Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

СИМЕНОГ Зоя Іванівна

СИМЕТРІЙНИЙ АНАЛІЗ ГАЛІЛЕЙ–ІНВАРІАНТНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ШРОДІНГЕРА

01.01.03 – математична фізика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Наукові керівники:
член–кореспондент НАН України,
доктор фіз.–мат. наук, професор
ФУЩИЧ В. І.;
доктор фіз.–мат. наук
НІКІТІН А. Г.

Київ – 1996

Зміст

Вступ

Принцип симетрії відіграє дуже важливу роль у сучасних дослідженнях математичної і теоретичної фізики. Основні рівняння математичної фізики мають, як правило, широку симетрію, і саме ця властивість виділяє їх з усієї множини диференціальних рівнянь (ДР).

Основи теорії симетрії ДР у минулому столітті заклав видатний математик Софус Лі [103, 104]. Він вперше застосував цю теорію до конкретних рівнянь та знайшов їх точні розв'язки. С. Лі сформулював і вивчив фундаментальне поняття групи, що допускається даною системою ДР. У зв'язку з цим виникло найважливіше поняття теорії групових властивостей ДР – інваріантність рівняння (системи рівнянь) відносно деякої групи неперервних перетворень.

Вивчення групи перетворень, відносно якої інваріантна фізична система, дає можливість отримати важливу інформацію без розв'язування рівнянь, що описують досліджувану систему (див., напр., [46, 25, 120]). Закони збереження, розмноження розв'язків, анзаци, методи розділення змінних — всі ці поняття і методи базуються на симетрійних властивостях відповідних диференціальних рівнянь.

Особливу актуальність і ефективність методи симетрійного аналізу набувають у зв'язку з тим, що їх можна застосовувати не тільки до лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП), але й до нелінійних [36]. Для багатьох нелінійних ДРЧП важко або неможливо використати класичний апарат математичної фізики. Проте, якщо деяке нелінійне ДРЧП має широку симетрію, то можна в принципі побудувати багатопараметричні сім'ї розв'язків цього рівняння.

Інтенсивний розвиток методів симетрійного аналізу почався у другій половині 20-го століття [9, 16, 26, 46, 53]. Зокрема, у монографії Л.В. Овсяннікова [26] автором побудована теорія частково-інваріантних розв'язків ДР. Серед українських вчених, застосування методів Лі до ДР започатковано В.П. Єрмаковим, Г.В. Пфейфером [28], М.К. Куренським [18]. Сучасне викладення теорії Лі і її застосувань для дослідження диференціальних рівнянь дано в монографіях [16, 26, 25, 53].

Поряд з класичним методом Лі в останній час широко розробляються нові методи симетрійного аналізу:
нелокальні симетрії Лі–Беклунда [16, 68];
негеометричні симетрії [46];
умовна симетрія [53, 34, 36, 39, 50];
дискретна симетрія [13, 46];
симплектична симетрія [108];
суперсиметрія [121, 10, 76, 64];
парасуперсиметрія [109, 61, 80, 63, 99].

Новий підхід до дослідження симетрійних властивостей ДРЧП – неліївський метод – був запропонований В.І. Фущичем [37]. Основна відмінність цього методу від класичного методу Лі полягає в тому, що базисні елементи алгебри інваріантності певного рівняння або системи рівнянь шукаються в класі інтегро-диференціальних або псевдодиференціальних операторів, в той час як у підході Лі вони є операторами першого порядку. Ці алгебри породжують нелокальні (неточкові) перетворення, тоді як алгебра Лі операторів першого порядку породжує локальні (точкові) перетворення. Неліївський метод був успішно застосований до рівнянь Максвела, Дірака, Ламе, Шредінгера [37, 45, 47, 48, 49, 84].

Дана дисертаційна робота присвячена симетрійному аналізу галілей–інваріантних рівнянь типу Шрьодінгера. Принцип відносності Галілея відіграє фундаментальну роль в квантовій механіці [101, 102]. Актуальною задачею математичної фізики є дослідження лінійних та нелінійних рівнянь, інваріантних відносно групи Галілея (зокрема, рівнянь високого порядку).

З математичної точки зору принцип відносності Галілея полягає в тому, що рівняння руху повинно бути інваріантним відносно лінійних перетворень

$$t \to t' = t,\ \vec{x} \to \vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}t,$$

де $\vec{v}$ – параметр перетворень (швидкість інерціальної системи відліку) [20]. Добре відомо, що до галілей–інваріантних рівнянь відносяться, зокрема, рівняння Шрьодінгера, Гамільтона–Якобі, теплопровідності та інші.

Рівняння Шрьодінгера

$$(S - V)\psi = 0, \tag{0.1}$$

де $S \equiv i\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{1}{2m}\triangle$ – оператор Шрьодінгера, V – потенціал взаємодії, лежить в основі квантової механіки. Симетрійні властивості рівняння (0.1) з потенціалом $V = V(\vec{x})$ досліджувались багатьма авторами [56, 70, 105, 106, 22]. В роботах [56, 70] знайдено всі нееквівалентні класи потенціалів, залежних від просторових змінних, які допускають нетривіальну ліївську симетрію. Міллер [22] виклав систематичний підхід, який показує, як відокремлення змінних пов'язано з множиною операторів симетрії рівняння (0.1) з відповідним потенціалом (тобто, з відповідною алгеброю інваріантності).

Останнім часом широко досліджується з симетрійної точки зору нелінійне рівняння Шрьодінгера (0.1), де потенціал залежить від модуля хвильової функції $V = V(|\psi|)$. Відомо [53], що це рівняння інваріантне відносно групи Галілея для довільної гладкої функції $V(|\psi|)$. В роботах [91, 88, 95, 116] побудовано класи розв'язків нелінійного рівняння Шродінгера методом редукції до звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). При цьому використовувалась ліївська симетрія рівняння Шродінгера.

Важливу роль в симетрійному аналізі рівнянь має поняття умовної симетрії (інваріантності) [39, 53]. В роботах [52, 44, 75] досліджена умовна інваріантність багатовимірного нелінійного рівняння Шродінгера та побудовано широкі класи розв'язків, які не можна отримати на основі ліївської симетрії.

Дослідженню симетрійних властивостей та побудові точних розв'язків нелінійних узагальнень рівняння Шродінгера присвячено ряд робіт [8, 74, 79, 87]. Відмітимо, що для побудови явних аналітичних розв'язків нелінійних рівнянь Шродінгера у випадку одної просторової змінної ефективним є метод оберненої задачі розсіяння (див., напр., [15, 14]).

Крім звичайної та добре відомої ліївської симетрії також вивчалися вищі симетрії (оператори симетрії вищих порядків) для вільного рівняння Шродінгера [23] та рівняння Шродінгера з деякими типами потенціалів, в тому числі з потенціалами суперсиметричного гармонічного осцилятора [24, 65]. В цих роботах показано, що потенціали, які відповідають точно розв'язуваним рівнянням Шродінгера [60], допускають оператори симетрії третього порядку. Дослідженню вищих симетрій двочастинкового рівняння Шродінгера присвячена робота [118].

Вивчення точно розв'язуваних потенціалів для рівняння Шродінгера було започатковано ще самими Шродінгером, який запропонував метод факторизації. Цей метод успішно застосовується для знаходження власних значень та власних функцій рівняння Шродінгера (в тому числі нелінійного) (див., напр., [2, 123, 96]). В роботах [3, 4] досліджуються локальні та нелокальні методи генерування точно розв'язуваних потенціалів.

Великий інтерес викликає вивчення суперсиметричних та парасуперсиметричних властивостей рівняння Шродінгера [63, 64, 66]. Суперсиметрія [121] дозволяє знаходити повні спектри широкого класа задач, які включають в себе всі відомі точно розв'язувані задачі квантової механіки, за допомогою простих обчислень [10, 76, 77, 100]. Суперсиметрична квантова механіка та її узагальнення на випадок довільної кількості суперзарядів розглянута у роботах [6, 67, 7], встановлено зв'язок між суперсиметричною квантовою механікою та оберненою задачеї розсіяння [7, 59]. Вивченню парасуперсиметричних моделей квантової механіки та їх зв'язку з суперсиметричними системами присвячені роботи [109, 61, 80, 57, 58] та інші.

Важливою задачею є дослідження галілей–інваріантного рівняння Гамільтона–Якобі для вільної частинки. Відомо [73], що це рівняння у $(3+1)$–вимірному просторі–часі інваріантне відносно конформної групи $C(1,4)$, яка локально ізоморфна повній групі Галілея $G_2(2,3)$ [53]. Вивченню симетрійних властивостей та побудові точних розв'язків рівняння Гамільтона–Якобі присвячені, зокрема, роботи [72, 5, 41].

Симетрійний аналіз (зокрема, групова класифікація) нелінійного рівняння теплопровідності проводиться у роботах [27, 12, 97] та ін. Інваріантні розв'язки нелінійних рівнянь дифузійного типу були побудовані, напр., в [11, 71]. Описано широкі класи нелінійних еволюційних рівнянь та систем рівнянь другого порядку, інваріантних відносно групи Галілея [85, 86].

Останнім часом досліджується багато рівнянь високих порядків, які інваріантні відносно групи Галілея та Пуанкаре. Зокрема, для опису теплових та дифузійних процесів було запропоновано біпараболічне рівняння четвертого порядку [42, 43], для опису незаряджених скалярних частинок у квантовій теорії поля – поліхвильові рівняння [35, 69, 90]. Значний інтерес представляє проблема дослідження рівнянь типу Шродінгера високого порядку, запропонованих В.І.Фущичем [35, 36].

В дисертаційній роботі методи симетрійного аналізу застосовані для дослідження властивостей галілей–інваріантних диференціальних рівнянь високого порядку, зокрема, узагальнених рівнянь шродінгерового типу, та побудові їх точних розв'язків. Вивчається симетрія галілей–інваріантних рівнянь з нефіксованим потенціалом (рівняння Шродінгера, рівняння конвективної дифузії, рівняння Шродінгера з конвективним членом, рівняння Гамільтона–Якобі з потенціалом), що дозволяє генерувати нові потенціали та точні розв'язки відповідних рівнянь. Досліджуються моделі супер- та парасуперсиметричної квантової механіки для довільної кількості зарядів.

Коротко сформулюємо основні означення та поняття (див., напр., [26, 25, 53]), які використовуються в дисертаційній роботі.

Нехай

$$L\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{r}{u}\right) = 0 \qquad (0.2)$$

– система диференціальних рівнянь в частинних похідних r–го порядку, де $u = u(x)$; $x = (x_0, \vec{x})$; $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$; $u \in \mathrm{R}^m$; $\underset{k}{u}$ – сукупність похідних k–го порядку функції u; $k = \overline{1.r}$; $k, n, m, r \in \mathrm{N}$.

Означення 0.1. *Група Лі перетворень вигляду*

$$\begin{aligned} \widetilde{x_\mu} &= f^\mu(x, u, \theta), \ \ \mu = \overline{0, n}, \\ \widetilde{u}^k &= g^k(x, u, \theta), \ \ k = \overline{1, m}, \end{aligned} \qquad (0.3)$$

де $\theta = (\theta_a, a = \overline{1, l})$, *називається* l*–параметричною групою інваріантності рівняння (0.2), якщо множина розв'язків (0.2) інваріантна відносно перетворень (0.3).*

Означення 0.2. *Алгеброю Лі групи (0.3) називається лінійний векторний простір, базисом якого є диференціальні оператори вигляду*

$$X_a = \xi_a^\mu(x, u)\partial_{x_\mu} + \eta_a^k(x, u)\partial_{u^k}, \qquad a = \overline{1, l}, \qquad (0.4)$$

де

$$\xi_a^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial \theta_a}\bigg|_{\theta = 0}, \qquad \eta_a^k = \frac{\partial g^k}{\partial \theta_a}\bigg|_{\theta = 0}, \tag{0.5}$$

з введеною операцією комутування

$$X_a,\ X_b \rightarrow [X_a, X_b] = X_a X_b - X_b X_a.$$

Базисні елементи алгебри Лі задовільняють співвідношення вигляду

$$[X_a, X_b] = C_{ab}^k X_k,$$

де C_{ab}^k – деякі дійсні параметри, що називаються структурними константами даної алгебри Лі, $a, b, k = \overline{1, l}$ (тут і далі за індексами, що повторюються, мається на увазі підсумовування).

Існує однозначна відповідність між групою Лі перетворень (0.3) та її алгеброю Лі. Для відновлення групи Лі за її алгеброю Лі необхідно розв'язати наступну задачу Коші (систему рівнянь Лі):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f^\mu}{\partial \theta_a} = \xi_a^\mu(f, g), \quad \frac{\partial g^k}{\partial \theta_a} = \eta_a^k(f, g), \\ &f^\mu|_{\theta=0} = x_\mu, \qquad g^k|_{\theta=0} = u^k. \end{aligned} \tag{0.6}$$

Означення 0.3. *Скалярна функція $F(x, u)$ називається абсолютним інваріантом групи (0.3), якщо*

$$F\left(f^\mu(x, u, \theta), g^k(x, u, \theta)\right) = F(x, u).$$

Теорема 0.1. *$F(x, u)$ є інваріантом групи (0.3) тоді і тільки тоді, коли*

$$\xi_a^\mu \frac{\partial F}{\partial x_\mu} + \eta_a^k \frac{\partial F}{\partial u^k} = 0, \quad a = \overline{1, l}.$$

Нижче наведемо класичний алгоритм Лі знаходження алгебри інваріантності системи рівнянь (0.2).

Теорема 0.2. *Диференціальний оператор*

$$X = \xi^{\mu}(x, u)\partial_{x_\mu} + \eta^k(x, u)\partial_{u^k}$$

є оператором інваріантності системи (0.2) тоді і тільки тоді, коли

$$\underset{r}{X} L\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{r}{u}\right)\Bigg|_{L=0} \equiv 0, \tag{0.7}$$

де $\underset{r}{X}$ *– r–е продовження оператора* X*, яке будується за формулами*

$$\underset{r}{X} = X + \zeta^k_{i_1}\partial_{u^k_{i_1}} + \cdots + \zeta^k_{i_1 i_2 \cdots i_r}\partial_{u^k_{i_1 i_2 \cdots i_r}},$$

$$\zeta^k_{i_1} = D_{i_1}(\eta^k) - u^k_j D_{i_1}(\xi^j),$$

$$\zeta^k_{i_1 i_2} = D_{i_2}(\zeta^k_{i_1}) - u^k_{i_1 j} D_{i_2}(\xi^j),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\zeta^k_{i_1 i_2 \cdots i_r} = D_{i_r}(\zeta^k_{i_1 \cdots i_{r-1}}) - u^k_{i_1 i_2 \cdots i_{r-1} j} D_{i_r}(\xi^j),$$

$$D_i = \partial_{x_i} + u^k_i \partial_{u^k} + u^k_{i i_1}\partial_{u^k_{i_1}} + \cdots + u^k_{i i_1 \cdots i_{r-1}}\partial_{u^k_{i_1 \cdots i_{r-1}}},$$

$$i, i_1, \ldots i_r, j = \overline{0, n}, \qquad k = \overline{1, m}.$$

З умов інваріантності (0.7) після розщеплення по похідним одержуємо систему лінійних ДРЧП відносно функцій ξ^μ, η^k (систему визначальних рівнянь), загальний розв'язок якої визначає максимальну (в розумінні Лі) алгебру інваріантності рівняння (0.2). Відповідна їй локальна група Лі визначається за формулами (0.6).

Для лінійної системи ДРЧП

$$L(x, \partial)u(x) = 0, \tag{0.8}$$

де $L(x, \partial)$ – лінійний диференціальний оператор, оператори симетрії (точкової), які діють у просторі функцій $u(x)$, можна представити у вигляді

$$Q = \xi^\mu(x)\partial_{x_\mu} + \eta(x). \tag{0.9}$$

Тут $\eta(x)$ – деякі матриці розмірності $m \times m$, $\partial_{x_\mu} \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$.

В підході Лі оператор (0.9) запишеться так:

$$X = \xi^\mu(x)\partial_{x_\mu} - (\eta(x)u)^k \partial_{u^k}.$$

За допомогою оператора (0.9) умову інваріантності системи (0.8) можна подати у вигляді [38]

$$LQu(x)|_{Lu(x)=0} = 0. \tag{0.10}$$

Умова (0.10) означає, що оператор Q перетворює один розв'язок системи (0.8) в інший, тобто не виводить із множини розв'язків. Співвідношення (0.10) можна переписати еквівалентним чином:

$$[L, Q]u \equiv (LQ - QL)u(x) = 0,$$

або

$$[L, Q] = \lambda(x)L, \tag{0.11}$$

де $\lambda(x)$ – деяка матриця розмірності $m \times m$.

Означення 0.4. *Оператор (0.9) називається оператором симетрії системи (0.8), якщо виконується умова (0.11).*

Якщо деяка система ДРЧП допускає оператор (0.9), то її розв'язок можна шукати у вигляді [35]

$$u(x) = A(x)\varphi(\omega), \tag{0.12}$$

де матриця $A(x)$ розмірності $m \times m$ та нові змінні $\omega = \omega(x)$ визначаються з умов

$$QA(x) \equiv [\xi^\mu(x)\partial_{x_\mu} + \eta(x)]A(x) = 0,$$
$$\xi^\mu(x)\partial_{x_\mu}\omega(x) = 0.$$

Анзац (0.12) забезпечує редукцію вихідної системи ДРЧП до системи ДРЧП з меншою кількістю незалежних змінних або до системи звичайних диференціальних рівнянь для функції $\varphi(\omega)$.

Тепер дамо короткий огляд проблем, які розглянуто в дисертації.

Дисертація складається із вступу, трьох розділів, висновків та списку використаної літератури. У першому розділі розглянуто галілей–інваріантні ДР високого порядку. Описано лінійні рівняння довільного порядку, інваріантні відносно групи Галілея $AG(1,3)$. Проведена симетрійна класифікація нелінійних рівнянь шродінгерового типу та побудовані класи розв'язків цих рівнянь. Описано класи потенціалів узагальнених рівнянь Шродінгера, які допускають нетривіальну лiївську симетрію. Проведено повну групову класифікацію для деяких галілей–інваріантних систем ДР. Також досліджена симетрія узагальнених рівнянь та систем рівнянь типу Гамільтона–Якобі.

Другий розділ присвячений симетрійному аналізу галілей–інваріантних рівнянь з нефіксованим потенціалом. Для розширення симетрії галілей–інваріантних рівнянь застосовано підхід, в якому потенціал вважається новою залежною змінною [34]. На основі цього підходу досліджена симетрія рівняння Шродінгера з потенціалом, рівняння конвективної дифузії, рівняння Шродінгера з конвективним членом. Розглянуто системи, які включають рівняння Шродінгера та додаткові умови на потенціал, побудовані точні розв'язки таких систем. Досліджена симетрія рівняння Гамільтона–Якобі з потенціалом. Побудовані контактні перетворення для рівняння Шродінгера з нефіксованим потенціалом.

Третій розділ дисертації присвячений дослідженню супер- та парасуперсиметричних моделей в квантовій механіці. Побудована та вивчена модель парасуперсиметричної квантової механіки порядку p для довільної кількості парасуперзарядів. Запропоновано метод побудови парасуперсиметричних моделей, виходячи із суперсиметричних.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах [29, 30, 31, 93, 113, 114, 115]. Вони доповідалися на семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України, на міжнародних наукових конференціях: "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Київ, 1995), 4-th International Conference on Integral Methods in Science and Engineering (Оулу, Фінляндія, 1996), на IV та V Міжнародних наукових конференціях ім. акад. М.Кравчука (Київ, 1995, 1996), на науковій конференції "Сучасні фізико–математичні дослідження молодих науковців вузів України" в Київському національному університеті ім. Тараса Шевченка(1995), на міжнародній конференції "Герценовские чтения" (Санкт-Петербург, 1997).

Виражаю щиру подяку моїм науковим керівникам член–кор. НАН України Фущичу В.І. та доктору фіз.–мат. наук Нікітіну А.Г. за постановку задач і постійну увагу до роботи, науковому співробітнику, канд. фіз.–мат. наук Цифрі І.М. за наукове співробітництво в процесі роботи над дисертацією, а також усім учасникам наукового семінару відділу прикладних досліджень Інституту математики за постійне і корисне обговорення результатів.

Розділ 1

Рівняння параболічного типу високого порядку та принцип відносності Галілея

В основі квантової механіки лежить рівняння Шродінгера

$$L\psi \equiv (S+V)\psi = 0 \tag{1.1}$$

де $S = p_0 - \frac{p_a^2}{2m}$, $p_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0} = i\frac{\partial}{\partial t}$, $p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}$, $V = V(\vec{x}, |\Psi|)$, $a = \overline{1,3}$. У випадку, коли потенціал V є функцією тільки від координат $\vec{x}$, (1.1) є стандартним лінійним рівнянням Шродінгера.

Фундаментальною властивістю (1.1) (у випадку $V = 0$) є сумісність цього рівняння з принципом відносності Галілея. Іншими словами, (1.1) ($V = 0$) інваріантне відносно групи Галілея $G(1,3)$. Алгебра Лі $AG(1,3) =< P_0, P_a, J_{ab}, G_a >$ групи Галілея породжується операторами (див., наприклад, [53],[46])

$$\begin{aligned} &P_0 = p_0,\ P_a = p_a, \\ &J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a,\ a \neq b,\ a, b = 1, 2, 3, \\ &G_a = t p_a - m x_a. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Оператори $< G_a >$ генерують стандартні перетворення Галілея

$$t \to t' = t, \quad x_a \to x_a' = x_a + v_a t. \tag{1.3}$$

Означення 1.1. *Будемо говорити, що рівняння (1.1) сумісне з принципом відносності Галілея, якщо воно інваріантне відносно операторів* $< P_0, P_a, J_{ab}, G_a >$.

Відомим є наступне твердження:

Теорема 1.1 [85, 92, 89]. *Серед лінійних ДРЧП першого порядку по часу* t *та другого порядку по просторовим змінним* $\vec{x}$, *існує єдине рівняння (1.1)* ($V = \lambda = const$), *інваріантне відносно алгебри* $AG(1,3)$ *з базисними операторами (1.2).*

Цю теорему можна розглядати як метод виведення рівняння Шродінгера з принципу відносності Галілея [85, 35].

В даному розділі дається відповідь на таке запитання: чи існують рівняння, нееквівалентні рівнянню Шродінгера, для яких справджується принцип відносності Галілея?

В роботах Фущича [35, 83] запропоновано узагальнення рівняння Шродінгера

$$(\lambda_1 S + \lambda_2 S^2 + \cdots + \lambda_l S^l + V)\psi = 0, \qquad (1.4)$$

де $S^2 = SS, \ldots, S^l = S^{l-1}S$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ – довільні параметри.

Рівняння (1.4) при $V = \lambda = const$, так як і рівняння (1.1), інваріантне відносно алгебри $AG(1,3)$, тобто сумісне з принципом відносності Галілея. Чи єдине таке рівняння серед лінійних рівнянь вищих порядків? Нижче, ми дамо позитивну відповідь на це запитання.

Крім того, у даному параграфі описано та досліджено класи нелінійних рівнянь та систем рівнянь типу Шродінгера високого порядку, які інваріантні відносно алгебри Галілея, розширеної та повної алгебр Галілея. Побудовано розв'язки таких рівнянь. Проведена симетрійна класифікація потенціалів для рівнянь типу (1.4). Також досліджена симетрія деяких узагальнених рівнянь типу Гамільтона–Якобі.

Основні результати розділу опубліковані в роботах [113, 93, 115].

1.1 Лінійні та нелінійні рівняння довільного порядку, інваріантні відносно групи Галілея

В даному параграфі ми розв'яжемо такі задачі:

1. Опишемо всі лінійні рівняння довільного порядку, інваріантні відносно алгебри $AG(1, n)$.

2. Опишемо нелінійні рівняння типу (1.4), інваріантні відносно алгебри Галілея $AG(1, n)$, розширеної алгебри Галілея

$$AG_1(1, n) =< AG(1, n), D >$$

та повної алгебри Галілея

$$AG_2(1, n) =< AG_1(1, n), A >$$

(D та A – оператор дилатації та проективний оператор, відповідно, n – кількість просторових змінних).

1. Доведемо наступне твердження:

Теорема 1.2.

А. *Серед лінійних ДРЧП довільного парного порядку* $2l$

$$\begin{aligned} &L\psi = 0, \\ &L = A + B^{\mu}\partial_{\mu} + C^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu} + D^{\mu\nu\sigma}\partial_{\mu\nu\sigma} + \cdots + E^{\overbrace{\mu\nu\sigma\ldots\kappa}^{2l}}\partial_{\underbrace{\mu\nu\sigma\ldots\kappa}_{2l}}, \end{aligned} \qquad (1.5)$$

існує єдине рівняння

$$(\lambda_1 S + \lambda_2 S^2 + \cdots + \lambda_l S^l)\psi = \lambda\psi, \qquad (1.6)$$

інваріантне відносно алгебри Галілея $AG(1, 3)$ *з базисними операторами (1.2).*

Б. *Не існує лінійних ДРЧП довільного непарного порядку* $2l+1$

$$
\begin{aligned}
&L\Psi = 0,\\
&L = A + B^{\mu}\partial_{\mu} + C^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu} + D^{\mu\nu\sigma}\partial_{\mu\nu\sigma} + \cdots + E^{\overbrace{\mu\nu\sigma\ldots\kappa}^{2l}}\partial_{\underbrace{\mu\nu\sigma\ldots\kappa}_{2l}} +\\
&\quad + G^{\overbrace{\mu\nu\sigma\ldots\kappa\rho}^{2l+1}}\partial_{\underbrace{\mu\nu\sigma\ldots\kappa\rho}_{2l+1}},
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

інваріантного відносно алгебри $AG(1,3)$ *з базисними операторами (1.2).*

Тут $\partial_{\mu} \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_{\mu}}$, $\partial_{\mu\nu} \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x_{\mu}\partial x_{\nu}}$, $\ldots$ $(\mu, \nu, \ldots, \rho = \overline{0,3})$, λ_j $(j = \overline{1,l})$ та λ – довільні сталі, $\lambda_l \neq 0$. Припускається також, що A, B^{μ}, $C^{\mu\nu}$, $D^{\mu\nu\sigma}$, $\ldots$, $E^{\overbrace{\mu\nu\sigma\ldots\kappa}^{2l}}$, $G^{\overbrace{\mu\nu\sigma\ldots\kappa\rho}^{2l+1}}$ – деякі функції від t і $\vec{x}$.

Доведення. Оскільки розглядаються лінійні ДРЧП, то для доведення теореми застосуємо критерій інваріантності рівняння відносно алгебри з базисними операторами Q_j у вигляді комутаційних співвідношень (див. вступ). А саме, оператор Q_j називається оператором симетрії рівняння (1.5), якщо виконується умова

$$[L, Q_j] = \lambda_{Q_j}(x)L,$$

для деякої гладкої функції $\lambda_{Q_j}(x)$.

Наведемо детальне доведення частини А теореми.

Для зручності доведення перепишемо оператор L рівняння (1.5) у вигляді:

$$L = \sum_{\beta=0}^{2l} \sum_{\substack{\beta_0+\beta_1+\beta_2+\beta_3=\beta,\\ \beta_\nu \in N\bigcup\{0\},\ \nu=\overline{0,3}}} \overset{(\beta)}{E}{}^{\overbrace{0\ldots0}^{\beta_0}\overbrace{1\ldots1}^{\beta_1}\overbrace{2\ldots2}^{\beta_2}\overbrace{3\ldots3}^{\beta_3}} \partial_{\underbrace{0\ldots0}_{\beta_0}\underbrace{1\ldots1}_{\beta_1}\underbrace{2\ldots2}_{\beta_2}\underbrace{3\ldots3}_{\beta_3}} \tag{1.8}$$

1) Запишемо умову інваріантності

$$[P_0, L] = \alpha^0 L$$

рівняння (1.5) відносно оператора P_0 у розгорнутому вигляді:

$$
\begin{gathered}
i\sum_{\beta=0}^{2l}\sum_{\substack{\beta_0+\beta_1+\beta_2+\beta_3=\beta,\\ \beta_\nu\in N\bigcup\{0\},\,\nu=\overline{0,3}}}\overset{(\beta)}{E}{}_0^{\overbrace{0\ldots0}^{\beta_0}\overbrace{1\ldots1}^{\beta_1}\overbrace{2\ldots2}^{\beta_2}\overbrace{3\ldots3}^{\beta_3}}\partial_{\underbrace{0\ldots0}_{\beta_0}\underbrace{1\ldots1}_{\beta_1}\underbrace{2\ldots2}_{\beta_2}\underbrace{3\ldots3}_{\beta_3}}=\\
=\alpha^0\sum_{\beta=0}^{2l}\sum_{\substack{\beta_0+\beta_1+\beta_2+\beta_3=\beta,\\ \beta_\nu\in N\bigcup\{0\},\,\nu=\overline{0,3}}}\overset{(\beta)}{E}{}^{\overbrace{0\ldots0}^{\beta_0}\overbrace{1\ldots1}^{\beta_1}\overbrace{2\ldots2}^{\beta_2}\overbrace{3\ldots3}^{\beta_3}}\partial_{\underbrace{0\ldots0}_{\beta_0}\underbrace{1\ldots1}_{\beta_1}\underbrace{2\ldots2}_{\beta_2}\underbrace{3\ldots3}_{\beta_3}},
\end{gathered}
\tag{1.9}
$$

де нижній індекс у коефіцієнтів E_0 означає похідну по $x_0 = t$. Оскільки рівняння має порядок $2l$, то хоча б один з коефіцієнтів при старших похідних відмінний від нуля. Нехай

$$
\overset{(2l)}{E}{}^{\overbrace{0\ldots0}^{\sigma_0}\overbrace{1\ldots1}^{\sigma_1}\overbrace{2\ldots2}^{\sigma_2}\overbrace{3\ldots3}^{\sigma_3}}\neq 0 \quad (\sigma_0+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=2l).
$$

Не обмежуючи загальності, можемо покласти його рівним 1. Тоді

$$
\overset{(2l)}{E}{}_0^{\overbrace{0\ldots0}^{\sigma_0}\overbrace{1\ldots1}^{\sigma_1}\overbrace{2\ldots2}^{\sigma_2}\overbrace{3\ldots3}^{\sigma_3}}=0,
$$

і з рівняння (1.9) випливає, що $\alpha^0 = 0$, а отже всі коефіцієнти $\overset{(\beta)}{E}{}^{\overbrace{0\ldots0}^{\beta_0}\overbrace{1\ldots1}^{\beta_1}\overbrace{2\ldots2}^{\beta_2}\overbrace{3\ldots3}^{\beta_3}}$ не залежать від t.

2) З умови інваріантності рівняння (1.5) відносно операторів трансляцій по просторовим координатам та міркувань, аналогічних п. 1) випливає, що всі коефіцієнти $\overset{(\beta)}{E}{}^{\overbrace{0\ldots0}^{\beta_0}\overbrace{1\ldots1}^{\beta_1}\overbrace{2\ldots2}^{\beta_2}\overbrace{3\ldots3}^{\beta_3}}$ не залежать і від x_a, тобто є сталими.

