АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ТИЧИНІН Валентин Анатолійович

НЕЛОКАЛЬНІ СИМЕТРІЇ ТА РОЗВ'ЯЗКИ ДЕЯКИХ КЛАСІВ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

01.01.03. – математична фізика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 1994

ЗМІСТ

ВСТУП

За останні 20-30 років нелінійні рівняння знаходяться в центрі уваги багатьох досліджень. В цей період почало формуватися нелінійне наукове мислення та світогляд, закладаються підвалини нового наукового напрямку - нелінійної математичної фізики [20,36,61,103,104,238]. Задача інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь (ДР), що виникають в моделях прикладних досліджень, є класичною. Але й сьогодні все ще відсутні теорія та загальні методи розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними (НДРЧП), а нелінійна математична фізика являє собою сукупність різноманітних засобів і окремих методів розв'язання та дослідження деяких НДР. Відбувається її безперервне поповнення новими ефективними методами. Великий матеріал, присвячений розв'язанню ДР, набутий до XIX ст., міститься в класичній монографії А.Р. Форсайта /A.RForsyth/ [178]. Стан цієї галузі математики на 50-ті роки XX ст. було розглянуто і класифіковано В.Ф. Еймсом /W.F. Ames/. [134.135].

Найбільш загальні з методів розв'язання деяких спеціальних класів НДР сформувалися як теорії інтегровності ДР. Прикладом найбільш опрацьованої з таких теорій є теорія інтегровності гамільтонових динамічних систем [36,37,52,53,61,84]. Особливо же ефективним засобом інтегрування таких систем виявилось представлення їх в т.з. формі Лакса

$$\partial_0 L = [L,A] \tag{0.1}$$

за допомогою лінійних операторів L і A, визначених рівняннями

$$L[v] - \lambda v = 0 , \tag{0.2а}$$

$$\partial_0 v - A[v] = 0 . \tag{0.2б}$$

Саме це представлення було покладено в основу метода оберненої задачі теорії розсіювання (МОЗР). Метод істотно використовує крайові умови і є ефективним при розв'язуванні переважно одновимірних нелінійних рівнянь спеціального виду. Поширення його на ДР з більшою кількістю незалежних змінних натикається на серйозні труднощі [36,53,61,84,222,225,257].

В дослідженнях динамічних систем, які допускають представлення Лакса, А.М. Лезнов та М.В. Савельєв [53] виходять з наявності у цих систем нетривіальних алгебр внутрішніх симетрій. Існування L-A пари вони вважають наслідком таких симетрій. Інтегрування рівняння Кортевега-де Фріза (КдФ) в МОЗР було зв'язано з відкриттям для нього перетворення Міури [193]. Це сприяло розумінню того, що перетворення Беклунда є "...главным шагом к тому, чтобы раскрыть свойства интегрируемости данного уравнения" [65] і стимулювало відновлення інтересу безпосередньо до перетворень Беклунда (ПБ). Результати М. Рібокура /M. Riboucour/ 1870 р. та Л. Біанкі /L. Bianchi/1879 - 1880 р. [144] стали основою для побудови перетворень, які починаючи з роботи Дж. Кларіна /J. Clurin/ 1902 р. [163] називають перетвореннями Беклунда. В різні роки над цією проблемою працювали С. Лі /S. Lie/, А.В. Беклунд /F.V. Bäcklund/ [143], Дж.Кларін, Е. Гурса /E. Goursat/. Можна сказати, що ПБ виникло як узагальнення теорії контактних перетворень С. Лі. Прийнято вважати, що сучасний період застосування та розвитку цих ідей бере початок з роботи К. Левнера /C. Loewner/ 1950 р. [221]. Результати, одержані в період з 1950 по 1975 р. достатньо повно відображені в збірнику [220].

В процесі побудови розв'язків солітонного типу для рівнянь КдФ і синус-Гордона (СГ) за допомогою ПБ було відкрито явище нелінійної суперпозиції їх розв'язків. Ідея такого генерування нових розв'язків, мабуть, належить Біанкі. Звідси прийшло розуміння того, що "...преобразование Бэклунда – это высший тип симметрии дифференциального уравнения, обнаруженный впервые в XIX в. ..." [26].

Відомо, що рівняння

$$L = u_0 - f(u,\ u_1,\ u_{11}) , \qquad (0.3)$$

$$u = u(x^0, x^1)$$

має k законів збереження, якщо воно може бути записано у вигляді

$$\partial_0 U^{0\nu} - \partial_1 U^{1\nu} = 0 , \quad \nu = \overline{1,k} . \qquad (0.4)$$

$U^{\mu\nu}$, ($\mu = 0,1$) залежать від u, u_1, u_{11}. Таким чином, кожний ν – й закон збереження (0.4) визначає потенціальну функцію $v^\nu(x^0, x^1)$:

$$\partial_0 v^\nu - U^{1\nu} = 0 , \quad \partial_1 v^\nu - U^{0\nu} = 0 . \qquad (0.5)$$

(Зв'язок між функціями v та u може, зокрема, визначати ПБ). Уолквіст та Естабрук [251,252] запропонували узагальнення цієї конструкції, відоме як метод псевдопотенціалів. Цей метод одержав подальшого розвитку в роботі Ф. Естабрука 1982 р. [175] та в статті А.Р. Чаудхарі та Ахмада Сіраджи / A.R. Choudhury, Ahmad Siraj/ [159], де він реалізований в тривимірному просторі незалежних змінних $\mathbb{R}(1,2)$. Помітного прогресу же в побудуванні багатовимірних ПБ скалярних рівнянь до останнього часу одержано не було. Винятком є результат П.П.Хрістіансена /P.L. Christiansen/ [162], де побудовано автоперетворення Беклунда (АПБ) для просторово – тривимірного рівняння СГ. Лише в останні роки в роботах М. Боіті /M. Boiti/, Ф. Пемпінеллі /F. Pempinelli/, Дж. Леона /J. Leon/, А.К. Погребкова та М.С. Полiванова [151,152,153], присвяченних дослідженню рівнянь Деві-Стюартсона та Кадомцева - Петвіашвілі в $\mathbb{R}(1,2)$ було одержано багатовимірне ПБ. Відмітимо також присвячені багатовимірним ПБ роботи [149,154, 157,158,209,212,232]. З іншого боку , вивчення та теоретичне осмислення перетворень Беклунда тісно зв'язано з теорією сумісності (формальної інтегровності) загальних систем НДРЧП. Дослідження інтегровності систем ДРЧП за допомогою диференціальних продовжень та процедур виключення було почато Рікьє / C. H. Riquier/ 1910 р. [236], продовжено в роботах Жане / M. Janet/ 1920 р. [204,205]. Удосконалення методу Рікьє було здійснено Томасом / J .M. Thomas / в 1920 р.[246,247], та Ріттом / J.F.Ritt/ [237]. Їх результати були незаслужено забуті, а формальна теорія сумісності систем ДР була наново побудована на алгебраїчній основі значно пізніше в 60-ті роки Гольдшмідтом / H. Goldschmidt/ [194], Кумперой та Спенсером /A. Kumpera, D.C. Spencer / [216] та ін. Створений Е. Картаном /E. Cartan/ метод зовнішних форм дозволяє вивчати спеціальні алгебраїчні властивості ДР, що записані у вигляді систем зовнішних рівнянь. Критерії інволютивності системи, сформульовані Картаном та Келєром, дозволили побудувати ефективний алгоритм аналізу сумісності системи ДР [80,218].

Дослідження сумісності певної системи ДР було покладено в основу методу диференціальних зв'язків М.М.Яненка [131] та його учнів [80]. Над геометричною теорією ПБ та систем ДРЧП в останні 20 р. активно працювали Герман [196,197,198] , Уолквіст та Естабрук [251,252] , [174,175] , Харрісон [195], Чаудхарі [159-161], Пірані, Робінсон, Шадвік [234].

Декотрі з розглянутих вище методів безпосередньо зв'язані з симетріями ДР. Більшість методів побудови точних розв'язків ДР виходять з однієї з найбільш плодотворних і ефективних ідей в теорії ДР - перетворень змінних. Частіше всього при цьому звертаються до локальних перетворень, рідше - до контактних. Найбільш повно вивчені точкові перетворення, коли їх сукупність утворює групу Лі. Теорія неперервних груп точкових перетворень, створена С. Лі та його учнями, пізніш була розвинута в класичний груповий аналіз. Значній внесок в розвиток цієї галузі належить Г. Біркгофу, Л.В. Овсянникову, Н.Х. Ібрагімову, Р. Андерсону, П. Вінтерніцу, П. Олверу та іншим [11,20,40,41,69, 70,103,107,110-116,127, 128,138,140,145,149,172].

З 70-тих років в теорії ДРЧП та математичній фізиці почали систематично з'являтись окремі результати, які не можна пояснити в рамках класичного групового аналізу. Так ще В.А. Фоком була виявлена симетрія атому водню в кулоновому полі, котра, як стало зрозуміло порівняно недавно [103], не може бути встановлена методом С. Лі. Термін "неліївська симетрія" було знайдено в [104] саме для того, щоб підкреслити принципову відміну таких симетрій від тих, що одержані класичним теоретико-груповим методом. Пізніше були обчислені нелокальні симетрії ДР за допомогою інтегро-диференціальних операторів [103] і також матрично-диференціальних операторів скінченного порядку [127,128]. З іншого боку в МОЗР були виявлені ДР, що допускали скінченно-вимірні групи Лі і одночасно мали нескінченні сукупності законів збереження. На шляху розв'язання проблеми, яка виникла, в 1974 - 78 роки була створена теорія груп перетворень Лі-Беклунда [39-41,138, 140,141], яка дозволяє одержувати усі локальні неточкові симетрії ДР [8]. Необхідно відрізняти перетворення Лі-Беклунда від власно перетворень Беклунда. Останні, наприклад, не мають групових властивостей [70]. Тому й симетрії Лі-Беклунда і симетрії, породжені перетвореннями Беклунда, являють собою різні об'єкти. Одержане таким чином узагальнення класичного групового аналізу дало лише часткове вирішення проблеми. Спроби поширити теорію Лі - Беклунда на випадок нелокальних симетрій [167] позитивного результату не дали тому, що "... при этом пропадает возможность конструктивного вычисления нелокальных симетрий" [7,8]. В останні роки стало зрозуміло, що вирішальну роль в вивченні нелокальних симетрій ДРЧП математичної фізики грають скінченні нелокальні перетворення змінних [85-99, 117-120,123]. Дослідження симетрій ДР за допомогою нелокальних перетворень провадяться в ІМ АН України з 1970р. Анліз одержаних результатів показує, що переважна більшість з них має природню симетрійну інтерпретацію, тобто може бути отримана з единої симетрійної точки зору. Це дає серйозні підстави для розробки загального симетрійного підходу до проблеми побудови частинних розв'язків (інтегрування) нелінійних ДР математичної фізики за допомогою НПЗ. Нелокальні симетрії можуть бути використані для побудови анзаців та точних розв'язків НДР, їх редукції [183-187], для побудови формул розмноження розв'язків [249].Вони пояснюють існування анзаців, які не можуть бути одержані методом С. Лі[164]. Перелічені в огляді методи за винятком методів симетрійного аналізу, достатньо повно розроблені, в основному, для НДР з двома незалежними змінними. Сьогодні відсутні загальні методи дослідження багатовимірних НДР навіть у випадку другого порядку.

Об'єктом дослідження в даній дисертації є деякі класи нелінійних ДР $L_1(x,u) = 0$ математичної фізики порядку ≤ 3, які залежать від двох або скінченної кількості(n) незалежних змінних. Це рівняння параболічного та гіперболічного типів, хвильові рівняння, рівняння типу Шредінгера, системи рівнянь гідро-та газодинаміки а також інші широковживані в застосуваннях НДР. При теоретико-алгебраїчному аналізі ДР будемо під симетрією розуміти алгоритм (формули) розмноження розв'язків рівняння [108]. Інакше кажучи, припускаємо, що існує процес, який дозволяє по одному або кількох частинних розв'язках рівняння побудувати нові розв'язки того ж рівняння. Така точка зору дозволяє трактувати нелокальні перетворення, зв'язуючі вихідне рівняння $L_1(x,u) = 0$ з рівнянням $L_2(y,v)= 0$, в сукупності з симетріями рівняння $L_2(y,v) = 0$ як нелокальні симетрії рівняння $L_1(x,u) = 0$.

Основу дисертації складають розробка конструктивних методів дослідження нелокальних симетрій і точних розв'язків нелінійних ДР, їх використання для розмноження розв'язків досліджуванного нелінійного рівняння. При цьому одержує подальшого розвитку базова ідея [107]- розширення симетрії ДР: вихідне рівняння $L_1(x,u) = 0$ підходящим нелокальним перетворенням змінних зводиться до себе ж, або до рівняння, яке допускає більш широку групу симетрії. Одержані нелокальні симетрії рівняння $L_1(x,u) = 0$ використовуються для побудови формул розмноження його розв'язків. У дисертації використовуються класичний метод теоретико-групового аналізу ДР [69,70,123] та метод нелокальних перетворень [117] , який також одержує подальшого розвитку у даній дисертації. Для вивчення геометрії нелокальних перетворень застосовуються методи диференціальної геометрії розшарованих просторів джетів [30,49,50,73,77,101,124,129,176,196,218,234].

У першому розділі дані основні означення, зв'язані з нелокальними перетвореннями змінних (НПЗ) першого та другого роду. Одержано формули продовження на похідні вищих порядків (§1). Розглянуто НПЗ з функціональними параметрами. Як приклад, побудована формула продовження перетворень годографа в $\mathbb{R}(1,1)$ та $\mathbb{R}(1,3)$, Ейлера-Ампера і Лежандра в $\mathbb{R}(1, n-1)$. В §2 НПЗ використовуються для зведення рівняння $L_1(x,u) = 0$ до рівняння $L_2(y,v) = 0$. Досліджена сумісність систем ДР, які визначають НПЗ другого роду та НПДР (нелокальні перетворення диференціальних рівнянь), значення відповідних умов інтегровності. Побудовані в §§ 1,2 конструкції вивчаються як диференціально-геометричні об'єкти в розшаруваннях просторів джетів (§3). Запропоновано модифікований алгоритм типу Картана для побудови НПДР з певною довільністю у розв'язках рівняння L_2. З'ясовується геометричний зміст умов сумісності для НПДР. В §4 побудовано алгоритми НП лїівських симетрій, розмноження розв'язків та алгоритм одержання нелінійної суперпозиції розв'язків L_1. Розглянуто також коло питань, зв'язаних з побудовою розв'язків одного з рівнянь, коли є відомий розв'язок другого рівняння L_2.

Другий розділ присвячений побудові деяких класів інваріантних відносно НПЗ ДР та формул розмноження розв'язків для них. Описано годограф-інваріантні скалярні ДР в $\mathbb{R}(1,1)$ і $\mathbb{R}(1,3)$ та системи з двома невідомими функціями в $\mathbb{R}(1,1)$. Одержано формули розмноження розв'язків, ефективність яких ілюструється прикладами. Абсолютні диференціальні інваріанти порядку ≤ 2 для n - вимірних перетворень Ейлера-Ампера і Лежандра побудовані в §2 (формули 2.2.2 , 2.2.5). З допомогою останніх одержано широкі класи нелінійних (порядку ≤ 2) ДР в просторі $\mathbb{R}(1,n-1)$ незалежних змінних (теореми 2.2.1 і 2.2.2), які є інваріантними відносно названих перетворень. Встановлені явні формули для розмноження розв'язків ДР, які є інваріантними відносно перетворень Ейлера-Ампера і Лежандра (алгоритми 2.2.1, 2.2.2). Істотно, що нові розв'язки не можуть бути одержані методами класичного групового аналізу.

Класи нелінійних рівнянь параболічного типу, типу Гарі-Діма (теореми 2.3.1, 2.3.3), нелінійні хвильові рівняння, які мають нелокальну симетрію, побудовані в §3. Для ряду нових, а також добре відомих рівнянь (Бюргерса, КдФ, Шредінгера з кубічною нелінійністю та ін.) за допомогою нелокальних симетрій побудовано формули розмноження розв'язків. У завершальному для даного розділу §4 вперше побудовано приклади нелокальної умовної симетрії рівнянь на підмножині розв'язків і, зокрема, багатовимірного рівняння Брюгерса.

Третій розділ присвячений дослідженню нелінійних ДР, які допускають лінеаризацію нелокальними перетвореннями змінних. Побудовано класи НДР і систем, що зводяться до лінійних перетвореннями годографа в $\mathbb{R}(1,1)$, $\mathbb{R}(1,3)$ (§1), n - вимірними перетвореннями Ейлера-Ампера і Лежандра (§2). В усіх цих випадках виведено формули нелінійної суперпозиції розв'язків для відповідних ДР (теореми 3.1.1-3.1.6, 3.2.1-3.2.4). Розглянуто велику кількість прикладів генерування нових розв'язків за двома відомими частинними розв'язками. §3 містить результати, одержані для деяких нелінійних рівнянь математичної фізики, які допускають зведення до лінійних рівнянь за допомогою НПЗ. Це рівняння теплопровідності, хвильові рівняння, ДР типу Гарі-Діма, багатовимірне рівняння Бюргерса та ін. Для них також побудовано формули нелінійної суперпозиції розв'язків. Останні показують, яким чином слід узагальнювати класичний принцип лінійної суперпозиції у випадку НДР. Приклади умовної нелокальної лінеаризації ДР на певних підмножинах їх розв'язків розглянуті в §4.

У багатьох випадках рівняння $L_1(x,u) = 0$ вдається з допомогою НПЗ зв'язати з рівнянням $L_2(y,v) = 0$, група Лі якого ширша ніж у рівняння $L_1(x,u) = 0$. При цьому лієвські симетрії рівняння L_2 породжують відповідні нелокальні симетрії рівняння L_1, а певному (для рівняння L_2) лієвському анзацу

$$v = f(y)\,\varphi(w) + g(y)\;,\; w = w(y)$$

відповідає нелокальний анзац для L_1. Найпростішим прикладом такого анзацу є вираз [185]

$$u = h(x)\dot{\varphi}(\omega) + f(x)\varphi(\omega) + g(x)\;,\; \omega = \omega(x)\;.$$

Всі ці питання детально вивчені **в четвертому розділі** дисертації. Проведено нелокальна редукція нелінійних рівнянь теплопровідності, рівнянь типу Гарі-Діма, нелінійних хвильових рівнянь (§1). Запропонований алгоритм для побудови істотно нелокальних анзаців. Нелокальні анзаци рівняння L_1, що породжені нелокальними симетріями рівняння L_2 побудовані в §2.

У дисертації використовуються позначення:

$\mathbb{R}(1,n-1)$ – n – вимірний простір Мінковського з сигнатурою $(1, -1, -1, \ldots, -1)$;

$\mathbb{R}(0,n)$ – n – вимірний евклідів простір з сигнатурою $(1, 1, 1, \ldots, 1)$;

$g_{\mu\nu}$, g_{ab} – метричні тензори в $\mathbb{R}(1, n-1)$ та $\mathbb{R}(0,n)$ відповідно ;

$\mu, \nu = \overline{0,n-1}$;

$a,\ b = \overline{1,n-1}$;

$l_\mu h^\mu = l_0 h^0 - l_1 h^1 - \ldots - l_{n-1} h^{n-1}$,

$l_\mu h_\mu = l_0 h_0 + l_2 h_2 + \ldots + l_{n-1} h_{n-1} \equiv l_0 h_0 - l_a h^a$ -

– скалярні добутки в $\mathbb{R}(1,n-1)$

з $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,\ldots -1)$ та в $\mathbb{R}(0,n)$

з $g_{ab} = \mathrm{diag}(1,1,\ldots 1)$ відповідно ;

$\|h_{\mu\nu}\|_{\mu=0,\ \nu=0}^{n,\ \ m}$ – $(n \times m)$ – матриця з елементами $h_{\mu\nu}$;

$a_{\lambda\delta}[h_{\mu\nu}]$ – алгебраїчне доповнення до елементу $h_{\lambda\delta}$ матриці $\|h_{\mu\nu}\|$;

G_r – r параметрична група Лі ;

AG_r – алгебра Лі групи G_r ;

$P(1,n-1)$ – група Пуанкаре в $\mathbb{R}(1,n-1)$;

$G(1,n-1)$ – група Галілея в $\mathbb{R}(1,n-1)$;

$Q_a,\ P_k$ – лінійні диференціальні оператори;

$\langle Q_1,\ Q_2,\ldots Q_m \rangle$ – лінійна оболонка операторів $Q_a, (a = \overline{1,m})$;

$[Q_1,\ Q_2] = Q_1 Q_2 - Q_2 Q_1$ комутатор операторів Q_1, Q_2 ;

$x = (x^0,\ x^1,\ldots,x^{n-1}) = \{x^\mu\}$, $y = (y^0,\ y^1,\ \ldots,\ y^{n-1}) = \{y^\mu\}$

– незалежні змінні в просторах $\mathbb{R}(1,n-1)$ та $\mathbb{R}'(1,n-1)$;

$u(x),\ v(y)$ – залежні змінні ;

$\tau(x),\ \theta(x)$ – функціональні параметри ;

$u_\mu = \partial_\mu u(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x^\mu}$ – частинна похідна змінної $u(x)$ по x^μ ;

$u_{\mu\nu} = \partial_\nu \partial_\mu u(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x^\nu \partial x^\mu}$ – похідні другого порядку функції $u(x)$ по змінних x^ν, x^μ ;

$\omega(x),\ w(y)$ – інваріантні змінні ;

$\dot\varphi(\omega) = \dfrac{d\varphi}{d\omega}$ – звичайна похідна функції $\varphi(\omega)$ однієї змінної по ω ;

$$u_{\underbrace{\mu_1 \ldots \mu_1}_{k_1} \underbrace{\mu_2 \ldots \mu_2}_{k_2} \ldots \underbrace{\mu_s \ldots \mu_s}_{k_s}} = \partial_{\mu_1}^{k_1} \partial_{\mu_2}^{k_2} \ldots \partial_{\mu_s}^{k_s} u(x),$$

$\underset{1}{u} = \{ u_\mu \}$, $\quad \underset{2}{u} = \{ u_{\mu\nu} \} \ldots$;

$\Delta_{(n)} u(x) = \partial_a \partial^a u(x) = u_{11} + u_{22} + \ldots + u_{nn}$ –

– оператор Лапласа в $\mathbb{R}(0,n)$;

$\Box_{(n)} u(x) = \partial_\mu \partial^\mu u(x) = u_{00} - \Delta_{(n-1)} u$ – оператор Даламбера ;

$\partial_\mu^{-1} = \int dx^\mu$ – оператор інтегрування по незалежній змінній x^μ;

$D_\mu = \partial_\mu + u_\mu \partial_u + u_{\mu\nu} \partial_{u_\nu} + \ldots$ – оператор повної похідної.

α^C, ω^A, θ^B – зовнішні форми;

d – зовнішний диференціал;

$\wedge$ – зовнішний добуток;

$\lrcorner$ – внутрішний добуток;

$\mathcal{L}_X$ – похідна Лі в напрямку векторного поля X;

$*$ – оператор Ходжа.

Крім того, в дисертації часто використовуємо скорочення:

ДО – диференціальний оператор;

ДР – диференціальні рівняння;

ЗДР – звичайне ДР;

НДР – нелінійне ДР;

ДРЧП – ДР з частинними похідними;

НПЗ – нелокальне перетворення змінних;

НПДР – нелокальне перетворення ДР.

Результати дисертації опубліковані в 25 роботах. Вони доповідалися на кафедрі математичної фізики Київського державного університету ім. Тараса Шевченка, на семінарі відділу прикладних досліджень ІМ АН України, на кафедрі вищої математики Дніпропетровського інженерно - будівельного інституту.

Висловлюю глибоку вдячність В.І. Фущичу за багаторічне співробітництво, підтримку і повсякчасну увагу до цієї роботи.

Дякую співробітникам відділу прикладних досліджень Інституту математики АН України за корисне обговорення одержаних результатів, ректору ДІБІ Большакову В. І. за сприяння у завершенні дисертації.

Р О З Д І Л I

НЕЛОКАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У данному розділі введено термінологію та позначення, дано означення нелокальних перетворень змінних (НПЗ) першого і другого роду. Одержано формули їх продовження на похідні вищих порядків. Для прикладу виконано продовження перетворень годографа в $\mathbb{R}(1,1)$, $\mathbb{R}(1,3)$, Ейлера-Ампера і Лежандра в $\mathbb{R}(1,n-1)$. В §2 нелокальні перетворення використовуються для зведення ДР $L_1(x,u) = 0$ до рівняння $L_2(y,v) = 0$. Доведено необхідні, а в деяких випадках і достатні умови такого зведення. Розглянуто приклади нелокальних перетворень диференціальних рівнянь (НПДР). Геометрія НПДР досліджується в §3. Умови інтегровності (УІ) системи НПЗ другого роду на розв'язках рівняння L_1 сформульовані на мові похідних Лі вздовж векторних полів, які утворюють алгебру Лі. Узагальнення НПДР на багатовимірний випадок одержано через "продовження" умов інтегровності у простір функціональних параметрів. В останньому параграфі (§4) розділу поняття нелокальної симетрії ДР наповнюється конкретним змістом, розроблено алгоритми відшукання нелокальних симетрій ДР та їх використання для розмноження розв'язків.

§І. Нелокальні перетворення змінних

В сучасних роботах з теорії сумісності систем ДРЧП та перетворень Беклунда широке расповсюдження знайшов формалізм джетів у відповідних просторах [20,80,234,238].

У дисетації ми активно використовуємо метод нелокальних перетворень, в якому перетворення змінних визначаються сумісними системами ДРЧП. Тому здається природнім при дослідженні загальних властивостей нелокальних симетрій ДР використовувати цей формалізм.

Введемо тепер необхідні позначення, термінологію та означення, які є загальновживаними в теорії розшарованих просторів джетів [20, 73, 238].

Розглянемо многовид $\mathbb{M}$ (незалежних змінних) вимірності n і многовид $\mathbb{E} = \mathbb{M} \times \mathbb{N}$ вимірності $n + m$. Нехай існує сюр'єктивне відображення $\mathbb{E}$ на $\mathbb{M}$ ρ: $\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{M}$ максимального рангу n. Позначимо Ω – відкриту підобласть у $\mathbb{E}$, та U – відкриту підобласть в $\mathbb{M}$. Введемо координати x – в $\mathbb{M}$ та (x,u) – в $\mathbb{E}$. Трійка $(\mathbb{E}, \mathbb{M}, \rho)$ зветься розшарованим многовидом, якщо є комутативною діаграма [73,238]

$$\begin{array}{ccc} \Omega\,(x,u) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+m} \\ \rho \big\downarrow & & \big\downarrow \pi \\ U(x) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n} \end{array}$$

ρ: $\rho(\Omega(x,u)) = U(x)$, π: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Означення I.I.I.[238]. Відображення f: $w(x) \longrightarrow \mathbb{E}(x,u)$, $w(x) \subset U$ називають локальним (місцевим) перерізом розшарування $(\mathbb{E}, \mathbb{M}, \rho)$, якщо композиція $\rho\, f = id_w$ є тотожним відображенням в $w(x)$. Множина $w(x)$ зветься областю перерізу, $\mathbb{M}$ – базою, ρ – проекцією, $\mathbb{F} \in \mathbb{N} = \{u(x)\}$ – типовим шаром, $\mathbb{E}$ – тотальним простором розшарування $(\mathbb{E}, \mathbb{M}, \rho)$.

У просторі $\mathbb{R}^n$ незалежних змінних $\{x^\mu\} \in \mathbb{M}$ та у просторі $\mathbb{R}^m$ залежних змінних $\{u^A(x)\} \in \mathbb{N}$ $\mathbb{M}$ і $\mathbb{N} \in \mathbb{C}^\infty$ є многовиди. Позначимо

$x = \{x^\mu\} = (x^0, x^1, \ldots, x^{n-1})$, $\mu = \overline{0, n-1}$,

$u = \{u^A\} = (u^1, u^2, \ldots, u^m)$, $A = \overline{1, m}$,

$\mathbb{C}^\infty(\mathbb{M},\mathbb{N})$ – сукупність відображень f: $U \longrightarrow \mathbb{N}$. Відображення f і $g \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{M},\mathbb{N})$, звуть погодженими до порядку k ($k \geq 0$ є ціле число) в точці $x \in \mathbb{M}$, якщо в околі цієї т. x та в околі $f(x) = g(x) \in \mathbb{N}$ їх розвинення у ряд Тейлора аж до порядку k збігаються (є однакові, тотожні). Клас еквівалентності відображень, погоджених до порядку k в т. x, називають k - джетом f в т. x і позначають $j^k_x f$. У локальних координатах x^μ в околі т. $x \in \mathbb{M}$ k - джет $j^k_x f$ визначається величинами :

$$x^\mu , \quad u^A = f^A(x) , \quad u^A_\mu = \partial_\mu f^A(x) ,$$

$$u^A_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu f^A(x) , \quad u^A_{\underbrace{\mu_1 \dots \mu_1}_{n_1} \dots \underbrace{\mu_k \dots \mu_k}_{n_k}} = \partial^{n_1}_{\mu_1} \dots \partial^{n_k}_{\mu_k} f^A(x) ,$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = \rho \leq k.$$

Тут позначено:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} , \qquad \partial_\mu \partial_\nu = \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} ,$$

$$\partial^{n_1}_{\mu_1} \dots \partial^{n_k}_{\mu_k} = \frac{\partial^\rho}{[\partial x^{\mu_1}]^{n_1} \dots [\partial x^{\mu_k}]^{n_k}} .$$

Крім того, ми будемо часто користуватись позначеннями повних сукупностей похідних даного порядку:

$$\underset{1}{u} = \{u_\mu\} , \qquad \underset{2}{u} = \{u_{\mu\nu}\} , \dots .$$

Сукупності усіх k - джетів $j^k_x f$, коли x змінюється в $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$, а $f(x)$ змінюється в $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{N})$, звуть пучком k - джетів відображення з $\mathbb{M}$ в $\mathbb{N}$ і позначають $\mathbb{J}^k(\mathbb{M}, \mathbb{N})$:

$$\mathbb{J}^k(\mathbb{M},\mathbb{N}) = \cup\, j^k_{x} f_{\omega} ,$$

$$x \in \mathbb{M}, \ f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{M},\mathbb{N}) .$$

Відображення

$$\alpha: \qquad \mathbb{J}^k(\mathbb{M},\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{M} ,$$

що побудовано за допомогою відображення $j^k_x f \longrightarrow x$, називають корінням (початком, джерелом, основою, = sours) джета. Відображення

$$\beta: \qquad \mathbb{J}^k(\mathbb{M},\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{N} ,$$

побудоване за відображенням $j^k_x f \to f$, звуть його вершиною (ціллю, устям, = target). Точка $p = j^k_x f$, яка належить $J^k(\mathbb{M},\mathbb{N})$ з $x \in \mathbb{M}$ і $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{M},\mathbb{N})$, визначається однозначно набором величин

$$p = (x,\ u,\ \underset{1}{u},\ \ldots,\ \underset{k}{u}) .$$

Два k - еквівалентні відображення в т. $x \in \mathbb{M}$ одночасно ℓ - еквівалентні, якщо $\ell \le k$. Це дозволяє ввести канонічні проекції π^k_{k-r} з $J^k(\mathbb{M},\mathbb{N})$ у $J^{k-r}(\mathbb{M},\mathbb{N})$, $(r \le k)$:

$$\pi^k_{k-r} : \qquad j^k_x f \longrightarrow j^{k-r}_x f .$$

Наприклад,

$$\pi^k_0 : \qquad j^k_x f \longrightarrow (x, f(x)) \in \mathbb{E} .$$

Відображення $h\colon\ \mathbb{M} \longrightarrow J^k(\mathbb{M},\mathbb{N})$, яке задовольняє умову $\alpha \circ h = = id_M$ (id_M - тотожне відображення на $\mathbb{M}$), називають перерізом відображення α на коріння джету. Важливим прикладом такого перерізу є k - джет розширення відображення $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{M},\mathbb{N})$, яке позначають $j^k f$

$$j^k f : \qquad x \longrightarrow j^k_x f.$$

У випадку $k = 0$ одержуємо графік функції.

Загальну систему ДРЧП порядку k для m невідомих $\bar{u}^A$, $A = \overline{1,\ m}$, запишемо у вигляді

$$\overset{p}{L}(x,\ \bar{u},\ \underset{1}{\bar{u}},\ \ldots,\ \underset{k}{\bar{u}}) = 0 , \qquad (1.1.1)$$

$$p = \overline{1,r} .$$

Якщо $\bar{u}(x) = u(x)$, (1.1.1) визначає підмноговид R^k пучка k - - джетів $J^k(\mathbb{M},\mathbb{N})$. Розв'язком ДР (1.1.1) є відображення $f \in \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{M},\mathbb{N})$ таке, що з $u^A(x) = f^A(x)$ випливає тотожність

$$\overset{p}{L}(x,\ f,\ \underset{1}{f},\ \ldots\ ,\underset{k}{f}) \equiv 0 .$$

Введемо оператор повної похідної у пучку джетів $J^k(\mathbb{M},\mathbb{N})$

$$D_{\mu}^{(k)} = \partial_{\mu} + u_{\mu}^{A}\,\partial_{u^A} + u_{\mu\mu_1}^{A}\,\partial_{u_{\mu_1}^{A}} + \dots +$$

$$+ u_{\mu\mu_1\dots\mu_{k-1}}^{A}\,\partial_{u_{\mu_1\dots\mu_{k-1}}^{A}} \quad , \ (A = \overline{1,\ m}\ ),$$

або в іншому вигляді

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + u_{\mu}\partial_{u} + \underset{1}{u}_{\mu}\partial_{\underset{1}{u}} + \underset{k-1}{u}_{\mu}\ \partial_{\underset{k-1}{u}} \ .$$

За індексом A, що повторюється, розуміємо підсумовування. За допомогою оператора $D_{\mu}^{(k)}$ можемо одержати ℓ - е продовження R^{k}, яке є підмноговидом $R^{k+\ell} \subset J^{k+\ell}(M,N)$ та задається рівняннями

$$\overset{p}{L} = 0,\ D\overset{p}{L} = 0, \dots,\ \underset{\ell}{D}\overset{p}{L} = 0, \quad p = \overline{1,r}\ ,$$

$$\underset{\ell}{D} = \left\{ D_{\mu_1\dots\mu_\ell}^{(k+\ell)} \right\} \ .$$

Диференціальне продовження розшарованого многовиду (E, M, ρ) за допомогою оператора $D_{\mu}^{(k)}$ дозволяє перетворити многовид пучка джетів $J^{k}(M,N)$ у розшарований многовид $(E^{(k)}, M, \rho, \pi)$ [73].

Введемо тепер деякі нові конструкції, що можуть бути побудовані з двох незалежних розшарованих многовидів пучків джетів.

Розглянемо двійку незалежних розшарованих многовидів $(E^{(k)}, M, \rho, \pi)$ та $(E'^{(\ell)}, M', \rho', \pi')$ із неперетинними (для визначеності) базами: $M \cap M' = \varnothing$, та відповідними пучками джетів $J^{k}(M,N)$ і $J^{(\ell)}(M', N')$. У координатному представленні:

$$x \in M = \mathbb{R}^{n}\ ,\ f:\ M \supset U \longrightarrow N\ ;\ u^{A} \in N = \mathbb{R}^{m}\ ;$$

$$y \in M' = \mathbb{R}^{n'}\ ,\ g:\ M' \supset U' \longrightarrow N'\ ;\ v^{B} \in N' = \mathbb{R}^{m'}\ ;$$

$$(A = \overline{1,m}\ ,\ B = \overline{1,m'}\ )\ .$$

Означення I.I.2. Декартовим добутком $J^{k}(M, N) \times \times J^{\ell}(M', N')$ пучків джетів назвемо сукупність точок (p, p'), які розуміємо як пари $(j^k_x f,\ j^\ell_y g)$, що не зв'язані ніякими додатковими умовами.

У декартовому добутку пучків джетів $\mathbb{J}^k(\mathbb{M},\mathbb{N}) \times \mathbb{J}^\ell(\mathbb{M}',\mathbb{N}')$ розглянемо формальну систему ДР відносно невідомих функцій $u(x)$, $v(y)$, які залежать кожна від свого набору незалежних змінних, що змінюються у відкритих підмножинах $x \in U \subset \mathbb{M}$, $y \in U' \subset \mathbb{M}'$ відповідно:

$$B^\alpha(x,\ u,\ \underset{1}{u},\dots,\ \underset{k}{u};\ y,\ v,\ \underset{1}{v},\ \dots,\ \underset{\ell}{v}) = 0\ ,$$

$$(\alpha = \overline{1,s})\ . \qquad (1.1.2)$$

Двійку функцій $(f(x),\ g(y))$, де $f(x) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{M},\mathbb{N})$, $g(y) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{M}',\mathbb{N}')$ будемо звати розв'язком системи (1.1.2), якщо підстановка $\bar{u}(x) = f(x)$, $\bar{v}(y) = g(y)$ перетворює рівняння (1.1.2) у тотожності:

$$B^\alpha(x,\ f,\ \underset{1}{f},\dots,\ \underset{k}{f};\ y,\ g,\ \underset{1}{g},\ \dots,\ \underset{\ell}{g}) \equiv 0\ .$$

Нехай одночасно $f(x)$ є розв'язком рівняння

$$\overset{p}{L_1}(x,\ u,\ \underset{1}{u},\ \dots,\ \underset{k'<k}{u}) = 0, \qquad (p = \overline{1,r}),$$

а $g(y)$ є розв'язком рівняння

$$\overset{q}{L_2}(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{\ell'<\ell}{v}) = 0, \qquad (q = \overline{1,r'}).$$

Припустимо далі, що перші n рівнянь системи (1.1.2) дозволяють ототожнити змінні $x \in \mathbb{M}$ з точками p' пучка $\mathbb{J}^\ell(\mathbb{M}',\mathbb{N}')$ явно

$$x^\mu = p'^{(\mu)} = h^\mu(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{r}{v}), \qquad (1.1.3)$$

або у вигляді рівнянь

$$B^{\alpha'}(x;\ y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{r}{v}) = 0\ ,$$

$$(\alpha' = \overline{1,n}).$$

У загальному випадку будемо вважати, що подібне ототожнення так чи інакше може бути здійснено в силу рівнянь системи

(1.1.2).

Означення I.I.3. Множину пар точок (p, p') декартова добутку пучків джетів $J^k(M, N) \times J^\ell(M', N')$, зв'язаних співвідношеннями (1.1.3)

$$x = p' \in J^\ell(M', N'), \longrightarrow \alpha'(x) = \alpha' p' = y,$$

будемо називати розшарованим добутком пучків джетів $J^k(M, N)$ та $J^\ell(M', N')$ із спільною базою M' і позначимо його $J^k(M', N') \times$ $\times J^\ell(M', N')$.

У більш загальному випадку ототожнення баз можна задати рівністю

$$p = p', \quad p \in J^k(M, N), \quad p' \in J^\ell(M', N') \ldots . \qquad (1.1.3a)$$

Тоді

$$\alpha'(\alpha p) = \alpha'(x) = \alpha'(\alpha p') = \tilde{\alpha}(\alpha' p) = \tilde{\alpha}(y),$$

а $\tilde{\alpha}$ визначається умовою

$$\alpha' \alpha = \tilde{\alpha}\, \alpha' .$$

Після описанного ототоження у системі (1.1.2) залишаються ще $s-n$ рівнянь, яким тепер надамо вигляду:

$$x^\mu = h^\mu(y, v, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{r}{v}), \qquad (1.1.4a)$$

$$B^b(u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}; y, v, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{\ell}{v}) = 0,$$

$$(u = u(x), \; b = \overline{1, s-n}). \qquad (1.1.4б)$$

Для системи (1.1.4) може бути здійснено один з трьох можливих випадків.

