Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

ТРЕТИНИК Віолета Вікентіївна

ПРИХОВАНІ СИМЕТРІЇ ДВОЧАСТИНКОВИХ РІВНЯНЬ

01.01.03 - математична фізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник доктор фіз-мат наук,
НІКІТІН А.Г.

Київ – 1995

Зміст

Вступ

Останнім часом у математичній та теоретичній фізиці широко застосовуються теоретико–алгебраїчні методи дослідження диференційних рівнянь (ДР).

Математичні основи теорії симетрій ДР заклав Софус Лі [79]. Першочерговою метою С. Лі було створення теорії інтегрування ДР. Він перший застосував свою теорію до конкретних рівнянь і знайшов, використовуючи інфінітезимальні перетворення груп, їхні явні розв'язки. С. Лі вперше встановив максимальну локальну групу інваріантності одновимірного лінійного рівняння теплопровідності. Метод Лі дозволяє знаходити алгебру інваріантності рівняння у класі диференційних операторів першого порядку. Подальшому розвитку теорії С. Лі та її сучасному викладенню присвячені роботи [66, 67, 92].

Очевидно, що за допомогою класичного підходу Лі не можна знайти всі можливі алгебри інваріантності даного ДР, оскільки на базисні елементи алгебри інваріантності накладається апріорна вимога належності класові диференційних операторів першого порядку.

Неліївський метод суттєво узагальнює постановку задачі про дослідження алгебраїчних властивостей ДР. Головна ідея цього підходу полягає в тому, що клас операторів симетрії можна розширити, включивши в нього оператори другого, третього і, взагалі, n–го порядку, а також інтегро–диференційні оператори.

Основні результати, пов'язані з неліївським методом викладені у монографіях В.І. Фущича та А.Г. Нікітіна [66, 67].

Поява нового принципу симетрії–принципу суперсиметрії [3, 94] (SUSY) значно розширила можливість пошуку симетрій ДР. Тільки в суперсиметричних теоріях вперше вдалося об'єднати бозони та ферміони у єдиний супермультиплет. SUSY здобула фундамент після робіт Ю.А.Гольфанда та Е.П.Ліхтмана [7], в яких були запропоновані та досліджені спінорні розширення групи Пуанкаре, алгебра SUSY та її зображення.

Важливою властивістю SUSY виявилось різке скорочення розбіжностей, що є однією з проблем квантової теорії поля. Це стимулювало спроби побудови квантової теорії гравітації (супергравітації). SUSY є сьогодні однією з центральних ідей у спробах побудови єдиної квантової теорії поля, що об'єднує всі взаємодії, включаючи гравітацію. Побудова загальної картини світу із залученням SUSY ще далека від завершення, але враховуючи її привабливі риси, SUSY знайшла широке застосування у різноманітних галузях фізики, наприклад, для побудови космологічних моделей, при описові деяких явищ у твердому тілі. Ідеї та методи SUSY проникли у статистичну фізику, фізику ядра, квантову механіку.

Скорочення ультрафіолетових розбіжностей у суперсиметричних теоріях пожвавило інтерес до використання SUSY у квантовій теорії поля. Побудована в рамках квантової теорії поля алгебра SUSY привела до появи суперсиметричної квантової теорії поля (SQFT) [19, 97], яка дозволяє нетривіальним чином об'єднати просторово–часову симетрію групи Пуанкаре з внутрішніми симетріями. Найбільш зрозуміло структура супералгебри Пуанкаре проявляється у суперпросторі, який поряд з бозонними координатами x_μ містить ферміонні антикомутаційні (грассманові) координати θ_α. SUSY виникає тут як перетворення на 8–вимірному фактор–просторі (суперпросторі).

SQFT та SUSY викликали появу суперсиметричної квантової механіки (SQM) [3]. SQM, як відносно проста математична модель фізичної системи з SUSY є привабливою та цікавою. З іншого боку, саме по собі вивчення SQM привело до значного прогресу в розумінні структури звичайної квантової механіки а також відкрило нові шляхи для розв'язку деяких задач, використовуючи концепцію суперпотенціала–партнера [59]. Найпростіша модель SQM–суперсиметричний осцилятор, детально вивчена у [6]. Подальший розвиток ідеї використання SUSY у SQM можна знайти у роботах $[1, 2, 27, 34, 37, 40, 44, 45, 64]$. Дослідження симетрії основних рівнянь

Різні види симетрій диференційних рівнянь (ліївські, неліївські, SUSY, PSUSY) приводять до кращого розуміння фізичних аспектів реальних систем, а також дають змогу звести задачу до більш простої. Справді, симетрії рівнянь можна успішно використовувати для побудови їхніх точних розв'язків [21], знаходження нових законів збереження та інтегралів руху [15, 68], для розділення змінних [80], для пошуку енергетичного спектра гамільтоніана заданої фізичної системи. Існування виродження рівнів енергії відомих задач квантової механіки можна пояснити наявністю тієї чи іншої симетрії. Так, відома задача про рух частинки у полі Кулона має "випадкове" виродження дискретних рівнів енергії. Походження цього виродження пов'язане з симетрією цієї задачі відносно групи $O(4)$ [20]. Двократне виродження ненульових рівнів енергії електрона в однорідному магнітному полі пояснюється наявністю SUSY у цій задачі [6]. Специфічне виродження спектра гамільтоніана Шредінгера–Паулі для частинок з довільним спіном викликане слабою SUSY [90]. З використанням PSUSY можна успішно провести аналіз спектральних властивостей різноманітних квантово–механічних гамільтоніанів.

Таким чином, незаперечна роль теоретико–алгебраїчних методів у дослідженні симетрій рівнянь математичної фізики та побудові математичних та фізичних моделей, що мають задані симетрійні властивості.

Двочастинкові задачі є важливим об'єктом теоретичної фізики. Існує багато підходів до побудови двочастинкових моделей, які мають ті чи інші переваги. В рамках коваріантного гамільтонового формалізму у роботах [29, 53, 78, 98, 99, 100] вивчаються релятивістські двочастинкові рівняння з коваріантною взаємодією довільного вигляду. Альтернативні можливості полягають у використанні квазіпотенціального підходу [9, 11, 48, 76], застосуванні численних методів [104, 114], теорії прямої взаємодії [4], формалізму S–матриці [74]. Інтерес до двочастинкових рівнянь, пов'язаний з пошуками фізично сприйнятливих моделей релятивістських квантових систем значно зріс з появою SUSY та PSUSY. Побудові суперсиметричних двочастинкових моделей присвячені роботи [10, 50, 60, 101, 113]. Спстематичне дослідження симетрій двочастинкових рівнянь було почато у [66], де вивчалися рівняння, що інваріантні відносно груп Галілея та Пуанкаре. У роботах [13, 69] продовжується вивчення рівнянь для двох частинок з теоретико–групової точки зору. Математичні аспекти лагранжового формалізму релятивістської механіки системи взаємодіючих частинок та умови її пуанкаре–інваріантності розглянуті у [5]. Алгебраїчні аспекти та симетрійні властивості розв'язків діраковських двочастинкових систем із взаємодією обговорені у роботах [105, 106].

Незважаючи на різноманітність підходів і велику кількість робіт, пов'язаних з дослідженням двочастинкових систем, можна сказати, що досі не існує задовільної релятивістської теорії двочастинкових рівнянь. Залишається без детального вивчення симетрійна структура двочастинкових задач. Багато привабливих рис супер– та парасуперсиметричних теорій спонукають до дослідження фізичних та математичних моделей, які допускають ці нові види симетрії.

Основним рівнянням нерелятивістської квантової механіки, що описує динаміку двох вільних безспінових частинок є рівняння Шредінгера. Симетрійні властивості одночастинкового рівняння Шредінгера досліджені досить повно. Ліївські симетрії одночастинкового рівняння Шродінгера вивчені у [66]. Повний набір операторів симетрії n–го порядку рівняння Шродінгера знайдено у [14]. Р.Л.Андерсон [24] та С.П.Бойер [47] класифікували всі випадки одновимірного рівняння Шродінгера із взаємодією, які допускають нетривіальну алгебру симетрії. У роботах [12, 31] досліджені вищі симетрії одновимірного рівняння Шродінгера із взаємодією та знайдено всі нееквівалентні потенціали, які допускають такі симетрії. Суперсиметричні та парасуперсиметричні одновимірні рівняння Шродінгера запропоновані у [32, 33]. Вивчені симетрії n–го порядку, які допускають ці рівняння.

Майже недосліджені симетрії двочастинкового рівняння Шродінгера. У [66] розглянуто рівняння Шродінгера для двох невзаємодіючих частинок. Алгебра інваріантності цього рівняння для $m_1 = m_2$ співпадає з алгеброю Лі групи Шродінгера в $(1 + 6)$–вимірному просторі–часі. Знайдено також загальний вигляд двочастинкового рівняння Шродінгера для двох взаємодіючих скалярних частинок, що задовольняє принципу відносності Галілея.

Важливим об'єктом дослідження є релятивістські двочастинкові рівняння з осциляторно–подібним потенціалом взаємодії. Такі потенціали виникають при вивченні руху частинок у однорідному електричному та магнітному полі, а в останні роки знайшли застосування до опису динаміки кварків. Вперше у роботах [51, 73] було запропоновано рівняння Дірака із взаємодією лінійною по координатам та імпульсам для опису мезонних станів кварк–антикваркової системи. Ця задача була розв'язана точно, причому у нерелятивістському наближенні "велика" компонента хвильової функції задовольняла рівнянню, що містило доданок стандартного гармонічного осцилятора та спін–орбітальний доданок. Подібну задачу було розглянуто незалежно у роботах [81, 82] і названо осцилятором Дірака. Осцилятор Дірака є релятивістським узагальненням квантового гармонічного осцилятора для спінорних частинок. Як рівняння Шродінгера для звичайного осцилятора квадратичне по координатам та імпульсам, так і релятивістський осцилятор Дірака лінійний по координаті та імпульсу. Оскільки рівняння Шродінгера має досить багату симетрію, то треба сподіватись, що осцилятор Дірака також має широку симетрію. І справді, ця модель допускає цікаві симетрії [84], приховані SUSY [46]. Різні підходи до одержання релятивістських рівнянь з осциляторно–подібними розв'язками можна знайти у роботах [62, 95, 105].

Узагальнення осцилятора Дірака на випадок двочастинкових та багаточастинкових задач проведено у [52, 58, 83, 85]. У цих задачах увага акцентувалась в основному на знаходженні енергетичного спектра моделі аналітичними методами. Для кращого фізичного обгрунтування даних моделей необхідно розглянути теоретико–групові аспекти цих задач. Так, у роботі [93] скінченне та нескінченне виродження енергетичних рівнів осцилятора Дірака пояснюється інваріантністю задачі відносно алгебри $SO(4)$ та $SO(3,1)$ відповідно. Опис двох видів релятивістських осциляторів подано у [86]. Структура відповідних рівнянь вивчається з точки зору SQM Віттена, а спектр гамільтоніанів одержується з використанням перетворення Фолді–Воутхойзена (ФВ). Узагальнення осцилятора Дірака на випадок скалярних та векторних бозонів запропоновано у [36, 56]. Побудоване рівняння, що дістало назву парарелятивістського осцилятора, є рівнянням Кемера–Дефіна–Петьє (КДП) у продінгеровській формі. Вивчено зв'язок цих рівнянь з PSUSY та знайдено перетворення ФВ. Альтернативний підхід до релятивістського осцилятора для скалярних та векторних бозонів розвинуто у роботі [87]. Дану модель автори назвали осцилятором КДП. Відповідне рівняння, побудоване з коваріантного рівняння КДП з урахуванням лінійної взаємодії.

Таким чином, симетрійні аспекти релятивістських задач з осциляторно–подібною взаємодією вивчені мало. Залишається зовсім недослідженим питання про симетрію двочастинкового осцилятора Дірака.

Дана дисертаційна робота присвячена дослідженню симетрій двочастинкових рівнянь та побудові незвідних зображень PPSA.

Розділ I присвячений дослідженню симетрії двочастинкового рівняння Шродінгера.

В § **1.1** розглядається одновимірне рівняння Шродінгера для двох взаємодіючих частинок однакової маси

$$L\psi = \left\{ -i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(x_1, x_2) \right\} \psi = 0,$$

де x_1, $p_1 = -i\frac{\partial}{\partial x^1}$ та x_2, $p_2 = -i\frac{\partial}{\partial x^2}$– координата та імпульс першої та другої частинки відповідно. Досліджена ліївська симетрія даного рівняння. Знайдено явний вигляд операторів симетрії I–го порядку для наступного класу потенціалів

$$V = c_1, \tag{0.1}$$

$$V = c_2 x, \tag{0.2}$$

$$V = c_3 X, \tag{0.3}$$

$$V = c_4 x^2, \tag{0.4}$$

$$V = \frac{c_5}{x^2}, \tag{0.5}$$

$$V = c_6 x X, \tag{0.6}$$

де $c_a, (a = \overline{1,6})$–довільні константи; x та X–відносна координата та координата центра мас відповідно. Проаналізована алгебра інваріантності у кожному з випадків (0.1)–(0.6).

В § **1.2** досліджуються симетрійні властивості тривимірного двочастинкового рівняння Шродінгера для взаємодіючих частинок

$$L\psi = \left\{ -i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}^{\,2}}{m} + \frac{\vec{P}^{\,2}}{4m} + V(\vec{x}, \vec{X}) \right\} \psi = 0, \tag{0.7}$$

де $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$–компоненти вектора відносної координати та імпульса; $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$, $\vec{P} = (P_1, P_2, P_3)$– компоненти вектора координати та імпульса центра мас.

Знайдена алгебра інваріантності рівняння (0.7) для наступного класу потенціалів

$$V = \frac{c_1 x^2}{2} + c_2, \tag{0.8}$$

$$V = c_3 x + c_4, \tag{0.9}$$

$$V = d_a x_a, \tag{0.10}$$

$$V = f_a X_a, \tag{0.11}$$

$$V = d_a x_a + f_a X_a. \tag{0.12}$$

У § **1.3** показано, що між операторами симетрії вільного двочастинкового рівняння Шродінгера та операторами симетрії двочастинкового рівняння Шродінгера із взаємодією існує зв'язок. Знайдено оператори перетворення, за допомогою яких оператори симетрії, що допускають потенціали (0.2), (0.3), (0.10), (0.11), (0.12), зводяться до операторів симетрії, які відповідають вільному рівнянню Шродінгера. Явний вигляд операторів перетворення такий

$$\begin{aligned}
&U_1 = exp\{itxc_2 - \tfrac{i}{m}t^2pc_2\},\\
&U_2 = exp\{itXc_3 - \tfrac{i}{4m}t^2Pc_3\},\\
&U_3 = exp\{itx_ad_a - \tfrac{i}{m}t^2p_ad_a\},\\
&U_4 = exp\{itX_af_a - \tfrac{i}{4m}t^2P_af_a\},\\
&U_5 = exp\{(itx_ad_a - \tfrac{i}{m}t^2p_ad_a)(itX_bf_b - \tfrac{i}{4m}t^2P_bf_b)\}.
\end{aligned} \tag{0.13}$$

Зазначимо, що перетворення (0.13) редукують відповідні рівняння Шродінгера із взаємодією до вільного рівняння Шродінгера.

У другому розділі проведено симетрійний аналіз двочастинкових рівнянь з осциляторно–подібною взаємодією.

У § **2.1.1.** знайдені ліївські симетрії одновимірного двочастинкового рівняння Дірака з лінійним потенціалом взаємодії

$$L\psi = (H - \frac{1}{2}E)\psi \equiv \left\{[\beta_0, \beta_1]p + \frac{im\omega x\beta_1}{2} + \beta_0 m - \frac{1}{2}E\right\}\psi = 0, \quad (0.14)$$

де матриці β_0, β_1 задовольняють алгебрі КДП.

Теорема 0.1 *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (0.14) у класі диференційних операторів першого порядку є абелева алгебра, базисні елементи якої мають вигляд*

$$X_1 = (1 - \beta_0^2)(1 + \beta_1^2)f(x), \ \ X_2 = \beta_0^2 - \beta_1\beta_0^2\beta_1, \quad (0.15)$$

де $f(x)$–довільна функція.

У § **2.1.2.** досліджуються неліївські симетрії рівняння (0.14). Знайдено неліївські інтеграли руху вигляду

$$X_3 = p^2 + \frac{m^2\omega^2x^2}{4} - m\omega\beta_0, \ \ X_4 = (2\beta_0^2 - 1)P, \quad (0.16)$$

де P–оператор просторового відображення.

Рівняння (0.14) допускає приховані парасуперсиметрії вигляду

$$\hat{Q}_1 = Q, \quad \hat{Q}_2 = i(2\hat{\beta}_0^2 - 1)Q \quad H_{PSS} = X_3, \quad (0.17)$$

де

$$Q = [\beta_0, \beta_1]p + \frac{im\omega x\beta_1}{2}.$$

Оператори (0.17) генерують алгебраїчну структуру типову для парасуперсиметричної квантової механіки.

У § **2.1.3.** розв'язується задача на власні значення гамільтоніана рівняння (0.14). Одержано енергетичний спектр даної системи у вигляді

$$E^2 = 4m\omega(n + \frac{1}{2}) + 4m^2(1 + \frac{\omega}{E}), \quad (0.18)$$

де $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Використовуючи інваріантність рівняння (0.14) відносно дискретних операцій просторового відображення та зарядового спряження проведена редукція цього рівняння до чотирьох незалежних однокомпонентних рівнянь, які можна розв'язувати самостійно.

У § **2.2** розглядаються двочастинкові рівняння Дірака з осциляторно–подібною взаємодією вигляду

$$L_1\psi = (H - E)\psi \equiv \left\{[\beta_0, \beta_a](p_a + \frac{i\omega x_a \eta}{2}) + \beta_0 m - E\right\}\psi = 0, \qquad (0.19)$$

$$L_2\psi = (H - E)\psi \equiv \left\{[\beta_0, \beta_a](p_a + \frac{i\omega x_a \xi}{2}) + \beta_0 m - E\right\}\psi = 0, \qquad (0.20)$$

де

$$\eta = 1 - 2\beta_0^2, \;\; \xi = (1 - 2\beta_0^2)(1 - 2\beta_5^2), \qquad (0.21)$$

β_μ, $(\mu = 0, 1, 2, 3, 5)$–матриці КДП.

Зауважимо, що рівняння (0.19), (0.20) є релятивістськими узагальненнями квантового гармонічного осцилятора для спінорних частинок. Рівняння (0.19) називають двочастинковим осцилятором Дірака.

У § **2.2.1** досліджені лієвські симетрії рівнянь (0.19), (0.20).

Теорема 0.2 *Рівняння (0.19), (0.20) інваріантні відносно 6–параметричної групи Лі, генератори якої мають вигляд*

$$\begin{aligned} &J_a = \varepsilon_{abc}(x_b p_c + i\beta_b\beta_c), \;\; a = 1, 2, 3, \\ &Q_1 = (2\beta_\mu\beta^\mu - 3)(4\beta_\mu\beta^\mu - 7) \;\; \mu = 0, 1, 2, 3, \qquad (0.22) \\ &Q_2 = 2(4\beta_\mu\beta^\mu - 5)(2 - \beta_\mu\beta^\mu), \quad Q_3 = 1 - Q_1 - Q_2, \end{aligned}$$

(по μ розуміється коваріантне сумування).

У § **2.2.2** за допомогою перетворення подібності кожне з рівнянь (0.19), (0.20) зведене до трьох незалежних підсистем для 10–, 5– та 1–компонентної функції. Зауважимо, що у такому вигляді дані рівняння еквівалентні рівнянням КДП у формі Шродінгера із спеціальним потенціалом взаємодії, лінійним по координатам.

У § **2.2.3** знайдені неліївські інтеграли руху рівнянь (0.19) та (0.20).

Твердження 0.1 *Рівняння (0.19) допускає неліївські симетрії (інтеграли руху) вигляду*

$$Q_4 = \eta[2(\vec{S}\cdot\vec{J})^2 - 2\vec{S}\cdot\vec{J} - \vec{J}^{\,2}], \tag{0.23}$$

$$Q_5 = \mathbf{p}^2 + \frac{1}{4}\omega^2\mathbf{x}^2 + \frac{1}{2}\omega\eta, \tag{0.24}$$

$$Q_6 = -imS_{5a}L_a + i\varepsilon_{abc}S_{4a}S_{5b}(p_c + \frac{i}{2}\omega x_c\eta), \tag{0.25}$$

де

$$S_{\mu\nu} = i[\beta_\mu, \beta_\nu], \;\; S_{4\mu} = i\beta_\mu,$$

$$\beta_5 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\beta_\mu\beta_\nu\beta_\lambda\beta_\rho, \;\; \mu,\nu = 1,2,3,5.$$

Твердження 0.2 *Рівняння (0.20) допускає неліївські інтеграли руху, що задаються формулою (0.23) та*

$$Q_7 = \mathbf{p}^2 + \frac{1}{4}\omega^2\mathbf{x}^2 + \frac{1}{2}\omega\hat{\eta}, \tag{0.26}$$

де

$$\hat{\eta} = 3 - 2\beta_0^2 - 4\beta_5^2(1-\beta_0^2).$$

Проаналізовано алгебру, яку генерують оператори (0.22)–(0.26).

У § **2.2.4** показано, що рівняння (0.19), (0.20) допускають приховані парасуперсиметрії.

Твердження 0.3 *Приховані парасуперсиметрії рівняння (0.19)*

$$\hat{Q}_1 = [\beta_0, \beta_a](p_a + i\frac{\omega}{2}x_a\eta),$$

$$\hat{Q}_2 = i\eta\hat{Q}_1,$$

$$H_{PSS} = Q_5 + \omega(1-\beta_5^2)$$

задовольняють комутаційним співвідношенням, які характеризують парасуперсиметричну квантову механіку Рубакова–Спірідонова та Бекерса–Деберг.

Твердження 0.4 *Приховані парасуперсиметрії рівняння (0.20)*

$$\hat{Q}_1 = [\beta_0, \beta_a](p_a + i\frac{\omega}{2}x_a\xi),$$
$$\hat{Q}_2 = i[\beta_0, \hat{Q}_1],$$
$$H_{PSS} = \frac{1}{4}Q_7$$

реалізують зображення алгебри Бекерса–Деберг.

Зауваження 1 Гамільтоніан рівняння (0.20) є парасуперзарядом.

З цього автоматично випливає, що оператори

$$\hat{Q}_1 = H,$$
$$\hat{Q}_2 = i\xi H,$$
$$H_{PSS} = Q_7 + m^2$$

реалізують зображення алгебри симетрії парасуперсиметричної квантової механіки.

У §§ **2.2.5, 2.2.6** знайдено власні значення гамільтоніанів H рівнянь (0.19), (0.20).

Рівняння (0.19) та (0.20) описують систему двох діраковських частинок. Відомо, що така система має два спінові стани, що відповідають повному спіну $S = 0$ (парастани) та повному спіну $S = 1$ (ортостани).

Твердження 0.5 *Енергетичний спектр парастанів систем, що задаються рівнянннями (0.19), (0.20) має вигляд*

$$E = 0,$$
$$E = \pm\sqrt{N\omega + m^2},$$

де

$$N = 2n + j, \ \ n = 0, 1, 2, \dots \ \ j = 0, 1, \dots, N.$$

Твердження 0.6 *Можливі значення енергії ортостанів систем, що описуються рівнянням (0.19) визначаються формулами*

$$E = 0,$$
$$E = \pm\sqrt{(N+1)\omega + m^2}$$

для $\nu = -1$*;*
та

$$E^2\{E^2 - m^2 - (N+1)\omega\}\{E^2 - m^2 - (N+2)\omega\} = m^2\omega^2 j(j+1)$$

для $\nu = 1$*,*
де ν*–власне значення оператора* η *(0.21).*

Твердження 0.7 *Енергетичний спектр ортостанів систем, що описуються рівнянням (0.20) має вигляд*

$$E = 0,$$
$$E = \pm\sqrt{(N+2)\omega + m^2}.$$

У § **2.2.7** знайдено зв'язок між осцилятором Дірака (рівняння (0.19)) та осцилятором КДП. Осцилятор КДП визначається рівнянням

$$L\psi = \left\{-\beta_0 E + \beta_a(p_a + i\frac{\omega}{2}x_a\eta) + m\right\}\psi = 0. \qquad (0.27)$$

Твердження 0.8 *Перетворення подібності*

$$\psi \to \psi' = exp(i\beta_0\tfrac{\pi}{2})\psi,$$
$$L \to L' = exp(i\beta_0\tfrac{\pi}{2})Lexp(-i\beta_0\tfrac{\pi}{2})$$

редукує рівняння (0.27) до рівняння (0.19).