3) Умова інваріантності відносно операторів поворотів має вигляд

$$
[J_{ab}, L] = \gamma^{ab} L.
$$

Запишемо у розгорнутому вигляді умову інваріантності відносно оператора J_{12}:

$$\begin{aligned}
&-i\sum_{\beta=0}^{2l}\sum_{\substack{\beta_0+\beta_1+\beta_2+\beta_3=\beta,\\ \beta_\nu\in\mathbb{N}\bigcup\{0\},\ \nu=\overline{0,3}}}(-\beta_1\,\overset{(\beta)}{E}{}^{\overbrace{0\dots0}^{\beta_0}\overbrace{1\dots1}^{\beta_1}\overbrace{2\dots2}^{\beta_2}\overbrace{3\dots3}^{\beta_3}}\partial_{\underbrace{0\dots0}_{\beta_0}\underbrace{1\dots1}_{\beta_1-1}\underbrace{2\dots2}_{\beta_2+1}\underbrace{3\dots3}_{\beta_3}}+\\
&+\beta_2\,\overset{(\beta)}{E}{}^{\overbrace{0\dots0}^{\beta_0}\overbrace{1\dots1}^{\beta_1}\overbrace{2\dots2}^{\beta_2}\overbrace{3\dots3}^{\beta_3}}\partial_{\underbrace{0\dots0}_{\beta_0}\underbrace{1\dots1}_{\beta_1+1}\underbrace{2\dots2}_{\beta_2-1}\underbrace{3\dots3}_{\beta_3}})=\\
&=\gamma^{12}\sum_{\beta=0}^{2l}\sum_{\substack{\beta_0+\beta_1+\beta_2+\beta_3=\beta,\\ \beta_\nu\in\mathbb{N}\bigcup\{0\},\ \nu=\overline{0,3}}}\overset{(\beta)}{E}{}^{\overbrace{0\dots0}^{\beta_0}\overbrace{1\dots1}^{\beta_1}\overbrace{2\dots2}^{\beta_2}\overbrace{3\dots3}^{\beta_3}}\partial_{\underbrace{0\dots0}_{\beta_0}\underbrace{1\dots1}_{\beta_1}\underbrace{2\dots2}_{\beta_2}\underbrace{3\dots3}_{\beta_3}}
\end{aligned}\tag{1.10}$$

Припустимо, що всі $\gamma^{ab}\neq 0$. Тоді з рівняння (1.10) та аналогічних рівнянь для J_{13}, J_{23} випливає, що

$$\overset{(2l)}{E}{}^{\overbrace{3\dots3}^{2l}}=\overset{(2l)}{E}{}^{0\overbrace{3\dots3}^{2l-1}}=\overset{(2l)}{E}{}^{00\overbrace{3\dots3}^{2l-2}}=\dots=\overset{(2l)}{E}{}^{\overbrace{0\dots0}^{2l-1}3}=\overset{(2l)}{E}{}^{\overbrace{0\dots0}^{2l}}=0.$$

Крім того,

$$\overset{(2l)}{E}{}^{\overbrace{2\dots2}^{2l}}=\overset{(2l)}{E}{}^{1\overbrace{2\dots2}^{2l-1}}=\overset{(2l)}{E}{}^{11\overbrace{2\dots2}^{2l-2}}=\dots=\overset{(2l)}{E}{}^{\overbrace{1\dots1}^{2l-1}2}=\overset{(2l)}{E}{}^{\overbrace{1\dots1}^{2l}}=0,$$

і так далі. Аналогічно, всі інші коефіцієнти при старших степенях обертаються в нуль. Якщо хоча б одна з функцій $\gamma^{ab}\neq 0$, то результат аналогічний (тобто всі коефіцієнти при старших степенях обертаються в нуль). Отже, $\gamma^{ab}=0$ $(a,b=1,2,3)$. Тоді з рівності (1.10) випливають такі рівності:

$$(\beta_1+1)\,\overset{(\beta)}{E}{}^{\overbrace{0\dots0}^{\beta_0}\overbrace{1\dots1}^{\beta_1+1}\overbrace{2\dots2}^{\beta_2-1}\overbrace{3\dots3}^{\beta_3}}=(\beta_2+1)\,\overset{(\beta)}{E}{}^{\overbrace{0\dots0}^{\beta_0}\overbrace{1\dots1}^{\beta_1-1}\overbrace{2\dots2}^{\beta_2+1}\overbrace{3\dots3}^{\beta_3}}.$$

З цієї рівності та аналогічних рівностей для інших індексів випливає такий результат:

$$\overset{(1)}{E}{}^1=\overset{(1)}{E}{}^2=\overset{(1)}{E}{}^3=0$$

$$\overset{(2)}{E}{}^{11}=\overset{(2)}{E}{}^{22}=\overset{(2)}{E}{}^{33},\ \overset{(2)}{E}{}^{01}=\overset{(2)}{E}{}^{02}=\overset{(2)}{E}{}^{03}=0,\ \overset{(2)}{E}{}^{12}=\overset{(2)}{E}{}^{13}=\overset{(2)}{E}{}^{23}=0$$

$$\ldots$$

$$\overset{(\beta)}{E}{}^{\overbrace{0\ldots0}^{\beta_0}\overbrace{1\ldots1}^{\beta_1}\overbrace{2\ldots2}^{\beta_2}\overbrace{3\ldots3}^{\beta_3}}=0,$$

якщо хоча б один з індексів β_1, β_2 або β_3 непарний.

Якщо ж всі індекси β_1, β_2, β_3 парні, то повинні виконуватись співвідношення

$$\overset{(\beta)}{E}{}^{\overbrace{0\ldots0}^{\beta_0}\overbrace{1\ldots1}^{\beta_1}\overbrace{2\ldots2}^{\beta_2}\overbrace{3\ldots3}^{\beta_3}}=\frac{\left(\frac{\beta_1+\beta_2+\beta_3}{2}\right)!}{\left(\frac{\beta_1}{2}\right)!\left(\frac{\beta_2}{2}\right)!\left(\frac{\beta_3}{2}\right)!}\overset{(\beta)}{E}{}^{\overbrace{0\ldots0}^{\beta_0}\overbrace{1\ldots1}^{\beta-\beta_0}}. \tag{1.11}$$

Тут $\beta=\beta_0+\beta_1+\beta_2+\beta_3$, $\beta=\overline{0,2l}$, $\beta_\nu\in\mathrm{N}\cup\{0\}$.

Іншими словами, оператор L має вигляд

$$L\equiv Q(p_0,p_ap_a)\equiv Q(p_0,p_1^2+p_2^2+p_3^2),$$

де Q – поліном від p_0 та p_ap_a.

4) Умова інваріантності відносно операторів Галілея має вигляд:

$$[G_a,L]=\rho^aL.$$

Розпишемо цю рівність для оператора G_1 у розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\beta=0}^{2l}\sum_{\substack{\beta_0+\beta_1+\beta_2+\beta_3=\beta,\\ \beta_\nu\in\mathrm{N}\bigcup\{0\},\ \nu=\overline{0,3}}}\overset{(\beta)}{E}{}^{\overbrace{0\ldots0}^{\beta_0}\overbrace{1\ldots1}^{\beta_1}\overbrace{2\ldots2}^{\beta_2}\overbrace{3\ldots3}^{\beta_3}}(i\beta_0\partial_{\underbrace{0\ldots0}_{\beta_0-1}\underbrace{1\ldots1}_{\beta_1+1}\underbrace{2\ldots2}_{\beta_2}\underbrace{3\ldots3}_{\beta_3}}+\\
&+m\beta_1\partial_{\underbrace{0\ldots0}_{\beta_0}\underbrace{1\ldots1}_{\beta_1-1}\underbrace{2\ldots2}_{\beta_2}\underbrace{3\ldots3}_{\beta_3}})=\\
&=\rho^1\sum_{\beta=0}^{2l}\sum_{\substack{\beta_0+\beta_1+\beta_2+\beta_3=\beta,\\ \beta_\nu\in\mathrm{N}\bigcup\{0\},\ \nu=\overline{0,3}}}\overset{(\beta)}{E}{}^{\overbrace{0\ldots0}^{\beta_0}\overbrace{1\ldots1}^{\beta_1}\overbrace{2\ldots2}^{\beta_2}\overbrace{3\ldots3}^{\beta_3}}\partial_{\underbrace{0\ldots0}_{\beta_0}\underbrace{1\ldots1}_{\beta_1}\underbrace{2\ldots2}_{\beta_2}\underbrace{3\ldots3}_{\beta_3}}
\end{aligned}\tag{1.12}$$

Припустимо, що $\rho^1 \neq 0$. Прирівняємо коефіцієнти при $\partial_{\underbrace{0\ldots0}_{\beta_0}\underbrace{2\ldots2}_{\beta_2}\underbrace{3\ldots3}_{\beta_3}}$ і отримаємо, що $\overset{(2l)}{E}{}^{\overbrace{0\ldots0}^{\beta_0}\overbrace{2\ldots2}^{\beta_2}\overbrace{3\ldots3}^{\beta_3}} = 0$. Враховуючи результат п. 2), робимо висновок, що всі коефіцієнти при старших похідних дорівнюють нулеві. Отже, $\rho^1 = 0$. Аналогічно, $\rho^2 = \rho^3 = 0$. Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях в рівності (1.12) та аналогічних рівностях для G_2 і G_3.

З (1.12) випливають такі рівності:

$$i(\beta_0+1)\overset{(\beta)}{E}{}^{\overbrace{0\ldots0}^{\beta_0+1}\overbrace{1\ldots1}^{\beta_1-1}\overbrace{2\ldots2}^{\beta_2}\overbrace{3\ldots3}^{\beta_3}} = -m(\beta_1+1)\overset{(\beta+1)}{E}{}^{\overbrace{0\ldots0}^{\beta_0}\overbrace{1\ldots1}^{\beta_1+1}\overbrace{2\ldots2}^{\beta_2}\overbrace{3\ldots3}^{\beta_3}} \tag{1.13}$$

З цих рівностей випливає, що

$$\overset{(2)}{E}{}^{11} = -\frac{i}{2m}\overset{(1)}{E}{}^{0},$$

$$\overset{(4)}{E}{}^{1111} = -\frac{i}{4m}\overset{(3)}{E}{}^{011} = -\frac{1}{4m^2}\overset{(2)}{E}{}^{00},$$

і так далі.

$$\overset{(\beta)}{E}{}^{\overbrace{0\ldots0}^{\beta_0}\overbrace{1\ldots1}^{\beta_1}\overbrace{2\ldots2}^{\beta_2}\overbrace{3\ldots3}^{\beta_3}} = 0,$$

якщо $\beta_0 > l$.

З рівності (1.13) та аналогічних рівностнй для інших коефіцієнтів випливає, що оператор L має вигляд

$$L \equiv Q(p_0 - \frac{1}{2m}p_a p_a).$$

де Q – поліном від $p_0 - \dfrac{1}{2m}p_a p_a$. Таким чином, ми отримали твердження частини А теореми. Повністю аналогічна схема доведення частини Б теореми 1.2 для непарних порядків. Теорему доведено.

Наслідок 1. Серед лінійних ДРЧП четвертого порядку існує єдине рівняння, інваріантне відносно алгебри $AG(1,3)$ з базисними операторами (1.2). Це рівняння має вигляд

$$(\lambda_1 S + \lambda_2 S^2)\psi = \lambda\psi. \tag{1.14}$$

Зауваження 1. Теорема 1.1 справедлива також для простору довільної розмірності n.

2. Розглянемо тепер нелінійне ДРЧП типу (1.4) у $(n+1)$ -вимірному просторі–часі:

$$S^l\psi + F(|\psi|)\psi = 0, \tag{1.15}$$

де $|\psi|$ – модуль комплексної функції ψ, l – довільний натуральний степінь, F – фіксована комплексна фукнція від $|\psi|$.

Проведемо симетрійну класифікацію рівняння (1.15), тобто знайдемо всі нееквівалентні класи функцій $F(|\psi|)$, які допускають нетривіальну симетрію рівняння (1.15).

Теорема 1.3. *Рівняння (1.15) інваріантне відносно алгебр:*
1) $< P_0, P_a, J_{ab}, G_a, Q_1 >$, *тоді і тільки тоді, коли* F *довільна гладка функція;*
2) $< P_0, P_a, J_{ab}, G_a, Q_1, Q_2 >$, *тоді і тільки тоді, коли* $F = const \neq 0;$
3) $< P_0, P_a, J_{ab}, G_a, Q_1, \tilde{D} >$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$F = C|\psi|^k,\ k \neq 0;$$

4) $< P_0, P_a, J_{ab}, G_a, Q_1, D, A >$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$F = C|\psi|^{\frac{4l}{n+2-2l}};$$

5) $< P_0, P_a, J_{ab}, G_a, Q_1, Q_2, D, A >$. *тоді і тільки тоді, коли* $F = 0$.

Тут індекси a, b змінюються від 1 до n, $a \neq b$, k – довільне число ($k \neq 0$), оператори симетрії мають таке зображення:

$$P_0 = p_0,\ P_a = p_a,\ J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a,\ G_a = t\partial_{x_a} + imx_a Q_1,$$

$$\begin{aligned}
&Q_1 = \psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*},\ Q_2 = \psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*},\\
&\tilde{D} = 2t\partial_t + x^c\partial_{x_c} - (2l/k)Q_2,\\
&D = 2t\partial_t + x^c\partial_{x_c} - \frac{n+2-2l}{2}Q_2,\\
&A = t^2\partial_t + tx^c\partial_{x_c} + (i/2)mx^c x_c Q_1 - \frac{n+2-2l}{2}tQ_2,
\end{aligned} \qquad (1.16)$$

де за індексом c, що повторюється, проводиться підсумування від 1 до n.

Доведення теореми здійснюється за допомогою інфінітезимального алгоритму С. Лі [53, 107]. Оскільки воно вимагає досить громіздких обчислень, ми наведемо лише його схему.

У підході Лі інфінітезимальний оператор рівняння (1.15) має вигляд:

$$X = \xi^\mu(t, \vec{x}, \psi, \psi^*)\partial_\mu + \eta(t, \vec{x}, \psi, \psi^*)\partial_\psi + \eta^*(t, \vec{x}, \psi, \psi^*)\partial_{\psi^*}. \qquad (1.17)$$

Критерій інваріантності рівняння (1.15) відносно алгебри (1.17) має вигляд:

$$\underset{2l}{X}(S^l\psi + F(|\psi|)\psi)\mid_{S^l\psi = -F(|\psi|)\psi} = 0, \qquad (1.18)$$

де $\underset{2l}{X}$ – $(2l)$ продовження оператору (1.17).

Якщо подіяти оператором $\underset{2l}{X}$ на вираз $S^l\psi + F(|\psi|)\psi$, ми отримаємо:

$$\underset{2l}{X}(S^l\psi + F(|\psi|)\psi) = \sum_{\substack{l_0 + l_1 + \ldots + l_n = l,\\ l_\nu \in \mathbb{N}\cup\{0\},\, \nu = \overline{0,n}}} (i)^{l_0}\left(\frac{1}{2m}\right)^{l-l_0}\frac{l!}{l_0! l_1! \ldots l_n!}\times$$

$$\times\zeta_{\underbrace{0\ldots0}_{l_0}\underbrace{1\ldots1}_{2l_1}\ldots\underbrace{n\ldots n}_{2l_n}} + \eta F(|\psi|) + \frac{1}{2}F'(|\psi|)|\psi|(\eta + \frac{\psi}{\psi^*}\eta^*), \qquad (1.19)$$

де

$$\zeta_{\underbrace{0\ldots0}_{l_0}\underbrace{1\ldots1}_{2l_1}\ldots\underbrace{n\ldots n}_{2l_n}} = D^{l_0}D^{2l_1}\ldots D^{2l_n}\eta -$$
$$-\sum_{\substack{0\le\alpha_0\le l_0,\ 0\le\alpha_\nu\le 2l_\nu,\ \nu=\overline{1,n},\ \{\alpha_0,\alpha_\nu\}\in\mathbb{N}\cup\{0\},\\ \alpha_0+\alpha_1\ldots+\alpha_n<l_0+2l_1+\cdots+2l_n}} C^{\alpha_0}_{l_0}C^{\alpha_1}_{2l_1}\ldots C^{\alpha_n}_{2l_n}\times$$
$$\times\psi_{\mu\underbrace{0\ldots0}_{\alpha_0}\underbrace{1\ldots1}_{\alpha_1}\ldots\underbrace{n\ldots n}_{\alpha_n}}D^{l_0-\alpha_0}D^{2l_1-\alpha_1}\ldots D^{2l_n-\alpha_n}\xi^\mu. \tag{1.20}$$

Тут C^α_β – біноміальні коефіцієнти, D_ν – оператор повного диференціювання: $D_\nu = \partial_{x_\nu} + \psi_\nu\partial_\psi + \psi^*_\nu\partial_{\psi^*} + \psi_{\mu\nu}\partial_{\psi_\mu} + \psi^*_{\mu\nu}\partial_{\psi^*_\mu} + \ldots$; $\psi_\mu = \dfrac{\partial\psi}{\partial x_\mu}$, $\psi_{\nu\mu} = \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_\nu\partial x_\mu}$ і так далі.

Підставляючи (1.19) і (1.20) у рівняння (1.18), переходячи на многовид і розщеплюючи отримане рівняння за незалежними змінними, ми прийдемо до перевизначеної системи диференціальних рівнянь у частинних похідних для функцій ξ^μ, η, η^*:

$$\xi^a_a = \xi^b_b,\ \xi^a_b + \xi^b_a = 0,\ \xi^0_0 = 2\xi^a_a, \tag{1.21}$$

$$\begin{gathered}\xi^j_\psi = 0,\ \xi^j_{\psi^*} = 0,\\ \xi^0_a = 0,\ \eta^*_{\psi\psi} = 0,\ \eta^*_{\psi^*\psi^*} = 0,\ \eta_{\psi^*} = 0,\ \eta^*_\psi = 0,\\ \eta_{\psi a} = im\xi^a_0,\ \eta^*_{\psi^* a} = -im\xi^a_0,\end{gathered} \tag{1.22}$$

$$\eta_{\psi 0} = -\frac{n-2(l-1)}{2}\xi^a_{a0},\ \eta^*_{\psi^* 0} = -\frac{n-2(l-1)}{2}\xi^a_{a0}, \tag{1.23}$$

$$\begin{gathered}S^l\eta + F\eta - \eta_\psi F\psi + 2l\xi^n_n F\psi +\\ +\frac{1}{2}F'(|\psi|)|\psi|(\eta + \frac{\psi}{\psi^*}\eta^*) = 0,\\ (S^*)^l\eta^* + F^*\eta^* - \eta^*_{\psi^*}F^*\psi^* + 2l\xi^n_n F^*\psi^* +\\ +\frac{1}{2}F^{*'}(|\psi|)|\psi|(\eta^* + \frac{\psi^*}{\psi}\eta) = 0,\end{gathered} \tag{1.24}$$

де індекс j змінюється від 0 до n, $a, b = 1, \cdots, n$, за індексами, що повторюються, немає підсумовування. Тут і надалі, нижні індекси при невідомих функціях ξ^j, η, η^* означають частинні похідні по відповідним змінним (наприклад, $\xi^a_a \equiv \dfrac{\partial \xi^a}{\partial x_a}$). Зауважимо, що якщо $l = 1$, то рівності (1.23) не мають місця.

Система рівнянь (1.21) є системою рівнянь Кілінга. Загальний розв'язок системи (1.21)–(1.23) має вигляд:

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = 2(A_1 t^2 + A_2 t + A_3),\\
&\xi^a = (2A_1 t + A_2)x^a + B^{ab}x^b + D^a_1 t + D^a_2,\\
&\eta = im\left(A_1 x^a x^a + D^a_1 x^a + i\frac{n-2l+2}{2m}(2A_1 t + A_2) + A_4\right)\psi +\\
&\quad + g(t, \vec{x}),\\
&\eta^* = -im\left(A_1 x^a x^a + D^a_1 x^a - i\frac{n-2l+2}{2m}(2A_1 t + A_2) + A_5\right)\psi^* +\\
&\quad + g^*(t, \vec{x}),
\end{aligned} \tag{1.25}$$

де A_j $(j = \overline{1,5})$ – довільні константи, $g = g(t, \vec{x})$ та $g^* = g^*(t, \vec{x})$ – довільні гладкі функції.

Підставляючи вирази (1.25) до класифікуючих рівняннь (1.24) і розщеплюючи їх по ψ та ψ^*, ми отримаємо твердження теореми. Зауважимо, що алгебри інваріантності в цій теоремі є максимальними для рівняння (1.15) (при цьому ми не беремо до уваги тривіальних операторів вигляду $Q = g(t, \vec{x})\partial_\psi$, де $g(t, \vec{x})$ – довільний розв'язок рівняння (1.15) при $F = 0$).

Зауваження 2. Теорема 1.3 виконується для довільних натуральних l. Якщо $l = 1$, то крім пунктів 1)–5) теореми 1.3, розрізняються ще два випадки [51, 75]. В цьому випадку рівняння (1.15) інваріантне відносно алгебр

6) $< P_0, P_a, J_{ab}, G_a, Q_1, Q_3 >$, де

$$Q_3 = i(\lambda/2)tQ_1 + \psi^*\partial_{\psi^*},$$

тоді і тільки тоді, коли $F = \lambda \ln(|\psi|)$, $\lambda \neq 0$, λ – дійсна стала.

7) $< P_0, P_a, J_{ab}, G_a, Q_1, Q_4 >$, де

$$Q_4 = \exp(-\lambda_2 t)(Q_2 - i\frac{\lambda_1}{\lambda_2}Q_1),$$

тоді і тільки тоді, коли $F = \lambda \ln(|\psi|)$, $\lambda \neq 0$, λ – комплексна стала, тобто $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_2 \neq 0$.

Сформулюємо декілька важливих наслідків.

Наслідок 2. Якщо $l = 2$ та $n = 3$, то єдиним нелінійним рівнянням (1.15), інваріантним відносно повної групи Галілея, є рівняння вигляду

$$S^2\psi + C|\psi|^8\psi = 0.$$

Наслідок 3. Якщо $l = 1$ та $n = 3$, то з теореми 1.3 випливає відомий факт [53] про те, що єдиним нелінійним рівнянням вигляду (1.15), інваріантним відносно повної групи Галілея, є рівняння

$$S\psi + C|\psi|^{4/3}\psi = 0.$$

1.2 Симетрійна класифікація потенціалів для узагальнених рівнянь Шредінгера

Даний параграф присвячений дослідженню симетрії узагальнених рівнянь Шредінгера у двовимірному просторі–часі (x, t)

$$L_1\psi \equiv \left(\lambda_1 S + \lambda_2 S^2 + V(x)\right)\psi = 0, \qquad (1.26)$$

$$L_2\psi \equiv \left(\lambda_1(S + V_1(x)) + \lambda_2(S + V_1(x))^2 + V_2(x)\right)\psi = 0, \qquad (1.27)$$

а також їх узагальнень на випадок рівнянь довільного порядку. Для зручності подальшого дослідження ми виписали рівняння (1.26), яке є частинним випадком (1.27), коли $V_1(x) = 0$. Тут використані такі позначення: $\psi = \psi(t, x)$, $S \equiv p_0 - \frac{1}{2}p_1^2$ – оператор Шродінгера, $p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}$, $p_1 = -i\frac{\partial}{\partial x}$; V, V_1 та V_2 – незалежні від часу потенціали взаємодії (V та V_2 називаються скалярними потенціалами, а V_1 – векторним потенціалом), λ_1, λ_2 – довільні сталі, які одночасно не обертаються в нуль. Для зручності вважаємо, що $m = 1$.

Рівняння (1.26) та (1.27) узагальнюють стандартне рівняння Шродінгера

$$(S+V(x))\psi=0. \tag{1.28}$$

Проведемо симетрійну класифікацію потенціалів для рівнянь (1.26) та (1.27), тобто визначимо всі нееквівалентні класи потенціалів V, V_1, V_2, які допускають нетривіальні симетрії першого порядку (ліївські симетрії).

Для лінійних ДРЧП оператори симетрії можна шукати методом, який розвинутий в роботах [38, 53, 24] (див. Вступ). Для рівнянь (1.26) та (1.27) оператори симетрії зручно шукати у вигляді антикомутаторів.

Означення 1.2. *Лінійний диференціальний оператор першого порядку*

$$Q=\{\xi^1,p_1\}+\{\xi^0,p_0\}+\eta, \tag{1.29}$$

де ξ^0,ξ^1,η – функції від t та x, $\{A,B\}\equiv AB+BA$ – антикомутатор операторів A і B, називається оператором симетрії рівняння (1.26) (або (1.27)), якщо

$$[L,Q]=\alpha_Q L \tag{1.30}$$

для деякої аналітичної функції $\alpha_Q=\alpha_Q(t,x)$, де $[L,Q]\equiv LQ-QL$ – комутатор операторів L і Q, L – оператор (1.26) (або (1.27)).

Для рівняння (1.26) розглянемо окремо два випадки:
1) $\lambda_2=0$, $\lambda_1\neq 0$;
2) $\lambda_2\neq 0$.

У випадку 1) рівняння (1.26) є стандартним рівнянням Шродінгера (1.28). Повна класифікація потенціалів V рівняння (1.28), що допускають нетривіальні симетрії першого порядку, була дана Андерсоном із співавторами [56] та Бойером [70]. Вони отримали всі нееквівалентні класи таких потенціалів, а саме:

$$A_1,\ A_2x,\ A_3x^2,\ \frac{A_4}{x^2},\ A_5x^2+\frac{A_6}{x^2}, \tag{1.31}$$

де A_j $(j=\overline{1,6})$ – довільні сталі. Для перших трьох потенціалів (вільний випадок, лінійний потенціал та гармонічний осцилятор), рівняння (1.28) мають ізоморфні алгебри інваріантності (див. [105, 106, 22]). Алгебри інваріантності в цих випадках ізоморфні повній алгебрі Галілея $AG_2(1,1)$ з інфінітезимальними операторами

$$\begin{aligned}
&P_1=p_1=-i\partial_x,\ P_0=p_0=i\partial_t,\ G=tp_1-x,\ I,\\
&D=2tp_0-xp_1+(1/2)i,\\
&A=t^2p_0-tD-(1/2)x^2,
\end{aligned} \tag{1.32}$$

де I – одиничний оператор, G – оператор Галілея, P_0 та P_1 – оператори трансляцій по часу та координаті, D – оператор дилатації, A – проективний оператор.

Для четвертого та п'ятого потенціалів (ізотропна вільна частинка та ізотропний осцилятор), алгебра інваріантності ізоморфна алгебрі Лоренца $AO(1,2)$ з базисними операторами

$$B_1=\frac{1}{2}(A+P_0),\ B_2=-\frac{1}{2}D,\ B_3=\frac{1}{2}(P_0-A).$$

Зауважимо, що рівняння Шродінгера (1.28) з потенціалами (1.31) точно розв'язуються [19, 22, 33].

Розглянемо тепер випадок 2), коли $\lambda_2\neq 0$. Знайдемо коефіцієнти ξ^0,ξ^1,η операторів симетрії (1.29) та потенціали V. Підставимо (1.26) та (1.29) у співвідношення (1.30) та прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях оператора диференціювання. Після досить громіздких обчислень ми отримаємо систему ДРЧП:

$$\begin{aligned}
&\xi^0_1=0,\ \xi^0_0=-\tfrac{1}{4}i\alpha_Q,\ \xi^1_1=\tfrac{1}{8}i\alpha_Q,\ 2\xi^1_0+\eta_1=0,\\
&\frac{\lambda_1}{4}i\alpha_Q+\lambda_2\eta_0+\frac{\lambda_2}{2}(\alpha_Q)_0=0,\ \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}\alpha_Q+2i\xi^1V_1=\alpha_QV,
\end{aligned} \tag{1.33}$$

де Q_1 та Q_0 означають похідні за просторовою координатою x та часом t функції Q, відповідно.

Розв'язавши цю систему, ми знайдемо всі нееквівалентні класи потенціалів V, які допускають нетривіальну ліївську симетрію. Отже, ми довели наступне твердження:

Теорема 1.4. *Рівняння (1.26) з* $\lambda_2 \neq 0$ *інваріантне відносно алгебр:*
1) $AG_2(1,1) \simeq AO(1,2) \niplus w_1$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$V = \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2};$$

2) $AG(1,1) \simeq t_1 \niplus w_1$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$V = C_1 = const, \ C_1 \neq \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2};$$

3) $AO(1,2) \oplus < I >$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$V = \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} + \frac{C_2}{x^4} \ (C_2 = const).$$

Тут ми використали такі позначення: $AG_2(1,1)$ – шестивимірна повна алгебра Галілея з базисними операторами

$$\begin{aligned} &P_1 = p_1 = -i\partial_x, \ \widetilde{P_0} = \widetilde{p_0} = i\partial_t + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}, \ I, G = tp_1 - x, \\ &D = 2t\widetilde{p_0} - xp_1 - i/2, \ A = txp_1 - t^2\widetilde{p_0} + (i/2)t - (1/2)x^2, \end{aligned} \tag{1.34}$$

де I – оператор тотожніх перетворень; $AO(1,2)$ – тривимірна алгебра Лоренца з базисними операторами

$$B_1 = \frac{1}{2}(A + \widetilde{P_0}), \ B_2 = -\frac{1}{2}D, \ B_3 = \frac{1}{2}(\widetilde{P_0} - A);$$

w_1 – тривимірна алгебра Гайзенберга-Вейля ($w_1 \supset P_1, G, I$); $AG(1,1)$ – чотиривимірна алгебра Галілея ($AG(1,1) \supset P_1, P_0, G, I$); t_1 – одновимірна алгебра Лі зсувів по часу ($t_1 \supset P_0$); символи $\oplus$ та $\niplus$ означають пряму та напівпряму суми, відповідно.

Зауважимо, що рівняння (1.26) з $\lambda_2 \neq 0$ допускає найбільш широку алгебру інваріантності у випадку, коли потенціал V є константою спеціального вигляду, а саме $V = \dfrac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}$. Відмітимо також, що у всіх трьох випадках теореми 1.4 алгебри інваріантності є максимальними.

Розв'язок поставленої задачі для рівняння (1.27) (з $\lambda_2 \neq 0$) знайдемо за такою самою схемою, як і для рівняння (1.26). Відповідна система визначальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned}
&\xi_1^0 = 0,\ \xi_0^0 = -\frac{1}{4} i \alpha_Q,\ \xi_1^1 = \frac{1}{8} i \alpha_Q,\ 2\xi_0^1 + \eta_1 = 0,\\
&\frac{\lambda_1}{4} i \alpha_Q + \lambda_2(\eta_0 + 2\xi^1 (V_1)_1 + \frac{i}{2}\alpha_Q V_1) = -\frac{\lambda_2}{2}(\alpha_Q)_0,\\
&\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}\alpha_Q + \frac{i}{2}\xi^1(\lambda_2 (V_1)_{111} + 4(V_2)_1) =\\
&\qquad = -\frac{5}{16}\lambda_2(\alpha_Q)_{00} + \frac{1}{4}\alpha_Q(\lambda_2 (V_1)_{11} + 4V_2).
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Система (1.35) співпадає з системою (1.33), якщо $V_1 = 0$, $V_2 = V$ (при цьому врахуємо, що $(\alpha_Q)_{00} = 0$). Розв'язок системи (1.35) дає наступний результат:

Теорема 1.5. *Рівняння (1.27) (при $\lambda_2 \neq 0$) інваріантне відносно алгебр, які ізоморфні наступним:*

1) $AO(1,2) \supset\!\!\!\!\!+\, w_1$ тоді і тільки тоді, коли

$V_1 = A_1$, $V_2 = \dfrac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}$, *або*

$V_1 = A_2 x$, $V_2 = \dfrac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}$, *або*

$V_1 = A_3 x^2$, $V_2 = \dfrac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} + 2\lambda_2 A_3$;

2) $t_1 \supset\!\!\!\!\!+\, w_1$, тоді і тільки тоді, коли

$V_1 = A_1$, $V_2 = C_1 = const$, $C_1 \neq \dfrac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}$, *або*

$V_1 = A_2 x$, $V_2 = C_1 = const$, $C_1 \neq \dfrac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}$, *або*

$V_1 = A_3 x^2$, $V_2 = C_1 = const$, $C_1 \neq \dfrac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} + 2\lambda_2 A_3$;

3) $AO(1,2)\oplus < I >$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$V_1 = A_1,\ V_2 = \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} + \frac{C_2}{x^4},\ \textit{або}$$

$$V_1 = \frac{A_4}{x^2},\ V_2 = \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} + \frac{C_2}{x^4},\ \textit{або}$$

$$V_1 = A_5 x^2 + \frac{A_6}{x^2},\ V = \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} + 2\lambda_2 A_5 + \frac{C_2}{x^4},$$

де $A_i (i = \overline{1,6})$, C_1, C_2 *- довільні сталі.*

Наведемо явний вигляд базисних операторів для всіх алгебр інваріантності, використаних в теоремі 1.5. Відмітимо, що у деяких випадках базисні елементи істотньо відрізняються від (1.34).

1а) $V_1 = A_1,\ V_2 = \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}$.

Рівняння (1.27) інваріантне відносно 6-вимірної алгебри Лі з базисними елементами:

$$P_0,\ P_1,\ I,\ G,\ D^{(1)} = D + 2A_1 t,\ A^{(1)} = A - A_1 t^2,$$

де оператори P_0, P_1, I, G, D, A мають вигляд (1.34). Якщо замість P_0 за базисний елемент взяти $P_0^{(1)} = P_0 + (\frac{\lambda_1}{2\lambda_2} + A_1)I$, то оператори $P_0^{(1)}$, P_1, I, G, $D^{(1)}$, $A^{(1)}$ утворюють базис повної алгебри Галілея $AG_2(1,1) \simeq AO(1,2) \supset\!\!\!\!\!\!+\ w_1$.

1б) $V_1 = A_2 x,\ V_2 = \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}$.

В цьому випадку максимальною алгеброю інваріантності є 6-вимірна алгебра Лі з базисними елементами:

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{P_0} = \widetilde{p_0} = P_0 + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} I, \ I, \\
&Q_1 = P_1 - A_2 t, \ Q_2 = G - A_2(t^2/2), \\
&Q_3 = -2it\widetilde{p_0} + \left(ix + \frac{3}{2} i A_2 t^2 \right) p_1 - 3iA_2 xt - \\
&\qquad - \frac{1}{2} i A_2^2 t^3 - \frac{1}{2}, \\
&Q_4 = -2it^2\widetilde{p_0} + 2\left(ixt + \frac{1}{2} i A_2 t^3 \right) p_1 - 3iA_2 xt^2 - \\
&\qquad - \frac{1}{4} i A_2^2 t^4 - ix^2 - t.
\end{aligned}
$$

1в) $V_1 = A_3 x^2$, $V_2 = \dfrac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} + 2\lambda_2 A_3$, $A_3 < 0$.

Максимальною алгеброю інваріантності є 6-вимірна алгебра Лі, ізоморфна алгебрі $AO(1,2) \niplus w_1$, з базисними елементами:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{P}_0 = i\partial_t + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}, \ I, \\
&I_1 = \cos(\omega t) p_1 + \omega x \sin(\omega t), \ I_2 = -\sin(\omega t) p_1 + \omega x \cos(\omega t), \\
&I_3 = \cos(2\omega t)\widetilde{p_0} + \omega x \sin(2\omega t) p_1 + \\
&\qquad + \frac{i}{2}\omega \sin(2\omega t) - \omega^2 x^2 \cos(2\omega t), \\
&I_4 = -\sin(2\omega t)\widetilde{p_0} + \omega x \cos(2\omega t) p_1 + \\
&\qquad + \frac{i}{2}\omega \cos(2\omega t) + \omega^2 x^2 \sin(2\omega t),
\end{aligned}
\tag{1.36}
$$

де $\omega = \sqrt{2|A_3|}$. Оператори (1.36) аналогічні операторам симетрії для лінійного гармонічного осцилятора [70, 106].

1г) $V_1 = A_3 x^2$, $V_2 = \dfrac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} + 2\lambda_2 A_3$, $A_3 > 0$.