Випадок I. Припустимо, що з m рівнянь системи (1.1.4б) можна виразити $u(x)$, як функції змінних $y, v, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{\ell}{v}$. Тобто здійснимо друге ототоження, вважаючи що

$$u^\wedge(x) = p'^\wedge \in J^\ell(M', N'),$$

або у координатному вигляді

$$u^{A}(x) = H^{A}(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\underset{r}{v}) \ . \qquad (1.1.5)$$

У більш загальній ситуації можна припустити, що система рівнянь

$$B^{c}(u,\ \underset{1}{u},\dots,\ \underset{k}{u};\ y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{\ell}{v}) = 0\ , \quad (c = \overline{1,m})$$

дозволяє встановити співвідношення $p^{A} = p'^{A}$. Звідси випливає, що

$$\beta p = u = \beta(p')\ ,$$

$$\beta'(u) = \beta'(\beta p') = \tilde{\beta}(\beta' p') = \tilde{\beta}(v)\ .$$

При умові $\beta'\beta = \tilde{\beta}\beta'$ маємо

$$u = [\beta']^{-1}\tilde{\beta}(v)\ .$$

Теорема I.I.I. Нехай m із $s-n$ співвідношень (1.1.4б) системи рівнянь (1.1.4) можуть бути представлені у вигляді (1.1.5), тоді решта $s-n-m$ її рівнянь дозволяє виключити змінні $u,\ \underset{1}{u},\dots,\underset{k}{u}$ за допомогою рівностей (1.1.4а), (1.1.5). □

Доведення. Визначимо у добутку пучків джетів із спільною базою $J^{k}(M',N)\times J^{\ell}(M',N')$ оператор повного диференціювання по y^{ν}

$$D^{(k,\ell)}_{\nu} = D^{(\ell)}_{\nu} + D^{(\ell)}_{\nu}h^{\mu}\cdot D^{(k)}_{\mu} = \partial_{y^{\nu}} + v_{\nu}\partial_{v} + \dots + \underset{\ell-1}{v}{}_{\nu}\partial_{\underset{\ell-1}{v}} +$$

$$+ D^{(\ell)}_{\nu}h^{\mu}(\partial_{x^{\mu}} + u_{\mu}\partial_{u} + \dots + \underset{k-1}{u}{}_{\mu}\partial_{\underset{k-1}{u}})\ . \qquad (1.1.6)$$

Тут диференціальні функції h^{μ} визначені рівностями (1.1.3), матрицю $\|Dh\|$ з елементами $D_{\nu}h^{\mu}$, $(\mu,\ \nu = \overline{0,\ n-1})$ одержуємо диференціюванням рівностей (1.1.3) і припускаємо, що вона невироджена, тобто $\det\|Dh\| = \delta \neq 0$. Здійснимо далі перше продовження рівностей (1.1.5) за допомогою оператора (1.1.6):

$$D^{(k,\ell)}_{\nu}H^{A} = u^{A}_{\mu}\ D^{(\ell)}_{\nu}h^{\mu}. \qquad (1.1.7)$$

Одержана система лінійних алгебраїчних рівнянь (1.1.7) з шуканими $u^{\wedge}_{1}$ в силу зроблених припущень має єдиний розв'язок

$$\| u^{\wedge}_{1} \| = \| Dh \|^{-1} \cdot \| Dh^{\wedge} \| . \qquad (1.1.8)$$

Тут $\| Dh \|^{-1}$ – матриця, обернена до $\| Dh \|$. Позначимо через α^{μ}_{ν} алгебраїчне доповнення до елемента $D_{\nu}h^{\mu}$ у матриці $\|Dh\|$ і перепишемо матричні рівності (1.1.8) у покомпонентному вигляді

$$u^{\wedge}_{\mu} = (-1)^{\mu+1} \cdot \delta^{-1} \cdot \det \begin{Vmatrix} D_0 H^{\wedge}, & D_0 h^{0}, \ldots, \widehat{D_0 h^{\mu}}, \ldots, & D_0 h^{n-1} \\ D_1 H^{\wedge}, & D^{0}_{1} h, \ldots, \widehat{D_1 h^{\mu}}, \ldots, & D_1 h^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \\ D_{n-1} H^{\wedge}, & D_{n-1} h^{0}, \ldots, \widehat{D_{n-1} h^{\mu}}, \ldots, & D_{n-1} h^{n-1} \end{Vmatrix}$$

Символ $\wedge$ понад елементами стовпця з номером $\mu + 2$ значить, що його при обчисленні відповідного визначника слід опустити. За формулами Крамера одержуємо вирази

$$u^{\wedge}_{\mu} = \delta^{-1} \delta^{\wedge}_{\mu} = (-1)^{\mu+1} \cdot \delta^{-1} \cdot \alpha^{\gamma}_{\mu} \cdot D_{\gamma} H^{\wedge} . \qquad (1.1.8a)$$

У формулах (1.1.7), (1.1.8a) по індексах μ, γ, що повторюються, припускаємо підсумовування в евклідовому просторі з сигнатурою (1,1,...,1). Позначимо

$$u^{\wedge}_{\mu_1} = H^{\wedge}_{(\mu_1)}(y, v, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{r+1}{v}) = P'_{(\mu_1)} \in \mathcal{J}^{\ell}(M', N') ,$$

$$u^{\wedge}_{\mu_1 \mu_2} = H^{\wedge}_{(\mu_1 \mu_2)}(y, v, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{r+2}{v}) = P'_{(\mu_1 \mu_2)} \in \mathcal{J}^{\ell}(M', N') ,$$

. . . .

$$u^{\wedge}_{\mu_1 \ldots \mu_k} = H^{\wedge}_{(\mu_1 \ldots \mu_k)}(y, v, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{r+k}{v}) =$$

$$= P'_{(\mu_1 \ldots \mu_k)} \in \mathcal{J}^{\ell}(M', N') . \qquad (1.1.9)$$

Наступні похідні знаходимо, розв'язуючи системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які одержуємо наступним продовженням рівностей (1.1.8a) та (1.1.9) за допомогою оператора $D^{(k,\ell)}_{\nu}$:

$$D_{\nu}^{(k-\ell)}H^{\wedge}_{(\mu_1)} = u^{\wedge}_{\mu\mu_1}\cdot D_{\nu}^{(\ell)}h^{\mu}\ , \ \dots\ ,$$

$$D_{\nu}^{(k-\ell)}H^{\wedge}_{(\mu_1\dots\mu_k)} = u^{\wedge}_{\mu\mu_1\dots\mu_k} D_{\nu}^{(\ell)}h^{\mu}\ .$$

Тут усі $\underset{0<t\le k}{u}$ симетричні по усіх перестановках індексів. Розв'язки цих систем у матричній формі мають вигляд

$$\| \underset{2}{u} \| = \| Dh \|^{-1} \| \underset{1}{DH} \|\ , \ \dots,$$
$$\| \underset{t+1}{u} \| = \| Dh \|^{-1} \| \underset{t}{DH} \|\ , \ \dots. \qquad (1.1.10a)$$

У розгорнутому вигляді маємо

$$u^{\wedge}_{\mu\mu_1} = \delta^{-1}\delta^{\wedge}_{\mu\mu_1} = (-1)^{\mu+1}\cdot\delta^{-1}\cdot\alpha^{\gamma}_{\mu}\cdot D_{\gamma}^{(k,\ell)}H^{\wedge}_{(\mu_1)}\ ,$$

. . . .

$$u^{\wedge}_{\mu\mu_1\dots\mu_t} = \delta^{-1}\delta^{\wedge}_{\mu\mu_1\dots\mu_t} = (-1)^{\mu+1}\cdot\delta^{-1}\cdot\alpha^{\gamma}_{\mu}\cdot$$
$$\cdot D_{\gamma}^{(k,\ell)}H^{\wedge}_{(\mu_1\dots\mu_t)}, \dots\ . \qquad (1.1.10б)$$

Таким чином, усі $\underset{t}{u}$, $(0 < t \le k)$, можуть бути обчислені за формулами (1.1.8a) та (1.1.10б) і потім виключені з рівнянь системи (1.1.4). Теорема доведена. ■

Отже, розв'язання неоднорідних невироджених систем лінійних алгераїчних рівнянь (1.1.7), (1.1.10a) методом оберненої матриці або за формулами Крамера не містять в собі нічого нового. Але одержані при цьому як наслідок формули продовження нелокальних перетворень у вигляді (1.1.8a), (1.1.10б) є новими. Відмітимо значно більшу зручність їх використання в розрахунках порівняно з представленням, даним у роботі [117].

Якщо замінити $\underset{0<t\le k}{u}$ у решті рівнянь s-n-m системи (1.1.4) їх виразами у $J^{\ell}(M',N')$ за допомогою рівностей (1.1.9), приходимо до системи рівнянь вигляду

$$B^d\Big[\underset{1}{H}(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{r}{v}),\dots,\underset{1}{H}(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{r+1}{v}),\dots,$$
$$\underset{k}{H}(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{r+k}{v})\ ;\ y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{\ell}{v}\Big] = 0\ ,$$
$$(d = \overline{1,s-n-m},\quad r+k \le l). \tag{1.1.11}$$

У випадку, коли $s-n-m = 0$, умов типу (1.1.11), зв'язуючих координати пучка джетів $J^{\ell}(M',N')$, не виникає.

Означення I.I.4. Систему рівностей

$$x = h(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{r}{v})\ , \tag{1.1.4a}$$
$$u = H(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{r}{v})\ , \tag{1.1.5}$$

не зв'язаних ніякими додатковими співідношеннями вигляду (1.1.11), назвемо нелокальним перетворенням змінних (НПЗ) першого роду порядку $r < l$ у добутку пучків джетів із спільною базою $J^{\ell}(M',N')\times J^{k}(M',N)$.

Із теореми 1.1.1. та означення 1.1.4. випливає такий наслідок.

Наслідок I.I.I. Продовження НПЗ першого роду (1.1.4a), (1.1.5) виконуєтся за формулами (1.1.8), (1.1.10)

$$\| \underset{t}{u} \| = \| Dh \|^{-1} \| D \underset{t-1}{H} \| \ ,\quad (0 < t \le k). \tag{1.1.10в}$$

У покомпонентному запису маємо

$$u^{\wedge}_{\mu\mu_1\dots\mu_{t-1}} = (-1)^{\mu+1}\delta^{-1}\alpha^{\gamma}_{\mu}D^{(k,\ell)}_{\gamma}\ H^{\wedge}_{(\mu_1\dots\mu_{t-1})}\ . \tag{1.1.10г}$$

У тому випадку, коли сукупність рівнянь системи (1.1.11) є непорожня ($s-n-m \ne 0$), виникає питання про її сумісність, тобто про існування будь-якого формального розв'язку $v = g(y)$ цієї системи. Якщо система сумісна, вона може бути невизначеною ($s-n-m < m'$), або визначеною ($s-n-m = m'$), або врешті переозначеною ($s-n-m > m'$). У будь-якому з цих випадків сумісну систему рівнянь можемо розуміти як систему ДР відносно шуканих $v(y)$

$$L_2^q(y, v, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{\ell}{v}) = 0 , \qquad (q = \overline{1,m''})$$

із розв'язком $v^B = g^B(y)$, $(B = \overline{1,m'})$. Більш докладному обговоренню НПДР присвячений §2 даного розділу. Зараз розглянемо другу можливість, визначену властивістю системи (1.1.4).

Випадок II. Припустимо, що з рівнянь системи (1.1.4) не можна виразити $u^A(x)$ у вигляді диференціальних функцій в $J^\ell(M',N')$. Продовжимо рівняння (1.1.4б) за допомогою оператора $D_\nu^{(k,\ell)}$ (1.1.6).

$$D_\nu^{(k,\ell)} B^b = \overset{(\ell)}{D_\nu} B^b + \partial_{\underset{t}{u}^A} B^b \cdot D_\nu^{(\ell)} h^\mu \cdot \underset{t,\mu}{u^A} = 0,$$

$$(0 < t \le k) . \qquad (1.1.12a)$$

У матричній формі одержуємо

$$\|D^{(\ell)}B^b\| + \|\partial_{\underset{t}{u}} B\cdot Dh\|\cdot\|\underset{t+1}{u}\| = \qquad (1.1.12б)$$

$$= \|D^{(\ell)}B\| + \|\partial_{\underset{s}{u}} B\cdot Dh\|\cdot\|\underset{s+1}{u}\| + \|\partial_{\underset{k-1}{u}} B\cdot Dh\|\cdot\|\underset{k}{u}\| = 0 .$$

$(0 < s < k-1)$. Матрицю $\|\partial_{\underset{s}{u}} B\cdot Dh\|$, яка побудована з елементів $\partial_{\underset{k-1}{u}^A} B^b \cdot D_\nu^{(\ell)} h^\mu$, назвемо матрицею системи (1.1.12а) для кожного фіксованого b. Будемо вважати її невиродженою. Диференціювати треба по усіх $\underset{t}{u}$ із $0 < t \le k$. Ця матриця є основною, якщо (1.1.12) розглядати як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно похідних $\underset{k}{u}$. Розв'яжемо систему рівнянь (1.1.12) відносно $\underset{k}{u}$:

$$\|\underset{k}{u}\| = (-1)\|\partial_{\underset{k-1}{u}} B\cdot Dh\|^{-1}\left\{\|D^{(\ell)}B\| + \|\partial_{\underset{s}{u}} B\cdot Dh\|\cdot\|\underset{s+1}{u}\|\right\} . \qquad (1.1.12б)$$

Доповнимо ці співвідношення рівняннями $B^b = 0$ системи (1.1.4б), і розв'яжемо їх відносно сукупності похідних $\underset{k'}{u}$, які назвемо головними. Позначимо

$$u^{\wedge}_{\mu_1\ldots\mu_{k'}} = E^{\wedge}_{(\mu_1\ldots\mu_{k'})}(\hat{u},\hat{u}_1,\ldots,\hat{u}_k;\ y,v,v_1,\ldots,v_\ell) . \qquad (1.1.13)$$

Тут $\{\hat{u}^{\wedge}_t\}$ – сукупність т.з. параметричних похідних в $J^k(M',N) \times J^\ell(M',N')$ [80,218]. Тепер здійснимо алгоритм Рік'є-Жане-Кураніші-Спенсера (можна скористатися алгоритмом Картана) [80] зведення системи (1.1.13) до інволюції по сукупності змінних $\{u^{\wedge}_t\}$, $0< t \le k$. Елементи пучка $J^\ell(M',N')$ при цьому відіграють роль функціональних параметрів. Для перевірки інволютивності системи використовуємо перший та другий критерії Картана (Келера).

Нехай система рівнянь

$$x = h\,(y,\ v,\ v_1,\ldots,\ v_r)\ , \qquad (1.1.14)$$

$$u^{\wedge}_{k'} = E^{\wedge}_{(k')}(\hat{u},\ \hat{u}_1,\ldots,\hat{u}_k\ ;\ y,\ v,\ v_1,\ldots,\ v_\ell)\ ,$$

одержана з (1.1.4б) і (1.1.13), є вже зведеною до інволюції. Тоді наступні диференціальні продовження її суттєво нових співвідношень не дадуть. Таким чином, на систему (1.1.14) можна дивитись як на нелокальні перетворення головних похідних, які виражені за допомогою параметричних похідних $\hat{u}^{\wedge}_t$ і змінних $(y,v,v_1,\ldots,v_r) \in J^\ell(M',N')$.

Означення I.I.5. Нелокальним перетворенням змінних другого роду порядку r назвемо систему співвідношень (1.1.4б), (1.1.13), зведену до інволюції по змінних u_t (тобто коли вона має вигляд (1.1.14)).

Додання до системи (1.1.14) нових рівнянь, що не призводять до суперечності і не є наслідками рівнянь цієї системи, у загальному випадку приводить до збільшення кількості головних похідних і відповідно зменшує кількість параметричних похідних $\hat{u}_t$. Взявши достатню кількість додаткових рівнянь до системи (1.1.14), можемо, кінець кінцем, виключити усі параметричні похідні і навіть функції $\hat{u}^{\wedge}$. У цьому випадку вони переходять до класу головних змінних (похідних), перші n+m рівнянь системи (1.1.14) визначать НПЗ першого роду (1.1.4a), (1.1.5), а решта стають наслідками його продовжень.

Випадок III. Припустимо, що $n=n'$ і відсутня можливість із рівнянь системи (1.1.2) виразити x^{μ} як диференціальні функції змінних $(y, v, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{\ell}{v}) \in J^{\ell}(M', N')$, тобто у вигляді (1.1.3), (1.1.4a). Щоб подолати цю трудність, здійснимо диференціальне продовження n перших рівнянь системи за допомогою оператора (1.1.6). Одержуємо

$$D_{\nu}^{(\ell)} B^{a} + D_{\nu}^{(\ell)} h^{\mu} \cdot D_{\mu}^{(k)} B^{a} = 0 , \quad a = \overline{1,s}.$$

У матричній формі ця система рівнянь має вигляд

$$\|D^{(\ell)}B\| + \|Dh\| \cdot \|D^{(k)}B\| = 0 \qquad (1.1.15)$$

для кожного фіксованого a. Подамо одержану систему у вигляді n систем лінійних алгебраічних рівнянь:

$$\begin{cases} D_0 B^1 + D_0 h^{\mu} \cdot D_{\mu} B^1 = 0 , \ldots , \\ D_0 B^n + D_0 h^{\mu} \cdot D_{\mu} B^n = 0 ; \end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{cases} D_{n-1} B^1 + D_{n-1} h^{\mu} \cdot D_{\mu} B^1 = 0 , \\ D_{n-1} B^n + D_{n-1} h^{\mu} \cdot D_{\mu} B^n = 0 . \end{cases}$$

Якщо матриця $\|D^{(k)}B\|$ невироджена, тобто $\det\|D^{(k)}B\| \equiv \Delta \neq 0$, можна побудувати єдиний розв'язок цієї сукупності систем

$$\|D_0^{(\ell)}x\| = (-1)\|D^{(k)}B\|^{-1} \cdot \|D_0^{(\ell)}B\| ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\|D^{(\ell)}_{n-1}\,x\| = (-1)\|D^{(k)}B\|^{-1}\cdot\|D^{(\ell)}_{n-1}B\| \,. \qquad (1.1.16)$$

Таким чином можуть бути знайдені n^2 елементів матриці

$$D^{(\ell)}_{\nu}x^{\mu} = \xi^{\mu}_{(\nu)}(u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k+1}{u}\,;\, y, v, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{\ell+1}{v}) \,.$$

Знайдені вирази дозволяють записати n зовнішніх диференціальних 1-форм

$$dx^{\mu} = \xi^{\mu}_{(\nu)}dy^{\nu}, \quad (\mu,\nu = \overline{0,n-1}). \qquad (1.1.17)$$

Умови сумісності одержаної системи Пфаффа $ddx^{\mu} = 0$ у розгорному вигляді мають зображення

$$D^{(\ell)}_{\gamma}\xi^{\mu}_{(\nu)} - D^{(\ell)}_{\nu}\xi^{\mu}_{(\gamma)} \equiv B^{\mu}_{(\gamma\nu)}(u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k+2}{u}\,;\, y, v, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{\ell+2}{v}) = 0.$$

Тут $B^{\mu}_{(\gamma\nu)} = 0$ – нові рівняння, які потрібно приєднати до рівнянь системи (1.1.2). Таким чином, у даному випадку відповідне ототожнення баз двох пучків джетів $J^k(M,N)$ і $J^{\ell}(M',N')$ здійснюється у неявній формі. Далі, оскільки вже відома матриця $\|\,\xi\,\|$, можна переходити до процедури зведення до інволюції продовженної системи рівнянь

$$B^{a} = 0 \,, \quad B^{\mu}_{(\gamma\nu)} = 0 \,, \qquad (1.1.18)$$

$$DB^{a} = 0, \quad DB^{\mu}_{(\gamma\nu)} = 0. \qquad (1.1.19)$$

Нелокальними перетвореннями першого роду є, наприклад, відомі контактні перетворення Ейлера-Ампера [27,178] і Лежандра [51,178].

У наступних розділах нам будуть потрібні формули продовжених до другого порядку перетворень Ейлера-Ампера (Е-А) і Лежандра (Л) у просторі $\mathbb{R}(1,n-1)$ незалежних змінних. Побудуємо їх нижче, продемонструвавши при цьому ефективність формул продовження НПЗ (1.1.10).

I. Перетворення годографа.

1). Розглянемо перетворення скалярної функції $u(x^0,x^1)$ у просторі двох незалежних змінних

$$u\,(x^0,\,x^1) = y^1\ ; \quad \delta = v_1 \neq 0\ ,$$
$$x^1 = v\,(y^0,\,y^1)\ , \quad x^0 = y^0\ . \qquad (1.1.20)$$

Продовженням цього точкового перетворення одержуємо такі формули для похідних $\underset{1}{u}$, $\underset{2}{u}$:

$$u_1 = v_1^{-1}\ , \quad u_0 = -\,v_0 v_1^{-1}\ ,$$
$$u_{11} = -\,v_1^{-3}\cdot v_{11}\ , \quad u_{10} = -v_1^{-3}(v_1 v_{10} - v_0 v_{11})\ ,$$
$$u_{00} = -\,v_1^{-3}\left[v_0^2 v_{11} - 2v_0 v_1 v_{10} + v_1^2 v_{00}\right]\ . \qquad (1.1.20a)$$

2). Перетворення годографа скалярної функції у $\mathbb{R}(1,3)$ візьмемо у вигляді

$$u(x) = y^1\ , \quad \delta = v_1 \neq 0\ ,$$
$$x^k = y^k\ , \quad (k = 0,2,3), \qquad (1.1.21)$$
$$x^1 = v(y)\ , \quad x = (x^0,\,x^1,\,x^2,\,x^3)\ .$$

Формули перетворення похідних $\underset{1}{u}$, $\underset{2}{u}$ є такі:

$$u_k = -\,v_1^{-1} v_k\ , \quad (k = 0,2,3), \quad u_1 = v_1^{-1}\ ,$$
$$u_{11} = -\,v_1^{-3}\ v_{11}\ , \quad u_{1k} = -v_1^{-3}(v_1 v_{1k} - v_k v_{11})\ ,$$
$$u_{kk} = -\,v_1^{-3}\left[v_1^2 v_{kk} - 2v_1 v_k v_{1k} + v_k^2 v_{11}\right]\ ,$$
$$u_{k\ell} = -\,v_1^{-3}\left[v_1(v_1 v_{k\ell} - v_k v_{1\ell}) - v_\ell(v_1 v_{1k} - v_k v_{11})\right]\ ,$$
$$(k,\ell = 0,2,3;\ k \neq \ell), \qquad (1.1.22)$$

У виразі u_{kk} підсумовування по k немає.

3). Нехай $u^\sigma(x)$, $\sigma = 0,1$ – достатньо гладкі функції змінних $x = (x^0, x^1)$. Перетворення годографа у даному випадку визначимо рівностями

$$u^0(x) = y^0\ ; \qquad u^1(x) = y^1\ ;$$
$$x^0 = v^0(y)\ ; \qquad x^1 = v^1(y)\ ;$$

$$\delta = u^1_1 u^0_0 - u^1_0 u^0_1 \neq 0 , \qquad (1.1.23)$$
$$\tilde{\delta} = v^1_1 v^0_0 - v^1_0 v^0_1 \neq 0 .$$

Для похідних першого порядку одержуємо формули

$$u^1_1 = \delta^{-1} v^0_0 , \qquad u^1_0 = - \delta^{-1} v^1_0 ,$$
$$u^0_1 = - \delta^{-1} v^0_1 , \qquad u^0_0 = \delta^{-1} v^1_1 . \qquad (1.1.24)$$

Похідні другого порядку змінюються у відповідності з формулами

$$u^1_{11} = - \tilde{\delta}^{-3} \Big[(v^0_0)^2 (v^1_0 v^0_{11} - v^0_0 v^1_{11}) + (v^0_1)^2 (v^1_0 v^0_{00} - v^0_0 v^1_{00}) -$$
$$- 2\, v^0_1 v^0_0 (v^1_0 v^0_{10} - v^0_0 v^1_{10}) \Big] ,$$

$$u^1_{00} = - \tilde{\delta}^{-3} \Big[(v^1_0)^2 (v^1_0 v^0_{11} - v^0_0 v^1_{11}) + (v^1_1)^2 (v^1_0 v^0_{00} - v^0_0 v^1_{00}) -$$
$$- 2\, v^1_0 v^1_1 (v^1_0 v^0_{10} - v^0_0 v^1_{10}) \Big] ,$$

$$u^1_{10} = - \tilde{\delta}^{-3} \Big[v^0_0 v^1_0 (v^1_0 v^0_{11} - v^0_0 v^1_{11}) + v^0_1 v^1_1 (v^1_0 v^0_{00} - v^0_0 v^1_{00}) -$$
$$- (v^1_0 v^0_{10} - v^0_0 v^1_{10})(v^1_1 v^0_0 + v^1_0 v^0_1) \Big] ,$$

$$u^0_{11} = - \tilde{\delta}^{-3} \Big[(v^0_0)^2 (v^0_1 v^1_{11} - v^1_1 v^0_{11}) + (v^0_1)^2 (v^0_1 v^1_{00} - v^1_1 v^0_{00}) -$$
$$- 2\, v^0_1 v^0_0 (v^0_1 v^1_{10} - v^1_1 v^0_{10}) \Big] ,$$

$$u^0_{00} = - \tilde{\delta}^{-3} \Big[(v^1_0)^2 (v^0_1 v^1_{11} - v^1_1 v^0_{11}) + (v^1_1)^2 (v^0_1 v^1_{00} - v^1_1 v^0_{00}) -$$
$$- 2\, v^1_1 v^1_0 (v^0_1 v^1_{10} - v^1_1 v^0_{10}) \Big] ,$$

$$u^0_{10} = - \tilde{\delta}^{-3} \Big[v^0_0 v^1_0 (v^0_1 v^1_{11} - v^1_1 v^0_{11}) + v^0_1 v^1_1 (v^0_1 v^1_{00} - v^1_1 v^0_{00}) -$$
$$- (v^0_1 v^1_{10} - v^1_1 v^0_{10})(v^1_1 v^0_0 + v^1_0 v^0_1) \Big] . \qquad (1.1.25)$$

II. Перетворення Ейлера-Ампера у просторі $\mathbb{R}(1,n-1)$ незалежних змінних задамо співвідношеннями

$$u(x) = y_a v_a - v , \quad \det\| v_{ab} \| \neq 0 ,$$

$$x_a = v_a \; ; \quad x_0 = y_0 , \; (a,\ b = \overline{1,n-1}) \; . \qquad (1.1.26)$$

Похідні першого та другого порядків при цьому змінюються так:

$$u_0 = -v_0 \; , \quad u_a = y_a ,$$

$$u_{00} = -\det{}^{-1} \| v_{m\ell} \| \cdot \det \| v_{\mu\nu} \| \; ,$$

$$u_{0a} = -\det{}^{-1} \| v_{m\ell} \| \cdot v_{0b} \cdot a_{ba}(v_{m\ell}) \; ,$$

$$u_{ab} = -\det{}^{-1} \| v_{m\ell} \| \cdot a_{ab} \; . \qquad (1.1.27)$$

По індексах, що повторюються, якщо не застережується протилежне, як і раніше, розуміємо підсумовування: по грецьких індексах у просторі $\mathbb{R}(1,n-1)$ із метрикою $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,\dots,-1)$, по латинських – у просторі $\mathbb{R}(0,n-1)$ із метрикою $g_{ab} = \mathrm{diag}\,(1,\ 1,\ \dots,\ 1)$.

$$\det \| u_{ab} \| = \det \begin{Vmatrix} u_{11} & ,\dots, & u_{1\,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n-1\,1} & ,\dots, & u_{n-1\,n-1} \end{Vmatrix} ,$$

$$\det \| u_{\mu\nu} \| = \det \begin{Vmatrix} u_{00} & ,\dots, & u_{0\,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n-1\,0} & ,\dots, & u_{n-1\,n-1} \end{Vmatrix} .$$

III. **Перетворення Лежандра у $\mathbb{R}(I,n-I)$** має вигляд (див. напр. [51]):

$$u(x) = y_\mu v_\mu - v \; ,$$

$$x_\mu = v_\mu \; , \qquad \det \| v_{\mu\nu} \| \neq 0 \; . \qquad (1.1.28)$$

Похідні $\underset{1}{u}$, $\underset{2}{u}$, у цьому випадку змінюються відповідно до формул

$$u_\mu = y_\mu \; ; \qquad u_{\mu\nu} = \det{}^{-1} \| v_{\lambda\sigma} \| \cdot a_{\mu\nu}(v_{\lambda\sigma}) \; ,$$

$$(\mu,\ \nu,\ \lambda,\ \sigma = \overline{0,\ n-1}\ ). \qquad (1.1.29)$$

Тут $a_{\mu\nu}(v_{\lambda\sigma})$ – алгебраїчне доповнення до елемента $v_{\mu\nu}$ у матриці $\| v_{\lambda\sigma} \|$. Формули перетворення Лежандра у $\mathbb{R}(1,1)$ для похідних третього порядку запишемо у вигляді

$$u_{\mu\nu\gamma}(x_0,x_1) = \det{}^{-3}\|v_{\lambda\sigma}\|\cdot f_{\mu\nu\gamma} , \qquad (1.1.30)$$

де $f_{\mu\nu\gamma}$ - симетричні по усіх перестановках індексів і визначаються рівностями:

$$f_{jjj} = v^3_{ii}v_{jjj} - 3\, v_{ji}v^2_{ii}v_{jji} + 3\, v_{ii}v^2_{ji}v_{jii} - v^3_{ji}v_{iii} ,$$

$$f_{jii} = v^2_{ji}v_{ii}v_{jjj} - v_{ji}(2\, v_{jj}v_{ii} + v^2_{ji})\, v_{jji} +$$

$$+ v_{jj}(v_{jj}v_{ii} + 2\, v^2_{ji})\, v_{jii} - v_{ji}v^2_{jj}v_{iii} . \qquad (1.1.30a)$$

По індексах, що повторюються, тут підсумовування немає, $i \neq j$, $i,j = 0,1$.

Зауваження І.І. Виділимо із сукупності змінних $u^A(x) \in \mathbb{N}$, $(A = \overline{1,m})$ і $v^B(y) \in \mathbb{N}'$, $(B = \overline{1,m'})$ деякі підмножини $u^c(x) \in \mathbb{N}^c \subset \mathbb{N}$, $(c = \overline{1,m^c}$, $m^c < m$) та $v^a(y) \in \mathbb{N}'^a \subset \mathbb{N}'$, $(G = \overline{1,m'^a}$, $m'^a < m'$). Змінні, які належать цим підмножинам, назвемо основними. Решту $\mathbb{N}^K = \mathbb{N}\setminus\mathbb{N}^c$ і $\mathbb{N}'^L = \mathbb{N}'\setminus\mathbb{N}'^a$ змінні будемо називати параметричними і позначимо їх так:

$$u^A(x)\Big|_{A\neq c} = \theta^K(x), \qquad (K = \overline{1,m - m^c}) ,$$

$$v^B(y)\Big|_{B\neq a} = \tau^L(y), \qquad (L = \overline{1,m' - m'^a}) .$$

Такий поділ змінних дає можливість для вивчення властивостей об'єктів, які дані у декартовому добутку пучків джетів $J^k(M',\mathbb{N}^c) \times J^k(M',\mathbb{N}'^a)$ за допомогою його продовження (занурення) у добуток

$$J^k(M',\mathbb{N}^K) \times \underbrace{J^k(M',\mathbb{N}'^c) \times J^\ell(M',\mathbb{N}'^a)} \times J^\ell(M',\mathbb{N}'^L) =$$

$$= J^k(M',\mathbb{N}) \times J^\ell(M',\mathbb{N}') .$$

НПЗ першого роду у цьому випадку має вигляд:

$$x^{\mu} = h^{\mu}(y \;,\; v,\; \underset{1}{v}, \ldots, \underset{r}{v} \;;\; \tau,\; \underset{1}{\tau}, \ldots, \underset{r'}{\tau}) \;,$$

$$u^{c} = H^{c}(y \;,\; v,\; \underset{1}{v}, \ldots, \underset{r}{v} \;;\; \tau,\; \underset{1}{\tau}, \ldots, \underset{r'}{\tau}) \;,$$

$$\theta^{\kappa} = S^{\kappa}(y \;,\; v,\; \underset{1}{v}, \ldots, \underset{r}{v} \;;\; \tau,\; \underset{1}{\tau}, \ldots, \underset{r'}{\tau}) \;.$$

§2. Нелокальні перетворення диференціальних рівнянь

Нехай $(\mathbb{E}^k, \mathbb{M}, \rho)$ є розшарований простір, у якому визначено пучок джетів $\mathcal{J}^k(\mathbb{M},\mathbb{N})$, породжений відображенням $f(x)$: $U \longrightarrow \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{M}$. Тобто

$$J^k_x f \in \mathcal{J}^k(\mathbb{M}, \mathbb{N}) .$$

Будемо вважати, що $f(x)=u(x)$ є розв'язком ДРЧП порядку $k' < k$

$$L^p_1(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k'}{u}) = 0 , \qquad (1.2.1)$$

$$(p = \overline{1,a}) .$$

Незалежно від цього введемо другий розшарований многовид $(\mathbb{E}'^{\ell}, \mathbb{M}', \rho')$ із пучком джетів $\mathcal{J}^{\ell}(\mathbb{M}',\mathbb{N}')$. Для нього $g(y)$: $U' \longrightarrow \mathbb{N}'$, $U' \subset \mathbb{M}'$, дає

$$J^{\ell}_y g \in \mathcal{J}^{\ell}(\mathbb{M}', \mathbb{N}') .$$

Тепер побудуємо декартів добуток пучків джетів, як було описано у §1, із тою чи іншою формою ототожнення: (1.1.3) або (1.1.3a). Таким чином одержуємо добуток пучків джетів із спільною базою $\mathbb{M}'$: $\mathcal{J}^k(\mathbb{M}', \mathbb{N}) \times \mathcal{J}^{\ell}(\mathbb{M}', \mathbb{N}')$.

I. Виконаємо продовження невиродженого НПЗ першого роду порядку r

$$x^{\mu} = h^{\mu}(y, v, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{r}{v}) , \qquad (1.2.2)$$

$$u^{A} = H^{A}(y, v, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{r}{v}) , \qquad (1.2.3)$$

за формулами (1.1.8a), (1.1.10). Одержані при цьому вирази (1.1.9) для похідних $\underset{s \le k'}{u}$ підставимо у рівняння (1.2.1). Приходимо до рівності

$$L^p_1(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k'}{u}) = L^p_1(h, H, \underset{1}{H}, \ldots, \underset{k'}{H}) =$$
$$= \Omega^p(y, v, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{k'+r \le \ell}{v}) . \qquad (1.2.4)$$

НПЗ (1.2.2), (1.2.3) розв'язку $u(x) = f(x)$ ставить у відповідність функцію $g(y)$ – розв'язок рівняння

$$\Omega^p(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{k'+r}{v}) = 0\ ,$$

$$(\ p = \overline{1,a}\ )\ . \tag{1.2.5}$$

Припустимо, що у $J^\ell(M',\ N')$ одночасно з (1.2.5) задано інше рівняння порядку $t < k' + r \le \ell$

$$L_2^q(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{t}{v}) = 0\ ,$$

$$(q = \overline{1,a'})\ , \tag{1.2.6}$$

сумісне з (1.2.5), яке допускає зображення у вигляді

$$\Omega^p(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{k'+r}{v}) = \lambda_q^{p,|c|}\cdot L_2^q(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{t}{v}) = 0\ ,$$

$$(\ q = \overline{1,a'}\ )\ . \tag{1.2.7}$$

Тут $\lambda_q^{p,|c|}(y,v)$ – матричний диференціальний (або інтегро-диференціальний) оператор сумарного порядку $\le |c|$. Наприклад,

$$\lambda_q^{p,|c|} = b^p_{\mu_1\dots\mu_c}(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{k'+r}{v})D_{\mu_1\dots\mu_c}\ ,$$

$$|c| = \max\sum_{j=1}^{c}\mu_j\ ,\qquad (j = \overline{1,c})\ , \tag{1.2.8}$$

$$|c| + t \le k' + r \le \ell\ . \tag{1.2.9}$$

Означення I.2.I. Будемо казати, що рівняння $\Omega^p = 0$ (1.2.5) порядку $k' + r$ допускає факторизацію за допомогою рівняння $L_2^q(y,v) = 0$ порядку t, якщо $\Omega^p = 0$ сумісно з $L_2^q(y,v) = 0$, допускає зображення у вигляді (1.2.7) і виконана умова (1.2.9).

Нехай рівняння Ω^p у рівності (1.2.4) допускає факторизацію за допомогою рівняння L_2^q (1.2.7). Тоді із (1.2.4) випливає операторна рівність, що зв'язує рівняння $L_1(x,u)$ і $L_2(y,v)$

$$L_1^p(x,\ u,\ \underset{1}{u},\dots,\ \underset{k'}{u}) = \lambda_q^{p,|c|}\cdot L_2^q(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{t}{v})\ ,$$

$$(p = \overline{1,\alpha} , \quad q = \overline{1,\alpha'}) . \qquad (1.2.10)$$

З теорії сумісності переозначених систем ДР [80,218] відомо, що розв'язки $g^L(y)$ системи (1.2.6) утворюють підмножину у множині розв'язків $g^\Omega(y)$ рівняння (1.2.5), тобто $g^L(y) \in g^\Omega(y)$. НПЗ (1.2.2), (1.2.3) розв'язку $g^\Omega(y)$ ставить у відповідність розв'язок $u = f(x)$ рівняння $L_1(x,u) = 0$ (1.2.1) за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned} x^\mu &= h^\mu(y, g^\Omega, \underset{1}{g^\Omega}, \ldots, \underset{r}{g^\Omega}) , \\ u^\wedge &= H^\wedge(y, g^\Omega, \underset{1}{g^\Omega}, \ldots, \underset{r}{g^\Omega}) . \end{aligned} \qquad (1.2.11)$$

Побудовані таким чином розв'язки позначимо $u^\Omega(x) = f^\Omega(x)$. Аналогічно по розв'язках $g^L(y)$ рівняння $L_2^q(y,v) = 0$ будуються розв'язки $u^L(x) = f^L(x)$. Ясно, що $u^L(x) \in u^\Omega(x)$.

Означення I.2.2. Будемо казати, що вихідне рівняння L_1^p (1.2.1) нелокальним перетворенням змінних першого роду (1.2.2), (1.2.3) зв'язане із рівнянням L_2^q (1.2.6), якщо існують такі диференціальні функції $h^\mu(y,\underset{r}{v})$, та $H^\wedge(y,\underset{r}{v})$, які забезпечують рівність (1.2.10).

Теорема I.2.I. Для того, щоб рівняння $L_1^p(x,u)$ було зв'язане із рівнянням $L_2^q(y,v)$ за допомогою НПЗ першого роду порядку r (1.2.2), (1.2.3), необхідно виконання системи визначальних рівнянь для функцій h^μ і $H^\wedge$

$$L_1^p(x, \underset{k'}{u}) \Big|_{\substack{D L_2^q \\ |c|}} \equiv 0 . \ \square \qquad (1.2.12)$$

У виразі (1.2.12) вертикальна риска позначає перехід у системі рівнянь Ω^p на многовид, який задано продовженням порядку $|c| \le k' + r$ рівняння L_2^p. Це значить, що головні похідні $\underset{\ge k'+r}{v^B}$ належить виразити із диференціальних продовжень рівняння L_2^q у вигляді функцій, що залежать від параметричних похідних $\hat{v}^{B}_{\geq k'+r}$. Одержані вирази треба підставити у рівняння Ω^P і по решті параметричних похідних порядку $> r$ ($\hat{v}^{B}_{>r}$) здійснити розщеплення визначального співвідношення на систему визначальних рівнянь.

Доведення. Припустимо протилежне. Нехай розв'язок визначальної системи (1.2.12) для рівнянь, зв'язаних співвідношенням (1.2.10), не існує. Внаслідок цього порушується яке - небудь з визначальних рівнянь системи (1.2.12), що є множниками при параметричних похідних $\hat{v}^{B}_{>r}$. Таким чином, у визначальному співвідношенні з'являються параметричні похідні, які не можуть бути компенсовані ніякою сумою виразів вигляду $\underset{|c|}{D} L_2^q$. Звідси випливає несумісність рівнянь Ω^P та L_2^q і, як наслідок, порушується рівність (1.2.10). Одержана суперечність доводить твердження теореми. ■

Теорема I.2.2. Нехай задано рівняння L_2^q у $J^\ell(M', N')$

$$L_2^q(y, v, \underset{1}{v}, \dots, \underset{t}{v}) = 0 , \quad (q = \overline{1,\alpha'}) ,$$

а функції h^μ, $H^\wedge$ змінних $(y, v, \underset{1}{v}, \dots, \underset{r}{v})$ із НПЗ (1.2.2), (1.2.3) є загальним розв'язком певної системи визначальних рівнянь, що випливають з (1.2.12). При цьому вигляд рівняння $L_1^P(x,u)$ наперед не визначений. Тоді існує лише одне рівняння $L_1^P(x,u)$, що зв'язано з $L_2^q(y,v)$ рівністю (1.2.10).

