A, \bar{h}_1^A, h_2^A, \bar{h}_2^A, \omega^A, \bar{\omega}^A, \omega_1^A, \bar{\omega}_1^A, \omega_2^A, \bar{\omega}_2^A$ — неизвестные пока дифференциальные формы соответствующих степеней, индекс A указывает алгебру, к которой принадлежит оператор X .

Рассмотрим форму Ω , представляющую уравнение (4.I) и запишем ее в виде

$$\Omega = \Omega_0 + \lambda_2 \mathcal{K} dy \wedge dx,$$

где Ω_0 форма, стоящая в скобках в выражении (4.3). Инвариантность формы Ω_0 записывается так:

$$L_{X_A}\Omega_0 = h_A \Omega_0 + \Theta_1^A \wedge \Omega_1(x) + \Theta_2^A \wedge \Omega_2(x).$$

Условие инвариантности Ω_0 есть условие инвариантности выражения $\Box\varphi + \lambda_1 F(\varphi)$ и для него получается известный результат [14] , при этом h такова

$$h_{P(1,3)} = 0,\ h_{\tilde{P}(1,3)} = 1,\ h_{C(1,3)} = 2\alpha_\mu x^\mu.$$

Здесь $\tilde{P}(1,3) = \{P(1,3), D\}$, где

$$D = x_\mu p^\mu - i\varphi(x)\frac{\partial}{\partial\varphi(x)},\ \alpha_\mu \in R^1.$$

Из условий инвариантности форм $\{\Omega, \Omega_1(x), \Omega_1(y), \Omega_2(x), \Omega_2(y)\}$ (4.3) получаем, что функция $\mathcal{K}$ удовлетворяет уравнению

$$\xi_A^\mu + \mathcal{K}_{x_\mu} + \bar{\xi}_A^\mu \mathcal{K}_{y_\mu} + \eta(x,\varphi(x))\mathcal{K}_{\varphi(x)} + \tag{4.4}$$

$$+ \bar{\eta}(y,\varphi(y))\mathcal{K}_{\varphi(y)} + (4\partial_{y_\mu}(\xi_A^\mu) +$$

$$+3\partial_{x_\mu}\left(\xi_A^\mu\right)\Big)\mathcal{K}=h_A\mathcal{K},$$

где

$$\mathcal{K}_{x_\mu}=\partial_{x_\mu}\mathcal{K},\quad \mathcal{K}_{y_\mu}=\partial_{y_\mu}\mathcal{K},$$

$$\mathcal{K}_{\varphi(x)}=\partial_{\varphi(x)}\mathcal{K},\ \mathcal{K}_{\varphi(y)}=\partial_{\varphi(y)}\mathcal{K}.$$

Рассмотрим преобразование трансляции вдоль μ -ой оси. Этим преобразованием соответствует поле $X_{P_\mu}=\partial_{x_\mu}+\partial_{y_\mu}$. Таким образом, уравнение (4.4) будет иметь вид

$$\mathcal{K}_{x_\mu}+\mathcal{K}_{y_\mu}=0.$$

Следовательно, из требования инвариантности относительно переносов получаем $\mathcal{K}=\mathcal{K}(z,\varphi(x),\varphi(y))$. Выпишем теперь условия, которым должна удовлетворять функция для того, чтобы уравнение (4.I) было инвариантно относительно алгебр $AP(1,3)$, $A\tilde{P}(1,3)$ (алгебру $A\tilde{P}(1,3)$ будем рассматривать с оператором D_1 и $\beta=-1$). Имеем соответственно:

$$C_{\mu\nu}z_\nu\mathcal{K}_{z_\mu}=0,\ C_{0k}=C_{k0},\ C_{ab}=-C_{ba},\ z_\mu=x_\mu-y_\mu \tag{4.5}$$
$$k=\overline{0,3};\quad a,b=1,2,3;$$

$$\left(dz_\mu+C_{\mu\nu}z_\nu\right)\mathcal{K}_{z_\mu}-d\Big(\varphi(x)\mathcal{K}_{\varphi(x)}+ \tag{4.6}$$
$$+\varphi(y)\mathcal{K}_{\varphi(y)}\Big)+(-7d)\mathcal{K}=0.$$

Общее решение определяющих уравнений (4.5) для группы $P(1,3)$ известно: $\mathcal{K}=\mathcal{K}(\rho,\varphi(x),\varphi(y))$. Подставив это выражение в уравнение (4.6), получаем, что для $\tilde{P}(1,3)$ функция $\mathcal{K}$ будет иметь вид:

$$\mathcal{K}=\rho^{-7}\mathcal{P}(\rho\varphi(x),\rho\varphi(y)) \tag{4.7}$$

или $$\mathcal{K}=\rho^{-6}\varphi(y)\mathcal{P}(\rho\varphi(x),\rho\varphi(y)).$$

Найдем выражение для функции $\mathcal{K}$, при котором уравнение (4.I) инвариантно относительно конформной группы $C(1,3)$. Подставив (4.7) в (4.4), находим, что $\mathcal{P}$ будет удовлетворять уравнению

$$\begin{gathered}\alpha_\mu(y^\mu-x^\mu)\mathcal{P}+\alpha_\mu(y^\mu+x^\mu)\rho\mathcal{P}_\rho-\\ -2\alpha_\mu x^\mu\varphi(x)\mathcal{P}_{\varphi(x)}-2\alpha_\mu y^\mu\varphi(y)\mathcal{P}_{\varphi(y)}=0.\end{gathered} \tag{4.8}$$

Решая (4.8), получаем такой вид $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}=\rho^{-6}\varphi(y)\mathcal{F}\left(\rho(\varphi(x)\varphi(y))^{1/2}\right).$$

Отметим некоторые следствия доказанной теоремы.

Следствие 4.I. Уравнения

$$\Box\varphi+\lambda_1(\varphi(x))^{\kappa}\int\limits_{R^4}\rho^{2\kappa-6}(\varphi(y))^{\kappa+1}dy=0,$$

$$\Box\varphi+\lambda_2\exp\{\varphi(x)\}\int\limits_{R^4}\rho^{-6}\varphi(y)\exp\{\rho^2\varphi(y)\}dy=0$$

инвариантны относительно конформной группы $C(1,3)$,где λ_1 , λ_2, κ - произвольные постоянные.

В работе [46] изучены групповые свойства интегро-дифференциального уравнения вида

$$\Box\varphi+\lambda\int\limits_{R^4}\mathcal{K}(x,y,\varphi(y))dy=0 \qquad (4.9)$$

найдены явные выражения для $\mathcal{K}(x,y,\varphi(y))$, при которых уравнение (4.9) инвариантно относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$, расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$ и конформной группы $C(1,3)$.

Отметим, что результаты для конформной группы $C(1,3)$ [46] получаем из теоремы 4.I при $\mathcal{F}=const$.

2. Установим аналогичный результат для уравнения с дифференциальным оператором Шредингера

$$\check{S}\psi+\lambda_1F(\psi\psi^*)+\lambda_2\int\limits_{R^4}\mathcal{K}(x,y,\psi(x),\psi^*(x),\psi(y),\psi^*(y))dy=0, \qquad (4.10)$$

где $\check{S}=p_0-\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$, символ $*$ означает комплексное сопряжение; λ_1,λ_2,m - произвольные постоянные, остальные обозначения такие же, как и в первом пункте.

Опишем уравнения вида (4.10), инвариантные относительно группы Галилея $G(1,3)$, расширенной группы Галилея $\tilde{G}(1,3)$ и группы Шредингера $Sch(1,3)$.

Справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 4.2</u>. Уравнение (4.9) инвариантно относительно следующих алгебр:

I) алгебры $AG(1,3)$, если

$$\mathcal{K}=\exp\left\{\frac{im\vec{z}^{\,2}}{2z_0}\right\}\psi(y)\mathcal{K}(\psi(y)\psi^*(y), \psi(x)\psi^*(x), \qquad (4.11)$$

$$Z_0, \frac{\psi(x)}{\psi(y)} \exp\left\{-\frac{im\vec{Z}^2}{2Z_0}\right\}\Big), \quad F = F_1(\psi^*\psi)\psi,$$

где $\vec{Z}^2 = (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2$;

2) алгебры $A\tilde{G}(1,3) = \{G(1,3), D\}$, если

$$\mathcal{K} = \exp\left\{\frac{im\vec{Z}^2}{2Z_0}\right\}\psi(y)Z_0^{-7/2}\mathcal{K}_2\Big(\psi(x)\psi^*(x)Z_0^{3/2},$$

$$\psi(y)\psi^*(y)Z_0^{3/2}, \frac{\psi(x)}{\psi(y)} \exp\left\{-\frac{im\vec{Z}^2}{2Z_0}\right\}, F = (\psi^*\psi)^{2/3}\psi, \tag{4.12}$$

$$D = 2x_0p_0 - x_a p_a + 2y_0 p_0 - y_a\tilde{p}_a - \frac{3}{2}i\big(\psi(x)\partial_{\psi(x)} + \psi(y)\partial_{\psi(y)}\big);$$

3) алгебры $ASch(1,3)$, если

$$\mathcal{K} = \exp\left\{\frac{im\vec{Z}^2}{2Z_0}\right\}\psi(y)Z_0^{-7/2}\mathcal{K}_3\Big(\psi(x)\psi^*(x)\times$$

$$\times\psi(y)\psi^*(y)Z_0^3, \frac{\psi(x)\psi^*(y)}{\psi(y)\psi^*(x)} \exp\left\{-\frac{im\vec{Z}^2}{Z_0}\right\}, F = (\psi^*\psi)^{2/3}\psi, \tag{4.13}$$

где $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$, F_1 - произвольные дифференцируемые функции.

Доказательство. Поступая точно так же, как и при доказательстве теоремы 4.I, получаем определяющие уравнения на функцию $\mathcal{K}$:

$$\eta_A(x,\psi(x))\mathcal{K}_{\psi(x)} + \eta_A^*(x,\psi^*(x))\mathcal{K}_{\psi^*(x)} +$$

$$+ \eta_A(y,\psi(y))\mathcal{K}_{\psi(y)} + \eta_A^*(y,\psi^*(y))\mathcal{K}_{\psi^*(y)} +$$

$$+ \xi_A^\mu \mathcal{K}_{x_\mu} + \bar{\xi}_A^\mu \mathcal{K}_{y_\mu} + 5\big(\partial_{x_\mu}(\xi_A^\mu) + \partial_{y_\mu}(\bar{\xi}_A^\mu)\big) =$$

$$= h_A\mathcal{K},$$

причем

$$h_{AG(1,3)} = img_\alpha x_\alpha,\ h_{A\tilde{G}(1,3)} = \frac{3}{2},\ h_{ASch(1,3)} = \frac{1}{2}\left(imx_\alpha^2 + 3x_0\right).$$

Условия на функцию $\mathcal{K}$, при которых уравнение (4.10) инвариантно относительно $AG(1,3)$, $A\tilde{G}(1,3)$ и $ASch(1,3)$ таковы:

$$AG(1,3):\ im\left(x_\alpha\psi(x)\mathcal{K}_{\psi(x)} - x_\alpha\psi^*(x)\mathcal{K}_{\psi^*(x)} + \right.$$

$$\left. + y_\alpha\psi(y)\mathcal{K}_{\psi(y)} - y_\alpha\psi^*(y)\mathcal{K}_{\psi^*(y)}\right) +$$

$$+ z_0\mathcal{K}_{z_\alpha} - ix_\alpha\mathcal{K} = 0,$$

$$A\tilde{G}(1,3):\ 2z_0\mathcal{K}_{z_0} + z_\alpha\mathcal{K}_{z_\alpha} - \frac{3}{2}\left(\psi(x)\mathcal{K}_{\psi(x)} + \right.$$

$$\left. + \psi^*(x)\mathcal{K}_{\psi^*(x)} + \psi(y)\mathcal{K}_{\psi(y)} + \psi^*(y)\mathcal{K}_{\psi^*(y)}\right. + \frac{17}{2}\mathcal{K} = 0,$$

$$ASch(1,3):\ x_0^2\mathcal{K}_{x_0} + y_0^2\mathcal{K}_{y_0} + x_0x_\alpha\mathcal{K}_{x_\alpha} +$$

$$+ y_0y_\alpha\mathcal{K}_{y_\alpha} + \left(\frac{i\vec{x}^2}{2} - \frac{3}{2}x_0\right)\psi(x)\mathcal{K}_{\psi(x)} - \left(\frac{i\vec{x}^2}{2} + \frac{3}{2}x_0\right)\times$$

$$\times\psi^*(x)\mathcal{K}_{\psi^*(x)} + \left(\frac{i\vec{y}^2}{2} - \frac{3}{2}y_0\right)\psi(y)\mathcal{K}_{\psi(y)} - \left(\frac{i\vec{y}^2}{2} + \frac{3}{2}y_0\right)\times$$

$$\times\psi^*(y)\mathcal{K}_{\psi^*(y)} + \left(\frac{7}{2}x_0 - \frac{i\vec{x}^2}{2} - 5y_0\right)\mathcal{K} = 0.$$

Решая эти уравнения, получим, соответственно, формулы (4.11)-(4.13). Теорема доказана.