Максимальною алгеброю інваріантності є 6-вимірна алгебра Лі, ізоморфна алгебрі $AO(1,2) \ni\!\!\!\!+\, w_1$, з базисними елементами:

$$\tilde{P}_0 = i\partial_t + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2},\ I,$$
$$K_1 = \exp(\omega t)[p_1 - \omega x],\ K_2 = \exp(-\omega t)[p_1 + \omega x],$$
$$K_3 = \exp(2\omega t)[\widetilde{p_0} - \omega x p_1 - \frac{i}{2}\omega + \omega^2 x^2],$$
$$K_4 = \exp(-2\omega t)[\widetilde{p_0} + \omega x p_1 + \tfrac{i}{2}\omega + \omega^2 x^2].$$

2а) $V_1 = A_1$, $V_2 = C_1 = const$, $C_1 \neq \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}$.
Максимальною алгеброю інваріантності є 4-вимірна алгебра $AG(1,1) = \;=< P_0, P_1, I, G >$.

2б) $V_1 = A_2 x$, $V_2 = C_1 = const$, $C_1 \neq \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}$.
Максимальною алгеброю інваріантності є 4-вимірна алгебра Лі, ізоморфна алгебрі $AG(1,1)$ з базисними операторами Q_0, Q_1, Q_2, I, де $Q_0 = P_0 - A_2 Q_2$.

2в) $V_1 = A_3 x^2$, $V_2 = C_1 = const$, $C_1 \neq \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} + 2\lambda_2 A_3$, $A_3 < 0$.
Максимальною алгеброю інваріантності є 4-вимірна алгебра Лі, ізоморфна алгебрі $t_1 \ni\!\!\!\!+\, w_1$, де $t_1 \supset P_0$, $w_1 \supset I, I_1, I_2$.

2г) $V_1 = A_3 x^2$, $V_2 = C_1 = const$, $C_1 \neq \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} + 2\lambda_2 A_3$, $A_3 > 0$.
Максимальною алгеброю інваріантності є 4-вимірна алгебра Лі, ізоморфна алгебрі $t_1 \ni\!\!\!\!+\, w_1$, де $t_1 \supset P_0$, $w_1 \supset I, K_1, K_2$.

3а) $V_1 = A_1 + \frac{A_4}{x^2}$, $V_2 = \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} + \frac{C_2}{x^4}$, $|C_2| + |A_4| \neq 0$.
Максимальною алгеброю інваріантності є 4-вимірна алгебра $AO(1,2) \oplus < I >$, де $AO(1,2) \supset D^{(1)}$, $A^{(1)}$, $P_0^{(1)}$.

3б) $V_1 = A_5 x^2 + \frac{A_6}{x^2}$, $V = \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} + 2\lambda_2 A_5 + \frac{C_2}{x^4}$, $A_5 < 0$, $|C_2| + |A_6| \neq 0$.
Максимальною алгеброю інваріантності є 4-вимірна алгебра Лі, ізоморфна алгебрі $AO(1,2) \oplus < I >$, де $AO(1,2) \supset I_3, I_4, \widetilde{P_0}$.

3в) $V_1 = A_5 x^2 + \frac{A_6}{x^2}$, $V = \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} + 2\lambda_2 A_5 + \frac{C_2}{x^4}$, $A_5 > 0$, $|C_2| + |A_6| \neq 0$.
Максимальною алгеброю інваріантності є 4-вимірна алгебра Лі, ізоморфна алгебрі $AO(1,2) \oplus < I >$, де $AO(1,2) \supset K_3, K_4, \widetilde{P_0}$.

Результати теореми 1.4 узагальнені на випадок рівняння порядку $2l$

$$L_3\psi \equiv (\lambda_1 S + \lambda_2 S^2 + \ldots + \lambda_l S^l + V(x))\psi = 0, \tag{1.37}$$

де $\lambda_i (i = 1, \ldots, l)$ – довільні сталі, $\lambda_l \neq 0$, $V(x)$ – потенціал, S – оператор Шродінгера, визначений вище.

Теорема 1.6. *Рівняння (1.37) з $\lambda_l \neq 0$, $l \neq 1$ інваріантне відносно алгебр:*

1) $< P_0, I >$, тоді і тільки тоді, коли $V(x)$ – довільна гладка функція;

2) $AG(1,1) =< I, P_0, P_1, G >$, тоді і тільки тоді, коли $V = const$;

3) $AG_2(1,1) =< I, \widetilde{P_0}, P_1, G, D, A >$, тоді і тільки тоді, коли $V = = V_1 = const$ та виконуються рівності:

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_l} = C_l^k \left(\frac{V_1}{\lambda_l}\right)^{(l-k)/l}, \; k = 1, \ldots, l-1; \tag{1.38}$$

4) $AO(1,2) \oplus < I > = < I, \widetilde{P_0}, D, A >$, тоді і тільки тоді, коли $V = = V_1 + \frac{C}{x^{2l}}$, V_1, C – const та виконуються рівності (1.38), де C_l^k – біноміальні коефіцієнти.

В теоремі 1.6 базисні оператори мають таке зображення:

$$\begin{aligned} &P_0 = p_0 = i\partial_t, \; P_1 = p_1 = -i\partial_x, \; G = tp_1 - x, \\ &\widetilde{P_0} = \widetilde{p_0} = P_0 + \sqrt[l]{\frac{V_1}{\lambda_l}}, \\ &D = 2t\widetilde{p_0} - xp_1 - \frac{i}{2}(2l-3), \\ &A = t^2\widetilde{p_0} - tD - \frac{1}{2}x^2, \; I, \end{aligned} \tag{1.39}$$

де I – одиничний оператор.

Теорема 1.6 доводить аналогічно теоремі 1.4 (або еквівалентним ліівським методом).

Якщо в рівнянні (1.37) покласти всі коефіцієнти λ_j крім λ_l рівними нулеві, то одержимо наступний результат:

Наслідок. *ДРЧП порядку* $2l$

$$L_4\psi \equiv (S^l + V(x))\psi = 0. \tag{1.40}$$

інваріантне відносно алгебр:

1) $< P_0, I >$, *тоді і тільки тоді, коли* $V(x)$ *– довільна гладка функція;*

2) $AG(1,1) =< I, P_0, P_1, G >$, *тоді і тільки тоді, коли* $V = const \neq 0$;

3) $AG_2(1,1) =< I, P_0, P_1, G, D, A >$, *тоді і тільки тоді, коли* $V = 0$;

4) $AO(1,2)\oplus < I >= < I, P_0, D, A >$, *тоді і тільки тоді, коли* $V = = \frac{C}{x^{2l}}$, *де* C *– довільна стала,* $C \neq 0$.

Базисні оператори в наслідку мають зображення (1.39) з $V_1 = 0$.

Висновок. Явний вигляд потенціалу з нетривіальною симетрією залежить від степеня оператора Шродінгера. А саме, для рівняння (1.40) порядку $2l$ потенціал має вигляд $V = \frac{C}{x^{2l}}$.

1.3 Галілей-інваріантні системи диференціальних рівнянь

Даний параграф присвячується дослідженню симетрії систем, які еквівалентні рівнянням

$$S^2\psi = F(|\psi|)\psi, \tag{1.41}$$

$$\lambda_1 S\psi + \lambda_2 S^2\psi = F(|\psi|)\psi, \tag{1.42}$$

а також

$$S\psi = F(|\psi|)\psi, \tag{1.43}$$

де $S \equiv i\partial_t + \frac{1}{2m}\triangle$.

А. Розглянемо рівняння (1.41). Позначимо $S\psi = \varphi$ і перепишемо (1.41) у вигляді

$$\begin{cases} S\psi = \varphi, \\ S\varphi = F(|\psi|)\psi. \end{cases} \tag{1.44}$$

Проведемо симетрійну класифікацію системи (1.44), тобто опишемо всі нееквівалентні класи функцій $F(|\psi|)$, які допускають нетривіальну симетрію.

Якщо F – довільна гладка функція від $|\psi|$, то максимальна алгебра інваріантності системи (1.44) – алгебра Галілея $AG(1,n) =$ $< P_0, P_a, J_{ab}, G_a, Q_1 >$, де

$$\begin{aligned} &P_0 = \partial_t,\ P_a = \partial_{x_a},\ a = \overline{1,n}, \\ &J_{ab} = x^a\partial_{x_b} - x^b\partial_{x_a}, \\ &G_a = t\partial_{x_a} + imx^a(\psi\partial_\psi + \varphi\partial_\varphi - \psi^*\partial_{\psi^*} - \varphi^*\partial_{\varphi^*}), \\ &Q_1 = \psi\partial_\psi + \varphi\partial_\varphi - \psi^*\partial_{\psi^*} - \varphi^*\partial_{\varphi^*} \end{aligned} \tag{1.45}$$

В цьому випадку симетрія системи (1.44) співпадає з симетрією рівняння (1.41).

Тепер знайдемо всі класи функцій $F(|\psi|)$, при яких система (1.44) допускає розширення симетрії (1.45). Застосовуючи алгоритм Лі, отримаємо такий результат.

Випадок 1.1. $F = C|\psi|^k$ $(k \in R, k \neq 0)$.

Максимальна алгебра інваріантності – розширена алгебра Галілея $AG_1(1,n) =$
$= < P_0, P_a, J_{ab}, G_a, Q_1, D >$, де

$$D = x^a\partial_{x_a} + 2t\partial_t - \frac{8}{k}(\psi\partial_\psi + \varphi\partial_\varphi) - 2(\varphi\partial_\varphi + \varphi^*\partial_{\varphi^*}).$$

Випадок 1.2. $F = C|\psi|^{\frac{8}{n-2}}$ $(n \neq 2,\ C \neq 0)$.

Максимальна алгебра інваріантності – повна алгебра Галілея $AG_2(1,n) = < P_0,\ P_a,\ J_{ab},\ G_a,\ Q_1,\ D,\ A >$, де

$$\begin{aligned} A = tx^a\partial_{x_a} + t^2\partial_t + im\frac{x_a x^a}{2}Q_1 - \frac{n-2}{2}tQ_2 - \\ - 2t(\varphi\partial_\varphi + \varphi^*\partial_{\varphi^*}) + i(\psi\partial_\varphi - \psi^*\partial_{\varphi^*}). \end{aligned}$$

де $Q_2 = \psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*} + \varphi\partial_\varphi + \varphi^*\partial_{\varphi^*}$

Випадок 1.3. $F = C = const,\ C \neq 0.$

Максимальна алгебра інваріантності – це повна алгебра Галілея із додатковими операторами, які пов'язують між собою залежні змінні ψ та φ. А саме, алгебра інваріантності має базисні оператори

$$< P_0, P_a, J_{ab}, G_a, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_3^*, Q_4^*, Q_5^*, D^{(1)}, A^{(1)} >,$$

де

$$Q_3 = \frac{\exp(kt)}{2\sqrt{2}}[i\psi\partial_\psi + \frac{k}{2C}\varphi\partial_\psi - i\varphi\partial_\varphi - \frac{k}{2}\psi\partial_\varphi],$$
$$Q_4 = \frac{\exp(-kt)}{2\sqrt{2}}[i\psi\partial_\psi - \frac{k}{2C}\varphi\partial_\psi - i\varphi\partial_\varphi + \frac{k}{2}\psi\partial_\varphi],$$

$$Q_5 = \frac{1}{k}(\varphi\partial_\psi + C\psi\partial_\varphi), \quad (k = 2\sqrt{-C}),$$
$$Q_3^* = \frac{\exp(kt)}{2\sqrt{2}}[-i\psi^*\partial_{\psi^*} + \frac{k}{2C}\varphi^*\partial_{\psi^*} + i\varphi^*\partial_{\varphi^*} - \frac{k}{2}\psi^*\partial_{\varphi^*}],$$

$$Q_4^* = \frac{\exp(-kt)}{2\sqrt{2}}[-i\psi^*\partial_{\psi^*} - \frac{k}{2C}\varphi^*\partial_{\psi^*} + i\varphi^*\partial_{\varphi^*} + \frac{k}{2}\psi^*\partial_{\varphi^*}],$$
$$Q_5 = \frac{1}{k}(\varphi^*\partial_{\psi^*} + C\psi^*\partial_{\varphi^*}),$$

$$D^{(1)} = x^a\partial_{x_a} + 2t\partial_t - 2it(\varphi\partial_\psi - \varphi^*\partial_{\psi^*}) -$$
$$- 2iCt(\psi\partial_\varphi - \psi^*\partial_{\varphi^*}).$$

$$A = tx^a\partial_{x_a} + t^2\partial_t + im\frac{x^a x_a}{2}Q_1 - (nt/2)Q_2 +$$
$$+ (\frac{in}{4C} - it^2)(\varphi\partial_\psi - \varphi^*\partial_{\psi^*}) + (\frac{in}{4} - Cit^2)(\psi\partial_\varphi - \psi^*\partial_{\varphi^*}).$$

Зауваження 1. Оператори симетрії Q_3, Q_4 та Q_5 у випадку 1.3 задовільняють комутаційні співвідношення:

$$[Q_3, Q_4] = -iQ_5,\ [Q_5, Q_3] = -iQ_3,\ [Q_5, Q_4] = iQ_4. \tag{1.46}$$

Підалгебра, яка генерується операторами Q_3, Q_4, Q_5, ізоморфна алгебрі $AO(1,2)$. Оператори

$$< Q_3, Q_4, Q_5 >$$

діють у просторі $(\psi, \psi^*, \varphi, \varphi^*)$, тобто оператори "тасують" компоненти $\psi, \psi^*, \varphi, \varphi^*$, не міняючи t і $\vec{x}$.

Побудуємо скінчені перетворення, які генеруються операторами Q_3 - Q_5.

1) Q_3 :

$$\begin{cases} t \to \widetilde{t} = t, \ x_a \to \widetilde{x}_a = x_a, \ a = \overline{1.n}, \\ \psi \to \widetilde{\psi} = \psi + \dfrac{\exp(kt)}{2\sqrt{2}}(i\psi - \dfrac{2}{k}\varphi)\alpha, \\ \varphi \to \widetilde{\varphi} = \varphi - \dfrac{\exp(kt)}{2\sqrt{2}}(i\varphi + \dfrac{k}{2}\psi)\alpha, \end{cases}$$

де α – груповий параметр.

2) Q_4 :

$$\begin{cases} t \to \widetilde{t} = t, \ x_a \to \widetilde{x}_a = x_a, \ a = \overline{1,n}, \\ \psi \to \widetilde{\psi} = \psi + \dfrac{\exp(-kt)}{2\sqrt{2}}(i\psi + \dfrac{2}{k}\varphi)\beta, \\ \varphi \to \widetilde{\varphi} = \varphi + \dfrac{\exp(kt)}{2\sqrt{2}}(-i\varphi + \dfrac{k}{2}\psi)\beta. \end{cases}$$

де β – довільний параметр.

3) Q_5 :

$$\begin{cases} t \to \widetilde{t} = t, \ x_a \to \widetilde{x}_a = x_a, \ a = \overline{1,n}. \\ \psi \to \widetilde{\psi} = \psi \cos(\gamma/2) + \dfrac{2}{k}\varphi \sin(\gamma/2), \\ \varphi \to \widetilde{\varphi} = \varphi \cos(\gamma/2) - \dfrac{k}{2}\varphi \sin(\gamma/2), \end{cases}$$

де γ – довільний параметр.

Зауваження 2. У випадку $F = C = const \neq 0$ рівняння (1.41) інваріантне відносно алгебри Галілея $AG(1,n)$, тобто не інваріантне відносно оператора ділатації D та проективного оператора A. На відміну від (1.41), при переході до системи (1.44) симетрія значно розширюється (для лінійного випадку). Максимальна алгебра інваріантності системи (1.44) включає в себе оператори Галілея, дилатації, проективний оператор, а також оператори Q_3, Q_4, Q_5, які пов'язують між собою залежні змінні ψ та φ.

Висновок. З наведених формул видно, що оператори $< Q_3, Q_4, Q_5 >$ породжують перетворення в "зарядовому" просторі. Це група дуальних перетворень.

Випадок 1.4. $F = 0$.

Максимальна алгебра інваріантності в цьому випадку має інфінітезимальні оператори

$$
\begin{aligned}
&P_0,\ P_a,\ J_{ab},\ G_a, Q_1,\ \ Q_2,\\
&Q_6 = it\psi\partial_\psi - t^2\varphi\partial_\psi - it\varphi\partial_\varphi - \psi\partial_\varphi,\\
&Q_7 = t\varphi\partial_\psi + i\varphi\partial_\varphi,\ Q_8 = \varphi\partial_\psi,\\
&Q_6^* = -it\psi^*\partial_{\psi^*} - t^2\varphi^*\partial_{\psi^*} + it\varphi^*\partial_{\varphi^*} - \psi^*\partial_{\varphi^*},\\
&Q_7^* = t\varphi^*\partial_{\psi^*} - i\varphi^*\partial_{\varphi^*},\ Q_8^* = \varphi^*\partial_{\psi^*},\\
&D = x^a\partial_{x_a} + 2t\partial_t - (n/2)Q_2 - 2it(\varphi\partial_\psi - \varphi^*\partial_{\psi^*}),\\
&A = tx^a\partial_{x_a} + t^2\partial_t + im\frac{x^a x_a}{2}Q_1 - (nt/2)Q_2 - it^2(\varphi\partial_\psi - \varphi^*\partial_{\psi^*}).
\end{aligned}
$$

Зауваження 3. Оператори симетрії Q_6, Q_7 та Q_8 у випадку 1.4 задовільняють комутаційні співвідношення:

$$
\begin{aligned}
&[Q_8, Q_6] = 2iQ_7 + (1/2)(Q_1 + Q_2),\\
&[Q_8, Q_7] = -iQ_8,\ [Q_7, Q_6] = -iQ_6.
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

Підалгебра, яка генерується операторами Q_6, Q_7, Q_8, ізоморфна алгебрі $AO(1,2)$.

Побудуємо скінчені перетворення, які генеруються операторами Q_6–Q_8.

1) Q_6 :

$$
\begin{cases}
t \to \widetilde{t} = t,\ x_a \to \widetilde{x}_a = x_a,\ a = \overline{1, n},\\
\psi \to \widetilde{\psi} = \psi + (-t^2\varphi + it\psi)\theta,\\
\varphi \to \widetilde{\varphi} = \varphi - (it\varphi + \psi)\theta,
\end{cases}
$$

де θ – груповий параметр.

2) Q_7 :

$$\begin{cases} t \to \widetilde{t} = t, \ x_a \to \widetilde{x}_a = x_a, \ a = \overline{1,n}, \\ \psi \to \widetilde{\psi} = \psi + it\varphi - i\exp(i\mu)t\varphi, \\ \varphi \to \widetilde{\varphi} = \exp(i\mu)\varphi, \end{cases}$$

де μ – довільний параметр.

3) Q_8 :

$$\begin{cases} t \to \widetilde{t} = t, \ x_a \to \widetilde{x}_a = x_a, \ a = \overline{1,n}, \\ \psi \to \widetilde{\psi} = \psi + \eta\varphi, \varphi \to \widetilde{\varphi} = \varphi, \end{cases}$$

де η – довільний параметр.

Б. Перейдемо від рівняння (1.42) до системи вигляду

$$\begin{cases} S\psi = \varphi, \\ \lambda_1\varphi + \lambda_2 S\varphi = F(|\psi|)\psi. \end{cases} \tag{1.48}$$

Проведемо симетрійну класифікацію системи (1.48). Застосування алгоритму Лі приводить нас до наступних п'яти випадків.

Випадок 2.1. F – довільна гладка функція від $|\psi|$.

Максимальна алгебра інваріантності:

$$\begin{aligned} &P_0 = \partial_t, \ P_a = \partial_{x_a}, \ a = \overline{1,n}, \\ &J_{ab} = x^a\partial_{x_b} - x^b\partial_{x_a}, \\ &G_a = t\partial_{x_a} + imx^a(\psi\partial_\psi + \varphi\partial_\varphi - \psi^*\partial_{\psi^*} - \varphi^*\partial_{\varphi^*}), \\ &Q_1 = \psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*} + \varphi\partial_\varphi - \varphi^*\partial_{\varphi^*} \end{aligned}$$

Випадок 2.2. $F = C|\psi|^k - \dfrac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}$ $(k \in R, k \neq 0)$.

Максимальна алгебра інваріантності:

$$\begin{aligned} &P_0, \ P_a, \ J_{ab}, \ G_a, \ Q_1, \\ &\widetilde{D} = x^a\partial_{x_a} + 2t\partial_t - \frac{8}{k}(\psi\partial_\psi + \varphi\partial_\varphi) - 2(\varphi\partial_\varphi + \varphi^*\partial_{\varphi^*}) + \\ &\quad + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}itQ_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\psi\partial_\varphi + \psi^*\partial_{\varphi^*}). \end{aligned}$$

Випадок 2.3. $F = C|\psi|^{\frac{8}{n-2}} - \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}$.

Максимальна алгебра інваріантності:

$$P_0,\ P_a,\ J_{ab},\ G_a,\ Q_1,$$

$$D = x^a\partial_{x_a} + 2t\partial_t - (n-2)(\psi\partial_\psi + \varphi\partial_\varphi) - 2(\varphi\partial_\varphi + \varphi^*\partial_{\varphi^*}) +$$
$$+ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} itQ_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\psi\partial_\varphi + \psi^*\partial_{\varphi^*}),$$

$$A = tx^a\partial_{x_a} + t^2\partial_t + im\frac{x_a x^a}{2}Q_1 + \frac{i\lambda_1}{2\lambda_2}t^2Q_1 -$$
$$- \frac{n-2}{2}t(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*} + \varphi\partial_\varphi + \varphi^*\partial_{\varphi^*}) - 2t(\varphi\partial_\varphi + \varphi^*\partial_{\varphi^*}) -$$
$$- \frac{\lambda_1}{\lambda_2}t(\psi\partial_\varphi + \psi^*\partial_{\varphi^*}) + i(\psi\partial_\varphi - \psi^*\partial_{\varphi^*}).$$

Випадок 2.4. $F = C = const,\ C \neq 0$.

Максимальна алгебра інваріантності:

$$P_0,\ P_a,\ J_{ab},\ G_a,\ Q_1,$$

$$Q_2 = \psi\partial_\psi + \varphi\partial_\varphi + \psi^*\partial_{\psi^*} + \varphi^*\partial_{\varphi^*},$$

$$Q_3 = \exp(kt)[i\psi\partial_\psi + (-\frac{\lambda_1 i}{2C} + \frac{\lambda_2 k}{2C})\varphi\partial_\psi - i\varphi\partial_\varphi +$$
$$+ (-\frac{k}{2} - \frac{\lambda_1 i}{2\lambda_2})\psi\partial_\varphi],$$

$$Q_4 = \exp(-kt)[i\psi\partial_\psi + (-\frac{\lambda_1 i}{2C} - \frac{\lambda_2 k}{2C})\varphi\partial_\psi - i\varphi\partial_\varphi +$$
$$+ (\frac{k}{2} - \frac{\lambda_1 i}{2\lambda_2})\psi\partial_\varphi],$$

$$Q_5 = \varphi\partial_\psi - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\varphi\partial_\varphi + \frac{C}{\lambda_2}\psi\partial_\varphi,$$

$$Q_3^*,\ Q_4^*,\ Q_5^*,$$

$$D = x^a\partial_{x_a} + 2t\partial_t - \frac{\lambda_1 n}{4C}(\varphi\partial_\psi + \varphi^*\partial_{\psi^*}) - 2it(\varphi\partial_\psi - \varphi^*\partial_{\psi^*}) +$$
$$+ \frac{\lambda_1^2 n}{4C\lambda_2}(\varphi\partial_\varphi + \varphi^*\partial_{\varphi^*}) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}2it(\varphi\partial_\varphi - \varphi^*\partial_{\varphi^*}) -$$
$$- \frac{\lambda_1 n}{4\lambda_2}(\psi\partial_\varphi + \psi^*\partial_{\varphi^*}) - \frac{C}{\lambda_2}2it(\psi\partial_\varphi - \psi^*\partial_{\varphi^*}),$$

$$A = tx^a\partial_{x_a} + t^2\partial_t + im\frac{x^a x_a}{2}Q_1 - (nt/2)Q_2 +$$
$$+ (\frac{\lambda_2 in}{4C} - it^2)(\varphi\partial_\psi - \varphi^*\partial_{\psi^*}) + (-\frac{\lambda_1 in}{4C} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}it^2)(\varphi\partial_\varphi - \varphi^*\partial_{\varphi^*}) +$$
$$+ (\frac{in}{4} - \frac{C}{\lambda_2}it^2)(\psi\partial_\varphi - \psi^*\partial_{\varphi^*}).$$

Тут $k = \sqrt{-\frac{4C\lambda_2 + \lambda_1^2}{\lambda_2^2}}$.

Зауваження 4. Оператори симетрії Q_3, Q_4 та Q_5 у випадку 2.4 задовільняють комутаційні співвідношенням:

$$[Q_3, Q_4] = (2ik\lambda_2/C)\left(Q_5 + \frac{\lambda_1}{4\lambda_2}(Q_1 + Q_2)\right),$$
$$[Q_5, Q_3] = -ikQ_3,\ [Q_5, Q_4] = ikQ_4.$$

Підалгебра, яка генерується операторами Q_3, Q_4, Q_5, ізоморфна алгебрі $AO(1,2)$.

Випадок 2.5. $F = 0$.

Максимальна алгебра інваріантності:

$$P_0,\ P_a,\ J_{ab},\ G_a,\ Q_1,\ Q_2,$$
$$Q_6 = \exp(kt)[\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\psi\partial_\psi + \varphi\partial_\psi - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\varphi\partial_\varphi - \frac{{\lambda_1}^2}{{\lambda_2}^2}\psi\partial_\varphi].$$

$$Q_7 = \exp(-kt)\varphi\partial_\psi,$$

$$Q_8 = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\psi\partial_\psi + \varphi\partial_\psi - \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\varphi\partial_\varphi,$$

$$Q_6^*,\ Q_7^*,\ Q_8^*,$$
$$D = x^a\partial_{x_a} + 2t\partial_t - (n/2)Q_2 - 2it(\varphi\partial_\psi - \varphi^*\partial_{\psi^*}) +$$
$$+ \frac{2i\lambda_1}{\lambda_2}t(\varphi\partial_\varphi - \varphi^*\partial_{\varphi^*}),$$

$$A = tx^a\partial_{x_a} + t^2\partial_t + im\frac{x^a x_a}{2}Q_1 - (nt/2)Q_2 -$$
$$- it^2(\varphi\partial_\psi - \varphi^*\partial_{\psi^*}) + i\frac{\lambda_1}{\lambda_2}t^2(\varphi\partial_\varphi - \varphi^*\partial_{\varphi^*}).$$

Зауваження 5. Комутаційні співвідношення між операторами Q_6, Q_7, Q_8 мають вигляд:

$$[Q_6, Q_7] = -2\frac{\lambda_1}{\lambda_2}Q_8,\ [Q_7, Q_8] = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}Q_7,\ [Q_8, Q_6] = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}Q_6.$$

Підалгебра, яка генерується операторами Q_6, Q_7, Q_8, також ізоморфна алгебрі $AO(1,2)$.

B. Розглянемо тепер систему, яка еквівалентна рівнянню Шродінгера (1.43)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial x_a} = \varphi^a, \ a = \overline{1,n}, \\ i\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{1}{2m}\dfrac{\partial\varphi^a}{\partial x_a} = F(|\psi|)\psi. \end{cases} \tag{1.49}$$

Це система ДРЧП першого порядку. Проведемо симетрійну класифікацію системи (1.49). Застосування алгоритму Лі приводить нас до наступних п'яти випадків.

Випадок 3.1. F – довільна гладка функція від $|\psi|$.

Максимальна алгебра інваріантності:

$$\begin{aligned} &P_0 = \partial_t, \ P_a = \partial_{x_a}, \ a = \overline{1,n}, \\ &J_{ab} = x^a\partial_{x_b} - x^b\partial_{x_a} + \varphi^a\partial_{\varphi^b} - \varphi^b\partial_{\varphi^a} + \varphi^{a*}\partial_{\varphi^{b*}} - \varphi^{b*}\partial_{\varphi^{a*}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &G_a = t\partial_{x_a} + imx^aQ_1 + im(\psi\partial_{\varphi^a} - \psi^*\partial_{\varphi^{a*}}), \\ &Q_1 = \psi\partial_\psi + \varphi^c\partial_{\varphi^c} - \psi^*\partial_{\psi^*} - \varphi^{c*}\partial_{\varphi^{c*}}. \end{aligned}$$

Випадок 3.2. $F = \lambda\ln(|\psi|)$, $\lambda \neq 0$.

В цьому випадку істотньо, дійсна чи комплексна стала λ.

а) λ – дійсна стала. Тоді максимальна алгебра інваріантності системи (1.49) включає в себе базисні оператори $< P_0, P_a, J_{ab}, G_a, Q_1, Q_2 >$, де

$$Q_2 = -i(\lambda/2)tQ_1 + \psi^*\partial_{\psi^*} + \varphi^{c*}\partial_{\varphi^{c*}} \tag{1.50}$$

б) λ – комплексна стала, тобто $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_2 \neq 0$. Тоді максимальна алгебра інваріантності:

$< P_0,\ P_a,\ J_{ab},\ G_a,\ Q_1,\ Q_3 >$, де

$$Q_3 = \exp(\lambda_2 t)(Q_4 - i\frac{\lambda_1}{\lambda_2}Q_1). \tag{1.51}$$

Тут $Q_4 = \psi\partial_\psi + \varphi^c\partial_{\varphi^c} + \psi^*\partial_{\psi^*} + \varphi^{c*}\partial_{\varphi^{c*}}$.

Зауважимо, що оператори симетрії типу (1.50) та (1.51) вперше побудовані у роботах Фущича та Чопика [51, 75].

Випадок 3.3. $F = \lambda|\psi|^k$, $k \neq 0$, $k \neq \frac{4}{n}$.
Максимальна алгебра інваріантності:

$$P_0,\ P_a,\ J_{ab},\ G_a,\ Q_1,$$
$$\widetilde{D} = x^c\partial_{x^c} + 2t\partial_t - \varphi^c\partial_{\varphi^c} - \varphi^{c*}\partial_{\varphi^{c*}} - (4/k)(\psi^*\partial_{\psi^*} + \varphi^{c*}\partial_{\varphi^{c*}}).$$

Випадок 3.4. $F = \lambda|\psi|^{\frac{4}{n}}$.
Максимальна алгебра інваріантності:

$$P_0,\ P_a,\ J_{ab},\ G_a,\ Q_1,$$
$$D = x^c\partial_{x^c} + 2t\partial_t - \varphi^c\partial_{\varphi^c} - \varphi^{c*}\partial_{\varphi^{c*}} - n(\psi^*\partial_{\psi^*} + \varphi^{c*}\partial_{\varphi^{c*}}).$$
$$A = tx^c\partial_{x_c} + t^2\partial_t + im\frac{x^c x_c}{2}Q_1 + imx^c(\psi\partial_{\varphi^c} - \psi^*\partial_{\varphi^{c*}}) -$$
$$- t(\varphi^c\partial_{\varphi^c} + \varphi^{c*}\partial_{\varphi^{c*}}) - nt(\psi^*\partial_{\psi^*} + \varphi^{c*}\partial_{\varphi^{c*}}).$$

Випадок 3.5. $F = \lambda = const$.
Максимальна алгебра інваріантності:

$$P_0,\ P_a,\ J_{ab},\ G_a,\ Q_1,\ Q_4,$$
$$D^* = x^c\partial_{x^c} + 2t\partial_t - \varphi^c\partial_{\varphi^c} - \varphi^{c*}\partial_{\varphi^{c*}} - 2i\lambda tQ_1 - (n/2)Q_2.$$
$$A^* = tx^c\partial_{x_c} + t^2\partial_t + im\frac{x^c x_c}{2}Q_1 + imx^c(\psi\partial_{\varphi^c} - \psi^*\partial_{\varphi^{c*}}) -$$
$$- t(\varphi^c\partial_{\varphi^c} + \varphi^{c*}\partial_{\varphi^{c*}}) - (nt/2)Q_2 - i\lambda t^2Q_1.$$

Отже, при переході від рівнянь (1.41)–(1.43) до відповідних систем (1.44), (1.48) та (1.49) галілей–інваріантність зберігається. Крім того, у випадку лінійних систем (1.44) та (1.48), з'являються додаткові оператори симетрії, які пов'язують між собою залежні змінні ψ та φ.

1.4 Симетрія узагальнених рівнянь та систем рівнянь типу Гамільтона–Якобі

Відомо [92], що рівняння Гамільтона–Якобі

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2m}\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a} = 0 \qquad (1.52)$$

інваріантне відносно алгебри Лі $AG_2(2,n)$ з базисними операторами:

$$\begin{aligned}
&P_0 = \partial_t,\ P_a = \partial_{x_a},\ a = \overline{1,n},\ P_{n+1} = \partial_u,\\
&J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a,\\
&G_a^{(1)} = tP_a + mx_a P_{n+1},\ D^{(1)} = tP_0 + \frac{1}{2}x_a P_a,\\
&\Pi^{(1)} = t^2 P_0 + tx_a P_a + \frac{m}{2}\vec{x}^2 P_{n+1},\\
&G_a^{(2)} = uP_a + mx_a P_0,\ D^{(2)} = uP_{n+1} + \frac{1}{2}x_a P_a,\\
&\Pi^{(2)} = u^2 P_{n+1} + ux_a P_a + \frac{m}{2}\vec{x}^2 P_0,\\
&\mathcal{K}_a = 2x_a(D^{(1)} + D^{(2)}) + s^2 P_a \quad (s^2 \equiv \frac{2}{m}tu - \vec{x}^2).
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Позначимо $L \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \lambda\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial}{\partial x_a}$ і перепишемо (1.52) у вигляді $Lu = 0$, де $\lambda = -\frac{1}{2m}$.