Доведення. Виконаємо диференціальне продовження порядку k' формул НПЗ (1.2.2), (1.2.3) за допомогою оператора повного диференціювання $D_\mu^{(k,\ell)}$ (1.1.6). Одержуємо вирази

$$\underset{1}{u}^\wedge = \underset{1}{H}^\wedge(y, v, \underset{1}{v}, \dots, \underset{r+1}{v}) , \dots ,$$

$$\underset{k'}{u}^\wedge = \underset{k'}{H}^\wedge(y, v, \underset{1}{v}, \dots, \underset{r+k'}{v}) . \qquad (1.2.13)$$

З іншого боку, побудуємо диференціальні продовження до порядку $t + |c| = k' + r$ рівняння $L_2^q(y, \underset{t}{v}) = 0$, $(q = \overline{1,\alpha'})$:

$$L_2^q(y,\ v,\ \underset{1}{v}, \ldots,\ \underset{t}{v}) = 0\ , \tag{1.2.14}$$

$$\underset{1}{D}\, L_2^q(y,\ v,\ \underset{1}{v}, \ldots,\ \underset{t}{v}) = \tilde{L}^q_{2,(1)}(y,\ v,\ \underset{1}{v}, \ldots,\ \underset{t+1}{v}) = 0\ , \ldots,$$

$$\underset{|c|}{D}\, L_2^q(y,\ v,\ \underset{1}{v}, \ldots,\ \underset{t}{v}) = \tilde{L}^q_{2,|c|}(y,\ v,\ \underset{1}{v}, \ldots,\ \underset{t+|c|}{v}) = 0\ .$$

Оскільки систему (1.2.14) вважаємо інтегровною, вона є сумісною і може бути зведена до інволюції. Розв'яжемо рівняння системи (1.2.14) відносно головних похідних $\underset{\le t+|c|}{v^{\blacksquare}}$ і підставимо одержані для них вирази у праві частини рівнянь системи (1.2.13). Виключимо однакові параметричні похідні $\underset{t+|c|}{\hat{v}}$, що виникають внаслідок цього. Таким чином одержуємо рівняння, що зв'язують між собою змінні $(x,\ u,\ \underset{1}{u}, \ldots,\ \underset{k}{u})$. В силу визначальних рівнянь для h^{μ} і $H^{\wedge}$ та сумісності системи (1.2.14) усі параметричні похідні повинні виключатися. Наслідком цього виключення стає система рівнянь (1.2.1)

$$L_1^p(x,\ u,\ \underset{1}{u}, \ldots,\ \underset{k'}{u}) = 0\ , \quad (p = \overline{1,\alpha})\ .$$

Доведемо єдиність одержаного рівняння L_1^p. Нехай, крім нього, існує інше рівняння $L_3^{p'}(x,u)$ порядку k' (цей порядок визначається функціями h^{μ}, $H^{\wedge}$). Нехай, далі, НПЗ із тими ж h^{μ} і $H^{\wedge}$, що й раніше, зв'язує рівняння $L_3^{p'}(x,u)$ із $L_2^q(y,v)$. Це значить, що обидва рівняння породжують одну і ту ж саму систему визначальних рівнянь на функції h^{μ}, $H^{\wedge}$. Підставимо формули (1.2.13) в обидва рівняння $L_3^{p'}(x,u)$ та $L_2^q(x,u)$. Одержуємо

$$\tilde{\Omega}^{p'}(y,v) \neq \Omega^p(y,v) = \lambda_q^{p,|c|} L_2^p(y,v)\ .$$

Звідси випливає неможливість представлення рівняння $\tilde{\Omega}^{p'}(y,v)$

через L_2^q, тобто його факторизація. Ця суперечність завершує доведення теореми. ■

Зауваження І.2.І. В більш загальному випадку можна припустити, що рівняння $\Omega^p(y,v) = 0$ з (1.2.4) сумісно з деяким рівнянням $L_2^q(y, v, \underset{1}{v},\dots, \underset{t<k'+r}{v}) = 0$. Тобто, існує загальна для цих рівнянь непуста підмножина розв'язків

$$g^R(y) = g^\Omega(y) \cap g^L(y) .$$

Зв'язок, що виникає при цьому між рівняннями $L_1^p(x,u)$ і $L_2^q(y,v)$ на підмножинах розв'язків $v^R = g^R(y)$ та

$$u^R = f^R(x): \quad \begin{aligned} x^\mu &= h^\mu(y, g^R, \underset{1}{g^R},\dots, \underset{r}{g^R}) , \\ u^\wedge &= H^\wedge(y, g^R, \underset{1}{g^R},\dots, \underset{r}{g^R}) , \end{aligned}$$

може бути зображений системою

$$\begin{aligned} &L_1^p(x, u, \underset{1}{u},\dots, \underset{k'}{u}) = \Omega^p(y, v, \underset{1}{v},\dots, \underset{k'+r}{v}) \\ &\Omega^p(y, v, \underset{1}{v},\dots, \underset{k'+r}{v}) = 0 , \quad (p = \overline{1,\alpha}) , \\ &L_2^q(y, v, \underset{1}{v},\dots, \underset{t}{v}) = 0 , \quad (q = \overline{1,\alpha'}) . \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

Щоб одержати необхідні умови існування зв'язку між рівняннями в цьому випадку, належить дослідити сумісність системи

$$\begin{aligned} &\Omega^p(y, v, \underset{1}{v},\dots, \underset{k'+r}{v}) = 0 , \\ &L_2^q(y, v, \underset{1}{v},\dots, \underset{t}{v}) = 0 \end{aligned}$$

і потім звести її до інволюції. Одержану таким чином систему позначимо $R^s(y, v, \underset{1}{v},\dots, \underset{k'+r}{v}) = 0$, $(s = \overline{1,\alpha'''})$. Тепер шукана умова має вигляд

$$L_1^p(x,u)\Big|_{\underset{|c|}{D} R^s} \equiv 0 . \tag{1.2.16}$$

Зокрема, рівняння Ω^p може допускати декомпозицію, тобто зображення у вигляді

$$\Omega^{p}(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{k'+r}{v}) = \alpha^{p}_{q} L^{q}_{2}(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{k'+r}{v}) +$$

$$+ \beta^{p}_{q'} L^{q'}_{3}(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{t'\leq k'+r}{v}) . \qquad (1.2.17)$$

$$(q' = \overline{1,a''}) .$$

Тут $\| \alpha \|$, $\| \beta \|$ є матриці розміру $a \times a'$ та $a \times a''$ відповідно. Рівняння $L^{q}_{2} - \Lambda^{q}_{2}(y,v) = 0$ можна вважати даними, а рівняння $L^{q'}_{3} - \Lambda^{q'}_{3}(y,v) = 0$ – допоміжними. При цьому повинні виконуватись умови сумісності переозначеної системи рівнянь:

$$L^{q}_{2}(y,v) - \Lambda^{q}_{2}(y,v) = 0 ,$$

$$L^{q'}_{3}(y,v) - \Lambda^{q'}_{3}(y,v) = 0 , \qquad (1.2.18)$$

$$\lambda^{p}_{q} \Lambda^{q}_{2}(y,v) + \beta^{p}_{q'} \Lambda^{q'}_{3}(y,v) = 0 .$$

Ще один частинний випадок зведення рівняння $L^{p}_{1}(x,u)$ до $L^{q}_{2}(y,v)$ на підмножинах розв'язків виникає, коли ця підмножина є одночасно спільною для $L^{q}_{2}(y,v)$ і сумісного з ним певного рівняння $L^{q'}_{3}(y,v) = 0$. Відповідна система рівнянь має вигляд

$$L^{p}_{1}(x,\ u,\ \underset{1}{u},\dots,\ \underset{k'}{u}) = \Omega^{p}(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{k'+r}{v}) ,$$

$$\Omega^{p}(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{k'+r}{v}) = 0 ,\ (p = \overline{1,a}) ,$$

$$L^{q}_{2}(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{t}{v}) = 0 ,\quad (q = \overline{1,a'}) ,$$

$$L^{q'}_{3}(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{t'}{v}) = 0 ,\quad (q' = \overline{1,a''}) . \qquad (1.2.19)$$

і повинна бути сумісною. У частинному випадку ця система може мати місце, коли є вірною умова

$$\Omega^{p}(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{k'+r}{v}) = \lambda^{p,\,|c|}_{q} L^{q}_{2}(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{t}{v}) +$$

$$+ \tilde{\lambda}^{p,\,|c|+s}_{q'} L^{q'}_{3}(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{t-s}{v}) . \qquad (1.2.20)$$

Отже, у цьому випадку одержуємо

$$L_1^P(x,u)\Big|_{\underset{|c|}{D} L_2^q,\ \underset{|c|+s}{D} L_3^q} \equiv 0 .$$

II. У добутку пучків джетів із спільною базою $\mathbb{M}'$ $J^k(\mathbb{M}', \mathbb{N}) \times J^\ell(\mathbb{M}', \mathbb{N}')$ з ототожненням

$$x = h(y, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{r}{v}) = p' \in J^\ell(\mathbb{M}', \mathbb{N}') \qquad (1.2.21)$$

розглянемо систему рівнянь

$$x^\mu = h^\mu(y, v, \ldots, \underset{r}{v}) , \ (\mu = \overline{0,n-1}) ,$$

$$B^b(u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k'}{u} ; y, v, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{\ell'}{v}) = 0 ,$$

$$(b = \overline{1,s'}) . \qquad (1.2.22)$$

Нехай вона задовольняє означення 1.1.5 НПЗ другого роду. Крім того, у розшарованому многовиді $(\mathbb{E}^k, \mathbb{M}, \rho)$ задамо рівняння

$$L_1^P(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k''}{u}) = 0 , \qquad (1.2.23)$$

яке природним способом в силу ототожнення (1.2.21) занурюється у добуток джетів $J^k(\mathbb{M}', \mathbb{N}) \times J^\ell(\mathbb{M}', \mathbb{N}')$. Зведену до інволюції систему рівнянь (1.2.22) розв'яжемо відносно головних похідних і подамо у вигляді

$$\underset{c}{u}^a = E^a_{(c)}(\hat{u}, \underset{1}{\hat{u}}, \ldots, \underset{k'+a}{\hat{u}} ; y, v, \ldots, \underset{\ell'+a}{v}) ,$$

$$x^\mu = h^\mu(y, v, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{r}{v}) , \ (G = \overline{1,s}) . \qquad (1.2.24)$$

Тут $0 < c \le k' + a$, a – порядок продовження системи (1.2.22), необхідний для зведення її до інволюції. Виконаємо продовження до порядку a включно рівнянь (1.2.23)

$$L_1^P(x, \underset{k''}{u}) = 0 ,$$

$$\underset{1}{D} L_1^P(x, \underset{k''}{u}) = L^P_{1,(1)}(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k''+1}{u}) = 0 , \ldots ,$$

$$\underset{a}{D}\, L_1^p(x, \underset{k''}{u}) = L^p_{1,(a)}(x, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{k''+a}{u}) = 0 \,. \qquad (1.2.25)$$

Підставимо знайдені у (1.2.24) вирази для головних похідних в рівняння системи (1.2.25). При цьому одержуємо систему

$$T^i(\hat{u}, \underset{1}{\hat{u}}, \dots, \underset{k'+a}{\hat{u}} \,;\, y, v, \dots, \underset{\ell'+a}{v}) = 0 \,,$$

$$(i = \overline{1, s''}) \,. \qquad (1.2.26)$$

Якщо усі параметричні похідні із системи (1.2.26) вдається виключити, одержуємо систему рівнянь у розшаруванні $(\mathbb{E}', \mathbb{M}', \rho')$, яку позначимо

$$L_2^q(y, v, \underset{1}{v}, \dots, \underset{t}{v}) = 0 \,, \qquad (q = \overline{1, \alpha'}) \,.$$

У випадку, коли виключити усі параметричні похідні із системи (1.2.26) неможливо, до вихідної системи рівнянь (1.2.22) треба додати s''' нових рівнянь

$$B^j(u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{k'}{u} \,;\, y, v, \underset{1}{v}, \dots, \underset{\ell'}{v}) = 0 \,,$$

$$(j = \overline{1, s'''}) \,,$$

вигляд яких заздалегідь не визначено. Для заново утвореної системи рівнянь

$$x^\mu = h^\mu(y, v, \underset{1}{v}, \dots, \underset{r}{v}) \,,$$

$$B^a(u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{k'}{u} \,;\, y, v, \underset{1}{v}, \dots, \underset{\ell'}{v}) = 0 \,,$$

$$(a = \overline{1, s' + s'''}) \qquad (1.2.22a)$$

слід вдруге здійснити алгоритм зведення до інволюції і завершити процес виключення параметричних похідних. При цьому уточнюється вигляд додаткових рівнянь B^j, $j = \overline{1, s'''}$.

Означення I.2.3. Рівняння $L_1^p(x, \underset{k'}{u}) = 0$ назвемо зв'язаним з рівнянням $L_2^q(y, \underset{t}{v}) = 0$ за допомогою НПЗ другого роду порядку r, якщо: 1) існує така система рівнянь (1.2.22), яка після поповнення s''' рівняннями системи B^j, $(j = \overline{1,s'''})$ допускатиме зведення до інволюції по сукупності змінних u, $u_1, \dots, u_{k'+a}$; 2) виключення з рівнянь a - продовженої системи $L_i^p(x, u_{k'})$ головних похідних за допомогою одержаної інволютивної системи приводить до системи рівнянь, які є наслідками диференціального продовження рівняння $L_2^q(y, v_t) = 0$.

Систему рівнянь (1.2.22a)

$$S: \quad \begin{gathered} x^\mu = h^\mu(y, v, v_1, \dots, v_r) , \\ B^a(u, u_1, \dots, u_{k'} ; y, v, v_1, \dots, v_{\ell'}) = 0 , \\ (\mu = \overline{0,n-1} , \ a = \overline{1,s' + s'''}) , \end{gathered}$$

одержану об'єднанням рівнянь (1.2.22) та B^j, $(j = \overline{1,s'''})$ і яка допускає зведення до інволюції, зватимемо повною системою НПДР, яка одержана із НПЗ другого роду (1.2.22).

Необхідні умови, які повинна задовольняти система рівнянь НПЗ (1.2.22a), випливають із рівностей

$$L_i^p(x, u, u_1, \dots, u_{k'})\Big|_S = \lambda_q^{p,|c|} L_2^q(y, v, v_1, \dots, v_t) ,$$

$$D_1 L_i^p(x, u, u_1, \dots, u_{k'})\Big|_S = L^p_{1,(1)}(x, u, u_1, \dots, u_{k'+1})\Big|_S =$$

$$= \lambda_{q(1)}^{p,|c|+1} L_2^q(y, v, v_1, \dots, v_t) ,$$

. . . .

$$D_a L_i^p(x, u, u_1, \dots, u_{k'})\Big|_S = L^p_{1,(a)}(x, u, u_1, \dots, u_{k'+a})\Big|_S =$$

$$= \lambda_{q(a)}^{p,|c|+a} L_2^q(y, v, v_1, \dots, v_t) ,$$

де $\lambda_{q(i)}^{p,j}$ залежить від змінних $(y, v, v_1, \dots, v_\ell) \in J^\ell(M', N')$ і певної сукупності параметричних похідних $\hat{u}, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{k'+a}$. Останні можуть частково виключатися із одержаної вище системи, по інших треба виконати розщеплення. Таким чином, маємо визначальні співвідношення

$$L_1^p\Big|_{\substack{D\\|c|+\alpha}L_2^q,S} \equiv 0\,, \quad \underset{1}{D}\,L_1^p\Big|_{\substack{D\\|c|+\alpha}L_2^q,S} \equiv 0\,,\ldots,$$

$$\underset{\alpha}{D}\,L_1^p\Big|_{\substack{D\\|c|+\alpha}L_2^q,S} \equiv 0\,. \qquad (1.2.27)$$

Означення І.2.4. Диференціальне рівняння $L_1^p(x,u) = 0$ назвемо інваріантним відносно НПЗ першого або другого роду, якщо рівняння $L_2^q(y,v) = 0$ з точністю до позначень збігається із $L_1^p(x,u) = 0$, тобто $L_1^p(y,v) \equiv L_2^q(y,v)$. При цьому рівняння (1.2.10) одержує форму

$$L_1^p(x,\ u,\ \underset{1}{u},\ldots,\ \underset{k'}{u}\ ) = \lambda_q^{p,|c|}\ L_1^q(y,\ v,\ \underset{1}{v},\ldots,\ \underset{k'}{v}\ )\ ,$$

$$(p,\ q = \overline{1,\alpha}\ , \quad |c| = r\ )\ .$$

Означення І.2.5. Говоритимемо, що нелінійне ДРЧП $L_1^p(x,u) = 0$ допускає нелокальну лінеаризацію за допомогою НПЗ, якщо рівняння $L_2^q(y,v) = 0$ є лінійним ДРЧП. Алгоритм зведення нелінійного рівняння L_1^p до лінійного L_2^q зватимемо нелокальною лінеаризацією ДР L_1^p.

Класичним прикладом НПЗ другого роду порядку 1, що зв'язує ДР $L_1(x,u) = 0$ та $L_2(y,v) = 0$, є т.з. перетворення Беклунда (ПБ) у $\mathbb{R}(1,1)$ [178,238]

$$B^c(x,\ u,\ \underset{1}{u}\ ;\ y,\ v,\ \underset{1}{v}) = 0\ , \quad (c = \overline{1,4})\ , \qquad (1.2.28)$$

$$(m = m' = 1, \quad n = n' = 2, \quad \alpha = \alpha' = 1)\ .$$

У випадку явної залежності рівнянь (1.2.28) від незалежних змінних x^μ, y^ν, $(\mu,\ \nu = 0,1)$ система (1.2.28) може бути розв'язана відносно x^μ, $\underset{1}{u}$

$$x^\mu = h^\mu(y,\ v,\ \underset{1}{v};\ u)\ ,$$

$$u_\mu = \Gamma_\mu(y,\ v,\ \underset{1}{v};\ u)\ , \qquad (1.2.29a)$$

або відносно змінних y^ν, $\underset{1}{v}$:

$$y^\mu = h'^\mu(x, u, \underset{1}{u}; v) , \qquad (1.2.29б)$$

$$v_\mu \doteq \Gamma'_\mu(x, u, \underset{1}{u}; v) .$$

Це дозволяє записати такі зовнішні диференціальні рівняння:

$$\omega = du - \Gamma_\mu dx^\mu = 0 , \quad \omega' = dv - \Gamma'_\mu dy^\mu = 0 .$$

Тут ω, ω' – 1-диференціальні форми, d – оператор зовнішнього диференціювання. Умови інтегровності систем (1.2.29) мають вигляд

$$d\omega = d\omega' = 0 .$$

У координатному запису маємо

$$D_{[1}\Gamma_{0]}\Big|_{L_2(y,v)} = 0 , \qquad D_{[1}\Gamma'_{0]}\Big|_{L_1(x,u)} = 0 . \qquad (1.2.30)$$

По індексах, що взяті у квадратні дужки, виконується альтернування. Рівняння (1.2.30) є основними для визначення вигляду функцій B^c системи (1.2.28). У застосуваннях, як правило, зустрічаються ПБ із $x = y$ [238].

Наведемо приклад НПДР у просторі $\mathbb{P}(1,2)$.

Приклад I.2.I. Нелокальне перетворення змінних

$$B^1 = u_0 + u_2 - v_1 = 0 , \quad B^2 = u_1 - v_0 + v_2 = 0 ,$$

$$x^\lambda = y^\lambda , \ (\lambda = 0,1) , \qquad x^2 = y^2 - v_1 = y^2 - u_0 - u_2 \qquad (1.2.31)$$

зв'язує між собою рівняння

$$L_2 \equiv v_{00} - \frac{1}{1 - v_{12}} v_{11} - \frac{1 + v_{10}}{1 - v_{12}} v_{22} + \frac{v_{10} + v_{12}}{1 - v_{12}} v_{20} = 0 \quad (1.2.32)$$

та

$$L_1 \equiv u_{00} - u_{11} - \frac{1 + u_{00} + u_{02}}{1 + u_{02} + u_{22}} u_{22} -$$

$$- \frac{u_{02}(u_{00} - u_{22}) - u_{12}(u_{01} + u_{12})}{1 + u_{02} + u_{22}} = 0 . \qquad (1.2.33)$$

Дійсно, з формул (1.2.31) та (1.1.8а), (1.1.10) випливають співвідношення

$$\| Dh \| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & -v_{10} \\ 0 & 1 & -v_{11} \\ 0 & 1 & 1-v_{12} \end{matrix} \right\| , \quad (\mu = 0,1,2) , \qquad (1.2.34)$$

$$\partial_{x^\mu}(u_0 + u_2) = (1 - v_{12})^{-1} \partial_{y^\mu} v_1 .$$

Візьмемо похідні $\partial_{x^1} B^1$ і $\left[\partial_{x^0} + \partial_{x^2}\right] B^2$ та виключимо за допомогою рівностей (1.2.34) змінну u. Приходимо до рівняння L_2.
З іншого боку маємо

$$\| Dh' \| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & (u_0 + u_2)_0 \\ 0 & 1 & (u_0 + u_2)_1 \\ 0 & 0 & 1 + (u_0 + u_2)_2 \end{matrix} \right\| , \qquad (1.2.35)$$

$$\partial_{y^\mu} v_1 = (1 + u_{02} + u_{22})^{-1} \partial_{x^\mu}(u_0 + u_2) .$$

Це дозволяє виключенням v з рівності $\partial_{y^1} B^1 = (\partial_{y^0} - \partial_{y^1}) B^1$ одержати рівняння L_1.

II. Умови інтегровності повного НПЗ другого роду, що зв'язує ДР $L_1^p(x,u)$ та $L_2^q(y,v)$, являють собою алгебраїчний формалізм виключення параметричних похідних у зведеної до інволюції системи НПДР. Вони можуть бути представлені, наприклад, у вигляді деяких операторних рівнянь. Складність аналізу сумісності та алгоритму зведення до інволюції системи НПДР у загальному випадку (алгоритм Рік'є-Жане-Курані-ші-Спенсера або Картана), є, мабуть, основною причиною того, що нелокальні методи інтегрування ДРЧП у випадку багатьох незалежних змінних до цього часу розроблені недостатньо. Значного полегшення тут удається досягти, якщо прийняти за основу яку-небудь визначену алгебраїчну конструкцію умов інтегровності, що зв'язує рівняння НПЗ. Цей підхід a priori гарантує сумісність системи рівнянь НПДР принаймні по частині диференціальних змінних. Нижче розглянемо найбільш відомі типи УІ.

Тип I. Найпростіша форма запису умов сумісності системи (1.2.22a) має вигляд (1.2.30). По суті ці формули виражають собою умову нульової кривини, яка записана для скалярних функцій ($m = m' = 1$) $u(x)$, $v(y)$ двох незалежних змінних (x^0, x^1) і (y^0, y^1).

Тип 2. Представлення Лакса [55] для спеціального випадку НПДР

$$
\begin{aligned}
&L[v] - \lambda \cdot v = 0, \quad L = L(u, \underset{1}{u}, \ldots), \\
&\partial_0 v - A[v] = 0, \quad A = A(u, \underset{1}{u}, \ldots),
\end{aligned}
\tag{1.2.36}
$$

записують у вигляді операторного рівняння

$$
D_0 L + [L, A]\big|_{L_1(x,y)} = 0 . \tag{1.2.37}
$$

Тут L та A – лінійні диференціальні оператори, $y = x = (x^0, x^1)$.

Тип 3. Представлення системи рівнянь НПДР із векторними змінними u і v у вигляді

$$
\begin{aligned}
&\left[\partial_1 - U_1(x, u, \underset{1}{u}, \ldots)\right] v = 0, \\
&\left[\partial_0 - U_0(x, u, \underset{1}{u}, \ldots)\right] v = 0,
\end{aligned}
\tag{1.2.38}
$$

$x = y = (x^0, x^1)$, $u = (u^1, u^2, \ldots, u^m)$, $v = (v^1, v^2, \ldots, v^{m'})$ призводить до відповідного матричного узагальнення рівняння (1.2.30) [36,37,53,61,84,195,251]:

$$
D_{[1} U_{0]} + [U_0, U_1]\big|_{L_1^p} = 0 . \tag{1.2.39}
$$

Тип 4. У просторі $\mathbb{R}(0,3)$ незалежних змінних скористаємось відомою тотожністю із векторного аналізу для скалярної функції v ($m' = 1$):

$$[\nabla \times \nabla v] = 0 .$$

Розглянемо систему НПДР

$$\nabla v = Uv , \qquad U = \{U_a(x, u, \underset{1}{u}, \ldots)\}$$

$$x = (x^1 , x^2 , x^3) , \qquad (a = 1,2,3) .$$

Умови сумісності для них мають вигляд:

$$\partial_{[2} U_{a]} = 0 , \quad \partial_{[3} U_{1]} = 0 , \quad \partial_{[3} U_{2]} = 0 . \qquad (1.2.40)$$

У більш загальному випадку $\mathbb{R}(1,n-1)$ з $v = (v^1 , v^2 ,\ldots, v^{m'})$ систему НПДР задамо рівностями

$$\nabla v = \Gamma \cdot v , \qquad \Gamma^{B} = \| \Gamma^{B}_{\mu C} \| ,$$

або

$$v^{B}_{\mu} = \Gamma^{B}_{\mu C} \cdot v^{C} , \; \Gamma^{B}_{\mu C} = \Gamma^{B}_{\mu C}(x, u, \underset{1}{u},\ldots) ,$$

$$(\mu = \overline{0,n-1} , \quad B,C = \overline{1,m'}) .$$

Сумісність цих рівнянь визначається системою операторних співвідношень (для усіх можливих пар (μ,ν))

$$\left\{D_{[\mu} \Gamma^{B}_{\nu]C} - \Gamma^{B}_{[\mu K} \Gamma^{K}_{\nu]C}\right\} v^{C} = 0 . \qquad (1.2.41)$$

Тип 5. Друга тотожність векторного аналізу для вектор-функції $v = (v^1 ,v^2 ,v^3)$ має вигляд

$$(\nabla \cdot [\nabla \times v]) = 0 , \qquad x = (x^1 , x^2 , x^3) .$$

Систему рівнянь НПЗ беремо такою :

$$\begin{aligned} v^3_2 - v^2_3 &= U_2 v^2 - U_1 v^3 , \\ v^1_3 - v^3_1 &= - U_2 v^1 - U_3 v^3 , \qquad (1.2.42) \\ v^2_1 - v^1_2 &= U_1 v^1 + U_3 v^2 . \end{aligned}$$

Обчислимо дивергенцію вектора (1.2.42). Приходимо до рівності

$$\left\{\partial_1 U_2 + \partial_3 U_3 + [U_2 ,U_3]\right\} v^2 + \left\{\partial_1 U_1 + \partial_2 U_3 + [U_1 ,U_3]\right\} v^3 +$$

$$+ \left\{\partial_3 U_1 - \partial_2 U_2 + [U_2 ,U_1]\right\} v^1 = 0 . \qquad (1.2.43)$$

Наявність в рівнянні різних множників v^c, $(c = 1,2,3)$ дозволяє розглянути декілька різних випадків.

1). При $v^1 = v^2 = v^3$ система рівнянь $L_1(x,u)$ визначається рівнянням

$$\partial_1 U_2 + \partial_3 U_3 + [U_2, U_3] + \partial_1 U_1 + \partial_2 U_3 + [U_1, U_3] +$$
$$+ \partial_3 U_1 - \partial_2 U_2 + [U_2, U_1]\Big|_{L_1} = 0 . \qquad (1.2.44)$$

2). При $v^2 = v^3 \neq v^1$ з рівняння (1.2.43) випливають два операторних рівняння, які породжують $L_1^p(x,u)$, $(p = 1,2)$

$$\partial_1 U_2 + \partial_2 U_3 + \partial_1 U_1 + \partial_3 U_3 + [U_1, U_3] + [U_2, U_3]\Big|_{L_1^p} = 0 ,$$
$$\partial_3 U_1 - \partial_2 U_2 + [U_2, U_1]\Big|_{L_1^p} = 0 . \qquad (1.2.45)$$

Аналогічно розглядаються випадки, коли $v^1 = v^2 \neq v^3$ та $v^1 = v^3 \neq v^2$.

3). У випадку $v^1 \neq v^2$, $v^2 \neq v^3$, $v^1 \neq v^3$ одержуємо три рівняння, які визначають систему $L_1^p(x,u)$, $(p = 1,2,3)$:

$$\partial_1 U_2 + \partial_3 U_3 + [U_2, U_3]\Big|_{L_1^p} = 0 , \qquad (1.2.46)$$
$$\partial_1 U_1 + \partial_2 U_3 + [U_1, U_3]\Big|_{L_1^p} = 0 , \qquad (1.2.47)$$
$$\partial_3 U_1 - \partial_2 U_2 + [U_2, U_1]\Big|_{L_1^p} = 0 . \qquad (1.2.48)$$

Тип 6. Представлення скалярного рівняння у просторі чотирьох незалежних змінних у формі закону збереження було запропоновано Блюменом та Рейдом в роботі [149]. При цьому систему рівнянь НПЗ записують у вигляді $(m = 1,\ m' = 3,\ \dim \mathbb{M} = 4)$:

$$\begin{aligned} v_2^1 &= U_1(x, u, \underset{1}{u}, \dots) , \\ -(v_1^1 + v_3^2) &= U_2(x, u, \underset{1}{u}, \dots) , \\ (v_2^2 + v_0^3) &= U_3(x, u, \underset{1}{u}, \dots) , \end{aligned} \qquad (1.2.49)$$

$$-v_3^3 = U_0(x, u, \underset{1}{u}, \ldots) .$$

Позначимо

$$U = \| U_1, U_2, U_3 \|^T , \qquad (1.2.50)$$

т - транспонування. Тоді рівність

$$(\nabla \cdot U) + \partial_0 U_0 = 0 \qquad (1.2.51)$$

визначає рівняння $L_1(x,u) = 0$. Відмітимо, що конкретні приклади із $n > 2$ незалежних змінними авторами не розглядалися.

Узагальнення на $n > 4$- мірний випадок одержуємо, якщо розглянемо систему рівнянь

$$v_2^1 = U_1 ,$$

$$-(v_1^1 + v_3^2) = U_2 ,$$

$$(v_2^2 + v_4^3) = U_3 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-1)^{k+1}(v_k^k + v_{k+2}^{k+1}) = U_{k+1} ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-1)^{n-1}(v_{n-2}^{n-2} + v_0^{n-1}) = Un-1 ,$$

$$(-1)^{n+1} v_{n-1}^{n-1} = U_0 , \qquad (1.2.49a)$$

$$U = \| U_1, U_2, \ldots U_{n-1} \|^T .$$

Рівняння $L_1(x,u) = 0$, $(m = 1)$ може бути записано у вигляді закону збереження

$$\partial_\mu U_\mu \equiv (\nabla \cdot U) + \partial_0 U_0 = 0 ,$$

$$(\mu = \overline{0,n-1}) . \qquad (1.2.52)$$

Якщо позначити $-U_0 \equiv I^0$, $U_\alpha \equiv 1^\alpha$, $(\alpha = \overline{1,n-1})$, останнє рівняння одержує вигляд

$$\partial_\mu I^\mu = 0 . \qquad (1.2.53)$$

Вектор $I = \| I^0, I^1, \ldots, I^{n-1} \|^T$ прийнято звати струмом , а у випадку виконання умови (1.2.53) - струмом, зв'язаним з системою (1.2.49а), які зберігається [9,13,23-25,48,50,61, 84].

З метою дослідження нелінійних ДР в роботах [23-25] було запропоновано інший метод - так званий метод збережених струмов.

Автори виходять з даного НДР у вигляді

$$L_1(x,u) = P_{\nu_1\ldots\nu_k}(u)\partial_{\nu_1\ldots\nu_k}u(x) = 0 . \qquad (1.2.54)$$

З цим рівнянням зв'язують так зване асоційоване лінійне рівняння

$$v\tilde{L}_1(x,u) \equiv (-1)^k\partial_{\nu_1\ldots\nu_k}\left[v(x)P_{\nu_1\ldots\nu_k}(u)\right] = 0 \qquad (1.2.55)$$

та вектор струму з компонентами

$$I^{\nu}(x) = (-1)^k\partial_{\nu_1\ldots\nu_k}\left[v(x)P_{\nu\nu_1\ldots\nu_k\lambda_1\ldots\lambda_q}(u)\right]\cdot$$

$$\cdot\partial_{\lambda_1\ldots\lambda_q}u . \qquad (1.2.56)$$

Із співвідношень (1.2.53) - (1.2.56) випливає, що на розв'язках рівняння $L_1(x,u) = 0$ струм I (1.2.56) зберігається, тобто

$$\partial_{\mu}I^{\mu}\Big|_{L_1} \equiv 0 . \qquad (1.2.57)$$

З побудованим таким чином струмом можна зіставити систему рівнянь НПЗ типу (1.2.49а), в яких U_{μ} $(x, u, \underset{1}{u},\ldots; v^1)$ $= I^{\mu}$, $v \equiv v^1$. Якщо удається виключити з одержаних рівнянь змінну u, приходимо до рівняння $L_2^q(x,u) = 0$.

Тип 7. Представлення ДР за допомогою співвідношень (1.2.49) допускає узагальнення. Нехай в $\mathbb{R}(1,3)$ задана система

$$\begin{aligned} v_2^1 &= U_{1c}v^c , \\ -(v_1^1 + v_3^2) &= U_{2c}v^c , \\ (v_2^2 + v_0^3) &= U_{3c}v^c , \end{aligned} \qquad (1.2.58)$$

$$- v_3^3 = U_{0c} v^c ,$$

$$U_{\mu c} = U_{\mu c}(x, u, \underset{1}{u}, \dots) .$$

При $U_{01} = U_{02} = U_{12} = U_{13} = U_{31} = U_{23} = 0$ одержуємо таку умову сумісності рівнянь (1.2.58):

$$\left\{\partial_1 U_{11} + \partial_2 U_{21} + [U_{11}, U_{21}]\right\} v^1 + \left\{\partial_2 U_{22} + \partial_3 U_{32} + [U_{22}, U_{32}]\right\} v^2 +$$

$$+ \left\{\partial_3 U_{33} - \partial_0 U_{03} + [U_{33}, U_{03}]\right\} v^3 = 0 . \qquad (1.2.59)$$

Аналіз різних способів задання ДР $L_1^p(x,u)$ за допомогою цього співвідношення подібний до розглянутого раніше (див. (1.2.47)).

На завершення параграфа розглянемо одну можливість використання умов сумісності НПДР у просторах, які продовжені за допомогою функціональних параметрів (див. зауваження 1.1.1.). Розглянемо умови сумісності

$$\left\{Q_{[a}Q_{b]} - \lambda_{ab}^c Q_c\right\}\Big|_{L_2^q} = 0 , \qquad (1.2.60)$$

$$Q_{[a}Q_{b]} \equiv [Q_a, Q_b] = Q_a Q_b - Q_b Q_a ,$$

які ми зв'язуємо з НПДР (1.2.22a)

$$x = h(y, v, \underset{1}{v}, \dots, \underset{r}{v}) ,$$

$$B^a(u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{k'}{u} ; y, v, \underset{1}{v}, \dots, \underset{\ell'}{v}) = 0 ,$$

$$(a = \overline{1, s' + s'''}) . \qquad (1.2.61)$$

Взагалі кажучи, з цих рівнянь при заданому $L_2^q(y,v)$ випливає декотре рівняння $\tilde{L}_1^{p'}(x,u) \neq L_1^p(x,u)$. Продовжимо даний розшарований многовид $(\mathbb{E}'^{,k,\ell}, \mathbb{M}', \rho', \rho, \pi)$ за рахунок поповнення його розшарованим добутком пучків джетів $\mathcal{J}^{\varkappa}(\mathbb{M}', \mathbb{N}^{K}) \times \mathcal{J}^{\lambda}(\mathbb{M}', \mathbb{N}'^{L})$ у просторі функціональних параметрів $\theta^K(x)$ та $\tau^L(y)$, $(K = \overline{1, m - m^c}$, $L = \overline{1, m' - m'^a})$. Занурімо його у розшарований многовид $(\mathbb{E}^{\prime\prime k,\ell;\varkappa,\lambda}, \mathbb{M}^{\prime}, \rho^{\prime}, \rho, \rho^{\theta}, \rho^{\tau}, \pi)$. Тут пучкі джетів $J^{\varkappa}(\mathbb{M}^{\prime}, \mathbb{N}^{k})$, $J^{\lambda}(\mathbb{M}^{\prime}, \mathbb{N}^{\prime L})$ породжені відображеннями

$$\theta(x):\quad \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{N}^{k}, \qquad x \longrightarrow j^{\varkappa}_{x} f^{k};$$

$$\tau(y):\quad \mathbb{M}^{\prime} \longrightarrow \mathbb{N}^{\prime L}, \qquad y \longrightarrow J^{\lambda}_{y} g^{L}.$$

Розглянемо тепер систему рівнянь

$$x = h(y, v, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{r}{v};\ \tau, \underset{1}{\tau}, \ldots, \underset{\lambda^{\prime}}{\tau}),$$

$$B^{a}(u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k^{\prime}}{u};\ \theta, \underset{1}{\theta}, \ldots, \underset{\varkappa^{\prime}}{\theta};\ y, v, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{\ell^{\prime}}{v};$$

$$\tau, \underset{1}{\tau}, \ldots, \underset{\lambda^{\prime}}{\tau}) = 0. \qquad (1.2.62)$$

Якщо систему (1.2.62) підпорядкувати умовам сумісності (1.2.60) по змінних u^{A}, то вона, взагалі кажучи, стане неповним НПЗ другого роду у тотальному просторі $\mathbb{E}^{\prime\prime k,\ell;\varkappa,\lambda}$. Вільними функціональними параметрами можна розпорядитися так, щоб додаткові умови виду

$$F^{b}(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k^{\prime}}{u};\ \theta, \underset{1}{\theta}, \ldots, \underset{\varkappa^{\prime}}{\theta}) = 0 \qquad (1.2.63)$$

гарантували одержання рівняння $L^{p}_{1}(x,u)$. Решту параметрів τ підпорядкуємо умовам сумісності системи (1.2.62), (1.2.63), $L^{p}_{1}(x,u) = 0$ по змінних v^{B}. При цьому повинні виконуватись відповідні умови сумісності, які є розширенням (1.2.60) і обертаються в нуль на розв'язках розширеної системи рівнянь

$$L^{q}_{2}(y,v) = 0, \qquad L^{q^{\prime}}_{2}(y,v,\tau) = 0.$$

§3. Геометрія нелокальних перетворень

Сучасна геометрична теорія перетворень Беклунда (ПБ) [32,159,175,232,234,238,251,252] спирається на певного вигляду умови сумісності системи рівнянь, що його задають. Ці рівняння записують в термінах зв'язностей у розшарованому просторі джетів. Найбільш зручною мовою для цього кола питань є мова зовнішніх форм Е. Картана [49,77,101,159,175, 176,196,234]. У роботах Уолквіста і Естабрука [251,252], Германа [197,198], у монографії [234] та статтях [159-161, 175] перетворення незалежних змінних не розглядалися, а наведені приклади, обмежені випадком двох незалежних змінних. Лише в статті [159] побудовано ПБ у просторі $\mathbb{R}(0,3)$. У другій частині параграфа запропоновано геометричну модель НПДР, що узагальнює відзначені вище результати. Узагальнення досягнуто за рахунок застосування НПЗ та умов інтегровності більш загального типу.

I. У розшарованому многовиді $(\mathbb{E}'^{\ell}, \mathbb{M}', \rho')$ із пучком джетів $J^{\ell}(\mathbb{M}', \mathbb{N}')$ задамо рівняння порядку $t = 2 < \ell$:

$$L_2^q(y,\ v,\ \underset{1}{v},\ \underset{2}{v}) = 0\ , \tag{1.3.1}$$

$v = \{v^s\}$, $\mathbb{M}' = \mathbb{R}(1,n-1)$, $(q = \overline{1,m''}\ ,\quad s = \overline{1,m'})$.