Запропоновано новий осцилятор КДП для опису векторних бозонів наступного вигляду

$$L\psi = \left\{\beta_0 E - \beta_a(p_a + i\frac{\omega}{2}x_a(2\beta_5^2 - 1)) - m\right\}\psi = 0. \qquad (0.28)$$

У § **2.2.8** побудовані перетворення ФВ, які діагоналізують гамільтоніани рівнянь (0.19), (0.20) та (0.28).

У § **2.2.9** розглянуто деякі моделі двочастинкових задач з осциляторно–подібною взаємодією. Запропоновано узагальнення рівнянь (0.14), (0.19) до двочастинкових рівнянь для довільного спіну з осциляторно–подібним потенціалом взаємодії.

Твердження 0.9 *Рівняння*

$$(H-E)\psi=0,\ \ H=S_1p+S_2\frac{m\omega x}{2}+S_3m, \tag{0.29}$$

$$(H-E)\psi=0,\ \ H=-iS_{0a}(p_a+i\frac{\omega}{2}x_a\eta)+iS_{04}m, \tag{0.30}$$

де довільні матриці S_a, та S_{0a}, S_{04}, $(a=1,2,3)$ реалізують зображення алгебр $AO(2,1)$ та $AO(1,4)$ відповідно, є узагальненням рівнянь (0.14) та (0.19) до двочастинкових рівнянь для довільного спіну.

Зауважимо, що рівняння (0.29) та (0.30) допускають ліївські та неліївські симетрії рівнянь (0.14) та (0.19) (для відповідних матриць S_a та S_{0a}, S_{04}).

Третій розділ присвячений побудові незвідних зображень парасупералгебри Пуанкаре.

У § **3.1** визначена парасупералгебра Пуанкаре та основні комутаційні співвідношення між операторами цієї алгебри.

У § **3.2** знайдено явний вигляд інваріантних операторів парасупералгебри Пуанкаре у формі

$$C_1=P_\mu P^\mu, \qquad C_2=P_\mu P^\mu B_\nu B^\nu-(B_\mu P^\mu)^2,$$

де

$$B_\mu=W_\mu+X_\mu,$$

W_μ–вектор Паулі–Любанського; X_μ є білінійною комбінацією парасуперзарядів.

В залежності від власних значень інваріантів C_1 та ε (ε–оператор знаку енергії) розглянуто такі основні класи незвідних зображень парасупералгебри Пуанкаре

$$I. \quad P_\mu P^\mu=M^2>0,\ \ \varepsilon=1, \tag{0.31}$$

$$\widetilde{I}. \quad P_\mu P^\mu=M^2>0,\ \ \varepsilon=-1, \tag{0.32}$$

$$II. \quad P_\mu P^\mu=0, \qquad \varepsilon=1, \tag{0.33}$$

$$\widetilde{II}. \quad P_\mu P^\mu=0, \qquad \varepsilon=-1, \tag{0.34}$$

$$III.\ \ P_\mu P^\mu = -\eta^2 < 0. \tag{0.35}$$

§ **3.3** присвячений побудові незвідних зображень парасуперал-гебри Пуанкаре для часоподібного 4–імпульса.

Теорема 0.3 *"Мала парасуперaлгебра Вігнера" для класів (0.31) та (0.32) зводиться до прямої суми алгебр*

$$AO(3) \oplus AO(5)$$

та

$$AO(3) \oplus AO(4,1).$$

За допомогою відповідного перетворення Лоренца знайдено явний вигляд генераторів парасупералгебри Пуанкаре у довільній системі відліку

$$\begin{aligned}
&P_0 = \varepsilon E, \qquad P_a = p_a,\\
&J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + \varepsilon_{abc} S_c,\\
&J_{0a} = x_0 p_a - \frac{i\varepsilon}{2}[\frac{\partial}{\partial p_a}, E]_+ - \varepsilon \frac{\varepsilon_{abc} p_b S_c}{E+M},\\
&Q_1 = \frac{1}{\sqrt{E+M}}[(S_{51} + iS_{52})(E + M + \varepsilon p_3) + \varepsilon(S_{53} + iS_{54})(p_1 - ip_2)],\\
&Q_2 = \frac{1}{\sqrt{E+M}}[\varepsilon(S_{51} + iS_{52})(p_1 + ip_2) + (S_{53} + iS_{54})(E + M - \varepsilon p_3)],\\
&\bar{Q}_A = Q_A{}^*,\ \ A, B = 1, 2,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
&E = \sqrt{M^2 + p^2},\ \ p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2},\\
&S_a = \varepsilon(j_a - \tfrac{1}{4}\varepsilon_{abc} S_{bc} - \tfrac{1}{2} S_{4a}),
\end{aligned} \tag{0.36}$$

j_a та S_{ab} – базисні елементи незвідних зображень алгебр $AO(3)$ та $AO(5)$, $(\varepsilon = 1)$ або $AO(4,1)$, $(\varepsilon = -1)$ відповідно; $[\cdot,\cdot]_+$ – антикомутатор відповідних операторів; зірочка означає комплексне спряження. У § **3.4** знайдено незвідні зображення парасупералгебри Пуанкаре для класів (0.33), (0.34).

Теорема 0.4 *"Мала парасуперадгебра Вігнера" для світлоподібного 4–імпульса зводиться до прямої суми алгебр*

$$AO(3) \oplus AE(2)$$

для випадку (0.33);

$$AO(2,1) \oplus AE(2)$$

для випадку (0.34).

Побудовано простір незвідних зображень парасуперадгебри для цих класів.

Загальний вигляд генераторів парасуперадгебри у довільній системі відліку задається формулами

$$P_0 = \varepsilon p, \qquad P_a = p_a,$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + T_0 \varepsilon_{abc} \frac{p_c + \delta_{c3} p}{p + p_3},$$

$$J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2}\varepsilon [p, x_a]_+ + \frac{\varepsilon_{abc} T_b p_c}{p^2} - \frac{\varepsilon_{abc} p_b n_c (\varepsilon T_0 p^2 - T_d p_d)}{p^2 (p + p_3)},$$

$$Q_1 = \sqrt{2(p+p_3)}(j_1 + i j_2), \quad \bar{Q}_1 = \sqrt{2(p+p_3)}(j_1 - i j_2),$$

$$Q_2 = \frac{\sqrt{2}(p_1 + i p_2)}{\sqrt{p + p_3}}(j_1 + i j_2), \;\; \bar{Q}_2 = \frac{\sqrt{2}(p_1 - i p_2)}{\sqrt{p + p_3}}(j_1 - i j_2),$$

де $\vec{\mathbf{n}} = (0,0,1)$, $T_3 = 0$, T_0, T_1, T_2 — генератори алгебри $AE(2)$, j_1, j_2 – генератори алгебри $AO(3)$, $(\varepsilon = 1)$ або $AO(2,1)$, $(\varepsilon = -1)$.

Знайдено також зображення парасуперадгебри Пуанкаре, що відповідає "універсальній" реалізації генераторів групи Пуанкаре (для довільного $\vec{\mathbf{n}} = (n_1, n_2, n_3)$).

У § **3.5** розглянуто випадок просторовоподібного 4–імпульса.

Теорема 0.5 *"Мала парасуперадгебра Вігнера" для класу (0.35) редукується до прямої суми алгебр*

$$AO(1,2) \oplus AO(2,3).$$

Незвідне зображення парасуперbegalгебри для просторовоподібного 4–імпульса реалізується наступними генераторами

$$P_\mu = p_\mu, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab},$$

$$J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2}[x_a, p_0]_+ + S_{0a},$$

$$J_{a3} = x_a p_3 - x_3 p_a - \frac{S_{ab}p_b - S_{a0}p_0}{p_3 + \eta},$$

$$J_{03} = x_0 p_3 - \frac{1}{2}[x_3, p_0]_+ - \frac{S_{0a}p_a}{p_3 + \eta},$$

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{\eta + p_3}}\left[(S_{51} + iS_{52})(\eta + p_3 + p_0) + (S_{53} + iS_{54})(p_1 - ip_2)\right],$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{\eta + p_3}}\left[-(S_{51} + iS_{52})(p_1 + ip_2) - (S_{53} + iS_{54})(\eta + p_3 - p_0)\right],$$

$$\bar{Q}_A = Q_A{}^*,$$

де

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 - \eta^2 \quad S_{12} = J_{12} - \frac{1}{2}(S_{12} + S_{34}),$$

$$S_{02} = J_{01} - \frac{1}{2}(S_{23} + S_{41}), \quad S_{01} = J_{02} + \frac{1}{2}(S_{31} + S_{42}),$$

$J_{\alpha\beta}$– базисні елементи алгебри $AO(1,2)$, S_{ab}–базисні елементи алгебри $AO(2,3)$.

У § **3.6** побудовані коваріантні зображення парасупералгебри Пуанкаре. Показано зв'язок цього зображення з основними класами незвідних зображень парасупералгебри.

Твердження 0.10 *Коваріантне зображення парасупералгебри Пуанкаре може бути реалізоване операторами*

$$P_\mu = p_\mu, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu},$$

$$Q_1 = -\sqrt{2M}(S_{51} - iS_{52}), \qquad Q_2 = \sqrt{2M}(S_{53} - iS_{54}),$$

$$\bar{Q}_1 = \sqrt{\tfrac{2}{M}}[(p_3 - p_0)(S_{51} + iS_{52}) + (p_1 + ip_2)(S_{53} + iS_{54})],$$

$$\bar{Q}_2 = \sqrt{\tfrac{2}{M}}[(p_0 + p_3)(S_{53} + iS_{54}) + (p_1 - ip_2)(S_{51} + iS_{52})],$$

де $S_{\mu\nu}$–числові матриці, які виберемо у вигляді

$$S_{ab} = \varepsilon_{abc}S_c, \qquad S_{0a} = -iS_a,$$

S_a визначені у (0.36).

Фізична інтерпретація побудованих зображень розглядається у § **3.7**. У додатку дано короткий опис незвідних зображень групи $O(5)$. У висновках сформульовані основні результати дисертаційної роботи.

Основні положення та результати, викладені в дисертації, доповідались на семінарах кафедри теоретичної фізики Київського університету, відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України, на IV міжнародній конференції ім. акад. М. Кравчука, (Київ, 1995), на науковій конференції "Сучасні фізико–математичні дослідження молодих науковців вузів України" в Київському університеті, (Київ, 1995), на міжнародній конференції "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", (Київ, 1995), на всеукраїнській науковій конференції " Розробка та застосування математичних методів в науково–технічних дослідженнях", (Львів, 1995).

По темі дисертації опубліковано 5 друкованих робіт [16, 17, 18, 91, 107].

Користуючись нагодою висловлюю щиру подяку моєму науковому керівникові доктору фізико–математичних наук А.Г.Нікітіну за постановку задач та постійну увагу до роботи. Я також вдячна член–кореспонденту НАН України В.І.Фущичу за корисні поради та підтримку.

Розділ 1

Симетрія двочастинкового рівняння Шродінгера із взаємодією

У цьому розділі вивчаються симетрії двочастинкового рівняння Шродінгера (РШ) для взаємодіючих частинок. Знайдені оператори симетрії (ОС) I–го порядку для різних потенціалів. Показано зв'язок між алгеброю інваріантності вільного РШ та РШ із взаємодією. Деякі результати цього розділу викладені у роботі [107].

1.1 Одновимірне двочастинкове рівняння Шродінгера

Розглянемо динаміку двох взаємодіючих безспінових частинок однакової маси у одному вимірі. Рівняння руху такої системи має вигляд

$$L\psi = \left(-i\frac{\partial}{\partial_t} + \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(x_1, x_2)\right)\psi = 0, \tag{1.1}$$

де x_1, p_1 та x_2, p_2 – координата і імпульс першої та другої частинки відповідно.

Перейшовши до нових змінних (змінних центра мас)

$$\begin{aligned} &x = x_1 - x_2,\ \ X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ &p = \frac{p_1 - p_2}{2},\ \ P = p_1 + p_2, \end{aligned} \tag{1.2}$$

одержимо замість (1.1)

$$L\psi = \left(-i\frac{\partial}{\partial_t} + \frac{p^2}{m} + \frac{P^2}{4m} + V(x,X)\right)\psi = 0, \tag{1.3}$$

Дослідимо симетрію рівняння (1.3). Згідно [66] будемо шукати ОС першого порядку рівняння (1.3) у вигляді

$$Q = F(x,X,t)p + G(x,X,t)P + K(x,X,t). \tag{1.4}$$

З умови інваріантності

$$[Q,L] = 0, \tag{1.5}$$

де L–диференційний оператор (1.3), одержимо систему визначальних рівнянь

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0, \tag{1.7}$$

$$4\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \tag{1.8}$$

$$-i\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{2i}{m}\frac{\partial K}{\partial x} - \frac{1}{4m}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \tag{1.9}$$

$$-i\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{i}{2m}\frac{\partial K}{\partial x} - \frac{1}{m}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0, \tag{1.10}$$

$$-i\frac{\partial K}{\partial t} + iF\frac{\partial V}{\partial x} + iG\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{m}\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{1}{4m}\frac{\partial^2 K}{\partial X^2} = 0, \tag{1.11}$$

Загальний розв'язок системи рівнянь (1.6)–(1.11) визначає явний вигляд потенціалів, що допускають ОС I–го порядку та явний вигляд відповідних ОС.

Обмежимось аналізом потенціалів вигляду

$$V = c_1 \tag{1.12}$$

$$V = c_2 x \tag{1.13}$$

$$V = c_3 X \tag{1.14}$$

$$V = c_4 x^2 \tag{1.15}$$

$$V = \frac{c_5}{x^2} \tag{1.16}$$

$$V = c_6 x X, \tag{1.17}$$

де $c_a, a = \overline{1,6}$–довільні константи.

У випадку (1.12) задача зводиться до опису ОС вільного РШ. Явний вигляд ОС задається такими співвідношеннями

$$\begin{aligned} &Q_1 = tp - \tfrac{m}{2}x, \;\; Q_2 = \tfrac{1}{2}(tP - 2mX), \\ &Q_3 = \tfrac{1}{2}(xP - 4Xp), \;\; Q_4 = I, \;\; Q_5 = p, \;\; Q_6 = \tfrac{1}{2}P, \end{aligned} \tag{1.18}$$

де I–одиничний оператор.

Оператори (1.18) утворюють алгебру Лі, комутаційні співвідношення якої мають вигляд

$$\begin{aligned} &[Q_1, Q_5] = -\tfrac{i}{2}mQ_4, \;\; [Q_2, Q_6] = -\tfrac{i}{2}mQ_4, \\ &[Q_3, Q_1] = iQ_2, \qquad [Q_3, Q_5] = iQ_6, \\ &[Q_3, Q_2] = -iQ_1, \qquad [Q_3, Q_6] = -iQ_5, \end{aligned} \tag{1.19}$$

(всі інші можливі комутаційні співвідношення дорівнюють нулю).

Відмітимо, що алгебра (1.19) містить дві підалгебри $AE(2)$, які породжуються операторами $Q_1, \;\; Q_2, \;\; Q_3$ та $Q_3, \;\; Q_5, \;\; Q_6$ відповідно.

Потенціал (1.13) допускає такі ОС І–го порядку

$$\begin{aligned} &Q_1 = \tfrac{2}{m}(Q_3 Q_5 - Q_2 Q_6) = \tfrac{1}{2}(-4Xp + xP + \tfrac{c_2}{m}t^2 P - 4c_2 tX), \\ &Q_2 = c_2(tp + \tfrac{1}{2}t^2) - \tfrac{m}{2}x, \;\; Q_3 = p + c_2 t, \;\; Q_4 = I, \\ &Q_5 = \tfrac{1}{2}(tP - 2mX), \;\; Q_6 = \tfrac{1}{2}P. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Оператори (1.20) утворюють 6–вимірну алгебру Лі, комутаційні співвідношення якої мають вигляд

$$\begin{aligned} &[Q_1, Q_2] = iQ_5, \qquad [Q_2, Q_3] = -\tfrac{i}{2}mQ_4, \\ &[Q_1, Q_3] = iQ_6, \qquad [Q_5, Q_6] = -\tfrac{i}{2}mQ_4, \\ &[Q_1, Q_5] = -iQ_2, \;\; [Q_1, Q_6] = -iQ_3, \end{aligned} \tag{1.21}$$

(всі інші можливі комутатори відповідних ОС дорівнюють нулю).

Алгебра (1.21) також містить дві підалгебри групи Евкліда $AE(2)$, що утворюються операторами $Q_1,\ \ Q_2,\ \ Q_5$ та $Q_1,\ \ Q_3,\ \ Q_6$ відповідно.

Для випадку (1.13) одержимо наступний набір ОС I–го порядку

$$\begin{aligned}
&Q_1 = \frac{2}{m}(Q_3Q_5 - Q_2Q_6) = \frac{1}{2}(xP - 4Xp - \frac{c_3}{m}t^2p + c_3tx),\\
&Q_2 = \frac{1}{2}(c_3tP + \frac{1}{2}c_3t^2 - 2mX),\ \ Q_3 = \frac{1}{2}(P + c_3t),\ \ Q_4 = 4I,\\
&Q_5 = \frac{1}{2}mx - tp,\ \ Q_6 = -p.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Оператори (1.22) утворюють алгебру (1.21).

У випадку (1.15) ОС мають вигляд

$$\begin{aligned}
&Q_1 = I,\ \ Q_2 = tP - 2mX,\ \ Q_3 = P,\\
&Q_4 = cos\left(\sqrt{\frac{2c_4}{m}}t\right)p + \sqrt{\frac{mc_4}{2}}sin\left(\sqrt{\frac{2c_4}{m}}t\right)x,\\
&Q_5 = sin\left(\sqrt{\frac{2c_4}{m}}t\right)p - \sqrt{\frac{mc_4}{2}}cos\left(\sqrt{\frac{2c_4}{m}}t\right)x.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Оператори (1.23) утворюють алгебру Лі, комутаційні співвідношення якої мають вигляд

$$[Q_2, Q_3] = -2miQ_1,\ \ [Q_4, Q_5] = iQ_1\sqrt{2mc_4}. \tag{1.24}$$

(всі інші можливі комутатори дорівнюють нулю).

Потенціал (1.16) допускає ОС вигляду

$$Q_1 = I,\ \ Q_2 = tP - 2mX,\ \ Q_3 = P. \tag{1.25}$$

У випадку (1.17) одержимо наступний набір ОС

$$\begin{aligned}
&Q_1 = I,\\
&Q_2 = cos\left(\sqrt{\tfrac{c_6}{m}}t\right)P + 2cos\left(\sqrt{\tfrac{c_6}{m}}t\right)p + 2\sqrt{mc_6}sin\left(\sqrt{\tfrac{c_6}{m}}t\right)X + \sqrt{mc_6}sin\left(\sqrt{\tfrac{c_6}{m}}t\right)x,\\
&Q_3 = sin\left(\sqrt{\tfrac{c_6}{m}}t\right)P + 2sin\left(\sqrt{\tfrac{c_6}{m}}t\right)p - 2\sqrt{mc_6}cos\left(\sqrt{\tfrac{c_6}{m}}t\right)X - \sqrt{mc_6}cos\left(\sqrt{\tfrac{c_6}{m}}t\right)x,\\
&Q_4 = ch\left(\sqrt{\tfrac{c_6}{m}}t\right)P - 2ch\left(\sqrt{\tfrac{c_6}{m}}t\right)p - 2\sqrt{mc_6}sh\left(\sqrt{\tfrac{c_6}{m}}t\right)X + \sqrt{mc_6}sh\left(\sqrt{\tfrac{c_6}{m}}t\right)x,\\
&Q_5 = sh\left(\sqrt{\tfrac{c_6}{m}}t\right)P - 2sh\left(\sqrt{\tfrac{c_6}{m}}t\right)p - 2\sqrt{mc_6}ch\left(\sqrt{\tfrac{c_6}{m}}t\right)X + \sqrt{mc_6}ch\left(\sqrt{\tfrac{c_6}{m}}t\right)x.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Оператори (1.26) задовольняють алгебрі

$$[Q_2, Q_3] = 4i\sqrt{mc_6}Q_1, \;\; [Q_4, Q_5] = 4i\sqrt{mc_6}Q_1, \tag{1.27}$$

(всі інші комутаційні співвідношення дорівнюють нулю).

1.2 Оператори симетрії тривимірного двочастинкового рівняння Шродінгера

Розглянемо тривимірне двочастинкове РШ

$$L\psi = \left(-i\frac{\partial}{\partial_t} + \frac{\vec{p}^{\,2}}{m} + \frac{\vec{P}^{\,2}}{4m} + V(\vec{x}, \vec{X}) \right) \psi = 0, \tag{1.28}$$

де $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$–компоненти вектора відносної координати та імпульса; $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$, $\vec{P} = (P_1, P_2, P_3)$– компоненти вектора координати та імпульса центра мас.

Оператор симетрії рівняння (1.28) шукаємо у вигляді

$$Q = F^a(\vec{x}, \vec{X}, t)p_a + G^2(\vec{x}, \vec{X}, t)P_a + K(\vec{x}, \vec{X}, t). \tag{1.29}$$

Підставляючи L з (1.28) та Q з (1.29) в умову інваріантності (1.5) і прирівнюючи коефіцієнти при лінійно незалежних операторах диференціювання, одержимо наступну систему визначальних рівнянь

$$\begin{aligned}
&p^{(a}F^{b)} \equiv p^aF^b + p^bF^a = 0, \;\text{ для } \forall a, b; \;\; p^aF^b \equiv \frac{\partial F^b}{\partial x_a} \\
&P^{(a}G^{b)} = 0, \\
&P^aF^b + 4p^bG^a = 0, \\
&-i\frac{\partial F^a}{\partial t} + \frac{2}{m}\left(p^aK\right) + \frac{1}{m}\left(p^2F^a\right) + \frac{1}{4m}\left(P^2F^a\right) = 0, \\
&-i\frac{\partial G^a}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(P^aK\right) + \frac{1}{m}\left(p^2G^a\right) + \frac{1}{4m}\left(P^2G^a\right) = 0, \\
&-i\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{1}{m}\left(p^2K\right) - F^a\left(p^aV\right) - G^a\left(P^aV\right) = 0.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Знайдено загальний розв'язок системи (1.30) для потенціалів

$$V = \frac{c_1x^2}{2} + c_2 \tag{1.31}$$

$$V = c_1 x + c_2 \tag{1.32}$$

$$V = d_a x_a \tag{1.33}$$

$$V = d_a X_a \tag{1.34}$$

$$V = f_a x_a + \rho_a X_a \tag{1.35}$$

Потенціал гармонічного осцилятора (1.31) допускає наступний набір ОС

$$\begin{gathered} Q_a^1 = p_a cos\left(\sqrt{\frac{2c_1}{m}}t\right) + x_a\sqrt{\frac{mc_1}{2}}sin\left(\sqrt{\frac{2c_1}{m}}t\right), \\ Q_a^2 = p_a sin\left(\sqrt{\frac{2c_1}{m}}t\right) + x_a\sqrt{\frac{mc_1}{2}}cos\left(\sqrt{\frac{2c_1}{m}}t\right), \\ Q_a^3 = \varepsilon_{abc}x_b p_c, \;\; Q_a^4 = \varepsilon_{abc}X_b P_c, \;\; Q^5 = I, \\ Q_a^6 = tP_a - 2mX_a, \;\; Q_a^7 = P_a. \end{gathered} \tag{1.36}$$

Оператори (1.36) утворюють алгебру Лі, що є прямим добутком алгебри Галілея: Q_a^4, Q^5, Q_a^6, Q_a^7 та 9–вимірної алгебри Лі: Q_a^1, Q_a^2, Q_a^3. Цей результат є наслідком того, що задачу про рух двох частинок у центрально–симетричному полі можна звести до двох незалежних задач: 1) до задачі , що описує рух центра інерції; 2) до задачі, що описує відносний рух частинок (або рух частинки маси m у центрально–симетричному полі $V(x)$). Оператори Q_a^1, Q_a^2, Q_a^3, Q^5 були одержані раніше [12] при аналізі симетрій одночастинкового РШ з потенціалом (1.31).