Розглянемо узагальнене рівняння типу Гамільтона-Якобі, яке запропонував В.І.Фущич [82]

$$L^2 u = F(u),$$

тобто

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial}{\partial x_a}\right)^2 u = F(u). \tag{1.54}$$

Явний вигляд рівняння (1.54) наступний:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 3\lambda\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial^2 u}{\partial x_a \partial t} + 2\lambda^2\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_b}\frac{\partial^2 u}{\partial x_a \partial x_b} = F(u)$$

Проведемо симетрійну класифікацію рівняння (1.54).

Теорема 1.7. *Рівняння (1.54) інваріантне відносно алгебр:*
(i) $< P_0, P_a, J_{ab} >$ *для довільної гладкої функції* $F(u)$, *де*

$$P_0 = \partial_t,\ P_a = \partial_{x_a},\ a = \overline{1,n},\ J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a;$$

(ii) $< P_0, P_a, J_{ab}, D^{(1)} >$ *для* $F = Cu^k$ $(k \neq 0,\ k \neq 1)$, *де*

$$D^{(1)} = (3-k)(x^a\partial_{x_a} + 2u\partial_u) + 2(1-k)(t\partial_t - u\partial_u);$$

(iii) $< P_0, P_a, J_{ab}, D^{(2)} >$ *для* $F = C\exp(ku)$ $(k \neq 0)$, *де*

$$D^{(2)} = t\partial_t + \frac{1}{2}x^a\partial_{x^a} - \frac{2}{k}\partial_u;$$

(iv) $< P_0, P_a, J_{ab}, D^{(1)}, B_1, B_2 >$ *для* $F = Cu$, *де*

$$D^{(1)} = x^a\partial_{x^a} + 2u\partial_u,$$
$$B_1 = \exp(\sqrt{C}t)\partial_u, \ B_2 = \exp(-\sqrt{C}t)\partial_u;$$

(v) $< P_0, P_a, J_{ab}, B_3, B_4, B_5, B_6 >$ *для* $F = C = const$, *де*

$$B_3 = t\partial_t - u\partial_u + \frac{3}{2}Ct^2\partial_u,$$
$$B_4 = x^a\partial_{x^a} + 2u\partial_u - Ct^2\partial_u,$$
$$B_5 = t\partial_u, \ B_6 = \partial_u.$$

Доведення. Застосуємо алгоритм Лі. З умови інваріантності

$$\underset{2}{X}(L^2u - F(u))) \mid_{L^2=F(u)} = 0,$$

де $X = \xi^\mu(t, \vec{x}, u)\partial_\mu + \eta(t, \vec{x}, u)\partial_u$ – оператор симетрії рівняння (1.54), $\underset{2}{X}$ – друге продовження оператора X, отримаємо наступну систему визначальних рівнянь:

$$\begin{aligned} &\xi^j_u = 0, \ \eta_{uu} = 0, \ \xi^0_a = \xi^a_0 = 0, \ \eta_a = 0, \ \eta_{u0} = 0, \\ &\eta_u = 2\xi^a_a - \xi^0_0, \ \xi^a_b + \xi^b_a = 0, \ \xi^a_a = \xi^b_b, \\ &\eta_{00} + F\eta_u - 2F\xi^0_0 = F'\eta. \end{aligned} \quad (1.55)$$

(За індексами, що повторюються, немає підсумовування). Розв'язок системи (1.55) дає твердження теореми.

Зауважимо, що рівняння (1.54) не інваріантне відносно стандартних перетворень Галілея при жодній функції $F(u)$.

Побудуємо скінчені перетворення, породжені операторами симетрії рівняння (1.54).

а) B_1:

$$\begin{cases} t \to \tilde{t} = t, \ x_a \to \tilde{x}_a = x_a, \ a = \overline{1, n}, \\ u \to \tilde{u} = u + \theta_1 \exp(\sqrt{C}t), \end{cases}$$

б) B_2:

$$\begin{cases} t \to \widetilde{t} = t, \ x_a \to \widetilde{x}_a = x_a, \ a = \overline{1,n}, \\ u \to \widetilde{u} = u + \theta_2 \exp(-\sqrt{C} t). \end{cases}$$

в) B_3:

$$\begin{cases} t \to \widetilde{t} = t \exp(\theta_3), \ x_a \to \widetilde{x}_a = x_a, \ a = \overline{1,n}, \\ u \to \widetilde{u} = u \exp(-\theta_3) + \dfrac{C}{2} t^2 (\exp(2\theta_3) - \exp(-\theta_3)). \end{cases}$$

г) B_4:

$$\begin{cases} t \to \widetilde{t} = t, \ x_a \to \widetilde{x}_a = x_a \exp(\theta_4), \ a = \overline{1,n}, \\ u \to \widetilde{u} = \exp(2\theta_4)(u - \dfrac{1}{2} C t^2) + \dfrac{1}{2} C t^2. \end{cases}$$

де $\theta_i, \ i = \overline{1,4}$ - довільні дійсні параметри відповідних перетворень.

Якщо розглянути узагальнення рівняння Гамільтона-Якобі вигляду [82]

$$\lambda L u + \text{Ł}^2 u = F(u), \tag{1.56}$$

де $\lambda \neq 0, L = \dfrac{\partial}{\partial t} - \lambda \dfrac{\partial u}{\partial x_a} \dfrac{\partial}{\partial x_a}$, та дослідити симетрію цього рівняння, то отримаємо, що при жодній з функцій $F(u)$ рівняння (1.56) не інваріантне відносно перетворень Галілея. Справедливий такий результат:

Теорема 1.8. *Рівняння (1.56) інваріантне відносно алгебр:*
(i) $< P_0, P_a, J_{ab} >$ *для довільної гладкої функції* $F(u)$;
(ii) $< P_0, P_a, J_{ab}, X >$ *для* $F = C_1 u^3 - \dfrac{2}{9} \dfrac{\lambda_1^2}{\lambda_2} u$, *де*

$$X = \exp\left(\frac{\lambda_1}{3\lambda_2} t \right) \left(\partial_t - \frac{\lambda_1}{3\lambda_2} u \partial_u \right);$$

(iii) $< P_0, P_a, J_{ab}, D, B_1, B_2 >$ *для* $F = C_2 u$ $(C_2 \neq -\dfrac{2}{9} \dfrac{\lambda_1^2}{\lambda_2})$, *де*

$$D = x^a \partial_{x^a} + 2u \partial_u, \ B_1 = \exp(k_1 t) \partial_u, \ B_2 = \exp(k_2 t) \partial_u$$

$$\left(k_{1,2} = -\frac{\lambda_1}{2\lambda_2} \pm \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + 4\lambda_2 C_2}}{2\lambda_2} \right);$$

(iv) $< P_0, P_a, J_{ab}, X, D, B_1, B_2 >$ *для* $F = -\frac{2}{9}\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2}u$;

(v) $< P_0, P_a, J_{ab}, \widetilde{D}, B_1, B_2 >$ *для* $F = C_3 = const$, *де*

$$\widetilde{D} = x^a\partial_{x^a} + 2u\partial_u - \frac{2C_3}{\lambda_1}t\partial_u,$$

$$B_1 = \exp(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}t)\partial_u, \ B_2 = \partial_u.$$

Побудуємо скінчені перетворення, породжені оператором симетрії X рівняння (1.56).

$$\begin{cases} t \to \widetilde{t} = -\frac{3\lambda_2}{\lambda_1}\ln\left(-\frac{\lambda_1}{3\lambda_2}\mu + \exp(-\frac{\lambda_1}{3\lambda_2}t)\right), \\ x_a \to \widetilde{x}_a = x_a, \ a = \overline{1, n}, \\ u \to \widetilde{u} = u\exp\left(1 - \frac{\lambda_1}{3\lambda_2}\exp(\frac{\lambda_1}{3\lambda_2}t)\mu\right), \end{cases}$$

де μ – довільний параметр. Зауважимо, що ми побудували нові нелінійні перетворення.

Дослідимо тепер симетрію рівняння Гамільтона–Якобі для комплексної функції u, тобто симетрію системи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a}, \\ \frac{\partial u^*}{\partial t} = \lambda^*\frac{\partial u^*}{\partial x_a}\frac{\partial u^*}{\partial x_a}, \end{cases} \qquad (1.57)$$

де λ – комплексна стала.

Теорема 1.9. *Система (1.57) інваріантна відносно повної алгебри Галілея* $AG_2(1, n)$ *та додаткового оператора ділатації. А саме, базисні оператори алгебри інваріантності системи (1.57) ма-*

ють вигляд:

$$\begin{aligned}
&P_o = \partial_t,\ P_a = \partial_{x_a},\ a = \overline{1,n},\\
&J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a}, Z_1 = \partial_u,\ Z_2 = \partial_{u^*},\\
&G_a^{(1)} = t\partial_{x_a} - \frac{x_a}{2}\left(\frac{1}{\lambda}\partial_u + \frac{1}{\lambda^*}\partial_{u^*}\right),\\
&D^{(1)} = x_a\partial_{x_a} + 2t\partial_t,\ D^{(2)} = t\partial_t - u\partial_u - u^*\partial_{u^*},\\
&\Pi^{(1)} = t^2\partial_t + tx_a\partial_{x_a} - \frac{\vec{x}}{4}\left(\frac{1}{\lambda}\partial_u + \frac{1}{\lambda^*}\partial_{u^*}\right).
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Оператори (1.58) без доданків, що містять u^*, входять до алгебри інваріантності (1.53) рівняння Гамільтона–Якобі для дійсної функції u (1.52). Проте алгебра (1.58) не включає в себе операторів типу $G^{(2)}, \Pi^{(2)}$ та K_a, які входять до алгебри інваріантності рівняння Гамільтона–Якобі (1.52).

Оператори Галілея $G_a^{(1)}$ породжують такі скінчені перетворення:

$$\begin{cases}
t \to \widetilde{t} = t,\ x_a \to \widetilde{x}_a = x_a + tv_a,\ x_b \to \widetilde{x}_b = x_b,\ b \neq a,\\
u \to \widetilde{u} = u - \dfrac{1}{2\lambda}\left(x_a v_a + t\dfrac{v_a^2}{2}\right),\\
u^* \to \widetilde{u^*} = u^* - \dfrac{1}{2\lambda^*}\left(x_a v_a + t\dfrac{v_a^2}{2}\right),
\end{cases}$$

де v_a –параметр групових перетворень, за індексом a підсумовування немає.

Проективний оператор $\Pi^{(1)}$ генерує нелінійні проективні перетворення

$$\begin{cases}
t \to \widetilde{t} = \dfrac{t}{1-\mu t},\ x_a \to \widetilde{x}_a = \dfrac{x_a}{1-\mu t},\ a = \overline{1,n},\\
u \to \widetilde{u} = u + \dfrac{\mu x_c x_c}{4\lambda(1-\mu t)},\ u^* \to \widetilde{u^*} = u^* + \dfrac{\mu x_c x_c}{4\lambda^*(1-\mu t)},
\end{cases}$$

де μ – довільний параметр, за індексом c, що повторюється, проводиться підсумовування від 1 до n.

Розглянемо тепер узагальнення системи (1.57) вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \lambda_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_a}\dfrac{\partial u}{\partial x_a} + \lambda_2 \dfrac{\partial u}{\partial x_a}\dfrac{\partial u^*}{\partial x_a} = 0, \\ \dfrac{\partial u^*}{\partial t} + \lambda_1^* \dfrac{\partial u^*}{\partial x_a}\dfrac{\partial u^*}{\partial x_a} + \lambda_2^* \dfrac{\partial u}{\partial x_a}\dfrac{\partial u^*}{\partial x_a} = 0, \end{cases} \tag{1.59}$$

де $\lambda_2 \neq 0$.

Симетрія системи (1.59) залежить від співвідношення між сталими λ_1 та λ_2. А саме, розрізняються два випадки.

Випадок 1. $\lambda_1 = \lambda_2^*$.

Тоді максимальна алгебра інваріантності має базисні оператори

$$\begin{aligned} &P_o = \partial_t,\ P_a = \partial_{x_a},\ a = \overline{1,n},\ J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a}, \\ &D^{(1)} = x_a\partial_{x_a} + 2u\partial_u + 2u^*\partial_{u^*},\ D^{(2)} = t\partial_t - u\partial_u - u^*\partial_{u^*}, \\ &Z_1 = \partial_u,\ Z_2 = \partial_{u^*},\ Q_\eta = \eta(u, u^*)\left(\partial_u - \frac{\lambda_1}{\lambda_1^*}\partial_{u^*}\right). \end{aligned} \tag{1.60}$$

Алгебра (1.60) – нескінченновимірна, оскільки включає в себе оператор Q_η, який залежить від довільної функції $\eta(u, u^*)$. Однак алгебра (1.60) не включає в себе оператора Галілея.

Випадок 2. $\lambda_1 \neq \lambda_2^*$.

Максимальна алгебра інваріантності системи:
$< P_0, P_a, J_{ab}, D^{(1)}, D^{(2)}, Z_1, Z_2 >$ вигляду (1.60).

Отже, при узагальненні (1.59) системи (1.57) втрачається галілей–інваріантність.

Таким чином, узагальнення рівняння Гамільтона–Якобі на випадок комплексної змінної u зберігає інваріантність відносно перетворень Галілея з інфінітезимальним оператором $G^{(1)}$, але не зберігає інваріантності відносно $G^{(2)}$. Узагальнені рівняння типу Гамільтона–Якобі вищих порядків (1.54) та (1.52) втрачають галілей-інваріантність взагалі.

1.5 Редукція та розв'язки галілей–інваріантних рівнянь високого порядку

A. Симетрійна редукція та розв'язки нелінійного узагальненого рівняння Шродінгера.

Розглянемо узагальнене рівняння Шродінгера (1.15) у $(3+1)$–вимірному просторі–часі при $l = 2$:

$$S^2\psi = F(|\psi|)\psi. \tag{1.61}$$

Згідно з теоремою 1.3, рівняння (1.61) інваріантне відносно алгебри Галілея $AG(1,3)$ для довільної гладкої функції F (інфінітезимальні оператори алгебри мають вигляд (1.16)).

Проведемо редукцію рівняння (1.61) за нееквівалентними підалгебрами алгебри $AG(1,3)$ (див. [41]) та побудуємо розв'язки цього рівняння.

1. $< P_1, P_2, P_3 >$.

Анзац $\psi = \varphi(\omega)$, $\omega = t$, редукує рівняння (1.61) до ЗДР другого порядку

$$\ddot{\varphi} = -F(|\varphi|)\varphi, \tag{1.62}$$

де $\ddot{\varphi} \equiv \dfrac{d^2\varphi}{d\omega^2} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$. Якщо φ – дійсна функція, то рівняння (1.62) можна розв'язати. Загальний інтеграл має вигляд

$$t = \pm\int \frac{d\varphi}{\sqrt{-2\int F(\varphi)\varphi d\varphi + C_1}} + C_2, \tag{1.63}$$

де C_1 та C_2 – довільні сталі.

Зокрема, якщо $F = \lambda\varphi^k$ (φ – дійсна), то загальний інтеграл (1.63) набуває вигляду

$$t = \pm\tilde{\lambda}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{C_1 - \varphi^{k+2}}} + C_2 \tag{1.64}$$

де $\tilde{\lambda} = \sqrt{\dfrac{k+2}{2\lambda}}$. При деяких значеннях показника k загальний інтеграл (1.64) можна знайти у явному вигляді, а саме:

а) при $k = -4$ загальний інтеграл має вигляд

$$\widetilde{C}_1\varphi^2 - (t - C_2)^2\widetilde{\lambda}^2\widetilde{C}_1^2 = 1$$

(це буде еліпс на площині (φ, t));

б) при $k = -1$ загальний інтеграл має вигляд

$$\varphi = \widetilde{C}_1 - \frac{\widetilde{\lambda}^2}{4}(t - C_2)^2$$

(це рівняння параболи на площині (φ, t));

в) для $k = 0$ розв'язок φ виражається через тригонометричні функції:

$$\varphi = \sqrt{\widetilde{C}_1}\sin[\widetilde{\lambda}(t - C_2) + n\pi];$$

г) для $k = 1, 2$ функція φ виражається через неповні еліптичні функції.

2. $< G_1, P_2, P_3 >$.

Анзац $\psi = \exp\left(\dfrac{imx_1^2}{2t}\right)\varphi(\omega)$, $\omega = t$ редукує рівняння (1.61) до ЗДР

$$t^2\ddot{\varphi} + t\dot{\varphi} - \frac{1}{4}\varphi = -t^2F(|\varphi|)\varphi. \tag{1.65}$$

а) Якщо $F = 0$, то рівняння (1.65) є рівнянням Ойлера

$$t^2\ddot{\varphi} + t\dot{\varphi} - \frac{1}{4}\varphi = 0,$$

і розв'язок (1.61) тоді має вигляд

$$\psi = \exp\left(\frac{imx_1^2}{2t}\right)\left[C_1\sqrt{t} + \frac{C_2}{\sqrt{t}}\right].$$

б) $F = \lambda\varphi^k$, φ – дійсна функція. Тоді рівняння (1.65) набуває вигляду

$$t^2\ddot{\varphi} + t\dot{\varphi} - \frac{1}{4}\varphi = -\lambda t^2\varphi^{k+1}. \tag{1.66}$$

Якщо $k = 0$, то лінійне рівняння (1.66) є рівнянням Беселя

$$t^2\ddot{\varphi} + t\dot{\varphi} + \left(\lambda t^2 - \frac{1}{4}\right)\varphi = 0.$$

Розв'язком цього рівняння є циліндричні функції $Z_{1/2}(\omega\sqrt{\lambda})$ [17].

Для довільного k можна знайти частинний розв'язок рівняння (1.66) у вигляді

$$\varphi = Ct^r.$$

Після підстановки цього розв'язку у рівняння (1.66) отримаємо:

$$r = -\frac{2}{k},\ C = \left(\frac{k^2 - 16}{4\lambda k^2}\right)^{1/k}.$$

Таким чином, рівняння (1.61) при $F = \lambda\psi^k$ має частинний розв'язок

$$\psi = \left(\frac{k^2 - 16}{4\lambda k^2}\right)^{1/k} \exp\left(\frac{imx_1^2}{2t}\right) t^{-\frac{2}{k}}.$$

3. $< P_0 + \alpha G_1, P_2, P_3 >$.

Анзац $\psi = \exp\left(-\frac{i}{3}\alpha^2 mt^3 + i\alpha mx_1 t\right)\varphi(\omega)$, де $\omega = \alpha t^2 - 2x_1$, редукує рівняння (1.61) до ЗДР четвертого порядку

$$\varphi^{(4)} + \frac{\alpha m^2}{2}\omega\varphi^{(2)} + \frac{\alpha m^2}{2}\varphi^{(1)} + \frac{(\alpha m^2)^2}{16}\omega^2\varphi = \frac{m^2}{4}F(|\varphi|)\varphi, \tag{1.67}$$

де $\varphi^{(j)} \equiv \frac{\partial^j\varphi}{\partial\omega^j}$.

Якщо $F = 0$, то рівняння (1.67) перепишеться у вигляді

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\omega^2} + \frac{\alpha m^2}{4}\omega\right)^2 \varphi = 0. \tag{1.68}$$

Розв'язками (1.68) є зокрема розв'язки рівняння

$$\ddot{\varphi} + \frac{\alpha m^2}{4}\omega\varphi = 0,$$

які виражаються через функції Ейрі $A_i(\omega)$ [1] і їх можна представити через степеневі ряди.

4. $< G_1 + \alpha P_2, G_2 + \beta P_2, G_3 >$.

Анзац $\psi = \exp\left(\frac{imx_1^2}{2(t-\alpha)} + \frac{imx_2^2}{2(t-\beta)} + \frac{imx_3^2}{2t}\right)\varphi(\omega)$, де $\omega = t$, редукує рівняння (1.61) до ЗДР

$$\ddot{\varphi} + \left\{\frac{1}{t-\alpha} + \frac{1}{t-\beta} + \frac{1}{t}\right\}\dot{\varphi} - \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(t-\alpha)^2} + \frac{1}{(t-\beta)^2} + \frac{1}{t^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{(t-\alpha)(t-\beta)} - \frac{2}{(t-\alpha)t} - \frac{2}{(t-\beta)t}\right\}\varphi = -F(|\varphi|)\varphi.$$

5. $< P_0 + \alpha I, P_2, P_3 >$, де $I = i(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*})$.

Анзац $\psi = \exp(i\alpha t)\varphi(\omega)$, $\omega = x_1$, редукує рівняння (1.61) до ЗДР четвертого порядку

$$\frac{1}{4m^2}\varphi^{(4)} - \frac{\alpha}{m}\varphi^{(2)} + \alpha^2\varphi = F(|\varphi|)\varphi. \tag{1.69}$$

а) $F = 0$, $\alpha > 0$.

Позначимо $\mu = \sqrt{2m|\alpha|}$. Тоді загальний розв'язок рівняння (1.69) має вигляд

$$\varphi = C_1\exp(\mu\omega) + C_2\omega\exp(\mu\omega) + C_3\exp(-\mu\omega) + C_4\omega\exp(-\mu\omega),$$

а відповідний розв'язок рівняння (1.61):

$$\psi = \exp(i\alpha t)[C_1\exp(\mu x_1) + C_2 x_1\exp(\mu x_1) +$$
$$+ C_3\exp(-\mu x_1) + C_4 x_1\exp(-\mu x_1)].$$

б) $F = 0$, $\alpha < 0$.

В цьому випадку загальний розв'язок рівняння (1.61) має вигляд

$$\psi = \exp(i\alpha t)[C_1\cos(\mu x_1) + C_2 x_1\cos(\mu x_1) + C_3\sin(\mu x_1) +$$
$$+ C_4 x_1\sin(\mu x_1)],$$

де μ визначено так само, як і в попередньому випадку.

в) $F = \lambda = const \neq 0$. Позначимо $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{2m\alpha + 2m\sqrt{\lambda}}$, $\mu_{3,4} = \pm\sqrt{2m\alpha - 2m\sqrt{\lambda}}$. Тоді загальний розв'язок рівняння (1.61) при $\lambda \neq \alpha^2$ матиме вигляд

$$\psi = \exp(i\alpha t)[C_1\exp(\mu_1 x_1) + C_2\exp(\mu_2 x_1) +$$
$$+ C_3\exp(\mu_3 x_1) + C_4\exp(\mu_4 x_1)].$$

Якщо $\lambda = \alpha^2$, то

$$\psi = \exp(i\alpha t)[C_1 x_1 + C_2 + C_3 \exp(2\sqrt{m\alpha} x_1) + C_4 \exp(-2\sqrt{m\alpha} x_1)].$$

6. $< P_0 + \alpha I > \oplus AO(3)$.

Анзац $\psi = \exp(i\alpha t)\varphi(\omega)$, де $\omega = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. редукує рівняння (1.61) до ЗДР четвертого порядку

$$\frac{4}{m^2}\omega^2\varphi^{(4)} + \frac{20}{m^2}\omega\varphi^{(3)} + \left(\frac{15}{m^2} - \frac{4\alpha}{m}\omega\right)\varphi^{(2)} - \frac{6\alpha}{m}\varphi^{(1)} + \alpha^2\varphi = F(|\varphi|)\varphi. \quad (1.70)$$

Розглянемо частинний випадок. Нехай $\alpha = 0$ та $F = \lambda\varphi^k$, φ - дійсна функція. Тоді маємо рівняння

$$4\omega^2\varphi^{(4)} + 20\omega\varphi^{(3)} + 15\varphi^{(2)} = \lambda m^2 \varphi^{k+1}. \quad (1.71)$$

Рівняння (1.71) має частинний розв'язок

$$\varphi = C\omega^r,$$

де $r = -\frac{2}{k}$, $C = \left[\frac{r(r-1)(2r-1)(2r+1)}{\lambda m^2}\right]^{1/k}$.

7. $< G_1 + \alpha P_1, G_2, P_3 >$.

Анзац $\psi = \exp\left(\frac{imx_1^2}{2(t-\alpha)} + \frac{imx_2^2}{2t}\right)\varphi(\omega)$, де $\omega = t$, редукує рівняння (1.61) до ЗДР другого порядку

$$\ddot{\varphi} + \left\{\frac{1}{t-\alpha} + \frac{1}{t}\right\}\dot{\varphi} - \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(t-\alpha)^2} + \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t(t-\alpha)}\right\}\varphi =$$
$$= -F(|\varphi|)\varphi.$$

Б. Конструктивний метод побудови розв'язків узагальненого рівняння Шродінгера.

Для узагальненого рівняння Шродінгера (1.61) застосуємо конструктивний метод побудови класів точних розв'язків [40].

Суть методу полягає у наступному. Згідно з теоремою 1.3, рівняння (1.61) інваріантне відносно алгебри Галілея $AG(1,3)$ для довільної гладкої функції $F(|\psi|)$. Нехай L - довільна підалгебра ранга 3 алгебри $AG(1,3)$. Симетрійний анзац, що відповідає підалгебрі L, має вигляд $\psi = \exp\{if(t,\vec{x})\}\varphi(\omega_1)$, де ω_1 – інваріант підалгебри L. Будемо шукати узагальнений анзац у вигляді $\psi = \exp\{if(t,\vec{x})\}\varphi(\omega_1,\omega_2)$, де ω_2 – невідома змінна, яку ми визначаємо із умови, що редуковане рівняння , яке відповідає анзацу $\psi = \exp\{if(t,\vec{x})\}\varphi(\omega_1,\omega_2)$, співпадає з редукованим рівнянням, яке відповідає анзацу $\psi = \exp\{if(t,\vec{x})\}\varphi(\omega_1)$.

а). Розглянемо підалгебру $< P_1, P_2, P_3 >$. Їй відповідає симетрійний анзац $\psi = \varphi(t)$, який редукує рівняння (1.61) до ЗДР (1.62). Цей анзац будемо розглядати як частинний випадок більш загального анзаца

$$\psi = \varphi(t,\omega). \tag{1.72}$$

Накладемо умову на (1.72) таку, щоб вираз (1.72) був анзацом для рівняння (1.61), тобто редукував рівняння (1.61) до рівняння (1.62) для довільної функції φ. Тоді змінна ω повинна задовільняти систему рівнянь

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial\omega}{\partial t} + \dfrac{1}{2m}\Delta\omega = 0, \\ \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2 = 0 \end{cases} \tag{1.73}$$

Таким чином, формула (1.72) визначає сім'ю розв'язків нелінійного узагальненого рівняння Шродінгера (1.61), якщо φ задовільняє (1.62), а ω є розв'язком системи (1.73). Проблема редукції звелася до побудови загальних або частинних розв'язків системи (1.73). Зауважимо, що довільна функція від розв'язку системи (1.73) знову буде розв'язком системи (1.73).

Частинним випадком системи (1.73) є система

$$\begin{cases} \Delta\omega = 0, \\ \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2 = 0 \end{cases} \tag{1.74}$$

Широкий клас розв'язків системи (1.74) побудований у роботах [32, 94, 55]. Розглянемо лінійне алгебраїчне рівняння відносно змінних x_1, x_2, x_3 з коефіцієнтами, які залежать від невідомої ω:

$$a_1(\omega)x_1 + a_2(\omega)x_2 + a_3(\omega)x_3 + b(\omega) = 0. \tag{1.75}$$

Нехай коефіцієнти цього рівняння є аналітичними функціями від ω, які задовільняють умову

$$[a_1(\omega)]^2 + [a_2(\omega)]^2 + [a_3(\omega)]^2 = 0.$$

Припустимо, що рівняння (1.75) можна розв'язати відносно ω і результат цього розв'язку є деяка комплексна функція

$$\omega(x_1, x_2, x_3). \tag{1.76}$$

Тоді функція (1.76) буде розв'язком системи (1.74).

Зокрема, розв'язком системи (1.74) є функції

$$\omega_1 = x_2 + ix_3,$$
$$\omega_2 = x_1 + x_2 + \sqrt{2}ix_3.$$

Розглянемо рівняння (1.61) для $F(|\psi|) = \lambda$:

$$S^2\psi = \lambda\psi. \tag{1.77}$$

Редуковане рівняння (1.62) має вигляд

$$\ddot{\varphi} = -\lambda\varphi,$$

загальний розв'язок якого

$$\varphi = C_1 \exp(\sqrt{-\lambda}t) + C_2 \exp(-\sqrt{-\lambda}t).$$

Використовуючи цей розв'язок, можна побудувати широкий клас розв'язків рівняння (1.77) таким способом [40]. Шукаємо розв'язок (1.77) у вигляді

$$\psi = h_1(\omega) \exp(\sqrt{-\lambda}t) + h_2(\omega) \exp(-\sqrt{-\lambda}t).$$

де ω – довільний розв'язок системи (1.74), а $h_1(\omega)$ та $h_2(\omega)$ – довільні двічі неперервно–диференційовані функції від ω. Зокрема, рівняння (1.77) має такі розв'язки

$$\psi = h_1(x_2 + ix_3)\exp(\sqrt{-\lambda}t) + h_2(x_2 + ix_3)\exp(-\sqrt{-\lambda}t),$$

$$\psi = h_1(x_1 + x_2 + i\sqrt{2}x_3)\exp(\sqrt{-\lambda}t) + \\ + h_2(x_1 + x_2 + i\sqrt{2}x_3)\exp(-\sqrt{-\lambda}t),$$

де h_1, h_2 – двічі неперервно-диференційовані функції.

б) Підалгебрі $< G_1, P_2, P_3 >$ відповідає симетрійний анзац

$$\psi = \exp\left(\frac{imx_1^2}{2t}\right)\varphi(t).$$

Узагальненням його є анзац

$$\psi = \exp\left(\frac{imx_1^2}{2t}\right)\varphi(t, \omega),$$

де ω – довільний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial\omega}{\partial t} + \dfrac{1}{2m}\triangle\omega + i\dfrac{x_1}{t}\dfrac{\partial\omega}{\partial x_1} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2 = 0. \end{cases} \tag{1.78}$$

Обидва анзаци редукують рівняння (1.61) до рівняння

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{t}\dot{\varphi} - \frac{1}{4t^2}\varphi = -F(|\varphi|)\varphi, \tag{1.79}$$

де крапка вгорі означає похідну по змінній t.

Якщо $F(|\varphi|) = \lambda$, то рівняння (1.79) є рівнянням Беселя і має загальний розв'язок

$$\varphi = C_1 J_{1/2}(t\sqrt{\lambda}) + C_2 J_{-1/2}(t\sqrt{\lambda}),$$

де J_ν – функція Беселя першого роду (нагадаємо, що функція Беселя $J_{1/2}(x)$ виражається явно через тригонометричні та степеневі функції). За допомогою цього розв'язку можна побудувати клас розв'язків рівняння (1.77):

$$\psi = \exp\left(\frac{imx_1^2}{2t}\right)[h_1(\omega)J_{1/2}\{\sqrt{\lambda}(t + h_2(\omega))\} +$$
$$+ h_3(\omega)J_{-1/2}\{\sqrt{\lambda}(t + h_4(\omega))\}.$$

де ω – довільний розв'язок системи (1.78), h_j $(j = \overline{1,4})$ – довільні гладкі функції від ω. Зокрема, система (1.78) має частинний розв'язок

$$\omega = x_2 + ix_3.$$

Тоді рівняння (1.77) має клас розв'язків

$$\psi = \exp\left(\frac{imx_1^2}{2t}\right)[h_1(x_2 + ix_3)J_{1/2}\{\sqrt{\lambda}(t + h_2(x_2 + ix_3))\} +$$
$$+ h_3(x_2 + ix_3)J_{-1/2}\{\sqrt{\lambda}(t + h_4(x_2 + ix_3))\}],$$

де h_j $(j = \overline{1,4})$ – довільні двічі неперервно-диференційовані функції від $x_2 + ix_3$.

Якщо $F(|\psi|) = 0$ в рівнянні (1.61), то це рівняння має клас розв'язків вигляду

$$\psi = \exp\left(\frac{imx_1^2}{2t}\right)\left[h_1(x_2 + ix_3)\sqrt{t + h_2(x_2 + ix_3)} +\right.$$
$$\left. + h_3(x_2 + ix_3)\frac{1}{\sqrt{t + h_4(x_2 + ix_3)}}\right],$$

де h_j $(j = \overline{1,4})$ – довільні двічі неперервно-диференційовані функції.

в) Симетрійний анзац

$$\psi = \exp\left(\frac{im(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{2t}\right)\varphi(t),$$

який відповідає підалгебрі $< G_1, G_2, G_3 >$, допускає таке узагальнення:

$$\psi = \exp\left(\frac{im(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{2t}\right)\varphi(t, \omega).$$

де ω – довільний розв'язок системи

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial\omega}{\partial t} + \dfrac{1}{2m}\triangle\omega + i\dfrac{x_a}{t}\dfrac{\partial\omega}{\partial x_a} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2 = 0 \end{cases} \qquad (1.80)$$

Обидва анзаци редукують рівняння (1.61) до ЗДР:

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{t}\dot{\varphi} + \frac{3}{4t^2}\varphi = -F(|\varphi|)\varphi.$$

Частинним розв'язком системи (1.80) є клас функцій

$$\omega = h\left(\frac{x_2 + ix_3}{t}\right),$$

де h – двічі неперервно-диференційована функція.

г) Симетрійний анзац $\psi = \exp(i\alpha t)\varphi(x_1)$ відповідає підалгебрі $< P_2, P_3, P_0 + \alpha I >$, де $I = i(\psi_\psi - \psi^*_{\psi^*})$. Цей анзац є частинним випадком більш загального анзацу

$$\psi = \exp(i\alpha t)\varphi(x_1, \omega),$$

де ω – довільний розв'язок системи

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial\omega}{\partial t} + \dfrac{1}{2m}\triangle\omega = 0, \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial x_1} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2 = 0. \end{cases}$$

Обидва анзаци редукують рівняння (1.61) до рівняння четвертого порядку

$$\alpha^2\varphi - \frac{\alpha}{m}\varphi^{(2)} + \frac{1}{4m^2}\varphi^{(4)} = F(|\varphi|)\varphi, \qquad (1.81)$$

де $\varphi^{(j)} \equiv \frac{\partial^j\varphi}{\partial x_1^j}$.