Припустимо також, що рівняння (1.3.1) може бути записане у вигляді системи зовнішніх диференціальних форм степеня n (n – форм)

$$\alpha^c = \frac{1}{n!}\alpha^c_{\mu_0\ldots\mu_{n-1}}(y,v)dy^{\mu_0}\wedge dy^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dy^{\mu_{n-1}}\ ,$$

$$(c = \overline{1,r})\ . \tag{1.3.2}$$

Обернення в нуль цих форм α^c має наслідком рівняння (1.3.1). Таким чином, система нульових форм (1.3.2) утворює ідеал

$\mathbb{I} = \{\alpha^C\}$. Умови замкненості системи (1.3.2) даватимуться співвідношенням

$$d\alpha^C \subset \mathbb{I} .$$

Розглянемо тепер 1 - форми зв'язності, які утворюють стандартний базис контактних форм

$$\omega^A = du^A - H^A_\mu(x,\ v,\ \underset{1}{v};\ u)dx^\mu \ , \qquad (1.3.3)$$

$$(\mu = \overline{0,n-1}\ , \quad A = \overline{1,m}\ )$$

і ототожнимо незалежні змінні із $\mathbb{M}$ та $\mathbb{M}'$. Нехай

$$x^\mu = y^\mu \ , \quad (\mu = \overline{0,n-1})\ .$$

Форми (1.3.3) визначені у розшаруванні $(\mathbb{E}'^{\,k,\ell},\ \mathbb{M},\ \rho,\ \rho')$, яке містить у собі добуток пучків джетів $J^k(\mathbb{M},\mathbb{N}) \times J^\ell(\mathbb{M},\mathbb{N}')$ із спільною базою $\mathbb{M}$. Диференціальне продовження рівностей (1.3.3) породжує відповідну систему контактних 1-форм:

$$\omega^A_{\mu_1} = du^A_{\mu_1} - H^A_{\mu_1\mu}(x,\ v,\ \underset{1}{v},\ \underset{2}{v};\ u,\ \underset{1}{u})dx^\mu \ , \ldots , \qquad (1.3.4)$$

$$\omega^A_{\mu_1\ldots\mu_k} = du^A_{\mu_1\ldots\mu_k} - H^A_{\mu_1\ldots\mu_k\mu}(x,v,\underset{1}{v},\ldots,\underset{k+1}{v};u,\ldots,\underset{k}{u})dx^\mu \ .$$

Побудуємо тепер, як це зроблено у статті [159] , (n-1)-форми

$$\Omega^B = \beta^B_A \wedge \omega^A \ , \quad (B = \overline{1,m'})\ , \qquad (1.3.5)$$

в яких β^B_A - деякі (n-2) - форми вигляду

$$\beta^B_A = \frac{1}{(n-2)!}\, b^B_{A\mu_1\ldots\mu_{n-2}}\, dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_{n-2}} \ .$$

Розширений ідеал $\mathbb{I}'$ побудуємо поповненням $\mathbb{I}$ за рахунок форм (1.3.5):

$$\mathbb{I}' = \left\{\alpha^A,\ \Omega^B\right\} .$$

Нарешті, вимагаємо замкненості форм Ω^B, тобто

$$d\Omega^B \subset \mathbb{I}' \ . \qquad (1.3.6)$$

Ця умова забезпечується рівністю

$$d\Omega^B = \alpha^A f^B_A + \theta \wedge \Omega^B \ , \qquad (1.3.7)$$

де θ – деяка 1-форма, наприклад

$$\theta = \theta_\mu dx^\mu \ , \ \theta_\mu = \mathrm{const} \ .$$

Рівняння (1.3.7) є основним для визначення вигляду функцій $H^A_{\mu_1\ldots\mu_{k+1}}$, що введено у формах зв'язності (1.3.3) та уточнення форм β^B_A, θ і коефіцієнтів f^B_A.

В статті [159] сталі матриці $\beta^B_{A\mu_1\ldots\mu_{n-1}}$ підпорядковуються певним комутаційним співвідношенням. Ця алгебра матриць дозволяє, наприклад, ввести комбінації зв'язностей (струми) за формулами

$$I^{0A} = - b^{0A}_C H^C_2 + b^{2A}_C H^C_1 \ ,$$

$$I^{1A} = - b^{1A}_C H^C_1 + b^{0A}_C H^C_0 \ , \qquad (1.3.8)$$

$$I^{2A} = b^{1A}_C H^C_2 - b^{2A}_C H^C_0 \ .$$

Струми (1.3.8) використовуються при побудові ПБ для рівняння Бенджаміна-Оно у просторі $\mathbb{P}(1,2)$. При цьому $b^{0A}_C = - b^{1A}_C$, $b^{1A}_C = b^{2A}_C$, $b^{0A}_C = b^{2A}_C$.

Тепер можна надати рівнянню $L^q_2(x,v) = 0$ вигляд законів збереження

$$\partial_\mu I^{\mu A} = 0 \ . \qquad (1.3.9)$$

Припущення, що функції H^A_μ мають спеціальну будову, дозволяє зобразити струми у вигляді сум

$$I^{\mu A} = X_a(x,v)[v^A]\cdot f^{a\mu}(x,\ u,\ \underset{1}{u}) \ ,$$

$$(\mu = 0,1,2 \ , \quad a = \overline{1,r'}\ ) \qquad (1.3.10)$$

і потім знайти неповну алгебру Лі, яку утворюють оператори

$$X_a(x,v) = X^C_a(x,v)\partial_{v^C} \ .$$

Додаткові умови, що зв'язують X_a між собою, дозволяють домогтися замикання цієї алгебри і виконання для неї тотожностей Якобі.

II. Зрозуміло, що зведення ДР $L_1^p(x,u)$ до рівняння $L_2^q(y,v)$ за допомогою НПЗ другого роду з ототожненням

$$x = h(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\ \underset{r}{v})$$

мусить привести до узагальнення розглянутої вище геометричної моделі. Крім того, можна припустити, що далеко не кожна зв'язність типу (1.3.8) може претендувати на використання у моделі. Здається природним шукати такі комбінації на теоретико- групових підставах, зв'язуючи їх з декотрими алгебрами Лі операторів AG_r:

$$[Q_a,\ Q_b] - \lambda^c_{ab}Q_c = 0\ ,\quad (a,\ b = \overline{1,r})\ . \qquad (1.3.11)$$

Тут λ^c_{ab} - структурні константи відповідної групи Лі G_r. Ця алгебра може бути зв'язана із алгеброю інваріантності рівняння $L_2^q(y,v)$. Для інваріантного відносно оператора Q_a розв'язку v^{inv} такого рівняння маємо $Q_a(y,v^{inv})[v^{inv}] = 0$, а у випадку Q_a - неінваріантного розв'язку $v^{\#}$ одержуємо нерівність $Q_a(y,v^{\#})[v^{\#}] \neq 0$.

Зауваження I.3.I. Взагалі кажучи, замість операторного рівняння (1.3.11) можна взяти будь-яке інше, наприклад [27]

$$[Q_a,\ Q_b] = f(Q_1\ ,\ Q_2,\dots,\ Q_r)\ .$$

Нехай у просторі $\mathbb{E}^1(y,v)$ задана алгебра Лі інфінітезімальних операторів групи Лі G_r, яка допускається рівнянням $L_2^q(y,v)$:

$$X_a = \xi^\mu_a(y,v)\partial_\mu + \eta^в_a(y,v)\partial_{v^в}\ , \qquad (1.3.12)$$

$$[X_a,\ X_b] = \lambda^c_{ab}X_c\ ,\quad (a = \overline{1,r}\ ,\quad в = \overline{1,m'}\ )\ .$$

Скористаємось проекцією $\rho' : \mathbb{E}'^1 \longrightarrow \mathbb{M}'$, яка задана у розшаруванні $(\mathbb{E}',\ \mathbb{M}',\ \rho')$, і кожному оператору X_a поставимо у відповідність укорочений оператор

$$X_{\alpha}^{\rho'} = \xi_{\alpha}^{\mu}(y,v)\partial_{\mu} \ . \qquad (1.3.13)$$

З оператором (1.3.12) в $\mathbb{E}'^{1}$ тісно зв'язаний оператор, що діє у просторі $\mathbb{M}'$ [123]

$$Q_{\alpha}(y,v) = \xi_{\alpha}^{\mu}(y,v)\partial_{\mu} - \eta_{\alpha}^{*}(y,v) \ , \quad \eta_{\alpha}^{*}v^{B} = \eta_{\alpha}^{B} \ . \qquad (1.3.14)$$

За допомогою цього оператора визначимо Q_{α} – інваріантні розв'язки v^{inv} рівняння $L_{1}^{q}(y,v) = 0$:

$$Q_{\alpha}(y,v)[v^{B}] = \xi_{\alpha}^{\mu}(y,v)\partial_{\mu}v^{B} - \eta_{\alpha}^{B}(y,v) = 0 \ . \qquad (1.3.15)$$

Якщо $u^{A}(x) \neq v^{B}(y)$, тоді з (1.3.15) випливає формальна рівність

$$Q_{\alpha}(y,v)[u^{A}] = \Gamma_{\alpha c}^{A}(y, v, \underset{1}{v},\ldots)u^{c} \neq 0 \ . \qquad (1.3.15a)$$

Або в більш загальному випадку:

$$Q_{\alpha}(y,v)[u^{A}] = \Gamma_{\alpha}^{A}(y, v, \underset{1}{v},\ldots; u) \neq 0 \ . \qquad (1.3.15б)$$

Розглянемо тепер 1-форми зв'язностей (1.3.3)

$$\omega^{A} = (\partial_{x^{\mu}}u^{A})dx^{\mu} - H_{\mu}^{A}(x, v, \underset{1}{v}; u)dx^{\mu} \ . \qquad (1.3.16)$$

Виконаємо в (1.3.16) внутрішне множення $\overset{A}{\omega}$ на векторне поле

$$w_{\nu} = D_{y^{\nu}}h^{\mu}\partial_{x^{\mu}} \ , \qquad (1.3.17)$$

або $\| w \| = \|Dh\| \cdot \| \underset{1}{\partial} \|$, $\quad \underset{1}{\partial} \equiv \|\partial_{0}, \partial_{1},\ldots,\partial_{n-1}\|^{T}$.

Одержуємо [30,129,176,238]

$$w_{\nu} \lrcorner \ \omega^{A} = D_{y^{\nu}}h^{\mu}\partial_{x^{\mu}}u^{A} - D_{y^{\nu}}h^{\mu}\cdot H_{\mu}^{A} \ . \qquad (1.3.18)$$

Тут використано рівність

$$D_{y^{\nu}}h^{\mu}\partial_{x^{\mu}}\Big|_{\mathbb{M}} = \partial_{y^{\nu}}\Big|_{\mathbb{M}'} \ . \qquad (1.3.19)$$

Отже, з (1.3.18) знаходимо

$$w_{\nu} \lrcorner \ \omega^{A} = \partial_{y^{\nu}}u^{A} - D_{y^{\nu}}h^{\mu}\cdot H_{\mu}^{A} \ . \qquad (1.3.20)$$

Для кожного фіксованого ν скалярні рівності (1.3.20) помножимо на елементарні 1-форми dy^{ν} і потім підсумуємо одержані результати. Знаходимо 1-форму

$$\tilde{\omega}^{\wedge} = \left[\partial_{y^{\nu}} u^{\wedge} - D_{y^{\nu}} h^{\mu} \cdot H^{\wedge}_{\mu} \right] dy^{\nu} = du^{\wedge} - D_{y^{\nu}} h^{\mu} \cdot H^{\wedge}_{\mu} dy^{\nu} . \quad (1.3.21)$$

Внутрішній добуток векторного поля (1.3.13) на форму (1.3.21) запишемо у вигляді

$$X^{\rho'}_{a} \lrcorner\, \tilde{\omega}^{\wedge} = \xi^{\nu}_{a}(y,v)\partial_{y^{\nu}} u^{\wedge} - \eta^{*}_{a}(y,v)u^{\wedge} -$$

$$- \left[\xi^{\nu}_{a}(y,v) D_{y^{\nu}} h^{\mu} \cdot H^{\wedge}_{\mu} - \eta^{*}_{a}(y,v)u^{\wedge} \right] . \quad (1.3.22)$$

Позначимо

$$\xi^{\nu}_{a}(y,v) D_{y^{\nu}} h^{\mu} \cdot H^{\wedge}_{\mu} - \eta^{*}_{a}(y,v)u^{\wedge} \equiv \Gamma^{\wedge}_{ac}(y,\ v,\ \underset{1}{v}, \dots)u^{c} , \quad (1.3.23)$$

або, в більш загальному випадку нелінійної зв'язності,

$$\xi^{\nu}_{a}(y,v) D_{y^{\nu}} h^{\mu} \cdot H^{\wedge}_{\mu} - \eta^{*}_{a}(y,v)u^{\wedge} \equiv \Gamma^{\wedge}_{a}(y,\ v,\ \underset{1}{v}, \dots, u) .$$

У нових позначеннях рівняння (1.3.22) має вигляд

$$X^{\rho'}_{a} \lrcorner\, \tilde{\omega}^{\wedge} = Q_{a}(y,v)[u^{\wedge}] - \Gamma^{\wedge}_{a}(y,\ v,\ \underset{1}{v}, \dots, u) \quad . \quad (1.3.24)$$

Обертання виразів (1.3.24) в нуль визначає (лінійні) зв'язності у напрямку векторного поля $X^{\rho'}_{a}$. Обчислимо тепер зовнішній диференціал від скалярного виразу (1.3.24), позначивши результат $\tilde{\omega}^{\wedge}_{a}$,

$$\tilde{\omega}^{\wedge}_{a} \equiv d(X^{\rho'}_{a} \lrcorner\, \tilde{\omega}^{\wedge}) - \partial_{y^{\mu}}(X^{\rho'}_{a} \lrcorner\, \tilde{\omega}^{\wedge})dy^{\mu} . \quad (1.3.25)$$

Виконаємо внутрішнє множення форми $\tilde{\omega}^{\wedge}_{a}$ на векторне поле $X^{\rho'}_{b}$.

$$X^{\rho'}_{b} \lrcorner\, \tilde{\omega}_{a}^{\wedge} = \xi^{\mu}_{b}(y,v)\partial_{y^{\mu}}(X^{\rho'}_{a} \lrcorner\, \tilde{\omega}^{\wedge}) = \xi^{\mu}_{b}(y,v)\partial_{y^{\mu}}(Q_{a}[u^{\wedge}]) -$$

$$- \xi^{\mu}_{b}(y,v)\partial_{y^{\mu}}\Gamma^{\wedge}_{a} = (\xi^{\mu}_{b}(y,v)\partial_{y^{\mu}} - \eta_{b})Q_{a}[u^{\wedge}] + \eta_{b}Q_{a}[u^{\wedge}] -$$

$$- \xi^{\mu}_{b}(y,v)\partial_{y^{\mu}}\Gamma^{\wedge}_{a} = Q_{b}Q_{a}[u^{\wedge}] - Q_{b}\Gamma^{\wedge}_{a} ,$$

$$(X_b^{\rho'} \lrcorner\ \tilde{\omega}^{\wedge} = 0\ ) \ . \tag{1.3.26}$$

З урахуванням (1.3.26) побудуємо вираз (1.3.11).

$$\left\{[Q_a,Q_b] - \lambda^c_{ab}Q_c\right\}u^{\wedge} = \tilde{Q}_{[a}\Gamma^{\wedge}_{b]} + \Gamma^{\wedge}_{[a,|u^c|}\Gamma^c_{b]} - \lambda^c_{ab}\Gamma^{\wedge}_c \Big|_{L_2(y,v)} = 0 \ . \tag{1.3.27}$$

Тут $\tilde{Q}_a$ – проекція оператора Q_a у простір $\mathbb{E}'$ (тобто не виконується диференціювання по u – змінних),

$$\Gamma^{\wedge}_{a,u^c} \equiv \partial_{u^c}\Gamma^{\wedge}_a \ .$$

У випадку лінійної зв'язності рівняння (1.3.27) має вигляд

$$\left\{Q_a\ \Gamma^{\wedge}_{bk} + \Gamma^{\wedge}_{[a|k|}\ \Gamma^k_{bc} - \lambda^c_{ab}\Gamma^{\wedge}_{cc}\right\} u^c \Big|_{L^q_2} = 0 \ . \tag{1.3.27a}$$

Таким чином, основне рівняння, що визначає зведення системи НПЗ до рівняння $L^q_2(y,v)$, можна записати так ($X^{\rho'}_a \equiv X'_a$):

$$* \left\{ \mathcal{L}_{X'_{[a}}\ \mathcal{L}_{X'_{b]}}\ u^{\wedge} - \lambda^c_{ab}\ \mathcal{L}_{X'_c}\ u^{\wedge} \right\} \subset \mathbb{I}' \ . \tag{1.3.28}$$

Тут позначенно [30,238]:

$$\mathcal{L}_X u = X \lrcorner\ du \ , \quad \mathbb{I}' = \{\ \alpha^c,\ X \lrcorner\ \tilde{\omega}^{\wedge}\} \ .$$

Сукупність зовнішніх рівнянь $\alpha^c = 0$ реалізує представлення системи $L^q_2(y,v)$. Наслідком співвідношення (1.3.28) є вираз

$$* \left\{X^{\rho'}_{[a} \lrcorner\ d(X^{\rho'}_{b]} \lrcorner\ \tilde{\omega}^{\wedge}) - \lambda^c_{ab}(X^{\rho'}_c \lrcorner\ \tilde{\omega}^{\wedge})\right\} -$$

$$- f^{\wedge}_c \cdot \alpha^c - *\ g^{\wedge s}_c (X^{\rho'}_s \lrcorner\ \tilde{\omega}^c) = 0 \ . \tag{1.3.28a}$$

$*$ – оператор Ходжа у $\mathbb{R}(0,n)$.

На відміну від розглянутого в пункті I §3 даного розділу визначення зв'язностей формулою (1.3.3), у розвинутому вище підході не використовується розкладання виразів $\Gamma^{\wedge}_a$ за допомогою функцій $H^{\wedge}_{\mu}$ вигляду (1.3.8).

Рівняння (1.3.28a) допускає опис у термінах коваріантних похідних ∇_{X_a} вздовж векторного поля X_a, побудованого на лінійних зв'язностях. У даному випадку коваріантні похідні і похідні Лі ототожнюються. Маємо, що із співвідношення (1.3.27a)

$$\left\{ Q_a \Gamma^A_{b:c} + \Gamma^A_{(a|k|} \Gamma^k_{b:c} - \lambda^c_{ab} \Gamma^A_{cc} \right\} u^c \Big|_{L^q_2} = 0$$

випливає рівність

$$\left| \left[\nabla_{X^{\rho'}_a}, \nabla_{X^{\rho'}_b} \right] + \nabla_{[X_a, X_b]^{\rho'}} - R(X_a, X_b) \right| u^c = 0 . \quad (1.3.29)$$

Тут

$$R(X_a, X_b) u^c = \lambda^c_{ab} \Gamma^A_{cc} u^c \quad (1.3.30)$$

є тензорне поле кривини відповідних зв'язностей [124,129].

Отже,

Теорема I.3.I. НПЗ другого роду, задане системою рівнянь (1.3.24), в силу умов інтегровності по змінних u^A (1.3.27) має наслідком рівняння $L^q_2(y,v)$ при виконанні рівняння (1.3.28a). ■

III. На закінчення параграфа розглянемо можливості використання у НПДР зв'язностей порядку вище першого. Нехай ω^A – є форми зв'язностей (1.3.3). Як відомо [50,124], вони породжують рівняння структури многовиду

$$d\omega^A = \omega^B \wedge \omega^A_B ;$$

$$d\omega^A_B = \omega^C_B \wedge \omega^A_C + \omega^C \wedge \omega^A_{BC} ;$$

$$d\omega^A_{BC} = \omega^D_{BC} \wedge \omega^A_D + \omega^D_B \wedge \omega^A_{DC} + \omega^D_C \wedge \omega^A_{BD} + \omega^D \wedge \omega^A_{BCD}, \ldots \quad (1.3.31)$$

Цей нескінчений ланцюжок рівнянь зв'язує нескінченну послідовність форм

$$\omega^A, \quad \omega^A_B, \quad \omega^A_{BC}, \quad \omega^A_{BCD}, \ldots \quad .$$

У розглянутих вище випадках (див. пп I, II §3) вже форми ω^A_B допускали розкладення по формах ω^A, наприклад у вигляді

$$\omega^{A}_{B} = \gamma^{A}_{BC}\ \omega^{C} . \tag{1.3.32}$$

γ^{A}_{BC} звичайно називають коефіцієнтами зв'язності. У більш складному випадку можна виходити з розкладення

$$\omega^{A}_{BC} = \gamma^{A}_{C}\ \omega^{C}_{B} + \gamma^{A}_{BCD}\ \omega^{D} . \tag{1.3.33}$$

Повертаючись до НПЗ, відмітимо, що структурним рівнянням (1.3.31) з умовою (1.3.32) можна поставити у відповідність таку послідовність рівнянь:

$$u^{A}_{\mu_1} = \Gamma^{A}_{\mu_1 C}(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots)u^{C} ,$$

$$u^{A}_{\mu\mu_1} = D_{x^{\mu}}\ y^{\nu}\cdot D_{y^{\nu}}(\Gamma^{A}_{\mu_1 C})u^{C} + \Gamma^{A}_{\mu_1 K}\ \Gamma^{K}_{\mu C}\ u^{C} ,\dots . \tag{1.3.34}$$

Розкладенню (1.3.33) відповідає рівність

$$u^{A}_{\mu_1\mu} = \Gamma^{A}_{\mu_1 C}u^{C}_{\mu} + \Gamma^{A}_{\mu_1\mu C}u^{C} , \tag{1.3.35}$$

$$\Gamma^{A}_{\mu_1 C} = \Gamma^{A}_{\mu_1 C}(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots;\ u,\ \underset{1}{u}) ,$$

$$\Gamma^{A}_{\mu_1\mu C} = \Gamma^{A}_{\mu_1\mu C}(y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots;\ u,\ \underset{1}{u}) .$$

Умови сумісності співвідношень (1.3.35) призводять до такого результату:

$$\left\{\partial_{(\mu_2}\ \Gamma^{A}_{\mu_1)C} - \Gamma^{A}_{(\mu_2|K|}\Gamma^{K}_{\mu_1)C}\right\} u^{C}_{\mu} + \left\{\partial_{(\mu_2}\ \Gamma^{A}_{\mu_1)\mu C} - \right.$$

$$\left. - \Gamma^{A}_{(\mu_2|K|}\Gamma^{K}_{\mu_1)\mu C}\right\} u^{C} + \Gamma^{A}_{\mu_1\mu C}u^{C}_{\mu_2} - \Gamma^{A}_{\mu_2\mu C}u^{C}_{\mu_1} = 0 .$$

В цьому рівнянні належить виконати розщеплення по параметричних похідних $\hat{\underset{1}{u}}$, $\hat{u}$.

§4. Нелокальні симетрії та розмноження роз'вязків

Кожний розв'язок ДР $L_1^P(x,\underset{k'}{u}) = 0$ можна, як відомо, подати або у явному вигляді: $u = f(x)$, або задати неявно функцією $\Phi^c(x,u^A) = 0$, чи у параметричній формі

$$\Phi^{1b}(x,\ u,\ \theta) = 0\ ,$$

$$\Phi^{2c}(x,\ u,\ \theta) = 0\ .$$

У ряді випадків цим розв'язкам удається поставити у відповідність ДРЧП першого порядку (або ж порядку $t < k' < k$). Обертання цієї схеми складає основу методу проміжкового інтегралу [51, 80, 136, 178], а також методу диференціальних зв'язків М. М. Яненка [80, 131]. Найбільш розробленим є метод побудови частинних розв'язків рівняння $L_1^P(x,u)$ по допустимих ним алгебрах Лі інваріантності (т.з. метод ліївського анзацу [123]). Відповідне ДРЧП першого порядку у даному випадку має вигляд

$$Q_a(x,u)[u^A] = \xi_a^\mu(x,u)u_\mu^A - \eta_a^A(x,u) = 0\ . \qquad (1.4.1)$$

В останні роки розроблено метод побудови частинних розв'язків ДР $L_1^P(x,u)$ за допомогою його умовних симетрій [107, 115, 116, 123, 182]. Крім того, існує підхід до цієї проблеми, який полягає у виборі розв'язку в деякій спеціальній формі, тобто у вигляді анзацу [104, 111,164]. Багато з одержаних таким чином розв'язків не вдається одержати методом класичного групового аналізу або в рамках перелічених вище методів. Отже, розробка нових конструктивних методів дослідження та інтегрування нелінійних ДР залишається, як і раніше, актуальною проблемою нелінійної математичної фізики.

I. Зведення рівняння $L_1^P(x,\underset{k'}{u}) = 0$ до рівняння $\Omega^P(y,\underset{k'+r}{v})=$

$= \lambda^p_q L^q_2(y, \underset{t}{v})$ за допомогою НПЗ дозволяє указати алгоритми побудови частинних розв'язків рівняння L^p_1 по відомих розв'язках L^q_2, а також безпосередньо по відомих розв'язках самого рівняння L^p_1. При цьому нас цікавлять такі розв'язки, які не можуть бути знайдені локальними методами і, зокрема, класичним теоретико-груповим методом.

Нехай для рівнянь $L^p_1(x,u)$ і $L^q_2(y,v)$ знайдені алгебри Лі інваріантності

$$\langle X_1, X_2, \dots, X_r\rangle: [X_a, X_b] = \lambda^c_{ab} X_c ,$$

$$(a,\ b,\ c = \overline{1,r}) , \qquad (1.4.2)$$

$$\langle \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_{r'}\rangle: [\tilde{X}_p, \tilde{X}_q] = \tilde{\lambda}^h_{pq} \tilde{X}_h ,$$

$$(p,\ q,\ h = \overline{1,r'}) . \qquad (1.4.3)$$

Найбільш цікавим є випадок $r \le r'$, коли ліївська симетрія рівняння $L^q_2(y,v)$ ширша, ніж така ж щодо рівняння $L^p_1(x,u)$. Якщо виходити із запису інфінітезимального оператора в $\mathbb{E}$ у вигляді

$$X_a = \xi^\mu_a(x,u)\partial_\mu + \eta^A_a(x,u)\partial_{u^A} , \qquad (1.4.4)$$

то операторам із алгебр (1.4.2), (1.4.3) відповідатимуть такі оператори в $\mathbb{M}$ та $\mathbb{M}'$:

$$Q_a(x,u) = \xi^\mu_a(x,u)\partial_\mu - \eta^*_a(x,u) , \quad \eta^*_a \cdot u^A = \eta^A_a , \qquad (1.4.5)$$

$$\tilde{Q}_p(y,v) = \tilde{\xi}^\mu_p(y,v)\partial_\mu - \tilde{\eta}^*_p(y,v) , \quad \tilde{\eta}^*_p \cdot v^B = \tilde{\eta}^B_p . \qquad (1.4.6)$$

Для визначення X_a, та $\tilde{X}_p$ - інваріантних розв'язків u^A, v^B маємо рівняння

$$Q_a[u^A] = 0 , \quad \tilde{Q}_p[v^B] = 0 .$$

Відомо [123], що оператори (1.4.5), (1.4.6) утворюють відповідні алгебри Лі, тобто

$$[Q_a, Q_b] = \lambda^c_{ab} Q_c \ , \qquad (1.4.7)$$

$$[\tilde{Q}_p, \tilde{Q}_q] = \tilde{\lambda}^h_{pq} \tilde{Q}_h \ . \qquad (1.4.8)$$

Оскільки за припущенням рівняння L^p_1 та L^q_2 пов'язані НПЗ, то виникають питання: 1) яким способом це НПЗ зв'язує лiївські симетрії рівнянь L_1 і L_2?; 2) яким чином перетворюються НПЗ оператори симетрії рівняння L_2? Нижче одержані вичерпані відповіді на поставлені питання.

Виконаємо НПЗ першого роду у операторі симетрії X_a. Для цього знайдемо відповідне продовження операторів X_a [69,70]. Знаходимо

$$X^*_a = \xi^\mu_a(x,u)\partial_\mu + \eta^A_a(x,u)\partial_{u^A} + \zeta^A_{a\nu}(x,u)\partial_{u^A_\nu} + \ldots \ . \qquad (1.4.9)$$

Одночасно задамо НПЗ рівностями

$$\begin{aligned} x^\mu &= h^\mu(y,\ v,\ \underset{1}{v}, \ldots,\ \underset{r}{v}) \ , \\ u^A &= H^A(y,\ v,\ \underset{1}{v}, \ldots,\ \underset{r}{v}) \ . \end{aligned} \qquad (1.4.10)$$

Із врахуванням (1.4.10) перепишемо оператор X^*_a в еквівалентній формі [95]:

$$\begin{aligned} X^*_a &= \xi^\mu_a(h,H)\left[\partial_{x^\mu} y^\nu \cdot \partial_{y^\nu} + \partial_{x^\mu} v^B \cdot \partial_{v^B} + \ldots\right] + \\ &+ \eta^A_a(h,H)\left[\partial_{u^A} y^\nu \cdot \partial_{y^\nu} + \partial_{u^A} v^B \cdot \partial_{v^B} + \ldots\right] + \\ &+ \zeta^A_{a\gamma}(h,H)\left[\partial_{u^A_\gamma} y^\nu \cdot \partial_{y^\nu} + \partial_{u^A_\gamma} v^B \cdot \partial_{v^B} + \ldots\right] + \ldots = \\ &= X^*_a(h,H)[y^\nu]\partial_{y^\nu} + X^*_a(h,H)[v^B]\partial_{v^B} + \ldots \ . \end{aligned} \qquad (1.4.11)$$

Отже, координати оператора $\tilde{X}_a$ мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^\mu_a(y,v) = X^*_a(h,H)[y^\nu] &= \xi^\mu_a(h,H)\partial_{x^\mu} y^\nu + \\ &+ \eta^A_a(h,H)\partial_{u^A} y^\nu + \zeta^A_{a\gamma}(h,H)\partial_{u^A_\gamma} y^\nu + \ldots, \end{aligned}$$

$$\tilde{\eta}^{B}_{\alpha}(y,v) = X^{*}_{\alpha}(h,H)[v^{B}] = \xi^{\mu}_{\alpha}(h,H)\partial_{x^{\mu}} v^{B} +$$

$$+ \eta^{A}_{\alpha}(h,H)\partial_{u^{A}} v^{B} + \zeta^{A}_{\alpha\gamma}(h,H)\partial_{u^{A}_{\gamma}} v^{B} + \dots \; . \qquad (1.4.12)$$

Для того щоб обчислити значення координат (1.4.12), потрібно знати "обернене" НПЗ для (1.4.10), наприклад, вигляду:

$$y^{\nu} = g^{\nu}(x,\ u,\ \underset{1}{u},\dots)\ ,$$
$$v^{B} = G^{B}(x,\ u,\ \underset{1}{u},\dots)\ , \qquad (1.4.13)$$

Кількість доданків у формулі (1.4.12) визначається порядком залежностей (1.4.13). Якщо обернене перетворення змінних (1.4.13) невідоме, але задані співвідношення (1.4.12), тоді значення

$$\partial_{x} y\ ,\quad \partial_{u} y\ ,\quad \partial_{\underset{1}{u}} y\ ,\dots,\ \partial_{x} v\ ,\quad \partial_{u} v\ ,\quad \partial_{\underset{1}{u}} v,\dots$$

не можна ефективно обчислити без яких-небудь додаткових умов. Такою умовою, наприклад, можуть бути ДР L^{p}_{1} та L^{q}_{2} .

Приклад І.4.І. Симетрійний аналіз рівняння фільтрації ньютонівської рідини у пористому середовищі

$$L_{2}(x,v) = v_{0} - h(v_{1})v_{11} = 0\ , \qquad (h = H')$$

було виконано в роботі[6] (див. також [8]):

1. $H(v_1)$ – довільна функція : $\tilde{X}_1 = \partial_0$, $\tilde{X}_2 = \partial_1$, $\tilde{X}_4 = \partial_v$,
   $\tilde{X}_3 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + v\,\partial_v$;
2. $H(v_1) = \exp v_1$: $\tilde{X}_{5,1} = x_0\partial_0 - x_1\partial_v$;
3. $H(v_1) = \sigma^{-1} v_1^{\sigma}$: a) $\sigma \neq 1$, $\tilde{X}_{5,2a} = (1-\sigma)x_0\partial_0 + v\,\partial_v$;
4. $H(v_1) = \ln v_1$: $\tilde{X}_{5,3} = x_0\partial_0 + v\,\partial_v$;
5. $H(v_1) = \operatorname{arctg} v_1$: $\tilde{X}_{5,4} = -v\,\partial_1 + x_1\partial_v$;
6. $H(v_1) = \lambda^{-1}\cdot\exp\{\lambda\cdot\operatorname{arctg} v_1\}$: $(\lambda > 0)$,
   $\tilde{X}_{5,5} = -\lambda\cdot x_0\partial_0 - v\,\partial_1 - x_1\partial_v$. (1.4.I)

Рівняння $L_2(x,v)$ за допомогою НПЗ [95]

$$v_1 = [H]^{-1}(u), \quad v_0 = u_1,$$

де $[H]^{-1}(\cdot)$ - функція, обернена до $H(\cdot)$, зв'язане з рівнянням

$$L_1(x,u) = u_0 - h(u)u_{11} = 0 .$$

Оператори алгебри Лі інваріантності цього рівняння, знайдені класичним методом С. Лі, такі:

1. $H(u)$ - довільна функція : $X_1 = \partial_0$, $X_2 = \partial_1$,

$$X_3 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 ,$$

X_4 - відсутнє ;

2. $H(v_1) = \exp u$: $X_{5,1} = x_0\partial_0 - \partial_u$;

3. $H(u) = \sigma^{-1}u^{\sigma}$: а) $\sigma \neq 1$, $X_{5,2a} = (1-\sigma)x_0\partial_0 + u\,\partial_u$;

   б) $\sigma = 5$, $X_{5,2b} = x_1^2\partial_1 + x_1 u\,\partial_u$;

4. $H(u) = \ln u$: $X_{5,3} = x_0\partial_0 + u\,\partial_u$;

5. $H(u) = \operatorname{arctg} u$: $X_{5,4}$ - відсутнє ;

6. $H(u) = \lambda^{-1}\cdot\exp\{\lambda\cdot\operatorname{arctg} u\}$: $(\lambda > 0)$,

   $X_{5,5}$ - відсутнє . (1.4.II)

Скористаємось формулами (1.4.11) для побудови операторів X_4, $X_{5,4}$, $X_{5,5}$. Одержуємо

$$X_4 = 0 , \quad X_{5,4} = -\left[\int [H]^{-1}(u)dx_1\right]\partial_1 + \partial_u ;$$

$$X_{5,5} = -\lambda\cdot x_0\partial_0 - \left[\int [H]^{-1}(u)dx_1\right]\partial_1 + \partial_u .$$

З іншого боку, оператор $X_{5,2b}$ не має відповідного серед перелічених в (1.4.I). Обернене перетворення має вигляд $u = H(v_1)$. Отже,

$$\tilde{X}_{5,2b} = x_1^2\partial_1 + \dot{H}(v_1)\left[H(v_1) - x_1\dot{H}(v_1)v_{11}\right]\partial_v .$$

Тут $H = 0{,}2v_1^5$.

Зауваження І.4.І Оператори $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$, $\tilde{X}_3$, $\tilde{X}_4$, $\tilde{X}_{5,k}$, (k = 1, 2а, 2б, 3,4,5) утворюють 5-вимірну алгебру Лі AG_5 у класі диференціальних операторів першого порядку. Неважко перевірити, що перетворені оператори X_1, X_2, X_3, X_4, $X_{5,k}$, задовольняють комутаційні співвідношення тієї ж алгебри Лі. Враховуючи те, що оператори $X_{5,4}$, $X_{5,5}$ є інтегродиференціальними операторами, можна твердити, що нами побудовано нелокальне представлення відповідної алгебри Лі AG_5.

Говорячи про симетрії рівняння $L_1(x,u)$, можна виходити з операторів (1.4.5) та рівнянь

$$Q_\alpha(x,u)[u^A] = \xi^\mu_\alpha(x,u)u^A_\mu - \eta^A_\alpha(x,u) = 0 . \qquad (1.4.14)$$

Для побудови відповідних операторів симетрії у просторі $\mathbb{E}'^{\ell'}(y, v, \underset{1}{v},\ldots, \underset{\ell'}{v})$ виконаємо НПЗ (1.4.10) рівняння (1.4.14):

$$Q_\alpha[u^A] = S^A_\alpha(y, v, \underset{1}{v},\ldots, \underset{r+1}{v}) = 0 . \qquad (1.4.15)$$

Таким чином, симетрія у просторі $\mathbb{E}(x,u)$ породжує симетрію більш високого порядку у $\mathbb{E}'^{r+1}(y,v)$. Рівняння (1.4.15) може допускати факторизацію за допомогою, наприклад, лінійних по $\underset{1}{v}$ ДРЧП першого порядку

$$\tilde{Q}_\rho[v^B] = 0 . \qquad (1.4.16)$$

У цьому випадку приходимо до рівності

$$Q_\alpha[u^A] = \lambda^{A\rho}_{B\alpha}(y,v)\cdot\tilde{Q}_\rho[v^B] , \qquad (1.4.17)$$

де $\lambda^{A\rho}_{B\alpha}(y,v)$ – лінійні диференціальні оператори порядку r.

Означення І.4.І. Будемо говорити, що ліївська симетрія $Q_\alpha[u^A] = 0$ у $\mathbb{E}^1(x,u)$ породжує ліївську ж симетрію у $\mathbb{E}'^1(y,v)$, якщо з (1.4.14) та (1.4.10) випливає (1.4.17) із операторами $\tilde{Q}_\rho$, що визначені в (1.4.6), (1.4.8). У протилежному випадку симетрію будемо називати неліївською симетрією у просторі

$\mathbb{E}'^{\,r+1}(y,v)$, яка породжена лієвською симетрією $Q_\alpha[u^A]$ у $\mathbb{E}^1(x,u)$ та НПЗ (1.4.10). Тут було припущено, що $r > r'$.

Для того, щоб по оператору $\tilde{Q}_p[v^B]$ відновити симетрію у $\mathbb{E}^1(x,u)$, $(r < r')$, необхідно обернути НПЗ (1.4.10), зобразивши його у вигляді (1.4.13)

$$y^\nu = g^\nu(x,\ u,\ \underset{1}{u},\dots)\ ,\qquad v^B = G^B(x,\ u,\ \underset{1}{u},\dots)\ , \tag{1.4.18}$$

або у вигляді системи НПЗ другого роду

$$y^\nu = g^\nu(x,\ u,\ \underset{1}{u},\dots)\ ,\qquad \tilde{B}^b(x,\ u,\ \underset{1}{u},\dots;\ y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots) = 0\ . \tag{1.4.18a}$$

Тут можливі два випадки: 1) лієвська симетрія $\tilde{Q}_p[v^B]$ може бути представлена у вигляді

$$\tilde{Q}_p[v^B] = \tilde{\lambda}^{B\alpha}_{Ap}(x,u)Q_\alpha[u^A]\ ; \tag{1.4.19}$$

2) не існує такого ДРЧП першого порядку лінійного по $\underset{1}{u}$, за допомогою якого була б можлива факторизація (1.4.19). Тоді

$$\tilde{Q}_p[v^B] = \tilde{S}^B_p(x,\ u,\ \underset{1}{u},\dots) = 0\ , \tag{1.4.19a}$$

або

$$\tilde{Q}_p[v^B] = \tilde{\lambda}^{B\alpha}_{Ap}Q^\#_\alpha(x,\ u,\ \underset{\pm 1}{u},\dots)[u^A]\ , \tag{1.4.19б}$$

де $Q^\#_\alpha[u^A] = 0$ (в загальному випадку інтегро-диференціальні оператори) є нелокальними симетріями у $\mathbb{E}^k(x,u)$, які породжені лієвськими симетріями $\tilde{Q}_p[v^B]$ у $\mathbb{E}'(y,v)$ та НПЗ (1.4.18) або (1.4.18a).

Приклад I.4.2. Розглянемо рівняння лінійної теплопровідності в $\mathbb{R}(1,1)$

$$L_2(x,v) = v_0 - v_{11} = 0\ .$$

Воно, як відомо [1,100], зв'язане за допомогою НПЗ першого роду (перетворення Коула-Хопфа)

$$u = -2v^{-1}v_1 , \qquad \left[v = \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int u\, dx_1 \right\} \right] ,$$

з рівняннями Бюргерса

$$L_1(x,u) = u_0 + uu_1 - u_{11} = 0 .$$

Проілюструємо ефективність формул (1.4.12) та відповідність (1.4.19). Побудуємо по симетріях лінійного рівняння відповідні симетрії рівняння Бюргерса. Алгебра інваріантності для рівняння $L_2(x,u)$ обчислена ще С. Лі і має вигляд [70]: $<\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \tilde{D}, \tilde{I}, \tilde{G}, \tilde{\Pi}, \tilde{S}>$, де

$$\tilde{P}_0 = \partial_0 , \quad \tilde{P}_1 = \partial_1 , \quad \tilde{D} = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 ; \qquad (1.4.20)$$

$$\tilde{I} = v\,\partial_v , \quad \tilde{G} = 2x_0\partial_1 - x_1 v\,\partial_v , \quad \tilde{S} = A\,\partial_v ;$$

$$\tilde{\Pi} = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 - \frac{1}{4}(x_1^2 + 2x_0)v\,\partial_v , \quad (A_0 = A_{11}) .$$

Перетворення операторів $\tilde{P}_0$, $\tilde{P}_1$, $\tilde{I}$ більш зручно виконувати за формулами (1.4.12):

$$\tilde{P}_0 \longrightarrow P_0 , \qquad \tilde{P}_1 \longrightarrow P_1 ,$$

$$\tilde{I} \longrightarrow 0\cdot\partial_0 + 0\cdot\partial_1 + [0 + 2\cdot v\cdot v^{-2}v_1 + v_1(-2v^{-1})]\partial_u = 0 .$$

Тут для обчислення $\eta(x,u)$ використано продовження оператора $\tilde{I}$: $\tilde{I}^* = v\,\partial_v + v_1\partial_{v} + \ldots$.