Аналогічно попередньому, центрально–симетричний потенціал (1.32) допускає ОС, які утворюють 13–вимірну алгебру Лі. Ця алгебра є прямим добутком алгебри $AO(3) \supset Q_a^3$ та алгебри Галілея $AG(1,3) \supset Q_a^4$, Q^5, Q_a^6, Q_a^7. (Оператори Q_a^3, Q_a^4, Q^5, Q_a^6, Q_a^7 визначені у (1.36)).

Зауважимо, що випадок, коли $V = const$, відповідає вільному РШ. ОС в цьому разі мають вигляд [66] добутку двох алгебр Галілея $AG(1,3) \supset Q_a^3$, Q_a^8, Q_a^9 та $AG_2(1,3) \supset Q_a^4$, Q_a^6, Q_a^7 (доповнені одиничним оператором), де

$$Q_a^8 = tp_a - \frac{m}{2}x_a, \;\; Q_a^9 = p_a,$$

а оператори Q_a^3, Q_a^4, Q_a^6, Q_a^7 визначені у (1.36).

Потенціали (1.33), (1.34) допускають ОС вигляду

$$
\begin{aligned}
&Q_a^1 = -\frac{1}{2m}\varepsilon_{abc}Q_b^2Q_c^3 = -\frac{t^2}{m}\varepsilon_{abc}p_bd_c + \varepsilon_{abc}x_bp_c + t\varepsilon_{abc}x_bd_c,\\
&Q_a^2 = 2tp_a - mx_a + d_at^2,\ \ Q_a^3 = p_a + d_at,\\
&Q_a^4 = tP_a - 2mX_a,\ \ Q_a^5 = P_a,\\
&Q_a^6 = \varepsilon_{abc}X_bP_c,\ \ Q^7 = I,
\end{aligned}
\tag{1.37}
$$

для потенціала (1.33);

$$
\begin{aligned}
&Q_a^1 = \frac{1}{2m}\varepsilon_{abc}Q_b^2Q_c^3 = \frac{t^2}{4m}\varepsilon_{abc}P_bd_c - \varepsilon_{abc}X_bP_c - t\varepsilon_{abc}X_bd_c,\\
&Q_a^2 = \frac{1}{2}tP_a + \frac{1}{4}d_at^2 - mX_a,\ \ Q_a^3 = P_a + d_at,\\
&Q_a^4 = 4tp_a - 2mx_a,\ \ Q_a^5 = p_a,\\
&Q_a^6 = \varepsilon_{abc}x_bp_c,\ \ Q^7 = I,
\end{aligned}
\tag{1.38}
$$

для потенціала (1.34).

Оператори (1.37), (1.38) утворюють 19–вимірну алгебру Лі, комутаційні співвідношення якої мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&[Q_a^1, Q_b^1] = i\varepsilon_{abc}Q_c^1,\ \ [Q_a^2, Q_b^3] = -im\delta_{ab}Q^7,\\
&[Q_a^1, Q_b^2] = i\varepsilon_{abc}Q_c^2,\ \ [Q_a^4, Q_b^5] = -2im\delta_{ab}Q^7,\\
&[Q_a^1, Q_b^3] = i\varepsilon_{abc}Q_c^3,\ \ [Q_a^4, Q_b^6] = i\varepsilon_{abc}Q_c^4,\\
&[Q_a^5, Q_b^6] = i\varepsilon_{abc}Q_c^5,\ \ [Q_a^6, Q_b^6] = i\varepsilon_{abc}Q_c^6,
\end{aligned}
\tag{1.39}
$$

(всі інші можливі комутаційні співвідношення дорівнюють нулю).

Алгебра (1.39) доповнена нульовими комутаторами містить підалгебри $AO(3) \supset Q_a^1$; Гейзенберга $H(3) \supset Q_a^2$, Q_a^3; $AG(1,3) \supset Q_a^4$, Q_a^5, Q_a^6, Q^7. Структуру цієї алгебри можна схематично подати у вигляді

$$
[AO(3) \supset\!\!\!\!+ H(3)] \oplus AG(1,3) \tag{1.40}
$$

де $\supset\!\!\!\!+$–напівпряма сума алгебр; $\oplus$–пряма сума відповідних алгебр.

У випадку (1.35) одержимо наступний набір ОС I–го порядку

$$
\begin{aligned}
&Q^1_a = \frac{1}{m}\varepsilon_{abc}Q^3_bQ^5_c = \frac{t^2}{m}\varepsilon_{abc}p_bf_c - \varepsilon_{abc}x_bp_c - t\varepsilon_{abc}x_bf_c,\\
&Q^2_a = \frac{1}{4m}\varepsilon_{abc}Q^4_bQ^6_c = \frac{t^2}{4m}\varepsilon_{abc}P_b\rho_c - \varepsilon_{abc}X_bP_c - t\varepsilon_{abc}X_b\rho_c,\\
&Q^3_a = tp_a - \frac{1}{2}mx_a + \frac{1}{2}f_at^2,\\
&Q^4_a = tP_a - 2mX_a + \frac{1}{2}\rho_at^2,\\
&Q^5_a = p_a + f_at,\ \ Q^6_a = P_a + \rho_at,\ \ Q^7 = I.
\end{aligned}
\tag{1.41}
$$

Структура алгебри (1.41) визначається виразом

$$
[AO_1(3) \niplus H_1(6)] \oplus [AO_2(3) \niplus H_2(6)] \oplus Q^7, \tag{1.42}
$$

де

$$
\begin{aligned}
&AO_1(3) \supset Q^1_a,\ \ AO_2(3) \supset Q^2_a,\\
&H_1(6) \supset Q^3_a, Q^5_a,\ \ H_2(6) \supset Q^4_a, Q^6_a.
\end{aligned}
$$

1.3 Зв'язок між операторами симетрії вільного рівняння Шродінгера та рівняння Шродінгера із взаємодією

Покажемо, що ОС вільного одновимірного та тривимірного двочастинкового РШ пов'язані з ОС відповідних РШ із взаємодією перетворенням подібності.

Справді, неважко перевірити, що ОС (1.20), (1.22), (1.37), (1.38), (1.41) зводяться до ОС відповідних вільних РШ (для $V = 0$, або $V = const$) за допомогою перетворень

$$
\begin{aligned}
&\tilde{Q} = U_AQU_A^{-1},\ \ A = \overline{1,5},\ \ U^{-1} = U^*,\\
&U_1 = exp\{itc_2x - \frac{i}{m}t^2c_2p\}\\
&U_2 = exp\{itc_3X - \frac{i}{4m}t^2c_2P\}
\end{aligned}
$$

$$U_3 = exp\{itd_a x_a - \frac{i}{m}t^2 d_a p_a\}$$

$$U_4 = exp\{itd_a X_a - \frac{i}{4m}t^2 d_a P_a\}$$

$$U_5 = exp\{(itf_a x_a - \frac{i}{m}t^2 f_a p_a)(it\rho_b X_b - \frac{i}{4m}t^2 \rho_b P_b)\}.$$

Це означає, що відповідні РШ редукуються до вільного РШ.

Розділ 2

Симетрійний аналіз двочастинкових рівнянь з осциляторно–подібною взаємодією.

У цьому розділі досліджуються симетрії та парасуперсиметрії релятивістських двочастинкових рівнянь з осциляторно–подібною взаємодією. Такі потенціали виникають при вивченні руху частинок у однорідному електричному та магнітному полі, а в останні роки знайшли застосування до опису динаміки кварків.

У параграфі 2.1 вивчаються лiївськi та нелiївськi симетрiї одновимірного двочастинкового рівняння Дірака з лінійною взаємодією. Знайдено максимальну алгебру інваріантності у класі диференційних операторів першого порядку. Алгебраїчним методом одержано нелiївськi симетрiї та iнтеграли руху. Вивчено зв'язок даного рівняння з PSQM. Використовуючи парасуперсиметрії, розв'язано задачу на власні значення гамільтоніану. Інваріантність даної моделі відносно дискретних симетрій дала змогу звести 4–компонентне двочастинкове рівняння Дірака в одному вимірі до системи з чотирьох незалежних однокомпонентних рівнянь.

У параграфі 2.2 досліджуються приховані симетрії двочастинкових рівнянь Дірака з осциляторно–подібною взаємодією. Ці рівняння є двочастинковим узагальненням осцилятора Дірака. Проведена редукція цих рівнянь до трьох незалежних підсистем для 10–, 5– та 1–компонентної функції. У такому вигляді рівняння мають чітку фізичну інтерпретацію і зручніші для дослідження. Знайдено, що максимальною алгеброю інваріантності в сенсі Лі є шестипараметрична алгебра. Показано, що двочастинкові рівняння з осциляторно–подібною взаємодією допускають неліївські інтеграли руху та парасуперсиметрії. Використовуючи знайдені неліївські симетрії та алгебраїчний метод розв'язана задача на власні значення відповідних гамільтоніанів. Парасуперсиметрії даних рівнянь дали змогу побудувати перетворення ФВ. Проаналізовано зв'язок між розглянутими моделями та парарелятивістським квантовим осцилятором і осцилятором КДП. Запропоновано нову версію осцилятора КДП для опису векторних бозонів. Зроблено узагальнення двочастинкового осцилятора Дірака до двочастинкових рівнянь довільного спіну з осциляторно–подібним потенціалом.

Основні результати цього розділу опубліковані у роботах [16, 17].

2.1 Симетрія одновимірного двочастинкового рівняння Дірака з лінійною взаємодією.

2.1.1 Ліївські симетрії

Розглянемо рівняння Дірака з лінійною взаємодією в одновимірному просторі для двох взаємодіючих частинок з однаковими масами [62]. У системі центра мас це рівняння для стаціонарних станів має вигляд

$$\begin{aligned} L\psi &\equiv (H-E)\psi = \\ &= \left\{(\alpha_1-\alpha_2)p + m(\beta_1+\beta_2) - \frac{im\omega}{2}(\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2)x - E\right\}\psi = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

де p, x – відносний імпульс та координата системи, ω – частота,

$$\begin{gathered}\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Для спрощення подальших обчислень за допомогою перетворення

$$\psi \to \psi' = \beta_2 \psi, \quad L \to L' = \beta_2 L \beta_2 \tag{2.3}$$

перейдемо до еквівалентного рівняння

$$L'\psi' \equiv (H - \frac{1}{2}E)\psi' = \left\{ [\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1]p + \frac{im\omega x\hat{\beta}_1}{2} + \hat{\beta}_0 m - \frac{1}{2}E \right\} \psi' = 0, \tag{2.4}$$

де

$$\begin{gathered}\gamma_0^{(i)} = \beta_i, \;\; \gamma_1^{(i)} = \beta_i \alpha_i, \;\; \hat{\beta}_a = \tfrac{1}{2}(\gamma_a^{(1)} + \gamma_a^{(2)}), \\ [\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1] = \hat{\beta}_0\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_1\hat{\beta}_0, \;\; i = 1, 2, \;\; a = 0, 1.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Матриці $\hat{\beta}_a$ задовольняють алгебрі КДП

$$\hat{\beta}_a\hat{\beta}_b\hat{\beta}_c + \hat{\beta}_c\hat{\beta}_b\hat{\beta}_a = g_{ab}\hat{\beta}_c + g_{bc}\hat{\beta}_a, \;\; g_{00} = -g_{11} = 1. \tag{2.6}$$

Дослідимо симетрію рівняння (2.4). Використовуючи неліївський метод [66], можна довести, що

Теорема 2.1 *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (2.4) у класі диференційних операторів першого порядку є абелева алгебра, базисні елементи якої мають вигляд*

$$X_1 = (1 - \hat{\beta}_0^2)(1 + \hat{\beta}_1^2)f(x), \;\; X_2 = \hat{\beta}_0^2 - \hat{\beta}_1\hat{\beta}_0^2\hat{\beta}_1, \tag{2.7}$$

де $f(x)$–довільна функція.

ДОВЕДЕННЯ. Оператор симетрії шукаємо у вигляді

$$Q = \lambda(x)Tp + B(x), \tag{2.8}$$

де $\lambda(x)$ – невідома функція, T – тотожна матриця, $B(x)$ – невідома матриця. Згідно [66] оператор (2.8) має задовольняти умові інваріантності

$$[Q, L'] = \alpha(x)L', \tag{2.9}$$

де L' подано у (2.4), $\alpha(x)$ – невідома функція. Підставивши (2.4) та (2.8) у (2.9), одержимо систему визначальних рівнянь для невідомих функцій $\lambda(x)$, $\alpha(x)$ та $B(x)$

$$\begin{aligned} &-i[\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1]\frac{\partial\lambda}{\partial x} + [[\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1], B] = \alpha[\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1];\\ &-\frac{m\omega\lambda}{2}\hat{\beta}_1 - i[\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1]\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{im\omega x}{2}[\hat{\beta}_1, B] + m[\hat{\beta}_0, B] =\\ &= \alpha\{\frac{im\omega x}{2}\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_0 m\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Розв'язавши систему (2.10), знайдемо

$$\begin{aligned} &\alpha(x) = \lambda(x) = 0,\\ &B(x) = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & i & f(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

де c_1 – константа.

Підставивши (2.11) у (2.8) одержимо загальний вираз для оператора симетрії рівняння (2.4), який, як легко пересвідчитись є лінійною комбінацією операторів (2.7). Отже, оператори (2.7) дійсно утворюють алгебру інваріантності рівняння (2.4).

2.1.2 Неліївські інтеграли руху та парасуперсиметрії

Для знаходження неліївських симетрій зобразимо гамільтоніан рівняння (2.4) у формі

$$H = Q + \hat{\beta}_0 m, \tag{2.12}$$

де

$$Q = [\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1]p + \frac{im\omega\hat{\beta}_1 x}{2}. \tag{2.13}$$

Проаналізуємо трилінійні співвідношення для операторів H та Q. Прямим обчисленням знайдемо, що

$$Q^3 = QX_3, \quad X_3 = p^2 + \frac{m^2\omega^2 x^2}{4} - m\omega\hat{\beta}_0, \tag{2.14}$$

$$H^3 = (X_3 + m^2)H + \frac{m^2\omega}{2}X_2, \tag{2.15}$$

де X_2 – ліївський оператор симетрії, визначений у (2.7). Оскільки X_3 комутує з $\hat{\beta}_0$ то, з (2.14), (2.12) випливає, що

$$[X_3, H] = 0. \tag{2.16}$$

Отже, X_3 є неліївським інтегралом руху рівняння (2.4). Крім того, легко переконатись, що рівняння (2.4) інваріантне відносно віддзеркалення координати

$$\psi'(x) \rightarrow X_4\psi'(x), \;\; X_4 = (2\hat{\beta}_0^2 - 1)P, \tag{2.17}$$

де P – оператор просторового відображення, тобто

$$P\psi(x) = \psi(-x). \tag{2.18}$$

Відмітимо, що оператори X_3 та X_4 утворюють двовимірну абелеву алгебру.

Рівняння (2.4) допускає приховані парасуперсиметрії, які генерують структуру типову для PSQM.

В літературі відомо два підходи до побудови PSQM. Запропонована Рубаковим та Спірідоновим версія PSQM [96] характеризується парасуперaлгеброю, яка включає непарні елементи – парасуперзаряди Q_A та парний елемент – парасупергамільтоніан H_{PSS}. Комутаційні співвідношення між елементами парасуперaлгебри мають вигляд [63]

$$\begin{gathered}[H_{PSS}, \hat{Q}_A] = 0, \;\; A, B, C = 1, 2,\\ \{\hat{Q}_A, \{\hat{Q}_B, \hat{Q}_C\} - 2\delta_{BC}H_{PSS}\} + \{\hat{Q}_B, \{\hat{Q}_C, \hat{Q}_A\} - 2\delta_{CA}H_{PSS}\} + \\ + \{\hat{Q}_C, \{\hat{Q}_A, \hat{Q}_B\} - 2\delta_{AB}H_{PSS}\} = 0.\end{gathered} \tag{2.19}$$

де $\{A, B\} \equiv AB + BA$.

Ця теорія відповідає так–званим Ξ – подібним квантово–механічним системам [75, 102]. Інша версія PSQM була сформульована Бекерсом та Деберг [42]. Парасупергамільтоніан цієї теорії можна інтерпретувати як гамільтоніан трирівневої квантово–механічної системи з V – подібною конфігурацією рівнів [75, 102]. Парасуперaлгебра Бекерса–Деберг характеризується такими комутаційними співвідношеннями

$$\begin{aligned}
&[H_{PSS}, \hat{Q}_A] = 0, \;\; A, B, C = 1, 2, \\
&[\hat{Q}_A, [\hat{Q}_B, \hat{Q}_C]] = 4(\delta_{AB}\hat{Q}_C - \delta_{AC}\hat{Q}_B)H_{PSS},
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Відмітимо, що алгебра (2.20) містить подвійні комутатори замість антикомутаторів як у (2.19).

Враховуючи (2.14), побудуємо ермітові парасуперзаряди

$$\hat{Q}_1 = Q, \;\; \hat{Q}_2 = i(2\hat{\beta}_0^2 - 1)Q \tag{2.21}$$

та парасупергамільтоніан

$$H_{PSS} = X_3 \tag{2.22}$$

Справді, оператори (2.21), (2.22) задовольняють комутаційним співвідношенням (2.19) та (2.20). Іншими словами гамільтоніан рівняння (2.4) пов'язаний з двома типами PSQM: Рубакова–Спірідонова та Бекерса–Деберг.

2.1.3 Задача на власні значення, дискретні симетрії та редукція рівняння (2.4)

Застосуємо одержані у попередніх параграфах лiївські та нелiївські симетрії до розв'язку задачі на власні значення гамільтоніану рівняння (2.4).

Розглянемо співвідношення (2.15). Так як X_2 та X_3 – інтеграли руху (2.4) і крім того

$$[X_1, X_3] = 0, \tag{2.23}$$

то ми можемо записати аналог співвідношення (2.15) для власних значень операторів X_2, X_3 та H

$$E^3 = 4E[\omega m(n + \frac{1}{2}) - m\omega\varepsilon_1 + m^2] + 4m^2\omega\varepsilon_2, \tag{2.24}$$

де $n = 0, 1, 2, \ldots$; ε_1, ε_2 – власні значення матриць $\hat{\beta}_0$ та X_2 відповідно. (явний вигляд цих матриць подано у (2.2), (2.5) та (2.7)).

Використовуючи нерелятивістське наближення, можна показати, що $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$. В результаті одержимо енергетичний спектр у вигляді

$$E^2 = 4m\omega(n + \frac{1}{2}) + 4m^2(1 + \frac{\omega}{E}). \tag{2.25}$$

Відмітимо, що формула (2.25) добре узгоджується з результатом роботи [62], в якій задача була розв'язана аналітично.

Рівняння (2.4) – чотирьохкомпонентне. Покажемо, як за допомогою неліївських симетрій (дискретних симетрій) можна звести це рівняння до чотирьох незалежних однокомпонентних рівнянь, які можна розв'язувати самостійно.

Як зазначалося вище, рівняння (2.4) допускає оператор дискретної симетрії X_4 з (2.17). Побудуємо оператор, який діагоналізує (2.17) [89]

$$U_1^{\pm} = I_2 \otimes I_2 P_+ \mp I_2 \otimes i\sigma_2 P_-, \ \ P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm P), \tag{2.26}$$

де $A \otimes B$ – прямий добуток матриць A та B; I_2 – одинична матриця порядку 2×2; σ_2 – матриця Паулі; P визначено у (2.18).

Згідно загальній теорії, запропонованій у [89] рівняння (2.4) редукується до двох незалежних підсистем за допомогою оператора (2.26)

$$\tilde{L}' = U_1^+ L' U_1^- \equiv \begin{pmatrix} L_+ & 0 \\ 0 & L_- \end{pmatrix}, \tag{2.27}$$

де

$$\begin{aligned} L_{\pm} = \pm(\sigma_2 - i\sigma_1)pP_{\mp} \pm (i\sigma_1 + \sigma_2)pP_{\pm} + \\ +2m\sigma_2 P_{\pm} \mp \frac{im\omega x}{2}(1 + \sigma_3) - \frac{1}{2}E. \end{aligned} \tag{2.28}$$

В результаті, одержимо систему редукованих рівнянь

$$\tilde{L}'\tilde{\psi}' = 0, \ \ \tilde{\psi}' = U^+ \psi', \tag{2.29}$$

або

$$L_\pm \psi_\pm = 0, \ \ \tilde{\psi}' = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

де $\psi_\pm$ – двокомпонентні функції; $\tilde{\psi}'$ – власний вектор оператора $(2\hat{\beta}_0^2 - 1)$.

Аналогічне розщеплення проведемо для рівнянь (2.30), (2.28), оскільки вони інваріантні відносно оператора

$$X_5 = \sigma_3 PC, \tag{2.31}$$

де C –оператор зарядового спряження, тобто

$$C\psi(x) = \psi^*(x). \tag{2.32}$$

За допомогою оператора перетворення

$$\begin{aligned} U_2^+ &= (C_+ - i\sigma_2 C_-)(P_+ - i\sigma_2 P_-), \\ U_2^- &= (\text{З}_+ + i\sigma_2 P_-)(C_+ + i\sigma_2 C_-), \ \ C_\pm = \frac{1 \pm C}{2}, \end{aligned} \tag{2.33}$$

який діагоналізує (2.31), одержимо редуковані рівняння

$$\begin{aligned} &\tilde{L}_+ = U_2^+ L_+ U_2^- = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}, \tilde{L}_- = U_2^+ L_- U_2^- = \begin{pmatrix} L_3 & 0 \\ 0 & L_4 \end{pmatrix}, \\ &\tilde{L}_\pm \varphi_\pm = 0, \ \ \varphi_\pm = U^+ \psi_\pm = 0, \ \ \varphi+ = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \ \ \phi- = \begin{pmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.34}$$

або

$$\begin{aligned} &L_a \varphi_a = 0, \ \ a = 1, 2, 3, 4, \\ &L_1 = im\omega(C_+P_- + C_-P_+)x - 2imP_+C - \tfrac{1}{2}E, \\ &L_2 = -im\omega(C_-P_- + C_+P_+)x - 2imP_+C + 2iPp - \tfrac{1}{2}E, \\ &L_3 = -im\omega(C_+P_- + C_-P_+)x + 2imP_-C + 2ip - \tfrac{1}{2}E, \\ &L_4 = im\omega(C_-P_- + C_+P_+)x + 2imP_-C - \tfrac{1}{2}E, \end{aligned} \tag{2.35}$$

де ϕ_a – однокомпонентні функції, (сумування по a відсутнє). Кожне з рівнянь (2.35) визначене на підпросторі власних функцій оператора σ_3, тобто $\sigma_3 \varphi_\pm = \pm \varphi_\pm$.