Якщо $F(|\psi|) = \lambda$, то загальний розв'язок рівняння (1.81) має вигляд

$$\varphi = C_1 \exp(\mu_1 x_1) + C_2 \exp(\mu_2 x_1) + C_3 \exp(\mu_3 x_1) + C_4 \exp(\mu_4 x_1),$$

де μ_j $(j = \overline{1,4})$ – корені відповідного характеристичного рівняння

$$\alpha^2 - \frac{\alpha}{m}\mu^2 + \frac{1}{4m^2}\mu^4 = \lambda,$$

причому $\alpha^2 \neq \lambda$. Тоді розв'язком рівняння (1.77) є клас функцій

$$\psi = \exp(i\alpha t)[h_1(x_2 + ix_3)\exp(\mu_1 x_1) + h_2(x_2 + ix_3)\exp(\mu_2 x_1) +$$
$$+ h_3(x_2 + ix_3)\exp(\mu_3 x_1) + h_4(x_2 + ix_3)\exp(\mu_4 x_1)].$$

У випадку, коли $\alpha^2 = \lambda$, рівняння (1.77) має клас розв'язків

$$\psi = \exp(i\alpha t)[h_1(x_2 + ix_3) + h_2(x_2 + ix_3)x_1 +$$
$$+ h_3(x_2 + ix_3)\exp(2\sqrt{\alpha m}x_1) + h_4(x_2 + ix_3)\exp(-2\sqrt{\alpha m}x_1)],$$

h_j $(j = \overline{1,4})$ – двічі неперервно-диференційовані функції.

д) Симетрійний анзац $\psi = \exp(i\alpha t)\varphi(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, що відповідає підалгебрі $< J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_0 + \alpha I >$, редукує рівняння (1.61) до ЗДР

$$\alpha^2\varphi - \frac{\alpha}{m}(6\varphi^{(1)} + 4\omega_1\varphi^{(2)}) + \frac{1}{4m^2}(60\varphi^{(2)} + \\ + 80\omega_1\varphi^{(3)} + 16\omega_1^2\varphi^{(4)}) = F(|\varphi|)\varphi, \tag{1.82}$$

де похідні беруться по ω_1, $\omega_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Анзац (1.82) можна узагальнити:

$$\psi = \exp(i\alpha t)\varphi(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \omega_2), \tag{1.83}$$

де ω_2 – довільний розв'язок системи

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial\omega_2}{\partial t} + \dfrac{1}{2m}\Delta\omega_2 = 0, \\ \left(\dfrac{\partial\omega_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\omega_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\omega_2}{\partial x_3}\right)^2 = 0, \\ x_1\dfrac{\partial\omega_2}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial\omega_2}{\partial x_2} + x_3\dfrac{\partial\omega_2}{\partial x_3} = 0. \end{cases} \tag{1.84}$$

Якщо ω_2 задовільняє систему (1.84), то анзац (1.83) редукує рівняння (1.61) до рівняння (1.82).

Висновок. Отже, використовуючи метод [40], ми побудували класи точних розв'язків рівняння (1.61) через довільні функції. В стандартному підході такі розв'язки отримати неможливо.

В. Про спектр узагальненого рівняння Шродінгера з кулоновим потенціалом.

Даний пункт присвячений дослідженню розв'язків узагальненого рівняння Шродінгера (1.26) з кулоновим потенціалом у тривимірному просторі–часі:

$$\{\lambda_1 S + \lambda_2 S^2 + \frac{\lambda}{r}\}\psi(t, \vec{x}) = 0, \tag{1.85}$$

де $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, λ – деяка стала, що не дорівнює нулеві, а також $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

Очевидно, що рівняння (1.85) інваріантне відносно трансляцій по часу, тому його розв'язки шукаємо у вигляді

$$\psi = \exp(-iEt)\tilde{\psi}(\vec{x}). \tag{1.86}$$

Звідси ми отримуємо стаціонарне узагальнене рівняння Шродінгера

$$\{\lambda_1 \left(E - \frac{1}{2m}p_a^2\right) + \lambda_2 \left(E - \frac{1}{2m}p_a^2\right)^2 + \frac{\lambda}{r}\}\tilde{\psi}(\vec{x}) = 0 \tag{1.87}$$

для визначення власних значень енергії E та власних функцій $\tilde{\psi}(\vec{x})$.

Далі, враховуючи інваріантність рівняння відносно групи обертань, перейдейдемо до сферичної системи координат (r, θ, φ) і будемо шукати розв'язки рівняння (1.87) у вигляді $\tilde{\psi}(\vec{x}) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ де $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ – сферичні функції, $R(r)$ – радіальна хвильова функція.

Розглянемо найпростіший випадок, коли орбітальний момент $\underline{l = 0}$. Тоді рівняння для функції $R(r)$ буде мати вигляд

$$\left\{\lambda_1(E - \frac{1}{2m}p_r^2) + \lambda_2(E - \frac{1}{2m}p_r^2)^2 + \frac{\lambda}{r}\right\} R(r) = 0. \tag{1.88}$$

де $p_r^2 = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr} \equiv -\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)$.

Зробимо заміну $r \to \sqrt{2m}r$ та розділимо рівняння (1.88) на λ_1. Після замін $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \lambda_2'$, $\frac{\lambda}{\sqrt{2m}\lambda_1} = \lambda'$, одержимо рівняння

$$\left(p_r^2 - \lambda_2'(E - p_r^2)^2 - \frac{\lambda'}{r}\right)R(r) = ER(r). \tag{1.89}$$

По аналогії із стандартним методом розв'язування рівняння Шредінгера з кулоновим потенціалом [19, 21] розв'язки рівняння (1.89) шукаємо у вигляді

$$R(r) = \exp(-\alpha r)P_n(\alpha r), \tag{1.90}$$

де $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ – алгебраїчний поліном степеня n, α – параметр.

Позначимо $\alpha r = x$ і зробимо заміну

$$\lambda_2'\alpha^2 = \widetilde{\lambda}_2,\ \frac{E}{\alpha^2} = \widetilde{E},\ \frac{\lambda'}{\alpha} = \widetilde{\lambda}. \tag{1.91}$$

Із (1.89) отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} &-\left[P_n - 2P_n^{(1)} + P_n^{(2)} + \frac{2}{x}(-P_n + P_n^{(1)})\right](1 + 2\widetilde{\lambda}_2\widetilde{E}) - \\ &-\widetilde{\lambda}_2\widetilde{E}^2 P_n - \widetilde{\lambda}_2\left[\frac{2}{x}(-2P_n + 6P_n^{(1)} - 6P_n^{(2)} + 2P_n^{(3)}) + \right. \\ &\left. + P_n - 4P_n^{(1)} + 6P_n^{(2)} - 4P_n^{(3)} + P_n^{(4)}\right] - \frac{\widetilde{\lambda}}{x}P_n = \widetilde{E}P_n, \end{aligned} \tag{1.92}$$

де $P_n^{(j)} \equiv \frac{\partial^j P_n}{\partial x^j}$. Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x у рівності (1.92). Коефіцієнт при x^n дає нам рівність

$$(\widetilde{E} + 1)(1 + \widetilde{\lambda}_2(\widetilde{E} + 1)) = 0, \tag{1.93}$$

звідки можливі два випадки: $\widetilde{E} = -1$ або $\widetilde{E} = -1 - \frac{1}{\widetilde{\lambda}_2}$. Прирівнюючи коефіцієнти при x^{n-1}, одержимо рівність

$$4(n+1)\widetilde{\lambda}_2(\widetilde{E} + 1) + 2(n+1) - \widetilde{\lambda} = 0. \tag{1.94}$$

Співвідношення (1.93) та (1.94) визначають дискретний енергетичний спектр рівняння (1.89).

а). Якщо $E = -1$, то $\lambda = 2(n+1)$. Враховуючи заміну (1.91), отримаємо стандартний енергетичний спектр кулонової задачі

$$E_n = -\left(\frac{\lambda'}{2(n+1)}\right)^2. \tag{1.95}$$

Суттєво, що спектр не залежить від λ_2.

б). Якщо $\widetilde{E} = -1 - \frac{1}{\widetilde{\lambda}_2}$, то $\widetilde{\lambda} = -2(n+1)$. Враховуючи заміну (1.91), отримаємо

$$E_n = -\left(\frac{\lambda'}{2(n+1)}\right)^2 - \frac{1}{\lambda_2'}. \tag{1.96}$$

Ці власні значення залежать від λ_2. Кожен рівень із серії (1.96) відрізняється від (1.95) зсувом константу.

Прирівняємо тепер коефіцієнт при x^{n-2} до нуля в (1.92) і отримаємо рівність

$$[-n(n+1)a_n + 2na_{n-1}](1 + 2\widetilde{\lambda}_2\widetilde{E}) + \widetilde{\lambda}_2[4na_{n-1} - 6n(n+1)a_n] -$$
$$-\widetilde{\lambda}a_{n-1} = 0$$

З цієї рівності можемо виразити коефіцієнт a_{n-1} через $a_n, \widetilde{\lambda}, \widetilde{\lambda}_2$. Якщо в рівності (1.92) будемо далі прирівнювати коефіцієнти при степенях x^k, $k = n-2, n-3, \ldots, 1, 0, -1$, то отримаємо залежність між коефіцієнтами $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, і таким чином, повністю визначаємо поліном $P_n(x)$ в (1.90).

Розглянемо частинні випадки.

1) $P_0 = 1$ – поліном 0-го порядку (найнижчий стан енергії). Тоді $E_0 = -\left(\frac{\lambda'}{2}\right)^2$ або $E_0 = -\left(\frac{\lambda'}{2}\right)^2 - \frac{1}{\lambda_2'}$, а власна функнкція $R(x) = \exp(-x)$, або, враховуючи заміну (1.91), $R(r) = \exp(-\lambda r/2)$.

2) $P_1 = a + bx$ – поліном першого порядку (перший збуджений стан енергії).

Якщо $E_1 = -\left(\frac{\lambda'}{4}\right)^2$, то власна функція має вигляд

$$R(x) = \exp(-x)\left(x - 1 - \frac{1}{4}\lambda_2'(\lambda')^2\right);$$

якщо $E_1 = -\left(\frac{\lambda'}{4}\right)^2 - \frac{1}{\lambda_2'}$, то власна функція має вигляд

$$R(x) = \exp(-x)\left(x - 1 + \frac{1}{4}\lambda_2'(\lambda')^2\right).$$

Висновок. Таким чином, ми одержали дві серії дискретних спектрів рівняння (1.89):
(i) $E_n = -\left(\frac{\lambda'}{2(n+1)}\right)^2$.
В цьому випадку E не залежить від λ_2 і результат співпадає з чисто кулоновим випадком ($\lambda_2 = 0$), відповідні власні функції мають вигляд

$$R(x) = \exp(-x)(a_n x^n + \ldots + a_0).$$

(ii) $E_n = -\left(\frac{\lambda'}{2(n+1)}\right)^2 - \frac{1}{\lambda_2'}$.
Відповідні власні функції мають аналогічний вигляд

$$R(x) = \exp(-x)(\tilde{a}_n x^n + \ldots + \tilde{a}_0).$$

Відмітимо, що залишається відкритим як питання щодо самоспряженості оператора в рівнянні (1.89) у випадку $\lambda_2' \neq 0$, так і питання щодо того, чи вичерпують серії (1.95) та (1.96) весь дискретний спектр узагальненого рівняння.

Розділ 2

Симетрійний аналіз галілей-інваріантних рівнянь з нефіксованим потенціалом

Цей розділ присвячений дослідженню симетрійних властивостей галілей–інваріантних рівнянь з нефіксованим потенціалом. Основна ідея полягає в тому, що потенціали вважаються новими залежними змінними. Застосування цієї ідеї приводить до суттєвого розширення симетрії рівнянь з потенціалами. Таким методом досліджується рівняння Шродінгера, рівняння конвективної дифузії, рівняння Шродінгера з конвективним членом та рівняння Гамільтона–Якобі з потенціалом. Також в даному розділі вивчена симетрія деяких систем галілей–інваріантних рівнянь та додаткових умов на потенціали. Побудовано класи розв'язків таких рівнянь.

Цей розділ написаний на основі робіт [31, 30].

2.1 Симетрія рівняння Шродінгера з потенціалом

Розглянемо рівняння Шродінгера з потенціалом

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi + W(t, \vec{x}, |\psi|)\psi = 0. \tag{2.1}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_a}$, $a = \overline{1,n}$, $\psi = \psi(t, \vec{x})$ – невідома комплексна хвильова функція, $W = W(t, \vec{x}, |\psi|)$ – потенціал, для зручності вважаємо, що $m = \dfrac{1}{2}$. Для довільного $W(t, \vec{x}, |\psi|)$, рівняння (2.1) допускає тільки тривіальну групу тотожніх перетворень $x_a \to \widetilde{x}_a = x_a$ $(a = \overline{1,n})$, $t \to \widetilde{t} = t$, $\psi \to \widetilde{\psi} = \psi$ [53, 70].

У роботах Фущича [34, 81, 83], запропонована ідея про розширення групи симетрії рівняння (2.1). Вона полягає в тому, що в рівнянні (2.1), ми вважаємо, що $W = W(t, \vec{x}, |\psi|)$ є новою залежною змінною. Це означає, що (2.1) є нелінійним рівнянням навіть тоді, коли потенціал W не залежить від ψ.

Використовуючи цю ідею, знайдемо алгебру інваріантності рівняння (2.1).

Теорема 2.1. *Рівняння (2.1) інваріантне відносно нескінченновимірної алгебри Лі з інфінітезимальними операторами*

$$\begin{aligned}
&J_{ab} = x_a \partial_{x_b} - x_b \partial_{x_a},\\
&Q_a = U_a \partial_{x_a} + \tfrac{i}{2} \dot{U}_a x_a (\psi \partial_\psi - \psi^* \partial_{\psi^*}) + \tfrac{1}{2} \ddot{U}_a x_a \partial_W,\\
&Q_A = 2A\partial_t + \dot{A} x_c \partial_{x_c} + \tfrac{i}{4} \ddot{A} x_c x_c (\psi \partial_\psi - \psi^* \partial_{\psi^*}) - \\
&\qquad - \frac{n\dot{A}}{2} (\psi \partial_\psi + \psi^* \partial_{\psi^*}) + (\tfrac{1}{4}\, \dddot{A}\, x_c x_c - 2W \dot{A}) \partial_W,\\
&Q_B = iB(\psi \partial_\psi - \psi^* \partial_{\psi^*}) + \dot{B} \partial_W,\ Z_1 = \psi \partial_\psi,\ Z_2 = \psi^* \partial_{\psi^*},
\end{aligned} \tag{2.2}$$

де $U_a(t), A(t), B(t)$ *– довільні гладкі функції від* t, *за індексом* c *мається на увазі підсумовування від* 1 *до* n, $a, b = \overline{1, n}$, *за індексом* a, *що повторюється, підсумовування немає, крапка вгорі означає похідну по часу.*

Доведення. Оператори симетрії рівняння (2.2) шукаємо у класі операторів

$$\begin{aligned}
X = {} & \xi^\mu(t, \vec{x}, \psi, \psi^*) \partial_{x_\mu} + \eta(t, \vec{x}, \psi, \psi^*) \partial_\psi + \eta^*(t, \vec{x}, \psi, \psi^*) \partial_{\psi^*} + \\
& + \rho(t, \vec{x}, \psi, \psi^*, W) \partial_W.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Використовуючи умову інваріантності (0.7) рівняння (2.1) відносно оператора (2.3) та враховуючи те, що $W = W(t, \vec{x}, |\psi|)$, тобто $\psi \dfrac{\partial W}{\partial \psi} = \psi^* \dfrac{\partial W}{\partial \psi^*}$, одержимо систему визначальних рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&\xi^j_\psi = \xi^j_{\psi^*} = 0,\ \xi^0_a = 0,\ \xi^a_a = \xi^b_b,\ \xi^a_b + \xi^b_a = 0,\ \xi^0_0 = 2\xi^a_a,\\
&\eta_{\psi^*} = 0,\ \eta_{\psi\psi} = 0,\ \eta_{\psi a} = (i/2)\xi^a_0,\\
&\eta^*_\psi = 0,\ \eta^*_{\psi^*\psi^*} = 0,\ \eta^*_{\psi^* a} = -(i/2)\xi^a_0,\\
&i\eta_0 + \eta_{cc} - \eta_\psi W\psi + 2W\xi^n_n\psi + W\eta + \rho\psi = 0,\\
&-i\eta^*_0 + \eta^*_{cc} - \eta^*_{\psi^*}W\psi^* + 2W\xi^n_n\psi^* + W\eta^* + \rho\psi^* = 0,\\
&\rho_\psi = \rho_{\psi^*} = 0,
\end{aligned}
\qquad (2.4)
$$

де індекс j змінюється від 0 до n, $a, b = \overline{1, n}$, за індексом c проводиться підсумовування від 1 до n, за індексами a, b підсумовування немає; нижні індекси означають частинні похідні по відповідним змінним.

Розв'язавши систему (2.4), ми отримаємо наступний результат:

$$
\begin{aligned}
&\xi^0 = 2A,\ \xi^a = \dot{A}x_a + C^{ab}x_b + U_a,\ a = \overline{1, n},\\
&\eta = (i/2)((1/2)\ddot{A}x_c x_c + \dot{U}_c x_c + B)\psi,\\
&\eta^* = -(i/2)((1/2)\ddot{A}x_c x_c + \dot{U}_c x_c + E)\psi^*,\\
&\rho = (1/2)((1/2)\dddot{A}x_c x_c + \ddot{U}_c x_c + \dot{B}) - (n/2)i\ddot{A} - 2W\dot{A},
\end{aligned}
$$

де A, U_a, B – довільні функції від t, $E = B - 2in\dot{A} + C_1$, $C^{ab} = -C^{ba}$ та C_1 – довільні сталі. Теорему доведено.

Зауваження 1. Алгебра інваріантності (2.2) включає в себе трансляції по координатам ($U_a = 1$) та часу ($A = 1/2$), оператор Галілея ($U_a = t$), дилатації ($A = t$) та проективний оператор ($A = t^2/2$).

Використовуючи рівняння Лі, одержимо скінчені перетворення, які відповідають оператору Q_a:

$$\begin{cases} t \to \tilde{t} = t, \\ x_a \to \widetilde{x}_a = x_a + U_a(t)\beta_a, \\ x_b \to \widetilde{x}_b = x_b \ (b \neq a), \\ \psi \to \widetilde{\psi} = \psi \exp(\frac{i}{4}\dot{U}_a U_a \beta_a^2 + \frac{i}{2}\dot{U}_a x_a \beta_a), \\ \psi^* \to \widetilde{\psi}^* = \psi^* \exp(-\frac{i}{4}\dot{U}_a U_a \beta_a^2 - \frac{i}{2}\dot{U}_a x_a \beta_a), \\ W \to \widetilde{W} = W + \frac{1}{2}\ddot{U}_a x_a \beta_a + \frac{1}{4}\ddot{U}_a U_a \beta_a^2, \end{cases} \tag{2.5}$$

де $\beta_a(a = \overline{1,n})$ – груповий параметр, $U_a = U_a(t)$ – довільна гладка функція, за індексом a, що повторюється, підсумовування немає. Зокрема, якщо $U_a(t) = t$, тоді оператор Q_a є стандартним оператором Галілея

$$G_a = t\partial_{x_a} + \frac{i}{2}x_a(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}). \tag{2.6}$$

Оператор Q_B породжує такі скінчені перетворення:

$$\begin{cases} t \to \widetilde{t} = t, \ x_c \to \widetilde{x}_c = x_c, \ c = \overline{1,n}, \\ \psi \to \widetilde{\psi} = \psi \exp(iB(t)\alpha), \\ \psi^* \to \widetilde{\psi}^* = \psi^* \exp(-iB(t)\alpha), \\ W \to \widetilde{W} = W + \dot{B}(t)\alpha, \end{cases} \tag{2.7}$$

де α – груповий параметр, $B(t)$ – довільна гладка функція.

Для операторів Q_A скінчені перетворення важко виписати у загальному вигляді. Тому розглянемо декілька частинних випадків:

а) $A(t) = t$.

Тоді $Q_A = 2t\partial_t + x_c\partial_{x_c} - \frac{n}{2}(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}) - 2W\partial_W$ є оператором дилатації, який генерує перетворення

$$\begin{cases} t \to \widetilde{t} = t\exp(2\lambda), \\ x_c \to \widetilde{x}_c = x_c\exp(\lambda), \\ \psi \to \widetilde{\psi} = \exp(-\frac{n}{2}\lambda)\psi, \ \psi^* \to \widetilde{\psi}^* = \exp(-\frac{n}{2}\lambda)\psi^*, \\ W \to \widetilde{W} = W\exp(-2\lambda), \end{cases} \tag{2.8}$$

де λ – довільний параметр перетворень.

б) $A(t) = t^2/2$.

Тоді $Q_A = t^2\partial_t + tx_c\partial_{x_c} + \frac{i}{4}x_cx_c(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) - \frac{n}{2}t(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}) - 2tW\partial_W$ є оператором проективних перетворень:

$$\begin{cases} t \to \widetilde{t} = \dfrac{t}{1-\mu t}, \\ x_c \to \widetilde{x}_c = \dfrac{x_c}{1-\mu t}, \\ \psi \to \widetilde{\psi} = \psi(1-\mu t)^{n/2}\exp\left(\dfrac{ix_cx_c\mu}{4(1-\mu t)}\right), \\ \psi^* \to \widetilde{\psi}^* = \psi^*(1-\mu t)^{n/2}\exp\left(\dfrac{-ix_cx_c\mu}{4(1-\mu t)}\right), \\ W \to \widetilde{W} = W(1-\mu t)^2, \end{cases} \tag{2.9}$$

де μ – груповий параметр.

Розглянемо приклад. Нехай

$$W = \frac{1}{\vec{x}^2} = \frac{1}{x_cx_c}, \tag{2.10}$$

де за індексом c мається на увазі підсумовування від 1 до n. Знайдемо, як генеруються нові потенціали з потенціалу (2.10) при перетвореннях (2.5), (2.7)–(2.9).

(i) Q_B:

$$W = \frac{1}{x_cx_c} \to \widetilde{W} = \frac{1}{x_cx_c} + B(t)\alpha \to \widetilde{\widetilde{W}} = \frac{1}{x_cx_c} + B(t)(\alpha + \widetilde{\alpha}) \to \cdots,$$

де $B(t)$ – довільна гладка функція, σ та $\widetilde{\sigma}$ – довільні дійсні параметри.

(ii) Q_a:

$$W = \tfrac{1}{x_c x_c} \rightarrow$$

$$\widetilde{W} = \frac{1}{(x_a - U_a(t)\beta_a)^2 + x_b x_b} + \tfrac{1}{4}\ddot{U}_a U_a \beta_a^2 + \tfrac{1}{2}\ddot{U}_a \beta_a (x_a - U_a \beta_a) \rightarrow$$

$$\widetilde{\widetilde{W}} = \frac{1}{(x_a - U_a(t)(\beta_a + \widetilde{\beta}_a))^2 + x_b x_b} + \tfrac{1}{4}\ddot{U}_a U_a (\beta_a^2 + \widetilde{\beta}_a^2) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\ddot{U}_a (\beta_a + \widetilde{\beta}_a)(x_a - U_a(\beta_a + \widetilde{\beta}_a)) + \tfrac{1}{2}\ddot{U}_a U_a \beta_a \widetilde{\beta}_a \rightarrow \cdots,$$

де U_a – довільна гладка функція, β_a та $\widetilde{\beta}_a$ – дійсні параметри, за індексом a, що повторюється, підсумовування немає, за індексом b, що повторюється проводиться підсумовування від 1 до n $(b \neq a)$. Зокрема, якщо $U_a(t) = t$, то ми маємо оператор Галілея (2.6) та

$$W = \frac{1}{x_c x_c} \rightarrow \widetilde{W} = \frac{1}{(x_a - t\beta_a)^2 + x_b x_b} \rightarrow$$

$$\widetilde{\widetilde{W}} = \frac{1}{(x_a - t(\beta_a + \widetilde{\beta}_a))^2 + x_b x_b} \rightarrow \cdots$$

(iii) Оператор Q_A при $A(t) = t$ або $A(t) = t^2/2$ не змінює потенціалу, тобто

$$W = \frac{1}{x_c x_c} \rightarrow \widetilde{W} = \frac{1}{x_c x_c} \rightarrow \widetilde{\widetilde{W}} = \frac{1}{x_c x_c} \rightarrow \cdots$$

Накладемо тепер певні умови на потенціал W. Тобто розглянемо декілька прикладів систем, в яких одне рівняння – це рівняння (2.1) з потенціалом $W = W(t, \vec{x})$, а друге – певна умова на потенціал. Оператори симетрії систем будемо шукати у вигляді диференціальних операторів першого порядку

$$X = \xi^{\mu}(t, \vec{x}, \psi, \psi^*, W)\partial_{x_\mu} + \eta(t, \vec{x}, \psi, \psi^*, W)\partial_{\psi} +$$

$$+ \eta^*(t, \vec{x}, \psi, \psi^*, W)\partial_{\psi^*} + \rho(t, \vec{x}, \psi, \psi^*, W)\partial_W.$$

1. Умова на потенціал – рівняння Лапласа.

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi + W(t,\vec{x})\psi = 0, \\ \\ \Delta W = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Система (2.11) допускає нескінченновимірну алгебру Лі з інфінітезимальними операторами

$$\begin{gathered} P_0 = \partial_t, \; J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a}, \\ Q_a = U_a\partial_{x_a} + \frac{i}{2}\dot{U}_a x_a(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) + \frac{1}{2}\ddot{U}_a x_a\partial_W, \; a = \overline{1,n}, \\ D = x_c\partial_{x_c} + 2t\partial_t - \frac{n}{2}(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}) - 2W\partial_W, \\ A = t^2\partial_t + tx_c\partial_{x_c} + \frac{i}{4}x_c x_c(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) - \\ - \frac{n}{2}t(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}) - 2Wt\partial_W, \\ Q_B = iB(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) + \dot{B}\partial_W, \; Z_1 = \psi\partial_\psi, \; Z_2 = \psi^*\partial_{\psi^*}, \end{gathered} \tag{2.12}$$

де $U_a(t)$ $(a = \overline{1,n})$ та $B(t)$ – довільні гладкі функції. Зокрема, алгебра (2.12) включає в себе оператор Галілея (2.6).

2. Умова на потенціал – рівняння теплопровідності.

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi + W(t,\vec{x})\psi = 0, \\ \\ W_0 + \lambda\Delta W = 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

де λ – дійсна стала $(\lambda \neq 0)$.

Максимальна алгебра інваріантності системи (2.13) має базисні оператори

$$P_0 = \partial_t,\ P_a = \partial_{x_a},\ J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a},$$

$$D = 2t\partial_t + x_c\partial_{x_c} - \frac{n}{2}(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}) - 2W\partial_W,$$

$$Z_1 = \psi\partial_\psi,\ Z_2 = \psi^*\partial_{\psi^*},\ Z_3 = it(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) + \partial_W.$$

Висновок 1. Система (2.13) галілей-неінваріантна.

3. Умова на потенціал – хвильове рівняння.

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi + W(t,\vec{x})\psi = 0, \\ \\ \Box W = 0. \end{cases} \qquad (2.14)$$

Максимальна алгебра інваріантності системи (2.14) має вигляд

$$P_0 = \partial_t,\ P_a = \partial_{x_a},\ J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a},$$

$$Z_1 = \psi\partial_\psi,\ Z_2 = \psi^*\partial_{\psi^*},$$

$$Z_3 = it(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) + \partial_W,\ Z_4 = it^2(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) + 2t\partial_W.$$

Висновок 2. Система (2.14) не інваріантна ні відносно алгебри Галілея $AG(1,n)$, ні відносно алгебри Пуанкаре $AP(1,n)$.

4. Умова на потенціал – рівняння Гамільтона–Якобі.

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi + W(t,\vec{x})\psi = 0, \\ \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} - \lambda\dfrac{\partial W}{\partial x_a}\dfrac{\partial W}{\partial x_a} = 0, \end{cases} \qquad (2.15)$$

де λ – дійсна стала ($\lambda \neq 0$).

Максимальною алгеброю інваріантності системи (2.15) є алгебра з інфінітезимальними операторами

$$P_0 = \partial_t,\ P_a = \partial_{x_a},\ J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a},$$

$$Z_1 = \psi\partial_\psi,\ Z_2 = \psi^*\partial_{\psi^*},\ Z_3 = it(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) + \partial_W.$$

Висновок 3. Система (2.15) галілей-неінваріантна.

5. Важливим є випадок, коли рівняння (2.1) розглядається у $(1+1)$-вимірному просторі–часі з потенціалом $W(t,x)$, а умова на потенціал – рівняння Кортевега-де Фріза (КдФ):

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+W(t,x)\psi=0, \\ \\ \dfrac{\partial W}{\partial t}+\lambda_1 W\dfrac{\partial W}{\partial x}+\lambda_2\dfrac{\partial^3 W}{\partial x^3}=F(|\psi|),\ \lambda_1\neq 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

де λ_1 та λ_2 – дійсні сталі, F – деяка гладка функція від $|\psi|$.

Якщо $F(|\psi|)$ – довільна гладка функція, то система (2.16) інваріантна відносно алгебри Галілея з базисними операторами:

$$\begin{gathered} P_0=\partial_t,\ P_1=\partial_x,\ Z=i(\psi\partial_\psi-\psi^*\partial_{\psi^*}), \\ \\ G=t\partial_x+\frac{i}{2}\left(x+\frac{2}{\lambda_1}t\right)(\psi\partial_\psi-\psi^*\partial_{\psi^*})+\frac{1}{\lambda_1}\partial_W. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Зауважимо, що умова $\lambda_1\neq 0$ вимагається для того, щоб система (2.16) була інваріантна відносно перетворень Галілея. (Якщо $\lambda_1=0$, то система (2.16) не інваріантна відносно перетворень Галілея).

Оператор Галілея G вигляду (2.17) генерує перетворення:

$$\begin{cases} t\to\widetilde{t}=t,\ x\to\widetilde{x}=x+\theta t, \\ \\ W\to\widetilde{W}=W+\dfrac{1}{\lambda_1}\theta, \\ \\ \psi\to\widetilde{\psi}=\psi\exp\left(\dfrac{i}{2}\theta x+\dfrac{i}{\lambda_1}\theta t+\dfrac{i}{4}\theta^2 t\right), \\ \\ \psi^*\to\widetilde{\psi}^*=\psi^*\exp\left(-\dfrac{i}{2}\theta x-\dfrac{i}{\lambda_1}\theta t-\dfrac{i}{4}\theta^2 t\right), \end{cases}$$

де θ – груповий параметр.

Зауваження 2. Якщо в операторі Галілея вигляду (2.17) відкинути доданки, які містять λ_1, то ми отримаємо оператор Галілея

$$G^{(1)}=t\partial_x+\frac{i}{2}x(\psi\partial_\psi-\psi^*\partial_{\psi^*})$$

стандартного вільного рівняння Шродінгера ($W = 0$). З іншого боку, якщо в операторі G вигляду (2.17) відкинути доданки, які містять ψ та ψ^*, тобто розглянути оператор

$$G^{(2)} = t\partial_x + \frac{1}{\lambda_1}\partial_W,$$

то це буде зображенням оператора Галілея рівняння КдФ

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \lambda_1 W\frac{\partial W}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = 0, \ \lambda_1 \neq 0,$$

або для рівняння Ойлера (як частинного випадку рівняння КдФ)

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \lambda_1 W\frac{\partial W}{\partial x} = 0.$$

Якщо $F = C = const$, то система (2.16) допускає розширення, а саме, вона інваріантна відносно алгебри $< P_0, P_1, G, Z_1, Z_2 >$, де P_0, P_1, G мають вигляд (2.17) та $Z_1 = \psi\partial_\psi$, $Z_2 = \psi^*\partial_{\psi^*}$.

Виділимо тепер деякі скінченновимірні підалгебри із нескінченновимірної алгебри (2.2). Зокрема, наведемо приклади функцій $U_a(t)$ та $B(t)$, для яких алгебра, породжена операторами

$$P_0, P_a, J_{ab}, Q_a, Q_B, Z_1, Z_2, \tag{2.18}$$

скінченовимірна.

а) $U_a(t) = \exp(\gamma t)$.

В цьму випадку, підалгебра (2.18) має вигляд

$$P_0,\ P_a,\ J_{ab},\ Z_1,\ Z_2,$$

$$Q_a = e^{\gamma t}\left(\partial_{x_a} + \frac{i}{2}\gamma x_a(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) + \frac{1}{2}\gamma^2 x_a\partial_W\right),\ a = \overline{1, n},$$

$$Q_B = e^{\gamma t}(i\psi\partial_\psi - i\psi^*\partial_{\psi^*} + \gamma\partial_W).$$

б) $U_a(t) = C_1\cos(\nu t) + C_2\sin(\nu t)$, де C_1 та C_2 - довільні сталі.