Операторам $\tilde{D}$, $\tilde{G}$, $\tilde{\Pi}$ ставимо у відповідність ДРЧП:

$$\tilde{Q}_D[v] = x_1v_1 + 2x_0v_0 = 0 ,$$

$$\tilde{Q}_G[v] = 2x_0v_1 + x_1v = 0 ,$$

$$\tilde{Q}_\Pi[v] = x_1x_0v_1 + x_0^2v_0 + \frac{1}{4}(x_1^2 + 2x_0)v = 0 .$$

Виконаємо перетворення Коула-Хопфа цих рівнянь. Одержуємо відповідні нелокальні симетрії рівняння $L_1(x,u)$:

$$\tilde{D} \longrightarrow \rho\left[2x_0u_1 - x_0u^2 + x_1u\right] = 0 \longrightarrow \rho 2x_0\partial_1 + \rho(x_0u^2 - x_1u)\partial_u \ ;$$

$$\tilde{G} \longrightarrow \rho\left[x_0u - x_1\right] = 0 \longrightarrow \rho\left[x_0u - x_1\right]\partial_u \ ;$$

$$\tilde{\Pi} \longrightarrow \rho\left[2x_0x_1u + 2x_0^2u_1 - x_0^2u^2 - (x_1^2 + 2x_0)\right] = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \rho 2x_0^2\partial_1 + \rho\left[x_0^2u^2 + x_1^2 + 2x_0 - 2x_0x_1u\right]\partial_u \ ;$$

$$\rho \equiv \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\,\partial_1^{-1}u\right\} .$$

Продиференціюємо по x_1 побудовані вище рівняння з використанням рівнянь $L_1(x,u)$, $L_2(y,v)$ та НПЗ. Одержуємо такі ліївські оператори симетрії рівняння $L_1(x,u)$:

$$D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u\,\partial_u \ ;$$

$$G = x_0\partial_1 + \partial_u \ ;$$

$$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 - (x_0u - x_1)\partial_u \ .$$

Відомо, що рівняння L_1 та L_2 зв'язані операторною рівністю

$$L_1(u) = -2v^{-1}\left[\partial_1 - v^{-1}v_1\right]L_2(v) \equiv \lambda L_2 \ . \qquad (1.4.20a)$$

Припустимо, що за допомогою цього ж самого оператора здійснюється зв'язок між симетріями рівнянь. Поставимо вимогу, щоб після перетворення Коула-Хопфа ми приходили до виразу $Q[u] = \lambda\tilde{Q}[v]$. Одержуємо співвідношення

$$\xi^0(x,u)u_0 + \xi^1(x,u)u_1 - \eta(x,u) = -2v^{-1}\left[\partial_1 - v^{-1}v_1\right]\tilde{Q}[v] \ .$$

Цим методом можуть бути побудовані усі знайдені вище оператори. Однак, тільки описаним способом удається побудувати оператор, відповідний $\tilde{S}$

$$S = -(2A_1 + u\,A)\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\,\partial_1^{-1}u\right\}\partial_u \ .$$

Нехай оператори $Q_a(x,u)$ утворюють алгебру ліївських симетрій рівняння $L_1(x,u)$, а $\tilde{Q}_b(y,v)$ – алгебру інваріантності рівняння $L_2(y,v)$. Відомо, що системи рівнянь

$$L_1(x,u) = 0 \ , \quad Q_a(x,u)[u^A] = 0 \qquad (1.4.21a)$$

та

$$L_2(y,v) = 0 \ , \quad \tilde{Q}_b(y,v)\,[v^B] = 0 \qquad (1.4.21б)$$

є сумісними, а розв'язки u^A, (v^B) рівняння $Q_a[u^A] = 0$, $(\tilde{Q}_b[v^B] = 0)$ редукують рівняння $L_1(x,u) = 0$, $(L_2(y,v) = 0)$ [110,123] до ДРЧП з меншою кількістю незалежних змінних. Такі лі-інваріантні розв'язки звичайно зображають у неявній формі

$$\Phi^A(\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^r) = 0 \ , \qquad \omega = \omega(x,u) \ ,$$

або у вигляді

$$u^A = f^A(x, \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{r-m}) = 0 \ , \ (A = \overline{1,m}) \ . \qquad (1.4.22)$$

Тут $\{\omega^a\}$, $(a = \overline{1,r})$-інваріантні змінні групи Лі G_r у $\mathbb{E}(x,u)$. Аналогічні вирази для рівняння $L_2(y,v)$ мають вигляд

$$\tilde{\Phi}^B(w^1, w^2, \ldots, w^{r'}) = 0 \ , \qquad w = w(y,v) \ ,$$

$$v^B = g^B(y, w^1, w^2, \ldots, w^{r'-m'}) = 0 \ . \qquad (1.4.23)$$

$\{w^b\}$, $(b = \overline{1,r'})$ – інваріантні змінні групи $\tilde{G}_{r'}$ у просторі $\mathbb{E}'(y,v)$. Розв'язки u^A, (v^B), записані у вигляді (1.4.22), (1.4.23), називають ліївським анзацем для рівняння L_1 (L_2). Крім того, можна виходити із форми розв'язку рівняння L_1, не зв'язуючи його з ліївською інваріантністю L_1. Для цього в роботі [105] було запропоновано шукати розв'язоку вигляді анзацу

$$u = \tilde{f}(x)\tilde{\varphi}(\omega) + \tilde{g}(x) \ . \qquad (1.4.24)$$

Тут $\tilde{\varphi}$ – шукана функція, що залежить від змінних $\omega(x) = \{\omega^1, \ldots, \omega^{n-m}\}$.

Нехай $r < r'$ і v^Bє $\tilde{Q}_b$ – інваріантний розв'язок рівняння $L_2^q(y,v) = 0$:

$$v^{B} = f(y)\varphi(w) + g(x) \ , \quad w = w(y) \ . \qquad (1.4.25)$$

Будемо вважати, що для $\tilde{Q}_b$ не існує відповідного оператора ліївської симетрії Q_a рівняння $L_1(x,u) = 0$. Підставимо v^B із (1.4.25) у формули НПЗ (1.4.10). Приходимо до такого зображення u^A:

$$x^{\mu} = h^{\mu}(y,\ f\varphi + g,\ \underset{1}{D}(f\varphi + g), \ldots,\ \underset{r}{D}(f\varphi + g)) \ ,$$

$$u^{A} = H^{A}(y,\ f\varphi + g,\ \underset{1}{D}(f\varphi + g), \ldots,\ \underset{r}{D}(f\varphi + g)) \ , \qquad (1.4.26)$$

Тут $D_{\mu}(f\varphi + g) = f \cdot w^{B}_{\mu} \partial_{w^{B}} \varphi + f_{\mu}\varphi + g_{\mu})$. (У випадку $n' - m' = 1$ єдиної інваріантної змінної w маємо

$$D_{\mu}(f\varphi + g) = f \cdot w_{\mu}\dot{\varphi} + f_{\mu}\varphi + g_{\mu}).$$

Отже, одержуємо анзац для u^A- розв'язку рівняння $L_1(x,u)$:

$$x^{\mu} = h^{\mu}(y,\ w,\ \underset{1}{w}, \ldots,\ \varphi,\ \underset{1}{\varphi},\ \underset{2}{\varphi}, \ldots) \ ,$$

$$u^{A} = H^{A}(y,\ w,\ \underset{1}{w}, \ldots,\ \varphi,\ \underset{1}{\varphi},\ \underset{2}{\varphi}, \ldots) \ , \qquad (1.4.27)$$

Підстановка u^A у вигляді (1.4.27) в рівняння $L_1(x,u) = 0$ перетворює його в тотожність. Отже, цей розв'язок відповідає $Q^{\#}_a$ (або $\tilde{S}^{B}_{b}$) - нелокальній симетрії рівняння L_1.

Означення I.4.2. Представлення розв'язку даного рівняння $L_1(x,u) = 0$, що одержано за допомогою його нелокальної симетрії, тобто обчислене по ліївській симетрії $\tilde{Q}$ рівняння $L_2(y,v) = 0$ та НПЗ (1.4.10), зватимемо нелокальним анзацем для рівняння $L_1(x.u) = 0$.

Найпростішим прикладом нелокального анзацу є вираз

$$u = h(x)\dot{\varphi}(\omega) + f(x)\varphi(\omega) + g(x) \ ,$$

$$\omega = \omega(x) \ , \qquad (1.4.28)$$

який узагальнює (1.4.24). Він був запропонований у роботі [185] і випливає із формули (1.4.27), де $x = y$, $r = 1$, а функція H лінійна по φ та $\dot{\varphi}$. Нелокальні симетрії і нелокальні анзаци для широкого кола нелінійних ДР побудовані у четвертому розділі даної роботи.

II. Розглянемо тепер випадок, коли рівняння $L_1(x,u) = 0$ є інваріантним відносно НПЗ, і, певна річ, розширення його ліївської симетрії не відбувается. Тоді розв'язок $v^B = g^B(y)$ рівняння $L_2^P(y,v) = L_1^P(x,u)$, записаний через змінні (x,u), буде розв'язком рівняння $L_1^P(x,u) = 0$. Інваріантно-групові розв'язки рівняння $L_1(x,u)$ під дією НПЗ можуть генерувати нелокальні симетрії

$$Q_\alpha(x,u)[u^A] = S_\alpha^A(y,\ v,\ \underset{1}{v},\ldots)\ ,$$

що виводять за межі ліївських симетрій з алгеброю $\{Q_\alpha\}$. Цей процес може бути реалізований у формі побудови нелокальних анзаців. Нехай НПДР, що зв'язує L_1 з L_2, має вигляд

$$x = h(y,\ v,\ \underset{1}{v},\ldots,\ \underset{r}{v})\ ,$$

$$B^\alpha(x,\ u,\ \underset{1}{u},\ldots\ \underset{k'}{u};\ y,\ v,\ \underset{1}{v},\ldots,\ \underset{\ell'}{v}) = 0 \qquad (1.4.29)$$

а $\overset{(1)}{u}{}^A(x)$ є відомим розв'язком рівняння $L_1(x,u) = 0$. Перепишемо цей розв'язок, замінивши x параметром $\tau = (\tau^0,\ \tau^1,\ldots,\ \tau^{n-1})$. Тобто $\overset{(1)}{u}{}^A(\tau) = \overset{(1)}{g}{}^A(\tau)$ є розв'язком рівняння $L_1(\tau,\ u(\tau)) = 0$. Новий розв'язок $\overset{(2)}{u}{}^A(x)$ рівняння $L_1(x,u)$ одержуємо як розв'язок системи рівнянь (1.4.29) відносно шуканих $\overset{(2)}{u}{}^A(x)$:

$$\left\{\begin{array}{l} x^\mu = h^\mu(\tau,\ \overset{(1)}{u}(\tau),\ \underset{1}{\overset{(1)}{u}}(\tau),\ldots,\ \underset{r}{\overset{(1)}{u}}(\tau))\ , \\ B^\alpha(x,\ \overset{(2)}{u}(x),\ \underset{1}{\overset{(2)}{u}}(x),\ldots\ \underset{k'}{\overset{(2)}{u}}(x);\ \tau,\ \overset{(1)}{u}(\tau),\ \underset{1}{\overset{(1)}{u}}(\tau),\ldots,\ \underset{\ell'}{\overset{(1)}{u}}(\tau)) = 0\ . \end{array}\right. \qquad (1.4.30)$$

Тут $\tau(x)$ слід розуміти як функціональний параметр, що підлягає виключенню.

Означення І.4.3. Процес побудови нового розв'язку $\overset{(2)}{u}(x)$ рівняння $L_1(x,u)$ по відомому його розв'язку $\overset{(1)}{u}(x)$, який зводиться до розв'язування системи (1.4.30), будемо називати розмноженням розв'язків рівняння $L_1(x,u)$ за допомогою нелокальної симетрії. Розв'язок системи (1.4.30), який дозволяє виразити $\overset{(2)}{u}(x)$ через $\overset{(1)}{u}(x)$, назвемо формулою розмноження розв'язків рівняння $L_1(x,u) = 0$.

III. Навіть в тому випадку, коли лінійне рівняння $L_2(y,v)$ допускає надзвичайно бідну групу ліївських симетрій, для нього виконується принцип лінійної суперпозиції розв'язків $\overset{(k)}{v}(y)$, $(k = \overline{1,3})$:

$$\overset{(3)}{v}(y) = \overset{(1)}{v}(y) + \overset{(2)}{v}(y)\ . \tag{1.4.31}$$

Покажемо, яким чином ця властивість (1.4.31) дозволяє побудувати нелокальні симетрії рівняння $L_1(x,u)$, зв'язаного з $L_2(y,v)$ за допомогою НПЗ. Саме цим в першу чергу пояснюються намагання лінеаризувати якомога ширші класи нелінійних ДР.

Нехай досліджуване рівняння $L_1^p(x,u) = 0$ за допомогою НПЗ зводиться до лінійного рівняння $L_2^q(y,v) = 0$. Тоді для розв'язку $\overset{(k)}{u}(\overset{k}{x})$, $(k = \overline{1,3})$ рівняння L_1 та розв'язку $\overset{(k)}{v}(y)$ одержуємо співвідношення

$$\overset{k}{x}{}^{\mu} = \overset{(k)}{h}{}^{\mu}(y, \overset{(k)}{v}, \overset{(k)}{\underset{1}{v}}, \ldots, \overset{(k)}{\underset{r}{v}}),$$

$$B^{\alpha}(\overset{k}{x}, \overset{(k)}{u}, \overset{(k)}{\underset{1}{u}}, \ldots, \overset{(k)}{\underset{k'}{u}};\ y, \overset{(k)}{v}, \overset{(k)}{\underset{1}{v}}, \ldots, \overset{(k)}{\underset{\ell'}{v}}) = 0\ ,$$

$$(\overset{(k)}{u}(\overset{k}{x}) = \overset{(k)}{f}(\overset{k}{x}),\quad \overset{(k)}{v}(y) = g(y))\ . \tag{1.4.32}$$

Вважатимемо, що система рівнянь (1.4.32) може бути розв'язана як відносно $\overset{(3)}{u}(\overset{3}{x})$, так і відносно $\overset{(s)}{v}(y)$, $(s = 1,2)$. Тобто існують зображення

$$\overset{(3)}{u}{}^{\wedge}(x) = \overset{(3)}{H}{}^{\wedge}(\overset{3}{y}, \overset{(3)}{v}, \overset{(3)}{v}_1, \ldots, \overset{(3)}{v}_r),$$

$$\overset{3}{x}{}^{\mu} = \overset{(3)}{h}{}^{\mu}(y, \overset{(3)}{v}, \overset{(3)}{v}_1, \ldots, \overset{(3)}{v}_r); \qquad (1.4.33)$$

та

$$\overset{(s)}{v}{}^{B}(y) = \overset{(s)}{G}{}^{B}(x, \overset{(s)}{u}{}^{s}(x), \overset{(s)}{u}{}^{s}_1(x), \ldots, \overset{(s)}{u}{}^{s}_{r'}(x)),$$

$$y^{\mu} = \overset{(s)}{g}{}^{\mu}(x, \overset{(s)}{u}{}^{s}(x), \overset{(s)}{u}{}^{s}_1(x), \ldots, \overset{(s)}{u}{}^{s}_{r'}(x)),$$

$$y = \overset{3}{y} = \overset{s}{y}, \qquad (s = 1,2). \qquad (1.4.34)$$

Позначимо $\overset{3}{x} = x$, $\overset{5}{x} = \overset{5}{\tau}$, $y = \theta$ і потім обчислимо вирази $\overset{(s)}{v}{}^{B}_1(y) = \overset{(s)}{G}{}^{B}_1$, $\overset{(s)}{v}{}^{B}_2(y) = \overset{(s)}{G}{}^{B}_2, \ldots,$ $\overset{(s)}{v}{}^{B}_r(y) = \overset{(s)}{G}{}^{B}_r$ за формулами (1.4.34) та (1.4.10). В систему рівнянь (1.4.33) підставимо

$$\overset{(3)}{v}(\theta) = \overset{(1)}{v}(\theta) + \overset{(2)}{v}(\theta),$$

де потім замінимо $\overset{(s)}{v}_t(\theta)$ відповідними значеннями $\overset{(s)}{G}{}^{s}_t(x,$ $\overset{(s)}{u}{}^{s}(\tau), \overset{(s)}{u}{}^{s}_1(\tau), \ldots, \overset{(s)}{u}{}^{s}_{r'+t}(\tau))$. Позначимо далі

$$\overset{(s)}{G}{}^{s}_t(x, \overset{(s)}{u}{}^{s}(\tau), \overset{(s)}{u}{}^{s}_1(\tau), \ldots, \overset{(s)}{u}{}^{s}_{r'+t}(\tau)) \equiv G_t(s).$$

Одержана таким чином система рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} \overset{(3)}{u}(x) = \overset{(3)}{H}(\theta, G(1) + G(2), \ldots, G_{r+r'}(1) + G_{r+r'}(2)), \\ x^{\mu} = \overset{(3)}{h}{}^{\mu}(\theta, G(1) + G(2), \ldots, G_{r+r'}(1) + G_{r+r'}(2)), \\ \theta^{\mu} = g^{\mu}(1) = g^{\mu}(2). \end{cases} \qquad (1.4.35)$$

Означення I.4.4. Формулу (1.4.35), яка дозволяє по відомих розв'язках $\overset{(s)}{u}(x)$ нелінійного рівняння $L_1(x,u) = 0$ будувати його новий розв'язок $\overset{(3)}{u}(x)$, назвемо формулою нелінійної суперпозиції розв'язків рівняння $L_1(x,u)$.

Оскільки за допомогою формули (1.4.35) будуються нові розв'язки рівняння по відомих, то вона здійснює розмноження розв'язків цього рівняння. Тим самим вона виражає нелокальну симетрію рівняння $L_1(x,u) = 0$.

Підкреслимо, що побудовані нами загальні алгоритми і формули розмноження розв'язків (1.4.30) та нелінійної суперпозиції розв'язків (1.4.35) для НДРЧП є новими.

РОЗДІЛ II

НЕЛОКАЛЬНА СИМЕТРІЯ

У даному розділі описані широкі класи нелінійних рівнянь, які є інваріантними відносно різних НПЗ. При цьому виходимо з означення інваріантності рівняння L_1 відносно НПЗ, даного у розділі I (означення 1.2.4). В тому випадку, коли НПЗ є точковим або ж контактним, з коефіцієнт λ у формулі

$$L_1(x,u) = \lambda\, L_1(y,v) \tag{2.0}$$

дорівнює 1, маємо абсолютну інваріантність рівняння L_1. При $\lambda \neq 1$ говорять про відносну інваріантність L_1 під дією НПЗ [135, 178].

Вичерпаний опис класів ДРЧП, інваріантних відносно перетворень годографа (1.1.20), (1.1.21), (1.1.23) (§1), та Ейлера - Ампера (1.1.26) і Лежандра (1.1.28) (§2), зводиться до знаходження загального розв'язку певних функціональних рівнянь. Тому важко очикувати, що вдасться знайти повний розв'язок цієї проблеми. Однак, нам вдалось розробити ефективний метод, який дозволяє будувати широкі класи ДРЧП, інваріантних відносно таких перетворень. Обмежимо себе описом деяких підкласів рівнянь, які можуть бути побудовані з аргументів відповідних абсолютних інваріантів цих перетворень. Включення до §1 точкового перетворення годографа пояснюється його широким використанням в прикладних задачах. Якщо інваріантність ДР встановлена, формули розмноження його розв'язків будуємо, як описано у п. II §4 першого розділу, наприклад, у вигляді

$$\begin{gathered} \overset{(2)}{u}(x) = H(\tau, \overset{(1)}{u}(\tau), \ldots, \underset{s}{\overset{(1)}{u}}(\tau)), \\ x = h(\tau, \overset{(1)}{u}(\tau), \ldots, \underset{s}{\overset{(1)}{u}}(\tau)) . \end{gathered} \tag{2.1}$$

Тут $\tau(x)$ – функціональний параметр, який, взагалі кожучи, підлягає виключенню із системи (2.1). Розглянуті в §§ 1,2 контактні перетворення є інволютиними. Отже, повторне їх застосування до розв'язку $\overset{(1)}{u}$ повертає нас знов до того ж самого розв'язку

$$\overset{(1)}{u} \longrightarrow \overset{(2)}{u} \longrightarrow \overset{(1)}{u} .$$

У §3 розглянуті деякі нелінійні хвильові рівняння. Для них встановлена нелокальна симетрія та побудовані формули розмноження розв'язків. Якщо рівняння L_1 інваріантне відносно неінволютивного НПЗ

$$\begin{aligned} \overset{2}{x} &= h(\overset{1}{x}, \overset{(1)}{u}, \dots, \overset{(1)}{u}_r) , \\ \overset{(2)}{u} &= H(\overset{1}{x}, \overset{(1)}{u}, \dots, \overset{(1)}{u}_r) , \end{aligned} \qquad (T_{2-1})$$

тобто

$$L_1 (\overset{2}{x}, \overset{(2)}{u}) = \lambda(\overset{(1)}{x}, \overset{1}{u}) L_1 (\overset{1}{x}, \overset{(1)}{u}) ,$$

тоді виникають нові нелокальні симетрії. Виконаємо теж саме перетворення (T_{2-1}), зв'язавши змінні $\overset{s+1}{x}$, $\overset{(s+1)}{u}$, $(s = \overline{1,n})$ з $(\overset{s}{x}, \overset{(s)}{u}, \overset{(s)}{u}_1, \dots)$:

$$\begin{aligned} \overset{s+1}{x} &= h(\overset{s}{x}, \overset{(s)}{u}, \dots, \overset{(s)}{u}_r) \equiv h(s) , \\ \overset{(s+1)}{u} &= H(\overset{s}{x}, \overset{(s)}{u}, \dots, \overset{(s)}{u}_r) \equiv H(s) . \end{aligned} \qquad (T_{(s+1)-s})$$

Для спрощення запису сукупності змінних $\{\overset{s}{x}, \overset{(s)}{u}, \dots\}$ позначені (s). Одержуємо ланцюжок операторних рівнянь:

$$L_1 (2) = \lambda(1) L_1 (1) ,$$

$$L_1 (3) = \lambda(2) L_1 (2) = \lambda(2) \cdot \lambda(1) L(1) , \dots ,$$

$$L_1 (n) = \lambda(n-1) \lambda(n-2) \dots \lambda(1) L(1) \dots .$$

З іншого боку, перетворення (T_{3-2}) може бути зображене безпосередньо в змінних $\overset{1}{x}$, $\overset{(1)}{u}$

$$\overset{3}{x} = h(2) = \overset{(3-1)}{h}(1) \equiv \overset{(3-1)}{h}(\,h(1),\ H(1),\dots,\underset{r}{H}(1))\ ,$$

$$\overset{(3)}{u} = H(2) = \overset{(3-1)}{H}(1) \equiv \overset{(3-1)}{H}(\,h(1),\ H(1),\dots,\underset{r}{H}(1))\ .$$

В загальному випадку

$$\overset{n}{x} = \overset{(n-1)}{h}(1)\ , \qquad\qquad \overset{(n)}{u} = \overset{(n-1)}{H}(1)\ .$$

Таким чином, нами побудовані НПЗ порядку $> r$, які забезпечують нелокальну симетрію рівняння L_1:

$$L_1(n) = \overset{(n-1)}{\lambda}(1)L_1(1)\ .$$

Такі НПЗ представляють для L_1 нелокальні симетрії вищих порядків. У четвертому параграфі наведені приклади нелокальної симетрії рівнянь на певній підмножині розв'язків, тобто для них встановлена умовна нелокальна симетрія.

§I. Годограф-інваріантні рівняння

I. Повернемось до перетворення (1.1.20). Раніш, у §1 першого розділу, для нього були обчислені диференціальні наслідки порядку ≤ 2. Це дозволяє описати клас рівнянь другого порядку в просторі $\mathbb{R}(1,1)$ незалежних змінних, який побудовано із абсолютних диференціальних інваріантів цього точкового перетворення. Відповідне твердження дається теоремою.

Теорема 2.I.I. Диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними

$$L(x,u) \equiv \Phi\Big[\{f^{\sigma}\}\Big] = 0\ , \qquad (\sigma = \overline{0,6})\ , \qquad (2.1.1)$$

де $\{f^{\sigma}\} = \{f^{0},\ f^{1},\dots,f^{\sigma}\}$ – мінімальна множина абсолютних диференціальних інваріантів (ДІ) порядку ≤ 2 для перетворення (1.1.20):

$$f^0(x^0)\ ;\qquad f^1(x^1, u)\ ;\qquad f^2(u_1;\ u_1^{-1})\ ;$$

$$f^3(u_0;\ -u_0u_1^{-1})\ ,\qquad f^4(u_{11};\ -u_1^{-3}u_{11})\ ;$$

$$f^5(u_{10};\ -u_1^{-3}(u_1u_{10} - u_0u_{11}))\ ; \tag{2.1.2}$$

$$f^6\left[u_{00};\ -u_1^{-3}\left[u_0^2u_{11} - 2u_0u_1u_{10} + u_1^2u_{00}\right]\right]\ ,$$

інваріантне відносно перетворення годографа (1.1.20). Φ, f^σ - довільні гладкі функції, $(\sigma = \overline{0,6})$, f^c, $(c = \overline{1,6})$ - симетричні по аргументах: $f^c(x,z) = f^c(z,x)$. □

Доведення. Те, що $f^0(x_0)$ є абсолютним інваріантом перетворення (1.1.20), очевидно. Нехай $f^c(x,z) = f^c(z,x)$ є довільними гладкими функціями, симетричними по аргументах, тоді вирази (2.1.2) - це абсолютні ДІ цього перетворення. Дійсно, виконаємо, наприклад, перетворення (1.1.20) функції f^4:

$$f^4(u_{11};\ -u_1^{-3}u_{11}) \longrightarrow f^4(-v_1^{-3}v_{11};\ -(v_1^{-3})v_{11}) =$$

$$= f^4(-v_1^{-3}v_{11};\ v_{11})\ .$$

Ототожнимо тут змінні u і v. Приходимо до умови на f^4

$$f^4(u_{11};\ -u_1^{-3}u_{11}) = f^4(-\ u_1^{-3}u_{11};\ u_{11})\ ,$$

яка саме і виражає властивість симетричності f^c по аргументах. Аналогічно встановлюється абсолютна інваріантність решти функцій сукупності f^σ. Φ є абсолютним інваріантом перетворення як довільна функція з аргументами - абсолютними інваріантами цього перетворення. Теорема доведена. ■

Зауваження 2.1.1. Сукупність АДІ (2.1.2) перетворення (1.1.20) може бути використана для побудови ДР, які не містяться у класі (2.1.1). Для цього треба утворити із аргументів f^σ такі функції, які є інваріантами (не тільки абсолютними) перетворення (1.1.20). Пояснимо сказане прикладами. Отже, з інваріантів f^2, f^4 можна побудовати такі абсолютні і відносні інваріанти:

1. $\varphi(u_1^{-1}u_{11})+\varphi(-u_1u_1^{-3}u_{11}) \longrightarrow \varphi(-v_1v_1^{-3}v_{11})+\varphi(v_1^{-1}v_{11})$;

2. $\varphi(u_1^{-1}u_{11})-\varphi(-u_1u_1^{-3}u_{11}) \longrightarrow (-1)\left[\varphi(v_1^{-1}v_{11})-\varphi(-v_1v_1^{-3}v_{11})\right]$;

3. $f(\varphi(u_1;u_{11});\varphi(u_1^{-1};-u_1^{-3}u_{11})) \longrightarrow$

$\longrightarrow f(\varphi(v_1^{-1};-v_1^{-3}v_{11});\varphi(v_1;v_{11}))$;

4. $f(\varphi(u_1;-u_1^{-3}u_{11});\varphi(u_1^{-1};u_{11})) \longrightarrow$

$\longrightarrow f(\varphi(v_1^{-1};v_{11});\varphi(v_1;-v_1^{-3}v_{11}))$.

Із функцій f^1 і f^3 можна побудувати абсолютний інваріант

$$\varphi(x_1)u_0-\varphi(u)(-u_0u_1^{-1}) \longrightarrow \varphi(v)(-v_0v_1^{-1})+\varphi(y_1)v_0$$

та відносний інваріант

$$\varphi(x_1)u_0^2-\varphi(u)(-u_0u_1^{-1})^2 \longrightarrow (-1)\left[\varphi(y_1)v_0-\varphi(v)(-v_0v_1^{-1})^2\right].$$

Тут $\varphi(x,z)$ – довільна функція аргументів x, z, f – довільна функція, симетрична по аргументах.

До класу (1.1.20) – інваріантних рівнянь входять, зокрема, такі добре відомі рівняння:

$u_0^2-u_1^2=1$ – рівняння ейконалу (Е);

$(1-u_0^2)u_{11}+2u_0u_1u_{10}-(1+u_1^2)u_{00}=0$ – одновимірне рівняння Борна-Інфельда (Б-І);

$u_{00}u_{11}-u_{10}^2=0$ – найпростіше рівняння Монжа – Ампера;

$u_0-f(u_1)u_{11}=0$, $(f(u_1)=f(u_1^{-1})u_1^{-2})$, – рівняння нелінійної теплопровідності [182].

Зауваження 2.1.2. Мінімальність сукупності АДІ (2.1.2) належить розуміти так, що для їх побудови використані лише співвідношення самого перетворення (1.1.20) та його безпосередні диференціальні продовження.

Попередня теорема легко узагальнюється на випадок рівнянь третього порядку. Прикладом (1.1.20) - інваріантного рівняння є таке:

$$u_0 + u_1^{-1}u_{11} - \frac{3}{2}\, u_1^{-3}u_{11}^2 + u_1^{-2}u_{111} = 0\ . \tag{2.1.3}$$

Клас диференціальних рівнянь другого порядку в просторі $\mathbb{R}(1,3)$ незалежних змінних $x = (x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$, які є інваріантними відносно перетворення (1.1.21), визначається таким твердженням.

Теорема 2.I.2. ДРЧП другого порядку в $\mathbb{R}(1,3)$

$$L(x,\ u,\ \underset{1}{u},\ \underset{2}{u}) = 0$$

абсолютно інваріантне відносно перетворення змінних (1.1.21), якщо воно має вигляд

$$L(x,u) \equiv \Phi\left[\{f^{\sigma}\}\right] = 0\ , \quad (\sigma = \overline{0,7})\ . \tag{2.1.4}$$

При цьому f^{σ}- абсолютні диференціальні інваріанти перетворення (1.1.21)

$$f^0(x^0,\ x^2,\ x^3)\ ,\ f^1(x^1;u)\ ,\ f^2(u_1;\ u_1^{-1})\ ,\ f^3(u_k;\ -u_1^{-1}u_k)\ ,$$

$$f^4(u_{11};\ -u_1^{-3}u_{11})\ ,\ f^5(u_{1k};\ -u_1^{-3}(u_1u_{1k} - u_ku_{11}))\ ,$$

$$f^6\left[u_{kk};\ -u_1^{-3}(u_1^2u_{kk} - 2u_1u_ku_{1k} + u_k^2u_{11})\right]\ ,$$

$$f^7\left[u_{k\ell};\ -u_1^{-3}\left[u_1(u_1u_{k\ell} - u_ku_{1\ell}) - u_\ell(u_1u_{1k} - u_ku_{11})\right]\right]\ . \tag{2.1.5}$$

Тут $k,\ l = 0,2,3$, $k \neq \ell$, в f^6 за індексом k підсумовування немає, Φ, f^{σ} - довільні гладкі, а f^c, $(c = \overline{1,7})$ - симетричні по аргументах функції. □

Доведення теореми виконується аналогічно попередньому. ■

До класу (1.1.21) - інваріантних рівнянь входять

$u_\mu u^\mu = 1$ – рівняння ейконала в $\mathbb{R}(1,3)$ $(\mu,\ \nu = \overline{0,3})$;

$(u_\mu u^\mu - 1)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = 0$ – рівняння Борна – Інфельда;

$\det\|u_{\mu\nu}\| = 0$ – рівняння Монжа-Ампера.

Тут $u_\mu u^\mu = \partial_\mu u\, \partial^\mu u = g_{\mu\nu} u_\mu u_\nu = u_0^2 - (\nabla u)^2$,

$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\|1,-1,-1,-1\|$,

$\Box u = \partial_\mu \partial^\mu u = g_{\mu\nu} u^{\mu\nu} = u_{00} - \Delta u$.

Тепер визначимо клас систем ДР другого порядку, які інваріантні відносно перетворення змінних (1.1.23).

Теорема 2.І.3. Система М ДРЧП другого порядку для двох функцій незалежних змінних x^0, x^1

$$L^p(x,\ u,\ \underset{1}{u},\ \underset{2}{u}) = 0\ , \qquad (2.1.6)$$

$$u = (\ u^0,\ u^1\ )\ , \qquad (p = \overline{1,M})$$

вигляду

$$L^p(x,u) = \Phi^p\left[\{f^c\}\right] = 0\ , \qquad (2.1.7)$$

$$(p = \overline{1,M}), \qquad (c = \overline{1,9}),$$

де $\{f^c\}$ – мінімальна сукупність абсолютних диференціальних інваріантів перетворення (1.1.23) порядку ≤ 2

$f^1(x^\mu;\ u^\mu)$, $(\mu = 0,1)$,

$f^2(u^\mu_\mu;\ \delta^{-1}u^\nu_\nu)$, $(\mu \ne \nu,\ \mu,\ \nu = 0,1)$,

$f^3(u^\mu_\nu;\ \delta^{-1}u^\mu_\nu)$, $(\mu \ne \nu,\ \mu,\ \nu = 0,1)$, (2.1.8a)

$$f^4\left[u^1_{11};- \delta^{-3}\left[(u^0_0)^2(u^1_0u^0_{11} - u^0_0u^1_{11}) + (u^0_1)^2(u^1_0u^0_{00} - u^0_0u^1_{00}) - 2u^0_1u^0_0(u^1_0u^0_{10} - u^0_0u^1_{00})\right]\right],$$

$$f^5\left[u^1_{00};- \delta^{-3}\left[(u^1_0)^2(u^1_0u^0_{11} - u^0_0u^1_{11}) + (u^1_1)^2(u^1_0u^0_{00} - u^0_0u^1_{00}) - 2u^1_0u^1_1(u^1_0u^0_{10} - u^0_0u^1_{10})\right]\right],$$

$$f^6\Big[u^1_{10};-\delta^{-3}\Big[u^0_0u^1_0(u^1_0u^0_{11}-u^0_0u^1_{11})+u^0_1u^1_1(u^1_0u^0_{00}-u^0_0u^1_{00})-$$
$$-(u^1_0u^0_{10}-u^0_0u^1_{10})(u^1_1u^0_0+u^1_0u^0_1)\Big]\Big],$$
$$f^7\Big[u^0_{11};-\delta^{-3}\Big[(u^0_0)^2(u^0_1u^1_{11}-u^1_1u^0_{11})+(u^0_1)^2(u^0_1u^1_{00}-u^1_1u^0_{00})-$$
$$-2u^0_1u^0_0(u^0_1u^1_{10}-u^1_1u^0_{10})\Big]\Big],$$
$$f^8\Big[u^0_{00};-\delta^{-3}\Big[(u^1_0)^2(u^0_1u^1_{11}-u^1_1u^0_{10})+(u^1_1)^2(u^0_1u^1_{00}-u^1_1u^0_{00})-$$
$$-2u^1_1u^1_0(u^0_1u^1_{10}-u^1_1u^0_{10})\Big]\Big],$$
$$f^9\Big[u^0_{10};-\delta^{-3}\Big[u^0_0u^1_0\cdot(u^0_1u^1_{11}-u^1_1u^0_{11})+u^0_1u^1_1\cdot(u^0_1u^1_{00}-u^1_1u^0_{00})-$$
$$-(u^0_1u^1_{10}-u^1_1u^0_{10})(u^1_1u^0_0+u^1_0u^0_1)\Big]\Big], \qquad (2.1.8б)$$

є інваріантною відносно перетворення (1.1.23).
f^c, $(c=\overline{1,9})$ – довільні гладкі функції, симетричні по аргументах, в f^2 підсумовування по μ немає. ▫

Доведення цієї теореми випливає безпосередньо з формул перетворення (1.1.23) та їх диференціального продовження. Воно в основних рисах повторює доведення попередніх теорем, тому ми його не наводимо. ■

Найпростішими прикладами систем ДРЧП першого порядку, які інваріантні відносно перетворення (1.1.23), є

1. $u^1_0-u^0_1=0, \qquad u^1_1+\varepsilon u^0_0=0, \qquad \varepsilon=\pm 1.$ (2.1.9)

2. $(x^1+u^1)u^1_0-(x^0+u^0)u^0_1=0,$

$$\left[(x^0)^2+(x^1)^2\right]u^1_1-\left[(u^0)^2+(u^1)^2\right]u^0_0=0; \qquad (2.1.10)$$

3. $u^1_0-u^0_1=0,$

$$\left[(x^0)^2+(x^1)^2\right]u^1_1-\left[(u^0)^2+(u^1)^2\right]u^0_0=0. \qquad (2.1.11)$$

Система рівнянь (2.1.9) з $\varepsilon=-1$ відповідає хвильовому рівнянню $u_{00}-u_{11}=0$, при $\varepsilon=1$ вона перетворюється в систему рівнянь Коші-Рімана. Можна побудувати безліч більш складних прикладів.

II. Вище знайдені рівняння, які є інваріантними відносно перетворень годографа (1.1.20), (1.1.21), (1.1.23). Побудуємо для них формули розмноження розв'язків за алгоритмом, описаним впершому розділі (§4 п. II). Одержаним результатам надамо вигляд відповідних тверджень.

Алгоритм 2.I.I. Якщо рівняння, інваріантне відносно перетворення (1.1.20), розмноження його розв'зків виконується за формулою

$$\begin{cases} \overset{(2)}{u}(x^0,x^1) = \tau , \\ x^1 = \overset{(1)}{u}(x^0,\tau) . \ \square \end{cases} \tag{2.1.12}$$

Тут $\overset{(1)}{u}(x^0,x^1)$ - відомий розв'язок, $\overset{(2)}{u}(x^0,x^1)$ - новий розв'язок рівняння, яке є інваріантним відносно перетворення (2.1.20), $\tau(x^0,x^1)$ - функціональний параметр, що підлягає виключенню із системи (2.1.12).

Доведення. Застосуємо загальний алгоритм розмноження розв'язків інваріантних відносно НПЗ рівнянь, описаний у п.II §4 першого розділу (див. формулу (1.4.30)) та означення 1.4.3. Скористаємось тепер формулами перетворення (1.1.20)

$$u(x^0,x^1) = y^1 , \qquad \delta = v_1 \neq 0 ,$$

$$x^1 = v(y^0,y^1) , \qquad x^0 = y^0 .$$

Оскільки $u(x^0,x^1)$ та $v(y^0,y^1)$ є розв'язками одного і того ж рівняння, позначимо в цих формулах

$$u(x^0,x^1) = \overset{(2)}{u}(x^0,x^1) , \qquad v(y^0,y^1) = \overset{(1)}{u}(x^0,\tau) ,$$

де $\tau = y^1$ - функціональний параметр. Таким чином, маємо співвідношення

$$\overset{(2)}{u}(x^0,x^1) = \tau\ , \qquad \overset{(1)}{u}_\tau \neq 0\ ,$$

$$x^1 = \overset{(1)}{u}(x^0,\tau)\ .$$

Отже, шукана формула (2.1.12) розмноження розв'язків (1.1.20) - інваріантних рівнянь одержана. Щоб побудувати новий розв'язок $\overset{(2)}{u}(x^0,x^1)$ по відомому $\overset{(1)}{u}(x^0,x^1)$ треба:

1) відомий розв'язок $\overset{(1)}{u}(x^0,x^1)$ записати в вигляді функції $\overset{(1)}{u}(x^0,\tau)$, де аргумент x^1 замінено на параметр τ; 2) новий розв'язок $\overset{(2)}{u}(x^0,x^1)$ прирівняти до параметра τ, а відомий, записаний в новому вигляді,- до незалежній змінній x^1; 3) для знаходження явної залежності $\overset{(2)}{u}$ від $\overset{(1)}{u}$ залишається виключити із системи (2.1.12) параметр τ і розв'язати відносно $\overset{(2)}{u}$ рівняння

$$x^1 = \overset{(1)}{u}(x^0, \overset{(2)}{u}(x^0,x^1))\ .$$

Твердження доведено. ■

Аналогічно доводиться твердження про формулу розмноження розв'язків у випадку рівнянь, інваріантних відносно перетворення (1.1.21).