Приведем еще несколько теорем, доказываемых точно так же, как и теоремы 4.1, 4.2.

<u>Теорема 4.3</u>. Максимальной алгеброй инвариантности (в смысле С.Ли) уравнения

$$\Box\varphi+\lambda_1\varphi^3+\lambda_2\int\limits_{R^4}\rho^{-6}\varphi(y)\mathcal{K}\left(\rho(\varphi(x)\varphi(y))^{1/2}\right)dy=0$$

является алгебра $\mathbf{AC}(1,3)$.

Теорема 4.4. Максимальной алгеброй инвариантности (в смысле С.Ли уравнения)

$$\check{S}\psi+\lambda_1(\psi\psi^*)^{2/3}\psi+\lambda_2\int\limits_{R^4}\exp\left\{\frac{im\vec{z}^{\,2}}{2z_0}\right\}\psi(y)\times$$

$$\times\mathcal{K}\left(\psi(x)\psi^*(x)\psi(y)\psi^*(y)z_0^3,\ \frac{\psi(x)\psi^*(y)}{\psi(y)\psi^*(x)}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{\frac{im\vec{z}^{\,2}}{z_0}\right\}\right)$$

является алгебра $\mathbf{ASch}(1,3)$.

§ 5. Групповые свойства и решения интегро-дифференциальных уравнений типа Хартри

В настоящем параграфе исследуются симметрийные свойства интегро-дифференциальных уравнений типа Хартри с дифференциальным оператором Шредингера. Эти уравнения используются в современной теоретической физике.

I. Рассмотрим уравнение

$$\check{S}\psi+\lambda\psi(t,x)\int\limits_{R^3}\frac{\psi(t,y)\psi^*(t,y)}{|x-y|}dy=0, \qquad (5.I)$$

где

$$x=(x_1,x_2,x_3),\quad y=(y_1,y_2,y_3),$$

$$|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2},$$

$$dy=dy_1dy_2dy_3,\quad \check{S}=p_0-\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m},\ p_0=i\frac{\partial}{\partial t},$$

$$p_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a},\quad \vec{p}^{\,2}=\sum_{j=1}^{n}p_j^2,$$

m - вещественный параметр, характеризующий массу частицы; ψ^* - функция, комплексно сопряженная к ψ, λ - произвольная постоянная.

Изучим симметрийные свойства уравнения (5.I) в классе дифференциальных операторов первого порядка методом, изложенным в § I. Представим уравнение (5.I) в эквивалентном виде с помощью системы дифференциальных форм. Для этого введем переменные:

$$\mathscr{b}_\nu=\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\nu},\ \mathscr{b}^*_\nu=\frac{\partial\varphi^*(x)}{\partial x^\nu},\ \tilde{\mathscr{b}}_\nu=\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y^\nu},$$
$$\tilde{\mathscr{b}}^*_\nu=\frac{\partial\varphi^*(y)}{\partial y^\nu},\ \tilde{\varphi}=\varphi(y),\ \tilde{\varphi}^*=\varphi^*(y)$$

и рассмотрим такие базисные формы:

$$dt,\, dx_\alpha,\, dy_\alpha,\, d\varphi,\, d\varphi^*,\, d\tilde{\varphi},\, d\tilde{\varphi}^*,\, d\mathscr{b}_\nu,\, d\mathscr{b}^*_\nu,\, d\tilde{\mathscr{b}}_\nu,\, d\tilde{\mathscr{b}}^*_\nu.$$

Тогда уравнение (5.I) может быть представлено следующей системой дифференциальных форм

$$\begin{aligned}
\Omega &= i\,d\varphi dx_1 dx_2 dx_3+\frac{1}{2m}\big(d\mathscr{b}_1 dt dx_3 dx_2+\\
&+d\mathscr{b}_2 dt dx_1 dx_3+d\mathscr{b}_3 dt dx_2 dx_1\big)+\lambda\frac{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}^*\varphi}{|x-y|}dy dx,\\
\Omega_1(x)&=d\varphi-\mathscr{b}_0 dt-\mathscr{b}_\alpha dx_\alpha,\ \Omega_1(y)=d\varphi-\tilde{\mathscr{b}}_0 dt-\tilde{\mathscr{b}}_\alpha dy_\alpha,\\
\Omega_2(x)&=d\varphi^*-\mathscr{b}^*_0 dt-\mathscr{b}^*_\alpha dx_\alpha,\ \Omega_2(y)=d\varphi-\tilde{\mathscr{b}}^*_0 dt-\\
&\qquad -\tilde{\mathscr{b}}^*_\alpha dy,\qquad (5.2)\\
\Omega_3(x)&=d\Omega_1(x),\quad \Omega_3(y)=d\Omega_1(y),\\
\Omega_4(x)&=d\Omega_2(x),\quad \Omega_4(y)=d\Omega_2(y).
\end{aligned}$$

Здесь $d\varphi dx_1 dx_2 dx_3=d\varphi\wedge dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$, $\wedge$ - знак внешнего произведения, $dx=dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$. Условие инвариантности форм $\{\Omega,\ \Omega_\alpha(x),\ \Omega_\alpha(y),\ \alpha=1,2,3,4\}$ состоит в следующем (I.4):

$$L_X \Omega_r(x) = h_r^j \Omega_j(x),$$
$$L_X \Omega_r(y) = \tilde{h}_r^j \Omega_j(x),$$

$$L_X \Omega_q(x) = \Theta_j \wedge \Omega_j(x),$$
$$L_X \Omega_q(y) = \tilde{\Theta}_j \wedge \Omega_j(y), \tag{5.3}$$

$$L_X \Omega = h\Omega + \Omega_j(x) \wedge \omega_j + \Omega_j(y) \wedge \tilde{\omega}_j,$$
$$r = 1,2; \ q = 3,4; \ j = \overline{1,4} \ .$$

Здесь L_X - производная Ли вдоль поля

$$X = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \tilde{\xi} \frac{\partial}{\partial y_\mu} + \eta \frac{\partial}{\partial \varphi} + \eta^* \frac{\partial}{\partial \varphi^*} + \tilde{\eta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} +$$
$$+ \tilde{\eta}^* \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}^*} + \eta^\mu \frac{\partial}{\partial b_\mu} + \tilde{\eta}^\mu \frac{\partial}{\partial \tilde{b}_\mu} + \eta^{*\mu} \frac{\partial}{\partial b_\mu^*} + \tilde{\eta}^{*\mu} \frac{\partial}{\partial \tilde{b}_\mu^*} \ ;$$

$h, h_r^1, h_r^2, \tilde{h}_r^1, \tilde{h}_r^2, \Theta_j, \tilde{\Theta}_j, \omega_j, \tilde{\omega}_j$, $r = 1,2$, $j = \overline{1,4}$ - неизвестные пока дифференциальные формы соответствующих степеней.

Из условия инвариантности форм (5.3) получаем, что уравнение (5.I) инвариантно относительно II-мерной расширенной алгебры Галилея $A\tilde{G}(1,3)$, базисными элементами которой являются такие операторы:

$$P_0 = p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \ P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \tag{5.4}$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \ G_a = t p_a - m x_a, \ D = 2t p_0 - x_a p_a + 2i,$$

где P_0 - оператор временных трансляций, P_a - оператор пространственных смещений, J_{ab} - оператор вращений трехмерного пространства, G_a - оператор галилеевских преобразований, D - операторв масштабных преобразований.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.I. Максимальной группой симметрии в смысле С.Ли уравнения (5.I) является расширенная группа Галилея

$$\tilde{G}(1,3) = \{G(1,3), D\} .$$

Из теоремы (5.I) следует, что уравнение (5.I) неинвариантно относительно алгебры Шредингера $ASch(1,3) = \{AG(1,3), D, \Pi\}$, где

$$D = 2t_0 p_0 - x_a p_a + \frac{3}{2} i ,$$
$$\Pi = tD - t^2 p_0 + m\vec{x}^2/2 . \qquad (5.5)$$

Таким образом, возникает естественно вопрос: как обобщить ядро, чтобы уравнение (5.I) было инвариантно относительно группы Шредингера $Sch(1,3)$.

Рассмотрим уравнение

$$\check{S}\psi + \lambda\psi(t,x) \int\limits_{R^3} \frac{(\psi(t,y)\psi^*(t,y))^\beta}{|x-y|^\gamma} dy = 0 , \qquad (5.6)$$

где β, γ - произвольные действительные числа и установим при каких β и γ уравнение (5.6) будет инвариантно относительно группы Шредингера.

Следующая теорема дает решение поставленной задачи.

Теорема 5.2. Уравнение (5.6) инвариантно относительно группы Шредингера $Sch(1,3)$ тогда и только тогда, когда $\gamma = -3\beta + 5$.

Доказательство проводится методом дифференциальных форм, аналогично как и теорема 5.I.

В виде следствия из теоремы 5.2 получаем, что уравнения

$$\check{S}\psi + \lambda\psi(t,x)\int\limits_{R^3}\frac{\psi(t,y)\psi^*(t,y)}{|x-y|^2}dy = 0,$$

$$\check{S}\psi + \lambda\psi(t,x)\int\limits_{R^3}\frac{(\psi(t,y)\psi^*(t,y))^{2/3}}{|x-y|^3}dy = 0$$

инвариантны относительно группы Шредингера.

Убедиться в справедливости теоремы 5.2 можно непосредственно проверкой, используя явный вид конечных преобразований группы $Sch(1,3)$ генерируемых операторами P_0, P_a, J_{ab}, G_a из (5.4) и D, Π из (5.5). Выпишем эти преобразования:

$$\begin{cases} x'_\mu = x_\mu + b_\mu, \\ \psi'(x') = \psi(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{x}\cos\theta - \dfrac{\vec{\theta}(\vec{\theta}\cdot\vec{x})}{\theta^2}(\cos\theta - 1) + \dfrac{\vec{\theta}\times\vec{x}}{\theta}\sin\theta, \\ x'_0 = x_0, \quad \psi'(x') = \psi(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}x_0, \\ x'_0 = x_0, \quad \psi'(x') = \exp\left(im(\vec{v}\vec{x}) - i\dfrac{\vec{v}^2}{2}x_0\right)\psi(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0' = e^{2s} x_0, \\ \vec{x}' = e^{s} \vec{x}, \ \psi'(x') = e^{-3/2\, s} \psi(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0' = x_0/\omega, \ \omega = 1 - \alpha x_0 \\ \vec{x}' = \vec{x}/\omega, \ \psi'(x') = \omega^{3/2} \exp\left\{ \dfrac{im\vec{x}^2}{2} \cdot \dfrac{\alpha}{\omega} \right\} \psi(x). \end{cases}$$

Здесь $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, b_μ, α, s - параметры. Указанные соотношения следует дополнить такими же преобразованиями для переменной y .