Тоді підалгебра (2.18) має вигляд:

$$P_0,\ P_a,\ J_{ab},\ Z_1,\ Z_2,$$

$$Q_a^{(1)} = \cos(\nu t)\partial_{x_a} - \frac{i}{2}\nu \sin(\nu t)x_a(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) - \frac{1}{2}\nu^2 \cos(\nu t)x_a\partial_W,$$

$$Q_a^{(2)} = \sin(\nu t)\partial_{x_a} + \frac{i}{2}\nu \cos(\nu t)x_a(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) - \frac{1}{2}\nu^2 \sin(\nu t)x_a\partial_W,$$

$$X_1 = i\sin(\nu t)(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) + \nu\cos(\nu t)\partial_W,$$

$$X_2 = i\cos(\nu t)(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) - \nu\sin(\nu t)\partial_W.$$

в) $U_a(t) = C_1t^k + C_2t^{k-1} + \dots + C_kt + C_{k+1}$, де C_j $(j = \overline{1, k+1})$ – довільні сталі. Підалгебра (2.18) має вигляд:

$$P_0,\ P_a,\ J_{ab},\ Z_1,\ Z_2,$$

$$Q_a^{(1)} = t^k\partial_{x_a} + \frac{i}{2}kt^{k-1}x_a(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) + \frac{1}{2}k(k-1)t^{k-2}x_a\partial_W,$$

$$Q_a^{(2)} = t^{k-1}\partial_{x_a} + \frac{i}{2}(k-1)t^{k-2}x_a(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) +$$

$$+\frac{1}{2}(k-1)(k-2)t^{k-3}x_a\partial_W,$$

$$\dots$$

$$Q_a^{(k)} = t\partial_{x_a} + \frac{i}{2}x_a(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}),$$

$$Q_B^{(1)} = it(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) + \partial_W,$$

$$\dots$$

$$Q_B^{(2k-2)} = it^{2k-2}(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) + (2k-2)t^{2k-3}\partial_W.$$

Таким чином, симетрія рівняння Шродінгера суттєво розширюється, якщо потенціал вважати новою залежною змінною. Це дає змогу генерувати нові точно розв'язувані потенціали та знаходити широкі класи розв'язків рівняння Шродінгера.

2.2 Розширення симетрії рівняння Гамільтона–Якобі з нефіксованим потенціалом

Цей параграф присвячений дослідженню симетрії рівняння Гамільтона–Якобі з потенціалом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2m}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k} + V(t, \vec{x}), \tag{2.19}$$

де $u = u(t, \vec{x})$ – дійсна залежна змінна, $k = \overline{1, n}$. Для того, щоб розширити симетрію цього рівняння, потенціал V будемо вважати новою залежною змінною. Іншими словами, симетрію рівняння (2.19) досліджуємо у класі диференціальних операторів першого порядку вигляду

$$X = \xi^\mu(t, \vec{x}, u, V)\partial_{x_\mu} + \eta(t, \vec{x}, u, V)\partial_u + \rho(t, \vec{x}, u, V)\partial_V. \tag{2.20}$$

Застосовуючи алгоритм Лі до рівняння (2.19), одержимо наступну систему визначальних рівнянь для знаходження невідомих функцій ξ^μ, η, ρ:

$$\begin{aligned}
&\xi^0_V = \xi^k_V = \eta_V = 0,\ \xi^0_u = 0,\ \xi^0_k + m\xi^k_u = 0,\\
&\xi^k_l + \xi^l_k = 0,\ \xi^k_k = \xi^l_l,\ \eta_u = 2\xi^k_k - \xi^0_0,\\
&m\xi^k_0 + \eta_k + m\xi^k_u V - \xi^0_k V = 0,\\
&\eta_0 + \eta_u V - V\xi^0_0 = \rho,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

де за індексами k та l підсумовування немає ($k, l = \overline{1, n}$). Розв'яжемо систему (2.21) і отримаємо такий результат:

Теорема 2.2. *Рівняння (2.19) у класі операторів (2.20) інваріантне відносно нескінченновимінної алгебри Лі з інфінітезималь-*

ними операторами

$$\begin{aligned}
&Q_A = A(t)\partial_t - \dot{A}(t)u\partial_u - \left[\ddot{A}(t)u + 2\dot{A}(t)V\right]\partial_V,\\
&Q_B = B(t)x^k\partial_{x^k} + \left[2B(t)u - \frac{m}{2}\dot{B}(t)x^kx^k\right]\partial_u +\\
&\qquad + \left[2\dot{B}(t)u - \frac{m}{2}\ddot{B}(t)x^kx^k + 2B(t)V\right]\partial_V, \qquad (2.22)\\
&Q_a = C^a(t)\partial_{x^a} - m\dot{C}^a(t)x^a\partial_u - m\ddot{C}^a(t)x^a\partial_V, \quad a = \overline{1,n},\\
&Q_E = E(t)\partial_u + \dot{E}(t)\partial_V,\\
&J_{ab} = x^a\partial_{x^b} - x^b\partial_{x^a}, \ a, b = \overline{1,n}, a \neq b,
\end{aligned}$$

де $A(t), B(t), C^a(t)$ $(a = \overline{1,n}), E(t)$ *— довільні функції часу, за індексом k проводиться підсумовування від 1 до n, за індексом a підсумовування немає.*

Алгебра (2.22) включає в себе такі оператори:
$P_0 = \partial_t$ (якщо $A(t) = 1$),
$P_a = \partial_{x_a}$ (якщо $C^a(t) = 1$),
$P_{n+1} = \partial_u$ (якщо $E(t) = 1$),
$J_{ab} = x_aP_b - x_bP_a$,
$G_a^{(1)} = tP_a - mx_a\partial_u$ (якщо $C^a(t) = t$),
$D^{(1)} = t\partial_t + \frac{1}{2}x_k\partial_{x_k} - V\partial_V$ (якщо $A(t) = t$, $B(t) = 1/2$, $D^{(1)} = Q_A + Q_B$),
$D^{(2)} = u\partial_u + \frac{1}{2}x_k\partial_{x_k} + V\partial_V$ (якщо $B(t) = 1/2$),
$\Pi^{(1)} = t^2\partial_t + tx_k\partial_{x_k} - \frac{m}{2}x_kx_k\partial_u - 2tV\partial_V$ (якщо $A(t) = t^2$, $B(t) = t$, $\Pi^{(1)} = Q_A + Q_B$).

Ці оператори без доданків, що містять V, є операторами симетрії рівняння Гамільтона–Якобі при $V = 0$ (див. [53]).

Зауваження 1. Алгебра інваріантності (2.22) рівняння (2.19) включає в себе оператор Галілея

$$G_a^{(1)} = tP_a - mx_a\partial_u,$$

але не включає операторів

$$G_a^{(2)} = uP_a - mx_aP_0 \qquad (2.23)$$

(які є операторами симетрії стандартного рівняння Гамільтона–Якобі) та операторів $G_a^{(3)} = tP_a$.

Знайдемо скінчені перетворення, які породжують оператори з алгебри (2.22).

а) Q_B:

$$\begin{cases} t \to \widetilde{t} = t, \\ x^k \to \widetilde{x}^k = \exp(B(t)\alpha)x^k, \ k = \overline{1,n}, \\ u \to \widetilde{u} = \left(u - \dfrac{m}{2}\dot{B}(t)x_k x_k \alpha\right)\exp(2B(t)\alpha), \\ V \to \widetilde{V} = \Big(V + 2\dot{B}(t)u\alpha - \dfrac{m}{2}\ddot{B}(t)x_k x_k \alpha - \\ \qquad - \dfrac{m}{2}(\dot{B}(t))^2 x_k x_k \alpha^2\Big)\exp(2B(t)\alpha), \end{cases} \tag{2.24}$$

де α – довільний дійсний параметр.

б) Q_E:

$$\begin{cases} t \to \widetilde{t} = t, \ x^k \to \widetilde{x}^k = x^k, \\ u \to \widetilde{u} = u + E(t)\beta, \\ V \to \widetilde{V} = V + \dot{E}(t)\beta, \end{cases} \tag{2.25}$$

де β – довільний дійсний параметр.

в) Q_a, $a = \overline{1,n}$:

$$\begin{cases} t \to \widetilde{t} = t, \\ x^a \to \widetilde{x}^a = x^a + C^a(t)\gamma^a, \ x^b \to \widetilde{x}^b = x^b, \ b \neq a, \\ u \to \widetilde{u} = u - m\dot{C}^a(t)x^a\gamma^a - \dfrac{m}{2}C^a(t)\dot{C}^a(t)(\gamma^a)^2, \\ V \to \widetilde{V} = V - m\ddot{C}^a(t)x^a\gamma^a - \dfrac{m}{2}C^a(t)\ddot{C}^a(t)(\gamma^a)^2, \end{cases} \tag{2.26}$$

де γ^a – довільний дійсний параметр, підсумовування по a немає.

Розглянемо приклад. Нехай

$$V = -\frac{1}{\vec{x}^2} = -\frac{1}{x_k x_k}, \tag{2.27}$$

де за індексом k мається на увазі сума від 1 до n. Рівняння (2.19) з потенціалом (2.27) має частинний розв'язок

$$u = \sqrt{\frac{m}{2}} \ln(x_k x_k). \tag{2.28}$$

Знайдемо, як генеруються нові потенціали з потенціалу (2.27) та відповідні розв'язки при перетвореннях (2.25), (2.26).

(i) Q_E:

$$\begin{aligned} &V = -\frac{1}{x_k x_k} \rightarrow \widetilde{V} = -\frac{1}{x_k x_k} + \dot{E}(t)\beta \rightarrow \\ &\widetilde{\widetilde{V}} = -\frac{1}{x_k x_k} + \dot{E}(t)(\beta + \widetilde{\beta}) \rightarrow \cdots, \end{aligned}$$

де $E(t)$ -довільна гладка функція, β та $\widetilde{\beta}$ – довільні дійсні параметри. Розв'язок (2.28) перетворюється таким чином:

$$\begin{aligned} &u = \sqrt{\frac{m}{2}} \ln(x_k x_k) \rightarrow \widetilde{u} = \sqrt{\frac{m}{2}} \ln(x_k x_k) + E(t)\beta \rightarrow \\ &\widetilde{\widetilde{u}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \ln(x_k x_k) + E(t)(\beta + \widetilde{\beta}) \rightarrow \cdots. \end{aligned}$$

(ii) Q_a:

Нові потенціали генеруються таким чином:

$$V = -\frac{1}{x_k x_k} \rightarrow$$

$$\widetilde{V} = -\frac{1}{(x_a - C^a(t)\gamma_a)^2 + x_b x_b} - \frac{m}{2}\ddot{C}^a C^a \gamma_a^2 - m\ddot{C}^a \gamma_a (x_a - C^a \gamma_a) \rightarrow$$

$$\widetilde{\widetilde{V}} = -\frac{1}{(x_a - C^a(t)(\gamma_a + \widetilde{\gamma}_a))^2 + x_b x_b} - \frac{m}{2}\ddot{C}^a C^a (\gamma_a^2 + \widetilde{\gamma}_a^2) -$$

$$- m\ddot{C}^a(\gamma_a + \widetilde{\gamma}_a)(x_a - C^a(\gamma_a + \widetilde{\gamma}_a)) - m\ddot{C}^a C^a \gamma_a \widetilde{\gamma}_a \rightarrow \cdots,$$

де C^a – довільна гладка функція, γ_a та $\widetilde{\gamma}_a$ – дійсні параметри, за індексом a, що повторюється, підсумовування немає, за індексом b, що повторюється, проводиться підсумовування від 1 до n $(b \neq a)$, за індексом k, що повторюється, проводиться підсумовування від 1 до n.

Відповідний розв'язок (2.28) перетворюється таким чином:

$$u = \sqrt{\frac{m}{2}}\ln(x_k x_k) \rightarrow$$

$$\widetilde{u} = \sqrt{\frac{m}{2}}\ln((x_a - C^a\gamma_a)^2 + x_b x_b) - \frac{m}{2}\dot{C}^a C^a \gamma_a^2 -$$
$$- m\dot{C}^a\gamma_a(x_a - C^a\gamma_a) \rightarrow$$

$$\widetilde{\widetilde{u}} = \sqrt{\frac{m}{2}}\ln((x_a - C^a(\gamma_a + \widetilde{\gamma}_a))^2 + x_b x_b) - \frac{m}{2}\dot{C}^a C^a(\gamma_a^2 + \widetilde{\gamma}_a^2) -$$

$$- m\dot{C}^a(\gamma_a + \widetilde{\gamma}_a)(x_a - C^a(\gamma_a + \widetilde{\gamma}_a)) - m\dot{C}^a C^a \gamma_a \widetilde{\gamma}_a \rightarrow \cdots$$

Зокрема, якщо $C^a(t) = t$, то ми маємо оператор Галілея

$$G_a^{(1)} = t\partial_a - m x_a \partial_u,$$

для якого

$$V = -\frac{1}{x_k x_k} \rightarrow \widetilde{V} = -\frac{1}{(x_a - t\gamma_a)^2 + x_b x_b} \rightarrow$$

$$\widetilde{\widetilde{V}} = -\frac{1}{(x_a - t(\gamma_k + \widetilde{\gamma}_a))^2 + x_b x_b} \rightarrow \cdots$$

Відповідний розв'язок змінюється таким чином:

$$u = \sqrt{\frac{m}{2}}\ln(x_k x_k) \rightarrow$$

$$\widetilde{u} = \sqrt{\frac{m}{2}}\ln((x_a - t\gamma_a)^2 + x_b x_b) - \frac{m}{2}t\gamma_a^2 -$$

$$- m\gamma_a(x_a - t\gamma_a) \rightarrow$$

$$\widetilde{\widetilde{u}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \ln((x_a - t(\gamma_a + \widetilde{\gamma}_a))^2 + x_b x_b) - \frac{m}{2} t(\gamma_a^2 + \widetilde{\gamma}_a^2) -$$

$$- m(\gamma_a + \widetilde{\gamma}_a)(x_a - t(\gamma_a + \widetilde{\gamma}_a)) - mt\gamma_a\widetilde{\gamma}_c \to \cdots$$

Таким чином, використовуючи оператори симетрії (2.22), ми можемо генерувати нові точно розв'язувані потенціали та знаходити відповідні розв'язки.

Дослідимо тепер рівняння (2.19) із додатковими умовами на потенціал.

(i) Додаткова умова – хвильове рівняння.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2m} \dfrac{\partial u}{\partial x_k} \dfrac{\partial u}{\partial x_k} + V(t, \vec{x}), \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \lambda \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_k}, \end{cases} \tag{2.29}$$

де λ – довільна стала ($\lambda \neq 0$), $k = \overline{1, n}$. Система визначальних рівнянь для знаходження операторів симетрії системи (2.29) має вигляд (2.21) та включає додаткові рівняння

$$\begin{aligned} &\rho_u = 0, \ \xi_0^k = 0, \ \xi_0^0 = \xi_k^k, \\ &2\rho_{V0} - \xi_{00}^0 = 0, \ \rho_{00} - \lambda \sum_{l=1}^{n} \rho_{ll} = 0, \end{aligned} \tag{2.30}$$

по k підсумовування немає. Використовуючи (2.30), отримаємо, що функції $A(t)$, $B(t)$, $C^a(t)$, $E(t)$ в операторах (2.22) мають вигляд

$$\begin{aligned} &A(t) = A_1 t + A_2, \ B(t) = A_1, \\ &C^a(t) = C^a, \ E(t) = E_1 t^2 + E_2 t + E_3, \end{aligned}$$

де A_i ($i = 1, 2$), C^a ($a = \overline{1, n}$), E_j ($j = \overline{1, 3}$) – довільні сталі. Тому справедливий наступний рузультат:

Теорема 2.3. *Система (2.29) у класі операторів (2.20) інваріантна відносно алгебри Лі з інфінітезимальними операторами*

$$\begin{aligned} &P_0, \ P_a, \ J_{ab}, \ D = t\partial_t + x^k \partial_{x^k} + u\partial_u, \\ &Q_1 = \partial_u, \ Q_2 = t\partial_u + \partial_V, \ Q_3 = t^2\partial_u + 2t\partial_V, \end{aligned} \tag{2.31}$$

Висновок 1. Система (2.29) не інваріантна відносно перетворень Галілея.

(ii) Додаткова умова – рівняння теплопровідності.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2m}\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\dfrac{\partial u}{\partial x_k} + V(t, \vec{x}), \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} = \lambda(u)\triangle V. \end{cases} \tag{2.32}$$

де $\lambda(u)$ – деяка гладка функція від u.

Теорема 2.4. *Система (2.32) інваріантна відносно алгебр*
а) $< P_0,\ P_a,\ J_{ab},\ D^{(1)} >$, *тоді і тільки тоді, коли* $\lambda(u)$ *– довільна гладка функція;*
б) $< P_0,\ P_a,\ J_{ab},\ D^{(1)},\ D^{(2)} >$, *тоді і тільки тоді, коли* $\lambda(u) = Cu$, $(C = const \neq 0)$;
в) $< P_0,\ P_a,\ J_{ab},\ D^{(1)},\ Q_1,\ Q_2 >$, *тоді і тільки тоді, коли* $\lambda(u) = = C = const$.

Оператори симетрії $P_0,\ P_a,\ J_{ab},\ D^{(1)},\ D^{(2)},\ Q_1,\ Q_2$ мають наступне зображення:

$$\begin{aligned} & P_0 = \partial_t,\ P_a = \partial_{x_a}, \\ & J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a}\ (a, b = \overline{1, n},\ a < b), \\ & D^{(1)} = t\partial_t + \frac{1}{2}x_k\partial_{x_k} - V\partial_V, \\ & D^{(2)} = u\partial_u + \frac{1}{2}x_k\partial_{x_k} + V\partial_V, \\ & Q_1 = \partial_u,\ Q_2 = t\partial_u + \partial_V. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Висновок 2. Система (2.32) не інваріантна відносно перетворень Галілея для жодної з функцій $\lambda(u)$.

(iii) Додаткова умова на потенціал – рівняння Гамільтона–Якобі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2m}\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\dfrac{\partial u}{\partial x_k} + V(t, \vec{x}), \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} = \lambda\dfrac{\partial V}{\partial x_k}\dfrac{\partial V}{\partial x_k}, \end{cases} \tag{2.34}$$

де λ – довільна стала ($\lambda \neq 0$).

Теорема 2.5. *Система (2.34) інваріантна відносно алгебри Лі з інфінітезимальними операторами*

$$P_0,\ P_a,\ J_{ab},\ Q_1,\ Q_2,\ D^{(2)}$$

вигляду (2.33).

Висновок 3. Система (2.34) не інваріантна відносно перетворень Галілея.

(iv) Додаткова умова на потенціал – рівняння Лапласа.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2m}\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\dfrac{\partial u}{\partial x_k} + V(t,\vec{x}), \\ \triangle V(t,\vec{x}) = 0. \end{cases} \tag{2.35}$$

Теорема 2.6. *Система (2.35) інваріантна відносно нескінченновимірної алгебри Лі з базисними операторами*

$$\begin{aligned} &P_0 = \partial_t,\ D^{(1)} = 2t\partial_t + x_k\partial_{x_k} - 2V\partial_V, \\ &\Pi^{(1)} = t^2\partial_t + tx_k\partial_{x_k} - \frac{m}{2}x_kx_k\partial_u - 2tV\partial_V, \\ &Q_a = C^a(t)\partial_{x^a} - m\dot{C}^a(t)x^a\partial_u - m\ddot{C}^a(t)x^a\partial_V, \quad a = \overline{1,n}, \\ &Q_E = E(t)\partial_u + \dot{E}(t)\partial_V, \\ &J_{ab} = x^a\partial_{x^b} - x^b\partial_{x^a}, \\ &D^{(2)} = x^k\partial_{x^k} + 2u\partial_u + 2V\partial_V, \end{aligned} \tag{2.36}$$

де $E(t)$, $C^a(t)$ ($a = \overline{1,n}$) – довільні функції часу, за індексом a підсумовування немає, за індексом k проводиться підсумовування від 1 до n.

Зауважимо, що система визначальних рівнянь для знаходження операторів симетрії системи (2.35) має вигляд (2.21) із додатковими рівняннями

$$\rho_u = \rho_{VV} = \rho_{Vk} = \xi^j_{kk} = \rho_{kk} = 0\ (j = \overline{0,n},\ k = \overline{1,n})$$

розв'язок яких дає умови

$$2\dot{B}(t) = \ddot{A}(t), \ \dddot{A}(t) = 0$$

для операторів (2.22).

Висновок 4. Оператори (2.36) включають в себе оператор Галілея (при $C^a(t) = t$):

$$G_a^{(1)} = t\partial_{x^a} - mx^a\partial_u, \tag{2.37}$$

тобто система (2.35) є галілей–інваріантною.

Таким чином, якщо потенціал V в рівнянні Гамільтона–Якобі нефіксований, то симетрія рівняння (2.19) суттєво розширюється. Рівняння (2.19) зберігає галілей–інваріантність відносно оператора $G_a^{(1)}$ вигляду (2.37), проте не зберігає інваріантності відносно оператора $G_a^{(2)}$ вигляду (2.23). Якщо потенціал V задовільняє рівняння Лапласа, то система (2.35) також інваріантна відносно перетворень Галілея з базисним оператором $G_a^{(1)}$.

2.3 Симетрія рівняння конвективної дифузії

Рівняння конвективної дифузії має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda\triangle u = V_k\frac{\partial u}{\partial x_k}, \tag{2.38}$$

де $u = u(t, \vec{x})$ – дійсна функція, λ – дійсний параметр, $V_k = V_k(t, \vec{x})$, індекс k змінюється від 1 до n.

Якщо $V_k = 0$, то рівняння (2.38) є стандартним рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda\triangle u = 0. \tag{2.39}$$

Відомо [53], що це рівняння інваріантне відносно повної групи Галілея $AG_2(1, n)$:

Теорема 2.7 [53]. *Максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності рівняння (2.39) є алгебра операторів*

$$P_0 = \partial_t,\ P_a = \partial_{x_a},\ J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a},\ I = u\partial_u,$$
$$G_a = t\partial_{x_a} - \frac{1}{2\lambda}x_a u\partial_u,\ D = 2t\partial_t + x_a\partial_{x_a} + ku\partial_u,$$
$$\Pi = t^2\partial_t + tx_a\partial_{x_a} - (\frac{nt}{2} + \frac{x_a x_a}{4\lambda})u\partial_u.$$

Для розширення симетрії рівняння (2.38) ми вважаємо, що функції $V_k = V_k(t, \vec{x})$ є залежними змінними, які нарівні з функцією u входять в рівняння. Іншими словами, оператори симетрії рівняння (2.38) будемо шукати у вигляді

$$X = \xi^\mu\partial_{x_\mu} + \eta\partial_u + \rho^k\partial_{V_k}, \tag{2.40}$$

де ξ^μ, η, ρ^k – дійсні функції від t, $\vec{x}$, u, $\vec{V}$. Застосовуючи алгоритм Лі, знаходимо, що невідомі функції ξ^μ, η, ρ^k мають вигляд

$$\begin{aligned} &\xi^0 = 2A(t), \\ &\xi^k = \dot{A}(t)x_k + B_{kl}(t)x_l + U_k(t), \\ &\rho^k = B_{kl}(t)V_l - \ddot{A}(t)x_k - \dot{B}_{kl}(t)x_l - \dot{U}_k(t) - \dot{A}(t)V_k, \\ &\eta = E_1 u + E_2, \end{aligned} \tag{2.41}$$

де A, B_{kl}, $(k, l = \overline{1,n},\ k \neq l)$, $B_{kl} = -B_{lk}$, U_k $(k = \overline{1,n})$ – довільні гладкі дійсні функції від t; E_1, E_2 – довільні сталі. Отже, виконується наступна теорема:

Теорема 2.8. *Рівняння конвективної дифузії (2.38) у класі операторів (2.40) інваріантне відносно нескінченновимірної алгебри Лі з інфінітезимальними операторами*

$$\begin{aligned} &Q_A = 2A(t)\partial_t + \dot{A}(t)x_r\partial_{x_r} - [\ddot{A}(t)x_r + \dot{A}(t)V_r]\partial_{V_r}; \\ &Q_{kl} = B_{kl}(t)\,[x_l\partial_{x_k} - x_k\partial_{x_l} + V_l\partial_{V_k} - V_k\partial_{V_l}] - \\ &\quad - \dot{B}_{kl}(t)(x_l\partial_{V_k} - x_k\partial_{V_l}), \\ &Q_a = U_a(t)\partial_{x_a} - \dot{U}_a(t)\partial_{V_a},\ a = \overline{1,n}, \\ &Z_1 = u\partial_u,\ Z_2 = \partial_u, \end{aligned} \tag{2.42}$$

де за індексом r, що повторюється, проводиться підсумовування від 1 до n, за індексами a, k, l підсумовування немає.

Зауваження 1. Нескінченновимірна алгебра з базисними операторами (2.42) містить оператор Галілея Q_a. Цей оператор породжує такі скінчені перетворення:

$$\begin{cases} t \to \widetilde{t} = t, \\ x_a \to \widetilde{x}_a = x_a + \alpha_a U_a(t), \\ x_b \to \widetilde{x}_b = x_b, \ b \neq a, \\ u \to \widetilde{u} = u, \\ V_a \to \widetilde{V}_a = V_a - \alpha_a \dot{U}_a(t), \\ V_b \to \widetilde{V}_b = V_b, \ b \neq a, \end{cases} \tag{2.43}$$

де α_a – довільний дійсний параметр перетворень. Зауважимо, що оператори Q_a і Q_b комутують:

$$[Q_a, Q_b] = 0.$$

Наслідок. При дії оператора Галілея Q_a функція u не змінюється.

Цей факт істотньо відрізняється від перетворень Галілея для стандартного вільного рівняння теплопровідності (2.39), де оператор Галілея має вигляд

$$G_a = t\partial_{x_a} - \frac{1}{2\lambda} x_a u \partial_u. \tag{2.44}$$

Для оператора (2.44) функція u змінюється таким чином:

$$u \to \widetilde{u} = u \exp\left(-\frac{x_a \alpha_a}{2\lambda} - \frac{t(\alpha_a)_2}{4\lambda}\right), \tag{2.45}$$

де підсумовування по a немає. Отже, оператори Q_a та G_a принципово різні.

Дослідимо тепер систему рівнянь, одне з яких – рівняння (2.38), а інші – рівняння Ойлера на функції V_k:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \lambda\triangle u = V_k\dfrac{\partial u}{\partial x_k}, \\ \dfrac{\partial V_k}{\partial t} - \lambda_1 V_l\dfrac{\partial V_k}{\partial x_l} = 0, \ k = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{2.46}$$

де λ_1 – дійсна стала ($\lambda_1 \neq 0$).

Симетрія системи (2.46) суттєво залежить від значення параметра λ_1. Можливі два випадки.

Перший випадок. $\lambda_1 = 1$.

Тоді система (2.46) у класі операторів (2.40) інваріантна відносно алгебри Лі з базисними операторами

$$\begin{aligned} &P_0 = \partial_t, \ P_a = \partial_{x_a}, \\ &J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a} + V_a\partial_{V_b} - V_b\partial_{V_a}, \\ &\widetilde{G}_a = t\partial_{x_a} - \partial_{V_a}, \\ &D = 2t\partial_t + x_k\partial_{x_k} - V_k\partial_{V_k}, \\ &A = t^2\partial_t + tx_k\partial_{x_k} - (x_k + tV_k)\partial_{V_k}, \\ &Z_1 = u\partial_u, \ Z_2 = \partial_u. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Оператор Галілея $\widetilde{G}_a$ породжує такі скінчені перетворення:

$$\begin{cases} t \to \widetilde{t} = t, \\ x_a \to \widetilde{x}_a = x_a + t\alpha_a, \\ x_b \to \widetilde{x}_b = x_b, \ b \neq a, \\ V_a \to \widetilde{V}_a = V_a - \alpha_a, \\ V_b \to \widetilde{V}_b = V_b, \ b \neq a, \\ u \to \widetilde{u} = u. \end{cases} \tag{2.48}$$

Висновок 1. Отже, скалярна функція u, на відміну від рівняння теплопровідності, не змінюється при перетворенні Галілея $u \to \widetilde{u} = u$.

Другий випадок. $\lambda_1 \neq 1$.

В цьому випадку алгебра інваріантності системи (2.46) значно вужча і не містить операторів Галілея та проективних перетворень. Тобто, система (2.46) при $\lambda_1 \neq 1$ у класі операторів (2.40) [illegible]варіантна відносно алгебри Лі з базисними операторами P_0, P_a, [illegible] D, Z_1, Z_2 вигляду (2.47).

Перший випадок є значно цікавішим та важливішим, [illegible]му надалі будемо розглядати систему (2.46) у випадку, коли $\lambda_1 =$ [illegible]

Розглянемо тепер систему (2.46), коли у рівняннях Ойлера є права частина $F(u)\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$, тобто систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \lambda \triangle u = V_k \dfrac{\partial u}{\partial x_k}, \\ \dfrac{\partial V_k}{\partial t} - V_l \dfrac{\partial V_k}{\partial x_l} = F(u)\dfrac{\partial u}{\partial x_k}, \; k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{2.49}$$

де $F(u)$ – деяка гладка функція від u. Проведемо симетрійну класифікацію системи (2.49), тобто визначимо всі класи функцій $F(u)$, при яких система (2.49) допускає нетривіальну симетрію. Розглянемо наступні шість випадків:

Випадок 1. $F(u)$ – довільна гладка функція.

Система (2.49) в цьому випадку інваріантна відносно алгебри Галілея

$$AG(1, n) = < P_0,\ P_a,\ J_{ab},\ \widetilde{G}_a >, \tag{2.50}$$

де вказані базисні оператори мають вигляд (2.47).

Випадок 2. $F = C \exp(\kappa u)$ $(\kappa \neq 0,\ C \neq 0)$.

В цьому випадку симетрія системи (2.49) розширюється і до алгебри (2.50) додається оператор дилатації

$$D^{(1)} = 2t\partial_t + x_k\partial_{x_k} - V_k\partial_{V_k} - \frac{2}{\kappa}\partial_u.$$

Випадок 3. $F = Cu^\kappa$ $(\kappa \neq 0,\ \kappa \neq -1,\ C \neq 0)$.

В цьому випадку система (2.49) інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея

$$AG_1(1,n) =< P_0, P_a, J_{ab}, \widetilde{G}_a, D^{(2)} >,$$

де оператор ділатації має вигляд:

$$D^{(2)} = 2t\partial_t + x_k\partial_{x_k} - V_k\partial_{V_k} - \frac{2}{\kappa+1}u\partial_u.$$

Випадок 4. $F = \dfrac{C}{u}$ $(C \neq 0)$.
Максимальна алгебра інваріантності:

$$< P_0, P_a, J_{ab}, \widetilde{G}_a, Z_1 >,$$

де $Z_1 = u\partial_u$.

Випадок 5. $F = C$ $(C \neq 0)$.
Максимальна алгебра інваріантності:

$$< P_0, P_a, J_{ab}, \widetilde{G}_a, D^{(2)}, Z_2 >,$$

де $Z_2 = \partial_u$. Оператор дилатації $D^{(2)}$ в цьому випадку має вигляд

$$D^{(2)} = 2t\partial_t + x_k\partial_{x_k} - V_k\partial_{V_k} - 2u\partial_u.$$

Випадок 6. $F = 0$.
В цьому випадку система (2.49) допускає найбільш широку алгебру інваріантності, а саме

$$< P_0, P_a, J_{ab}, \widetilde{G}_a, D, A, Z_1, Z_2 >,$$

де оператор дилатації D та оператор проєктивних перетворень A мають вигляд (2.47).

Висновок 2. Важливим є факт, що система (2.49) інваріантна відносно перетворень Галілея для довільної гладкої функції $F(u)$. Ще раз підкреслимо, що на відміну від рівняння теплопровідності, функція u не змінюється при перетворенні Галілея.

Розглянемо інші приклади систем рівняння конвективної дифузії та додаткових умов на потенціали V_k.

Нехай функції V_k задовільняють рівняння теплопровідності, тобто будемо досліджувати систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \lambda \triangle u = V_k \dfrac{\partial u}{\partial x_k}, \\ \dfrac{\partial V_k}{\partial t} - \lambda_1 \triangle V_k = 0, \ k = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{2.51}$$

де λ_1 – дійсна стала.

Теорема 2.9. *Система (2.51) у класі операторів (2.40) інваріантна відносно алгебри Лі з базисними операторами*

$$P_0, \ P_a, \ J_{ab}, \ D, \ Z_1, \ Z_2$$

вигляду (2.47).

Більш важливим є випадок, коли функції V_k задовільняють рівняння Лапласа

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \lambda \triangle u = V_k \dfrac{\partial u}{\partial x_k}, \\ \triangle V_k = 0, \ k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{2.52}$$

Теорема 2.10. *Система рівнянь (2.52) у класі операторів (2.40) інваріантна відносно нескінченновимірної алгебри Лі з базисними операторами*

$$Q_A, \ Q_{kl}, \ Q_a, \ Z_1, \ Z_2$$

вигляду (2.42).

Зауважимо, що симетрія системи (2.52) така сама, як і симетрія рівняння (2.38). Тобто, умови $\triangle V_k = 0$ не звужують симетрії рівняння конвективної дифузії.

2.4 Рівняння Шродінгера з конвективним членом: симетрія, редукція та розв'язки

Результати попереднього параграфу можна узагальнити на випадок рівняння Шродінгера з конвективним членом

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi = V_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}, \tag{2.53}$$

де $\psi = \psi(t, \vec{x})$ та $V_k = V_k(t, \vec{x})$ $(a = \overline{1, n})$ – комплексні функції. Для розширення симетрії рівняння (2.53) ми аналогічно параграфу 2.3 вважаємо, що функції V_k є залежними змінними, які нарівні з ψ входять в рівняння (2.53). Іншими словами, оператори симетрії шукаємо у вигляді

$$X = \xi^\mu\partial_{x_\mu} + \eta\partial_\psi + \eta^*\partial_{\psi^*} + \rho^k\partial_{V_k} + \rho^{*k}\partial_{V_k^*}, \tag{2.54}$$

де функції $\xi^\mu, \eta, \eta^*, \rho^k, \rho^{*k}$ залежать від t, $\vec{x}$, ψ, ψ^*, $\vec{V}$, $\vec{V}^*$.