Алгоритм 2.1.2. Нехай ДРЧП другого порядку в просторі незалежних змінних $\mathbb{R}(1,3)$ інваріантне відносно перетворення (1.1.21), тоді розмноження його розв'язків виконується за формулою

$$\begin{cases} \overset{(2)}{u}(x) = \tau\ , \quad x = (x^0,x^1,x^2,x^3)\ , \\ x^1 = \overset{(1)}{u}(x^0,\tau,x^2,x^3)\ . \end{cases} \tag{2.1.13}$$ ■

Дещо складніший вигляд має формула розмноження розв'язків (1.1.23) - інваріантних систем для двох залежних змінних в $\mathbb{R}(1,1)$.

Алгоритм 2.І.3. Якщо система ДРЧП інваріантна відносно перетворення (1.1.23), то побудова нового розв'язку $\overset{(2)}{u}(x) = (\overset{(2)}{u}{}^0(x), \overset{(2)}{u}{}^1(x))$ по відомому її розв'язку $\overset{(1)}{u}(x) = (\overset{(1)}{u}{}^0(x), \overset{(1)}{u}{}^1(x))$ виконується за формулою

$$\left|\begin{array}{ll} \overset{(2)}{u}(x) = \tau\,, & \tau = (\tau^0, \tau^1)\,, \\ x = \overset{(1)}{u}(\tau)\,, & x = (x^0, x^1)\,. \ \square \end{array}\right. \tag{2.1.14}$$

Тут $\tau^\mu(x)$, $(\mu = 0,1)$, – підлягаючі виключенню із системи (2.1.14) функціональні параметри.

Доведення. Розглянемо формули перетворення (1.1.23)

$$u^0(x) = y^0,\quad u^1(x) = y^1,\quad x = (x^0, x^1)\,,$$
$$x^0 = v^0(y)\,,\ x^1 = v^1(y)\,,\ y = (y^0, y^1)\,.$$

Оскільки $u^\sigma(x)$ і $v^\sigma(y)$, $(\sigma = 0,1)$ є розв'язками системи рівнянь, інваріантної відносно цього перетворення, позначимо

$$u^\sigma(x^0, x^1) = \overset{(2)}{u}{}^\sigma(x^0, x^1)\,,\quad v^\sigma(\tau^0, \tau^1) = \overset{(1)}{u}{}^\sigma(\tau^0, \tau^1)\,.$$

Тут $y^0 = \tau^0$, $y^1 = \tau^1$ – функціональні параметри. Одержуємо систему рівнянь

$$\begin{array}{ll} \overset{(2)}{u}{}^0(x^0, x^1) = \tau^0\,, & \overset{(2)}{u}{}^1(x^0, x^1) = \tau^1\,, \\ x^0 = \overset{(1)}{u}{}^0(\tau^0, \tau^1)\,, & x^1 = \overset{(1)}{u}{}^1(\tau^0, \tau^1)\,. \end{array} \tag{2.1.14a}$$

Або, зобразивши в іншому вигляді, – формулу (2.1.14), яка зв'язує новий та відомий розв'язки

$$\overset{(2)}{u}(x) = \tau\,,\qquad \tau = (\tau^0, \tau^1)\,,$$

$$x = \overset{(1)}{u}(\tau)\,,\qquad x = (x^0, x^1)\,.$$

Таким чином, щоб знайти новий розв'язок $\overset{(2)}{u}(x)$ (1.1.23) – – інваріантної системи ДР по відомому розв'язку $\overset{(1)}{u}(x)$, треба: 1) записати відомий розв'язок $\overset{(1)}{u}(x)$ у вигляді $\overset{(1)}{u}(\tau)$, де незалежні змінні x^μ, ($\mu = 0,1$) замінені відповідно на параметри τ^μ; 2) прирівняти нові розв'язки (шукані) до відповідних параметрів $\overset{(2)}{u}{}^\sigma(x) = \tau^\sigma$, ($\sigma = 0,1$), а відомі розв'язки в новому вигляді - до відповідних незалежних змінних: $\overset{(1)}{u}{}^\sigma(\tau) = x^\sigma$; 3) виключити параметри τ^μ з рівнянь одержаної системи (2.1.14) і розв'язати систему рівнянь

$$x^0 = \overset{(1)}{u}{}^0(\overset{(2)}{u}{}^0(x), \overset{(2)}{u}{}^1(x)),$$

$$x^1 = \overset{(1)}{u}{}^1(\overset{(2)}{u}{}^0(x), \overset{(2)}{u}{}^1(x)).$$

Отже, твердження доведено. ■

Формули (2.1.12)-(2.1.14) дають нові розв'язки відповідних рівнянь у параметричному вигляді, $\overset{(1)}{u}(\tau)$ в них є відомими функціями. Для того щоб розв'язок представити у явному вигляді, необхідно виключити із рівнянь системи параметр τ.

III. Проілюструємо ефективність одержаних вище формул розмноження розв'язків годограф-інваріантних рівнянь на кількох прикладах.

Приклад 2.I.I. Інваріантне відносно перетворення (1.1.20) рівняння

$$u_0 - u_1^{-1} u_{11} = 0 \qquad (2.1.15)$$

має розв'язок

$$\overset{(1)}{u}(x) = x^0 \cdot \operatorname{tg}\left[\tfrac{1}{2} x^1\right].$$

Скориставшись формулою розмноження розв'язків (2.1.12), одержимо

$$\overset{(2)}{u}(x) = \tau,$$

$$x^1 = x^0 \cdot \operatorname{tg}\left[\tfrac{1}{2} \tau\right].$$

З цієї системи знаходимо τ

$$\tau = 2\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{x^1}{x^0}\ .$$

Таким чином, шуканий розв'язок $\overset{(2)}{u}$ має вигляд:

$$\overset{(2)}{u}(x) = 2\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{x^1}{x^0}\ .$$

Ще один частинний розв'язок рівняння (2.1.15) є таким :

$$\overset{(3)}{u}(x) = -\ \ln(x^0 + x^1)\ .$$

За допомогою формули (2.1.12) для нього одержуємо новий розв'язок

$$\overset{(4)}{u}(x) = \exp\{-\ x^1\} - x^0\ .$$

Приклад 2.І.2. Частинним розв'язком рівнянь системи

$$u^1_0 - u^0_1 = 0\ , \qquad u^1_1 - u^0_0 = 0$$

є функції

$$\overset{(1)}{u}{}^0(x) = 2x^0x^1 + c\ ,$$

$$\overset{(1)}{u}{}^1(x) = (x^0)^2 + (x^1)^2\ .$$

c – довільний сталий параметр. Підставимо ці розв'язки у формулу (2.1.14), попередньо замінивши в них x^0, x^1 параметрами τ^0 та τ^1. Одержуємо систему рівнянь:

$$\overset{(2)}{u}{}^0(x) = \tau^0\ ,$$

$$\overset{(2)}{u}{}^1(x) = \tau^1\ ,$$

$$x^0 = 2\tau^0\tau^1 + c\ ,$$

$$x^1 = (\tau^0)^2 + (\tau^1)^2\ .$$

Після виключення параметрів з цієї системи остання набирає вигляду

$$\overset{(2)}{u}{}^0(x) = \pm\,\frac{x^0 - c}{\sqrt{2}}\left[\,x^1 \pm \sqrt{(x^1)^2 + (x^0 - c)^2}\,\right]^{-\frac{1}{2}}\ ,$$

$$\overset{(2)}{u}{}^1(x) = \pm\,\frac{x^0 - c}{\sqrt{2}}\left[\,x^1 \pm \sqrt{(x^1)^2 + (x^0 - c)^2}\,\right]^{\frac{1}{2}}\ .$$

Розв'язки, побудовані в наведених прикладах можна піддати багатопараметричному розмноженню за групами ліївських симетрій відповідних рівнянь.

Отже, симетрія (інваріантність) скалярних рівнянь та систем з двома шуканими функціями ($m = 2$) відносно перетворень годографа (1.1.20), (1.1.21) та (1.1.23) може бути ефективно використана для побудови нових розв'язків, коли відомі які- небудь їх частинні розв'язки. Формули розмноження розв'язків у цих випадках являють собою функціонально- параметричні співвідношення, які не вимагають інтегрування у процесі знаходження нового розв'язку. Для одержання розв'язку $\overset{(2)}{u}$ у явній формі необхідно із рівнянь системи виключити параметр τ.

Основні результати цього параграфа опубліковані в роботі [187].

§2. Диференціальні рівняння, інваріантні відносно багатовимірних перетворень Ейлера - Ампера та Лежандра

Найбільш відомими представниками нелокальних перетворень є контактні перетворення Ейлера-Ампера [27,47] та Лежандра [51,135,178]. Вони з давніх часів використовуються для інтегрування нелінійних ДРЧП, як правило, з двома незалежними змінними. Поширення області їх застосування досягається завдяки розгляду диференціальних рівнянь, які інваріантні відносно цих перетворень. Нелокальні симетрії, породжені таким способом, можуть бути зображені у вигляді відповідних формул розмноження розв'язків.

В роботі [123] виконана групова класифікація нелінійних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно групи Лоренца $O(1, n-1)$ і Пуанкаре $P(1, n-1)$, а також різних їх розширень. Такі рівняння мають ту важливу властивість, що для них існує простий алгоритм побудови нових розв'язків по відомих, тобто визначена процедура розмноження розв'язків за допомогою точкових перетворень змінних. Для подальшої класифікації лоренц- та пуанкаре- інваріантних рівнянь в даному параграфі використовується перетворення Лежандра (1.1.28). Наведено приклади.

I. Для вичерпаного опису класів ДРЧП порядку ≤ 2, інваріантних відносно перетворень Ейлера-Ампера і Лежандра, як було вже пояснено у вступі до данного розділу, необхідно мати загальні розв'язки відповідних функціональних рівнянь. Отже, важко очікувати повного розв'язка даної проблеми. Обмежимось розглядом достатньо широких підкласів таких рівнянь.

Теорема 2.2.I. ДРЧП другого порядку у просторі $\mathbb{R}(1,n-1)$

n незалежних змінних $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$

$$L(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}) = \Phi\left[(f^{\sigma})\right] = 0,$$

$$(\sigma = \overline{0,6}), \qquad (2.2.1)$$

де аргументи f^{σ} є абсолютними диференціальними інваріантами порядку ≤ 2 перетворення (1.1.26)

$$f^0\left[x_0\right], \quad f^1\left[x_a, u_a\right], \quad f^2\left[u_0, -u_0\right],$$

$$f^3\left[u, x_a u_a - u\right], \qquad (2.2.2)$$

$$f^4\left[u_{00};\ -\det^{-1}\|u_{ab}\|\cdot\det\|u_{\mu\nu}\|\right],$$

$$f^5\left[u_{0a};\ -\det^{-1}\|u_{cd}\|\cdot u_{0b}\cdot a_{ba}(u_{cd})\right],$$

$$f^6\left[u_{ab};\ -\det^{-1}\|u_{cd}\|\cdot a_{ba}(u_{cd})\right],$$

абсолютно інваріантне відносно перетворення Ейлера – Ампера. Φ, f^{σ}, $(\sigma = \overline{0,6})$ є довільними гладкими функціями, f^c, $(c = \overline{1,6})$ – симетричні по аргументах, a_{ab} – алгебраїчні доповнення до елемента u_{ab} у матриці $\|u_{cd}\|$. □

Доведення. Розглянемо функцію $f^0(x_0)$. Перетворення (1.1.26) залишає її інваріантною, тому що x_0 не змінюється. Тепер піддамо f^1 цьому перетворенню змінних. З формули (1.1.27) випливає

$$f^1\left[x_a;\ u_a\right] \longrightarrow f^1\left[v_a, y_a\right].$$

Ототожнимо змінні u і v, x і y, тоді

$$f^1\left[x_a;\ u_a\right] \longrightarrow f^1\left[u_a, x_a\right].$$

Якщо f^1 є симетричною по аргументах, маємо

$$f^1\left[x_a;\ u_a\right] \longrightarrow f^1\left[x_a, u_a\right].$$

Отже, f^1 – абсолютно інваріантний вираз відносно перетворення Ейлера-Ампера. Аналогічно за допомогою формул (1.1.27) доводиться інваріантність решти функцій f^c, $(c = \overline{1,6})$. Ф є абсолютним інваріантом перетворення (1.1.26) як довільна функція аргументів: - абсолютних інваріантів f^σ, $(\sigma = \overline{0,6})$. Теорема доведена. ■

До класу інваріантних видносно перетворення Ейлера-Ампера рівнянь входять, наприклад, такі рівняння :

$$u_0 - u_a u_a + (x)^2 = 0, \qquad (x)^2 \equiv x_a x_a \quad ;$$

$$\lambda u_0 - \Delta u - \det^{-1}\|u_{cd}\|\cdot \mathrm{Slid}\,(u_{cd}) = 0 \;;$$

$$u_{00} - \det^{-1}\|u_{cd}\|\cdot\det\|u_{\mu\nu}\| = 0 \;;$$

$$\lambda u_0 - \det^{m}\|u_{cd}\| + (-1)^{m\cdot n}\det^{-mn}\|u_{cd}\|\cdot\det\|a_{ab}(u_{cd})\| = 0 \;;$$

$$\lambda u_0 - \varphi(x_c, u)\Delta u - \det^{-1}\|u_{cd}\|\varphi(u_c, x_a u_a - u)\mathrm{Slid}\,(u_{cd}) = 0.$$

$$\lambda u_0^{2h} + \varphi(x_c)u_a u_a + \varphi(u_c)\cdot(x)^2 = 0 \;;$$

$$\lambda u_0^{2h} + \varphi(u_c)u_a u_a + \varphi(x_c)\cdot(x)^2 = 0 \;; \qquad (2.2.3)$$

Список рівнянь (2.2.3) може бути продовжений.

Δ - оператор Лапласа,

$$\mathrm{Slid}(u_{cd}) \overset{def}{=} g_{ab}a_{ab}(u_{cd}) \;,$$

$\varphi(x,z)$ - довільні гладкі функції, λ - довільний сталий параметр, m, h - довільні дійсні числа.

У випадку перетворення Лежандра також встановлено відповідне твердження.

Теорема 2.2.2. Диференціальне рівняння другого порядку

$$L(x,\ u,\ \underset{1}{u},\ \underset{2}{u}) = \Phi\left[\{f^c\}\right] = 0,$$

$$(\ c = 1,2,3) \qquad (2.2.4)$$

від n незалежних змінних x_μ, $\mu = \overline{0,n-1}$ у просторі $\mathbb{R}(1,n-1)$

з аргументами

$$f^1(x_\mu;\ u_\mu)\ ,\quad f^2(u;\ x_\mu u_\mu - u),$$

$$f^3(u_{\mu\nu};\ \det^{-1}\|u_{\gamma\sigma}\| a_{\mu\nu}(u_{\gamma\sigma}))\ , \qquad (2.2.5)$$

де $a_{\mu\nu}$ - алгебраїчне доповнення до $u_{\mu\nu}$ у матриці $\|u_{\gamma\sigma}\|$, f^c, ($c = 1,2,3$) - довільні гладкі симетричні по аргументах функції, є абсолютним інваріантом перетворення Лежандра (1.1.28). □

Доведення. Нехай $f(x,z) = f(z,x)$- довільна гладка функція є симетричною по аргументах. Тоді функції (2.2.5) є абсолютними інваріантами перетворення Лежандра. Доведемо це для f^1. Виконаємо перетворення (1.1.28), (1.1.29) функції f^1

$$f^1(x_\mu;\ u_\mu) \longrightarrow f^1(v_\mu,\ y_\mu)$$

і ототожнимо змінні u і v, x і y. Тоді одержуємо рівність

$$f^1(x_\mu;\ u_\mu) = f^1(u_\mu,\ x_\mu),$$

яка саме і виражає властивість симетрії по аргументах. Аналогічно перевіряється інваріантність виразів f^2, f^3. Отже, функції (2.2.5) є абсолютними інваріантами перетворення Лежандра. Вони одержані безпосередньо з формули самого перетворення (1.1.28) та його диференціальних продовжень. При цьому використовуються усі його співвідношення, які визначають усі наступні продовження співвідношень (1.1.28). На цих підставах ми будемо говорити,що сукупність (2.2.5) у певному змісті є мінімальною. Довільна функція Φ, аргументи якої є абсолютними інваріантами перетворення Лежандра, є також інваріантом. Теорема доведена. ■

Нові лежандр- інваріантні вирази можна будувати, комбінуючи відповідні аргументи функцій (2.2.5). Наприклад, вираз

$$f\left[\varphi(x_\mu, u);\ \varphi(u_\mu;\ x_\mu u_\mu - u)\right]\ ,$$

побудований за допомогою симетричної по аргументах функції f та довільної функції φ, також буде абсолютним диференціальним інваріантом перетворення Лежандра:

$$f\Big[\varphi(x_\mu, u);\ \varphi(u_\mu;\ x_\mu u_\mu - u)\Big] \longrightarrow f\Big[\varphi(v_\mu;\ y_\mu v_\mu - v);\ \varphi(y_\mu; v)\Big].$$

Таким чином, сукупність (2.2.5) можна розуміти (в певному змісті) як еквівалент базисного набору інваріантів перетворення Лежандра порядку ≤ 2.

Наведемо декілька нелінійних рівнянь, які є інваріантами як відносно групи Лоренца $O(1, n-1)$, групи Пуанкаре $P(1, n-1)$, так і відносно перетворення Лежандра

$$\det\|u_{\mu\nu}\|\cdot\Box u \pm \mathrm{Slid}(u_{\mu\nu}) = 0,$$

$$\det^m\|u_{\mu\nu}\| \pm \det^{-mn}\|u_{\gamma\sigma}\|\cdot\det^m\|a_{\mu\nu}(u_{\gamma\sigma})\| = 0\ ,$$

$$u_\mu u^\mu + (x)^2 + c = 0, \qquad (x)^2 = x_\mu x^\mu\ ,$$

$$(x_\mu + u_\mu)(x^\mu + u^\mu) \equiv (x)^2 + 2x_\mu u^\mu + u_\mu u^\mu = 0\ ,$$

$$u^\mu u^\nu u_{\mu\nu}\cdot\det\|u_{\gamma\sigma}\| \pm x^\mu x^\nu a_{\mu\nu}(u_{\gamma\sigma}) = 0\ ,$$

$$x^\mu x^\nu u_{\mu\nu}\cdot\det\|u_{\gamma\sigma}\| \pm u^\mu u^\nu a_{\mu\nu}(u_{\gamma\sigma}) = 0\ ,$$

$$\varphi\Big[(x)^2\Big]\cdot\det^m\|u_{\gamma\sigma}\| \pm \varphi\Big[u_\mu u^\mu\Big]\cdot\det^{-mn}\|u_{\gamma\sigma}\|\cdot\det^m\|a_{\mu\nu}(u_{\gamma\sigma})\| = 0,$$

$$\varphi\Big[u_\mu u^\mu\Big]\cdot\det^m\|u_{\gamma\sigma}\| \pm \varphi\Big[(x)^2\Big]\cdot\det^{-mn}\|u_{\gamma\sigma}\|\cdot\det^m\|a_{\mu\nu}(u_{\gamma\sigma})\| = 0,$$

$$\Big[1 + (x_\mu x^\mu - u_\mu u^\mu)\Big]u_{11} + 2(u_0 - x_0)(u_1 - x_1)u_{10} - \Big[1 - (x_\mu x^\mu - u_\mu u^\mu)\Big]u_{00} = 0\ , \qquad (\mu = 0, 1). \tag{2.2.6}$$

Тут φ – довільна гладка функція, $m \in \mathbb{R}$, $\gamma, \sigma, \mu, \nu = \overline{0, n-1}$,

$$\mathrm{Slid}(u_{\mu\nu}) \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} g_{\mu\nu}a_{\mu\nu}(u_{\gamma\sigma})\ .$$

Наведемо ще декілька рівнянь, які не допускають ні групу Лоренца $O(1,n-1)$, ні групу Пуанкаре $P(1,n-1)$, але є інваріантними відносно перетворення Лежандра

$$\alpha^{\mu}\cdot(x_{\mu}+u_{\mu})=0,$$

$$\alpha^{\mu}(u_{\nu})\cdot x_{\mu}+\alpha^{\mu}(x_{\nu})\cdot u_{\mu}=0,$$

$$g_{\mu\nu}\left[\alpha_{\mu}(x_{\gamma})+\alpha_{\mu}(u_{\gamma})\right]\left[\alpha_{\nu}(x_{\gamma})+\alpha_{\nu}(u_{\gamma})\right]=0,$$

$$\alpha^{\mu}x_{\mu}\cdot\det\|u_{\gamma\sigma}\|\Box u\pm\alpha^{\mu}u_{\mu}\cdot \mathrm{Slid}(u_{\gamma\sigma})=0,$$

$$\alpha^{\mu}(u_{\nu})x_{\mu}\det\|u_{\gamma\sigma}\|\Box u\pm\alpha^{\mu}(x_{\nu})u_{\mu}\mathrm{Slid}(u_{\gamma\sigma})=0,$$

$$\alpha^{\mu}(u_{\nu})x_{\mu}\det{}^{m}\|u_{\gamma\sigma}\|\Box u\pm\alpha^{\mu}(x_{\nu})u_{\mu}\det{}^{-mn}\|u_{\gamma\sigma}\|\det{}^{m}\|a_{\mu\nu}(u_{\gamma\sigma})\|=0,$$

$$u_{00}u_{11}-u_{10}^{2}-u_{00}^{-1}u_{11}=0. \qquad (2.2.7)$$

α^{μ} -компоненти сталого вектора α, або вектор - функції $\alpha(\cdot)$.

Для сукупності рівнянь (2.2.7) спосіб розмноження розв'язків є невідомим.

Відбираючи із ДІ (2.2.5) та певних комбінацій, що побудовані з них, тих, які допускають групу Лоренца або групу Пуанкаре, можна звузити клас рівнянь (2.2.4).

Наслідок 2.2.I. Диференціальне рівняння другого порядку в $\mathbb{R}(1,n-1)$, яке допускає групу Лоренца $O(1,n-1)$, і має вигляд

$$L_1(x,u,\underset{1}{u},\underset{2}{u})=\Phi_1\left[\{f^{s}\}\right]=0,$$

$$(s=\overline{1,7}), \qquad (2.2.8)$$

абсолютно інваріантне відносно перетворення Лежандра. Аргументи f^{s} є абсолютними диференціальними інваріантами перетворень Лежандра і Лоренца одночасно:

$f^{1}(x_{\mu}u^{\mu})$, $f^{2}(x_{\mu}x^{\mu};\ u_{\mu}u^{\mu})$,

$$f^3\left[u^\mu u^\nu u_{\mu\nu};\ x^\mu x^\nu \det{}^{-1}\|u_{\gamma\sigma}\|\cdot a_{\mu\nu}(u_{\gamma\sigma})\right],$$

$$f^4\left[x^\mu x^\nu u_{\mu\nu};\ u^\mu u^\nu \det{}^{-1}\|u_{\gamma\sigma}\|\cdot a_{\mu\nu}(u_{\gamma\sigma})\right],$$

$$f^5\left[(x^\mu-u^\mu)(x^\nu-u^\nu)u_{\mu\nu};\ (u^\mu-x^\mu)(u^\nu-x^\nu)\det{}^{-1}\|u_{\gamma\sigma}\|a_{\mu\nu}(u_{\gamma\sigma})\right],$$

$$f^6\left[\Box u;\ \det{}^{-1}\|u_{\gamma\sigma}\|\mathrm{Slid}(u_{\gamma\sigma})\right],$$

$$f^7\left[\det\|u_{\mu\nu}\|;\ \det{}^{-n}\|u_{\mu\nu}\|\det\|a_{\mu\nu}(u_{\gamma\sigma})\|\right]. \qquad (2.2.9)$$

Тут Φ_1, f^s – довільні гладкі функції, а f^k, $(k = \overline{2,7})$ – симетричні по аргументах.

Наслідок 2.2.2. Діференціальне рівняння порядку ≤ 2 у просторі $\mathbb{R}(1,n-1)$ незалежних змінних, яке допускає групу Пуанкаре $P(1,n-1)$ і має вигляд

$$L_2(x,\ u,\ \underset{1}{u},\ \underset{2}{u}) = \Phi_2\{f^p\} = 0,$$

$$(p = 1,2), \qquad (2.2.10)$$

абсолютно іваріантне відносно перетворення Лежандра. Аргументи f^p– абсолютні диференціальні інваріанти порядку ≤ 2 групи Пуанкаре і перетворення Лежандра (1.1.28):

$$f^1\left[\Box u;\ \det{}^{-1}\|u_{\mu\nu}\|\mathrm{Slid}(u_{\mu\nu})\right],$$

$$f^2\left[\det\|u_{\mu\nu}\|;\ \det{}^{-n}\|u_{\mu\nu}\|\det\|a_{\mu\nu}(u_{\gamma\sigma})\|\right] \qquad (2.2.11)$$

є довільними гладкими функціями, симетричними по аргументах, а Φ_2 – довільна гладка функція.

Доведення наслідків 2.2.1, 2.2.2 одержується безпосередньо перевіркою інваріантності виразів f^k та f^p одночасно відносно перетворень Лоренца і Лежандра та Пуанкаре і Лежандра відповідно. При цьому користуємося відомими результатами про ДІ перетворень Лоренца та Пуанкаре [123], відбираючи з них ті, що є абсолютними інваріантами перетворення Лежандра.

II. Вище описані широкі класи рівнянь, інваріантних відносно перетворень Ейлера-Ампера та Лежандра. Виникає питання: як використати цю нелокальну симетрію для розмноження їх розв'язків? Відповідь на це питання дається в таких твердженнях.

Алгоритм 2.2.I. Якщо рівняння інваріантне відносно перетворення Ейлера-Ампера у просторі $\mathbb{R}(1,n-1)$, то розмноження його розв'язків виконується за формулою

$$\begin{cases} \overset{(2)}{u}(x_0,x) = \tau_a \overset{(1)}{u}_a(x_0,\tau) - \overset{(1)}{u}(x_0,\tau), \\ x_a = \overset{(1)}{u}_a(x_0,\tau). \end{cases} \tag{2.2.12}$$

Тут $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1})$,

$$u_a(x_0,\tau) \equiv \partial_{\tau_a} u(x_0,\tau),$$

$\tau(x_0,x)$ – векторний функціональний параметр, який підлягає виключенню із системи (2.2.12). □

Доведення. Нехай ДР $L_1(x_0,x,u) = 0$ інваріантне відносно перетворення Ейлера-Ампера (1.1.26) в просторі $\mathbb{R}(1,n-1)$

$$u(x_0,x_1) = y_a v_a - v, \quad \det\|v_{ab}\| \neq 0,$$

$$x_a = v_a, \; x_0 = y_0, \; (a,b = \overline{1,n-1}). \tag{1.1.26}$$

Функції $u(x_0,x)$ та $v(y_0,y)$ є розв'язками ДР $L_1(x_0,x,u) = 0$ та $L_1(y_0,y,v) = 0$ відповідно. Тобто ці функції є розв'язками одного і того ж рівняння. Позначимо

$$u(x_0,x) = \overset{(2)}{u}(x_0,x), \quad v(y_0,y) = \overset{(1)}{u}(x_0,\tau).$$

Тут $y = \tau = (\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{n-1})$ – векторний функціональний параметр, $\overset{(1)}{u}(x_0,x)$ – відомий розв'язок (1.1.26) – інваріантного рівняння, $\overset{(2)}{u}(x_0,x)$ – новий його розв'язок. Тепер система

(1.1.26) одержує вигляд шуканої формули розмноження розв'язків:

$$\overset{(2)}{u}(x_0,x) = \tau_a \overset{(1)}{u}_a(x_0,\tau) - \overset{(1)}{u}(x_0,\tau) ,$$

$$x_a = \overset{(1)}{u}_a(x_0,\tau) , \det \| \overset{(1)}{u}_{ab} \| \neq 0 . \qquad (2.2.12a)$$

Для побудови нового розв'язку $\overset{(2)}{u}(x_0,x)$ по відомому $\overset{(1)}{u}(x_0,x)$ слід: 1) замінивши у розв'язку $\overset{(1)}{u}(x_0,x)$ аргументи x_a параметрами τ_a, надати йому вигляду функції $\overset{(1)}{u}(x_0,\tau)$; 2) обчислити похідні $\overset{(1)}{u}_a(x_0,\tau) \equiv \partial_{\tau_a} \overset{(1)}{u}(x_0,\tau)$; 3) підставити $\overset{(1)}{u}(x\ ,\tau)$ та $\overset{(1)}{u}_a(x\ ,\tau)$ в рівняння системи (2.2.12a). Для знаходження явної залежності $\overset{(2)}{u}(x_0,x)$ від $\overset{(1)}{u}$ необхідно виключити з цієї системи параметри τ. Таким чином, алгоритм (2.2.1) доведено. ■

Зрозуміло, що розмноження за формулою (2.2.12) допускають лише такі розв'язки, для яких є вірною умова невиродженості перетворення Ейлера-Ампера

$$\det \| \overset{(k)}{u}_{ab} \| \neq 0 , \qquad (k = 1,2) .$$

Відповідне твердження існує також для розмноження розв'язків лежандр- інваріантних рівнянь. Нехай є відомим точний розв'язок рівняння, інваріантного відносно перетворення Лежандра. В просторі $\mathbb{R}(1,n-1)$ він має вигляд

$$u(x) = \overset{(1)}{u}(x), \qquad x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

$$\det \| \overset{(1)}{u}_{\mu\nu} \| \neq 0 .$$

Тоді новий розв'язок $\overset{(2)}{u}(x)$ може бути побудований за відповідним алгоритмом.

Алгоритм 2.2.2. Нехай ДРЧП у просторі $\mathbb{R}(1,n-1)$ незалежних змінних інваріантне відносно перетворення Лежандра, тоді розмноження його розв'язків виконується за формулою

$$\begin{cases} \overset{(2)}{u}(x) = \tau_\mu \overset{(1)}{u}_\mu(\tau) - \overset{(1)}{u}(\tau) , \\ x_\mu = \overset{(1)}{u}_\mu(\tau) , \quad \tau = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}) . \ \square \end{cases} \tag{2.2.13}$$

Для знаходження явного розв'язку $\overset{(2)}{u}(x)$ необхідно виключити з системи (2.2.13) параметр τ. Формула (2.2.13) дає спосіб розмноження таких розв'язків лежандр- інваріантних рівнянь, для яких виконана умова

$$\det \| \overset{(k)}{u}_{\mu\nu} \| \neq 0 , \qquad (k = 1,2) .$$

Доведення. Припустимо, що $u(x)$ та $v(y)$, де $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$, $y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$, є розв,язками ДР, інваріантного відносно перетворення Лежандра (1.1.28) в $\mathbb{R}(1,n-1)$

$$u(x) = y_\mu v_\mu - v , \qquad \det \|v_{\mu\nu}\| \neq 0 ,$$

$$x_\mu = v_\mu \qquad (\mu, \nu = \overline{0,n-1}) . \tag{1.1.28}$$

Позначимо новий розв'язок $\overset{(2)}{u}(x) = u(x)$, а $v(x) = \overset{(1)}{u}(x)$ будемо вважати відомим розв'язком цього рівняння. Замінивши в $\overset{(1)}{u}(x)$ незалежні змінні x_μ на параметри τ_μ надомо розв'язку $\overset{(1)}{u}(x)$ вигляду функції $\overset{(1)}{u}(\tau)$. Тепер система рівнянь (1.1.28) має вигляд формули розмноження розв'язків:

$$\overset{(2)}{u}(x) = \tau_\mu \overset{(1)}{u}_\mu(\tau) - \overset{(1)}{u}(\tau) ,$$

$$x_\mu = \overset{(1)}{u}_\mu(\tau) , \ \det \| \overset{(1)}{u}_{\mu\nu} \| \neq 0 . \tag{2.2.13a}$$

Тут

$$\overset{(1)}{u}_\mu(\tau) \equiv \partial_{\tau_\mu} \overset{(1)}{u}(\tau)$$

Послідовність дій для побудови нового розв'язку $\overset{(2)}{u}(x)$ по відомому розв'язку $\overset{(1)}{u}(x)$ аналогічна тій, що наведена в доведенні алгоритма 2.2.1. Таким чином, алгоритм 2.2.2 доведено. ■

Одержані вище формули розмноження являють собою вже диференціальні співвідношення першого порядку за $\overset{(1)}{u}$. Це принципово відрізняє їх від розглянутих раніше формул розмноження розв'язків годограф - інваріантних рівнянь (2.1.12), (2.1.13). Завдяки інволютивності перетворень Ейлера-Ампера та Лежандра, повторне застосування формул (2.2.12), (2.2.13) до розв'язку $\overset{(1)}{u}(x)$ повертає знов до нього ж

$$\overset{(1)}{u} \longrightarrow \overset{(2)}{u} \longrightarrow \overset{(1)}{u} .$$

Якщо вже $\overset{(2)}{u}(x) \equiv \overset{(1)}{u}(x)$, говоритимемо, що $\overset{(1)}{u}(x)$ є інваріантним розв'язком відповідного рівняння.

III. Розглянемо приклади розмноження розв'язків рівнянь, які є інваріантними відносно перетворень Ейлера - Ампера та Лежандра, за формулами (2.2.12), (2.2.13). Наведені приклади, на наш погляд, наочно демонструють найбільш характерні властивості як процесу розмноження розв'язків, так і самих одержаних при цьому розв'язків. Вони охоплюють скалярні нелінійні ДРЧП першого та другого порядку як дво-так і багатовимірні.

Приклад 2.2.I. Розглянемо рівняння

$$u_0 u_{11} - u_{11}^2 + 1 = 0 . \tag{2.2.14}$$

Воно є інваріантним відносно перетворення Ейлера - Ампера (1.1.26). Візьмемо за вихідний частинний розв'язок

$$\overset{(1)}{u} = \frac{1}{2} x_1^2 .$$

Замінимо в ньому x_1 параметром τ і скористаємось формулою розмноження розв'язків (2.2.12). Маємо

$$\overset{(2)}{u} = \tau^2 - \frac{1}{2}\tau^2 = \frac{1}{2}\tau^2 ,$$

$$x_1 = \tau .$$

Отже,

$$\overset{(2)}{u} = \frac{1}{2} x_1^2$$

є інваріантним розв'язком рівняння (2.2.14) відносно перетворення Ейлера-Ампера в просторі $\mathbb{R}(1,1)$.

Функція $u = \varphi(\omega)$, $\omega = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1$ є розв'язком рівняння (2.2.14), якщо φ задовольняє звичайне ДР (ЗДР) першого порядку

$$\ln\left|\frac{k\cdot\dot\varphi - \sqrt{(k\cdot\dot\varphi)^2+1}}{k\cdot\dot\varphi + \sqrt{(k\cdot\dot\varphi)^2+1}}\right| + 2(k\cdot\dot\varphi)^{-1}\sqrt{(k\cdot\dot\varphi)^2+1} +$$

$$+ 4k\cdot\omega + c_1 = 0 . \qquad (2.2.15)$$

c_1 – стала інтегрування. У даному випадку розмноження розв'язку $\overset{(1)}{u}$ виконується за формулою

$$\overset{(2)}{u}(x_0, x_1) = \tau\cdot\dot\varphi(w) - \varphi(w) ,$$

$$x_1 = \dot\varphi(w) , \quad w = 2kx_0 + \tau . \qquad (2.2.16)$$

Тут $k = \frac{1}{2}\alpha_0$, $\alpha_1 = 1$, α_0 – довільна стала. Із другого рівняння системи (2.2.16) знаходимо

$$\tau = [\dot\varphi]^{-1}(x_1) - 2kx_0 .$$

$[\dot\varphi]^{-1}(x)$ – функція, обернена до $\dot\varphi(x)$. Відмітимо, що

$$[\dot\varphi]^{-1}(x_1) = w ,$$

$$\dot\varphi(w) = \dot\varphi\left[[\dot\varphi]^{-1}(x)\right] = x_1 .$$

Тоді з першого рівняння системи (2.2.16) одержуємо

$$\overset{(2)}{u}(x_0, x_1) - \tau\cdot x_1 + \varphi(2kx_0 + \tau). \qquad (2.2.17)$$

Тут $\varphi(2kx_0 + \tau)$ – розв'язок ЗДР (2.2.15), записаний для аргументу $2kx_0+\tau$. Із рівняння (2.2.15) в силу рівності

$$x_1 = \overset{(1)}{u_\tau}(x_0,\tau) = \dot{\varphi}(2kx_0+\tau)$$

знаходимо τ

$$\tau = (-1)\left[\ln\left|\frac{kx_1 - \sqrt{(kx_1)^2+1}}{kx_1 + \sqrt{(kx_1)^2+1}}\right| + 2(kx_1)^{-1}\sqrt{(kx_1)^2+1} + \right.$$

$$\left. +2kx_0 + (4k)^{-1}\cdot c_1\right] .$$

Отже, шуканий розв'язок $\overset{(2)}{u}(x_0,x_1)$ визначається системою рівнянь

$$\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = \varphi\left[\ln\left|\frac{kx_1 + \sqrt{(kx_1)^2+1}}{kx_1 - \sqrt{(kx_1)^2+1}}\right| - 2(kx_1)^{-1}\sqrt{(kx_1)^2+1} - \right.$$

$$\left. -(4k)^{-1}c_1\right] - x_1\left\{\ln\left|\frac{kx_1 - \sqrt{(kx_1)^2+1}}{kx_1 + \sqrt{(kx_1)^2+1}}\right| + 2(kx_1)^{-1}\sqrt{(kx_1)^2+1} + \right.$$

$$\left. + 2kx_0 + (4k)^{-1}c_1\right\},$$

$$\ln\left|\frac{k\dot{\varphi} - \sqrt{(k\dot{\varphi})^2+1}}{k\dot{\varphi} + \sqrt{(k\dot{\varphi})^2+1}}\right| + 2(k\dot{\varphi})^{-1}\sqrt{(k\dot{\varphi})^2+1} + 4kw + c_1 = 0 ,$$

$$\varphi = \varphi(w) . \tag{2.2.18}$$

Приклад 2.2.2 Розглянемо рівняння із списку (2.2.7)

$$u_{00}u_{11} - u_{10}^2 - u_{00}^{-1}u_{11} = 0 . \tag{2.2.19}$$

Воно допускає алгебру інваріантності: $<P_0, P_1, P_2, J_0, J_1, J_2, D_1, D_2>$, де

$$P_0 = \partial_0 , \quad P_1 = \partial_1 , \quad P_2 = \partial_u ,$$

$$J_0 = x_0\partial_u , \quad J_1 = x_1\partial_u , \quad D_1 = x_1\partial_1 ,$$

$$D_2 = x_0\partial_0 + 2u\cdot\partial_u \ . \qquad (2.2.20)$$

Ліївська симетрія рівняння (2.2.19) породжує відповідну формулу розмноження розв'язків:

$$\overset{(2)}{u} = e^{-2b}\Big\{\overset{(1)}{u}(e^{b}\cdot x_0 + \theta_0;\ e^{a}\cdot x_1 + \theta_1) +$$

$$+ \text{æ}_0 x_0 + \text{æ}_1 x_1 + \theta_2\Big\} \ . \qquad (2.2.21)$$

a, b, æ_k, θ_γ, $(k = 0,1;\ \gamma = \overline{0,3})$ – групові параметри. Один з частинних розв'язків рівняння (2.2.19) має вигляд

$$\overset{(1)}{u}(x_0, x_1) = \frac{1}{2}\ x_0^2\cdot \mathrm{cth}\ x_1 \ . \qquad (2.2.22)$$

Легко переконатися, що $\det\|\overset{(1)}{u}_{\mu\nu}\| \neq 0$, $(\mu,\nu = 0,1)$. Побудуємо новий розв'язок рівняння (2.2.19) за допомогою перетворення Лежандра (1.1.28). Перепишемо розв'язок (2.2.22) у формі, де x_μ замінені параметрами τ_μ, $(\mu = 0,1)$, тобто

$$\overset{(1)}{u} = \frac{1}{2}\ \tau_0^2\cdot \mathrm{cth}\ \tau_1 ,$$

і скористаємось формулою (2.2.13). Одержуємо систему

$$\overset{(2)}{u} = \frac{1}{2}\ \tau_0^2\cdot \mathrm{cth}\ \tau_1 - \frac{1}{2}\ \tau_0^2\tau_1\cdot \mathrm{sh}^{-2}\tau_1 \ ,$$

$$\tau_0\cdot \mathrm{cth}\ \tau_1 = x_0 \ ,$$

$$-\frac{1}{2}\ \tau_0^2\cdot \mathrm{sh}^{-2}\tau_1 = x_1 \ . \qquad (2.2.23)$$

Виключимо параметри із системи (2.2.23). Виразимо τ_μ через x_μ з двох останніх рівнянь системи. Маємо

$$-\frac{1}{2}\ x_0^2\ x_1^{-1} = \mathrm{ch}^2\ \tau_1 ,$$

або

$$\mathrm{th}\ \tau_1 = x_0^{-1}\sqrt{x_0^2 + 2x_1} \ ,$$

$$\tau_0 = \sqrt{x_0^2 + 2x_1} \ .$$

Підставивши τ_μ в першу рівність системи (2.2.23), знаходимо

$$\overset{(2)}{u}(x_0, x_1) = \tfrac{1}{2} x_0^2 \left\{ x_0^{-1} \sqrt{x_0^2 + 2x_1} \right\} +$$

$$x_1 \operatorname{arcth} \left\{ x_0^{-1} \sqrt{x_0^2 + 2x_1} \right\} . \qquad (2.2.24)$$

Позначимо

$$\left[1 + 2x_0^{-2} x_1 \right]^{\frac{1}{2}} \equiv \omega .$$

Розв'язок $\overset{(2)}{u}$ тепер має вигляд

$$\overset{(2)}{u} = \tfrac{1}{2} x_0^2 \omega + x_1 \operatorname{arcth} \omega . \qquad (2.2.25)$$

Легко перевірити, що функція (2.2.24) задовольняє рівняння (2.2.19). Відмітимо, що цей розв'язок не можна побудувати з (2.2.22) розмноженням його за формулою (2.2.21). Використаємо формулу ліївського розмноження розв'язків (2.2.21) для багатопараметричного розмноження формули (2.2.13) у випадку рівняння (2.2.19):

$$\left| \begin{array}{ll} \overset{(2)}{u}(x_0, x_1) = \tau_0 e^{-2b} \left\{ \overset{(1)}{u_0} e^{b} + æ_0 \right\} + \tau_1 e^{-2b} \left\{ \overset{(1)}{u_1} e^{a} + æ_1 \right\} - & \\ - e^{-2b} \left\{ \overset{(1)}{u}(e^{b}\tau_0 + \theta_0 ; \ e^{a}\tau_1 + \theta_1) + æ_0 \tau_0 + æ_1 \tau_1 + \theta_2 \right\} , & (2.2.26) \\ x_0 = e^{-2b} \left\{ \overset{(1)}{u_0} e^{b} + æ_0 \right\} , & (2.2.27) \\ x_1 = e^{-2b} \left\{ \overset{(1)}{u_1} e^{a} + æ_1 \right\} , & (2.2.28) \end{array} \right.$$

Приклад 2.2.3. Розглянемо лежандр- інваріантне рівняння в просторі $\mathbb{R}(1, n-1)$

$$u_\mu u^\mu + x^2 + c = 0 , \qquad (\mu = \overline{0, n-1}). \qquad (2.2.29)$$

c - довільна стала. Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (2.2.29) є алгебра $\langle P_0, J_{0a}, J_{ab} \rangle$:

$$P_0 = \partial_0 , \qquad J_{0a} = x_a \partial_0 + x_0 \partial_a , \qquad (2.2.30)$$

$$J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a , \ (a, b = \overline{1, n-1})$$

Анзац ([123]) вигляду

$$u = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = x^2, \quad \omega_2 = (\beta_\mu x^\mu)^2 + (\gamma_\mu x^\mu)^2,$$

$$\beta^2 = \gamma^2 = -1, \quad \beta\gamma = 0, \quad x^2 \equiv x_\mu x^\mu \qquad (2.2.31)$$

редукує рівняння (2.2.29) до ДРЧП першого порядку з двома незалежними змінними

$$\omega_1 \varphi_1^2 - \omega_2 \varphi_2^2 + 2\omega_2 \varphi_1 \varphi_2 + \frac{1}{4}(\omega_1 + c) = 0. \qquad (2.2.32)$$

Розв'язок рівняння (2.2.32) будуємо за допомогою перетворення Лежандра

$$z = \omega_1 \varphi_1 + \omega_2 \varphi_2 - \varphi,$$
$$y_1 = \varphi_1, \qquad y_2 = \varphi_2. \qquad (2.2.33)$$

При цьому рівняння (2.2.32) зводиться до лінійного

$$\left[y_1^2 + \frac{1}{4}\right] z_1 - (y_2 - 2y_1 y_2) z_2 + \frac{1}{4} c = 0. \qquad (2.2.34)$$

Загальний розв'язок рівняння (2.2.34) є таким:

$$z = \Phi\left[2\operatorname{arctg} 2y_1 - 2\operatorname{arctg} 2(y_1 - y_2)\right] - \frac{1}{2} c \cdot \operatorname{arctg} 2y_1. \qquad (2.2.35)$$

Тут Φ – довільна гладка функція.