Можно рассмотреть более общий случай: уравнение (5.I) с произвольным ядром

$$\check{S}\psi + \lambda \psi(t,x) \int_{R^3} \mathcal{K}\big(x, y, \psi(x), \psi^*(x), \psi^*(y)\psi(y)\big)\, dy = 0 . \tag{5.8}$$

В этом случае справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 5.3</u>. Уравнение (5.8) инвариантно относительно следующих алгебр

I) алгебры $AG(1,3)$, если

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}\left(r, \psi(x)\psi^*(x), \psi(y)\psi^*(y)\right),$$

где $r = |x - y|$;

2) алгебры $A\tilde{G}(1,3) = \{AG(1,3), D\}$, если

$$\mathcal{K} = r^{-5} \Phi\left(\frac{\psi(x)\psi^*(x)}{\psi(y)\psi^*(y)}, \frac{(\psi(x)\psi^*(x))^{1/2\alpha}}{r} \right),$$

где $D=2tp_0-x_a p_a-i\alpha$, а Φ - произвольная дифференцируемая функция;

3) алгебры $ASch(1,3)$, если

$$\mathcal{K}=r^{-5}\Phi\left(\frac{\psi(x)\psi^*(x)}{\psi(y)\psi^*(y)}, r(\psi(x)\psi^*(x))^{1/3}\right).$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 4.2.

Замечание. Уравнение (5.6) можно обобщить на случай $n+1$ - независимых переменных

$$\check{S}\psi+\lambda\psi(t,x)\int\limits_{R^n}\frac{(\psi(t,y)\psi^*(t,y))^{\beta}}{|x-y|^{\gamma}}dy=0, \qquad (5.7)$$

где $x=(x_1,\dots,x_n), y=(y_1,\dots,y_n)$. Уравнение (5.7) инвариантно относительно группы $Sch(1,3)$ тогда и только тогда, когда $\gamma=-3\beta+n+2$.

2. В этом пункте будет проведена редукция уравнения (5.I).

Решения уравнения (5.I), следуя [45] , ищем в виде

$$\psi(t,x)=Ce^{-itE}f(\omega), \qquad (5.8)$$

где f - некоторая неизвестная функция от новой переменной, которая выбирается из инвариантов группы симметрии уравнения (5.4); E , C - произвольные постоянные.

Воспользуемся инвариантностью уравнения (5.I) относительно операторов J_{12} , J_{13} , J_{23} и найдем ω из условия [45]

$$\begin{cases} J_{12}\omega = 0, \\ J_{13}\omega = 0, \\ J_{23}\omega = 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Общим решением первого уравнения системы (5.9) будет функция

$$\Phi(x_1^2 + x_2^2, x_3). \tag{5.I0}$$

Подставим (5.I0) в два других уравнения (5.9), получаем решение системы (5.9) в виде функции $\Phi(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. Выберем инвариантную переменную в виде

$$\omega = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{5.II}$$

В интегральном члене уравнения (5.I) произведем замену переменных - перейдем к сферическим координатам:

$$y_1 = r\cos\theta\sin\varphi,$$
$$y_2 = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$y_3 = r\cos\varphi,$$
$$0 \leqslant r \leqslant \infty, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Тогда

$$\int_{R^3} \frac{\psi(t,y)\psi^*(t,y)}{|x-y|} dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{\psi\psi^* r^2 \sin\varphi\, dr}{(r^2 - 2r(x_1\cos\theta\sin\varphi + x_2\sin\theta\sin\varphi + x_3\cos\varphi) + x_\alpha^2)^{1/2}} . \tag{5.12}$$

Используя тождество [27] и (5.8)

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(a\cos\theta\sin\varphi + b\sin\theta\sin\varphi + c\cos\varphi) \times \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi = 2\pi \int_{-1}^{1} F\left(s\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right) ds ,$$

перепишем (5.12) в виде

$$2\pi \int_0^{\infty}\int_{-1}^{1} \frac{\psi\psi^* r^2\, ds\, dr}{(r^2 + x_\alpha^2 - 2r\sqrt{x_\alpha^2}\, s)^{1/2}} .$$

Интегрируя по s , находим

$$\int_{R^3} \frac{\psi\psi^*\, dy}{|x-y|} = 4\pi c^2 \left(\int_0^{\sqrt{x_\alpha^2}} \frac{\psi\psi^* r^2\, dr}{\sqrt{x_\alpha^2}} + \int_{\sqrt{x_\alpha^2}}^{\infty} f^2 r\, dr \right) .$$

Подставляя (5.8) в уравнение (5.I) и сокращая на e^{-iEt},
получаем для функции f ИДУ

$$Ef+\frac{1}{2m}\left[f_{\omega\omega}+\frac{2}{\omega}f_{\omega}\right]+4\lambda\pi c^2 f\left(\frac{1}{\sqrt{x_\alpha^2}}\times\right.$$

$$\left.\int_0^{\sqrt{x_\alpha^2}} f^2 r^2 dr+\int_{\sqrt{x_\alpha^2}}^{\infty} f^2 r dr\right)=0,$$

где $f_\omega=\dfrac{df}{d\omega}$.

Таким образом, нами проведена редукция трехмерного ИДУ (5.I) к одномерному ИДУ.

§ 6. О симметрии систем линейных интегро-дифференциальных уравнений с дополнительными нелинейными условиями

В настоящем параграфе рассматриваются симметрийные свойства некоторых псевдодифференциальных уравнений с дополнительными нелинейными условиями.

Приведем основные определения и теоремы, относящиеся к псевдодифференциальным уравнениям.

Рассмотрим ИДУ вида

$$(A\varphi)(x)=\int e^{ip(x-y)}A(x,p,y,\varphi(y))\,dy\,đp=0, \quad (6.1)$$

где $x,y,p\in R^n$, $dy=dy_1\ldots dy_n$, $đp=(2\pi)^{-n}dp$, $\varphi\in C^\infty(R^n)$. Функция $A\in C^\infty$ по аргументам x, y, p аналитична по φ, причем $A(x,y,p,0)=0$ и допускает оценку

$$\left|D_p^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma A(x,y,p,\varphi)\right|\leqslant C_{\alpha,\beta,\gamma,K}\langle p\rangle^{l+\delta|\beta+\gamma|-\rho|\alpha|},$$

$$\langle p\rangle=(1+|p|^2)$$

для произвольного компакта K; $x,y\in K$ и любых мультииндексов α, β, γ; l, ρ, δ - вещественные числа $0\leqslant\delta\leqslant 1$, $0\leqslant\rho\leqslant 1$. Уравнение (6.1), где функция A удовлетворяет указанным выше условиям, будем называть псевдодифференциальным.

Пусть диффеоморфизм $(x,\varphi)\to(x',\varphi'(x'))$ задан потоком поля

$$X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x_i}+\eta^k\frac{\partial}{\partial\varphi^k},$$

$$\frac{dx'^i}{da} = \xi^i(x', \varphi'(x')), \quad x'_i \Big|_{a=0} = x_i, \; i = \overline{1,n};$$
$$\frac{d\varphi'^\kappa}{da} = \eta^\kappa(x', \varphi'(x')), \quad \varphi'^\kappa \Big|_{a=0} = \varphi^\kappa, \; \kappa = \overline{1,m}. \tag{6.2}$$

Предполагается, что ξ^i, η^κ, называемые координатами оператора $\mathbf{X}$, являются аналитическими функциями переменных x, φ; по повторяющимся индексам идет суммирование по всей области их определения.

Для определения тех диффеоморфизмов (6.2), которые оставляют уравнение инвариантным, мы будем пользоваться инфинитезимальными преобразованиями. Эти преобразования задаются непосредственно координатами ξ^i, η^κ оператора $\mathbf{X}$.

С помощью производной Ли $\mathbf{L_X}$ вдоль векторного поля $\mathbf{X}$ условие инвариантности уравнения, заданного оператором $(\mathbf{A}\varphi)(x)$ записывается следующим образом

$$\mathbf{L_X}(\mathbf{A}\varphi) = h(\mathbf{A}\varphi). \tag{6.3}$$

Пусть $\mathbf{A}(x, p, \varphi)$ - аналитическая функция своих аргументов. Будем считать p оператором дифференцирования

$$p = \{p_\mu\}, \quad p_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu},$$

$g_{\mu\nu}$ - метрический тензор пространства, на котором определена функция $\varphi(x)$; в дальнейшем он предполагается постоянным с сигнатурой (**1**, -**1**, -**1**, ..., -**1**).

Выражение $\mathbf{A}(x, p, \varphi)$, по определению, означает следующее

$$A(x,p,\varphi)=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{p^{\alpha_I}(\varphi^{\alpha_{II}}(x))}{\alpha!}, \tag{6.4}$$

$\varphi\in C^{\infty}(R^n)$, $\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!$, α_I и α_{II} - дополнительные друг к другу мультииндексы, такие, что $\alpha_I+\alpha_{II}=\alpha$.

Производная Ли L_X функции $A(x,p,\varphi)$ (6.4) вдоль векторного поля X (6.2) равна [30].

$$L_X(A(x,p,\varphi))=\xi^{\mu}\partial_{\mu}(A)+\exp(pD_p)(\eta\cdot A_{\varphi})+ \\ +i(\exp(pD_p)-1)(\mathfrak{R}A). \tag{6.5}$$

Здесь приняты обозначения

$$\exp(pD_p)(A\cdot B)=\sum_{|n|=0}^{\infty}\frac{p^n(A)D_p^n(B)}{n!}, \tag{6.6}$$

p^{α} - оператор дифференцирования по x α-го порядка, оператор $\mathfrak{R}$ в терминах псевдодифференциальных операторов записывается следующим образом

$$\mathfrak{R}A=\xi^{\nu}g_{\nu\mu}\int e^{ip(x-y)}p_{\nu}A(x,p,\varphi(y))\,dy\,dp. \tag{6.7}$$

Рассмотрим детальнее вопрос о лиевской симметрии псевдодифференциальных уравнений. Мы исследуем такие уравнения, которые разрешимы относительно производных функции φ, т.е. уравнение $A(x,p,\varphi)=0$ можно записать в виде $p^{\alpha}\varphi=f(x,p,\varphi)$. Условие инвариантности (6.5) можно переписать в виде

$$L_X\left(A(x,p,\varphi)\right)\Big|_F = 0\,, \tag{6.8}$$

где F - множество решений уравнения.

Переходя на множество решений (заменяя $p^{\alpha}\varphi$ на $f(x,p,\varphi)$ в условии инвариантности (6.8) и приравнивая члены при производных, получаем систему уравнений для ξ, η. Общее решение этой системы определяет максимальную алгебру инвариантности уравнения $A(x,p,\varphi)=0$ в классе дифференциальных операторов первого порядка.

Если уравнение $A(x,p,\varphi)$ линейно [30], т.е. $A(x,p,\varphi)=\alpha(x,p)\varphi$, а символ $\alpha(x,p)$ не вырождается в полином, то координаты ξ, η удовлетворяют таким условиям

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial \varphi}=0\,,\quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial \varphi^2}=0\,. \tag{6.9}$$

Решая (6.9), получаем

$$\xi^i=\xi^i(x),\quad \eta=\kappa(x)\varphi+const\,.$$

Перейдем к изучению симметрийных свойств конкретных псевдодифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему, встречающуюся в релятивистской квантовой теории

$$\begin{cases} p_0\psi(x)=E\psi(x)\,,\\ \bar{\psi}\gamma_\mu p^\mu\psi=\lambda(\bar{\psi}\psi)\,. \end{cases} \tag{6.10}$$

Здесь $\psi = \text{столбец}\left(\psi^1(x), \psi^2(x), \psi^3(x), \psi^4(x)\right)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\mu = \overline{0,3}$, γ_μ - матрицы Дирака $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$, $\bar\psi$ - дираковски сопряженный спинор $\bar\psi = \psi^+\gamma_0$, $E = \sqrt{p_a^2 + m^2}$, $p_a^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, λ - произвольная постоянная.