2.2 Приховані симетрії двочастинкових рівнянь Дірака із взаємодією

2.2.1 Ліївські симетрії

Розглянемо двочастинкові рівняння, запропоновані Мошинським та ін. [58, 81, 82, 83] (у системі центра мас)

$$L_1\psi \equiv \left\{(\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2)(\vec{\mathbf{p}} - \frac{i}{2}\omega\vec{\mathbf{x}}\beta_1\beta_2) + m(\beta_1+\beta_2) - E'\right\}\psi = 0, \qquad (2.36)$$

та [58]

$$L_2\psi \equiv \left\{(\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2)(\vec{\mathbf{p}} - \frac{i}{2}\omega\vec{\mathbf{x}}\beta_1\beta_2\gamma_{51}\gamma_{52}) + m(\beta_1+\beta_2) - E'\right\}\psi = 0,(2.37)$$

де $\vec{\alpha}_1,\ \beta_1,\ \gamma_{51}$ та $\vec{\alpha}_2,\ \beta_2,\ \gamma_{52}$ – комутуючий набір матриць розмірності 16×16 такого вигляду

$$\vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}_1 \\ \vec{\sigma}_1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},\ \vec{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}_2 \\ \vec{\sigma}_2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\beta_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},\ \ \beta_2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad (2.38)$$
$$\gamma_{51} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},\quad \gamma_{52} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

де I – одинична матриця розмірності 2×2, $\vec{\sigma}_1$ та $\vec{\sigma}_2$ – матриці Паулі першої та другої частинки відповідно.

Рівняння (2.36) та (2.37) виражають два альтернативні підходи до побудови двочастинкових моделей. Згідно [28, 85] (2.36) можна одержати з пуанкаре – інваріантного рівняння для двох невзаємодіючих частинок. Що стосується рівняння (2.37), то його можна отримати в рамках коваріантного формалізму, [53, 58, 100], в якому динаміка двох взаємодіючих частинок описується двома незалежними рівняннями. Вид взаємодії (загальний вигляд допустимих потенціалів) диктується умовою сумісності цих рівнянь.

Розглянемо ліївські симетрії рівнянь (2.36) та (2.37). Зробимо перетворення подібності

$$\psi \rightarrow \psi' = \beta_2\psi, \quad L_a \rightarrow L'_a = \beta_2 L_a \beta_2,\ \ a = 1,2, \qquad (2.39)$$

яке редукує (2.36), (2.37) до вигляду

$$L'_1\psi' \equiv \left\{ [\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_a](p_a + \frac{i\omega x_a \eta}{2}) + \hat{\beta}_0 m - E \right\} \psi' = 0, \tag{2.40}$$

$$L'_2\psi' \equiv \left\{ [\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_a](p_a + \frac{i\omega x_a \xi}{2}) + \hat{\beta}_0 m - E \right\} \psi' = 0, \tag{2.41}$$

де

$$\begin{aligned} &\eta = 1 - 2\hat{\beta}_0^2, \;\; \xi = (1 - 2\hat{\beta}_0^2)(1 - 2\hat{\beta}_5^2), \;\; E = \tfrac{1}{2}E', \\ &\gamma_0^{(i)} = \beta_i, \;\; \gamma_a^{(i)} = \beta_i \alpha_{ai}, \;\; \gamma_5^{(i)} = \gamma_{5i}, \;\; i = 1, 2, \\ &\hat{\beta}_\mu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu^{(1)} + \gamma_\mu^{(2)}), \;\; \mu = 0, 1, 2, 3, 5. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Рівняння (2.40), (2.41) зручніші для симетрійного аналізу ніж (2.36), (2.37). Справді, матриці $\hat{\beta}_\mu$ з (2.42) задовольняють алгебрі КДП (2.6), де $a, b, c = 0, 1, 2, 3, 5$, $g_{00} = g_{55} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$. Відомо, що зображення алгебри (2.6) звідне. Аналіз незвідних зображень алгебри КДП дасть змогу краще зрозуміти фізичну інтерпретацію досліджуваних рівнянь. Крім того, перехід до $\hat{\beta}_\mu$ матриць автоматично приводить до існуванння по меншій мірі трьох інтегралів руху. (Це буде показано нижче).

Означення 2.1 *Лінійний диференційний оператор*

$$Q = b_a(\vec{x})p_a + c(\vec{x}) \tag{2.43}$$

є оператором симетрії рівняння (2.40), (або (2.41)) у класі диференційних операторів першого порядку, якщо він визначений у просторі 16–компонентної функції $\psi' = \psi'(\vec{x})$ і комутує з L'_1 (або L'_2), тобто переводить розв'язки у розв'язки.

Використовуючи класичний алгоритм Лі [66, 80] доведемо, що

Теорема 2.2 *Рівняння (2.40), (2.41) інваріантні відносно 6–параметричної групи Лі, генератори якої мають вигляд*

$$J_a = \varepsilon_{abc}(x_b p_c + i\beta_b\beta_c), \;\; a = 1, 2, 3, \tag{2.44}$$

$$Q_1 = (1+\gamma_\mu^{(1)}\gamma^{(2)\mu})(1+2\gamma_\mu^{(1)}\gamma^{(2)\mu}), \quad \mu = 0,1,2,3,$$
$$Q_2 = -(3+2\gamma_\mu^{(1)}\gamma^{(2)\mu})\gamma_\mu^{(1)}\gamma^{(2)\mu}, \quad Q_3 = 1 - Q_1 - Q_2, \tag{2.45}$$

(по індексам, що повторюються розуміється коваріантне сумування).

Доведення **Теореми** 2.1 аналогічне доведенню **Теореми** 2.2.

Генератори J_a є базисними елементами групи обертання $O(3)$. Оператори Q_1, Q_2 та Q_3 є ортопроекторами на підпростори незвідних зображень алгебри КДП. Справді, 16–вимірне зображення алгебри КДП звідне і розкладається на незвідні 10–, 5– і 1–вимірне (тривіальне) зображення [77]. Це означає, що рівняння (2.40), (2.41) мають квазідіагональну форму

$$\begin{pmatrix} 10\times 10 & & \\ & 5\times 5 & \\ & & 1\times 1 \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

і будь–який матричний оператор вигляду

$$\begin{pmatrix} aI_{10} & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & bI_5 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & cI_1 \end{pmatrix}, \tag{2.47}$$

(де $a, b, c = const$, I_n–одинична матриця розмірності $n\times n$), очевидно, буде комутувати з (2.46). Підставивши у (2.45) явний вигляд γ–матриць (або β–матриць з формули (2.51)) можна переконатись, що оператори (2.45) збігаються з (2.47) (з точністю до константи).

Отже, згідно (2.46) рівняння (2.40), (2.41) можна редукувати до трьох незалежних підсистем для 10–, 5– і 1–компонентної функції.

2.2.2 Редукція рівнянь (2.40), (2.41)

Для того, щоб записати рівняння (2.40), (2.41) у розщепленому вигляді перейдемо до β_μ–матриць, що є прямою сумою незвідних матриць КДП [66]. Після унітарного перетворення

$$\hat{\beta}_\mu \to \beta_\mu = U\hat{\beta}_\mu U^\dagger, \tag{2.48}$$

де

$$\begin{aligned}
U = \frac{(1-i)}{2}\Big(& e_{1,1} + e_{1,13} + e_{2,2} + e_{2,14} + e_{3,3} + e_{3,15} - e_{10,8} + \\
&+ e_{10,12} - e_{11,4} - e_{11,16} + e_{13,15} - e_{13,9} + e_{14,6} - e_{14,10} + e_{15,7} - e_{15,11}\Big) + \\
+\frac{(1+i)}{2}\Big(& -e_{4,5} - e_{4,9} - e_{5,6} - e_{5,10} - e_{6,7} - e_{6,11} - e_{7,1} + \\
&+ e_{7,13} - e_{8,2} + e_{8,14} - e_{9,3} + e_{9,15} - e_{12,4} + e_{12,16} + e_{16,8} + e_{16,12}\Big),
\end{aligned} \tag{2.49}$$

($e_{k,l}$–одиничний матричний елемент на перетині k–го рядка і l–го стовпчика) ми одержимо

$$\beta_5 = \begin{pmatrix} \beta_5^{(10)} & \cdot \\ \cdot & \beta_5^{(6)} \end{pmatrix}, \quad \beta_\mu = \begin{pmatrix} \beta_\mu^{(10)} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \beta_\mu^{(5)} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{2.50}$$

де $\beta_\mu^{(10)}$, $\beta_5^{(10)}$, $\beta_\mu^{(5)}$ та $\beta_5^{(6)}$–10×10, 5×5 та 6×6 матриці КДП (крапки означають нульові матриці відповідної розмірності). Випишемо явний вигляд матриць КДП

$$\begin{aligned}
&\beta_0^{(10)} = i(e_{1,7} + e_{2,8} + e_{3,9} - e_{7,1} - e_{8,2} - e_{9,3}), \\
&\beta_1^{(10)} = -i(e_{1,10} - e_{5,9} + e_{6,8} + e_{8,6} - e_{9,5} + e_{10,1}), \\
&\beta_2^{(10)} = -i(e_{2,10} + e_{4,9} - e_{6,7} - e_{7,6} + e_{9,4} + e_{10,2}), \\
&\beta_3^{(10)} = -i(e_{3,10} - e_{4,8} + e_{5,7} + e_{7,5} - e_{8,4} + e_{10,3}), \\
&\beta_5^{(10)} = i(e_{1,4} + e_{2,5} + e_{3,6} - e_{4,1} - e_{5,2} - e_{6,3}), \\
&\beta_0^{(5)} = -i(e_{1,2} - e_{2,1}), \quad \beta_1^{(5)} = i(e_{1,3} + e_{3,1}), \\
&\beta_2^{(5)} = i(e_{1,4} + e_{4,1}), \qquad \beta_3^{(5)} = i(e_{1,5} + e_{5,1}), \\
&\beta_5^{(6)} = i(e_{1,6} + e_{6,1}).
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Позначивши

$$\psi'' = U\psi' \equiv \begin{pmatrix} \psi_{(10)} \\ \psi_{(5)} \\ \psi_{(1)} \end{pmatrix}, \tag{2.52}$$

де $\psi_{(10)}$, $\psi_{(5)}$ та $\psi_{(1)}$–10–, 5– та 1–компонентна функції, одержимо з (2.40), (2.50)

$$(H_1 - E)\psi_{(10)} \equiv \\ \equiv \left\{[\hat{\beta}_0^{(10)}, \hat{\beta}_a^{(10)}](p_a + \tfrac{i\omega x_a \eta^{(10)}}{2}) + \hat{\beta}_0^{(10)} m - E\right\} \psi_{(10)} = 0, \tag{2.53}$$

$$(H_0 - E)\psi_{(5)} \equiv \left\{[\hat{\beta}_0^{(5)}, \hat{\beta}_a^{(5)}](p_a + \frac{i\omega x_a \eta^{(5)}}{2}) + \hat{\beta}_0^{(5)} m - E\right\} \psi_{(5)} = 0, \tag{2.54}$$

$$E\psi_{(1)} = 0, \tag{2.55}$$

де матриці $\eta^{(10)}$ та $\eta^{(5)}$ визначені у (2.42), (2.51). Аналогічно, рівняння (2.41) редукується до 10–компонентного рівняння вигляду

$$(H_1 - E)\psi_{(10)} \equiv \\ \equiv \left\{[\hat{\beta}_0^{(10)}, \hat{\beta}_a^{(10)}](p_a + \tfrac{i\omega x_a \xi^{(10)}}{2}) + \hat{\beta}_0^{(10)} m - E\right\} \psi_{(10)} = 0, \tag{2.56}$$

та до рівнянь (2.54), (2.55) для 5– та 1–компонентної функції.

Як бачимо, двочастинкові рівняння зводяться до рівнянь КДП у формі Шродінгера [66] із спеціальним потенціалом взаємодії лінійним по $\vec{\mathbf{x}}$. Для того, щоб рівняння (2.53), (2.54), (2.56) задовільно описували реальну фізичну систему, необхідно, щоб кількість компонент хвильових функцій $\psi_{(10)}$, $\psi_{(5)}$ відповідала числу спінових ступенів вільності даної системи. Це означає, що рівняння (2.53), (2.54), (2.56) потрібно доповнити додатковою умовою [49], [103]

$$\hat{L}\psi \equiv (H_a \beta_0 - m)\psi = 0, \ \ a = 0, 1, \tag{2.57}$$

яка виражає фізичні компоненти відповідних хвильових функцій через нефізичні.

Рівняння (2.53)–(2.55) з додатковою умовою (2.57) були одержані в рамках формалізму PSQM, що передбачає об'єднання у один парасупермультиплет бозонів та $p = 2$ парафермionів [36]. Автори назвали цю задачу парарелятивістським квантовим осцилятором.

Зауважимо, що умова (2.57) не випливає прямо з рівнянь (2.36), (2.37). Тому, ці рівняння нееквівалентні прямій сумі рівнянь КДП.

2.2.3 Неліївські інтеграли руху

Як було показано раніше, рівняння (2.40), (2.41) інваріантні відносно групи обертань. Крім того, можна показати, що ці рівняння інваріантні відносно просторової інверсії

$$\psi' \to \eta\psi'(-\vec{x}), \tag{2.58}$$

де матриця η визначена у (2.42).

Отже, згідно [15] дані рівняння автоматично допускають спеціальний неліївський оператор симетрії–інтеграл діраковського типу. Справді, прямим обчисленням неважко пересвідчитись в тому, що оператор [15]

$$Q_4 = \eta\left(2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{J})^2 - 2\mathbf{S}\cdot\mathbf{J} - \mathbf{J}^2\right), \tag{2.59}$$

(де $\mathbf{S} = i\beta \times \beta$, J_a визначено у (2.44)) комутує з L' з (2.40) та (2.41).

Відмітимо, що оператор (2.59) не належить обгортуючій алгебрі, що породжується генераторами (2.44), (2.45) так як він є суто неліївським оператором симетрії і його в принципі не можна одержати в межах класичного групового аналізу диференційних рівнянь.

Для знаходження інших неліївських симетрій введемо позначення

$$a_a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_a + i\frac{\omega}{2}x_a\eta), \ \ a_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_a - i\frac{\omega}{2}x_a\eta), \tag{2.60}$$

$$\hat{N} = \frac{1}{2}\sum_a(a_a^+a_a + a_aa_a^+) \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2 + \frac{1}{4}\omega^2\mathbf{x}^2). \tag{2.61}$$

Бачимо, що (2.60) є операторами народження та знищення для бозонів, а (2.61) можна трактувати як оператор числа частинок. Отже,

$$[\hat{N}, a_a^+] = \frac{1}{2}\omega\eta a_a^+, \ \ [\hat{N}, a_a] = -\frac{1}{2}\omega\eta a_a. \tag{2.62}$$

Використовуючи (2.62) та враховуючи, що

$$[\hat{\beta}_0, \eta] = 0, \ \ \{\hat{\beta}_a, \eta\} \equiv \hat{\beta}_a\eta + \eta\hat{\beta}_a = 0, \tag{2.63}$$

ми одержимо, що оператор

$$Q_5 = 2\hat{N} + \frac{1}{2}\omega\eta = \mathbf{p}^2 + \frac{1}{4}\omega^2\mathbf{x}^2 + \frac{1}{2}\omega\eta, \tag{2.64}$$

комутує з L'_1 рівняння (2.40) і таким чином є оператором симетрії (2.40). Враховуючи (2.64), знайдемо кубічне співвідношення для гамільтоніану рівняння (2.40): В результаті одержимо

$$H^3 = (Q_5 + m^2 - \omega)H + \omega Q_6, \tag{2.65}$$

де

$$\begin{aligned} &Q_6 = -imS_{5a}L_a + i\varepsilon_{abc}S_{4a}S_{5b}(p_c + \tfrac{i}{2}\omega x_c\eta), \\ &S_{\mu\nu} = i[\hat{\beta}_\mu, \hat{\beta}_\nu], \;\; S_{4\mu} = i\hat{\beta}_\mu, \\ &\hat{\beta}_5 = \tfrac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\hat{\beta}_\mu\hat{\beta}_\nu\hat{\beta}_\lambda\hat{\beta}_\rho, \;\; \mu, \nu = 1, 2, 3, 5. \end{aligned} \tag{2.66}$$

З (2.65) випливає, що Q_6 комутує з H і є оператором симетрії (2.40).

Аналогічні міркування для рівняння (2.41) приводять нас до додаткового оператора вигляду

$$Q_7 = \mathbf{p}^2 + \frac{1}{4}\omega^2\mathbf{x}^2 + \frac{1}{2}\omega\hat{\eta}, \tag{2.67}$$

де

$$\hat{\eta} = 3 - 2\beta_0^2 - 4\beta_5^2(1 - \beta_0^2). \tag{2.68}$$

Отже, рівняння (2.40) допускає ліївські симетрії, що задаються формулами (2.44), (2.45) та неліївські симетрії, визначені у (2.59),(2.64), (2.66). Ці оператори формують базис 9–вимірної алгебри Лі, що задовольняє таким комутаційним співвідношенням

$$[J_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}J_c, \;\; [Q_a, J_b] = [Q_a, Q_b] = 0, \;\; A, B = 1, 2, \ldots 6. \tag{2.69}$$

Ліївські та неліївські симетрії рівняння (2.41) задаються формулами (2.44), (2.45) та (2.59), (2.67) відповідно. Вони утворюють 8–вимірну алгебру Лі (2.69) (де $A, B = 1, 2, 3, 4, 7$).

2.2.4 Приховані парасуперсиметрії

У цьому параграфі покажемо, що двочастинкові рівняння (2.40), (2.41) допускають новий вид симетрії – парасуперсиметрії.

Справді, зобразимо гамільтоніан H рівняння (2.40) у вигляді

$$H = \hat{Q}_1 + \hat{\beta}_0 m \tag{2.70}$$

де $\hat{Q}_1$–парасуперзаряд

$$\hat{Q}_1 = [\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_a](p_a + \frac{i\omega x_a \eta}{2}). \qquad (2.71)$$

Безпосередньою перевіркою можна встановити, що оператори $\hat{Q}_1$, $\hat{Q}_2 = i\eta\hat{Q}_1$ та $H_{PSS} = Q_5 + \omega(1 - \hat{\beta}_5^2)$ (де Q_5 визначено у (2.64)) задовольняють комутаційним співвідношенням (2.19), (2.20), що характеризують алгебру PSQM Рубакова–Спірідонова та Бекерса–Деберг відповідно.

Рівняння (2.41) також має приховані парасуперсиметрії. Для гамільтоніану цього рівняння справедливе зображення (2.70), де

$$\hat{Q}_1 = [\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_a](p_a + \frac{i\omega x_a \xi}{2}). \qquad (2.72)$$

Парасуперзаряд (2.72) разом з

$$\hat{Q}_2 = i[\hat{\beta}_0, \hat{Q}_1], \;\; H_{PSS} = \frac{1}{4}Q_7, \qquad (2.73)$$

(де Q_7 задається формулою (2.67)) реалізує зображення алгебри (2.20). Крім того, гамільтоніан рівняння (2.41) також є парасуперзарядом, оскільки

$$H^3 = (Q_7 + m^2)H, \;\; [H, Q_7 + m^2] = 0, \;\; H\xi + \xi H = 0. \qquad (2.74)$$

З (2.74) випливає, що оператори

$$\hat{Q}_1 = H, \;\; \hat{Q}_2 = i\xi H, \;\; H_{PSS} = Q_7 + m^2 \qquad (2.75)$$

задовольняють алгебрі (2.20).

Отже, рівняння (2.40) та (2.41) володіють прихованою парасуперсиметрією. Зображення (2.70) дасть змогу побудувати перетворення ФВ.

Відмітимо, що результати цього параграфу справедливі також і для редукованих рівнянь (2.53)–(2.55), (2.56), оскільки для їх одержання використовувались тільки властивості β_μ–матриць (2.6).

2.2.5 Енергетичний спектр парастанів

Використаємо знайдені симетрії та приховані парасуперсиметрії рівнянь (2.40), (2.41) для розв'язку задачі на власні значення.

Рівняння (2.40) та (2.41) описують систему двох діраковських частинок. Відомо, що така система має два спінові стани, що відповідають повному спіну $S = 0$ (парастани) та повному спіну $S = 1$ (ортостани).

Розглянемо редуковане рівняння (2.54). Воно описує систему зі спіном нуль, тобто систему парастанів. Дійсно, у відсутності взаємодії ($\omega = 0$) гамільтоніан (2.54) зводиться до гамільтоніану КДП для безспінових частинок [49, 66, 103].

Враховуючи, що для КДП матриць розмірності 5×5 $\beta_\mu^{(5)} \equiv 0$ (згідно (2.66)) одержимо з (2.65)

$$H_0^3 = H_0(Q_5 + m^2 - \omega). \tag{2.76}$$

Оскільки H_0 та Q_5 – комутуючі оператори (т.я. Q_5–інтеграл руху), то рівняння (2.76) можна переписати для власних значень операторів H_0 та Q_5. Отже,

$$E^3 = E(q + m^2 - \omega), \tag{2.77}$$

або

$$E(E^2 - q - m^2 + \omega) = 0, \tag{2.78}$$

де E – власне значення гамільтоніану H_0, q – власне значення оператора Q_5. Згідно з (2.64)

$$q = (2N + 3 + \varepsilon)\frac{\omega}{2}, \tag{2.79}$$

де $N = 2n + j$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 0, 1, \ldots, N$; і $\varepsilon = \pm 1$–власне значення оператора η.

Підставивши (2.79) у (2.78) одержимо енергетичний спектр парастанів

$$E = \mu\sqrt{(2N + 1 + \varepsilon)\frac{\omega}{2} + m^2}, \text{ або } E = 0, \tag{2.80}$$

де $\mu = \pm 1$. (μ – оператор знаку енергії).

Оскільки H_0 не комутує з η, то значення μ та ε є залежними. Використовуючи перетворення ФВ можна показати, що $\varepsilon\mu = -\mu$. Таким чином, ненульове значення енергії матиме вигляд

$$E = \pm\sqrt{N\omega + m^2}. \tag{2.81}$$

Отже, ми розв'язали алгебраїчним методом задачу на власні значення для парастанів.

2.2.6 Енергетичний спектр ортостанів

Розглянемо рівняння (2.53), що описує систему зі спіном $S = 1$. Щоб знайти власні значення гамільтоніану H_1 використаємо співвідношення (2.65). У цьому випадку $\beta_5^{(10)} \neq 0$ і відповідно $Q_6 \neq 0$. Крім того, можна пересвідчитись, що справедливе співвідношення

$$Q_6(Q_6 - H_1) = \frac{m^2}{2}(\mathbf{J}^2 + Q_4), \tag{2.82}$$

де вектор $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$ визначений у (2.44), Q_4–інтеграл руху (2.59). Комбінуючи (2.82) та (2.65) одержимо

$$H_1^2(H_1^2 - Q_5 - m^2)(H_1^2 - Q_5 - m^2 + \omega) = \frac{m^2\omega^2}{2}(\mathbf{J}^2 + Q_4). \tag{2.83}$$

Оскільки всі оператори, що входять у (2.83) комутують між собою, то можна записати (2.83) для власних значень цих операторів. Тобто

$$E^2(E^2 - q - m^2)(E^2 - q - m^2 + \omega) = \frac{m^2\omega^2}{2}[j(j+1) + \rho)], \tag{2.84}$$

де ρ–власне значення оператора Q_4. У роботі [15] знайдено, що

$$\rho = \nu j(j+1), \;\; \nu = \pm 1, \;\; j = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.85}$$

Підставивши (2.85) та (2.79) у (2.84), одержимо

$$\begin{gathered} E^2\left\{E^2 - m^2 - (2N + 1 + \varepsilon)\frac{\omega}{2}\right\}\left\{E^2 - m^2 - (2N + 3 + \varepsilon)\frac{\omega}{2}\right\} = \\ = \frac{m^2\omega^2}{2} j(j+1)(\nu + 1). \end{gathered} \tag{2.86}$$

Для $\nu = -1$ маємо три можливі значення енергії

$$E = 0 \tag{2.87}$$

$$E = \mu\sqrt{m^2 + (2N + 1 + \varepsilon)\frac{\omega}{2}}, \ \ \mu = \pm 1, \tag{2.88}$$

$$E = \mu\sqrt{m^2 + (2N + 3 + \varepsilon)\frac{\omega}{2}}. \tag{2.89}$$

Аналогічно випадку парастанів значення μ та ε пов'язані. Цей зв'язок можна знайти, використовуючи нерелятивістське наближення [56]. В результаті одержимо

$$\mu\varepsilon = \mu \tag{2.90}$$

у формулі (2.88);

$$\mu\varepsilon = -\mu \tag{2.91}$$

у формулі (2.89). Отже, ненульові значення енергії мають вигляд

$$E = \pm\sqrt{m^2 + (N + 1)\omega}. \tag{2.92}$$

Для $\nu = 1$ (2.86) редукується до алгебраїчного рівняння третього порядку по E^2

$$E^2\left\{E^2 - m^2 - (N + 1)\omega\right\}\left\{E^2 - m^2 - (N + 2)\omega\right\} = m^2\omega^2 j(j + 1). \tag{2.93}$$

Одержані енергетичні спектри для пара– та ортостанів добре узгоджуються з разультатами робіт [58, 81, 82, 83], де аналогічна задача була розв'язана аналітично.