Загальний розв'язок рівняння (2.2.32) одержуємо, обернувши перетворення (2.2.33):

$$\varphi = y_1 z_1 + y_2 z_2 - z,$$
$$\omega_1 = z_1, \qquad \omega_2 = z_2.$$

Підставимо z із (2.2.35) в знайдені вище рівняння. Маємо

$$\omega_1 = \dot{\Phi} \cdot \left[\frac{1}{y_1^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{(y_1 - y_2)^2 + \frac{1}{4}}\right] - \frac{1}{4} \cdot \frac{c}{y_1^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\omega_2 = \dot{\Phi} \cdot \frac{1}{(y_1 + y_2)^2 + \frac{1}{4}}.$$

$$\varphi = y_1 \omega_1 + y_2 \omega_2 - \Phi + \frac{1}{2} c \cdot \operatorname{arctg} 2y_1.$$

Тут y_1, y_2 відіграють роль параметрів і повинні бути виключеними з системи для одержання розв'язку $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ у явному вігляді.

Для того щоб продемонструвати процес розмноження розв'язків рівняння (2.2.29), виберемо Φ у найпростішому вигляді $\Phi(\alpha) = k\cdot\alpha$, де k – довільна стала.

Тоді

$$z = 2k\left[\operatorname{arctg} 2y_1 - \operatorname{arctg} 2(y_1 - y_2)\right] - \frac{1}{2} c\cdot\operatorname{arctg} 2y_1 .$$

Відповідний цьому частинний розв'язок $\overset{(1)}{u}$ рівняння (2.2.29) має вигляд

$$\overset{(1)}{u} = (\omega_1 + \omega_2)\sqrt{\frac{k - \frac{1}{4}c}{\omega_1 + \omega_2} - \frac{1}{4}} - \omega_2\cdot\sqrt{\frac{k}{\omega_2} - \frac{1}{4}} -$$

$$- 2\left[k - \frac{1}{4}c\right]\operatorname{arctg} 2\sqrt{\frac{k - \frac{1}{4}c}{\omega_1 + \omega_2} - \frac{1}{4}} +$$

$$+ 2k\cdot\operatorname{arctg} 2\sqrt{\frac{k}{\omega_2} - \frac{1}{4}} . \qquad (2.2.36)$$

Записавши $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ з ω_1 та ω_2, що визначені рівностями (2.2.31), в змінних τ_μ і виконавши потім перетворення Лежандра (1.1.28), одержуємо другий розв'язок рівняння (2.2.29).

$$\overset{(2)}{u}(x_0, x_1) = \left[4\left[k - \frac{1}{4}c\right] - \omega_1 - \omega_2\right]\sqrt{\frac{k - \frac{1}{4}c}{4\left[k - \frac{1}{4}c\right] - \omega_1 - \omega_2} - \frac{1}{4}} -$$

$$- \left[4k - \omega_2\right]\sqrt{\frac{k}{4k - \omega_2} - \frac{1}{4}} - 2\left[k - \frac{1}{4}c\right]\cdot$$

$$\cdot\operatorname{arctg} 2\sqrt{\frac{k - \frac{1}{4}c}{4\left[k - \frac{1}{4}c\right] - \omega_1 - \omega_2} - \frac{1}{4}} +$$

$$+ 2k\cdot\operatorname{arctg} 2\sqrt{\frac{k}{4k - \omega_2} - \frac{1}{4}} , \qquad (2.2.37)$$

$$\omega_1 = \tau_\mu\tau^\mu = \tau^2; \qquad \omega_2 = \left[\beta_\mu\tau^\mu\right]^2 + \left[\gamma_\mu\tau^\mu\right]^2 ,$$

$$\beta^2 = \gamma^2 = -1, \qquad \beta\gamma = 0 , \qquad (\mu = \overline{0,n-1}) .$$

При $\Phi = 0$ в розв'язку (2.2.35) рівняння (2.2.34) маємо

$$\overset{(1)}{u}(x_0, x_1) = -\frac{1}{2}\,\omega_1\sqrt{\frac{c}{\omega_1} - \frac{1}{4}} + c\cdot\mathrm{arctg}\, 2\sqrt{\frac{c}{\omega_1} - \frac{1}{4}} ;$$

$$\overset{(2)}{u}(x_0, x_1) = (c - \omega_1)\sqrt{\frac{\omega_1}{c - \omega_1}} - c\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\omega_1}{c - \omega_1}} ;$$

$$\omega_1 = \tau_\mu\tau^\mu = \tau^2 , \qquad (\mu = 0,1) . \qquad (2.2.38)$$

Якщо скористатися інваріантами рівняння (2.2.29)

$$\omega_1 = \alpha_\mu x^\mu ; \qquad \omega_2 = x_\mu x^\mu = x^2 ,$$

знаходимо розв'язок

$$\overset{(2)}{u}(x_0, x_1) = \overset{(1)}{u}(x_0, x_1) = -\omega_1\sqrt{\omega_1^2 - \omega_2} , \qquad (2.2.39)$$

інваріантний відносно перетворення Лежандра.

Приклад 2.2.4. Рівняння в $\mathbb{R}(1,n-1)$

$$\det\|u_{\mu\nu}\|\cdot\Box u + \mathrm{Slid}(u_{\mu\nu}) = 0 \qquad (2.2.40)$$

є інваріантним відносно перетворення Лежандра (1.1.28). Анзац

$$u = \varphi(\omega) , \qquad \omega = x_\mu x^\mu = x^2 \qquad (2.2.41)$$

редукує рівняння (2.2.40) до ЗДР

$$8\dot\varphi\,\ddot\varphi^2 + \omega\cdot\ddot\varphi\left[4(n+1)\dot\varphi^2 + 1 - n\right] + 2n\cdot\dot\varphi^3 - n\cdot\dot\varphi = 0 . \qquad (2.2.42)$$

За формулою (2.2.13) з розв'язку (2.2.41), записаного у параметричному вігляді

$$\overset{(1)}{u} = \varphi(\tau^2); \qquad \tau^2 = \tau_\mu\tau^\mu , \qquad (\mu = \overline{0,n-1}) ,$$

одержуємо новий розв'язок

$$\overset{(2)}{u} = \tau_\mu\varphi_\mu(\tau^2) - \varphi(\tau^2) ,$$

$$\varphi_\mu(\tau^2) = x_\mu . \qquad (2.2.43)$$

З цієї системи знаходимо

$$\varphi_\mu = 2\tau_\mu \cdot \dot{\varphi}(\tau^2) ,$$

$$x^2 = \varphi_\mu^2 = 4\tau^2 \cdot \dot{\varphi}^2(\tau^2) .$$

Припустимо, що останнє співвідношення може бути розв'язано відносно τ^2. Позначимо $\tau^2 = \phi(x^2)$. Тоді формула (2.2.43) стає такою :

$$\overset{(2)}{u} = \frac{1}{2} x^2 \left[\dot{\varphi}\left[\phi(x^2)\right]\right]^{-1} - \varphi\left[\phi(x^2)\right] .$$

Усі знайдені вище розв'язки нелінійних ДР можна розмножити за допомогю відповідних груп їх ліївських симетрі (див. наприклад [123]).

Із матеріалу даного параграфа випливає, що до класів ДР, інваріантних відносно перетворень Ейлера-Ампера та Лежандра, входять класи багатовимірних нелінійних рівнянь гіперболічного та параболічного типів. Вони мають або можуть знайти застосування у відповідних задачах математичної фізики. Ця нова нелокальна симетрія ДР, якщо вона доповнює ліївську, може бути використана для подальшої класифікації таких рівнянь. Вона може бути реалізована у вигляді формул розмноження розв'язків (2.2.12), (2.2.13), які досить прості і мають конструктивний характер.

Розглянуті приклади дозволяють зробити висновок про високу ефективність алгоритму побудови нових розв'язків по відомих. В силу будови перетворень Ейлера - Ампера та Лежандра нові розв'язки мають, як правило, неявну параметричну форму запису.

Результати цього параграфа опубліковані в роботах [184, 186,249].

§3. Формули розмноження розв'язків нелінійних хвильових рівнянь

У даному параграфі розглянуті ДР нелінійної теплопровідності, рівняння типу Гарі – Діма та КдФ, а також рівняння нелінійної теорії поширення хвиль та Шредінгера. Для цих рівнянь нелокальна симетрія використовується для побудови нових розв'язків по відомих. Дані доведення відповідних формул розмноження розв'язків. Нелокальні симетрії вищих порядків деяких рівнянь використані для побудови ланцюжків їх частинних розв'язків. Наведено богато прикладів розмноження частинних розв'язків нелінійних рівнянь, в яких використовуються як нелокальні так і їх ліївські симетрії.

I. Рівняння нелінійної теплопровідності, які розглянуті нижче – це рівняння Бюргерса та рівняння класу $u_0=(c(u)u_1)_1$.

1. Широко відомо [1,100], що рівняння Бюргерса

$$L_1 \equiv u_0 + uu_1 - u_{11} = 0 \qquad (2.3.1)$$

має т.з. автоперетворення Беклунда (АПБ), яке звичайно зображають у вигляді

$$\overset{(1)}{u}_1 = -\frac{1}{2}\overset{(2)}{u}\overset{(1)}{u} + \frac{1}{2}\overset{(1)}{u}{}^2 , \qquad (2.3.2a)$$

$$\overset{(1)}{u}_0 = -\frac{1}{2}\left[\overset{(2)}{u}_1 - \frac{1}{2}\overset{(2)}{u}{}^2\right] - \frac{1}{4}\overset{(2)}{u}\overset{(1)}{u}{}^2 . \qquad (2.3.2б)$$

Подивимось на ці рівняння з точки зору розмноження розв'язків рівняння (2.3.1). Тоді співвідношення (2.3.2a) краще записати інакше, а саме у вигляді:

$$\overset{(2)}{u} = -2\cdot\left[\ln|\overset{(1)}{u}|\right]_1 + \overset{(1)}{u} . \qquad (2.3.3)$$

Тут $\overset{(1)}{u} \neq 0$. Формула (2.3.3), очевидно, краще пристосована для розмноження розв'язків: якщо маємо розв'язок $\overset{(1)}{u}$ за формулою (2.3.3), можна безпосередньо побудувати розв'язок $\overset{(2)}{u}$. Повторне застосування цього ж перетворення приводить до формули

$$\overset{(3)}{u} = (-2)\left[\frac{\overset{(1)}{u}_1^{\,2} + \frac{1}{2}\overset{(1)}{u}_1\overset{(1)}{u}^{2} - \overset{(1)}{u}\overset{(1)}{u}_{11}}{\frac{1}{2}\overset{(1)}{u}^{3} - \overset{(1)}{u}\overset{(1)}{u}_1} + \frac{\overset{(1)}{u}_0}{\overset{(1)}{u}} - \frac{1}{2}\overset{(1)}{u}\right]. \quad (2.3.4)$$

Отже, формула (2.3.4) є представленням нелокальної симетрії другого порядку рівняння (2.3.1).

Скористаємось формулою (2.3.3) для розмноження декількох найпростіших розв'язків рівняння (2.3.1). Маємо

а) $\overset{(1)}{u} = \lambda \longrightarrow \overset{(2)}{u} = \lambda$, $(\lambda = \mathrm{const})$;

б) $x_0^{-1}x_1 \longrightarrow x_0^{-1}x_1 - 2x_1^{-1} \longrightarrow \dfrac{x_1(6x_0 - x_1^2)}{x_0(2x_0 - x_1^2)} \ldots;$

в) $k\cdot \mathrm{tg}\left\{k(x_1 - ax_0)\right\} + \frac{1}{2}a \longrightarrow k\cdot \mathrm{tg}\left\{k(x_1 - ax_0)\right\} +$

$+ \frac{1}{2}a - 4k^2\left[k\cdot\sin^{-1}\left\{2k(x_1 - ax_0)\right\} + \cos^2\left\{k(x_1 - ax_0)\right\}\right]^{-1} \ldots$.

Тут $k = \left[b - \frac{1}{4}a\right]^{\frac{1}{2}}$, a, b – довільні сталі параметри. В четвертому розділі буде доведено, що нелокальна симетрія (2.3.3) є наслідком нелокальної симетрії відповідного лінійного рівняння. Співвідношення (2.3.3) є нелокальним перетворенням залежної змінної (див. §1, розділ I), яке встановлює рівність (1.2.10), що зв'язує між собою рівняння $L_1(\overset{(1)}{u})$ та $L_1(\overset{(2)}{u})$:

$$L_1(\overset{(2)}{u}) = \left[-2\overset{(1)}{u}^{-1}\partial_1 + 2\overset{(1)}{u}^{-2}\overset{(1)}{u}_1 + 1\right]L_1(\overset{(1)}{u}) \quad . \quad (2.3.2в)$$

Формули перетворення Беклунда [1]

$u_1 = -2v^{-1}v_1 + \frac{1}{2}u^2$,

$$u = -2\,v^{-1}v_1\ . \qquad (2.3.5)$$

зв'язують рівняння (2.3.1) з лінійним тепловим рівнянням $v_0 - v_{11} = 0$. Позначимо в (2.3.5) $v \equiv \tau$. Із формули (2.3.3) та системи (2.3.5) одержуємо формулу розмноження розв'язків рівняння (2.3.1), яку запишемо за допомогою функціонального параметра у вигляді

$$\begin{cases} \overset{(2)}{u} = 4\,\overset{(1)}{u}{}^{-1}\cdot\partial_0 \ln\tau\,, \\ \tau_1 + \frac{1}{2}\overset{(1)}{u}\cdot\tau = 0\,, \qquad \tau \neq 0\,, \\ \tau_0 - \tau_{11} = 0\,, \qquad \overset{(1)}{u} \neq 0\,. \end{cases} \qquad (2.3.6)$$

Ця формула дозволяє побудувати знов ланцюжок розв'язків б). Обмеження $\overset{(1)}{u} \neq 0$ можна зняти, якщо використовувати інший алгоритм розмноження розв'язків рівняння (2.3.1):

$$\begin{cases} \overset{(2)}{u} = -2\,\tau_2^{-1}\partial_1\tau_1\,, \qquad \tau = (\tau_1,\tau_2)\,, \\ \partial_1\tau_1 + \frac{1}{2}\overset{(1)}{u}\,\tau_1 = 0\,, \\ \tau_1 = \partial_1\tau_2\,, \\ \partial_1\tau_1 = \partial_0\tau_2\,. \end{cases} \qquad (2.3.7)$$

З використанням алгоритму (2.3.7) одержуємо

$$0 \longrightarrow -\frac{2c_1}{c_1x_1 + c_2} \longrightarrow \ldots,$$

$$\lambda \longrightarrow \lambda\cdot\frac{\exp\left\{\frac{1}{4}\lambda^2x_0 - \frac{1}{2}x_1\right\}}{c_1 + \exp\left\{\frac{1}{4}\lambda^2x_0 - \frac{1}{2}x_1\right\}} \longrightarrow \ldots\ .$$

c_i, $(i=1,2)$ – довільні сталі.

2. Розглянемо одновимірне рівняння нелінійної теплопровідності

$$L_1 \equiv u_0 - \partial_1 \left[c(u) u_1 \right] = 0 \ . \tag{2.3.8}$$

Відомо [210, 211], що ланцюжок перетворень

$$u(x_0, x_1) = v_1(x_0, x_1) \ , \tag{2.3.9}$$

$$x_0 = y_0 \ , \quad x_1 = w \ , \quad v = y_1 \ , \tag{2.3.10}$$

$$w_1 \equiv \partial_{y_1} w = z(y_0, y_1) \tag{2.3.11}$$

не виводить рівняння, яке належить до класу (2.3.8), за межі цього класу. Тобто, послідовність перетворень (2.3.9) – -(2.3.11) зводить рівняння до форми

$$z_0 - \partial_1 \left[\tilde{c}(z) z_1 \right] = 0 \ , \qquad z = z(y_0, y_1) \ . \tag{2.3.12}$$

Тут

$$\tilde{c}(z) = z^{-2} \cdot c(z^{-1}) \ . \tag{2.3.13}$$

Якщо поставити вимогу інваріантності рівняння (2.3.8) відносно перетворень (2.3.9)-(2.3.11), знаходимо таке обмеження на вигляд функції $c(u)$:

$$c(u) = u^{-2} \cdot c(u^{-1}) \ . \tag{2.3.14}$$

Розв'язок цього функціонального рівняння є таким:

$$c(u) = u^{-1} \cdot \varphi(\ln u) \ . \tag{2.3.15}$$

Тут φ – довільна парна і гладка функція. Звідси випливає твердження.

Теорема 2.3.I. Рівняння (2.3.8) є інваріантним відносно нелокальних перетворень (2.3.9)-(2.3.11) тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд

$$u_0 - \partial_1 \left[u^{-1} \cdot \varphi(\ln u) \cdot u_1 \right] = 0 \ , \qquad \varphi(-t) = \varphi(t) \tag{2.3.16}$$

з φ – довільною парною і гладкою функцією. □

Доведення. Необхідність умови (2.3.16) випливає із (2.3.14). Справді:

$$u_0 = \partial_1\left[c(u)u_1\right] \xrightarrow{u=v_1} v_0 = c(v_1)v_{11} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{(2.3.10)} w_0 = w_1^{-2}c(w_1^{-1})w_{11} \xrightarrow{\partial_1}$$

$$\longrightarrow w_{10} = \partial_1\left[w_1^{-1}\cdot c(w_1^{-1})w_{11}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{w_1=z} z_0 = \partial_1\left[z^{-2}\cdot c(z^{-1})z_1\right].$$

Звідси одержуємо умову інваріантності $c(z) = z^{-2}\cdot c(z^{-1})$. Помножимо обидві частини цієї рівності на z

$$z\cdot c(z) = z^{-1}\cdot c(z^{-1}).$$

Позначимо $v = \ln z$. Тоді

$$c(e^v)e^v \equiv \varphi(v) = c(e^{-v})e^v = \varphi(-v).$$

Отже, φ необхідно є парною функцією. Повертаючись до змінної z, запишемо

$$c(z)z = \varphi(\ln z),$$

звідки знаходимо умову на $c(u)$

$$c(u) = u^{-1}\cdot\varphi(\ln u), \quad \varphi(-t) = \varphi(t).$$

Цим необхідність доведена.

Достатність умови (2.3.16) доведемо, якщо $c(u)$ із (2.3.15) підставимо в рівняння (2.3.8) і виконаємо в ньому перетворення (2.3.9)-(2.3.11). Отже

$$u_0 = \partial_1\left[u^{-1}\varphi(\ln u)u_1\right] \xrightarrow{u=v_1} v_0 = v_1^{-1}\varphi(\ln v_1)v_{11}$$

$$\xrightarrow{(2.3.10)} w_0 = w_1^{-1}\varphi(-\ln w_1)w_{11} \xrightarrow{\partial_1}$$

$$\longrightarrow w_{10} = \partial_1\left[w_1^{-1}\varphi(-\ln w_1)w_{11}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{w_1=z} z_0 = \partial_1\left[z^{-1}\varphi(\ln z)z_1\right].$$

Теорема доведена. ■

Скористаємось нелокальною симетрією (2.3.9) - (2.3.11) рівнянь класу (2.3.16) для побудови алгоритму розмноження розв'язків.

Теорема 2.3.2. Нехай рівняння належить класу (2.3.16), тоді розмноження його розв'язків за допомогою нелокальної симетрії (2.3.9) -(2.3.11) виконується за формулою

$$\begin{cases} \overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = \overset{(1)}{u}{}^{-1}(x_0,\tau), & \tau = \tau(x_0,x_1), \\ \tau_1 = \overset{(1)}{u}{}^{-1}(x_0,\tau), & \tau_\mu = \partial_\mu \tau, \\ \tau_0 = f(\ln \tau_1)\tau_1^{-1}\tau_{11} . \end{cases} \tag{2.3.17}$$

Тут $\tau(x_0,x_1)$ – функціональний параметр, $\overset{(1)}{u}(x_0,x_1)$ – відомий розв'язок рівняння з класу (2.3.16), $\overset{(2)}{u}(x_0,x_1)$ – новий розв'язок цього ж рівняння. □

Доведення. Позначимо $\varphi(\ln u) \equiv h(u)$. Тоді $c(u) = u^{-1}h(u)$ і із умови

$$u\cdot c(u) = u^{-1}c(u^{-1}) \tag{2.3.18a}$$

одержуємо важливу властивість функції $h(u)$:

$$h(u) = h(u^{-1}) . \tag{2.3.18}$$

В нових позначеннях рівняння (2.3.16) має вигляд

$$u_0 = \partial_1 \left[u^{-1}\cdot h(u)u_1\right] . \tag{2.3.19}$$

Перетворення (2.3.9)-(2.3.11) породжують такі співвідношення, (приймемо $z = \overset{(1)}{u}$):

$$\overset{(2)}{u} = \overset{(2)}{v}_1 = w_1^{1}(y_0,y_1) = \overset{(1)}{u}{}^{-1}(x_0,y_1) ,$$

$$\overset{(2)}{v}(x_0,x_1) = y_1 ; \qquad x_0 = y_0 ,$$

$$x_1 = w(y_0,y_1) ,$$

$$w_1(y_0,y_1) = \overset{(1)}{u}(y_0,y_1) . \tag{2.3.20}$$

Замінимо в (2.3.20) y_1 параметром τ. Тоді з першого рівняння відразу ж одержуємо перше співвідношення формули (2.3.17). Продиференціювавши передостанню рівність системи (2.3.20) по x_1, знаходимо

$$w_1 \cdot \tau_1 = 1 \ . \tag{2.3.21}$$

В силу останнього співвідношення системи (2.3.20) з формули (2.3.21) випливає друге рівняння системи (2.3.17)

$$\tau_1 = \overset{(1)}{u}{}^{-1}(x_0, \tau) \ . \tag{2.3.22}$$

Таким чином, залишилось одержати рівняння на параметр τ

$$\tau_0 = h(\tau_1)\tau_1^{-1}\tau_{11} \ . \tag{2.3.23}$$

Виключимо параметр із правої частини (2.3.23) за допомогою (2.3.22). Маємо

$$\tau_0 = u \cdot h(u^{-1})\left[\frac{-u_1}{u^3}\right], \qquad u \equiv \overset{(1)}{u} \ .$$

Тепер виконаємо перехресне диференціювання співвідношень (2.3.22) і (2.3.23) і порівняємо одержані результати: $\partial_0 \tau_1 = \partial_1 \tau_0$. Отже,

$$\frac{u_0}{u^2} + \frac{u_1}{u^2}\tau_0 = \tau_1 \partial_1 \left[u \cdot h(u^{-1}) \cdot \frac{u_1}{u^3}\right] .$$

Підставимо в це рівняння τ_0 та τ_1 з рівностей (2.3.22), (2.3.23) і скористаємось властивістю функції $h(u)$ (2.3.18). Знаходимо

$$\frac{u_0}{u^2} - \frac{u_1}{u^4} h(u) = u^{-1}\partial_1 \left[u^{-1}h(u)u_1\right]\tau_1 + $$
$$+ h(u)\frac{u_1}{u}\left[\frac{-u_1}{u^2}\right]\tau_1 \ . \tag{2.3.24}$$

Підставивши в (2.3.24) $\tau_1 = u^{-1}$, одержуємо рівняння $L_1(\overset{(1)}{u})=0$. Візмемо, нарешті, похідну по x_1 рівняння (2.3.23) та скористаємось тим, що $\overset{(2)}{u} = \tau$. Звідси випливає рівняння $L_1(\overset{(2)}{u}) = 0$. Теорема доведена. ■

Приклад 2.3.I За вихідний виберемо розв'язок

$$\overset{(1)}{u}(x_0, x_1) = x_0 \left[1 + \cos x_1\right]^{-1}$$

рівняння

$$u_0 = \partial_1 (u^{-1} u_1) . \qquad (2.3.25)$$

Безпосередньо перевіряється, що це рівняння міститься в класі (2.3.16). Новий розв'язок рівняння (2.3.25) будуємо за допомогою формули (2.3.17). Він є таким:

$$\overset{(2)}{u}(x_0, x_1) = 2x_0 \left[x_0^2 + x_1^2\right]^{-1} .$$

Зауважимо, що розв'язки $\overset{(1)}{u}$ та $\overset{(2)}{u}$ мають істотно відмінні властивості (обмеженість, періодичність, поводження в нульовій точці та ін.).

II. Твердження, аналогічні доведеним вище, встановлені для рівнянь Гарі-Діма та Кортевега- де Фріза, тобто для ДРЧП третього порядку.

1. Розглянемо класи еквівалентних рівнянь

$$u_0 - f(u) u_{111} = 0 , \qquad (2.3.26)$$

$$z_0 - \partial_1^3 \cdot c(z) = 0 \qquad (2.3.26a)$$

та клас рівнянь

$$w_0 - g(w_{11}) w_{111} = 0. \qquad (2.3.27)$$

Це нелінійне одновимірне рівняння третього порядку еволюційного типу. $f(u)$, $g(w_{11})$ - довільні гладкі функції,

$$c(z) = u . \qquad (2.3.28)$$

При цьому, очевидно, виконується рівність

$$f(u) = \dot{c}\left[[c]^{-1}(u)\right] .$$

Тут $[c]^{-1}(u)$-функція, обернена до $c(u)$. У тому випадку, коли $f(u) = u^3$, $c(z) = z^{-\frac{1}{2}}$, рівняння (2.3.26a) є відомим рівнянням Гарі- Діма [222]. Через те рівняння вігляду (2.3.26) назвемо рівняннями типу Гарі-Діма.

Виконаємо послідовність нелокальних перетворень рівняння (2.3.26a)

$$z_0 = \partial_1^3 c(z) = \partial_1^2 \left[\dot{c}(z) z_1\right] .$$

Підстановка

$$z = w_{11} \tag{2.3.29}$$

зводить (2.3.26a) до рівняння класу (2.3.27)

$$w_0 = \dot{c}(w_{11}) w_{111} . \tag{2.3.30}$$

Перетворенням Ейлера-Ампера в $\mathbb{R}(1,1)$

$$w = y_1 v_1 - v , \qquad (v_{11} \neq 0) , \tag{2.3.31}$$
$$x_1 = v_1 , \qquad x_0 = y_0 , \qquad (v = v(y_0, y_1))$$

рівняння (2.3.30) одержуємо

$$v_0 = \dot{c}(v_{11}^{-1}) v_{11}^{-3} v_{111} , \qquad (v = v(y_0, y_1)) . \tag{2.3.32}$$

Скористаємось заміною

$$v_{11} = z(y_0, y_1) \tag{2.3.33}$$

у продиференційованому двічі по y_1 рівнянні (2.3.32), приходимо знов до рівняння класу (2.3.26a)

$$z_0 = \partial_1^2 \left[\dot{c}(z^{-1}) z^{-3} z_1\right] . \tag{2.3.34}$$

Отже, послідовність перетворень (2.3.29), (2.3.31), (2.3.33) не виводить рівняння класу (2.3.26a) за межі цього класу. Кожне окреме рівняння із даного класу може не бути інваріантним по відношенню до цієї послідовності перетворень. Якщо виконана умова

$$\dot{c}(z) = \dot{c}(z^{-1}) z^{-3} , \tag{2.3.35}$$

рівняння (2.3.34) збігається з точністю до позначень змінних з вихідним рівнянням (2.3.26a).

Таким чином, рівняння (2.3.26a) з умовою на $c(z)$ (2.3.35) є інваріантним відносно послідовності нелокальних перетворень (2.3.29), (2.3.31), (2.3.33). Умова (2.3.35) дозволяє описати всі рівняння класу (2.3.26a), інваріантні відносно перетворень (2.3.29), (2.3.31), (2.3.33). Зробимо це у вигляді відповідного твердження.

Теорема 2.3.3. Рівняння (2.3.26a) інваріантне відносно перетворень (2.3.29), (2.3.31), (2.3.33) тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд

$$z_0 = \partial_1^2 \left[z^{-\frac{3}{2}} \cdot \varphi(\ln z) \cdot z_1 \right] . \tag{2.3.36}$$

Тут $\varphi(\cdot)$ – довільна гладка парна функція. □

Доведення. Необхідність умови (2.3.36) випливає з рівності (2.3.35). Справді, помножимо обидві частини цієї рівності на $z^{\frac{3}{2}}$. Одержуємо

$$\dot{c}(z^{-1}) z^{-\frac{3}{2}} = \dot{c}(z) z^{\frac{3}{2}} . \tag{2.3.37}$$

Виконаємо в (2.3.37) заміну

$$v = \ln z ,$$

$$\dot{c}(e^v)(e^v)^{\frac{3}{2}} = \varphi(v) . \tag{2.3.38}$$

Внаслідок цього співвідношення (2.3.37) обертається умовою на функцію φ:

$$\varphi(-v) = \varphi(v) ,$$

яка виражає властивість парності. З (2.3.38) випливає, що

$$\dot{c}(z) z^{\frac{3}{2}} = \varphi(\ln z) . \tag{2.3.39}$$

Проінтегрувавши (2.3.39), одержуємо

$$c(z) = \int z^{-\frac{3}{2}} \varphi(\ln z) dz ,$$

звідки зразу ж випливає (2.3.36). Достатність умови (2.3.36) доведемо, підставивши $c(z)$, що знайдено вище, в рівняння (2.3.26a). Потім виконаємо перетворення (2.3.29), (2.3.31), (2.3.33) рівняння (2.3.36). Внаслідок першого перетворення знаходимо

$$w_0 = w_{11}^{-\frac{3}{2}} \varphi(\ln w_{11}) w_{111} .$$

Виконаємо в цьому рівнянні перетворення Ейлера - Ампера (2.3.31). Маємо

$$v_0 = v_{11}^{-\frac{3}{2}} \varphi(\ln v_{11}) v_{111} .$$

Після двократного диференціювання цього рівняння зробимо підстановку $z = v_{11}$. Повертаємось знов до рівняння (2.3.36). Теорема доведена. ∎

З цієї теореми випливає ще одне твердження.

Наслідок 2.3.I. Рівняння (2.3.26) є інваріантним відносно перетворень (2.3.28), (2.3.29), (2.3.31), (2.3.33) тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд

$$u_0 = \left[[c]^{-1}(u)\right]^{-\frac{3}{2}} \cdot \varphi\left[\ln|[c]^{-1}(u)|\right] u_{111} . \qquad (2.3.40)$$

$[c]^{-1}(u)$, функція, обернена до $c(u)$, визначається формулою

$$u = \int z^{-\frac{3}{2}} \varphi(\ln z) dz . \qquad (2.3.41)$$

Приклад 2.3.2. З теореми 2.3.3 і наслідку 2.3.1 при $\varphi(t) = 1$ одержуємо інваріантні рівняння

$$z_0 = \partial_1^2 \left[- \tfrac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} \cdot z_1\right] = \partial_1^3 \left[z^{-\frac{1}{2}}\right] , \qquad (2.3.42)$$

$$u_0 = u^3 \cdot u_{111} . \qquad (2.3.43)$$

Отже, (2.3.42) - це відоме рівняння Гарі-Діма [222]. Якщо

$\varphi(t) = \cos t$, одержуємо рівняння

$$z_0 = \partial_1^2\left[z^{-\frac{3}{2}}\cdot \cos\left\{\ln z\right\}\cdot z_1\right] \qquad (2.3.44)$$

та відповідне рівняння класу (2.3.26)

$$u_0 = \left[[c]^{-1}(u)\right]^{-\frac{3}{2}}\cdot\cos \ln|[c]^{-1}(u)|\cdot u_{111} \; . \qquad (2.3.45)$$

Тут $[c]^{-1}(u)$ визначається неявно формулою

$$u = \frac{4}{5}\left[\sin \ln z - \frac{1}{2}\cos \ln z\right]\cdot z^{-\frac{1}{2}} \; . \qquad (2.3.46)$$

Таким чином, нами, зокрема, встановлено, що рівняння Гарі-Діма та зв'язані з ним рівняння

$$u_0 = u^3 u_{111} \; , \qquad (2.3.47)$$

$$z_0 = \partial_1^3\left[z^{-\frac{1}{2}}\right] , \qquad (2.3.48)$$

$$w_0 = w_{11}^{-\frac{3}{2}}\, w_{111} \qquad (2.3.49)$$

є інваріантними відносно відповідних нелокальних перетворень.

Для рівнянь класу (2.3.40) можна записати формулу розмноження розв'язків. Нехай $\overset{(1)}{u}(x_0,x_1)$ – відомий частинний розв'язок нелінійного рівняння (2.3.40), а $\overset{(2)}{u}(x_0,x_1)$ – новий розв'язок цього рівняння, тоді є вірним таке твердження.

Теорема 2.3.4. Якщо рівняння (2.3.40), належить класу (2.3.40), то розмноження його розв'язків, породжене нелокальною симетрією (2.3.28),(2.3.29), (2.3.31), (2.3.33), (2.3.28), виконується за формулою

$$\left\{\begin{aligned} &\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = \left[x_1\tau - \int\left[\int \overset{(1)}{u}{}^{-2}(x_0,\tau)d\tau\right]d\tau\right]^{\frac{1}{2}}, && (2.3.50а)\\ &\qquad = \overset{(1)}{u}{}^{-2}(x_0,\tau), && (2.3.50б)\\ &x_1 = \int \overset{(1)}{u}{}^{-2}(x_0,\tau)d\tau, && (2.3.50в)\\ &\tau_0 - \partial_1\left[\tau_1^{-\frac{3}{2}}\cdot\tau_{11}\right] = 0. && (2.3.50г)\end{aligned}\right.$$

Доведення теореми 2.3.4. З перетворення $\overset{(1)}{u} = v_{11}^{-\frac{1}{2}}(y_0,y_1)$ випливає, що

$$v_{11} = \overset{(1)}{u}{}^{-2}(y_0,y_1).$$

Звідси знаходимо

$$v(y_0,y_1) = \int\left[\int \overset{(1)}{u}{}^{-2}(y_0,y_1)dy_1\right]dy_1 \qquad (2.3.51)$$

Перетворення Ейлера-Ампера (2.3.51) має диференціальним наслідком співвідношення

$$w_{11}(x_0,x_1) = v_{11}^{-1}(y_0,y_1),$$

що дозволяє записати такі рівності:

$$\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = w_{11}^{-\frac{1}{2}}(x_0,x_1) = v_{11}^{\frac{1}{2}}(y_0,y_1) = \overset{(1)}{u}{}^{-1}(y_0,y_1).$$

Позначимо $y_1 = \tau$. Одержуємо формули (2.3.50 а,б). Для того, щоб знайти співвідношення (2.3.50в), підставимо v з формули (2.3.51) в рівність $x_1 = v_1(y_0,y_1)$. Після ототожнення $y_1 = \tau$ дістаємо (2.3.50в). Нам залишилось тепер одержати рівняння (2.3.50г), яке дозволяє уточнити одержане значення пара- параметра τ. З формули (2.3.50б) знаходимо

$$\overset{(1)}{u}_0(x_0,\tau) = -\overset{(1)}{u}{}^{-2}(\overset{(1)}{u}_0 + \tau_0\overset{(1)}{u}_\tau),$$

$$\overset{(1)}{u}_1 = -\overset{(1)}{u}_\tau,$$

$$\overset{(1)}{u}_{11} = -\tau_1 \overset{(1)}{u}_{\tau\tau} ,$$

$$\overset{(1)}{u}_{111} = -\tau_1^2 \overset{(1)}{u}_{\tau\tau\tau} - \tau_{11} \overset{(1)}{u}_{\tau\tau} .$$

В свою чергу з формули (2.3.50в) випливає $\tau_1 = \overset{(1)}{u}{}^2(x_0,\tau)$, звідки знаходимо

$$\overset{(1)}{u}_\tau = \frac{1}{2} \tau_1^{-\frac{3}{2}} \cdot \tau_{11} . \qquad (2.3.52)$$

Підставивши одержані вище вирази для $\overset{(1)}{u}$, $\overset{(1)}{u}_1$, $\overset{(1)}{u}_{11}$, $\overset{(1)}{u}_{111}$ в рівняння (2.3.40), приходимо до співвідношення для τ_0

$$\tau_0 = \overset{(1)}{u}{}^{-1} \overset{(1)}{u}_\tau{}^{-1} \cdot \tau_{11} \overset{(1)}{u}_{\tau\tau} . \qquad (2.3.53)$$

Скористаємось тим, що із (2.3.52) випливає рівність

$$\overset{(1)}{u}_{\tau\tau} = \tau_1^{-1} \cdot \partial_1 \left[\frac{1}{2} \tau_1^{-\frac{3}{2}} \cdot \tau_{11} \right] . \qquad (2.3.54)$$

Підставивши тепер у формулу (2.3.53) похідні $\overset{(1)}{u}_\tau$, $\overset{(1)}{u}_{\tau\tau}$ з (2.3.52) та (2.3.54), одержуємо рівняння (2.3.50г). Отже, теорема доведена. ■

Продемонструємо ефективність формули (2.3.50) для рівняння (2.3.47) на прикладі.