Методом дифференциальных форм, изложенным во введении, изучим симметрию второго уравнения (6.I0)

$$\bar\psi\gamma_\mu p^\mu\psi = \lambda(\bar\psi\psi). \tag{6.II}$$

В силу (6.9) оператор симметрии ищем в виде

$$X = \xi^\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \sigma_\nu^\mu(x)\psi_\mu\frac{\partial}{\partial\psi_\nu}, \quad \mu = \overline{0,3}. \tag{6.I2}$$

Записывая уравнение (6.II) в виде системы дифференциальных форм и применяя критерий инвариантности (I.9), получаем, что уравнение (6.II) инвариантно относительно алгебры $AP(1,3)$. Базисные операторы алгебры $AP(1,3)$ имеют вид

$$P_0 = p_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \tag{6.I3}$$

$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \frac{i}{2}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu\right).$$

Исследуем симметрию первого уравнения системы (6.I0)

$$p_0\psi(x) = E\psi(x). \tag{6.I4}$$

Пусть оператор симметрии имеет вид (6.I2). В силу формулы (6.5) с точностью до членов, содержащих производные по p_i

выше второго порядка и переходя на многообразие решений уравнения (6.I4) приходим к условию инвариантности для псевдодифференциальных уравнений из (6.I4)

$$i\left(\partial_0 \sigma_\nu^\mu + \partial_k(\sigma_\nu^\mu)\frac{p_k}{p_0}\right)\psi_\mu - \xi_0^0(p\psi_\nu) + (\xi_i^0 - \xi_0^i)p_i\psi_\nu +$$
$$+\xi_i^k\left(\frac{p_k p_i}{p}\psi_\nu\right) + \frac{\partial_i\partial_k}{2}(\sigma_\nu^\mu)\left[\frac{\delta_{ik}}{p} - \frac{p_i p_k}{p^3}\right]\psi_\mu + \tag{6.I5}$$
$$+\frac{i}{2}\left[\xi_{kj}^0\left(\delta_{kj} - \frac{p_k p_j}{p^2}\right) - \xi_{ij}^k p_k\left(\frac{\delta_{ij}}{p} - \frac{p_i p_j}{p^3}\right)\right]\psi_\nu = 0,$$

где $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$, $\delta_{\mu\nu}$ означает символ Кронекера.

Приравнивая члены при независимых псевдодифференциальных выражениях типа $p_i/E\psi_\mu$, $p_i p_k \psi_\mu/E^3$ и т.д., получаем, что

$$\xi_i^0 = \xi_0^i,\ \xi_k^i + \xi_i^k = 0,\ \xi_0^0 = \xi_1^1 = \xi_2^2 = \xi_3^3 = 0, \tag{6.I6}$$
$$\partial_k(\sigma_\nu^\mu) = 0 .$$

Решение уравнений (6.I6) хорошо известно: оно определяет алгебру $AP(1,3)$ с базисными элементами

$$p_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0},\ p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a},\ J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \sigma_\nu^\mu \psi_\mu . \tag{6.I7}$$

Таким образом, из (6.I6) и (6.I7) вытекает следующее утверждение

Теорема 6.I. Система уравнений (6.I0), в классе операторов первого порядка, инвариантна относительно алгебры $AP(1,3)$, образованной операторами (6.I3).

Перейдем к рассмотрению следующей системы ПДУ с дополнительным нелинейным условием

$$\begin{cases} p_0\psi(x) = E\psi(x), \\ \dfrac{dj^m}{dx_\mu} = 0, \quad j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \, . \end{cases} \tag{6.18}$$

Поступая аналогично, рассматривая симметрию каждого уравнения в отдельности, а потом взяв пересечение операторов, получаем теорему.

Теорема 6.2. Система уравнений (6.13), в классе операторов первого порядка инвариантна относительно алгебры $\mathbf{A} = \{AP(1,3) \oplus Q\}$, образованной операторами (6.13) и

$$Q = (-\gamma_2\gamma_4\psi^*)^k \frac{\partial}{\partial\psi^k} + (-\gamma_2\gamma_4\psi)^k \frac{\partial}{\partial\psi^{*k}} ,$$

$$\gamma_4 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \, .$$

ГЛАВА П

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА

Во второй главе методом Ли исследованы теоретико-алгебраические свойства одномерных и двумерных уравнений Фоккера-Планка и построены их точные решения.

§ 7. О связи одномерных уравнений Фоккера-Планка и уравнения теплопроводности

В настоящем параграфе изучена симметрия некоторых одномерных уравнений Фоккера-Планка (ФП). Получены условия на коэффициенты уравнения ФП, при которых оно сводится к уравнению теплопроводности, а для некоторых уравнений найдены в явном виде замены переменных, с помощью которых уравнение ФП приводится к уравнению теплопроводности.

Возникновение названия уравнения ФП связано с работами Фоккера [68] и Планка [64] : Фоккер исследовал броуновское движение в поле излучения, а Планк на этой основе попытался построить полную теорию флуктуаций. Математики чаще называют это уравнение уравнением Колмогорова, который дал ему строгое теоретическое обоснование [51] .

Уравнение ФП является основным уравнением в теории непрерывных марковских процессов. В одномерном случае оно имеет вид (см., например, [9])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[A(t,x)u\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[B(t,x)u\right], \qquad (7.1)$$

где $u = u(t,x)$ - плотность переходной функции, описывающей непрерывный марковский процесс; $A(t,x)$, $B(t,x)$ - некоторые гладкие функции, которые называются соответственно коэффициентами переноса и диффузии процесса.

Особый интерес представляют такие случаи уравнения (7.I): процесс диффузии в поле силы тяжести

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(gu)+\frac{1}{2}D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{7.2}$$

$$A(t,x)=-g,\quad B(t,x)=D;$$

процесс Орнштейна-Уленбека

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(\kappa x u)+\frac{1}{2}D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{7.3}$$

$$A(t,x)=-\kappa x,\quad B(t,x)=D;$$

процесс рэлеевского типа

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\gamma x-\frac{\mu}{x}\right)u\right]+\frac{1}{2}\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{7.4}$$

$$A(t,x)=-\gamma x+\frac{\mu}{x},\quad B(t,x)=\mu;$$

процессы в популяционной генетике [60]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(x-c)^2u\right]+\beta\frac{\partial}{\partial x}\left[(x-c)u\right], \tag{7.5}$$

$$A(t,x)=-\beta(x-c),\quad B(t,x)=\alpha(x-c)^2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(1-x^2)^2u\right], \tag{7.6}$$

$$A(t,x)=0,\quad B(t,x)=2(1-x^2)^2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x^2(1-x^2)^2 u\right],$$

$$A(t,x)=0,\ B(t,x)=\alpha x^2(1-x^2)^2; \tag{7.7}$$

процесс Рэлея

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\gamma x-\frac{\mu}{x}\right)u\right]+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{7.8}$$

$$A(t,x)=-\gamma x+\frac{\mu}{x},\ B(t,x)=2\mu,$$

где D , q , κ , γ , μ , α , β , c - произвольные постоянные.

С помощью метода Ли, изложенного во введении, исследуем симметрию уравнений (7.2)-(7.7).

Алгоритм вычисления группы, допускаемой уравнениями (7.2)-(7.7), применим к уравнению ФП общего вида (7.I), а затем на определенном этапе перейдем к конкретным уравнениям.

Пусть оператор, определяющий допускаемую группу преобразований, имеет вид

$$X=\xi^0(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t}+\xi^1(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

а

$$\overset{2}{X}=X+\zeta^0\frac{\partial}{\partial u_t}+\zeta^1\frac{\partial}{\partial u_x}+\zeta^{00}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}+\zeta^{01}\frac{\partial}{\partial u_{tx}}+\zeta^{11}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}$$

-его второе продолжение. Так как в уравнение (7.I) входят производные вида u_t , u_x и u_{xx} , то достаточно иметь выражения для ζ^0 , ζ^1 и ζ^{11} .

Формулы продолжения (0.8) дают

$$\zeta^0 = \eta_t + u_t\eta_u - u_t\xi^0_t - u_t^2\xi^0_u - u_x\xi^1_t - u_t u_x\xi^1_u,$$

$$\zeta^1 = \eta_x + u_x\eta_u - u_t\xi^0_x - u_t u_x\xi^0_u - u_x\xi^1_x - u_x^2\xi^1_u, \tag{7.9}$$

$$\zeta^{11} = \eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + u_{xx}\eta_u + u_x^2\eta_{uu} - 2u_{tx}\xi^0_x -$$
$$- u_t\xi^0_{xx} - 2u_t u_x\xi^0_{xu} - (u_t u_{xx} + 2u_x u_{tx})\xi^0_u -$$
$$- u_t u_x^2\xi^0_x - 2u_{xx}\xi^1_x - u_x\xi^1_{xx} - 2u_x^2\xi^1_{xu} -$$
$$- 3u_x u_{xx}\xi^1_u - u_x^3\xi^1_{uu}.$$

Определяющее уравнение в данном случае имеет вид

$$\zeta^0 + \xi^0(A_t - B_{tx})u_x + \xi^1(A_x - B_{xx})u_x +$$
$$+ (A - B_x)\zeta^1 + \xi^0(A_{tx} - \tfrac{1}{2}B_{txx})u + \tag{7.10}$$
$$+ \xi^1(A_{xx} - \tfrac{1}{2}B_{xxx})u + (A_x - \tfrac{1}{2}B_{xx})\eta - \tfrac{1}{2}\xi^1 B_x u_{xx} -$$
$$- \tfrac{1}{2}\xi^0 B_t u_{xx} - \tfrac{1}{2}B\zeta^{11}\Big|_{u_t = -\frac{1}{2}Bu_{xx} + (A - B_x)u_x + (A_x - \frac{1}{2}B_{xx})u} = 0.$$

Подставим выражение (7.9) в (7.10) и перейдем на многообразие решений подстановкой в (7.10) вместо u_t и u_{tx} выражений из (7.1). Так как функции ξ^0, ξ^1, η зависят только от t, x, u, то в результате расщепления по переменным u_x, u_{xx}, u_{xxx} получаем следующие уравнения:

$$\xi^0_x = 0,\ \xi^0_u = 0,\ \xi^1_u = 0,\ \eta_{uu} = 0,$$

$$2B\xi^1_x - \xi^1 B_x - B\xi^0_t - B_t\xi^0 = 0,$$

$$\begin{aligned} &-\xi^1_t B - B^2\eta_{ux} + \frac{1}{2}B^2\xi^1_{xx} + B(A_t - B_{tx})\xi^0 + \\ &+ (A_x - B_{xx})\xi^1 B + \xi^1(A - B_x)B_x + \xi^1_x(A - B_x) - \\ &\qquad - B_t\xi^0(A - B_x) = 0, \end{aligned} \tag{7.II}$$

$$\begin{aligned} &\eta_t B + B(A - B_x)\eta_x - \frac{1}{2}B^2\eta_{xx} + \left(A_{tx} - \frac{1}{2}B_{txx}\right)u\xi^0 B - \\ &-\left(A_{xx} - \frac{1}{2}B_{xxx}\right)u\xi^1 B + 2\left(A_x - \frac{1}{2}B_{xx}\right)u\xi^1_x B - \\ &-\left(A_x - \frac{1}{2}B_{xx}\right)u\xi^1 B_x - \left(A_x - \frac{1}{2}B_{xx}\right)uB_t\xi^0 = 0. \end{aligned}$$

Дальнейшие вычисления продемонстрируем на примере уравнения Орнштейна-Уленбека (7.3), где $A(t,x) = -\kappa x,\ B(t,x) = D$.