Задачу на власні значення для рівняння (2.41) також можна розв'язати алгебраїчно. Для парастанів енергетичний спектр задається формулами (2.80), (2.81), оскільки редуковане рівняння для спіну нуль збігається з (2.54). Для знаходження спектра ортостанів використаємо співвідношення (2.74). Запишемо (2.74) для власних значень комутуючих операторів H, Q_7

$$E^3 = E[(2N + 3 - \varepsilon)\frac{\omega}{2} + m^2], \tag{2.94}$$

де ε – власне значення матриці $\hat{\eta}$ (2.68). Використовуючи перетворення ФВ можна показати, що

$$\varepsilon\mu = -\mu. \tag{2.95}$$

Отже, енергетичний спектр гамільтоніану H_1 рівняння (2.41) для ортостанів матиме вигляд

$$\begin{aligned} &E = 0 \\ &E = \pm\sqrt{m^2 + (N+2)\omega}. \end{aligned} \tag{2.96}$$

2.2.7 Зв'язок рівняння (2.40) з осцилятором Кемера–Дефіна–Петьє

Розглянемо осцилятор КДП для стаціонарних станів [87]

$$L\psi = \left\{ -\beta_0 \tilde{E} + \beta_a(p_a + i\frac{\omega}{2}x_a\eta) + \tilde{m} \right\} \psi = 0, \tag{2.97}$$

де $\eta = 1 - 2\beta_0^2$, β_0, β_a–10 × 10 або 5 × 5 матриці КДП.

Рівняння (2.97) можна одержати з коваріантного рівняння Кеммера, ввівши взаємодію [87]

$$p_a \to p_a + \frac{i}{2}\omega x_a \eta. \tag{2.98}$$

Між рівняннями (2.40) та (2.97) існує нетривіальний зв'язок.

У роботі [87] було знайдено енергетичний спектр гамільтоніану рівняння (2.97) у вигляді

$$S = 0, \;\; \tilde{E}^2 = \tilde{m}^2 + N\omega, \tag{2.99}$$

$$S = 1, \;\; \tilde{E}^2 = \tilde{m}^2 + (N+1)\omega, \tag{2.100}$$

або

$$\begin{aligned} S = 1, \;\; &\tilde{m}^2 \left\{ \tilde{E}^2 - \tilde{m}^2 - (N+1)\omega \right\} \left\{ \tilde{E}^2 - \tilde{m}^2 - (N+2)\omega \right\} = \\ &\tilde{E}^2 \tilde{\omega}^2 j(j+1). \end{aligned} \tag{2.101}$$

Порівняємо (2.99)–(2.101) із спектром рівняння (2.40). Бачимо, що формули (2.99), (2.100), (2.101) зводяться до (2.81), (2.92), (2.93), якщо

$$\tilde{E} = im, \;\; \tilde{m} = iE. \tag{2.102}$$

Крім того, перетворення подібності

$$\begin{aligned} &\psi \rightarrow \psi' = exp(i\beta_0 \tfrac{\pi}{2})\psi, \\ &L \rightarrow L' = exp(i\beta_0 \tfrac{\pi}{2}) L exp(-i\beta_0 \tfrac{\pi}{2}) \end{aligned} \tag{2.103}$$

редукує рівняння (2.97) до (2.40). Це автоматично означає, що застосовуючи до ОС рівняння (2.40) перетворення, обернене до (2.103), можна одержати ОС осцилятора КДП.

Перетворення (2.103) дає змогу знайти осцилятор КДП, що відповідає рівнянню (2.41). Справді, зробимо перетворення

$$\begin{aligned} &(H_1 - E) \rightarrow \tilde{L} = exp(-i\beta_0 \tfrac{\pi}{2})(H_1 - E) exp(i\beta_0 \tfrac{\pi}{2}), \\ &\psi \rightarrow \tilde{\psi} = exp(-i\beta_0 \tfrac{\pi}{2})\psi, \end{aligned} \tag{2.104}$$

(де H_1 визначено у (2.56)) і врахуємо (2.102). В результаті одержимо

$$\tilde{L}\tilde{\psi} = \left\{ \beta_0 \tilde{E} - \beta_a (p_a + i\frac{\omega}{2} x_a (2\beta_5^2 - 1)) - \tilde{m} \right\} \tilde{\psi} = 0, \tag{2.105}$$

де β_μ–матриці КДП розмірності 10×10.

Так як і (2.97), рівняння (2.105) можна розв'язати точно. Енергетичний спектр системи задається формулою (2.96). Крім того, рівняння (2.105) допускає симетрії (2.44), (2.45), (2.59), (2.67) та приховані парасуперсиметрії .

2.2.8 Перетворення Фолді–Воутхойзена

Побудуємо перетворення ФВ використовуючи парасуперсиметрії рівнянь (2.53)–(2.55), (2.56).

Розглянемо, спочатку, рівняння (2.54) для $S = 0$. Зобразимо гамільтоніан у формі (2.70), (2.71). Другий парасуперзаряд виберемо у формі

$$\hat{Q}_2 = i[\beta_0, \hat{Q}_1] \equiv i\beta_a (p_a + \frac{i}{2}\omega x_a \eta). \tag{2.106}$$

Можна перевірити, що оператори (2.71), (2.106) задовольняють алгебрі Бекерса–Деберг (2.20), де

$$H_{PSS} = \frac{1}{4} \left\{ \mathbf{p}^2 + \frac{1}{4}\mathbf{x}^2\omega^2 + \frac{(\eta - 2)}{2}\omega \right\}. \tag{2.107}$$

Крім того

$$[\hat{Q}_1, \hat{Q}_2] = -4i\beta_0 H_{PSS}, \ \ [\beta_0, \hat{Q}_2] = i\hat{Q}_1. \tag{2.108}$$

Використовуючи (2.20), (2.106), (2.108) знайдемо

$$\begin{aligned} & exp(i\hat{Q}_2\theta)\beta_0 exp(-i\hat{Q}_2\theta) = \\ & = \beta_0 + i\theta[\hat{Q}_2, \beta_0] - \frac{\theta^2}{2!}[\hat{Q}_2, [\hat{Q}_2, \beta_0]] + \ldots = \\ & = \beta_0 + \hat{Q}_1\theta - 2\beta_0 H_{PSS}\theta^2 - \frac{4}{3!}\hat{Q}_1 H_{PSS}\theta^3 + \ldots = \\ & = \beta_0 cos(2\sqrt{H_{PSS}}\theta) + \frac{\hat{Q}_1}{2\sqrt{H_{PSS}}} sin(2\sqrt{H_{PSS}}\theta). \end{aligned} \tag{2.109}$$

Вибираючи θ у вигляді

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{H_{PSS}}} arctg\left(\frac{2\sqrt{H_{PSS}}}{m}\right), \tag{2.110}$$

(причому θ комутує з β_0 та $\hat{Q}_2$) одержимо оператор ФВ

$$\begin{aligned} & U^{\text{ФВ}} = exp\left\{-\frac{i\hat{Q}_2}{2\sqrt{H_{PSS}}} arctg\left(\frac{2\sqrt{H_{PSS}}}{m}\right)\right\} \equiv \\ & \equiv 1 + \frac{\beta_a(p_a + \frac{i}{2}\omega x_a \eta)}{\hat{E}} + \frac{\{\beta_a(p_a + \frac{i}{2}\omega x_a \eta)\}^2}{\hat{E}(\hat{E} + m)}, \end{aligned} \tag{2.111}$$

де

$$\hat{E} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 + \frac{1}{4}\omega^2\mathbf{x}^2 + \frac{(\eta - 2)\omega}{2}}. \tag{2.112}$$

Оператор (2.111) діагоналізує гамільтоніан рівняння (2.54). Справді

$$U^{\text{ФВ}} H_0 \left(U^{\text{ФВ}}\right)^\dagger = \beta_0 \hat{E} \equiv H_0' \tag{2.113}$$

Порівнюючи (2.113) з (2.80), пересвідчуємось у тому, що енергетичний спектр H_0' збігається з H_0. Можливі значення μ та ε співвідношення (2.80) знаходимо з (2.113), (2.112). Оскільки $\beta_0\eta = -\beta_0$, то, очевидно, що $\mu = \pm 1$, $\varepsilon = -1$. В результаті, (2.80) для ненульових значень енергії редукується до (2.81).

Перетворення ФВ дає змогу встановити, що нульові значення енергії, які відповідають нефізичним розв'язкам рівняння (2.54) можна одержати, коли власні значення матриці β_0 дорівнюють нулю. Вимагаючи

$$\beta_0^2\psi_{\text{ФВ}} = \psi_{\text{ФВ}}, \tag{2.114}$$

виділимо фізичні стани, що відповідають ненульовим значенням енергії (2.81).

Аналогічним чином можна побудувати точне перетворення ФВ для рівняння (2.56), що описує систему з повним спіном $S = 1$. Відповідний гамільтоніан допускає зображення (2.70), (2.72). Другий парасуперзаряд виберемо у вигляді

$$\hat{Q}_2 = i[\beta_0, \hat{Q}_1]. \tag{2.115}$$

Побудовані парасуперзаряди разом з гамільтоніаном $H_{PSS} = \frac{1}{4}Q_7$ задовольняють алгебрі (2.20) та (2.108). Отже, оператор ФВ має вигляд

$$\begin{aligned} U^{\text{ФВ}} &= exp\left\{-\frac{i\hat{Q}_2}{2\hat{p}}arctg\left(\frac{2\hat{p}}{m}\right)\right\} \equiv \\ &\equiv 1 + \frac{\beta_a(p_a + \frac{i}{2}\omega x_a\xi)}{\hat{E}_1} + \frac{\{\beta_a(p_a + \frac{i}{2}\omega x_a\xi)\}^2}{\hat{E}_1(\hat{E}_1 + m)}, \end{aligned} \tag{2.116}$$

де

$$\hat{p} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \frac{1}{4}\omega^2\mathbf{x}^2 + \frac{\omega}{2}\hat{\eta}}, \quad \hat{E}_1 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 + \frac{1}{4}\omega^2\mathbf{x}^2 + \frac{\omega}{2}\hat{\eta}}, \tag{2.117}$$

(матриці ξ та $\hat{\eta}$ визначені у (2.42) та (2.68) відповідно).

Застосувавши перетворення (2.116) до рівняння (2.56) одержимо

$$U^{\text{ФВ}}H_1(U^{\text{ФВ}})^{\dagger} = \beta_0\hat{E}_1 \equiv H_1'. \tag{2.118}$$

Енергетичний спектр гамільтоніану H_1' задається формулою (2.96), а умова (2.114) виділяє фізичні компоненти хвильової функції.

Розглянемо рівняння (2.53). Приховані парасуперсиметрії (2.70), (2.71), (2.106) у цьому випадку не задовольняють співвідношенням (2.107), (2.108). Крім того, гамільтоніан рівняння (2.53) задовольняє (2.65) з $Q_6 \neq 0$. Тому не можна побудувати точне перетворення ФВ. Наближене перетворення ФВ для векторних частинок було знайдено у роботі [56]. Гамільтоніан рівняння (2.53) можна перетворити до квазідіагонального вигляду (з точністю до членів порядку $\frac{1}{m^2}$) [56]

$$H_1' = \varepsilon + \beta_0 m + \frac{\beta Q^2}{2m} - \frac{\beta Q^4}{8m^3} - \frac{1}{8m^2}[Q,[Q,\varepsilon]], \tag{2.119}$$

де

$$\begin{aligned} &\varepsilon = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}^2 + m^2\omega^2\mathbf{x}^2 - 3m\omega - 2m\omega\vec{L}\cdot\vec{S}) \otimes \sigma_3, \\ &Q = \frac{i}{2m}\Big(\mathbf{p}^2 + m^2\omega^2\mathbf{x}^2 - 3m\omega - \\ &-2S_aS_b(p_ap_b + m^2\omega^2x_ax_b - m\omega\delta_{ab})\Big) \otimes \sigma_2. \end{aligned} \tag{2.120}$$

Беручи до уваги тільки перший (діагональний) доданок у (2.119) порівняємо енергетичний спектр H_1' з (2.87)–(2.89). Підставивши у (2.119), (2.120) власні значення оператора $\vec{L}\cdot\vec{S}$ (для $j = l$), пересвідчуємось, що (2.88), (2.89) редукуються до (2.91), (2.92).

Побудуємо перетворення ФВ для осцилятора КДП (2.105). У попередньому пункті зазначалось, що (2.105) та (2.56), (2.57) зв'язані між собою. Справді, домножимо зліва (2.105) на

$$1 - \frac{\beta_a(p_a + \frac{i}{2}\omega x_a(2\beta_5^2 - 1))}{m} - \frac{(1-\beta_0^2)E}{m}$$

та на

$$(1-\beta_0^2).$$

В результаті одержимо еквівалентну систему рівнянь (2.56), (2.57) з $E \to \tilde{E}$.

Отже, використовуючи перетворення

$$\begin{aligned} &(H_1 - E) \to U^{\text{ФВ}}(H_1 - E)\left(U^{\text{ФВ}}\right)^\dagger, \\ &\psi \to \psi' = U^{\text{ФВ}}\psi, \end{aligned} \tag{2.121}$$

де $U^{\text{ФВ}}$ визначено у (2.116), H_1 – у (2.56), одержимо власні значення оператора H_1'

$$H_1'\psi' = \beta_0\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 + \frac{1}{4}\omega^2\mathbf{x}^2 + \frac{\omega}{2}\hat{\eta}\psi'}. \tag{2.122}$$

Згідно (2.122) власні значення $\tilde{E}$ задовольняють (2.96).

2.2.9 Деякі моделі двочастинкових задач з осциляторно–подібною взаємодією

Покажемо, що досліджені у цьому параграфі двочастинкові рівняння є частковим випадком більш загальних рівнянь з осциляторно–подібною взаємодією. Справді, рівняння

$$(H-E)\psi=0, \;\; H=S_1p+S_2\frac{m\omega x}{2}+S_3m \tag{2.123}$$

де $S_a, \;\; (a=1,2,3)$–довільні матриці, що утворюють алгебру $AO(2,1)$, є узагальненням одновимірного двочастинкового рівняння Дірака з лінійною взаємодією (2.4). Аналогічно, двочастинковий осцилятор Дірака (2.40) можна інтерпретувати як частковий випадок загального рівняння вигляду

$$(H-E)\psi=0, \;\; H=-iS_{0a}(p_a+\frac{i}{2}\omega x_a\eta)+iS_{04}m, \tag{2.124}$$

де довільні матриці $S_{0a}, \;\; S_{04}$ задовольняють комутаційним співвідношенням, що характеризують алгебру $AO(1,4)$

$$\begin{aligned}&[S_{\mu\nu},S_{\lambda\rho}]=i(g_{\mu\rho}S_{\nu\lambda}+g_{\nu\lambda}S_{\mu\rho}-g_{\mu\lambda}S_{\nu\rho}-g_{\nu\rho}S_{\mu\lambda}),\\&g_{11}=-g_{22}=-g_{33}=-g_{44}=1,\end{aligned} \tag{2.125}$$

а для матриці η виконуються умови

$$S_{0a}\eta=-\eta S_{0a}, \;\; S_{04}\eta=\eta S_{04}. \tag{2.126}$$

Справді, вибравши

$$S_{0a}=\frac{i}{2}[\gamma_0,\gamma_a], \;\; S_{04}=i\gamma_0, \;\; \eta=-iS_{04}, \tag{2.127}$$

(де $\gamma_0, \;\; \gamma_a$ – 4 × 4 матриці Дірака) рівняння (2.124) ми зведемо до одночастинкового осцилятора Дірака [93].

Зобразимо $S_{\mu\nu}$ у вигляді

$$S_{0a}=\frac{i}{4}[\gamma_0^{(1)},\gamma_a^{(1)}]+\frac{i}{4}[\gamma_0^{(2)},\gamma_a^{(2)}], \;\; S_{04}=\frac{i}{2}(\gamma_0^{(1)}+\gamma_0^{(2)}), \tag{2.128}$$

а матрицю η задамо у формі

$$\eta = \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \bigwedge{}_{\nu}, \ \ \bigwedge{}_{\nu} = \prod_{\nu' \neq \nu} \frac{S_{04} - \nu'}{\nu - \nu'}, \tag{2.129}$$

де $\{\gamma_{\mu}^{(1)}\}$ та $\{\gamma_{\mu}^{(2)}\}$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ два комутуючих набори матриць Дірака; ν, ν'–всі можливі власні значення матриці S_{04}; $\bigwedge_{\nu}$–проектор на підпростір із заданим ν. Підставивши (2.128), (2.129) у (2.124) можна пересвідчитись, що рівняння (2.124) редукується до двочастинкового осцилятора Дірака (2.40).

Якщо

$$S_{0a} = \frac{i}{2}[\gamma_0, \gamma_a] + i[\beta_0, \beta_a], \ \ S_{04} = \gamma_0 + \beta_0, \ \ \eta = \gamma_0(1 - 2\beta_0^2), \tag{2.130}$$

де $\{\gamma_{\mu}\}$ та $\{\beta_{\mu}\}$ – комутуючі набори матриць Дірака та КДП, то рівняння (2.124) можна трактувати як рівняння руху для системи, що складається з діраковських та КДП частинок.

Зауважимо, що узагальнене рівняння (2.124) допускає ліївські та неліївські симетрії (2.44), (2.45),(2.59), (2.64), (2.66) (для відповідних матриць $S_{\mu\nu}$ та η). Наприклад, для одночастинкового осцилятора Дірака (2.124), (2.127) оператор симетрії (2.66) зводиться до вигляду

$$\begin{aligned} &\hat{Q}_6 = 2mQ_D + 2H_D, \ \ Q_D = \gamma_0(2\vec{S} \cdot \vec{L} + 1), \\ &H_D = \gamma_0 \gamma_a (p_a + \tfrac{i}{2} \omega x_a \eta) - m\gamma_0, \end{aligned} \tag{2.131}$$

де Q_D – діраковська константа руху [15, 61]; H_D – гамільтоніан осцилятора Дірака [82, 93].

Таким чином, знайдені ліївські та неліївські симетрії справедливі для більш широкого класу рівнянь з осциляторно–подібною взаємодією.

Розділ 3

Незвідні зображення парасуперaлгебри Пуанкаре.

У цьому розділі побудовані незвідні зображення (НЗ) PPSA використовуючи метод індукованих зображень Вігнера [111]. Важливість аналізу НЗ PPSA пов'язана у першу чергу з можливістю залучення теоретико–групових аспектів у PSQFT. По друге, це дасть змогу усвідомити виділену роль груп $SO(3)$, $SO(5)$, $SO(2,3)$ у побудові прихованих супер– та парасуперсиметрій. З фізичних міркувань, аналіз НЗ дасть повну інформацію про те, які частинки можуть описуватись парасуперсиметричними теоріями. Крім того, опис НЗ є цікавою математичною задачею, що допускає точні та елегантні розв'язки.

У параграфі 3.1 визначені загальні структурні співвідношення справедливі для базисних елементів PPSA. Основні оператори Казимира (інваріантні оператори алгебри) знайдені у 3.2. Параграф 3.3 присвячений аналізу НЗ для часоподібного 4–імпульса. Знайдена "мала парасуперaлгебра Вігнера" (МПВ) та явний вигляд генераторів PPSA у довільній системі відліку. Аналогічне дослідження проведено для світлоподібного та просторовоподібного 4–імпульсів у 3.4 та 3.5 відповідно. У 3.6 одержано коваріантне зображення PPSA, яке грає важливу роль у фізиці. Фізична інтерпретація побудованих зображень обговорена у 3.7.

Основні результати цього розділу опубліковані у роботах [18, 91].

3.1 Парасуператгебра Пуанкаре

PPSA включає десять генераторів групи Пуанкаре ($P_\mu,\ J_{\mu\nu}$), які задовольняють відомим комутаційним співвідношенням

$$
\begin{aligned}
&[P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad [P_\mu, J_{\nu\sigma}] = i(g_{\mu\nu}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\nu),\\
&[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}),\\
&J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}, \qquad\qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

та 4 парасуперзаряди $Q_A,\ \bar{Q}_A$ ($A = 1, 2$), які задовольняють подвійним комутаційним співвідношенням

$$
\begin{aligned}
&[Q_A, [Q_B, Q_C]] = [\bar{Q}_A, [\bar{Q}_B, \bar{Q}_C]] = 0,\\
&[Q_A, [Q_B, \bar{Q}_C]] = -4Q_B(\sigma_\mu)_{AC}P^\mu,\\
&[\bar{Q}_A, [Q_B, \bar{Q}_C]] = 4\bar{Q}_C(\sigma_\mu)_{BA}P^\mu,
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

де σ_ν–матриці Паулі розмірності 2×2; $(\cdot)_{AB}$–відповідні матричні елементи.

Крім того, парасуперзаряди комутують з генераторами алгебри Пуанкаре як вейлевські спінори

$$
\begin{aligned}
&[J_{\mu\nu}, Q_A] = -\frac{1}{2i}\,(\sigma_{\mu\nu})_{AB}\,Q_B,\ \ [P_\mu, Q_A] = 0,\\
&[J_{\mu\nu}, \bar{Q}_A] = -\frac{1}{2i}\,(\sigma_{\mu\nu})^*_{AB}\,\bar{Q}_B,\ \ [P_\mu, \bar{Q}_A] = 0,
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

де $\sigma_{0a} = +\sigma_{a0} \equiv \sigma_a,\ \ \sigma_{ab} = -\sigma_{ba} \equiv \sigma_a\sigma_b$, зірочка означає комплексне спряження.

Отже, PPSA є прямим узагальненням супералгебри Пуанкаре (PSA) [19]. Справді, PSA також включає 14 генераторів, що задовольняють (3.1) та (3.3), проте для суперзарядів $Q_A,\ \bar{Q}_A$ виконуються антикомутаційні співвідношення

$$
\begin{aligned}
&[Q_A, Q_B]_+ = Q_AQ_B + Q_BQ_A = 0,\ \ [\bar{Q}_A, \bar{Q}_B]_+ = 0,\\
&[Q_A, \bar{Q}_B]_+ = 2(\sigma_\mu)_{AB}P^\mu.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Легко бачити, (записавши подвійні комутатори через подвійні антикомутатори), що (3.2) є прямим наслідком (3.4). Інакше кажучи, парасупералгебра є більш загальною алгебраїчною структурою ніж супералгебра, подібно до того, як звичайна статистика Фермі–Бозе є частковим випадком парастатистик. Аналогічно тому, як у PSA генератори поділяються на парні та непарні, будемо називати P_μ $J_{\mu\nu}$ парними, а Q_A, $\bar{Q}_A$– непарними елементами PPSA.