Використовуючи алгоритм Лі, для знаходження коефіцієнтів ξ^μ, η, η^*, ρ^k, ρ^{*k} одержимо систему визначальних рівнянь:

$$\begin{gathered}\xi^j_\psi = \xi^j_{\psi^*} = \xi^j_{V_k} = \xi^j_{V_k^*} = 0,\ \xi^0_k = 0,\ \eta_{V_k} = \eta_{V_k^*} = 0,\\ \eta^*_{V_k} = \eta^*_{V_k^*} = 0,\ \eta_{\psi^*} = \eta^*_\psi = 0,\ \eta_0 = \eta_k = 0,\ \eta^*_0 = \eta^*_k = 0.\\ \xi^k_k = \xi^l_l,\ \xi^l_k + \xi^k_l = 0,\ \xi^0_0 = 2\xi^k_k.\\ \rho^k = -i\xi^k_0 + \xi^k_r V_r - 2\xi^n_n V_k,\\ \rho^{*k} = i\xi^k_0 + \xi^k_r V^*_r - 2\xi^n_n V^*_k,\end{gathered} \tag{2.55}$$

де $j = \overline{0, n}$, $k, l, r = \overline{1, n}$, за індексами k, l підсумовування немає, за індексом r, що повторюється, проводиться підсумовування від 1 до n.

Розв'язавши систему (2.55), отримаємо наступний результат:

Теорема 2.11. *Рівняння (2.53) у класі операторів (2.54) інваріантне відносно нескінченновимірної алгебри Лі з базисними опе-*

раторами

$$\begin{aligned} &Q_A = 2A\partial_t + \dot{A}x_r\partial_{x_r} - i\ddot{A}x_r(\partial_{V_r} - \partial_{V_r^*}) - \dot{A}(V_r\partial_{V_r} + V_r^*\partial_{V_r^*}),\\ &Q_{kl} = B_{kl}(x_l\partial_{x_k} - x_k\partial_{x_l} + V_l\partial_{V_k} - V_k\partial_{V_l} + V_l^*\partial_{V_k^*} - V_k^*\partial_{V_l^*}) -\\ &\qquad - i\dot{B}_{kl}(x_l\partial_{V_k} - x_k\partial_{V_l} - x_l\partial_{V_k^*} + x_k\partial_{V_l^*}),\\ &Q_a = U^a\partial_{x_a} - i\dot{U}^a(\partial_{V_a} - \partial_{V_a^*}),\\ &Z_1 = \psi\partial_\psi,\ Z_2 = \psi^*\partial_{\psi^*},\ Z_3 = \partial_\psi,\ Z_4 = \partial_{\psi^*}, \end{aligned} \qquad (2.56)$$

де A, B^{kl} $(k < l,\ k,l = \overline{1,n})$, U^a $(a = \overline{1,n})$ *– довільні функції* t, $B^{kl} = -B^{lk}$, *за індексом* r, *що повторюється, мається на увазі підсумовування від 1 до* n, *за індексами* a, k *та* l *підсумовування немає.*

Алгебра (2.56) містить оператор Галілея вигляду

$$\widetilde{G}_a = t\partial_{x_a} - i\partial_{V_a} + i\partial_{V_a^*}, \qquad (2.57)$$

який породжує такі скінчені перетворення:

$$\begin{cases} x_a \to \widetilde{x}_a = x_a + \beta_a t,\\ t \to \widetilde{t} = t,\\ x_b \to \widetilde{x}_b = x_b\ (b \neq a),\\ \psi \to \widetilde{\psi} = \psi,\ \psi^* \to \widetilde{\psi}^* = \psi^*,\\ V_a \to \widetilde{V}_a = V_a - i\beta_a,\ V_a^* \to \widetilde{V}_a^* = V_a^* + i\beta_a,\\ V_b \to \widetilde{V}_b = V_b,\ V_b^* \to \widetilde{V}_b^* = V_b^*(b \neq a), \end{cases}$$

де β_a – довільний параметр. Оператор (2.57) істотньо відрізняється від оператора Галілея для стандартного вільного ($V_k = 0$) рівняння Шродінгера, який має вигляд

$$G_a = t\partial_{x_a} + \frac{i}{2}x_a(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}). \qquad (2.58)$$

І ми не можемо одержати оператор (2.58) із алгебри (2.56). Таким чином, ми маємо два істотньо різних зображення оператора Галілея: (2.57) для рівняння Шродінгера з конвективним членом та (2.58) для вільного рівняння Шродінгера.

Зауваження 1. Алгебра (2.56) не містить операторів Галілея (2.58). Тобто рівняння (2.53) не інваріантне відносно стандартних перетворень Галілея

$$\begin{cases} t \to \widetilde{t} = t, \\ x_a \to \widetilde{x}_a = t\beta_a + x_a, \\ x_b \to \widetilde{x}_b = x_b \ (b \neq a), \\ \psi \to \widetilde{\psi} = \psi \exp(\frac{i}{4} t\beta_a^2 + \frac{i}{2} x_a \beta_a), \\ \psi^* \to \widetilde{\psi}^* = \psi^* \exp(-\frac{i}{4} t\beta_a^2 - \frac{i}{2} x_a \beta_a), \end{cases}$$

де $\beta_a (a = \overline{1, n})$ – груповий параметр.

Зауваження 2. Якщо в рівнянні (2.53) функції V_k вважати дійсними та досліджувати симетрію у класі операторів

$$X = \xi^\mu \partial_{x_\mu} + \eta \partial_\psi + \eta^* \partial_{\psi^*} + \rho^k \partial_{V_k}, \tag{2.59}$$

де невідомі функції $\xi^\mu, \eta, \eta^*, \rho^k$ залежать від $t, \vec{x}, \psi, \psi^*, \vec{V}$, то алгебра інваріантності рівняння (2.53) значно звужується. А саме, максимальна алгебра інваріантності рівняння (2.53) у класі операторів (2.59) є скінченовимірна алгебра Лі з базисними операторами

$$P_0 = \partial_t, \ P_a = \partial_{x_a}, \ J_{ab} = x_a \partial_{x_b} - x_b \partial_{x_a} + V_a \partial_{V_b} - V_b \partial_{V_a},$$
$$D = 2t\partial_t + x_k \partial_{x_k} - V_k \partial_{V_k},$$
$$Z_1 = \psi \partial_\psi, \ Z_2 = \psi^* \partial_{\psi^*}, \ Z_3 = \partial_\psi, \ Z_4 = \partial_{\psi^*}.$$

Отже, рівняння (2.53) у випадку дійсних функцій V_k не інваріантне відносно перетворень Галілея.

Розглянемо тепер систему, що складається з рівняння Шредінгера з конвективним членом (2.53) та додаткових умов на потенціали V_k, а саме, комплексних рівнянь Ойлера з правою частиною:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi = V_k \dfrac{\partial \psi}{\partial x_k}, \\ i\dfrac{\partial V_k}{\partial t} - V_l \dfrac{\partial V_k}{\partial x_l} = F(|\psi|) \dfrac{\partial \psi}{\partial x_k}. \end{cases} \tag{2.60}$$

Тут ψ, V_k – комплексні залежні змінні від t та $\vec{x}$, F – деяка гладка функція від $|\psi|$.

Рівняння на V_k можна розглядати, слідуючи роботі [83], як визначення швидкості розповсюдження поля ψ.

Зауважимо, що вибір коефіцієнтів в рівняннях Ойлера забезпечує більш широку симетрію системи (2.60), зокрема інваріантність відносно перетворень Галілея (аналогічно першому випадку для системи (2.46) попереднього параграфу).

Проведемо симетрійну класифікацію системи (2.60). Розглянемо наступні п'ять випадків.

Випадок 1. F – довільна гладка функція.
Максимальна алгебра інваріантності: $< P_0, P_a, J_{ab}, \widetilde{G}_a >$, де

$$\begin{aligned}
&P_0 = \partial_t,\ P_a = \partial_{x_a},\\
&J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a} + V_a\partial_{V_b} - V_b\partial_{V_a} + V_a^*\partial_{V_b^*} - V_b^*\partial_{V_a^*},\\
&\widetilde{G}_a = t\partial_{x_a} - i\partial_{V_a} + i\partial_{V_a^*}.
\end{aligned}$$

Випадок 2. $F = C|\psi|^k$, де C – довільна комплексна стала, $C \neq 0$, k – довільне дійсне число, $k \neq 0$ та $k \neq -1$.
Максимальна алгебра інваріантності: $< P_0, P_a, J_{ab}, \widetilde{G}_a, D^{(1)} >$, де

$$D^{(1)} = 2t\partial_t + x_c\partial_{x_c} - V_c\partial_{V_c} - V_c^*\partial_{V_c^*} - \frac{2}{1+k}(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}).$$

Випадок 3. $F = \dfrac{C}{|\psi|}$, де C – довільна комплексна стала, $C \neq 0$.
Максимальна алгебра інваріантності: $< P_0, P_a, J_{ab}, \widetilde{G}_a, Z = Z_1 + Z_2 >$, де

$$Z = \psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*},\ Z_1 = \psi\partial_\psi,\ Z_2 = \psi^*\partial_{\psi^*}.$$

Випадок 4. $F = C \neq 0$, де C – довільна комплексна стала.
Максимальна алгебра інваріантності: $< P_0, P_a, J_{ab}, \widetilde{G}_a, D^{(1)}, Z_3, Z_4 >$, де

$$Z_3 = \partial_\psi,\ Z_4 = \partial_{\psi^*}.$$

Випадок 5. $F = 0$.

Максимальна алгебра інваріантності:

$< P_0, P_a, J_{ab}, \widetilde{G}_a, D, A, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 >$,

де

$$D = 2t\partial_t + x_c\partial_{x_c} - V_c\partial_{V_c} - V_c^*\partial_{V_c^*},$$

$$A = t^2\partial_t + tx_c\partial_{x_c} - (ix_c + tV_c)\partial_{V_c} + (ix_c - tV_c^*)\partial_{V_c^*}.$$

Застосуємо тепер ці результати для знаходження інваріантних розв'язків системи (2.60) у двовимірному просторі-часі у випадку, коли $F(|\psi|) = 0$:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = V\dfrac{\partial\psi}{\partial x}, \\ i\dfrac{\partial V}{\partial t} - V\dfrac{\partial V}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{2.61}$$

Алгебра інваріантності системи (2.61) включає в себе оператори зсувів, Галілея, дилатації та проективних перетворень

$$P_0 = \partial_t,\ P_1 = \partial_x,\ \widetilde{G} = t\partial_x - i\partial_V + i\partial_{V^*},$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x - V\partial_V - V^*\partial_{V^*},$$

$$A = t^2\partial_t + tx\partial_x - (ix + tV)\partial_V + (ix - tV^*)\partial_{V^*}.$$

1). Одновимірній підалгебрі $\widetilde{G} + \alpha P_0$ відповідає симетрійний анзац

$$\begin{cases} \psi = \varphi(2\alpha x - t^2), \\ V = -\dfrac{i}{\alpha}t + U(2\alpha x - t^2). \end{cases} \tag{2.62}$$

Анзац (2.62) редукує систему (2.61) до системи ЗДР вигляду

$$\begin{cases} 2\alpha\varphi'' = U\varphi', \\ \dfrac{1}{\alpha} - 2\alpha UU' = 0, \end{cases} \tag{2.63}$$

де $\varphi' \equiv \dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega}$, $\omega = 2\alpha x - t^2$. Загальний розв'язок системи (2.63):

$$U = \sqrt{C_1 + \frac{1}{\alpha^2}\omega},$$

$$\varphi = C_2 \int \exp\left\{\frac{\alpha}{3}(C_1 + \frac{1}{\alpha^2}\omega)^{3/2}\right\} d\omega + C_3, \tag{2.64}$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі, $\omega = 2\alpha x - t^2$. Таким чином, ми отримали частинний розв'язок системи (2.61), де ψ має вигляд (2.64), а

$$V = -\frac{i}{\alpha}t + \sqrt{C_1 + \frac{1}{\alpha^2}\omega}.$$

2). Підалгебрі

$$\widetilde{G} + \alpha(Z_3 + Z_4) = t\partial_x - i\partial_V + i\partial_{V^*} + \alpha(\partial_\psi + \partial_{\psi^*})$$

відповідає симетрійний анзац

$$\begin{cases} \psi = \alpha\dfrac{x}{t} + \varphi(t), \\ V = -i\dfrac{x}{t} + U(t). \end{cases} \tag{2.65}$$

Анзац (2.65) редукує систему (2.61) до системи ЗДР вигляду

$$\begin{cases} i\dot{\varphi} = \dfrac{\alpha}{t}U, \\ \dot{U} + \dfrac{U}{t} = 0, \end{cases}$$

загальний розв'язок якої

$$U = \frac{C_1}{t}, \quad \varphi = i\frac{C_1\alpha}{t} + C_2,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Таким чином, ми отримали частинний розв'язок системи (2.61):

$$V = -i\frac{x}{t} + \frac{C_1}{t}, \quad \psi = \alpha\frac{x}{t} + i\frac{C_1\alpha}{t} + C_2.$$

3). Підалгебрі

$$\widetilde{G} + \alpha(Z_1 + Z_2) = t\partial_x - i\partial_V + i\partial_{V^*} + \alpha(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*})$$

відповідає симетрійний анзац

$$\begin{cases} \psi = \exp(\alpha \frac{x}{t})\varphi(t), \\ V = -i\frac{x}{t} + U(t). \end{cases} \tag{2.66}$$

Анзац (2.66) редукує систему (2.61) до системи ЗДР вигляду

$$\begin{cases} i\dot{\varphi} + \frac{\alpha^2}{t^2}\varphi = U\frac{\alpha}{t}\varphi, \\ \dot{U} + \frac{U}{t} = 0. \end{cases}$$

загальний розв'язок якої

$$U = \frac{C_1}{t}, \quad \varphi = C_2 \exp(\frac{i}{t}C_1\alpha - \frac{i\alpha^2}{t}),$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Таким чином, ми отримали частинний розв'язок системи (2.61):

$$V = -i\frac{x}{t} + \frac{C_1}{t}, \quad \psi = C_2 \exp(\frac{\alpha x}{t} + \frac{i}{t}C_1\alpha - \frac{i\alpha^2}{t}).$$

4). Підалгебрі

$$A + \alpha i(Z_1 - Z_2) =$$
$$= t^2\partial_t + tx\partial_x - (ix + tV)\partial_V + (ix + tV^*)\partial_{V^*} + i\alpha(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*})$$

відповідає симетрійний анзац

$$\begin{cases} \psi = \exp(-i\frac{\alpha}{t})\varphi(\frac{x}{t}), \\ V = -i\frac{x}{t} + \frac{1}{t}U(\frac{x}{t}). \end{cases} \tag{2.67}$$

Анзац (2.67) редукує систему (2.61) до системи ЗДР вигляду

$$\begin{cases} U = 0, \\ \varphi'' - \alpha\varphi = 0. \end{cases}$$

де $\varphi'' \equiv \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}$, $\omega = \dfrac{x}{t}$. Розглянемо два випадки:

4а). $\alpha > 0$.

В цьому випадку система (2.61) має такий розв'язок:

$$V = -i\frac{x}{t},$$
$$\psi = \exp(-i\frac{\alpha}{t})[C_1\exp(\sqrt{\alpha}\frac{x}{t}) + C_2\exp(-\sqrt{\alpha}\frac{x}{t})].$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

4б). $\alpha < 0$.

В цьому випадку система (2.61) має розв'язок

$$V = -i\frac{x}{t},$$
$$\psi = \exp(-i\frac{\alpha}{t})[C_1\cos(\sqrt{-\alpha}\frac{x}{t}) + C_2\sin(\sqrt{-\alpha}\frac{x}{t})].$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

5). Одновимірній підалгебрі

$$A + \alpha(Z_3 + Z_4) =$$
$$= t^2\partial_t + tx\partial_x - (ix + tV)\partial_V + (ix + tV^*)\partial_{V^*} + \alpha(\partial_\psi + \partial_{\psi^*})$$

відповідає симетрійний анзац

$$\begin{cases} \psi = -\dfrac{\alpha}{t} + \varphi(\dfrac{x}{t}), \\ V = -i\dfrac{x}{t} + \dfrac{1}{t}U(\dfrac{x}{t}). \end{cases} \tag{2.68}$$

який редукує систему (2.61) до системи ЗДР вигляду

$$\begin{cases} U = 0, \\ \varphi'' + i\alpha = 0. \end{cases}$$

де $\varphi'' \equiv \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}$, $\omega = \dfrac{x}{t}$. Розв'язуючи цю систему, ми одержимо точний розв'язок системи (2.61)

$$V = -i\frac{x}{t},$$
$$\psi = -\frac{\alpha}{t} - i\frac{\alpha}{2}\frac{x^2}{t^2} + C_1\frac{x}{t} + C_2,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

2.5 Контактні перетворення і рівняння Шредінгера з нефіксованим потенціалом

Контактні (або дотичні) перетворення Лі є природним узагальненням точкових перетворень. При контактних перетвореннях розглядається група G точкових перетворень

$$\begin{aligned} x^{\mu'} &= f^{\mu}(x, u, \underset{(1)}{u}, a), \\ u^{\alpha'} &= \varphi^{\alpha}(x, u, \underset{(1)}{u}, a), \\ u_i^{\alpha'} &= \psi_i^{\alpha}(x, u, \underset{(1)}{u}, a), \ i = 1, \ldots, n, \quad \alpha = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{2.69}$$

у просторі незалежних змінних $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $u = (u^1, \ldots, u^m)$, $\underset{(1)}{u} = (u_1^1, u_2^1, \ldots, x_n^m)$, де $u_k^j = \dfrac{\partial u^j}{\partial x^k}$. Продовжуючи дію групи G на змінні dx, du, $d\underset{(1)}{u}$ за формулами

$$\begin{aligned} dx^{\mu'} &= \frac{\partial f^{\mu}}{x^j} dx^j + \frac{\partial f^{\mu}}{u^{\beta}} du^{\beta} + \frac{\partial f^{\mu}}{u_j^{\beta}} du_j^{\beta}, \\ du^{\alpha'} &= \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{x^j} dx^j + \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{u^{\beta}} du^{\beta} + \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{u_j^{\beta}} du_j^{\beta}, \\ du_i^{\alpha'} &= \frac{\partial \psi_i^{\alpha}}{x^j} dx^j + \frac{\partial \psi_i^{\alpha}}{u^{\beta}} du^{\beta} + \frac{\partial \psi_i^{\alpha}}{u_j^{\beta}} du_j^{\beta}, \end{aligned}$$

отримаємо продовжену групу $\tilde{G}$, яка діє у просторі

$$(x, u, \underset{(1)}{u}, dx, du, d\underset{(1)}{u}).$$

Перетворення (2.69) називаються контактними, якщо група $\tilde{G}$ зберігає рівняння, яке виражає умову дотику першого порядку (див., наприклад, [26, 16]).

Добре відома інфінітезимальна характеристика дотичних перетворень Лі:

оператор

$$X = \xi^j(x, u, \underset{(1)}{u}) \frac{\partial}{\partial x^j} + \eta(x. u. \underset{(1)}{u}) \frac{\partial}{\partial u} + \zeta_i(x, u, \underset{(1)}{u}) \frac{\partial}{\partial u_i}$$

є інфінітезимальним оператором групи контактних перетворень тоді і тільки тоді, коли

$$\xi^i = -\frac{\partial W}{\partial u_i},\ \eta = W - u_i\frac{\partial W}{\partial u_i},\ \zeta_i = \frac{\partial W}{\partial x_i} + u_i\frac{\partial W}{\partial u}$$

для деякої функції $W = W(x, u, \underset{(1)}{u})$.

Розглянемо двовимірне рівняння Шродінгера:

$$i\psi_t + \psi_{xx} = V(t, x, \psi, \psi_x, \psi_t). \tag{2.70}$$

Інфінітезимальні оператори контактних перетворень шукаємо у класі диференційних операторів першого порядку

$$\begin{aligned} X = \xi^\nu(t, x, \psi, \psi_t, \psi_x)\partial_{x_\nu} + \eta(t, x, \psi, \psi_t, \psi_x)\partial_\psi + \\ + \zeta^\nu(t, x, \psi, \psi_t, \psi_x)\partial_{\psi_\nu} + \mu(t, x, \psi, \psi_t, \psi_x)\partial_V, \end{aligned} \tag{2.71}$$

де

$$\xi^\nu = -\frac{\partial W}{\partial \psi_\nu},\ \eta = W - \psi_\nu\frac{\partial W}{\partial \psi_\nu},\ \zeta^\nu = \frac{\partial W}{\partial x_\nu} + \psi_\nu\frac{\partial W}{\partial \psi} \tag{2.72}$$

для деякої функції $W = W(t, x, \psi, \psi_x, \psi_t)$. Із умови інваріантності рівняння (2.70) відносно операторів (2.71), (2.72), випли善ває, що шукана функція W має вигляд

$$W = F^1(t)\psi_t + F^2(t, x, \psi, \psi_x),$$

де F^1, F^2 — довільні функції своїх аргументів.

Тоді

$$\xi^0 = -F^1(t),\ \xi^1 = -F^2_{\psi_x}(t, x, \psi, \psi_x),$$

$$\eta = F^2 - \psi_x F^2_{\psi_x},$$

$$\zeta^0 = F^1_t\psi_t + F^2_t + \psi_t F^2_\psi,\ \zeta^1 = F^2_x + \psi_x F^2_\psi,$$

$$\begin{aligned} \mu = i(W_t + \psi_t W_\psi) + W_{xx} + 2W_{x\psi}\psi_x - \\ - (i\psi_t - V)(W_{x\psi_x} + W_\psi + \psi_x W_{\psi\psi_x}) + (\psi_x)^2 W_{\psi\psi} - \\ - (i\psi_t - V)(W_{x\psi_x} + \psi_x W_{\psi\psi_x} - (i\psi_t - V)W_{\psi_x\psi_x}). \end{aligned}$$

Таким чином, рівняння (2.70) інваріантне відносно нескінченновимірної групи контактних перетворень з інфінітезимальними операторами:

$$Q_{F^1} = -F^1\partial_t + F^1_t\psi_t\partial_{\psi_t} + iF^1_t\psi_t\partial_V.$$

$$\begin{aligned} Q_{F^2} = {} & -F^2_{\psi_x}\partial_x + (F^2 - \psi_x F^2_{\psi_x})\partial_\psi + (F^2_t + \psi_t F^2_\psi)\partial_{\psi_t} + \\ & + (F^2_x + \psi_x F^2_\psi)\partial_{\psi_x} + \{iF^2_t + i\psi_t F^2_\psi + F^2_{xx} + 2F^2_{x\psi}\psi_x + \\ & + (\psi_x)^2 F^2_{\psi\psi} - (i\psi_t - V)(2F^2_{x\psi_x} + 2\psi_x F^2_{\psi\psi_x} + F^2_\psi) + \\ & + (i\psi_t - V)^2 F^2_{\psi_x\psi_x}\}\partial_V, \end{aligned}$$

де $F^1 = F^1(t), F^2 = F^2(t, x, \psi, \psi_x)$ — довільні функції.

Висновок. Таким чином, рівняння Шродінгера (2.70) з нефіксованим потенціалом V допускає оператори контактних перетворень, які не є першим продовженням операторів точкових перетворень. Це пояснюється тим, що умова дотику вимагається за змінною ψ і не вимагається за змінною V.

Розглянемо частинний випадок. Нехай

$$F^1(t) = 1,\ F^2(t, x, \psi, \psi_x) = -(\psi_x)^2.$$

Тоді $W = \psi_t - (\psi_x)^2$.

Оператори контактних перетворень мають вигляд

$$Q_{F^1} = \partial_t,$$

$$Q_{F^2} = 2\psi_x\partial_x + (\psi_x)^2\partial_\psi - 2(i\psi_t - V)^2\partial_V. \tag{2.73}$$

Оператор (2.73) породжує скінчені перетворення:

$$\begin{cases} x \to \widetilde{x} = 2\psi_x\theta + x, \\ t \to \widetilde{t} = t, \\ \psi \to \widetilde{\psi} = (\psi_x)^2\theta + \psi, \\ \psi_x \to \widetilde{\psi_x} = \psi_x,\ \psi_t \to \widetilde{\psi_t} = \psi_t, \\ V \to \widetilde{V} = \dfrac{2i\theta(V - i\psi_t)\psi_t + V}{2\theta(V - i\psi_t) + 1}. \end{cases} \tag{2.74}$$

Перетворення (2.74) можна використати для генерування точних розв'язків рівняння (2.70) з відомого розв'язку, а також для побудови нелокальних анзаців, які редукують дане рівняння до системи звичайних диференціальних рівнянь.

Розділ 3

Супер-та парасуперсиметричні моделі у квантовій механіці

Суперсиметрія є одним з основних напрямків у сучасній теоретичній фізиці, і області її застосування ще далеко не вичерпані. Суперсиметрія дозволяє знаходити повні спектри широкого класу задач, включаючи всі відомі точно розв'язувані задачі квантової механіки, за допомогою простих обчислень [76, 10].

Суперсиметрична квантова механіка описує квантові системи, які мають подвійне виродження майже всіх рівнів енергії. $N = 2$–суперсиметрична квантова механіка [121] описується двома ермітовими суперзарядами (Q_1, Q_2) та суперсиметричним гамільтоніаном H, які задовільняють супералгебру:

$$\{Q_a, Q_b\} = 2\delta_{ab}H,\ [Q_a, H] = 0,\ (a, b = 1, 2). \tag{3.1}$$

Супералгебра (3.1) містить в собі, зокрема, такі три співвідношення:

$$Q_1^2 = H,\ Q_2^2 = H,\ \{Q_1, Q_2\} = 0.$$

Поняття парасуперсиметрії як симетрії між частинками, які підкоряються парастатистикам різних порядків, було введене в роботі [109]. Така симетрія притаманна квантово-механічним частинкам з вищими спінами у магнітному полі. Парасуперсиметрія описується не звичайними алгебрами Лі або їх суперсиметричним розширенням.

а поліноміальними алгебрами, які отримали назву парасупералгебр [80].

Фізична теорія з суперсиметрією, що отримала назву парасуперсиметричної квантової механіки, була запропонована в [109], незалежна версія була розроблена в [61]. Результати [109] були узагальнені на випадок довільного порядку p [98, 99, 112, 117].

Модель $N = 2$ парасуперсиметричної квантової механіки порядку $p = 2$, запропонованої Рубаковим та Спірідоновим, характеризуються парасупералгеброю вигляду

$$\begin{aligned} &Q_a^3 = HQ_a,\ [Q_a, H] = 0, \\ &Q_a^2Q_b + Q_aQ_bQ_a + Q_bQ_a^2 = 4Q_aH \quad (a, b = 1, 2). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Модель парасуперсиметричної квантової механіки порядку p, запропонованої Бекерсом-Деберг (Beckers-Debergh), характеризується такою парасупералгеброю:

$$\begin{aligned} &[H, Q_a] = 0, \\ &[Q_a, [Q_b, Q_c]\,] = \delta_{ab}Q_cH - \delta_{ac}Q_bH, \\ &(Q_1 \pm iQ_2)^{p+1} = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

де H - гамільтоніан, Q_1, Q_2 - ермітові парасуперзаряди, $a, b, c = 1, 2$ $(N = 2)$.

Даний розділ присвячений дослідженню моделей узагальненої супер- та парасуперсиметричної квантової механіки, запропонованої в [61], на випадок довільної кількості N парасуперзарядів і довільного порядку квантизації p.

Основні результати розділу опубліковані в роботах автора [29, 114].

3.1 Парасуперсиметрична квантова механіка довільного порядку з N парасуперзарядами

У даному параграфі розглядається модель узагальненої парасуперсиметричної квантової механіки Бекерса–Деберг довільного порядку p для довільної кількості парасуперзарядів N. Показано, скільки суперпотенціалів можна ввести для певного N і p та отримано співвідношення, яким ці суперпотенціали задовільняють. Також доведене твердження про те, що суперпотенціали можна явно виразити через одну довільну функцію, що має місце як для підходу Бекерса–Деберг [61], так і для підходу Рубакова–Спірідонова [109].

Розглянемо спочатку випадок $N = 2$. Для $p = 2$ результати поставленої задачі відомі [61, 62]. Узагальнення на випадок довільного p пропонується проводити у такий спосіб. Оскільки так звана $N = 2$ - парасуперсиметрична квантова механіка тісно пов'язана з алгеброю Лі $so(3)$ [78], то парасуперзаряди Q_1 та Q_2 будемо шукати у вигляді:

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}((S_1 + S_2)P + i(S_1\eta W(x) + S_2\eta\widetilde{W}(x))),$$
$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}((S_1 - S_2)P + i(S_1\eta W(x) - S_2\eta\widetilde{W}(x))),$$

де S_1, S_2 – так звані "сходинкові" матриці з зображення алгебри $so(3)$, тобто

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}\sqrt{jp - j(j-1)}e_{j,j-1}, \\ S_2 &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}\sqrt{jp - j(j-1)}e_{j-1,j}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

$W(x) = diag(0, W_1(x), \ldots, W_p(x))$, $\widetilde{W}(x) = diag(W_1(x), \ldots, W_p(x), 0)$ - матриці розмірності $(p+1) \times (p+1)$, $W_1(x)$, $\ldots$, $W_p(x)$ – парасуперпотенціали, $e_{j,k}$ – матриця розмірності $(p+1) \times (p+1)$, яка має нулі скрізь крім перетину j-го рядка та k-го стовпчика, $P = -i\dfrac{\partial}{\partial x}$, p - порядок парасуперквантизації. Крім того ми вимагаємо, щоб матриця η задовільняла умови

$$\begin{aligned} &\{\eta, S_a\} = 0, \quad a = 1, 2, \\ &\eta^2 = 1. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Тоді гамільтоніан

$$H = diag(H_1, H_2, \ldots, H_{p+1}),$$

де

$$H_r = \frac{1}{2}(P^2 + (-1)^{r+1} W_r' + W_r^2), \quad r = 1, 2, \ldots, p,$$

$$H_{p+1} = \frac{1}{2}(P^2 + (-1)^p W_p' + W_p^2),$$

буде комутувати з парасуперзарядами Q_1 та Q_2, і повинні виконуватись співвідношення:

$$(-1)^r W_r^2 + W_r' = (-1)^r W_{r+1}^2 + W_{r+1}', \quad r = 1, \ldots, p-1. \tag{3.6}$$

Зауважимо, що співвідношенням (3.6) задовільняють потенціали вигляду $W_1(x) = W_2(x) = \ldots = W_p(x) = W(x)$. Якщо $W(x) = \omega x$ (осциляторо-подібна взаємодія), і матриці S_1, S_2 вибираються у вигляді (3.4), то гамільтоніан має вигляд

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + \omega^2 x^2 + \eta\omega), \tag{3.7}$$

де

$$\eta = diag(1, -1, 1, \ldots, (-1)^p).$$

Звідси легко визначити спектр H:

$$\begin{aligned} &E_n = \omega(n+1) \qquad \text{для} \quad \eta = 1, \\ &E_n = \omega n \qquad\quad\;\; \text{для} \quad \eta = -1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{3.8}$$

Якщо $p = 2$, то гамільтоніан (3.7) можна інтерпретувати як гамільтоніан трирівневої системи та однієї бозонної моди [111]. В цьому випадку $\eta = diag(1, -1, 1)$, і така конфігурація відповідає $V(\Lambda)$-типу трирівневих систем [111, 122, 110].

Нагадаємо, що для узагальненої парасуперсиметричної квантової механіки Рубакова–Спірідонова для довільного p (при відповідному виборі парасуперзарядів) співвідношення на потенціали мають вигляд [98, 99]:

$$(-1)^r W_r^2 + W_r' + c_r = (-1)^r W_{r+1}^2 + W_{r+1}' + c_{r+1}, \quad r = 1, \ldots, p-1. \tag{3.9}$$

Теорема 3.1. *Суперпотенціали $W_1, \ldots, W_p$, що задовільняють умови (3.6) або (3.9), можна <u>явно</u> виразити через одну довільну функцію.*

Доведення. Теорема доводиться за індукцією.

1) Якщо є два потенціали, то їх можна подати у вигляді

$$W_1 = \frac{u' + u^2 + c_1 - c_2}{2u}, \qquad W_2 = \frac{u' - u^2 + c_1 - c_2}{2u}, \tag{3.10}$$

де $u = W_1 - W_2 \neq 0$ (див. також [63]).

2) Нехай теорема виконується для $p-1$ суперпотенціалу

$$W_1(x) = f_1(u), \ldots, W_{p-2}(x) = f_{p-2}(u),\ W_{p-1}(x) = f_{p-1}(u), \tag{3.11}$$

причому, за допомогою (3.10), нехай

$$\begin{aligned} W_{p-2} &= \frac{(-1)^{p-1}(u' + c_{p-2} - c_{p-1}) + u^2}{2u}, \\ W_{p-1} &= \frac{(-1)^{p-1}(u' + c_{p-2} - c_{p-1}) - u^2}{2u}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Доведемо твердження теореми для p суперпотенціалів. Нехай W_{p-1} та W_p виражаються явно через деяку довільну функцію v:

$$\begin{aligned} W_{p-1} &= \frac{(-1)^{p}(v' + c_{p-1} - c_p) + v^2}{2v}, \\ W_p &= \frac{(-1)^{p}(v' + c_{p-1} - c_p) - v^2}{2v}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Прирівняємо вирази для W_{p-1} в (3.12). Тоді отримаємо

$$u = \frac{-\varepsilon a' \pm \sqrt{(a')^2 - 4(a + \varepsilon(c_{p-1} - c_p))(a^2 + \varepsilon(c_{p-2} - c_{p-1})a)}}{a + \varepsilon(c_{p-1} - c_p)} \tag{3.14}$$
$$v = \frac{a}{u},$$

де a – довільна функція від x, $\varepsilon = (-1)^p$. Із (3.11)–(3.14) випливає, що всі суперпотенціали $W_1(x), \ldots, W_p(x)$ явно виражаються через одну довільну функцію a, що і доводить теорему.