Подставляя эти коэффициенты A и B в (7.II) и после несложных вычислений находим

$$\xi^0 = C_2\left(-\frac{1}{\kappa}\right)e^{-2\kappa t} + C_4\left(\frac{1}{2\kappa}\right)e^{2\kappa t} + C_0,$$

$$\xi^1 = C_1 e^{-\kappa t} + C_2 e^{-2\kappa t}x + C_3 e^{\kappa t} + \frac{1}{2}C_5 x e^{2\kappa t},$$

$$\eta = \left(-C_2 e^{-2\kappa t} - \frac{2}{D}C_3 e^{2\kappa t}\kappa x - C_4\frac{\kappa x^2}{D}e^{2\kappa t} + C_5\right)u.$$

Отсюда следует, что максимальная алгебра инвариантности уравнения (7.3) шестимерна, а ее базисные элементы имеют вид :

$$
\begin{aligned}
&X_0=\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_1=e^{-\kappa t}\frac{\partial}{\partial x}, \\
&X_2=e^{-2\kappa t}\left(-\frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}-u\frac{\partial}{\partial u}\right), \\
&X_3=e^{\kappa t}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{2\kappa}{D}xu\frac{\partial}{\partial u}\right), \quad X_5=u\frac{\partial}{\partial u}, \\
&X_4=e^{2\kappa t}\left(\frac{1}{2\kappa}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\kappa x^2}{D}u\frac{\partial}{\partial u}\right).
\end{aligned}
\tag{7.12}
$$

Таблица коммутаторов (7.12) имеет вид

	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_0	0	$-\kappa X_1$	$-2\kappa X_2$	κX_3	$2\kappa X_4$	0
X_1	κX_1	0	0	$-\frac{2\kappa}{D}X_5$	X_3	0
X_2	$2\kappa X_2$	0	0	$-X_6-X_5$	$-\frac{1}{\kappa}X_0$	0
X_3	$-\kappa X_3$	$\frac{2\kappa}{D}X_5$	X_6+X_5	0	0	0
X_4	$-2\kappa X_4$	$-X_3$	$\frac{1}{\kappa}X_0$	0	0	0
X_5	0	0	0	0	0	0

Аналогично, подставляя в (7.11) выражения $A(t,x)$ и $B(t,x)$ из (7.2), (7.4)-(7.7), находим, что максимальная алгебра инвариантности уравнений (7.2)-(7.7) также шестимерна. Однако, подчеркнем, что в целом базисные элементы этих алгебр различные.

Поскольку уравнение ФП диффузионного типа, представляет интерес сравнить симметрию уравнений (7.2)-(7.7) с уравнением теплопроводности

$$w_\tau = w_{yy}\,. \tag{7.13}$$

Симметрия уравнения (7.13) исследовалась еще С.Ли (см.,например, [25]). Ли установил, что максимальной алгеброй инвариантности уравнения (7.13) является шестимерная алгебра с базисными элементами

$$X_0 \equiv \frac{\partial}{\partial \tau}\,,\quad X_1 \equiv \frac{\partial}{\partial y}\,,\quad X_2 = 2\tau\frac{\partial}{\partial \tau} + y\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

$$X_3 = 2\tau\frac{\partial}{\partial y} - yw\frac{\partial}{\partial w},\quad X_5 = w\frac{\partial}{\partial w}\,, \tag{7.14}$$

$$X_4 = \tau^2\frac{\partial}{\partial \tau} + y\tau\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{4}(y^2 + 2\tau)\,w\frac{\partial}{\partial w}\,.$$

В связи с этим возникает вопрос: не существует ли преобразования между уравнениями (7.2)-(7.7) и уравнением (7.13). Положительный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема I. Уравнения (7.2)-(7.7) при помощи замены

$$u(t,x) = f(t,x)\,w\big(\tau(t,x), y(t,x)\big)\,, \tag{7.15}$$

где функция f и новые переменные τ, y соответственно равны

$$f = \exp\left\{-\frac{g}{D}x - \frac{g^2}{2D}t\right\},\ y = x,\ \tau = \frac{D}{2}t\,; \tag{7.16}$$

$$f = \exp\{\kappa t\},\ y = \exp\{\kappa t\}x,\qquad \tau = \frac{D}{4\kappa}\exp\{2\kappa t\}\,; \tag{7.17}$$

$$f=\exp\{2\gamma t\}x, \quad y=\exp\{\gamma t\}x, \tag{7.18}$$

$$\tau=\frac{\mu}{4\gamma}\exp\{2\gamma t\};$$

$$f=\exp\left\{-\left(\frac{\beta^2}{2\alpha}+\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{8}\right)t\right\}(x-c)^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{\beta}{\alpha}\right)}, \tag{7.19}$$

$$y=\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\ln(x-c),\ \tau=t;$$

$$f=\exp\{-t\}(1-x^2)^{-3/2},\ y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\tau=t; \tag{7.20}$$

$$f=\exp\left\{-\frac{\alpha}{8}t\right\}x^{-3/2}(1-x)^{-3/2},\ y=\ln\frac{x}{1-x},\ \tau=\frac{\alpha}{2}t \tag{7.21}$$

сводятся к уравнению теплопроводности (7.13).

Доказательство проводится непосредственной проверкой. Продемонстрируем его на примере уравнения (7.3) и преобразования (7.17). Находим из (7.17) и (7.15)

$$u_t=\kappa e^{t}w+e^{3\kappa t}w_\tau\frac{D}{2}+e^{2\kappa t}x\kappa w_y,$$
$$u_x=e^{2\kappa t}w_y,\quad u_{xx}=e^{3\kappa t}w_{yy}.$$

Подставим эти выражения в (7.3), получаем

$$\kappa e^{\kappa t}w+e^{3\kappa t}\frac{D}{2}w_\tau+e^{2\kappa t}\kappa x w_y-$$
$$-\kappa x e^{2\kappa t}w_y-\kappa e^{\kappa t}w-\frac{1}{2}De^{3\kappa t}w_{yy}=0.$$

Сокращая подобные члены, приходим к уравнению (7.13).

Замечание. В работах [66, 72] рассматривается уравнение ФП вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left[(a(t)x+b(t)u\right]+c(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (7.22)$$

где $a(t), b(t)$, $c(t)$ - произвольные функции t .

С помощью довольно сложных алгебраических методов для уравнения (7.22) в [66, 72] найден класс решений. Результат [66, 72] можно легко получить, используя фундаментальное решение уравнения теплопроводности и тот факт, что уравнение (7.22) сводится к уравнению (7.13) при помощи замены (7.15), где

$$f=\exp\{\alpha(t)\},\ y=\exp\{\alpha(t)\}x+\beta(t),\ \tau=\gamma(t),$$

$$\alpha(t)=-\int_0^t a(s)ds,\ \beta(t)=-\int_0^t b(s)\exp\{\alpha(s)\}ds, \qquad (7.23)$$

$$\gamma(t)=\int_0^t c(s)\exp\{2\alpha(s)\}ds.$$

В теореме 7.1 приведены замены лишь для некоторых уравнений ФП. Естественно возникает желание решить более общую задачу, а именно, указать наиболее общее условие на коэффициентные функции, при которых уравнение ФП (7.1) сводится к уравнению теплопроводности.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7.2. Пусть $B(t,x)=B(t)$. Для того, чтобы уравнение ФП (7.1) сводилось к уравнению теплопроводности (7.13), необходимо и достаточно, чтобы функции $A(t,x)$ и $B(t)$

удовлетворяли такому условию

$$\frac{B_t}{B^2}\int_0^x A(t,s)ds-\frac{1}{B}\int_0^x A_t(t,s)ds-\frac{1}{2}A_x-\frac{1}{2}\cdot\frac{A^2}{B}=$$
$$=F_1(t)x^2+F_2(t)x+F_3(t), \tag{7.24}$$

где $F_i,\ i=1,2,3$ - произвольные функции.

Для доказательства этого утверждения воспользуемся заменой (7.I5). Подставляя (7.I5) в уравнение Фоккера-Планка (7.I) и требуя, чтобы после подстановки функция $w(\tau,y)$ удовлетворяла уравнению теплопроводности (7.I3), получаем такие уравнения

$$\tau_x=0,\quad \tau_t=\frac{1}{2}B(t)y_x^2,$$
$$fy_t-Bf_xy_x+Afy_x=0,$$
$$f_t-\frac{1}{2}Bf_{xx}+Af_x+A_xf=0. \tag{7.25}$$

Чтобы эти уравнения были разрешимы относительно f, получаем на $A(t,x)$ и $B(t)$ уравнение (7.24). В частности, из условия (7.24) следует, что уравнение (7.I) с функциями

$$A(t,x)=A(x),\quad B(t,x)=B=const$$

сводится к уравнению теплопроводности тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$A^2(x)+B\frac{\partial A}{\partial x}=C_2x^2+C_1x+C_0, \tag{7.26}$$

где C_0, C_1, C_2 - некоторые постоянные.

Нетрудно проверить, что в случае уравнений (7.2)-(7.4) условие (7.26) выполнено, а для уравнения (7.8) - нет. Отметим, также, что общее решение уравнения Риккати (7.26) в квадратуре не выражается [16].

Исследуем теперь вопрос сведения уравнения (7.I) к уравнению теплопроводности с такими функциями

$$A(t,x)=0, \quad B(t,x)=B(x).$$

Поступая аналогично как и в предыдущем случае, используя замену (7.15), приходим к уравнению на функцию

$$BB_{xx}-\frac{3}{4}B_x^2-8\kappa B=0, \tag{7.27}$$

где κ - произвольная постоянная.
Уравнение (7.27) при помощи замены

$$B'_x=p(B) \tag{7.28}$$

приводится к уравнению Бернулли

$$p'p-\frac{3}{4B}p^2-8\kappa=0, \tag{7.29}$$

которое в свою очередь, используя замену $p=w^{1/2}$, сводится к линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{\partial w}{\partial B}-\frac{3}{2B}w-16\kappa=0. \tag{7.30}$$

Уравнение (7.30) интегрируется в квадратурах. Интегрируя (7.30), можно найти решение (7.27). Оно имеет вид

$$B = \left(\frac{C_1}{16}\left(x + C_2\right)^2 + \frac{32k}{C_1}\right) \quad ,$$

где C_1 , C_2 - произвольные постоянные.

Легко проверить, что функции $B(x) = \left(1 - x^2\right)^2$, $B(x) = x^2\left(1 - x\right)^2$ уравнений (7.6) и (7.7) удовлетворяют уравнению (7.27) при

$$k = -\frac{1}{2}, \quad C_1 = 16, \quad C_2 = 0;$$

$$k = -\frac{1}{8}, \quad C_1 = 16, \quad C_2 = -\frac{1}{2},$$

соответственно. Подставляя различные C_1 , C_2 и k , получаем различные функции $B(t, x)$, при которых уравнение (7.I) сводится к уравнению теплопроводности.

§ 8. Симметрийный анализ уравнения Крамерса с потенциалом

В настоящем параграфе исследованы симметрийные свойства двумерного уравнения Крамерса (УК), затем группа симметрии и само уравнение Крамерса обобщены на случай многих переменных.

Уравнения Фоккера-Планка в случае многих переменных описывает гораздо более многообразные и сложные явления, чем одномерное. В общем случае уравнение ФП в переменных x_i , $i=\overline{1,n}$ имеет вид

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[A(t,x)u(t,x)\right] + \tag{8.1}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[B_{ij}(t,x)u(t,x)\right],$$

где $x=(x_1,\dots,x_n)$. Коэффициенты сноса и диффузии определяются вектором

$$A(t,x)=\begin{pmatrix} A_1(t,x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_n(t,x) \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

и матрицей

$$B(t,x)=\|B_{ij}(t,x)\|, \quad i,j=\overline{1,n} \tag{8.3}$$

соответственно.

Одним из примеров многомерного уравнения ФП является уравнение Крамерса, которое описывает движение частицы во флуктуирующей среде, так называемое броуновское движение (см., например, [9]).

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(yu)+\frac{\partial}{\partial y}\left(V'(x)u\right)+\gamma\frac{\partial}{\partial y}\left(yu+\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{8.4}$$

где $u=u(t,x,y)$, γ - произвольная постоянная, $V(x)$ - потенциал, градиент которого $V'(x)$ создает силу (внешнюю), действующую на частицу. Коэффициент сноса (8.2) и диффузии (8.3) для уравнения (8.4) могут быть записаны в виде

$$A(t,x,y)=\begin{pmatrix} y \\ -V'(x)-\gamma y\end{pmatrix}, \quad B(t,x,y)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\gamma\end{pmatrix} \tag{8.5}$$

Информацию о симметрийных свойствах уравнения (8.5) дает следующая теорема.

Теорема 8.I. Наиболее широкой группой симметрии - 6-параметрической группой Ли, уравнение (8.4) обладает при $V'(x)=\kappa x+b$, где κ , b - произвольные постоянные.