3.2 Оператори Казимира та класифікація незвідних зображень

Для знаходження основних операторів Казимира введемо 4–вектор [112]

$$B_\mu = W_\mu + X_\mu, \tag{3.5}$$

де перший доданок –звичайний вектор Паулі–Любанського

$$W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma \tag{3.6}$$

а другий доданок є білінійною комбінацією парасуперзарядів

$$\begin{aligned} X_0 = \tfrac{1}{8}\{[Q_1, \bar{Q}_1] + [Q_2, \bar{Q}_2]\},\ \ X_1 = \tfrac{1}{8}\{[Q_1, \bar{Q}_2] + [Q_2, \bar{Q}_1]\}, \\ X_2 = \tfrac{i}{8}\{[Q_2, \bar{Q}_1] + [\bar{Q}_2, Q_1]\},\ \ X_3 = \tfrac{1}{8}\{[\bar{Q}_1, Q_1] + [Q_2, \bar{Q}_2]\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Вектор (3.5) логічно назвати парасуперспіном, оскільки у класифікації НЗ PPSA він грає ту ж роль, що й звичайний спін у випадку групи Пуанкаре.

Використовуючи (3.1)–(3.3), знайдемо комутаційні співвідношення B_μ з генераторами PPSA

$$[B_\mu, P_\nu] = 0, \qquad [B_\mu, J_{\nu\sigma}] = i(g_{\mu\nu} B_\sigma - g_{\mu\sigma} B_\nu), \tag{3.8}$$

$$[B_\mu, Q_A] = \frac{1}{2} P_\mu Q_A,\ \ [B_\mu, \bar{Q}_A] = -\frac{1}{2} P_\mu \bar{Q}_A, \tag{3.9}$$

$$[B_\mu, B_\nu] = i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\rho B^\sigma \tag{3.10}$$

З (3.8) –(3.10) випливає, що оператори

$$C_1 = P_\mu P^\mu, \qquad C_2 = P_\mu P^\mu B_\nu B^\nu - (B_\mu P^\mu)^2 \tag{3.11}$$

комутують з усіма генераторами PPSA, тобто вони є операторами Казимира PPSA. Справді, C_1–це звичайний інваріант алгебри Пуанкаре і згідно (3.3) він також комутує з Q_A, $\bar{Q}_A$. Другий оператор Казимира C_2 є новим і включає пуанкаре–інваріантний оператор $W_\mu W^\mu$, як складову частину. Таким чином, НЗ PPSA звідні по відношенню до алгебри Лі групи Пуанкаре.

Будемо шукати реалізації алгебри (3.1)–(3.3) у імпульсному просторі. Тоді, дія оператора трансляції P_μ на будь–який базисний вектор, що визначений у цьому просторі (просторі НЗ PPSA), буде зводитись до множення на p_μ , (де p_μ–власне значення оператора P_μ ; $-\infty < p_\mu < \infty$). У цьому випадку, для будь–якого визначеного значення p_μ, співвідношення (3.2) та (3.9) визначають алгебру операторів B_μ , Q_A $\bar{Q}_A$.

Для класифікації НЗ PPSA будемо використовувати власні значення оператора C_1. Відмітимо, що для $C_1 \geq 0$ можна ввести додаткову дискретну інваріантну характеристику–знак енергії

$$\varepsilon = \frac{P_0}{|P_0|} \tag{3.12}$$

В залежності від значень інваріантів C_1 та ε будемо розрізняти такі основні класи НЗ PPSA

$$I. \quad P_\mu P^\mu = M^2 > 0, \;\; \varepsilon = 1, \tag{3.13}$$

$$\widetilde{I}. \quad P_\mu P^\mu = M^2 > 0, \;\; \varepsilon = -1, \tag{3.14}$$

$$II. \quad P_\mu P^\mu = 0, \qquad \varepsilon = 1, \tag{3.15}$$

$$\widetilde{II}. \quad P_\mu P^\mu = 0, \qquad \varepsilon = -1, \tag{3.16}$$

$$III. \, P_\mu P^\mu = -\eta^2 < 0. \tag{3.17}$$

Крім того, ці класи можна поділити на підкласи, що відповідають фіксованим власним значенням оператора C_2.

3.3 Незвідні зображення для часоподібного 4–імпульса

Розглянемо НЗ PPSA, що відповідають ненульовим власним значенням оператора C_1, тобто випадки I та $\tilde{I}$ ((3.13) та (3.14)). Фіксований імпульс у системі спокою виберемо у вигляді

$$P^\mu = (M, 0, 0, 0) \tag{3.18}$$

для (3.13);

$$P^\mu = (-M, 0, 0, 0) \tag{3.19}$$

для (3.14).

Розглянемо спочатку випадок (3.18). Знайдемо МПВ, тобто визначимо елементи PPSA, відносно дії яких імпульс (3.18) залишається інваріантним. Підставивши (3.18) у (3.5), (3.9), одержимо

$$B_{\mathrm{a}} = W_{\mathrm{a}} + X_{\mathrm{a}} = -MS_{\mathrm{a}} + X_{\mathrm{a}} \equiv Mj_{\mathrm{a}}, \qquad \mathrm{a} = 1, 2, 3, \tag{3.20}$$

$$[B_0, Q_A] = \frac{M}{2} Q_A, \qquad [B_0, \bar{Q}_A] = -\frac{M}{2} \bar{Q}_A, \tag{3.21}$$

де S_a–компоненти звичайного вектора спіну.
З (3.20), (3.21) випливає, що

$$[j_a, Q_A] = 0, \quad [j_a, \bar{Q}_A] = 0. \tag{3.22}$$

Крім того, неважко перевірити, що

$$[j_a, j_b] = i\varepsilon_{abc} j_c. \tag{3.23}$$

З іншого боку з (3.2) одержимо

$$[Q_A, [\bar{Q}_A, Q_B]] = 4MQ_B, \qquad [\bar{Q}_A, [Q_A, \bar{Q}_B]] = 4M\bar{Q}_B, \tag{3.24}$$

всі інші комутатори Q_A та $\bar{Q}_A$ дорівнюють нулю.

Таким чином, з (3.3), (3.8), (3.22) випливає, що МПВ зводиться до прямої суми алгебри Лі, базисні елементи якої задовольняють (3.23) та алгебрі операторів Q_A, $\bar{Q}_A$, яка характеризується подвійними комутаційними співвідношеннями (3.24).

Отже, для знаходження НЗ МПВ потрібно знайти всі НЗ підалгебр (3.23) та (3.24).

Нехай, $\tilde{j}_a$ та I_J – базисні елементи НЗ алгебри (3.23) та одиничний оператор, визначений у просторі цього НЗ. Аналогічно, Q'_A, $\bar{Q}'_A$ та I_Q – базисні елементи НЗ алгебри (3.24) та одиничний оператор, визначений у просторі цього НЗ відповідно. Тоді, базисні елементи МПВ (3.22) – (3.24) будуть задаватися формулами

$$j_a = \tilde{j}_a \otimes I_Q, \qquad Q_A = I_j \otimes Q'_A, \qquad \bar{Q}_A = I_j \otimes \bar{Q}'_A, \tag{3.25}$$

де $\otimes$ – прямий добуток відповідних операторів.
Співвідношення (3.23) визначають алгебру Лі $AO(3)$ групи обертань $O(3)$. НЗ цієї алгебри нумеруються цілими чи напівцілими числами, так, що

$$\tilde{j}_1^2 + \tilde{j}_2^2 + \tilde{j}_3^2 = j(j+1) \tag{3.26}$$

Відповідні базисні елементи $\tilde{j}_a$ — це квадратні матриці розмірності $(2j+1) \times (2j+1)$, які можна вибрати у вигляді [8]

$$\begin{aligned} &(\tilde{j}_3)_{ab} = \delta_{ab}(j+1-a), \qquad a, b = 1, 2, \ldots, 2j+1, \\ &(\tilde{j}_1 \pm i\tilde{j}_2)_{ab} = \delta_{ab\pm1}\sqrt{j(j+1) - (j+1-a)(j+1-a\pm1)} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Для знаходження НЗ алгебри (3.24), перейдемо до нового базису

$$\begin{aligned} &Q_1 = \sqrt{2M}(S_{51} + iS_{52}), \;\; \bar{Q}_1 = \sqrt{2M}(S_{51} - iS_{52}), \\ &Q_2 = \sqrt{2M}(S_{53} + iS_{54}), \;\; \bar{Q}_2 = \sqrt{2M}(S_{53} - iS_{54}) \end{aligned} \tag{3.28}$$

і знайдемо

$$\begin{aligned} &[Q_1, \bar{Q}_1] = 4MS_{12}, \qquad [Q_2, \bar{Q}_2] = 4MS_{34}, \\ &[Q_1, \bar{Q}_2] = 2M(iS_{24} - iS_{31} + S_{14} - S_{23}), \\ &[Q_2, \bar{Q}_1] = 2M(iS_{31} - S_{23} + S_{14} - iS_{24}), \\ &[Q_1, Q_2] = -2M(iS_{31} + iS_{24} + S_{14} + S_{23}), \\ &[\bar{Q}_1, \bar{Q}_2] = 2M(-iS_{31} - iS_{24} + S_{14} + S_{23}). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Оператори $S_{\mu\nu}$, $(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5)$ взаємно–однозначно виражаються через Q_A, $\bar{Q}_A$, так, що

$$\begin{aligned}
&S_{51} = \frac{1}{2\sqrt{2M}}(Q_1 + \bar{Q}_1), \qquad S_{52} = -\frac{i}{2\sqrt{2M}}(Q_1 - \bar{Q}_1),\\
&S_{53} = \frac{1}{2\sqrt{2M}}(Q_2 + \bar{Q}_2), \qquad S_{54} = -\frac{i}{2\sqrt{2M}}(Q_2 - \bar{Q}_2),\\
&S_{12} = \frac{1}{4M}[Q_1, \bar{Q}_1], \qquad S_{34} = \frac{1}{4M}[Q_2, \bar{Q}_2],\\
&S_{14} = \frac{1}{8M}([Q_1, \bar{Q}_2] + [Q_2, \bar{Q}_1] + [\bar{Q}_1, \bar{Q}_2] - [Q_1, Q_2]),\\
&S_{23} = \frac{1}{8M}([\bar{Q}_1, \bar{Q}_2] - [Q_1, Q_2] - [Q_1, \bar{Q}_2] - [Q_2, \bar{Q}_1]),\\
&S_{13} = -\frac{i}{8M}([Q_1, Q_2] + [\bar{Q}_1, Q_2] + [Q_1, \bar{Q}_2] + [\bar{Q}_1, \bar{Q}_2])\\
&S_{24} = \frac{i}{8M}([Q_1, Q_2] - [Q_1, \bar{Q}_2] - [\bar{Q}_1, Q_2] + [\bar{Q}_1, \bar{Q}_2]).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Використовуючи (3.24) можна знайти, що (3.30) задовольняють комутаційним співвідношенням

$$\begin{aligned}
&[S_{kl}, S_{mn}] = i(\delta_{km}S_{ln} + \delta_{ln}S_{km} - \delta_{kn}S_{lm} - \delta_{lm}S_{kn}),\\
&S_{kl} = -S_{lk} \;\; k, l = 1, 2, \ldots 5,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

які характеризують алгебру Лі $AO(5)$ групи обертань п'ятивимірного простору.

НЗ алгебри $AO(5)$ нумеруються парою чисел (n_1, n_2), які приймають одночасно цілі та напівцілі значення (крім того, $n_1 \geq n_2$) [30]. Відповідні базисні елементи є квадратними матрицями розмірності $N(n_1, n_2) \times N(n_1, n_2)$, де [22]

$$N(n_1, n_2) = \frac{1}{6}(n_1 - n_2 + 1)(n_1 + n_2 + 2)(2n_1 + 3)(2n_2 + 1). \tag{3.32}$$

Явний вигляд базисних елементів алгебри $AO(5)$ див. у **Додатку А**.

Таким чином, ми довели, що для класу I $(P_\mu P^\mu > 0, \quad \varepsilon = 1)$ МПВ зводиться до прямої суми алгебр $AO(3)$ та $AO(5)$

$$\text{МПВ} = AO(3) \oplus AO(5) \tag{3.33}$$

Отже, НЗ PPSA для I класу нумеруються набором чисел (M, j, n_1, n_2).

Розглянемо тепер випадок (3.14), (3.19). Аналогічно попередньому, знаходимо з (3.5), (3.9), (3.2)

$$\begin{aligned}
&B_{\mathrm{a}} = W_{\mathrm{a}} + X_{\mathrm{a}} = MS_{\mathrm{a}} + X_{\mathrm{a}} \equiv Mj_{\mathrm{a}}, \qquad \mathrm{a} = 1,2,3, \\
&[B_0, Q_A] = -\frac{M}{2}Q_A, \qquad [B_0, \bar{Q}_A] = \frac{M}{2}\bar{Q}_A, \\
&[Q_A, [\bar{Q}_A, Q_B]] = -4MQ_B, \qquad [\bar{Q}_A, [Q_A, \bar{Q}_B]] = -4M\bar{Q}_B, \\
&[j_a, Q_A] = 0, \quad [j_a, \bar{Q}_A] = 0, \quad [j_a, j_b] = i\varepsilon_{abc}j_c.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Вибираючи новий базис (3.29), (3.30), можна переконатись, що оператори $S_{\mu\nu}$ задовольняють співвідношенням

$$\begin{aligned}
&[S_{\mu\nu}, S_{\lambda\rho}] = i(g_{\mu\rho}S_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}S_{\mu\rho} - g_{\mu\lambda}S_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}S_{\mu\lambda}), \\
&g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = -g_{55} = 1,
\end{aligned} \tag{3.35}$$

що характеризують алгебру $AO(4,1)$ групи обертань псевдоевклідового простору.

Таким чином, МПВ $\tilde{I}$ – го класу з від'ємним знаком енергії є прямою сумою алгебр $AO(3)$ та $AO(4,1)$

$$\text{МПВ} = AO(3) \oplus AO(4,1) \tag{3.36}$$

НЗ алгебри $AO(3)$ описані вище. Щодо НЗ алгебри $AO(4,1)$ див. наприклад [8].

Знайдемо явний вигляд базисних елементів PPSA для часоподібного 4–імпульса. Вектор Паулі–Любанського у системі спокою (3.18) чи (3.19) згідно (3.6), (3.20), (3.34), (3.30) визначається формулою

$$W_0^R = 0, \qquad W_a^R = M(j_a - \frac{1}{4}\varepsilon_{abc}S_{bc} - \frac{1}{2}S_{4a}) \equiv -\varepsilon MS_a, \tag{3.37}$$

$$\varepsilon = \pm 1, \;\; j_a = \tilde{j}_a \otimes I_{N_\varepsilon(n_1,n_2)}, \qquad S_{kl} = I_{2j+1} \otimes \hat{S}_{kl}, \tag{3.38}$$

$\tilde{j}_a$ та $\tilde{S}_{kl}$ — базисні елементи НЗ $D(j)$ та $D_\varepsilon(n_1,n_2)$ алгебр $AO(3)$ та $AO(5)$ чи $AO(4,1)$ відповідно, $I_{N_\varepsilon(n_1,n_2)}$ та I_{2j+1}—одиничні матриці розмірності $N_\varepsilon(n_1,n_2) \times N_\varepsilon(n_1,n_2)$ та $(2j+1) \times (2j+1)$.

За допомогою перетворення Лоренца

$$U = exp\left\{\frac{S_{0a}p_a}{p}arctg\left(\frac{p}{\varepsilon E}\right)\right\}, \;\; U^{-1} = U^*, \tag{3.39}$$

$$E^2 = M^2 + \mathbf{p}^2, \;\; p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

знайдемо явний вигляд вектора Паулі–Любанського у довільній системі відліку

$$\begin{aligned} &W_0 = UW_0^R U^{-1}, \;\; W_a = UW_a^R U^{-1} \\ &W_0 = -p_a S_a, \qquad W_a = -\varepsilon M S_a + \varepsilon \frac{p_a S_b p_b}{(E+M)}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

покладаючи у (3.39)

$$S_{0a} = -iS_a, \;\; S_a = \frac{i}{2}\sigma_a, \tag{3.41}$$

знайдемо оператор перетворення Лоренца для спінорів

$$U_s = exp\left\{ \frac{\sigma_a p_a}{2p} arctg\left(\frac{p}{\varepsilon E} \right) \right\} \equiv \frac{E + M + \varepsilon \sigma_a p_a}{\sqrt{2M(E+M)}}. \tag{3.42}$$

Таким чином, парасуперзаряди (3.28) у довільній системі відліку матимуть вигляд

$$\begin{aligned} &Q'_A = (U_s)_{AB} Q_B, \;\; \bar{Q}'_A = (U_s)^*_{AB} \bar{Q}_B, \\ &Q'_1 = \frac{1}{\sqrt{E+M}} [(S_{51} + iS_{52})(E + M + \varepsilon p_3) + \varepsilon (S_{53} + iS_{54})(p_1 - ip_2)], \\ &Q'_2 = \frac{1}{\sqrt{E+M}} [\varepsilon (S_{51} + iS_{52})(p_1 + ip_2) + (S_{53} + iS_{54})(E + M - \varepsilon p_3)], \\ &\bar{Q}'_A = {Q'_A}^* \end{aligned} \tag{3.43}$$

(зірочка означає комплексне спряження).

Явний вигляд генераторів групи Пуанкаре, що відповідає вектору Паулі–Любанського (3.40) добре відомий (див. наприклад [95]). Задамо його у формі

$$\begin{aligned} &P_0 = \varepsilon E, \qquad P_a = p_a, \\ &J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + \varepsilon_{abc} S_c, \\ &J_{0a} = x_0 p_a - \frac{i\varepsilon}{2} [\frac{\partial}{\partial p_a}, E]_+ - \varepsilon \frac{\varepsilon_{abc} p_b S_c}{E+M}, \end{aligned} \tag{3.44}$$

де S_a визначено у (3.37).

Таким чином, ми описали всі нееквівалентні НЗ PPSA для часоподібного 4–імпульса та знайшли явний вигляд відповідних базисних елементів (див. формули (3.37), (3.43), (3.44)).

3.4 Незвідні зображення для світлоподібного 4–імпульса

Розглянемо безмасовий випадок $P_\mu P^\mu = 0$, $\varepsilon = 1$ або $\varepsilon = -1$. Для визначення МПВ виберемо стандартний імпульс у вигляді

$$P^\mu = (M, 0, 0, M), \tag{3.45}$$

для класу (3.15);

$$P^\mu = (-M, 0, 0, -M), \tag{3.46}$$

для класу (3.16).

Комутаційні співвідношення (3.2) зводяться до вигляду

$$[Q_1, [\bar{Q}_1, Q_1]] = 8M\varepsilon Q_1, \qquad [\bar{Q}_1, [Q_1, \bar{Q}_1]] = 8M\varepsilon \bar{Q}_1, \tag{3.47}$$

$$[Q_1, [\bar{Q}_1, Q_2]] = 8M\varepsilon Q_2, \qquad [\bar{Q}_1, [Q_1, \bar{Q}_2]] = 8M\varepsilon \bar{Q}_2. \tag{3.48}$$

Всі інші можливі подвійні комутатори між Q_A та $\bar{Q}_A$ дорівнюють нулю.

Розглянемо алгебру (3.47). Виберемо нові базисні елементи цієї алгебри, що взаємно–однозначно виражаються через Q_1 та $\bar{Q}_1$

$$\begin{aligned} j_1 &= \frac{1}{4\sqrt{M}}(Q_1 + \bar{Q}_1), \quad j_2 = \frac{i}{4\sqrt{M}}(Q_1 - \bar{Q}_1), \\ j_3 &= \frac{1}{8M}[Q_1, \bar{Q}_1]. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Можна переконатись, що оператори (3.49) задовольняють алгебрі $AO(3)$ (3.23) для випадку (3.45) та алгебрі $AO(2,1)$

$$[j_1, j_2] = ij_3, \;\; [j_3, j_1] = -ij_2, \;\; [j_2, j_3] = -ij_1, \tag{3.50}$$

для випадку (3.46).

Оскільки формули (3.49) задають взаємно – однозначне співвідношення між операторами j_a та Q_A, $\bar{Q}_A$, то алгебра (3.47) зводиться до алгебри $AO(3)$ для $\varepsilon = 1$ та $AO(2,1)$ для $\varepsilon = -1$. Алгебра (3.48) доповнена нульвими подвійними комутаційними співвідношеннями має тільки тривіальні розв'язки для Q_2, $\bar{Q}_2$. З урахуванням останнього та формули (3.49), знайдемо загальний вигляд парасуперзарядів:

$$Q_1 = 2\sqrt{M}(j_1 + ij_2), \quad \bar{Q}_1 = 2\sqrt{M}(j_1 - ij_2), \quad Q_2 = \bar{Q}_2 \equiv 0, \tag{3.51}$$

Згідно (3.5)– (3.7) одержимо:

$$W_0 = \varepsilon M S_3,$$
$$X_0 = \frac{1}{8}[Q_1, \bar{Q}_1] \equiv M j_3, \quad X_1 = X_2 = 0, \tag{3.52}$$
$$B_0 = W_0 + X_0 = W_0 + M j_3, \quad B_1 = W_1, \quad B_2 = W_2,$$

де S_3 – третя компонента звичайного вектора спіну, j_3 визначено у (3.49).

Використовуючи (3.3) (3.47) (3.48), можна пересвідчитись, що оператори

$$T_1 = B_1, \;\; T_2 = B_2, \;\; T_0 = \frac{B_0}{M} - \frac{1}{2}(j_3 - j), \tag{3.53}$$

задовольняють комутаційним співвідношенням

$$[T_0, T_1] = iT_2, \quad [T_0, T_2] = -iT_1, \qquad [T_1, T_2] = 0, \tag{3.54}$$

що характеризують алгебру $AE(2)$ групи рухів двовимірного евклідового простору.

Крім того

$$[T_0, j_a] = 0, \quad [T_1, j_a] = 0, \quad [T_2, j_a] = 0, \tag{3.55}$$

$$[T_0, P_\mu] = 0, \quad [T_1, P_\mu] = 0, \quad [T_2, P_\mu] = 0, \quad [j_a, P_\mu] = 0. \tag{3.56}$$

Отже, МПВ редукується до прямої суми алгебр $AO(3)$ та $AE(2)$

$$\text{МПВ} = AO(3) \oplus AE(2), \tag{3.57}$$

для класу $P_\mu P^\mu = 0$, $\varepsilon = 1$;
та до прямої суми алгебр $AO(2,1)$ та $AE(2)$

$$\text{МПВ} = AO(2,1) \oplus AE(2), \tag{3.58}$$

для класу $P_\mu P^\mu = 0$, $\varepsilon = -1$.

Алгебра $AE(2)$ має два оператора Казимира [66]

$$C_1 = T_1^2 + T_2^2, \;\; C_2 = exp(2i\pi T_0) \tag{3.59}$$

Розрізняють два класи НЗ алгебри $AE(2)$, що відповідають $C_1 = 0$ та $C_1 = r^2 > 0$, $(0 < r < \infty)$. Якщо $C_1 = 0$, то

$$T_1 = T_2 = 0, \;\; T_0 = \lambda, \tag{3.60}$$

де λ – довільне ціле чи напівціле число. Якщо

$$C_1 = r^2 > 0, \tag{3.61}$$

то відповідне НЗ реалізується нескінченно – вимірними матрицями. Нехай, $| \, r, n >$—власні вектори комутуючих операторів C_1 та T_0. Тоді

$$\begin{aligned} &C \mid r, n >= r^2 \mid r, n >, \\ &\quad T_0 \mid r, n >= n \mid r, n >, \\ &(T_1 \pm iT_2) \mid r, n >= r \mid r, n \pm 1 > . \end{aligned} \tag{3.62}$$

Таким чином, НЗ алгебри (3.23), (3.54), (3.55) нумеруються парою чисел (j, r) (або (j, λ), якщо $r = 0$).Позначимо через $| \, j, \nu; r, n >$ власні вектори комутуючих матриць j^2, j_3, C_1, T_0. Використовуючи (3.27), (3.62), знайдемо явний вигляд базисних елементів НЗ цієї алгебри

$$\begin{aligned} &j_3 \mid j, \nu; r, n >= \nu \mid j, \nu; r, n >, \qquad \nu = j, j-1, \ldots - j, \\ &(j_1 \pm ij_2) \mid j, \nu; r, n >= \sqrt{j(j+1) - \nu(\nu \pm 1)} \mid j, \nu \pm 1; r, n >, \\ &T_0 \mid j, \nu; r, n >= n \mid j, \nu; r, n >, \\ &(T_1 \pm iT_2) \mid j, \nu; r, n >= r \mid j, \nu; r, n \pm 1 >, \\ &\begin{cases} n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ або } \; n = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots, & r \neq 0 \\ n = \lambda, & r = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.63}$$

Алгебра $AO(2,1)$ має два основних оператора Казимира

$$I_1 = j_1^2 + j_2^2 - j_3^2, \;\; I_2 = exp(2i\pi j_3) \tag{3.64}$$

Можна виділити шість класів НЗ алгебри $AO(2,1)$, що відповідають всім можливим комбінаціям власних значень операторів (3.64). (Детальніше про НЗ алгебри $AO(2,1)$ див. у [66]).