Зауваження. Якщо є три потенціали, то їх можна подати у вигляді (3.10) та

$$W_3 = \frac{-v' - v^2 + c_3 - c_2}{2v},$$

де

$$u = \frac{-a' + \varepsilon\sqrt{(a')^2 - 4((c_1 - c_2)a - a^2)(c_2 - c_3 - a)}}{2(c_2 - c_3 - a)}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$
$$v = \frac{a}{u},$$

якщо $W_1 - W_2 \neq 0$, $W_2 - W_3 \neq 0$, a - довільна функція.

Перейдемо тепер до випадку $N = 3$. Парасупералгебра має вигляд (3.3), де $a, b, c = 1, 2, 3$. Парасуперзаряди Q_1, Q_2, Q_3 шукаємо у вигляді:

$$Q_a = \frac{1}{\sqrt{2}} A_a(P + i\eta W_a(x)), \quad a = 1, 2, 3 \tag{3.15}$$

де A_a [78] – матриці з зображення алгебри $so(4)$, матриця η задовільняє (3.5).

Для $p = 2$, вибираючи парасуперзаряди у вигляді (3.15), де A_a - 4 × 4 або 6 × 6 матриці, що реалізують зображення алгебри $so(4)$, отримаємо такі умови на потенціали W_1, W_2, W_3:

$$W_1' - W_1^2 = W_2' - W_2^2 = W_3' - W_3^2. \tag{3.16}$$

Якщо A_a реалізують зображення $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ алгебри $so(4)$

$$A_1 = S_{41} = i(e_{4,1} + e_{1,4}),$$

$$A_2 = S_{42} = i(e_{4,2} + e_{2,4}),$$

$$A_3 = S_{43} = i(e_{4,3} + e_{3,4}),$$

то матриця η буде мати вигляд

$$\eta = diag(1, 1, 1, -1). \tag{3.17}$$

Розглянемо взаємодію типу осцилятора: $W_1(x) = W_2(x) = W_3(x) = = \omega x$. Гамільтоніан матиме вигляд

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + \omega^2 x^2 + \eta\omega),$$

де η – матриця (3.17). Спектр H легко знайти і він буде мати вигляд (3.8). Гамільтоніан в цьому випадку можна інтерпретувати як гамільтоніан 4-рівневої системи, причому конфігурація рівнів відповідає f - типу [111].

Зауважимо, що суперпотенціали W_1, W_2, W_3, які задовільняють (3.16), явно виражаються через одну довільну функцію u:

$$W_1 = \frac{u'' + (u')^2}{2u'}, \qquad W_2 = \frac{u'' - (u')^2}{2u'},$$
$$W_3 = \frac{u''}{2u'} - u' \frac{1 + \exp(u)}{-1 + \exp(u)}.$$

Розглянемо тепер загальний випадок з довільною кількістю парасуперзарядів N і довільним порядком парасуперквантизації p. Парасуперзаряди шукаємо у такому вигляді:

$$Q_a = \frac{1}{\sqrt{2}} S_{N+1,a}(P + i\eta W_a(x)), \quad a = 1, 2, \ldots, N,$$

де W_a – суперпотенціали, $S_{N+1,a}$ – генератори алгебри $so(N+1)$:

$$[S_{\mu\nu}, S_{\lambda\sigma}] = i(\delta_{\mu\lambda} S_{\nu\sigma} + \delta_{\nu\sigma} S_{\mu\lambda} - \delta_{\mu\sigma} S_{\nu\lambda} - \delta_{\nu\lambda} S_{\mu\sigma}),$$

де $\delta_{\mu\nu}$ – символ Кронекера, $\mu, \nu, \lambda, \sigma = 1, \dots, N+1$. Використовуючи співвідношення (3.3) $(a, b, c = 1, \dots, N)$, отримаємо такий результат:

а) $W_1 = W_2 = \ldots = W_N = W$

або

б) суперпотенціали $W_1, \dots, W_N$ задовільняють умови

$$S_{N+1,a}(1 - S^2_{N+1,b})(\eta W'_a - \eta^2 W_a^2 - \eta W'_b + \eta^2 W_b^2) = 0.$$

$$a, b = 1, 2, \dots, N,$$

а матриці $S_{N+1,a}$ задовільняють алгебру Кемера

$$S_{N+1,a}S_{N+1,b}S_{N+1,c}+S_{N+1,c}S_{N+1,b}S_{N+1,a} = \delta_{ab}S_{N+1,c}+\delta_{bc}S_{N+1,a}. \quad (3.18)$$

Отже, ми бачимо, що в загальному випадку ми маємо один суперпотенціал. Якщо ж матриці $S_{N+1,a}$ задовільняють алгебру Кемера (3.18), то маємо потенціали $W_1, \dots, W_N$, які, згідно з доведеною вище теоремою, можна явно виразити через одну довільну функцію.

Таким чином, ми узагальнили парасуперсиметричну квантову механіку Бекерса–Деберг на випадок довільної кількості парасуперзарядів N та довільного порядку p і показали, що, як у випадку $N = 2, p = 2$, так і у загальному випадку, парасуперпотенціали можуть бути явно виражені через одну довільну функцію.

3.2 Супер-та парасуперсиметричні квантово–механічні моделі для довільної кількості зарядів

Дослідження узагальненої суперсиметрії в квантовій механіці викликає значний інтерес [6, 67, 7]. Даний параграф присвячений побудові парасуперсиметричних квантово–механічних моделей виходячи із суперсиметричних систем.

$n = 4$ суперсиметрична квантова механіка описується алгеброю

$$\{Q_a, Q_b\} = 2\delta_{ab}H, \ [Q_a, H] = 0, \ (a, b = \overline{1, 4}), \quad (3.19)$$

де Q_a $(a = \overline{1,4})$ – суперзаряди, H – гамільтоніан.

Нехай матриця η така, що

$$\{\eta, Q_a\} = 0, \;\; \eta^2 = 1, a = \overline{1,4}. \tag{3.20}$$

Із суперзарядів та матриці η побудуємо комбінації

$$\hat{Q}_1 = Q_1 + i\eta Q_2, \;\; \hat{Q}_2 = Q_3 + i\eta Q_4. \tag{3.21}$$

Неважко перевірити, що $\hat{Q}_1$ та $\hat{Q}_1$ будуть парасуперзарядами, які утворюють $N = 2$ парасуперсиметричну квантову механіку Бекерса–Деберг:

$$\begin{aligned}
&(\hat{Q}_1 \pm i\hat{Q}_2)^3 = 0,\\
&[\hat{Q}_1, [\hat{Q}_1, \hat{Q}_2]] = 4\hat{Q}_2 H,\\
&[\hat{Q}_2, [\hat{Q}_1, \hat{Q}_2]] = -4\hat{Q}_1 H,\\
&[H, \hat{Q}_a] = 0.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Крім того, парасуперзаряди (3.21) також утворюють $N = 2$ парасуперсиметричну квантову механіку Рубакова–Спірідонова:

$$\begin{aligned}
&\hat{Q}_a^3 = 4H\hat{Q}_a, \; [\hat{Q}_a, H] = 0,\\
&\hat{Q}_a^2\hat{Q}_b + \hat{Q}_a\hat{Q}_b\hat{Q}_a + \hat{Q}_b\hat{Q}_a^2 = 4\hat{Q}_a H \quad (a, b = 1, 2).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Розглянемо конкретну реалізацію $n = 4$ суперсиметричної квантової механіки. Нехай суперзаряди мають вигляд:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i(p - iw_1) \\ 0 & 0 & -i(p - iw_2) & 0 \\ 0 & i(p + iw_2) & 0 & 0 \\ -i(p + iw_1) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i(p - iw_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i(p - iw_2) \\ -i(p + iw_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i(p + iw_2) & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} Q_2, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} Q_1,$$

де $p \equiv -i\dfrac{\partial}{\partial x}$; $w_1 = w_1(x)$ та $w_2 = w_2(x)$ – суперпотенціали. Ці оператори реалізують супералгебру (3.20), де Гамільтоніан

$$H = \begin{pmatrix} (p-iw_1)(p+iw_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (p-iw_2)(p+iw_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (p+iw_1)(p-iw_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (p+iw_2)(p-iw_2) \end{pmatrix},$$

причому повинно виконуватись співвідношення

$$w_1' - w_1^2 = w_2' - w_2^2,$$

тобто $(p+iw_1)(p-iw_1) = (p+iw_2)(p-iw_2)$. Матриця, яка антикомутує з усіма суперзарядами, має вигляд

$$\eta = diag(1, 1, -1, -1).$$

Тоді парасуперзаряди

$$\hat{Q}_1 = Q_1 + i\eta Q_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(p-iw_1) & i(p-iw_1) \\ 0 & 0 & -i(p-iw_2) & -(p-iw_2) \\ -(p+iw_1) & i(p+iw_2) & 0 & 0 \\ -i(p+iw_1) & -(p+iw_2) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{Q}_2 = Q_3 + i\eta Q_4 =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(p-iw_1) & -i(p-iw_1) \\ 0 & 0 & -i(p-iw_2) & p-iw_2 \\ -(p+iw_1) & i(p+iw_2) & 0 & 0 \\ i(p+iw_1) & p+iw_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

задовільняють парасуперaлгебри (3.22) та (3.23).

Тепер розглянемо загальний випадок $n = 2k$ суперсиметричної квантової механіки:

$$\{Q_a, Q_b\} = 2\delta_{ab}H, \ [Q_a, H] = 0, \ (a, b = \overline{1, n}).$$

Теорема 3.2. *Парасуперзаряди*

$$\hat{Q}_1 = Q_1 + i\eta_1 Q_2 + i\eta_2 Q_3 + \cdots + i\eta_{p-1} Q_p,$$

$$\hat{Q}_2 = Q_{p+1} + i\eta_1 Q_{p+2} + i\eta_2 Q_{p+3} + \cdots + i\eta_{p-1} Q_{2p},$$

$$\ldots$$

$$\hat{Q}_N = Q_{(N-1)p+1} + i\eta_1 Q_{(N-1)p+2} + i\eta_2 Q_{(N-1)p+3} + \cdots + i\eta_{p-1} Q_{Np},$$

де матриці η_k $(k = \overline{1, p-1})$ *задовільняють умови (3.20), утворюють* N *парасуперсиметричну квантову механіку Бекерса Деберг (або Рубакова–Спірідонова) порядку* p, *якщо виконується нерівність*

$$(N+1)p \leq n + 2.$$

Нагадаємо, що N парасуперсиметрична квантова механіка Бекерса–Деберг порядку p описується алгеброю

$$\begin{array}{l} [H, \hat{Q}_a] = 0, \\ [\hat{Q}_a, [\hat{Q}_b, \hat{Q}_c]] = \alpha(\delta_{ab}\hat{Q}_c H - \delta_{ac}\hat{Q}_b H), \\ (\hat{Q}_a \pm i\hat{Q}_b)^{p+1} = 0, \end{array} \tag{3.24}$$

де $a, b, c = \overline{1, N}$.

Теорема доводиться прямою перевіркою співвідношень (3.24) та на основі того, що існують $n + 1 = 2k + 1$ матриці розмірності $2^k \times 2^k$, які антикомутують між собою.

Наприклад, якщо розглянути $n = 10$ (тобто $k =$ [illegible]) суперсиметричну квантову муханіку, то суперзаряди задаються матричними операторами розмірності $2^5 \times 2^5$. Згідно з теоремою 3.2, з суперзарядів $Q_1, \ldots, Q_{10}$ можна утворити парасуперзаряди:

1) $\hat{Q}_a = Q_a + i\eta Q_{5+a}$, $a = \overline{1,5}$,
які задовільняють $N = 5$ парасуперсиметричну квантову механіку порядку $p = 2$;
2) $\hat{Q}_a = Q_a + i\eta_1 Q_{a+1} + i\eta_2 Q_{a+2}$, $a = \overline{1,3}$,
які утворюють $N = 3$ парасуперсиметричну квантову механіку порядку $p = 3$;
3) $\hat{Q}_a = Q_a + i\eta_1 Q_{a+1} + i\eta_2 Q_{a+2} + i\eta_3 Q_{a+3}$, $a = 1, 2$,
які утворюють $N = 2$ парасуперсиметричну квантову механіку порядку $p = 4$, причому матриці η_k задовільняють умови (3.20).

Висновки

Таким чином, у даній дисертаційній роботі одержино такі результати:

1. Описано всі лінійні рівняння довільного порядку, інваріантні відносно алгебри Галілея $AG(1,3)$. Вивчені нелінійні рівняння типу Шредінгера високого порядку, інваріантні відносно алгебри Галілея, розширеної та повної алгебри Галілея. Побудовані класи точних розв'язків таких рівнянь.

2. Проведена симетрійна класифікація потенціалів для двовимірних узагальнених рівнянь Шродінгера 4-го порядку та порядку $2n$. Досліджена симетрія систем рівнянь шродінгерового типу з потенціалом.

3. Розроблена та застосована ідея про розширення симетрії галілей–інваріантних рівнянь з потенціалом, коли потенціал вважається новою залежною змінною. На основі цієї ідеї вивчена симетрія рівняння Шродінгера з нефіксованим потенціалом, рівняння конвективної дифузії, рівняння Шродінгера з конвективним членом. Побудовано контактні перетворення для рівняння Шродінгера з потенціалом.

4. Досліджені системи, які включають рівняння Шродінгера та додаткові умови на потенціал. Показано, що такі системи інваріантні відносно перетворень Галілея, якщо потенціал V задовільняє рівняння Лапласа або рівняння Кортевега–де Фріза. Вивчена симетрія рівняння Шродінгера з конвективним членом при умові, що потенціали задовільняють комплексні рівняння Ойлера. Показана

галілей–інваріантність такої системи, проведена її повна групова класифікація та побудовано деякі класи точних розв'язків.

5. Досліджена симетрія рівняння Гамільтона–Якобі для комплексної функції. Розглянуто узагальнені рівняння типу Гамільтона–Якобі та вивчена їх симетрія. Показано, що рівняння Гамільтона–Якобі з нефіксованим потенціалом інваріантне відносно нескінченно-вимірної алгебри Лі.

6. Побудовані та досліджені моделі парасуперсиметричної квантової механіки довільного порядку для довільної кількості парасуперзарядів.

Основні результати дисертації є новими. Вони можуть бути використані в математичній та теоретичній фізиці.

Література

[1] Абрамовиц М., Стиган И., *Справочник по специальным функциям,* Москва, Наука, 1979, 830с.

[2] Андрианов А.А., Борисов Н.В., Иоффе М.В., Метод факторизации и преобразование Дарбу для многомерных гамильтонианов, *ТМФ*, 1984, т. 61, N 2, с.183–198.

[3] Багров В.Г., Шаповалов А.В., Широков И.В., Генерация новых точно разрешимых потенциалов нестационарного уравнения Шредингера, *ТМФ*, 1991, т. 87, N 3, с.426–433

[4] Багров В.Г., Шаповалов А.В., Широков И.В., Метод генерации новых точных решений одномерного уравнения Шредингера, *Известия ВУЗов. Физика*, 1989, N 11, с.114–116.

[5] Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Фущич В.И., *Редукция и точные решения уравненеия Гамильтона–Якоби*, Препринт 90.41, Киев, Ин–т математики АН Украины, 1990, 40с.

[6] Березовой В.П., Пашнев А.И., Одномерная расширенная суперсимметричная квантовая механика, *ТМФ*, 1989, т. 78, N 2, с.289–296.

[7] Березовой В.П., Пашнев А.И., $N = 2$ суперсимметричная квантовая механика и обратная задача рассеяния, *ТМФ*, 1988, т. 74, N 3, с.392–398.

[8] Берман В.С., Данилов Ю.А., О групповых свойствах обобщенного уравнения Ландау–Гинзбурга, *Доклады АН СССР*, 1981, т. 258, N 1, с.67–70.

[9] Биркгоф Г., *Гидродинамика*, Москва, Изд–во иностр. лит., 1963, 244с.

[10] Генденштейн Л.Э., Нахождение точных спектров уравнения Шредингера с помощью суперсимметрии, *Письма в ЖЭТФ*, 1983, т. 38, вып. 6, с.299–302.

[11] Дородницын В.А., Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности, *Журн. вычисл. мат. и мат. физ.*, 1982, т. 22, N 6, с.1393–1400.

[12] Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р., Групповые свойства уравнений теплопроводности с источником в дву- и трехмерном случаях, *Дифференциальние уравнения*, 1983, т. 19, N 7, с.1215–1223.

[13] Зайцев В.Ф.,Полянин А.Д., *Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложение в механике, точные решения*, Москва, Наука, 1993, 462с.

[14] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П., *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Москва, Наука, 1980, 319с.

[15] Захаров В.Е., Шабат А.Б., Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейних средах, *ЖЭТФ*, 1971, т. 61, N 1, с.118–134.

[16] Ибрагимов Н.Х., *Группы преобразований в математической физике*, Москва, Наука, 1983, 280с.

[17] Камке Э., *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Москва, Наука, 1976, 576с.

[18] Куренский М.К., *Дифференциальные уравнения с частными производными*, Ленинград, Арт. Академия РККА, 1934, 333с.

[19] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Москва, Гос. издат. физ.–мат. лит., 1963, 702с.

[20] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Механика*, Москва, Гос. издат. физ.–мат. лит., 1958, 206с.

[21] Мессиа А., *Квантовая механика*, в 2-х т., Москва, наука, 1978, т. 1, 470с.

[22] Миллер У., мл., *Симметрия и разделение переменных*, Москва, Мир, 1981, 342с.

[23] Никитин А.Г., Полный набор операторов симметрии уравнения Шредингера, *УМЖ*, 1991, т. 43, N 11, с.1521–1526.

[24] Никитин А.Г., Онуфрийчук С.П., Фущич В.И., Высшие симметрии уравнения Шредингера, *ТМФ*, 1992, т. 91, N 2, с.268–278.

[25] Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Москва, Мир, 1989, 639с.

[26] Овсянников Л.В., *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Москва, Наука, 1978, 400с.

[27] Овсянников Л.В., Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности, *Доклады АН СССР*, 1959, т. 125, N 3, с.492–495.

[28] Пфейфер Г.В., *Інтегрування диференціальних рівнянь*, Київ, КДУ, 1937, 346с.

[29] Сименог З., Парасуперсиметрична квантова механіка довільного порядку з N парасуперзарядами, *УМЖ*, 1996, т. 48, N 9, с.1291–1294.

[30] Сименог З., Симетрійні властивості рівняння Гамільтона–Якобі з потенціалом, Тези V Міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука (Київ, 16–18 травня 1996 р.), Київ, 1996, с.397.

[31] Сименог З., Цифра І., Симетрійні властивості рівняння Шродінгера, Тези IV Міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука, (Київ, 11–13 травня 1995 р.), Київ, 1995, с.22[illegible]

[32] Смирнов В.И., Соболев С.Л., Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний, *Тр. сейсмического института АН СССР*, 1932, т. 20, с.37–42.

[33] Флюгге З., *Задачи по квантовой механике*, т.1,2, Москва, Мир, 1974.

[34] Фущич В.И., *Как расширить симметрию дифференциальных уравнений?* в:"Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики", Киев, Ин–т математики АН Украины, 1987, с.4–16.

[35] Фущич В.И., *Симетрия в задачах математической физики*, в:"Теоретико–алгебраические исследования в математической физике", Киев, Ин–т математики АН Украины, 1981, с.6–28.

[36] Фущич В.И., *О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики*, в:"Теоретико–алгебраические методы в задачах математической физики", Киев, Ин–т математики АН Украины, 1983, с.4–23.

[37] Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики, *Доклады АН СССР*, 1979, т. 246, N 4, с.846–850.

[38] Фущич В.И., *О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных*, в:"Теоретико–групповые методы в математической физике", Киев, Ин–т математики АН Украины, 1978, с.5–44.

[39] Фущич В.И., Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики, *УМЖ*, 1991, т. 43, N 11, с.1456–1470.

[40] Фущич В.І., Баранник А.Ф., Про новий метод побудови розв'язків нелінійних хвильвих рівнянь, *Доповіді НАН України*. 1996, N 10, с.48–51.

[41] Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф., *Подгрупповой анализ групп Галлилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений,* Киев, Наукова думка, 1991, 304с.

[42] Фущич В.І., Галіцин А.С., Полубинський А.С., Нова математична модель дифузійних процесів зі скінченою швидкістю, *Доповіді АН України. Сер. А*, 1988, N 8, с.21–26.

[43] Фущич В.И., Галицын А.С., Полубинский А.С., О новой математической модели процессов теплопроводности, *УМЖ*, 1990, т. 42, N 2, с.232–246.

[44] Фущич В.И., Егорченко И.А., Нелиевские анзацы и условная симметрия нелинейного уравнения Шредингера, *УМЖ*, 1991, т. 43, N 12, с.1620–1628.

[45] Фущич В.И., Наконечный В.В., Теоретико–алгебраический анализ уравнений Ламе, *УМЖ*, 1980, т. 32, N 2, с.267–272.

[46] Фущич В.И., Никитин А.Г., *Симметрия уравнений квантовой механики*, Москва, Наука, 1990, 400с.

[47] Фущич В.И., Никитин А.Г., *Симметрия уравнений Максвелла*, Киев, Наукова думка, 1983, 200с.

[48] Фущич В.И., Никитин А.Г., Нерелятивистские уравнения движения для частиц с произвольным спином, *Физ. элементар. частиц и атом. ядра*, 1981, т. 12, вып. 5, с.1157–1219.

[49] Фущич В.И., Сегеда Ю.Н., О новой алгебре инвариантности свободного уравнения Шредингера, *Доклады АН СССР*, 1977, т. 232, N 4, с.800–801.

[50] Фущич В.И., Серов Н.И., Репета В.К., Условная симметрия, редукция и точные решения нелинейного волнового уравнения, *Доклады АН УССР. Сер. А*, 1991, N 5, с.29–34.

[51] Фущич В.І.,Чопик В.І., Симетрія та неліївська редукція нелінійного рівняння Шредінгера, *УМЖ*, 1993, т. 45, N 4 с.539–551.

[52] Фущич В.И., Чопик В.И., Условная инвариантность нелинейного уравнения Шредингера, *Докл. АН УССР. Сер. А*, 1990, N 4, с.30-33.

[53] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., *Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики*, Киев, Наукова думка, 1989, 336с.

[54] Чопик В.І., Нелієвська редукція нелінійного рівняння Шредінгера, *УМЖ*, 1991, т. 43, N 11, с.1504–1508.

[55] Шульга М., *Симметрия и некоторые частные решения уравнения Даламбера с нелинейным условием*, в:"Теоретико–групповые исследования уравнений математической физики", Киев, Ин–т матаматики АН Украины, 1985, с.36–38.

[56] Anderson R.L., Kumei S., and Wulfman C.E., Invariants of the Equations of Wave Mechanics, *Rev. Mex. Fis.*, 1972, V. 21, p.1–9.

[57] Andrianov A.A. and Ioffe M.V., From Supersymmetric Quantum Mechanics to a Parasupersymmetric One, *Phys. Lett. B*, 1991, V. 255, No.4, p.543–548.

[58] Andrianov A.A., Ioffe M.V., Spiridonov V.P., and Vinet L., Parasupersymmetry and Truncated Supersymmetry in Quantum Mechanics, *Phys. Lett. B,* 1991, V. 272, No.3-4, p.297–304. p.543–548.

[59] Bagchi B., Supersymmetry, Reflectionless Symmetric Potentials and the Inverse Method, *Int. J. Mod. Phys. A*, 1990, V. 5, No.9, p.1763–1772.

[60] Bagrov V.G. and Gitman D.M., *Exact Solutions of Relativistic Wave Equations*, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1990.

[61] Beckers J. and Debergh N., Parastatistics and Supersymmetry in Quantum Mechanics, *Nucl. Phys. B*, 1990, V. 340, p.767–776.

[62] Beckers J. and Debergh N., A Note on Recent Lie Parasuperstructures, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1990, V. 23, p.L1073–L1077.

[63] Beckers J., Debergh N., and Nikitin A.G., More on Parasupersymmetries of the Schrödinger Equation, *Mod. Phys. Lett. A*, 1993, V. 8, No.8, p.435–444.

[64] Beckers J., Debergh N. and Nikitin A.G., More on Supersymmetries of the Schrödinger Equation, *Mod. Phys. Lett. A*, 1992, V. 7, No.18, p.1609–1616.

[65] Beckers J., Debergh N., and Nikitin A.G., More on Symmetries of the Schrödinger Equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1991, V. 24, p.L1269–L1275.

[66] Beckers J., Debergh N., and Nikitin A.G., On Supersymmetries in Nonrelativistic Quantum Mechanics, *J. Math. Phys.*, 1992, V. 33, No.1, p.152–160.

[67] Berezovoj V.P. and Pashnev A.I., Three–Dimensional $N = 4$ Extended Supersymmetric Quantum Mechanics, *Class. and Quantum Grav.*, 1991, V. 8, No.12, p.2141–2147.

[68] Bluman G.W. and Kumei S., *Symmetries and Differential Equations,* New York, Springer–Verlag, 1989.

[69] Bollini C.G. and Giambia J.J., Arbitrary Powers of d'Alambertians and the Huygens' Principle, *J. Math. Phys.*, 1993, V. 34, No.2, p.610–621.

[70] Boyer C.P., The Maximal 'Kinematical' Invariance Group for an Arbitrary Potential, *Helv. Phys. Acta*, 1974, V. 47, p.589–605.

[71] Boyer C.P., On Some Solutions of a Nonlinear Diffusion Equation, *J. Math. Phys.*, 1961, V. 40, No.1, p.42–46.

[72] Boyer C.P. and Kalnins E.G., Symmetries of the Hamilton–Jacobi Equation, *J. Math. Phys.*, 1977, V. 18, No.5, p.1032–1045.

[73] Boyer C.P. and Penafield M.N., Conformal Symmetry of the Hamilton–Jacobi Equation and Quantization, *Nuovo Cim. B*, 1976, V. 31, No.2, p.195–210.

[74] Boyer C.P., Sharp R.T., and Winternitz P., Symmetry Breaking Interactions for the Time Dependent Schrödinger Equation, *J. Math. Phys.*, 1976, V. 17, No.8, p.1439–1451.

[75] Chopyk V., *Symmetry and Reduction of Multi–Dimensional Schrödinger Equation with the Logarithmic Nonlinearity*, in: "Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics", Kiev, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Ukraina, 1992, p.55–62.

[76] Cooper F., Ginocchio J.N., and Khare A., Relationship between Supersymmetry and Solvable Potentials, *Phys. Rev. D*, 1987, V. 36, p.2458–2473.

[77] Cooper F., Ginocchio J.N., and Wipf A., Supersymmetry Operator Transformations and Exactly Solvable Potentials, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1989, V. 22, No.17, p.3707–3716.

[78] Debergh N. and Nikitin A.G., Parasupersymmetric Quantum Mechanics with an Arbitrary Number of Parasupercharges and Orthogonal Lie Algebras, *Helv. Phys. Acta.,* 1995, V. 68, p.19–31.

[79] Dodonov V.V. and Mizrahi S.S., A New Class of Nonlinear Generalizations of the Schrödinger Equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1993, V. 26, p.7163–7168.

[80] Durand S. and Vinet L., Dynamic Parasuperalgebras of Parasupersymmetric Harmonic Oscillator, Cyclotron Motion and Morse Hamiltonian, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1990, V. 23, p.3661–3672.

[81] Fushchych W., New Nonlinear Equations for Electromagnetic Field Having the Velocity Different from c, *Dopovidi Academii Nauk Ukrainy*, 1992, N 4, p.24-27.

[82] Fushchych W., *Symmetry Analysis. Preface*, in:"Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics", Kiev, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Ukraina, 1992, p.5–6.

[83] Fushchych W., Ansatz '95, *J. Nonlin. Math. Phys.*, 1995, V. 2, No.3–4, p.216–235.

[84] Fushchych W.I., On Additional Invariance of the Dirac and Maxwell Equations, *Let. Nuovo Cim.*, 1974, V. 11, No.10, p.508–512.

[85] Fushchych W.I. and Cherniha R.M., The Galilean Relativistic Principle and Nonlinear Partial Differential Equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1985, V. 18, p.3491–3503.

[86] Fushchych W.I. and Cherniha R.M., The Galilei–Invariant Nonlinear Systems of Evolution Equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1995, V. 28, p.5569–5579.

[87] Fushchych W., Chopyk V., Nattermann P., and Scherer W., Symmetries and Reductions of Nonlinear Schrödinger Equations of Doebner–Goldin Type, *Repors on Math. Phys.*, 1995, V. 35, No.1, p.129–138.

[88] Fushchych W.I. and Moskaliuk S.S., On Some Exact Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equations in Three Spatial Dimensions, *Lett. Nuovo Cim.*, 1981, V. 31, No.16, p.571–576.

[89] Fushchych W.I. and Nikitin A.G., *Symmetry of Equation of Quantum Mechanics*, New York, Allerton Press, 1994, 465p.

[90] Fushchych W.I., Roman O.V., and Zhdanov R.Z., Symmetry and Some Exact Solutions of Nonlinear Polywave Equations, *Europhysics Letters*, 1995, V. 31, No.2, p.75–79.

[91] Fushchych W.I. and Serov N.I., On Some Exact Solutions of Three-Dimensional Non-Linear Schrödinger Equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1987, V. 20, p.L929–L933.

[92] Fushchych W., Shtelen W., and Serov N., *Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1993, 436p.

[93] Fushchych W. and Symenoh Z., High–Order Equations of Motion in Quantum Mechanics and Galilean Relativity, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1997, V. 30, No.6, p.L131–L135.

[94] Fushchych W., Zhdanov R., and Revenko I., *On the General Solution of the d'Alembert Equation with Nonlinear Eikonal Constraint*, in:"Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics", Kiev, Institute of Mathematics. Academy of Sciences of Ukraina, 1992, p.68–90.

[95] Gagnon L. and Winternitz P., Lie Symmetries of a Generalized Non-Linear Schrödinger Equation. I. The Symmetry Group and its Subgroups, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1988, V. 21, No.7, p.1493–1511.

[96] Humi M., Darboux Transformations for the Schrödinger Equation in Three Dimensions, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1988, V. 21, No.9, p.2075–2084.

[97] Kersten P.H.M. and Gragert P.K.H., Lie Algebras of Infinitesimal Symmetries of Nonlinear Diffusion Equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, V. 16, No.18, p.L685–L688.

[98] Khare A., Parasupersymmetric Quantum Mechanics of Arbitrary Order, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1992, V. 25, p.L749–L754.

[99] Khare A., Parasupersymmetry in Quantum Mechanics, *J. Math. Phys.*, 1993, V. 34, p.1277–1294.

[100] Khare A. and Bhaduri R.K., Some Algebraically Solvable Three–Body Problems in One Dimension, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1994, V. 27, p.2213–2223.

[101] Levy-Leblond J.-M., Nonrelativistic Particles and Wave Equations, *Commun. Math. Phys.*, 1967, V. 6, p.286–311.

[102] Levy-Leblond J.-M., *Galilei Group and Galilean Invariance*, Group Theory and its Applications, New York - London, Acad. Press, 1971, V. 2, p.221–299.

[103] Lie S., Engel F., *Theorie der Transformationsgruppen,* Bd. 1–3, Leipzig, Teubner, 1883–1893, 623s.;554s.;830s.

[104] Lie S., Schffers G., *Vorlesungen uber Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationsgruppen*, Leipzig, Teubner, 1891, 568s.

[105] Niederer U., The Maximal Kinematical Invariance Group of the Free Schrödinger Equation, *Helv. Phys. Acta*, 1972, V. 45, No.5, p.802–810.

[106] Niederer U., The Maximal Kinematical Invariance Group of the Harmonic Oscillator, *Helv. Phys. Acta*, 1973, V. 46, No.2, p.191–200.

[107] Olver P., *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, New York, Springer, 1986, 497p.

[108] Parasyuk I., Symplectic Symmetries of Hamiltonian Systems, *J. Nonlin. Math. Phys.*, 1995, V. 2, No.3–4, p.278–282.

[109] Rubakov V.A. and Spiridonov V.P., On Pararelativistic Quantum Mechanics, *Mod. Phys. Lett. A*, 1988, V. 3, p.1337–1347.

[110] Semenov V.V., Multidimensional Generalized Superalgebras, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1992, V. 25, p.L511–L514.

[111] Semenov V.V. and Chumakov S.M., Generalizations of the Superalgebra Other than the Parasuperalgebra, *Phys. Lett. B*, 1991, V. 262, p.451–454.

[112] Spiridonov V.P., Hierarchy of the Parasupersymmetric Hamiltonians in Quantum Mechanics, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1991, V. 24, p.L529–L534.

[122] Yoo H.I and Eberly J.H., Dynamical Theory of an Atom with Two or Three Levels Interacting with Quantized Cavity Fields, *Phys. Rep.*, 1985, V. 118, p.241–337.

[123] Zheng W.M., The Darboux Transformation and Solvable Double-Well Potential Models for Schrödinger Equations, *J. Math. Phys.*, 1984, V. 25, No.1, p. 88–90.