Доказательство. Воспользуемся методом Ли. Перепишем уравнение (8.4) в виде

$$u_t+\left(-\gamma y-V'(x)\right)u_y+yu_x-\gamma u_{yy}-\gamma u=0, \tag{8.6}$$

где индексы t, x, y означают $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$.
Пусть

$$X=\xi^0(t,x,y,u)\frac{\partial}{\partial t}+\xi^1(t,x,y,u)\frac{\partial}{\partial x}+ \tag{8.7}$$

$$+\xi^2(t,x,y,u)\frac{\partial}{\partial y}+\eta(t,x,y,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

- искомый оператор (0.6),

$$\overset{2}{X}=X+\zeta^0\frac{\partial}{\partial u_t}+\zeta^1\frac{\partial}{\partial u_x}+\zeta\frac{\partial}{\partial u_y}+$$

$$+\zeta^{00}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}+\zeta^{01}\frac{\partial}{\partial u_{tx}}+\zeta^{02}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}+\zeta^{11}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}+$$

$$+\zeta^{12}\frac{\partial}{\partial u_{xy}}+\zeta^{22}\frac{\partial}{\partial u_{yy}}$$

его второе продолжение, которое строится по формулам (0.8). Определяющее уравнение имеет вид

$$\zeta^0+\left(-\gamma\xi^2-V''(x)\right)u_y+\left(-\gamma y-V'(x)\right)\zeta^2+$$

$$+\xi^2u_x+y\zeta^1-\gamma\zeta^{22}-\gamma\eta\Bigg|_{\substack{u_t+(-\gamma y-V'(x))u_y+\\+yu_x-\gamma u_{yy}-\gamma u=0}}=0. \tag{8.8}$$

Решая (8.8), аналогично как и в § 7, получаем, что

$$\eta(t,x,y,u)=\eta^1(t,x,y)u+u^0(t,x,y), \tag{8.9}$$

где u^0 - произвольное решение уравнения (8.6). Его можно положить равным нулю, так как оно не представляет интереса (решения линейного уравнения можно складывать, не выходя за пределы множества решений).

Далее, из (8.8) приходим к таким условиям на функции $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \eta$:

$$\xi^0 = F(t), \xi^1 = \frac{3}{2} x F_t + G(t), \xi^2 = \frac{1}{2} y F_t + \frac{3}{2} x F_{tt} + G_t, \tag{8.10}$$

$$2\gamma \eta^1_y = -\gamma \xi^2 - V''(x)\xi^1 - (\gamma y + V'(x))\xi^2_y - y\xi^2_x - \xi^2_t, \tag{8.11}$$

$$\eta^1_t = \eta^1_y(\gamma y + V'(x)) - y\eta^1_x + \gamma \eta^1_{yy} + 2\gamma \xi^2_y, \tag{8.12}$$

где $F(t)$ и $G(t)$ - четырежды непрерывно дифференцируемые функции. Подставляя выражения из (8.10) в (8.11) и (8.12) и учитывая условие, что $\eta^1_{ty} = \eta^1_{yt}$, получаем такие уравнения на $F(t)$ и $G(t)$

$$-\frac{5}{2}F_{ttt} + \gamma^2 F_t - 2V''F_t - \frac{3}{2}V'''xF_t - V'''G = 0,$$

$$\Theta_x + \frac{3}{2}x(-F_{tttt} + \gamma^2 F_{tt}) - \frac{3}{2}xV''F_{tt} + \frac{3}{2}\gamma x V''F_t -$$

$$-\frac{3}{2}V'F_{tt} + \frac{3}{2}V'\gamma F_t + \gamma^2 G_t - G_{ttt} - V''G_t + \gamma V''G = 0, \tag{8.13}$$

$$\Theta_t - V'\Big[-\frac{3}{2}x(\gamma F_{tt} + F_{ttt}) + (-\gamma G_t - G_{tt}) - \frac{3}{2}xV''F_t -$$

$$-V''G - \frac{1}{2}V'F_t\Big] + (\gamma^2 - \frac{1}{2})F_t + 2\gamma F_{tt} = 0,$$

где $\Theta = \Theta(t, x)$ произвольная дифференцируемая функция. Анализируя (8.13), приходим к такому выводу: чтобы функции ξ^0, ξ^1, ξ^2 не были постоянными (в этом случае $F(t) = 0$, $G(t) = 0$) необходимо и достаточно, чтобы

$$V'(x) = \kappa x + b \,, \tag{8.14}$$

где κ , b - произвольные постоянные.

При выполнении (8.14) получаем, что $F_t = 0$, а $G(t)$ из условия $\Theta_{tx} = \Theta_{xt}$ удовлетворяет уравнению

$$G_{tttt} + (-\gamma^2 + 2\kappa) G_{tt} + \kappa^2 G = 0 \,. \tag{8.15}$$

Далее необходимо рассмотреть несколько неэквивалентных случаев.

I. Пусть $\kappa = b = 0$, тогда уравнение (8.15) принимает вид

$$G_{tttt} - \gamma^2 G_{tt} = 0 \,. \tag{8.16}$$

Решением (8.16) будет функция

$$G(t) = \frac{C_1}{\gamma^2} e^{-\gamma t} + \frac{C_2}{\gamma^2} e^{\gamma t} + C_3 t + C_4 \,, \tag{8.17}$$

где C_i, $i = \overline{1,4}$ - произвольные постоянные.

Подставив (8.17) в (8.10)-(8.12), находим координаты ξ^0, ξ^1, ξ^2, η инфинитезимального оператора (8.7)

$$\xi^0 = C_0, \quad \xi^1 = \frac{C_1}{\gamma^2} e^{-\gamma t} + \frac{C_2}{\gamma^2} e^{\gamma t} + C_3 t + C_4 \,,$$

$$\xi^2 = -\frac{C_1}{\gamma} e^{-\gamma t} + \frac{C_2}{\gamma} e^{\gamma t} + C_3 \,, \tag{8.18}$$

$$\eta^1 = \frac{1}{2\gamma} \left[y(-2C_2 e^{\gamma t} - C_3 \gamma) - \gamma^2 C_3 x + C_5 \right] .$$

Из (8.18) следует, что максимальная алгебра инверититности УК

(8.6) с потенциалом $V(x)=const$ шестимерна, а базисные операторы имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&P_0=\frac{\partial}{\partial t},\ P_1=\frac{\partial}{\partial x},\ I=u\frac{\partial}{\partial u},\\
&G_1=t\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}-\frac{1}{2}(y+\gamma x)u\frac{\partial}{\partial u},\\
&S_1=\exp\{\gamma t\}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}-yu\frac{\partial}{\partial u}\right),\\
&T_1=\exp\{-\gamma t\}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right).
\end{aligned}
\tag{8.19}
$$

Оперáторы (8.19), как не трудно убедиться, удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям, которые мы представим в виде таблицы

	P_0	P_1	G_1	S_1	T_1	I
P_0	0	0	P_1	γS_1	$-\gamma T_1$	0
P_1	0	0	$-\frac{1}{2}\gamma I$	0	0	0
G_1	$-P_1$	$\frac{1}{2}\gamma I$	0	0	0	0
S_1	$-\gamma S_1$	0	0	0	$-I$	0
T_1	γT_1	0	0	$+I$	0	0
I	0	0	0	0	0	0

(8.20)

2) Пусть $\kappa = 0$, $b \neq 0$. В этом случае УК (8.6) при помощи замены

$$u = w(\tau, \xi, \varphi), \tag{8.21}$$

где $\tau = t$, $\xi = x + \frac{b}{\gamma} t$, $\varphi = y + \frac{b}{\gamma}$ сводится к уравнению Крамерса (8.6) при $V'(x) = 0$.

3) Пусть $\kappa \neq 0$, $b = 0$. В этом случае уравнение (8.15) представляет собой линейное дифференциальное уравнение 4-го порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 + (-\gamma^2 + 2\kappa)\lambda^2 + \kappa^2 = 0. \tag{8.22}$$

Рассмотрим такие случаи уравнения (8.22).

а) Если $\kappa < \gamma^2/4$, тогда уравнение (8.22) имеет четыре действительных корня кратности единица, т.е. решение (8.15) будет иметь вид

$$G(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + C_4 e^{\lambda_4 t}, \tag{8.23}$$

где C_i, $i = \overline{1,4}$ - произвольные постоянные;
λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 - корни уравнения (8.22), причем
$\lambda_2 = -\lambda_1$, а $\lambda_4 = -\lambda_3$.

После несложных вычислений из формул (8.10)-(8.12) находим вид ξ^0, ξ^1, ξ^2, η. Таким образом, получаем 6-параметрическую алгебру с такими операторами:

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad I = u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_i = e^{\lambda_i t}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_i e^{\lambda_i t}\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{(-\gamma\lambda_i - \lambda_i^2 - \kappa)}{2\gamma} e^{\lambda_i t} y + \right. \tag{8.24}$$
$$\left. + \frac{e^{\lambda_i t}}{2\gamma}(\lambda_i^3 - \gamma^2\lambda_i + \kappa\lambda_i - \gamma\kappa)x\right) u\frac{\partial}{\partial u}, \; i = 1,4 .$$

Таблица коммутаторов (8.24) имеет вид

	p_0	X_1	X_2	X_3	X_4	I
p_0	0	$\lambda_1 X_1$	$-\lambda_1 X_2$	$\lambda_3 X_3$	$-\lambda_3 X_4$	0
X_1	$-\lambda_1 X_1$	0	αI	0	0	0
X_2	$\lambda_1 X_2$	$-\alpha I$	0	0	0	0
X_3	$-\lambda_3 X_3$	0	0	0	βI	0
X_4	$\lambda_3 X_4$	0	0	$-\beta I$	0	0
I	0	0	0	0	0	0

(8.25)

где α , β - определенные постоянные.

б) Пусть $\kappa = \gamma^2/4$. Уравнение (8.22) имеет два корня кратности два и,следовательно, решение уравнения (8.15) запишется так:

$$G(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t} + C_3 e^{\lambda_2 t} + C_4 t e^{\lambda_2 t} \tag{8.26}$$

где λ_1 и λ_2 корни уравнения (8.22), причем $\lambda_2 = -\lambda_1$. Аналогично, как и в случае (а), находим операторы:

$$p_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad I = u\frac{\partial}{\partial u}, \tag{8.27}$$

$$X_{1,3}=e^{\lambda t}\frac{\partial}{\partial x}+\lambda e^{\lambda t}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{e^{\lambda t}}{2}\left(\gamma y+\frac{\gamma^2}{2}x\right)u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_{2,4}=te^{\lambda t}\frac{\partial}{\partial x}+(e^{\lambda t}+\lambda te^{\lambda t})\frac{\partial}{\partial y}- \qquad (8.27)$$

$$-\frac{e^{\lambda t}}{2}\left((\gamma t+2)y+\frac{\gamma^2}{2}tx\right)u\frac{\partial}{\partial u},$$

где вместо λ надо поочередно подставить λ_1 и $-\lambda_1$. Таблица коммутаторов для операторов (8.27).

	P_0	X_1	X_2	X_3	X_4	I
P_0	0	$\lambda_1 X_1$	$X_1+\lambda_1 X_2$	$-\lambda_1 X_3$	$X_3-\lambda_1 X_4$	0
X_1	$-\lambda_1 X_1$	0	0	0	$\frac{\gamma^2}{2}I$	0
X_2	$-X_1-\lambda_1 X_1$	0	0	$-2\gamma^2 I$	0	0
X_3	$\lambda_1 X_3$	0	$2\gamma^2 I$	0	0	0
X_4	$-X_3+\lambda_1 X_4$	$-\frac{\gamma^2}{2}I$	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0

(8.28)

в) Пусть $\kappa>\gamma^2/4$. В этом случае корни уравнения комплексные:

$$\lambda_1=a_1+b_1 i,\ \lambda_2=a_2+b_2 i,\ \lambda_3=\lambda_1^*,\ \lambda_4=\lambda_2^*,$$

где a_i, b_i, $i=1,2$ – некоторые действительные числа. Соответственно решение уравнения (8.15) запишется в виде

$$G(t)=C_1e^{\alpha_1 t}\cos b_1 t+C_2e^{\alpha_1 t}\sin b_1 t+ \\ +C_3e^{\alpha_2 t}\cos b_2 t+C_4e^{\alpha_2 t}\sin b_2 t, \tag{8.29}$$

где C_i , $i=\overline{1,4}$ - произвольные постоянные.