Нехай, $| \, \alpha, m, \varphi; r, n >$ —власний вектор комутуючих операторів I_1, j_3, I_2, C_1, T_0. Тоді, явний вигляд базисних елементів НЗ алгебри (3.50), (3.54), (3.55) задамо формулами

$$\begin{aligned}
&j_3 \mid \alpha, m, \varphi; r, n >= (m+\varphi) \mid \alpha, m, \varphi; r, n >,\\
&(j_1 \pm i j_2) \mid \alpha, m, \varphi; r, n >= i\sqrt{\alpha(m+\varphi)(m+\varphi\pm 1)} \mid \alpha, m\pm 1, \varphi; r, n >,\\
&T_0 \mid \alpha, m, \varphi; r, n >= n \mid \alpha, m, \varphi; r, n >,\\
&(T_1 \pm i T_2) \mid \alpha, m, \varphi; r, n >= r \mid \alpha, m, \varphi; r, n\pm 1 >,\\
&\begin{cases} n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{або} \quad n = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots, & r \neq 0\\ n = \lambda, & r = 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.65}$$

де α та φ власні значення операторів I_1 та I_2 відповідно.

Отже, НЗ алгебри (3.50), (3.54), (3.55) нумеруються набором чисел (α, φ, r) (або $(\alpha, \varphi, \lambda)$, якщо $r = 0$).

Знайдемо явний вигляд операторів W_μ, Q_A, $\bar{Q}_A$ у довільній системі відліку. Неважко перевірити, що за допомогою оператора перетворення

$$U = exp\left\{\frac{i(S_1 p_2 - S_2 p_1)}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}} arctg\frac{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}{p_3}\right\}, \ \ U^{-1} = U^*, \tag{3.66}$$

(де S_a – спінові матриці з групи $O(3)$) одержимо вектор Паулі–Любанського у довільній системі відліку.

Для спінорів оператор (3.66) редукується до вигляду

$$\begin{aligned}
&U_s = exp\left\{\frac{i(\sigma_1 p_2 - \sigma_2 p_1)}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}} arctg\frac{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}{p_3}\right\} \equiv\\
&\equiv \frac{p + p_3 + i(\sigma_1 p_2 - \sigma_2 p_1)}{\sqrt{2p(p+p_3)}}, \ \ p = \sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Застосовуючи перетворення (3.66) та (3.67) до операторів групи Пуанкаре та парасуперзарядів (3.51) відповідно, знайдемо їхній загальний вигляд у довільній системі відліку

$$\begin{aligned}
&Q_1 = \sqrt{2(p+p_3)}(j_1 + i j_2), \quad \bar{Q}_1 = \sqrt{2(p+p_3)}(j_1 - i j_2),\\
&Q_2 = \frac{\sqrt{2}(p_1 + i p_2)}{\sqrt{p+p_3}}(j_1 + i j_2), \ \ \bar{Q}_2 = \frac{\sqrt{2}(p_1 - i p_2)}{\sqrt{p+p_3}}(j_1 - i j_2),
\end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned} &P_0 = \varepsilon p, \qquad P_a = p_a, \\ &J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + T_0 \varepsilon_{abc} \frac{p_c + \delta_{c3} p}{p + p_3}, \\ &J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2}\varepsilon [p, x_a]_+ + \frac{\varepsilon_{abc} T_b p_c}{p^2} - \frac{\varepsilon_{abc} p_b n_c (\varepsilon T_0 p^2 - T_d p_d)}{p^2 (p + p_3)}, \end{aligned} \tag{3.69}$$

де $\vec{\mathbf{n}} = (0,0,1)$, $T_3 = 0$, T_0, T_1, T_2 — генератори алгебри $AE(2)$. Зображення алгебри $AE(2)$, що відповідає $C_1 = r^2 = 0$ описує частинки з дискретним спіном і знаходить широке застосування у фізиці. Формули (3.69) зводяться у цьому випадку до вигляду

$$\begin{aligned} &P_0 = \varepsilon p, \qquad P_a = p_a, \\ &J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + \lambda \varepsilon_{abc} \frac{p_c + \delta_{c3} p}{p + p_3}, \\ &J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2}\varepsilon [p, x_a]_+ - \frac{\varepsilon \lambda \varepsilon_{abc} p_b n_c}{(p + p_3)}, \end{aligned} \tag{3.70}$$

де $\lambda = \varepsilon\tilde{\lambda} + \frac{1}{2} j_3 + \frac{1}{2} j$, ($\tilde{\lambda}$ – власні значення оператора спіральності).

Знайдені зображення (3.68)–(3.69) відповідають вибраному одиничному вектору $\vec{\mathbf{n}} = (0,0,1)$.

За допомогою унітарного оператора

$$U = exp\left\{ \frac{\vec{S} \times \vec{p} \cdot \vec{n}}{p} arctg \frac{p}{\vec{p} \cdot \vec{n}} \right\}, \tag{3.71}$$

можна перейти до зображення з довільним $\vec{\mathbf{n}} = (n_1, n_2, n_3)$.

Для генераторів алгебри Пуанкаре це зображення добре відоме і має вигляд [66]

$$\begin{aligned} &P_0 = \varepsilon p, \qquad P_a = p_a, \\ &J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + T_0 \varepsilon_{abc} \frac{p_c + n_c p}{p + n_d p_d}, \\ &J_{0a} = x_0 p_a - \tfrac{1}{2}\varepsilon [p, x_a]_+ + \frac{\varepsilon_{abc} T_b p_c}{p^2} - \frac{\varepsilon_{abc} p_b n_c (\varepsilon T_0 p^2 - T_d p_d)}{p^2 (p + n_d p_d)}. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Оскільки парасуперзаряди перетворюються як вейлевські спінори, то для них оператор (3.71) зводиться до вигляду

$$U_s = \left\{ \frac{p + \vec{n}\vec{p} + i\vec{\sigma} \times \vec{p} \cdot \vec{n}}{\sqrt{2p(p + \vec{n}\vec{p})}} \right\}. \tag{3.73}$$

В результаті, одержимо загальний вигляд парасуперзарядів (3.51) у формі

$$\begin{aligned}
&\tilde{Q}_A = (U_s)_{AB} Q_B, \ \ \tilde{\bar{Q}}_A = (U_s^*)_{AB} \bar{Q}_B, \\
&\tilde{Q}_1 = \sqrt{\frac{2M}{(p+\vec{n}\vec{p})p}} \left\{ p + \vec{n}\vec{p} + i(p_1 n_2 - p_2 n_1) \right\} (j_1 + i j_2), \\
&\tilde{Q}_2 = \sqrt{\frac{2M}{(p+\vec{n}\vec{p})p}} \{ i(p_2 n_3 - p_3 n_2) + p_1 n_3 - p_3 n_1 \} (j_1 + i j_2), \\
&\tilde{\bar{Q}}_1 = \tilde{Q}_1^*, \ \ \tilde{\bar{Q}}_2 = \tilde{Q}_2^*.
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Таким чином, ми описали НЗ PPSA для світлоподібного 4–імпульса. Відповідні базисні елементи задаються формулами (3.68), (3.69), (3.70) або (3.72), (3.74).

3.5 Незвідні зображення для простороводібного 4–імпульса

Для знаходження МПВ у випадку (3.17) виберемо 4–імпульс у вигляді

$$P^\mu = (0, 0, 0, \eta) \tag{3.75}$$

Відповідні подвійні комутаційні співвідношення (3.2) зводяться до вигляду

$$\begin{aligned}
&[Q_1, [\bar{Q}_1, Q_A]] = 4\eta Q_A, \quad [\bar{Q}_1, [Q_1, \bar{Q}_A]] = 4\eta \bar{Q}_A, \\
&[Q_2, [\bar{Q}_2, Q_A]] = -4\eta Q_A, \ \ [\bar{Q}_2, [Q_2, \bar{Q}_A]] = -4\eta \bar{Q}_A,
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Решта можливі комутаційні співвідношення між Q_A та $\bar{Q}_A$ дорівнюють нулю.

З (3.5), (3.75) випливає, що

$$\begin{aligned}
&B_0 = \eta J_{12} + X_0 \equiv \eta \tilde{J}_{12}, \\
&B_1 = \eta J_{02} + X_1 \equiv \eta \tilde{J}_{01}, \\
&B_2 = -\eta J_{01} + X_2 \equiv \eta \tilde{J}_{02}.
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Оскільки $B_3 = X_3$, то з (3.9) одержимо

$$[\tilde{J}_{\alpha\beta}, Q_A] = [\tilde{J}_{\alpha\beta}, \bar{Q}_A] = 0, \qquad \alpha, \beta = 0, 1, 2. \tag{3.78}$$

Крім того, можна пересвідчитись, що $\tilde{J}_{\alpha\beta}$ задовольняють комутаційним співвідношенням

$$[\tilde{J}_{\alpha\beta}, \tilde{J}_{\rho\sigma}] = i(g_{\alpha\sigma}\tilde{J}_{\beta\rho} + g_{\beta\rho}\tilde{J}_{\alpha\sigma} - g_{\alpha\rho}\tilde{J}_{\beta\sigma} - g_{\beta\sigma}\tilde{J}_{\alpha\rho}), \tag{3.79}$$

де

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = 1, \qquad g_{\alpha\beta} = 0, \qquad \alpha \neq \beta. \tag{3.80}$$

які характеризують алгебру $AO(1,2)$.

Розглянемо співвідношення (3.76). Перейдемо до нового базису (3.28), (3.29), покладаючи у цих формулах $Q_1 \leftrightarrow Q_2, \quad M \equiv \eta$. Тоді, можна знайти, що генератори S_{kl} задовольняють алгебрі $AO(2,3)$. Комутаційні співвідношення для цієї алгебри можна одержати з (3.31) з точністю до заміни $\delta_{kl} \to -g_{kl}$, де

$$g_{11} = g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = -g_{55} = 1, \qquad g_{kl} = 0, \qquad k \neq l. \tag{3.81}$$

Отже, МПВ для НЗ третього класу редукується до прямої суми алгебр $AO(1,2)$ та $AO(2,3)$

$$\text{МПВ} = AO(1,2) \oplus AO(2,3). \tag{3.82}$$

НЗ алгебр $AO(1,2)$ та $AO(2,3)$ добре відомі (див. наприклад [30]).

Знайдемо загальний вигляд генераторів PPSA у довільній системі відліку. Покажемо, що оператор перетворення Лоренца

$$U = exp\left\{\frac{-iS_{3\mu}p^{\mu}}{\tilde{p}} arctg\left(\frac{\tilde{p}}{p_3}\right)\right\}, \ \ \tilde{p} = \sqrt{\eta^2 - p_3^2} \tag{3.83}$$

відповідає переходу від системи "спокою" $(0,0,0,\eta)$ до довільної системи (p_0, p_1, p_2, p_3).

Справді, виберемо для $S_{3\mu}$ зображення алгебри
$AP(1,3)$ $D(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Тоді

$$\begin{aligned} S_{3\mu}p^{\mu} \quad &= \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ip_0 \\ 0 & 0 & 0 & ip_1 \\ 0 & 0 & 0 & ip_2 \\ ip_0 & -ip_1 & -ip_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ (S_{3\mu}p^{\mu})^2 \quad &= \quad \begin{pmatrix} -p_0^2 & p_0p_1 & p_0p_2 & 0 \\ -p_0p_1 & p_1^2 & p_1p_2 & 0 \\ -p_0p_2 & p_1p_2 & p_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{p}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.84}$$

Крім того,

$$(S_{3\mu}p^{\mu})^3 = (S_{3\mu}p^{\mu})\tilde{p}^2. \tag{3.85}$$

Отже, розкладаючи в ряд (3.83) та враховуючи (3.85), одержимо

$$\begin{aligned} U = 1 - \frac{iS_{3\mu}p^{\mu}}{\tilde{p}} sin\left(arctg\frac{\tilde{p}}{p_3}\right) + \frac{(S_{3\mu}p^{\mu})^2}{\tilde{p}^2}\left(cos\left(arctg\frac{\tilde{p}}{p_3}\right) - 1\right) \equiv \\ \equiv 1 - \frac{iS_{3\mu}p^{\mu}}{\eta} - \frac{(S_{3\mu}p^{\mu})^2}{\eta(\eta + p_3)} \end{aligned} \tag{3.86}$$

Підставивши (3.84) у (3.86), знайдемо

$$U = \frac{1}{\eta(\eta+p_3)}\begin{pmatrix} \eta(\eta+p_3) - p_0^2 & -p_0p_1 & -p_0p_2 & p_0(\eta+p_3) \\ p_0p_1 & \eta(\eta+p_3) - p_1^2 & -p_1p_2 & p_1(\eta+p_3) \\ p_0p_2 & -p_1p_2 & \eta(\eta+p_3) - p_2^2 & p_2(\eta+p_3) \\ p_0(\eta+p_3) & -p_1(\eta+p_3) & p_2(\eta+p_3) & p_3(\eta+p_3) \end{pmatrix} \tag{3.87}$$

Використовуючи (3.87) знайдемо 4–імпульс P^{μ} та вектор Паулі–Любанського у довільній системі відліку

$$\begin{aligned} &P^{\mu'} = U(P^{\mu})^T \equiv (p_0, p_1, p_2, p_3), \;\; W^{\mu'} = U(W^{\mu})^T, \\ &W_0' = \frac{1}{(\eta+p_3)}\left\{[\eta(\eta+p_3) + p_0^2]J_{12} - p_0p_1J_{02} + p_0p_2J_{01}\right\}, \\ &W_1' = \frac{1}{(\eta+p_3)}\left\{-p_0p_1J_{12} + [\eta(\eta+p_3) - p_1^2]J_{02} + p_1p_2J_{01}\right\}, \\ &W_2' = \frac{1}{(\eta+p_3)}\left\{-p_0p_2J_{12} - p_1p_2J_{02} - [\eta(\eta+p_3) - p_2^2]J_{01}\right\}, \\ &W_3' = p_0J_{12} - p_1J_{02} + p_2J_{01}, \end{aligned} \tag{3.88}$$

де

$$(P^{\mu})^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \eta \end{pmatrix}, \;\; (W_{\mu})^T = \begin{pmatrix} \eta J_{12} \\ \eta J_{02} \\ -\eta J_{01} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор перетворення для парасуперзарядів Q_A та $\bar{Q}_A$ має вигляд (3.83), де

$$S_{30} = \frac{i}{2}\sigma_3, \;\; S_{31} = \frac{1}{2}\sigma_2, \;\; S_{32} = -\frac{1}{2}\sigma_1. \tag{3.89}$$

Використовуючи властивості матриць Паулі, знайдемо, що

$$U_s = \frac{\eta + p_3 + \sigma_3 p_0 + i\sigma_2 p_1 - i\sigma_1 p_2}{\sqrt{2\eta(\eta + p_3)}}. \tag{3.90}$$

Оскільки парасуперзаряди є вейлевськими спінорами, то перетворення Лоренца для них мають вигляд

$$Q'_A = (U_s)_{AB} Q_B, \quad \bar{Q}'_A = (U_s)^*_{AB} \bar{Q}_B.$$

де $(U_s)_{AB}$ – матричні елементи оператора (3.90). В результаті одержимо

$$\begin{aligned}
Q'_1 &= \frac{1}{\sqrt{\eta + p_3}} \left[(S_{51} + iS_{52})(\eta + p_3 + p_0) + (S_{53} + iS_{54})(p_1 - ip_2) \right], \\
Q'_2 &= \frac{-1}{\sqrt{\eta + p_3}} \left[(S_{51} + iS_{52})(p_1 + ip_2) + (S_{53} + iS_{54})(\eta + p_3 - p_0) \right], \\
\bar{Q}'_A &= {Q'_A}^*
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Задамо явний вигляд генераторів групи Пуанкаре, що відповідає вектору Паулі–Любанського (3.88) [70]

$$\begin{aligned}
&P_\mu = p_\mu, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + \tilde{S}_{ab}, \\
&J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2}[x_a, p_0]_+ + \tilde{S}_{0a}, \\
&J_{a3} = x_a p_3 - x_3 p_a - \frac{\tilde{S}_{ab} p_b - \tilde{S}_{a0} p_0}{p_3 + \eta}, \\
&J_{03} = x_0 p_3 - \frac{1}{2}[x_3, p_0]_+ - \frac{\tilde{S}_{0a} p_a}{p_3 + \eta},
\end{aligned} \tag{3.92}$$

де

$$\begin{aligned}
&p_0^2 = \mathbf{p}^2 - \eta^2, \quad \tilde{S}_{12} = \tilde{J}_{12} - \frac{1}{2}(S_{12} + S_{34}), \\
&\tilde{S}_{02} = \tilde{J}_{01} - \frac{1}{2}(S_{23} + S_{41}), \quad \tilde{S}_{01} = \tilde{J}_{02} + \frac{1}{2}(S_{31} + S_{42}),
\end{aligned}$$

$\tilde{J}_{\alpha\beta}$ – базисні елементи алгебри $AO(1,2)$ (3.79), (3.80), S_{kl} – базисні елементи алгебри $AO(2,3)$.

Отже, ми описали НЗ PPSA для світлоподібного 4–імпульса. Явний вигляд генераторів PPSA задається формулами (3.91), (3.92).

3.6 Коваріантні зображення

Задамо спеціальне зображення PPSA, яке грає важливу роль у фізиці. Генератори алгебри Пуанкаре цього зображення мають квантово–механічний вигляд

$$P_\mu = p_\mu, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \tag{3.93}$$

$S_{\mu\nu}$–числові матриці, які виберемо у вигляді

$$S_{ab} = \varepsilon_{abc} S_c, \qquad S_{0a} = -iS_a,$$

де S_a визначені у (3.37).

Генератори (3.93) можна одержати з (3.44) (де $\varepsilon = 1$) за допомогою оператора (3.39).

Аналогічно, застосовуючи (3.39) до парасуперзарядів (3.43) знайдемо

$$\begin{aligned}
&\hat{Q}_A = UQ'_A U^{-1}, \ \ \hat{\bar{Q}}_A = U\bar{Q}'_A U^{-1},\\
&\hat{Q}_1 = \sqrt{2M}(-S_{51} + iS_{52}), \qquad \hat{Q}_2 = \sqrt{2M}(S_{53} - iS_{54}),\\
&\hat{\bar{Q}}_1 = \sqrt{\tfrac{2}{M}}[(p_3 - p_0)(S_{51} + iS_{52}) - (p_1 + ip_2)(S_{53} + iS_{54})],\\
&\hat{\bar{Q}}_2 = \sqrt{\tfrac{2}{M}}[(p_0 + p_3)(S_{53} + iS_{54}) + (p_1 - ip_2)(S_{51} + iS_{52})].
\end{aligned} \tag{3.94}$$

3.7 Спіновий склад незвідних зображень парасуперaлгебри Пуанкаре

Розглянемо фізичну інтерпретацію побудованих НЗ PPSA. Як зазначалося вище, PPSA звідна по відношенню до алгебри Лі групи Пуанкаре. Для розв'язку питання про те, частинки якого спіну входять у НЗ PPSA потрібно знайти власні значення оператора Казимира $C = W_\mu W^\mu$ для алгебри Пуанкаре $AP(1,3)$, що є підалгеброю PPSA.

Розглянемо, спочатку, НЗ PPSA I–го класу (3.13). Враховуючи (3.37), знайдемо у системі спокою, що (для простоти покладемо $j_a = 0$)

$$W_\mu W^\mu = -M^2 \mathbf{S}^2, \quad \mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3), \tag{3.95}$$

де

$$S_a = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc} + S_{4a}). \tag{3.96}$$

Матриці S_{ab}, S_{4a} належать НЗ $D(n_1, n_2)$ алгебри $AO(5)$. Отже, з (3.96) випливає, що власні значення оператора (3.95) можна знайти за допомогою редукції зображення алгебри матриць S_{ab}, S_{4a} по алгебрі $AO(3)$. Справді, проводячи редукцію $AO(5)$ по $AO(4) \supset S_{ab}$, S_{4a}, $(a, b = 1, 2, 3)$, і продовжуючи редукцію до $AO(3) \supset S_a$ (S_a визначено у (3.96)) знайдемо набір власних значень для (3.95)

$$\begin{gathered} W_\mu W^\mu = -M^2 s(s+1), \\ s = \frac{n_1+n_2}{2}, \frac{n_1+n_2-1}{2}, \frac{n_1+n_2-2}{2}, \ldots, 0. \end{gathered} \tag{3.97}$$

Кратність виродження даного власного значення оператора (3.95) визначається формулою

$$M_s = \begin{cases} (n_1 - n_2 + 1)(n_1 + n_2 + 1 - 2s), & s \geq \frac{n_1 - n_2}{2}, \\ (2n_2 + 1)(2s + 1), & s < \frac{n_1 - n_2}{2}. \end{cases} \tag{3.98}$$

Для випадку $j \neq 0$ (див. (3.37)) можливі значення спіну можна знайти як результат складання двох моментів $\vec{\mathbf{j}}$ та $\vec{\mathbf{S}}$ з (3.96). Таким чином, одержимо

$$s = \frac{n_1+n_2}{2} + j, \frac{n_1+n_2}{2} + j - 1, \ldots s_0, \quad s_0 = \begin{cases} 0, & \frac{n_1+n_2}{2} \geq j, \\ j - \frac{n_1+n_2}{2}, & \frac{n_1+n_2}{2} < j. \end{cases} \tag{3.99}$$

Отже, для зображення з фіксованими n_1, n_2 та j парасупермультиплет містить частинки зі спінами (3.97) для $j_a = 0$ або (3.99) для $j_a \neq 0$.

Розглянемо деякі приклади. Нехай, $n_1 = n_2 = 1/2$, тоді ми одержимо НЗ PSA. Справді, у цьому випадку відповідні оператори Q_A та $\bar{Q}_A$ (3.43) задовольняють комутаційним співвідношенням (1.4), що характеризують PSA. Крім того, формули (3.98), (3.99) зводяться до добре відомих співвідношень [65] для спінового складу супермультиплета PSA

$$s = j + \frac{1}{2}, j, j - \frac{1}{2}; \quad M_j = 2, M_{j \pm \frac{1}{2}} = 1 \tag{3.100}$$

Таким чином, ми ще раз пересвідчились, що PSA є частковим випадком PPSA.

Якщо $n_1 = n_2 = 1$, то з (3.97), (3.98) (для скалярного парасуперполя, тобто для $j = 0$) одержимо

$$s = 1,\ \frac{1}{2},\ 0;\ \ M_1 = 1,\ M_{\frac{1}{2}} = 2,\ M_0 = 3. \tag{3.101}$$

Розглянемо НЗ PPSA для II–го класу (3.15) з дискретним спіном. Відповідні базисні елементи визначені у (3.68), (3.70). Відомо, що для цього класу існує додатковий оператор Казимира–оператор спіральності

$$C = \frac{\vec{J}\vec{P}}{|\vec{P}|} = \frac{J_{12}p_3 + J_{31}p_2 + J_{23}p_1}{|\vec{P}|}. \tag{3.102}$$

З іншого боку, для цього класу НЗ справедливо

$$W_\mu = \varepsilon C P_\mu. \tag{3.103}$$

Враховуючи (3.103), (3.53), (3.60) знайдемо, що

$$C = \lambda - \frac{1}{2}j_3 - \frac{1}{2}j. \tag{3.104}$$

Отже, власні значення оператора (3.104) визначаються формулою

$$\tilde{\lambda} = \lambda,\ \ \lambda - \frac{1}{2},\ \ \lambda - 1, \ldots, \lambda - j. \tag{3.105}$$

(оскільки j_3 змінюється в межах від $-j$ до j).
Для $j = \frac{1}{2}$ одержимо результат, відомий з аналізу НЗ PSA з відповідним спіновим складом супермультиплета. Для $j = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$ одержимо найпростіший парасупермультиплет, що містить одну безспінову частинку та одну частинку зі спіном $\frac{1}{2}$.

Додаток А

Незвідні зображення групи $O(5)$

Дамо короткий опис НЗ групи $O(5)$ та запишемо явний вигляд її базисних елементів.

Ортогональна група $O(5)$–це множина всіх лінійних перетворень 5–вимірного Евклідового простору, що зберігають квадратичну форму

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_5^2$$

Алгебра Лі цієї групи характеризується комутаційними співвідношеннями (1.40). Скінченновимірне НЗ алгебри Лі $AO(5)$ однозначно визначається парою чисел n_1 та n_2, що приймають одночасно цілі чи напівцілі значення (причому $n_1 \geq n_2$).

Кожне зображення алгебри $AO(5)$ породжує зображення алгебри $AO(4)$, яке в свою чергу можна розкласти на незвідні компоненти, що визначаються парами m_1 та m_2. У базисі Гельфанда–Цетліна [8] всі оператори Казимира підалгебр $AO(4) \supset AO(3) \supset AO(2)$ діагональні і характеризуються власними значеннями m_1, m_2, де $n_1 \geq m_1 \geq n_2 \geq m_2 \geq -n_2; l$, де $m_1 \geq l \geq\mid m_2 \mid, m$, де $l \geq m \geq -l$ відповідно. Виберемо канонічний базис у вигляді

$$\xi \begin{pmatrix} m_1 & & m_2 \\ & l & \\ & m & \end{pmatrix}$$

Визначимо дію операторів $S_{21}, \quad S_{32}, \quad S_{43}, \quad S_{54}$ у цьому базисі по формулам (m_1 та m_2 – фіксовані)

$$S_{21}\xi\begin{pmatrix} m_1 & & m_2 \\ & l & \\ & m & \end{pmatrix} = m\xi\begin{pmatrix} m_1 & & m_2 \\ & l & \\ & m & \end{pmatrix},$$

$$S_{32}\xi\begin{pmatrix} m_1 & & m_2 \\ & l & \\ & m & \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\xi\begin{pmatrix} m_1 & & m_2 \\ & l & \\ & m+1 & \end{pmatrix} +$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{(l-m+1)(l+m)}\xi\begin{pmatrix} m_1 & & m_2 \\ & l & \\ & m-1 & \end{pmatrix},$$

$$S_{43}\xi\begin{pmatrix} m_1 & & m_2 \\ & l & \\ & m & \end{pmatrix} =$$

$$= \sqrt{\tfrac{(l+m+1)(l-m+1)(m_1-l)(m_1+l+2)(l-m_2+1)(l+m_2+1)}{(2l+1)(2l+3)(l+1)^2}}\xi\begin{pmatrix} m_1 & & m_2 \\ & l+1 & \\ & m & \end{pmatrix} +$$

$$+i\tfrac{m(m_1+1)m_2}{(l+1)l}\xi\begin{pmatrix} m_1 & & m_2 \\ & l & \\ & m & \end{pmatrix} -$$

$$-\sqrt{\tfrac{(l+m)(l-m)(m_1-l+1)(m_1+l+1)(l-m_2)(l+m_2)}{(2l+1)(2l-1)l^2}}\xi\begin{pmatrix} m_1 & & m_2 \\ & l-1 & \\ & m & \end{pmatrix},$$

$$S_{54}\xi\begin{pmatrix} m_1 & & m_2 \\ & l & \\ & m & \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\tfrac{(m_1-l+1)(m_1+l+2)(n_1-m_1)(n_1+m_1+3)(m_1-n_2+1)(m_1+n_2+2)}{(m_1+m_2+1)(m_1+m_2+2)(m_1-m_2+1)(m_1-m_2+2)}}\times$$

$$\times\xi\begin{pmatrix} m_1+1 & & m_2 \\ & l & \\ & m & \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\tfrac{(l-m_2)(m_2+l+1)(n_2-m_2)(n_2+m_2+1)(n_1-m_2+1)(n_1+m_2+2)}{(1+m_1+m_2)(m_1+m_2+2)(m_1-m_2)(m_1-m_2+1)}}\times$$

$$\times\xi\left(\begin{array}{ccc} m_1 & & m_2+1 \\ & l & \\ & m & \end{array}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(m_1+l+1)(m_1-l)(n_1-m_1+1)(n_1+m_1+2)(m_1-n_2)(m_1+n_2+1)}{(m_1+m_2)(m_1+m_2+1)(m_1-m_2)(m_1-m_2+1)}}\times$$

$$\times\xi\left(\begin{array}{ccc} m_1-1 & & m_2 \\ & l & \\ & m & \end{array}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(l-m_2+1)(m_2+l)(n_2-m_2+1)(n_2+m_2)(n_1-m_2+2)(m_2+n_1+1)}{(m_1+m_2)(m_1+m_2+1)(m_1-m_2+2)(m_1-m_2+1)}}\times$$

$$\times\xi\left(\begin{array}{ccc} m_1 & & m_2-1 \\ & l & \\ & m & \end{array}\right).$$

Інші генератори алгебри $AO(5)$ можна знайти, використовуючи (3.31).

Висновки

Сформулюємо коротко результати одержані у дисертаційній роботі.

У першому розділі вивчені лiївськi симетрії двочастинкового рівняння Шродінгера для взаємодіючих яастинок. Знайдено оператори симетрії 1-го порядку для конкретного класу потенціалів. Показано зв'язок між операторами симетрії вільного рівняння Шродінгера та операторами симетрії рівняння Шродінгера із взаємодією.

У другому розділі досліджені лiївськi та нелiївськi симетрії *одно*-вимірного та тривимірного двочастинкого рівняння Дірака з осциляторно-подібною взаємодією. Використовуючи алгебраїчний метод знайдені інтеграли руху цих рівнянь. Показано, що вони допускають приховані парасуперсиметрії. Побудовано перетворення Фолдi-Воутхойзена та одержано енергетичний спектр гамільтоніанів даних рівнянь. Проаналізовано зв'язок між розглянутими моделями та парарелятивістським квантовим осцилятором і осцилятором Кемера— Деффіна-Петьє.

Проведено узагальнення двонастинкового осцилятора Дірака до двочастинкових рівнянь довільного спіну з осциляторно—подібним потенціалом.

У третьому розділі побудовані незвідні зображення парасуперaлгебри Пуанкаре для часоподібного, світлоподібного та просторовоподібного 4-імпульса. Побудовано коваріантне зображення даної алгебри.

Результати, одержані у дисертації можуть бути використані у квантовій механіці та квантовій теорії поля.

Література

[1] Березовой В.П., Пашнев А.И. Суперсимметричная квантовая механика и перестройка спектров гамильтонианов / / ТМФ (1987), т.70, N 1, с.146-153.

[2] Борисов Н.В., Ильинский К.Н., Уздин В.М. Обобщенные алгебры суперсимметричной квантовой механики / / ТМФ (1993), т.94, N 3, с.418-425.

[3] Волков Д.В., Акулов В.П. О возможном универсальном взаимодействии нейтрино / / Письма ЖЭТФ, (1972), т.16, с.621-624.

[4] Гайда Р.П., Третьяк В.Г., Яременко Ю.Г. Переменные центра масс в релятивистской лагранжевой механике системы частиц / / Укр. физ. ж. (1991), 36, N 12, с.1807-1810.

[5] Гайда Р.П., Ключковский Ю.Б., Третьяк В.Г. Теоретико групповой подход к построению релятивистской лагранжевой механики системы частиц / / Укр. мат. ж. (1991), 43, N 11, с.1516-1521.

[6] Генденштейн Л.Э., Криве И.В. Суперсимметрия в квантовой механике / / УФИ (1985), т.146, выл.4, с.554—589.

[7] Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П. Расширение алгебры генера торов группы Пуанкаре и нарушение Р-инвариантности / / Письма ЖЭТФ , (1971), т.13, с.452-455.

[8] Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, Физматгиз, Москва, 1958, 367с.

[9] Двоеглазов В.В., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н. Уровни энергии водородоподобных атомов и фундаментальные константы / / ФЭЧАЯ (1994), т.25, вып.1, с.144-228.

[10] Зайков Р.П. Суперсимметричное обобщение уравнения Тодорова / / ТМФ (1985), т.64, N 1, с.61-68.

[11] Надарейшвили Т.П. Соотношение между релятивистскими и нерелятивистскими связанными состояниями в квазипотенциальной модели / / Тр. Тбил. Ин-та, (1990), N 296, с.127-155.

[12] Никитин А.Г., Онуфрийчук С.П., Фущич В.И. Высшие симметрии уравнения Шредингера / / ТМФ (1992), 91, N 2, с.268-278.

[13] Никитин А.Г., Онуфрийчук С.П., Прилипко А.И. Операторы симметрии уравнения Брейта / / Доклады АН УССР, сер. А физ.-хим. и техн. науки, (1990), N 6, с.28-31.

[14] Никитин А.Г. Полный набор операторов симметрии уравнения Шредингера / / УМЖ (1991), 43, с.15-21.

[15] Никитин А.Г., Фущич В.И., Нелиевские интегралы движения для частиц произвольного спина и для систем взаимодействующих частиц. / / ТМФ (1991), 88, N 3, с. 406—415.

[16] Третиник В.В. Приховані симетрії двочастинкового рівняння Дірака з лінійною взаємодією / / Тези доповідей Четвертої Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука, Київ, 1995, с.237.

[17] Третиник В.В. Ліївські та неліївські симетрії двочастинкових рівнянь з лінійною взаємодією. / / Тези доповідей Всеукраїнсь кої наукової конференції ’’Розробка та застосування матема тичних методів в науково-технічних дослідженнях”, Львів, 4-8 жовтня, 1995, с.96-97.

[18] Третиник В.В. Зображення парасупер態алгебри Пуанкаре для світлоподібного 4-імпульса / / ДАН (1995), N 11, с.24—26.

[19] Уэст П. Введение в суперсимметрию и супергравитацию, Москва, Мир, 1989, 328с.

[20] Фок В.А. Атом водорода и неевклидова геометрия / / Известия АН СССР (1935), N 2, с.169-179.

[21] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и тонные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наукова думка, 1989, 335с.

[22] Хамермеш М. Теория групп и её применения к физическим проблемам, Москва, Мир, 1966, 587с.

[23] Широков Ю. М. Теоретико-групповое рассмотрение основ релятивистской квантовой механики (ч.I, Ш) / /ЖЭТФ, (1957), 33, с.861-872; 1208-1214.

[24] Anderson R.L., Kumei S., Wulfman C.E. Invariants of the equations of wave mechanics. / / Revista Mexicana de Fisica (1972), 21, p.1-33.

[25] Andrianov A.A. and Ioffe M.V. From supersymmetric quantum mechanics to a parasupersymmetric one / / Phys. Lett. (1991), B 255, p.543-548.

[26] Andrianov A.A., Ioffe M.V., Spiridonov V.P., and Vinet L. Parasupersymmetry and truncated supersymmetry in quantum mechanics / / Phys. Lett. (1991), B 272, p.297-304.

[27] Arai Asao On the degeneracy in the ground state of the $N = 2$ Wess-Zumino supersymmetric quantum mechanics / / J. Math. Phys. (1989), 30(12), p.2973-2977.

[28] Barut A.O. and Komy S.O. Derivation of nonperturbative relativistic two-body equations from the action principle in quantum electrodynamics / / Fortsch. Phys. (1985), 33, p.309—318.

[29] Barut A.O., Bracken A.I., Komy S.O., Unal N. New approach to the determination of eigenvalues and eigenfunctions for a relativistic two—fermion equation / / J . Math. Phys. (1993), 34, N 6, p.2089-2106.

[30] Barut A., Raczka R. Theory of Group Representations and Applications (Warszawa: PWN), 1977.

[31] Beckers J., Debergh N., Nikitin A.G. More of symmetries of the Schrödinger equation / / J . Phys. A.: Math, and Gen. (1991), 24, N 24. p.L1269 -L1275.

[32] Beckers J., Debergh N., Nikitin A.G. More of supersymmetries of the Schrödinger equation / / Mod. Phys. Lett. A. (1992), 7, N 18, p.1609-1616.

[33] Beckers J., Debergh N., Nikitin A.G. More of parasupersymme tries of the Schrödinger equation / / Mod. Phys. Lett. A.-1993.-8, N 5. -P.435-444.
[34] Beckers J., Debergh N. and Nikitin A.G. On supersymmetries in nonrelativistic quantum mechanics / / J . Math. Phys. (1992), 33, p.152-160.
[35] Beckers J., Debergh N., Nikitin A.G. On a hidden dynamical *SU(3)*-symmetry in parasuper symmetric quantum mechanics / / J. Phys. A.: Math. Gen. (1993), 26, p.L853-L857.
[36] Beckers J., Debergh N., and Nikitin A.G. On pararelativistic quantum oscillators / / J . Math. Phys. (1992), 33, N 10, p.3387-3392.
[37] Beckers J., Debergh N., Nikitin A.G. Lie extended symmetries and relativistic particles. / / J . Phys. (1992), A 25, p.6145—6154.
[38] Beckers J., Debergh N., Nikitin A.G. On parasypersymmetries and relativistic descriptions for spin one particles: I. The free context. / / Fortschr. Phys. (1995), 43(1), p.67-80.
[39] Beckers J., Debergh N., Nikitin A.G. On parasypersymmetries and relativistic descriptions for spin one particles: II. The interacting context with (electro) magnetic fields. / / Fortschr. Phys. (1995), 43(1), p.81-96.
[40] Beckers J., Debergh N., Nikitin A.G. Extended Dirac symmetries and hidden supersymmetry. / / Phys. Lett. (1992), B 279, p.333- 335.
[41] Beckers J., Debergh N. Lie structure in parasypersymmetric quantum mechanics: The standard supersymmetrization procedure / / J. Math. Phys. (1991), 32(7), p.1808-1814.
[42] Beckers J. and Debergh N., Parastatisties, and supersymmetry in quantum mechanics / / Nucl. Phys. (1990), B340, p.767-776.
[43] Beckers J., Debergh N. Poincare invariance and quantum parasuperfields / / J. Mod. Phys. (1993), A 8, p.5041-5061.
[44] Beckers J., Debergh N., Hussin V. and Sciarrino A. On unitary Lie superalgebras from the spin-orbit supersymmetrization procedure / / J . Phys. (1990), A 23, p.3647-3659.
[45] Beckers J., and Debergh N. On supersymmetric harmonic oscillators and the Green-Cusson Ansatze / / J . Math. Phys. (1991), 32(11), p.3094-3100.
[46] Benitez J., Martinez R., Nunez—Yepez H.N. and Salas—Brito A.L. Solution and hidden supersymmetry of a Dirac oscillator / / Phys. Rev. Lett. (1990), 64, p.1643-1645.
[47] Boyer C.P. The maximal ’’kinematical” invariance group for an arbitrary potential / / Helv. Phys. Acta, (1974), v.47, p.589-604.
[48] Boikova N.A., Dvoeglazov V.V., Tyukhtyaev Yu.N., Faustov R.N. Quazipotential in the fourth order of perturbation theory. Unequal mass case. / / Сообщ. объед. ин-та ядер. исслед. (Дубна) NE2 - 92 - 440, (1992), с.1-6.

[49] Case K.M. Wave equation for spin 0 in Hamiltonian form / / Phys. Rev., (1955), 99, p.1572-1573.
[50] Chirta R. Supersymmetry in the two-anyon problem / / Mod. Phys. Lett. (1992), A 7, N 10, p.855-863.
[51] Cook P.A. Relativistic harmonic oscillator with intristic spin structure / / Lett. Nuovo Cim. (1971), 1, N 10, p.419-426.
[52] Coutinho F.A.B., Glockle W., Nogami Y., and Toyama F.M. Two - body Dirac equation: illusstration in one space dimension / / Can. J. Phys. (1988), 66, p.769-775.
[53] Crater H.W. and Van Alstine P. Extension of two-body Dirac equations to general covariant interactions through a hyperbolic transformation / / J. Math. Phys. (1990), 31, N 8, p.1998-2014.
[54] Crawford James P. The Dirac oscillator and local automorphism invariance / / J. Math. Phys. (1993), 34, N 10, p.4428—4435.
[55] Debergh N. On paeasupersymmetric Hamiltonians and vector mesons in magnetic fields / / J. Phys. (1994), A 27, p.L213-L217.
[56] Debergh N., Ndimubandi J., and Strivay D. On relativistic scalar and vector meson with harmonic oscillatorlike interactions / / Z. Phys. C. — Particles and Fields, (1992), 56, p.421-425.
[57] Debergh N., Nikitin A.G. Parasupersymmetric quantum mechanics with an arbitrary numbers of parasuper charges and orthogonal Lie algebras / / Helv. Phys. Acta. (1995), v.68, p.20-31.
[58] Del Sol Mesa A. and Moshinsky M. Relations between different approaches to the relativistic two-body problem / / J. Phys. (1994), A 27, p.4685-4693.
[59] D’Hoker E., Kostelecky V.A. and Vinet L. Spectrum generating superalgebras in dynamical groups and spectrum generating algebras ed. Barut A. Bohm A. and Ne’eman J. (Singapore: Word Scientific), 1989, v.l, 339p.
[60] Diptiman S. Some supersymmetric features in the spectrum of anyons in a harmonic potential / / Phys. Rev. (1992), D 46, N 4, p.1846-1857.
[61] Dirac P.A.M. The prinsiples of quantum mechanics, (Clarendon Press, Oxford), 1958.
[62] Dominguez-Adame F., Mendez B. A solvable two-body Dirac equation in one space dimension / / Can. J. Phys. (1991), 69, p.780- 785.
[85] Moshinsky M. and Del Sol Mesa A. A relativistic cockroach nest / / Can. J. Phys. (1994), 72, p.453-465.
[86] Ndimnbandi J., Ntibashirakandi L. On relativistic oscillator through supersymmetry and Foldy-Wouthuysen transformations / / Bull. Soc. roy. sci. Liege, (1991), 60, N 6, p.429-436.
[87] Nedjadi Y. and Barrett R.C. The Duffin-Kemmer-Petian oscillator / / J. Phys. A. (1994), 27, p.4301-4315.

[88] Neveu A. and Schwarz J.H. Factorizable dual model of pions / / Nucl. Phys. (1971), B 31, p.86-112.

[89] Niederle J. and Nikitin A.G. On diagonalization of parity operators and reduction of invariant equations. / / J. Phys. A, 1996, to appear.

[90] Nikitin A.G. On the weak supersymmetry / / Nonlin. Math. Phys. (1994), 1, p.202-206.

[91] Nikitin A.G., Tretynyk V.V. Irreducible representations of the Poincare parasuper algebra / / J. Phys. (1995), A 28, p.1655—1668.

[92] Olver P. Applications of Lie groups to differential equation, New York, Springer, 1986, 497p.

[93] Quesne C. and Moshinsky M. Symmetry Lie algebra of the Dirac oscillator / / J. Phys. A. (1990), 23, p.2263-2272.

[94] Ramond P. Dual theory for fermions / / Phys. Rev. (1971), D 3, p.2415-2418. [95] Ravndal F. A harmonic quark Bag model / / Phys. Lett. (1982), B 113, p.57-60.

[96] Rubakov V.A. and Spiridonov V.P., Parasupersymmetric quantum mechanics / / Mod.Phys.Lett. (1988), A 3, p.1337-1347.

[97] Salam. A. and Strathdee J. Supersymmetry and superfields / / Fortshch. Phys. (1978), 26, p.57-142.

[98] Sazdjian H. Relativistic quarkonium dynamics / / Phys. Rev. (1986), D 33, p.3425-3434.

[99] Sazdjian H. Light fermion bound states in two-particle relativistic quantum mechanics / / Phys. Rev. (1986), D 33, p.3435—3440.

[100] Sazdjian H. Relativistic wave equations for the dynamics of two- interacting particles / / Phys. Rev. (1986), D 33, p.3401—3424.

[101] Sazdjian H. Supersymmetric models in two-particle relativistic quantum mechanics / / Europhys. Lett., (1988), 6(1), p. 13-18.

[102] Semenov V.V. and Chumakov S.M., Generalizations of the superalgebra other than the parasuperalgebra / / Phys.Lett. (1991), B 262, N 4, p.451-454.

[103] Schrodinger E. The wave equation for spin 1 in Hamiltonian form / / Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, (1955), 229, p.39-43.

[104] Scott T.C., Shertzer L, Moore R.A. Accurate finite-element solutions of the two-body Dirac equation / / Phys. Rev. (1992), A 45, N 7A, p.4393-4398.

[105] Semay C., Ceuleneer R., silvestre—Brac B. II — body Dirac equation with diagonal central potentials / / J. Math. Phys. (1993), 34, N 6, p.2215-2225.

[106] Shishkin G. Electrically neutral Dirac particles in the presense of external fields. Exact solutions. / / J. Math. Phys. (1993), 34, N 11, p. 5037-5049.

[107] Tretynyk V.V. High order symmetry operators of the two-particle Schrodinger equation / / ДАН (1994), N 4, c.34-37. [108] Wess J. and Zumino B. A lagrangian model invariant under super gauge transformations / / Phys. Lett. (1974), B 49, p.52-54. [109] Wigner E.P. Do the equations of motion determine the quantum mechanical commutation relations? / / Phys. Rev. (1950), 77, p.711-712.

[110] Wigner E.P. On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group / / Ann. Math. (1939), 40, p.149—204.
[111] Witten E. Dynamical breaking of supersymmetry / / Nncl. Phys. (1981), B 188, p.513-516.
[112] Zaikov R.P. Supersymmetric quazipotential equations / / Theor. Math. (1983), 55(1), p.350-357.
[113] Zhdanov V.I. Convergence of iteration method in the relativistic two-body problem, taking into account the retardation of interactions / / J. Phys. A. (1991), 24, N 21, p.5011-5027.

Третиник В.В.’’Скрытые симметрии двухчастичных уравнений ”

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 математическая физика. Институт математики НАН Украины, Киев, 1995.
Защищается диссертация, посвященная исследованию симетрийных свойств двухчастичных уравнений. Найдены нелиевские интегралы движения и скрытые парасуперсиметрии двухчастичных уранений Дирака с осцилляторно-подобным потенциалом взаимодействия. Построены неприводимые представления парасупералгебры Пуанкаре.

Tretynyk V.V.’’Hidden Symmetries of Two—Particle Equations”

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy in Physics and Mathematics, speciality 01.01.03 - mathematical physics. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraina, Kyiv, 1995.
This thesis is devoted to the investigation of symmetry properties of two—particle equations. Non-Lie constants of motion and hidden parasupersymmetry of two-particle Dirac equations with oscillator-equivalent potential are found. Irreducible representations of Poincare parasuper- algebra are constructed.

Ключові слова:

ДВОЧАСТИНКОВІ РІВНЯННЯ, РІВНЯННЯ ШРОДІНГЕРА, РІВНЯННЯ ДІРАКА, СИМЕТРІЯ, СУПЕРСИМЕТРІЯ, ПАРАСУПЕРСИМЕТРІЯ, ІНВАРІАНТНІСТЬ, ГРУПА ЛІ, АЛГЕБРА ЛІ, НЕЗВІДНІ ЗОБРАЖЕННЯ, НЕЛІЇВСЬКІ СИМЕТРІЇ, ІНТЕГРАЛ РУХУ, АЛГЕБРА ПУАНКАРЕ, СУПЕР АЛГЕБРА, ПАРАСУПЕРАЛГЕБРА ПУАНКАРЕ