Из-за громоздкости операторов, кроме тривиальных $P_0=\frac{\partial}{\partial t}$, $I=u\frac{\partial}{\partial u}$ выпишем только один, соответствующий функции

$$G(t)=e^{\alpha_1 t}\cos b_1 t-$$

$$X_1=e^{\alpha_1 t}\cos b_1 t\frac{\partial}{\partial x}+\left(\alpha_1 e^{\alpha_1 t}\cos b_1 t-e^{\alpha_1 t}b\sin b_1 t\right)\frac{\partial}{\partial y}+$$

$$-\frac{1}{2\gamma}e^{\alpha_1 t}\Big[y\big(-\gamma\alpha_1\cos b_1 t+\gamma b_1\sin b_1 t-\alpha_2\cos b_1 t+$$

$$+2\alpha_1 b_1\sin b_1 t+b_1^2\cos b_1 t-\kappa\cos b_1 t\big)+x\big(\alpha_1^3\cos b_1 t-$$

$$-3\alpha_1^2 b_1\sin b_1 t-3\alpha_1 b_1^2\cos b_1 t+b_1^3\sin b_1 t+(-\gamma^2+$$

$$+\kappa)(\alpha_1\cos b_1 t-b_1\sin b_1 t)-\gamma\kappa\cos b_1 t\Big]u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Таблицы коммутаторов будут различны, в зависимости от знака действительной и мнимой части корней характеристического уравнения.

Теорема доказана.

Обобщим уравнение Крамерса (8.6) с $V'(x)=0$ на многомерный случай. С учетом того, что переменная x описывает пространственную координату, а y - скорость частицы, мы будем рассматривать семимерное пространство.

Рассмотрим операторы :

$$P_0=\frac{\partial}{\partial t},\quad P_\alpha=\frac{\partial}{\partial x_\alpha},\quad I=u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$G_\alpha=t\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial y_\alpha}-\frac{1}{2}(y_\alpha+\gamma x_\alpha)u\frac{\partial}{\partial u}, \tag{8.30}$$

$$S_\alpha=e^{\gamma t}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial y_\alpha}-y_\alpha u\frac{\partial}{\partial u}\right),$$

$$T_\alpha=e^{-\gamma t}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right),$$

$$J_{ab}=x_a\frac{\partial}{\partial x_b}-x_b\frac{\partial}{\partial x_a}+y_a\frac{\partial}{\partial y_b}-y_b\frac{\partial}{\partial y_a},$$

$$a,b=\overline{1,3}\ .$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 8.3. Операторы (8.30) образуют алгебру Ли и удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[P_0,G_b]=P_b,\quad [P_a,G_b]=-\frac{\gamma}{2}\delta_{ab},$$

$$[P_0,S_a]=\gamma S_a,\quad [P_0,T_a]=-\gamma T_a, \tag{8.31}$$

$$[P_c,J_{ab}]=\delta_{ca}P_b-\delta_{cb}P_a,\quad [T_a,S_a]=I,$$

$$[J_{ab},J_{cd}]=-\delta_{ac}J_{bd}+\delta_{bc}J_{ad}-\delta_{bd}J_{ac}+\delta_{ad}J_{bc},$$

$$[G_a,J_{ab}]=G_b,\quad [S_a,J_{ab}]=S_b,\quad [T_a,J_{ab}]=T_b.$$

Остальные коммутационные соотношения равны нулю.

Доказательство сводится к непосредственной проверке формул (8.3).

Теорема 8.4. Уравнение

$$u_t - \gamma y_\alpha \frac{\partial u}{\partial y_\alpha} + y_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y_\alpha \partial y_\alpha} - \gamma u = 0 \tag{8.32}$$

является единственным в классе уравнений (8.I) инвариантным относительно I7-параметрической алгебры Ли (8.30), (8.31).

Доказательство. По формуле (8.8) получаем второе продолжение операторов (8.30) и потребуем, чтобы уравнение было инвариантным относительно каждого оператора, т.е. выполнялось условие (0.7)

$$\overset{2}{\mathbf{X}}\mathbf{F}\Big|_{\mathbf{F}=0} = 0, \tag{8.33}$$

где $\overset{2}{\mathbf{X}}$ - второе продолжение операторов (8.30).

Из условий (8.33) получаем, что коэффициентные функции $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ должны иметь вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ -\gamma y_1 \\ -\gamma y_2 \\ -\gamma y_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \| \mathbf{B}_{ij} \|, \quad i,j = \overline{1,6}, \qquad \mathbf{B}_{44} = \mathbf{B}_{55} = \mathbf{B}_{66} = 2\gamma,$$

все остальные равны нулю.

Теорема доказана.

§ 9. Точные решения уравнения Крамерса с линейным потенциалом

В настоящем параграфе, используя симметрию, построены решения уравнения Крамерса с линейным потенциалом, градиент которого постоянен. Покажем, как строить серии решений уравнения, зная одни лишь операторы симметрии и не решая самого уравнения.

Рассмотрим уравнение (8.6) с $v'(x)=b=const$,т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(yu)+\gamma\frac{\partial}{\partial y}\left(yu+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}(bu). \qquad (9.I)$$

Используя замену (8.2I), приходим к уравнению (9.I) с $b=0$. Поэтому достаточно рассматривать уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(yu)+\gamma\frac{\partial}{\partial y}\left(yu+\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

которое запишем в виде

$$u_t-\gamma y u_y+y u_x-\gamma u_{yy}-\gamma u=0. \qquad (9.2)$$

Как было показано в предыдущем параграфе (см.теорему 8.I), максимельной алгеброй инвариантности уравнения (9.2) является шестимерная алгебра с базисными операторами:

$$P_0=\frac{\partial}{\partial t},\ P_1=\frac{\partial}{\partial x},\ I=u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$G_1=t\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}-\frac{1}{2}(y+\gamma x)u\frac{\partial}{\partial u}, \qquad (9.3)$$

$$S_1 = e^{\gamma t}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - yu\frac{\partial}{\partial u}\right),$$

$$T_1 = e^{-\gamma t}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Выпишем конечные преобразования, порождаемые операторами G_1 , S_1 , T_1 (9.3).

Имеем

$$G_1:\ t' = t,\ x' = x + \alpha t,\ y' = y + \alpha, \tag{9.4}$$

$$u'(x') = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\alpha y + \frac{\alpha^2}{2}(1+\gamma t) + \gamma\alpha x\right)\right\} u(x);$$

$$S_1:\ t' = t,\ x' = x + \frac{b}{\gamma}\exp\{\gamma t\},$$

$$y' = y + b\exp\{\gamma t\}, \tag{9.5}$$

$$u'(x') = \exp\left\{-by\exp\{\gamma t\} - \frac{b^2}{2}\exp\{2\gamma t\}\right\} u(x);$$

$$T_1:\ t' = t,\ x' = x + \frac{c}{\gamma}\exp\{-\gamma t\},$$

$$y' = y - c\exp\{-\gamma t\},\ u'(x') = u(x), \tag{9.6}$$

где α , b , c - произвольные параметры.

Используя эти преобразования, нетрудно построить соответствующие формулы размножения [25] решений уравнения (9.2).

Они имеют вид

$$u_{II}(t,x,y) = \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\alpha y + \frac{\alpha^2}{2}(1+\gamma t) + \gamma\alpha x\right)\right\} \times \tag{9.7}$$

$$\times u_I(t', x', y');$$

$$u_{II}(t,x,y) = \exp\{by\exp\{\gamma t\} + \frac{b^2}{2}\exp\{2\gamma t\} \times \tag{9.8}$$

$$\times u_I(t', x', y');$$

$$u_{II}(t,x,y) = u_I(t', x', y'), \tag{9.9}$$

где t' , x', y' указаны в (9.4)-(9.6) соответственно.
Если $u_I(t,x,y)$ решение уравнения (9.2), то $u_{II}(t, x,y)$, построенное по формулам (9.7)-(9.9), будет также его решением.

Отметим, что преобразования (9.4) - это галилеевские преобразования (переменная y в уравнении Крамерса (9.2) совпадает с точностью до постоянного множителя со скоростью частицы).

Из статической физики известно, что распределение Больцмана

$$u(x,y) = N\exp\{-v(x) - \frac{1}{2}y^2\} \tag{9.I0}$$

(N - некоторая нормировочная постоянная) является решением уравнения (8.6). Это стационарное решение. Применяя к решению (9.I0) с $v'(x) = 0$ формулы размножения решений (9.7)-(9.9), легко получить новые нестационарные решения уравнения (9.2).

Рассмотрим другой способ нахождения решений уравнения (9.2) [42,45]. Найдем инварианты оператора S_1 (9.3). Инвариантами будут первые интегралы системы

$$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{\frac{1}{\gamma}\exp\{\gamma t\}} = \frac{dy}{\exp\{\gamma t\}} = \frac{du}{-yu\exp\{\gamma t\}} . \qquad (9.11)$$

Решая систему (9.II), получаем такие инвариантные переменные

$$\omega_1 = t,\ \omega_2 = \gamma x - y,\ \omega_3 = \frac{y^2}{2} + \ln u. \qquad (9.12)$$

Согласно алгоритму [45] , находим анзац

$$u(t,x,y) = \exp\{-y^2/2\}\varphi(\omega_1,\omega_2),$$
$$\omega_1 = t,\ \omega_2 = \gamma x - y. \qquad (9.13)$$

Постановка (9.I3) в уравнение (9.2) редуцирует его к уравнению теплопроводности

$$\varphi_{\omega_1} - \gamma\varphi_{\omega_2\omega_2} = 0 . \qquad (9.14)$$

Простейшим решением уравнения (9.I4) будет $\varphi = const$, именно это решение, совместно с (9.I3), приводит к решению уравнения (9.2) в виде распределения Больцмана (9.I0) при $v'(x) = 0$ Используя решение уравнения теплопроводности (9.I4) и анзац (9.I3), можно выписать множество решений уравнения (9.2). В частности, с помощью фундаментального решения уравнения (9.I4)

$$\varphi(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma\omega_1}}\exp\left\{-\frac{\omega_2^2}{4\gamma\omega_1}\right\} \qquad (9.15)$$

находим решение уравнения (9.2)

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma t}}\exp\left\{-\left(\frac{y^2}{2}+\frac{(\gamma x-y)^2}{4\gamma t}\right)\right\}. \tag{9.16}$$

Оператор T_1 приводит к анзацу

$$u=\tilde{\varphi}(\omega_1,\omega_2),\ \omega_1=t,\ \omega_2=\gamma x+y,$$

который редуцирует (9.2) к уравнению (9.14), где

$$\varphi=\exp\{\gamma\omega_1\}\tilde{\varphi}(\omega_1,\omega_2).$$

Построим еще ряд решений уравнений (9.2), следуя [53]. Для этой цели перепишем операторы G_1, S_1, T_1 (9.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} G_1&=t\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}(\gamma x+y),\\ S_1&=\exp\{\gamma t\}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+y\right),\\ T_1&=\exp\{-\gamma t\}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right).\end{aligned} \tag{9.17}$$

Итак, если $u_0(t,x,y)$ решение уравнения (9.2), то решениями будут функции $Qu_0, Q^2u_0, \ldots$, где Q любой из операторов (9.17).

Например, выбирая $u_0=\exp\{\gamma t\}$, а в качестве Q оператор G_1, находим

$$u_1 = 2G_1 \exp\{\gamma t\} = \exp\{\gamma t\}(\gamma x + y),$$
$$u_2 = G_1 u_1 = \exp\{\gamma t\}\left[(\gamma t + 1) + \frac{1}{2}(\gamma x + y)^2\right], \quad (9.18)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

С помощью $\mathbf{T}_1$ и решения (9.10) при $v'(x) = 0$ (т.е. $u_0 = \exp\{-y^2/2\}$) находим:

$$u_1 = \mathbf{T}_1 \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} = y \exp\left\{-\left(\gamma t + \frac{y^2}{2}\right)\right\},$$
$$u_2 = \mathbf{T}_1 u_1 = (-1 + y^2) \exp\left\{-\left(2\gamma t + \frac{y^2}{2}\right)\right\}, \quad (9.19)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

К решениям (9.18), (9.19) можно применить формулы размножения (9.7)-(9.9).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты, полученные в диссертации.

В диссертационной работе методом дифференциальных форм исследована касательная симметрия релятивистского уравнения Гамильтона - Якоби. Установлено, что это уравнение допускает бесконечнопараметрическую группу касательных преобразований.

Проведен теоретико-алгебраический анализ и найдены законы сохранения переопределенных систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных типа Даламбера-эйконала. Необходимо подчеркнуть, что исследованные системы типа Даламбера-эйконала не получаются из вариационного принципа, поскольку для них не существует функция Лагранжа и, следовательно, для построения сохраняющихся величин нельзя воспользоваться теоремой Нетер.

В диссертации методом Ли - Бэклунда изучена симметрия уравнения Монжа-Ампера: доказано, что оно обладает нетривиальной бексонечнопараметрической группой касательных преобразований.

Метод дифференциальных форм обобщен на случай интегро-дифференциальных уравнений. Описаны интегро-дифференциальные уравнения, инвариантные относительно групп Галилея, Шредингера, Пуанкаре и конформной группы.

Исследованы симметрийные свойства интегро-дифференциальных уравнений типа Хартри. Получено обобщение этих уравнений, которое инвариантно относительно группы Шредингера, и проведена редукция трехмерного интегро-дифференциального уравнения к одномерному.

Изучена локальная симметрия систем псевдодифференциальных уравнений с дополнительными нелинейными условиями.

Методом Ли изучены теоретико-алгебраические свойства уравнения Фоккера-Планка, которое является основным уравнением в теории непрерывных марковских процессов.

Исследована симметрия одномерных уравнений Фоккера-Планка и на основании этого получены условия на коэффициенты, при которых оно сводится к уравнению теплопроводности. Для некоторых конкретных уравнений Фоккера-Планка (диффузия в поле силы тяжести, процесс Орнштейна - Уленбека, процесс рэлеевского типа и др.) найдены в явном виде замены переменных, с помощью которых эти уравнения сводятся к уравнению теплопроводности.

Изучены симметрийные свойства двумерного уравнения Фоккера-Планка - уравнения Крамерса с различными потенциалами. Далее уравнение Крамерса обобщено на случай многих переменных и для него найдена максимальная в смысле Ли алгебра инвариантности. Найдена в явном виде замена , с помощью которой уравнение Крамерса с линейным потенциалом сводится к уравнению с постоянным потенциалом.

Используя симметрию уравнения Крамерса, проведена редукция и построены точные решения этого уравнения с линейным потенциалом.

Основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми и могут быть использованы при решении задач квантовой механики, теории поля, теории случайных процессов и др., для описания физических процессов, инвариантных относительно групп Пуанкаре, Галилея, Шредингера и конформной группы.

ЛИТЕРАТУРА

I. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи.- М.: Мир, 1987.- 480 с.

2. Арнольд В И. Математические методы классический механики.- М.: Наука, 1974.- 432 с.

3. Баранник Л.Ф., Марченко В.А. О симметрийной редукции нелинейного уравнения Шредингера // Симметрийный анализ и решения уравнений математической физики: Сб.научн.тр.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987.- С.41-45.

4. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения: В 2 т.- М.: Мир, 1980.- Т.I.- 456 с., Т.2.- 396 с.

5. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля.- М.: Наука, 1987 - 616 с.

6. Вейль Г. Теория групп и квантовая механика.- М.: Наука, 1986.- 496 с.

7. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений.- М.: Наука, 1986.- 336 с.

8. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1988.- 512 с.

9. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках.- М.: Мир, 1986. - 526 с.

10. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и классическая механика.- М.: Мир, 1973.- 188 с.

11. Григорьев Ю.Н., Мелешко С.В. Групповой анализ интегро-дифференциальных уравнений Больцмана // Докл. АН СССР.- 1987.- 297, № 2.- С.323-327.

12. Гриффитс Ф. Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление.- М.: Мир, 1986.- 360 с.

13. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А Т. Современная геометрия.- М.: Наука, 1979.- 760 с.

14. Ибрагимов Н.Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики.- Новосибирск: Изд-во Новосибирск. гос. ун-та, 1972.- 160 с.

15. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике.- М.: Наука, 1983.- 280 с.

16. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1986.- 576 с.

17. Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения.- М.: МГУ, 1962.- 238 с.

18. Коваленко И.Н., Кузнецов Ю.Н., Шуренков В.М. Случайные процессы.- Киев: Наук. думк., 1983.- 368 с.

19. Кобояси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии: В 2 т.- М.: Наука, 1981.- Т 1.- 344 с., Т.2.- 414 с.

20. Лезнов А.Н., Савельев М.В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем.- М.: Наука, 1985.- 280 с.

21. Лычагин В.В. Контактная геометрия и уравнения второго порядка // Успехи мат. наук.- 1979.- 34, № 1.- С.147-165.

22. Миллер У. Разделение переменных.- М.: Мир, 1981.- 340 с.

23. Михайловский В.И. Некоторые краевые задачи теории бесконечно малых изгибаний кусочно-регулярных поверхностей вращения отрицательной кривизны: Автореф. дис... канд. физ.мат.наук.- Киев, 1962 - 12 с.

24. Нетер Э. Вариационные принципы механики.- М.: Физматгиз,

1959.- С.611-630.

25. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.- М.: Наука, 1978.- 400 с.

26. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы.- М.: Наука, 1973.- 520 с.

27. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды.- М.: Наука, 1981.- 800 с.

28. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии.- М.: Гос. изд-во техн.-теорет. литературы.- 1975.- 420 с.

29. Ревенко И.В., Тимошенко А.З. Об одном классе Пуанкаре-инвариантных уравнений, описывающих движение частицы со спином // Симметрийный анализ и решения уравнений математической физики " Сб. научн. тр.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988.- С.33-35.

30. Селехман Н.А. О максимальной алгебре инвариантности одной системы интегро-дифференциальных уравнений // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике: Сб. научн.тр.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981.- С.125-131.

31. Сидоров А.Ф., Шапаев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике.- Новосибирск: Наука, 1984.- 272 с.

32. Солитоны в действии.- М.: Мир, 1981.- 312 с.

33. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии.- М.: Мир, 1970.- 412 с.

34. Стогний В.И., Штелень В.М. Применение метода дифференциальных форм к исследованию релятивистского уравнения Гамильтона-Якоби // Симметрия и решение нелинейных уравнений математической физики: Сб.науч. тр.- Киев: Ин-т математики

АН УССР, 1987.- С.58-62.

35. Стогний В.И. О симметрии и законах сохранения некоторых систем дифференциальных уравнений в частных производных // Симметрийный анализ и решения уравнений математической физики: Сб.научн. тр.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. - С.4I-45.

36 Стогний В.И.; Штелень В.М. О связи между уравнениями Фоккера-Планка и уравнением теплопроводности // Симметрийный анализ и решения уравнений математической физики: Сб.научн. тр.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988.- С.96-98.

37. Стонний В.И. Групповые свойства интегро-дифференциальных уравнений типа Хартри // Симметрия и решения уравнений математической физики: Сб.научн.тр.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989.- С.39-40.

38. Shtelen W.M., Stogny V.I. Symmetry properties of one- and two-dimensional Fokker-Planck equations // J. Phys. A: Math. Gen. 1989. - 22, N 13. - L 539 - L 543.

39. Федорчук В.М. О редукции и некоторых точных решениях нелинейного волнового уравнения // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики: Сб.научн.тр.- Киев: Ин-т математики АН УССР: 1987.- С.73-75.

40. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана.- М.: Гостехиздат, 1948.- 432 с.

4I. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла.- Киев: Наук. думка, 1983.- 200 с.

42. Фушич В.И , Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений математической физики.- Киев: Наук. думка, 1989.- 336 с.

43. Фущич В.И. О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения // Теорет. и мат физика.- 1971.- 7, № 1.- С.3-12

44. Фущич В.И Об одном методе исследования групповых свойств интегро-дифференциальных уравнений // Укр.мат.журн.- 1981. - 33, № 6.- С.834-838.

45. Фущич В.И Симметрия в задачах математической физики // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике:- Сб.научн.тр.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981.- С.6-28.

46. Фущич В.И., Селехман Н.А. Интегро-дифференциальные уравнения, инвариантные относительно групп Галилея, Пуанкаре, Шредингера и конформной группы // Докл. АН УССР.- 1983.- Сер.А., № 5.- С.21-24.

47. Фущич В.И., Серов Н.И. Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа-Ампера // Докл. АН УССР.- 1983.- 273, № 3.- С.543-546.

48. Фущич В И , Серов Н.И. Чопик В.И. Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР.- 1988.- Сер.А., № 9.- С.17-20.

50. Фущич В.И., Чернига Р.М. О точных решениях двух многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа.- Киев, 1986.- 44 с. - (Препринт / АН УССР.- Ин-т математики: - 86-85).

49. Фущич В.И., Штелень В.М. О редукции и точных решениях нелинейного уравнения Дирака // Теорет . и мат. физика.- 1987 - 72, № 1.- С.35-44.

51. Швачка А.Б., Яловский А.Б. Метод Уолквиста-Эстабрука и его применение к исследованию нелинейных эволюционных уравне-

ний Случай двух пространственных переменных. - ОИЯИ, 1982.- /препринт/ Дубна/; Р.5/.

52. Штелень В.М. Касательные преобразования релятивистского уравнения Гамильтона-Якоби // Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики: Сб.научн.тр.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983.- С.62-65.

53. Штелень В.М. Об одном способе построения точных решений многомерных линейных дифференциальных уравнений // Симметрия, решения нелинейных уравнений мат.физики. - Киев: Сб.научн. тр. - Ин-т математики АН УССР. - 1987. - С.31-36.

54. Шубин М.И. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. - М.: Наука, 1978.- 280 с.

55. Шульга М.В. Симметрия и некоторые точные решения уравнения Даламбера с нелинейным условием // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. - Киев: Сб. научн. тр. - Ин-т математики АН УССР, 1985. - С.36-38.

56. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. М.: Изд-во иностр. лит., 1947. - 358 с.

57. Bateman H. Ghe transformations of electrodynamical equations // Proc. London Math. Soc. - 1909. - 8. - P. 223 - 264.

58. Bluman G.W. and Cole I.D. Similarity methods for differential equations. - Berlin: Springer, 1974. - 332 p.

59. Estabrook F.B., Harrison B.K. Geometric approach to invariance groups and solutions of partial differential systems // J.Math.Phys. - 1971. - 12, N 4. - P. 653 - 666.

60. Kimura M. Diffusion models in population genetics // J. Applied Probability. - 1964. - 1, N 2. - P. 178 - 230.

61. Kolmogorov A.N., Math. Ann., 1931. - 104. - P. 415 - 418.

62. Nariboli G.A. Group-invariant solutions of the Fokker-Planck equation // J. Stoch. Proc. and their Applicat. - 1977. -

63. Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. - New York: Springer, 1986. - 497 p.

64. Planck M., Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. - 1917. - K 1, 325 p.

65. Rogers C., Shadwick W.F. Bäcklund transformations and their applications. - London: Academic press. - 1982. - 334 p.

66. Suzuki M. Decomposition formulas of exponential operators and Lie exponentials with some applications to quantum mechanics and statistical physics // J. Math. Phys. - 1985. - 26, N 4. - P. 601. - 612.

67. Steeb W.H. Symmetries and vacuum Maxwell's equations // J. Math. Phys. - 1980. - 21, N 7. - P. 1656 - 1658.

68. Fokker A.D., Ann. Phys. (Leipzig), 1945. - 43. - 310 p.

69. Fushchich W.I., Zhdanov R.Z. On the reduction and some exact solutions of the nonlinear Dirac and Dirac-Klein - Gordon equations // J. Phys. A. - 1988. - 21, N 1. - L 5 - L 9.

70. Fushchich W.I. On additional invariance of the relativistic equations of motion. - Kiev. - 1970. - 28 p. - (Preprint/ Acad. Sci. Ukr. SSR Inst. Theor. Phys.; N 70 - 32 E).

71. Fushchich W.I., Shtelen W.M. The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation // Lett. nuovo cim. - 1982. - 34, N 16. - P. 498.

72. Wolf F. Lie algebraic solutions of linear Fokker - Planck equations // Ibid. - 1988. - 29, N 2. - P. 305 - 307.