Приклад 2.3.3. Розв'язком рівняння (2.3.47) є функція

$$\overset{(1)}{u}(x_0,x_1) = \frac{1}{4} (\lambda_1 - x_1)^2 .$$

λ_1 – довільна стала. Із співвідношень (2.3.50 б,в) випливає, що

$$\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = 4 (\lambda_1 - \tau)^{-2} ,$$

$$x_1 = \frac{16}{3} (\lambda_1 - \tau)^{-3} + \lambda_2(x_0) .$$

Розв'язавши останнє співвідношення відносно τ, знаходимо

$$\tau = h\left[x_1 - \lambda_2(x_0)\right]^{-\frac{1}{3}} + \lambda_1 , \quad h = -\left[\frac{3}{16}\right]^{-\frac{1}{3}} . \qquad (2.3.55)$$

Підставивши τ з (2.3.55) в умову (2.3.50г), одержуємо $\lambda_2=-1$. Отже,

$$\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = k(x_0+x_1)^{\frac{2}{3}} , \quad k = \left[\frac{3}{2}\right]^{\frac{2}{3}} .$$

2. Конструктивна і проста в застосуванні формула розмноження розв'язків для рівняння Кортевега – де Фріза (КдФ)

$$L_1(u) \equiv u_0 + 6uu_1 + u_{111} = 0 \qquad (2.3.56)$$

тісно зв'язана з відомим для цього рівняння АПБ [1]. Істотною відміною нашого підходу є вимога того, щоб новий розв'язок $\overset{(2)}{u}$ рівняння явно визначався розв'язком $\overset{(1)}{u}$ та похідними від нього довільного скінченого порядку. Отже, для рівняння (2.3.56) встановлено таке твердження.

Теорема 2.3.5. Нехай $\overset{(1)}{u}(x_0,x_1)$ є відомим розв'язком рівняння КдФ (2.3.56). Новий розв'язок $\overset{(2)}{u}(x_0,x_1)$ цього рівняння будується за формулою

$$\left\{\begin{array}{ll} \overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = -\overset{(1)}{u}(x_0,x_1) - 2\tau^2 , & (2.3.57а) \\ L_2 \equiv \tau_1 - \tau^2 - \overset{(1)}{u}(x_0,x_1) = 0 , \quad \tau = \tau(x_0,x_1) , & (2.3.57б) \\ L_3 \equiv \tau_0 - 6\tau^2\tau_1 + \tau_{111} = 0 . & (2.3.57в) \end{array}\right.$$

Рівняння (2.3.57б,в) сумісні тоді і тільки тоді, коли $\overset{(1)}{u}(x_0,x_1)$ є розв'язком рівняння КдФ. ▫

Доведення. За допомогою формули (2.3.57а) обчислимо похідні функції $\overset{(2)}{u}(x_0,x_1)$. Знайдені вирази для похідних $\overset{(2)}{u}_0$, $\overset{(2)}{u}_1$, $\overset{(2)}{u}_{111}$ підставимо в рівняння (2.3.56). З врахуванням співвідношень (2.3.57б,в) це дає рівність:

$$L_1(\overset{(2)}{u}) = \lambda_1 \cdot L_1(\overset{(1)}{u}) + \lambda_2 L_2(\tau, \overset{(1)}{u}) + \lambda_3 L_3(\tau),$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 12(\tau_{11} + \tau_1 \partial_1), \quad \lambda_3 = -2\partial_1 .$$

Умова сумісності рівнянь (2.3.57 б,в) має вигляд

$$\tau_{10} - \tau_{01} = k_1 L_1(\overset{(1)}{u}) + k_2 L_2(\tau, \overset{(1)}{u}) + k_3 L_3(\tau),$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = \partial_1^3 + 6\overset{(1)}{u}\partial_1 + 6\tau_{11} - 12\tau\tau_1, \quad k_3 = 2\tau .$$

Із одержаних результатів безпосередньо випливає твердження теореми 2.3.5. ■

Підкреслимо, що рівняння (2.3.57б) є рівнянням Ріккаті і ця обставина відкриває великі можливості побудови широких наборів точних розв'язків рівняння КдФ. Проілюструємо ефективність формули (2.3.57) на найпростіших прикладах.

Приклад 2.3.4. Очевидно, що стала

$$\overset{(1)}{u} = \lambda = \mathrm{const}$$

є розв'язком рівняння (2.3.56). Отже, за формулою (2.3.57а) знаходимо

$$\overset{(2)}{u} = \lambda - 2\tau_1 .$$

Для того, щоб у явному вигляді одержати $\overset{(2)}{u}$, необхідно розв'язати рівняння Ріккаті

$$\tau_1 = \tau^2 + \lambda . \tag{2.3.58}$$

Можливі три випадки: $\lambda = 0$, $\lambda = -1$, $\lambda = 1$. Розглянемо докладно перший випадок. Загальний розв'язок рівняння (2.3.58) має вигляд

$$\tau = -\left[x_1 + c(x_0)\right]^{-1}, \tag{2.3.59}$$

де $c(x_0)$ – стала інтегрування по x_1, яку необхідно визначати з умови (2.3.57в). Підставивши (2.3.59) у це рівняння, знаходимо $\dot{c} = 0$. Оскільки рівняння (2.3.58) є інваріантним відносно трансляцій по x_1, то не обмежуючи загальності, можна покласти $c = 0$. Таким чином, з очевидного тривіального розв'язку $\overset{(1)}{u} = 0$ за формулою (2.3.57б) знаходимо стаціонарний розв'язок $\overset{(2)}{u} = -2x_1^{-1}$ рівняння КдФ. Повторимо цю процедуру ще раз

$$\overset{(3)}{u} = \overset{(2)}{u} - 2\tau_1 \ . \tag{2.3.60a}$$

Тут

$$\tau_1 = \tau^2 + \overset{(2)}{u} \ , \tag{2.3.60б}$$

$$\tau_0 - 6\tau^2\tau_1 + \tau_{111} = 0 \ . \tag{2.3.60в}$$

Розв'язком рівняння Ріккаті (2.3.60б) є функція

$$\tau = \frac{c(x_0) - 2x_1^3}{x_1\left[c(x_0)+x_1^3\right]} \ . \tag{2.3.61}$$

Підставивши (2.3.61) в (2.3.60в), знаходимо $\dot{c} = 12$. Тоді

$$\overset{(3)}{u} = \frac{6(24x_0x_1 - x_1^4)}{(12x_0 + x_1^3)^2} \ . \tag{2.3.62}$$

Якщо продовжити цей процес, то на n-ому кроці одержимо формулу

$$\overset{(n+1)}{u} = \overset{(n)}{u} - 2\cdot \overset{(n)}{\tau_1} \ , \tag{2.3.63a}$$

$$\overset{(n)}{\tau_1} = \overset{(n)}{\tau}{}^2 + \overset{(n)}{u} \ , \tag{2.3.63б}$$

$$\overset{(n)}{\tau_0} - 6\cdot \overset{(n)}{\tau}{}^2 \overset{(n)}{\tau_1} + \tau_{111} = 0 \ . \tag{2.3.63в}$$

Основна трудність використання формул (2.3.63) полягає в тому, щоб розв'язати рівняння Ріккаті (2.3.63б). Однак, якщо $\overset{(1)}{u} = \lambda = \mathrm{const}$, то удається побудувати загальний розв'язок рівняння (2.3.63б) для довільного $\overset{(n)}{u}$, знайденого за формулою (2.3.63a)

$$\overset{(n)}{\tau} = -\overset{(n-1)}{\tau} - \overset{(n-1)}{v} \ , \tag{2.3.64}$$

$$\overset{(n+1)}{v} = -\partial_1 \left[\ln \left[\int \exp \left\{ 2 \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \int \overset{(m)}{v} \, dx_1 \right\} dx_1 + \overset{(n+1)}{C}(x_0) \right] \right], \quad (2.3.65)$$

$$(n = 0,1,2,\ldots,\ \overset{(0)}{v} = -\overset{(1)}{\tau}) .$$

(Доведення формул (2.3.64) та (2.3.65) див. у додатку II). Довизначимо функції $\overset{(n)}{\tau}$ відносно змінної x_0 за допомогою умови (2.3.63в). Тоді з (2.3.63а) маємо

$$\lambda \longrightarrow \lambda + 2\partial_1^2 \ln \overset{(1)}{w} \longrightarrow \lambda + 2\partial_1^2 \ln \overset{(2)}{w} \longrightarrow \ldots,$$

де $\partial \ln w = v$. Інакше

$$\overset{(2n)}{u} = \lambda + 2 \sum_{m=0}^{n} \overset{(2m)}{v_1}, \quad \overset{(2n+1)}{u} = \lambda + 2 \sum_{m=0}^{n} \overset{(2m+1)}{v_1}, \quad v_1 = \partial_1 v. \quad (2.3.66)$$

За даним алгоритмом, як бачимо вдається будувати нескинченні ланцюжки точних розв'язків рівняння К∂Ф, які породжуються яким-небудь довільним сталим вихідним розв'язком $\overset{(1)}{u} = \lambda$ цього рівняння. Використовуючи формули (2.3.65), (2.3.66), одержуємо ланцюжок розв'язків

$$0 \longrightarrow -\frac{2}{x_1^2} \longrightarrow \frac{6(24x_0 x_1 - x_1^4)}{(12x_0 + x_1^3)} \longrightarrow \ldots .$$

Аналогічно знаходимо ще два ланцюжки розв'язків

$$1 \longrightarrow 1 - \frac{2}{\cos^2(x_1 - 2x_0)} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 1 - \frac{16\left[(x_1 + 6x_0)\sin 2(x_1 - 2x_0) + \cos 2(x_1 - 2x_0) + 1\right]}{\left[2(x_1 + 6x_0) + \sin 2(x_1 - 2x_0)\right]^2} \longrightarrow \ldots ,$$

$$-1 \longrightarrow -1 + \frac{2}{\operatorname{ch}^2(x_1 + 2x_0)} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow -1 + \frac{16\left[(x_1 - 6x_0)\operatorname{sh} 2(x_1 + 2x_0) - \operatorname{ch} 2(x_1 + 2x_0) - 1\right]}{\left[2(x_1 - 6x_0) + \operatorname{sh} 2(x_1 + 2x_0)\right]^2} \longrightarrow \ldots .$$

Отже, якщо знаємо розв'язки рівняння Ріккаті, за формулою

(2.3.57) будуємо нові розв'язки рівняння К∂Ф.

Відмітимо для порівняння, що лієвська симетрія рівняння (2.3.56) дає такі формули розмноження розв'язків:

а) трансляції: $\overset{(2)}{u} = \overset{(1)}{u}(x_0 + \theta_0, x_1 + \theta_1)$,

б) галілеївські перетворення: $\overset{(2)}{u} = \overset{(1)}{u}(x_0; x_1 + \theta x_0) - \frac{1}{6}\theta$,

в) масштабні перетворення: $\overset{(2)}{u} = \alpha^2 \overset{(1)}{u}(\alpha^3 x_0, \alpha x_1)$. (2.3.67)

α, θ, θ_0, θ_1 – групові параметри. Об'єднавши формулу (2.3.57) з формулами (2.3.67), легко побудувати широкі класи точних розв'язків рівняння К∂Ф. Зокрема, розв'язок

$$u = -1 + 2\,\mathrm{ch}^{-2}(x_1 + 2x_0)$$

після розмноження за допомогою формул (2.3.67) з $\theta = -6$, $\theta = 0$ набирає вигляду класичного солітонного розв'язку [1,81]

$$u = 2\alpha^2 \mathrm{ch}^{-2}\left\{\alpha(x_1 - 4\alpha^2 x_0 + \theta_1)\right\}.$$

Очевидно, що формула (2.3.57) не є єдиною для рівняння К∂Ф (2.3.56). Так, наприклад, формула

$$\left|\begin{array}{l} \overset{(2)}{u} = \overset{(1)}{u} - 2(\tau^2 + k), \\ \tau_1 = \tau^2 + \overset{(1)}{u} + k, \\ \tau_0 = 6(\tau^2 + k)\tau_1 - \tau_{111}, \end{array}\right.$$

також дає розмноження розв'язків рівняння (2.3.56).

III. Розглянемо деякі нелінійні рівняння гіперболічного типу. Встановлені для них нелокальні симетрії дозволили побудувати відповідні алгоритми розмноження розв'язків. Це рівняння вигляду $u_{00} = \partial_1[c(u)u_1]$ та одновимірне рівняння Борна-Інфельда. Крім того, на завершення параграфа наведені деякі результати, одержані для нелінійного рівняння Шредінгера.

1. Нелінійні хвильові рівняння

$$L_1 \equiv u_{00} - \partial_1 \left[c(u) u_1 \right] = 0 \qquad (2.3.68)$$

зустрічаються при описанні поперечних коливань струн із змінною щільністю, поздовжніх коливань стержнів із змінним модулем пружності, при описанні багатьох інших процесів [136,137]. Отже, для рівняння (2.3.68) встановлено твердження.

Теорема 2.3.6. Рівняння (2.3.68) з довільною гладкою функцією $c(u)$ нелокальним перетворенням змінних

$$u(x_0, x_1) = y_1, \qquad x_\mu = v_\mu(y_0, y_1),$$

$$\delta \equiv \det\|v_{\mu\nu}\| \neq 0, \qquad (\mu, \nu = 0,1) \qquad (2.3.69)$$

зводиться до лінійного рівняння

$$L_2 \equiv v_{00} - c^{-1}(y_1) v_{11} = 0. \qquad (2.3.70)$$

Цей зв'язок здійснюється за формулою

$$L_1(x,u) \xrightarrow{(2.3.69)} \lambda\, L_2(y,v), \qquad (2.3.71)$$

де оператор λ має вигляд

$$\lambda = \left[v_{10}^3 + 2 v_{10} v_{00} \left[v_{11} - c(y_1) v_{00} \right] - c(y_1) v_{10} v_{00}^2 \right] \partial_0 +$$

$$+ \left[c(y_1) v_{00}^3 - v_{10}^2 v_{00} \right] \partial_1 + 2 \left[c(y_1) v_{10} v_{00} v_{000} - v_{10}^2 v_{100} \right] +$$

$$+ \left[v_{10} v_{000} - v_{00} v_{100} \right] \left[v_{11} + c(y_1) v_{00} \right] - \dot{c}(y_1) v_{00}^3 . \ \square$$

Доведення. Виконаємо диференціальне продовження другого порядку НПЗ (2.3.69) за формулою (1.1.8а). Одержуємо рівності

$$u_0 = -\delta^{-1} v_{10}, \qquad u_1 = \delta^{-1} v_{00},$$

$$u_{00} = \delta^{-3} \left[v_{10} v_{11}^2 v_{000} - v_{11} (2 v_{10}^2 + v_{00} v_{11}) v_{001} + \right.$$

$$+ v_{10}\left[v_{10}^2+2v_{00}v_{11}\right]v_{110} - v_{10}^2 v_{00} v_{111}\Big] ,$$

$$u_{10} = \delta^{-3}\left[v_{10}^2 v_{11} v_{000} - v_{10}(v_{10}^2 + 2v_{00}v_{11})v_{001} + \right.$$

$$\left. + v_{00}(2v_{10}^2 + v_{00}v_{11})v_{011} - v_{00}^2 v_{10} v_{111}\right] ,$$

$$u_{11} = \delta^{-3}\left[v_{10}^3 v_{000} - 3v_{00}v_{10}^2 v_{001} + 3v_{00}^2 v_{10} v_{011} - \right.$$

$$\left. - v_{00}^3 v_{111}\right] . \qquad (2.3.72)$$

Підставивши вирази для похідних $\underset{1}{u}, \underset{2}{u}$ з (2.3.72) в рівняння (2.3.68), знаходимо співвідношення (2.3.71), де L_2 задано формулою (2.3.70) а λ має наведений вище вигляд. Теорема доведена. ∎

Лема 2.3.I. *Лінійне хвильове рівняння (2.3.70) невиродженою точковою заміною змінних*

$$z(t,\lambda) = v(y_0, y_1) , \qquad (2.3.73)$$

$$t = y_0 , \qquad \lambda = -\int c^{\frac{1}{2}}(y_1)dy_1 = M(y_1) ,$$

$$(y_1 = [M]^{-1}(\lambda))$$

зводиться до форми

$$z_{00} - z_{\lambda\lambda} + G(\lambda)z_\lambda = 0 , \qquad (2.3.74)$$

$$G(\lambda) \equiv c^{-\frac{3}{2}} \cdot \dot{c}\left[[M]^{-1}(\lambda)\right] . \qquad (2.3.75)$$

Це твердження перевіряється безпосередньо перетворенням (2.3.73) рівняння (2.3.70).

Одержане твердження дозволяє описати нелокальну симетрію рівняння (2.3.70) як відповідну симетрію еквівалентного рівняння (2.3.74).

Теорема 2.3.7. *Нехай в рівнянні (2.3.74) функція $c(y_1)$ задовольняє умову*

$$c^{-\frac{3}{2}}\cdot\dot{c}\left[[M]^{-1}(-\lambda)\right] = c^{-\frac{3}{2}}\cdot\dot{c}\left[[M]^{-1}(\lambda)\right] , \qquad (2.3.76)$$

або, що те ж саме, $G(-\lambda) = G(\lambda)$, тоді розмноження його розв'язків виконується за формулою

$$\left| \begin{aligned} &\overset{(2)}{z}_\lambda(y_0,\lambda) = Q(\lambda)\cdot \overset{(1)}{z}_{00}(y_0,\lambda') , \\ &\overset{(2)}{z}(y_0,\lambda) = Q(\lambda)\cdot \overset{(1)}{z}_{\lambda'}(y_0,\lambda') . \end{aligned} \right. \qquad (2.3.77)$$

Тут

$$\dot{Q}(\lambda) - G(\lambda)Q(\lambda) = 0 , \qquad (2.3.78)$$

$$G(-\lambda) = G(\lambda) , \qquad \lambda' = -\lambda . \ \square$$

Доведення. Роглянемо систему рівнянь $\left[Q(\lambda) \neq 0\right]$

$$z\cdot Q^{-1}(\lambda) = q_\lambda , \qquad z_\lambda\cdot Q^{-1}(\lambda) = q_{00} . \qquad (2.3.79)$$

Виключимо перехресним диференціюванням з цієї системи змінну q. Одержуємо рівняння

$$z_{00} - z_{\lambda\lambda} + \dot{Q}(\lambda)Q^{-1}(\lambda)\cdot z_\lambda = 0 ,$$

яке при

$$\dot{Q}\cdot Q^{-1} = G$$

перетворюється в рівняння (2.3.74). Тепер виключимо змінну z. Знаходимо

$$z_\lambda = Q(\lambda)\cdot q_{00} = \left[Q(\lambda)\cdot q_\lambda\right]_\lambda = \dot{Q}(\lambda)q_\lambda + Q(\lambda)q_{\lambda\lambda} .$$

Поділивши обидві частини рівності на Q, одержуємо рівняння на q

$$q_{00} - q_{\lambda\lambda} - \dot{Q}(\lambda)\cdot Q^{-1}(\lambda)\cdot q_\lambda = 0 .$$

Зробимо в ньому заміну $\lambda \longrightarrow -\lambda$. Тоді при умові парності $G(\lambda)$ одержане рівняння буде збігатися з (2.3.74). Позначимо $z(y_0,\lambda) = \overset{(2)}{z}(y_0,\lambda)$, $q(y_0,\lambda') = \overset{(1)}{z}(y_0,\lambda')$. Тепер з системи (2.3.79) випливає формула (2.3.77). Теорема доведена. ■

Розглянемо простий приклад.

Приклад 2.3.5. Рівняння (2.3.74) з $G(\lambda) = -2$, тобто

$$z_{00} - z_{\lambda\lambda} - 2\, z_{\lambda} = 0$$

має частинний розв'язок

$$\overset{(1)}{z} = \operatorname{sh} y_0 \cdot \exp\left\{-(1 + \sqrt{2})\lambda\right\} .$$

Скористаємось формулою (2.3.77), (2.3.78). Одержуємо розв'язок $\overset{(2)}{z}$

$$\overset{(2)}{z} = \frac{c_1}{1 - \sqrt{2}} \operatorname{ch} y_0 \cdot \exp\left\{(1 - \sqrt{2})\lambda\right\} + c_2 .$$

c_i , $(i = 1,2)$ – довільні сталі.

З кожним з одержаних розв,язків $\overset{(k)}{z}$, $(k = 1,2)$ можна зв'язати в силу теореми 2.3.6 відповідні розв'язки рівняння (2.3.68). Тим самим вище установлений певний алгоритм розмноження розв'язків цього нелінійного рівняння.

Наслідок 2.3.2. Формула розмноження розв'язків лінійного рівняння (2.3.70) з функцією $c(y_1)$, яка задовольняє умову

$$c^{-\frac{3}{2}} \cdot \dot{c}(y_1) = c^{-\frac{3}{2}} \cdot \dot{c}\left[[M]^{-1}\left[-M(y_1)\right]\right],$$

має вигляд

$$\begin{cases} \overset{(2)}{v}_1(y_0, y_1) = -Q(\lambda) \cdot c^{\frac{1}{2}}(\tau) \cdot \overset{(1)}{v}_{00}(y_0, \tau) , \\ \overset{(2)}{v}(y_0, y_1) = -Q(\lambda) \cdot c^{-\frac{1}{2}}(\tau) \cdot \overset{(1)}{v}_0(y_0, \tau) , \\ \lambda = -\int c^{\frac{1}{2}}(y_1)dy_1 = \int c^{\frac{1}{2}}(\tau)d\tau . \ \square \end{cases}$$

Доведення цього твердження одержимо, якщо виконаємо точкове перетворення (2.3.73) у формулах (2.3.77), (2.3.78). З (2.3.73) знаходимо

$$z_{\lambda} = -c^{-\frac{1}{2}}(y_1) \cdot v_1 , \qquad z_{00} = v_{00} .$$

Одержані вирази для $\overset{(k)}{z}$, $\overset{(k)}{z}_{\lambda}$, $\overset{(k)}{z}_{00}$, $(k = 1,2)$ підставимо у (2.3.77), позначивши $\overset{(2)}{v} = \overset{(2)}{v}(y_0, y_1)$ та $\overset{(1)}{v} = \overset{(1)}{v}(y_0, \tau)$. Приходимо до шуканої формули. Отже, твердження доведено. ■

2. Рівняння Борна-Інфельда в просторі $\mathbb{R}(1,1)$ незалежних змінних $x = (x_0, x_1)$ запишемо у вигляді

$$(1 - u_0^2)u_{11} + 2u_0 u_1 u_{01} - (1 + u_1^2)u_{00} = 0 . \qquad (2.3.80)$$

Як і раніше, $\overset{(1)}{u}(x_0, x_1)$ будемо вважати відомим розв'язком рівняння (2.3.80). Новий розв'зок $\overset{(2)}{u}(x_0, x_1)$ цього рівняння можна побудувати за формулою, яка міститься в твердженні.

Теорема 2.3.8. Формула розмноження розв'язків рівняння Борна-Інфельда (2.3.80) визначається співвідношеннями

$$\left\{\begin{aligned} &\overset{(2)}{u}(x) = \int \overset{(1)}{u}_1 (1 - \overset{(1)}{u}_0{}^2 + \overset{(1)}{u}_1{}^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx_0 , && (2.3.81а)\\ &\overset{(2)}{u}_1(x) = \overset{(1)}{u}_0 (1 - \overset{(1)}{u}_0{}^2 + \overset{(1)}{u}_1{}^2)^{-\frac{1}{2}} , && (2.3.81б)\end{aligned}\right.$$

При цьому необхідне виконання умови невиродженості НПДР

$$1 - \overset{(k)}{u}_0{}^2 + \overset{(k)}{u}_1{}^2 \neq 0 , \quad (k = 1,2) . \square \qquad (2.3.82)$$

Доведення теореми побудовано на тому, що формули

$$\begin{aligned} \overset{(2)}{u}_1 &= \overset{(1)}{u}_0 (1 - \overset{(1)}{u}_0{}^2 + \overset{(1)}{u}_1{}^2)^{-\frac{1}{2}} ,\\ \overset{(2)}{u}_0 &= \overset{(1)}{u}_1 (1 - \overset{(1)}{u}_0{}^2 + \overset{(1)}{u}_1{}^2)^{-\frac{1}{2}} , \end{aligned} \qquad (2.3.81в)$$

є нелокальними перетвореннями інваріантності рівняння (2.3.80). Справді, виключивши перехресним диференціюванням з цієї системи $\overset{(2)}{u}$, одержуємо для $\overset{(1)}{u}$ рівняння (2.3.80). Для виключення змінної $\overset{(1)}{u}$ складемо вираз $1 - \overset{(2)}{u}_0{}^2 + \overset{(2)}{u}_1{}^2$.

$$1 - \overset{(2)}{u}_0{}^2 + \overset{(2)}{u}_1{}^2 = 1 - \overset{(1)}{u}_1{}^2 (1 - \overset{(1)}{u}_0{}^2 + \overset{(1)}{u}_1{}^2)^{-1} +$$

$$+\overset{(1)}{u}_0^{\,2}(1-\overset{(1)}{u}_0^{\,2}+\overset{(1)}{u}_1^{\,2})^{-1}=(1-\overset{(1)}{u}_0^{\,2}+\overset{(1)}{u}_1^{\,2})^{-1}\ .$$

Звідси випливає рівність

$$1-\overset{(1)}{u}_0^{\,2}+\overset{(1)}{u}_1^{\,2}=(1-\overset{(2)}{u}_0^{\,2}+\overset{(2)}{u}_1^{\,2})^{-1}\ .$$

Додамо -1 до правої та лівої частин рівності. Одержуємо

$$-\overset{(1)}{u}_0^{\,2}+\overset{(1)}{u}_1^{\,2}=(\overset{(2)}{u}_0^{\,2}-\overset{(2)}{u}_1^{\,2})(1-\overset{(2)}{u}_0^{\,2}+\overset{(2)}{u}_1^{\,2})^{-1}\ ,$$

і, таким чином, систему співвідношень

$$\overset{(1)}{u}_0=\overset{(2)}{u}_1(1-\overset{(2)}{u}_0^{\,2}+\overset{(2)}{u}_1^{\,2})^{-\frac{1}{2}}\ ,$$

$$\overset{(1)}{u}_1=\overset{(2)}{u}_0(1-\overset{(2)}{u}_0^{\,2}+\overset{(2)}{u}_1^{\,2})^{-\frac{1}{2}}\ .$$

Звідси перехресним диференціюванням та виключенням $\overset{(1)}{u}$ одержуємо для $\overset{(2)}{u}$ знов рівняння (2.3.80). Отже, розглянуті вище формули НПЗ зв'язують між собою розв'язки $\overset{(1)}{u}$ та $\overset{(2)}{u}$ одного і того ж рівняння. Тепер формула розмноження (2.3.81) одержується очевидним шляхом. Теорема доведена. ■

Приклад 2.3.6. З розв'язку рівняння (2.3.80)

$$\overset{(1)}{u}(x)=\ln\left|x_0^2-x_1^2+2+\sqrt{(x_0^2-x_1^2)^2+4(x_0^2-x_1^2)}\right|$$

за формулою (2.3.81) одержуємо розв'язок

$$\overset{(2)}{u}(x)=2x_0x_1(x_0^2-x_1^2)^{1}+\lambda\ ,\qquad(\lambda=\mathrm{const})$$

та анзац

$$\overset{(3)}{u}(x)=-\int\omega^{\frac{1}{2}}(\omega^2+4\omega+8x_1^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\omega\,-$$

$$-\,2\int x_1^2\omega^{-\frac{1}{2}}(\omega^2+4\omega+8x_1^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\omega-\lambda_1(x_1)\ ,$$

$$\omega\equiv x_0-x_1\ .$$

3. Розвинутий вище метод використання нелокальних симетрій можна застосувати до ДР у комплексному просторі. Звер-

немось, наприклад, до одновимірного нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ) з кубічною нелінійністю

$$i\varphi_0 + \varphi_{11} + |\varphi|^2\varphi = 0\ , \qquad |\varphi|^2 = \Phi\cdot\varphi\ . \quad (2.3.83)$$

Тут Φ позначає комплексно-спряжене до φ. Для цього рівняння відомо АПБ, яке звичайно [40,219] зображають у вигляді системи рівнянь

$$\varphi_1 - q_1 = i\alpha(\varphi - q) - i\tfrac{1}{2}\,æ(\varphi + q)\ ,$$

$$\varphi_0 - q_0 = \tfrac{1}{2}\,æ(\varphi + q)_1 - i\alpha(\varphi - q) + i\tfrac{1}{2}\,æ(\varphi + q) +$$

$$+ i\tfrac{1}{4}(\varphi - q)\left\{|\varphi - q|^2 + |\varphi + q|^2\right\}\ ,$$

$$æ = i\varepsilon\left[b - 2|\varphi - q|^2\right]^{\frac{1}{2}}\ ,$$

$$iq_0 + q_{11} + |q|^2 q = 0\ . \quad (2.3.84)$$

α, b – дійсні сталі параметри, $\varepsilon = \pm 1$.

Скористаємось цим АПБ для побудови формули розмноження розв'язків рівняння (2.3.83).

Твердження 2.3.І. Розмноження розв'язків НРШ (2.3.83) виконується за формулою

$$\left|\begin{array}{l} \overset{(2)}{\varphi} = \overset{(1)}{\varphi} - \tau\ , \\ \tau_1 = i\alpha\tau + \left(\overset{(1)}{\varphi} - \tfrac{1}{2}\tau\right)\sqrt{b - 2|\tau|^2}\ , \\ \tau_0 = \tfrac{1}{2}(i\tau_1 - \tau)\sqrt{b - 2|\tau|^2} - i\alpha\tau + \\ \qquad + i\tfrac{1}{4}\tau\left\{|\tau|^2 + |2\overset{(1)}{\varphi} - \tau|^2\right\}\ . \end{array}\right. \quad (2.3.85)$$

Тут $\overset{(k)}{\varphi}$, $(k = 1,2)$ – відомий та новий розв'язки НРШ відповідно. □

Доведення. Позначимо

$$\varphi \equiv \overset{(2)}{\varphi}(x), \qquad q \equiv \overset{(1)}{\varphi}(x)\ , \qquad \overset{(2)}{\varphi} - \overset{(1)}{\varphi} \equiv \tau\ .$$

Тоді

$$\overset{(2)}{\varphi} + \overset{(1)}{\varphi} = 2\overset{(1)}{\varphi} - \tau .$$

Підставимо знайдені вирази для $\overset{(2)}{\varphi} \pm \overset{(1)}{\varphi}$ в систему (2.3.84). Після нескладних перетворень вона набирає шуканого вигляду (2.3.85). Твердження доведено. ■

§4. Умовна нелокальна симетрія

Нехай система ДР $L_1^p(x,u) = 0$ зводиться нелокальним перетворенням змінних до системи $L_2^q(y,v) = 0$. Припустимо також, що вихідне рівняння може бути представлено у вигляді переозначеної сумісної системи рівнянь

$$L_{11}^{p_1}(x,u) = 0 \,, \qquad L_{12}^{p_2}(x,u) = 0 \,, \tag{2.4.1}$$

яка має розв'язки $u^{(1)} = f^{(1)}(x)$:

$$u^{(1)} \subset u^{(11)} \cap u^{(12)} .$$

Тут $u^{(1k)}$, $(k = 1,2)$ - відповідні розв'язки рівнянь L_{1k}. Розгляпемо питання про зведення рівняння $L_{11}^{p_1}(x,u) = 0$ цим перетворенням до системи $L_2^q(y,v) = 0$. При дослідженні сумісності системи рівнянь

$$L_{11}^{p_1}(x,u) = 0 \,,$$

$$x = h\left[y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\underset{r}{v}\right] , \tag{2.4.2}$$

$$B^{\alpha}\left[x,\ u,\ \underset{1}{u},\dots,\underset{k}{u};\ y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\underset{r}{v}\right] \tag{2.4.3}$$

певну частину параметричних похідних виключити вже неможливо. Отже, залишаються рівняння вигляду

$$\Omega^{c}\left[y,\ v,\ \underset{1}{v},\dots,\underset{t}{v};\ \hat{u},\ \underset{1}{\hat{u}},\dots,\underset{s}{\hat{u}}\right] = 0 \,.$$

Таким чином рівняння $L_{11}^{p_1}(x,u) = 0$ до $L_2^q(y,v) = 0$ НПЗ (2.4.2), (2.4.3) не зводиться.

Означення 2.4.1. ДР $L_{11}^{p_1}(x,u) = 0$, яке не зводиться до $L_2^q(y,v) = 0$ за допомогою НПЗ (2.4.2), (2.4.3), будемо називати звідним до нього на підмножині розв'язків $u^{(1)}$, якщо після доповнення його умовою $L_{12}^{p_2}(x,u) = 0$, одержана переозначена, сумісна система (2.4.1) вже зводиться до рівняння $L_2^q(y,v) = 0$.

Додаткову симетрію, що виникає при цьому на вилученій підмножині розв'язків, можна розуміти як умовну нелокальну симетрію рівняння $L_{11}^{p_1}(x,u) = 0$ відносно НПЗ (2.4.2),(2.4.3).

1. Розглянемо найпростіше рівняння Монжа-Ампера у просторі $\mathbb{R}(1,1)$ незалежних змінних $x = (x_0, x_1)$

$$\det\|u_{\mu\nu}\| = 0 , \quad (\mu,\nu = 0,1) . \tag{2.4.4}$$

Для нього можна довести твердження.

Теорема 2.4.I. Рівняння (2.4.4) на підмножині розв'язків, спільних з розв'язками рівняння Борна-Інфельда (2.3.80), є інваріантним відносно нелокального перетворення змінних (2.3.81в)

$$\overset{(2)}{u}_1 = \overset{(1)}{u}_0 (1 - \overset{(1)}{u}_0{}^2 + \overset{(1)}{u}_1{}^2)^{-\frac{1}{2}} ,$$

$$\overset{(2)}{u}_0 = \overset{(1)}{u}_1 (1 - \overset{(1)}{u}_0{}^2 + \overset{(1)}{u}_1{}^2)^{-\frac{1}{2}} , \tag{2.4.5}$$

$$\tilde{\delta} = (1 - \overset{(1)}{u}_0{}^2 + \overset{(1)}{u}_1{}^2) \neq 0 . \ \square$$

Доведення цього твердження одержуємо безпосередньою перевіркою інваріантності рівняння (2.4.4) відносно перетворення (2.4.5). Обчислимо похідні другого порядку від функції $\overset{(2)}{u}(x_0, x_1)$. Скористаємось формулами (2.4.5). Отже, маємо

$$\overset{(2)}{u}_{00} = \delta^{-3}[\ \delta\cdot u_{10} + u_1\omega_2\ ] ,$$

$$\overset{(2)}{u}_{11} = \delta^{-3}[\delta\cdot u_{01} + u_0\omega_1] ,$$

$$\overset{(2)}{u}_{10} = \delta^{-3}[\delta\cdot u_{00} + u_0\omega_2] ,$$

$$\overset{(2)}{u}_{01} = \delta^{-3}[\delta\cdot u_{11} + u_1\omega_1] .$$

Тут позначено $\delta = (1 - \overset{(2)}{u}_0{}^2 + \overset{(2)}{u}_1{}^2)$,

$$\omega_1 \equiv u_0 u_{10} - u_1 u_{11} ,$$

$$\omega_2 \equiv u_0 u_{00} - u_1 u_{10} .$$

Умовою сумісності $\overset{(2)}{u}_{10} = \overset{(2)}{u}_{01}$ у даному випадку є рівняння Борна-Інфельда (2.3.80). Підставивши другі похідні у рівняння Монжа- Ампера (2.4.4), знаходимо рівність

$$\det \| \overset{(2)}{u}_{\mu\nu} \| = \delta^{-2} [-\delta \cdot \det \| \overset{(1)}{u}_{\mu\nu} \| + \omega_1 (u_0 u_{10} - u_1 u_{00}) +$$
$$+ \omega_2 (u_1 u_{10} - u_0 u_{11})] .$$

Після очевидних спрощень маємо

$$\det \| \overset{(2)}{u}_{\mu\nu} \| = \delta^{-2} (1 - 2\delta) \det \| \overset{(1)}{u}_{\mu\nu} \| .$$

Рівняння (2.4.4) і (2.3.80) є сумісними. Справді, функція $f(x_0 - x_1)$ задовольняє одночасно обидва ці рівняння. Теорема доведена. ■

Одержаний вище результат допускає узагальнення.

Теорема 2.4.2. ДРЧП другого порядку в просторі $\mathbb{R}(1,1)$ незалежних змінних $x = (x_0, x_1)$

$$L\left[x,\ u,\ \underset{1}{u},\ \underset{2}{u}\right] = \Phi\left[\{f^c\}\right] = 0 , \qquad (2.4.6)$$

$$(c = 1,2,3) , \quad \left[\Phi\left[\{0\}\right] \equiv 0\right] ,$$

де

$$f^1 = f^1 \left[\delta^{-2} \det \| u_{\mu\nu} \|\right] ,$$

$$f^2 = f^2 \left[\delta^{-\frac{1}{2}} (2 - u_0^2 + u_1^2)\right] ,$$

$$f^3 = f^3 (\delta;\ \delta^{-1}) , \qquad \delta = (1 - u_0^2 + u_1^2) \neq 0 ,$$

з додатковою умовою

$$(1 - u_0^2) u_{11} + 2 u_0 u_1 u_{01} - (1 + u_1^2) u_{00} = 0 \qquad (2.4.7)$$

є умовно інваріантним відносно НПЗ (2.4.5). Φ та f^c, $(c = 1,2,3)$ - довільні гладкі функції, f^3 - симетрична по аргументах і задовольняє умову

$$f^3(\overset{(1)}{u}) = 0\,. \ \square \qquad (2.4.8)$$

Доведення. Виконаємо перетворення (2.4.5) функції f^2. Одержуємо

$$f^2\left[\frac{2-\overset{(2)}{u_0}{}^2+\overset{(2)}{u_1}{}^2}{\sqrt{1-\overset{(2)}{u_0}{}^2+\overset{(2)}{u_1}{}^2}}\right] = f^2\left[\frac{\left[2(1-\overset{(1)}{u_0}{}^2+\overset{(1)}{u_1}{}^2)-\overset{(1)}{u_1}{}^2+\overset{(1)}{u_0}{}^2\right]\sqrt{\tilde{\delta}}}{\tilde{\delta}}\right] =$$

$$= f^2\left[\frac{2-\overset{(1)}{u_0}{}^2+\overset{(1)}{u_1}{}^2}{\sqrt{1-\overset{(1)}{u_0}{}^2+\overset{(1)}{u_1}{}^2}}\right]\,.$$

Таким чином, доведено її абсолютна інваріантність відносно перетворення (2.4.5). Перетворенням f^3 дістаємо

$$f^3\left[1-\overset{(2)}{u_0}{}^2+\overset{(2)}{u_1}{}^2;\ \frac{1}{1-\overset{(2)}{u_0}{}^2+\overset{(2)}{u_1}{}^2}\right] =$$

$$= f^3\left[1-\frac{\overset{(1)}{u_0}{}^2}{\tilde{\delta}}+\frac{\overset{(1)}{u_1}{}^2}{\tilde{\delta}};\ \frac{1}{1-\dfrac{\overset{(1)}{u_0}{}^2}{\tilde{\delta}}+\dfrac{\overset{(1)}{u_1}{}^2}{\tilde{\delta}}}\right] = f^3(\tilde{\delta}^{-1};\tilde{\delta})\,.$$

Аналогічно доводиться інваріантність функції f^1. Отже, Φ є абсолютним ДІ перетворення (2.4.5) як довільна функція абсолютних інваріантів. Система рівнянь (2.4.6), (2.4.7), (2.4.8) сумісна. Справді, функція $u = f(x_0 - x_1)$ анулює $f^3 \equiv \delta + \delta^{-1} - 2$. Теорема доведена. ■

2. Розглянемо потенціальну (безвихрову) систему рівнянь гідродинамічного типу в просторі $\mathbb{R}(1,3)$ незалежних змінних

$$H_0 + (H,\nabla)H - \Delta H = 0\,, \qquad \nabla \times H = 0\,, \qquad (2.4.9a)$$

або, що теж саме, у вигляді

$$H_0 + \frac{1}{2}\nabla(H)^2 - \nabla(\nabla\cdot H) = 0, \qquad \nabla \times H = 0. \tag{2.4.9б}$$

Припустимо, що $|H| = u$, тобто

$$|H|^2 = (H^1)^2 + (H^2)^2 + (H^3)^2 = u^2 .$$

Тоді

$$H = \theta\cdot|H| = \theta\cdot u, \qquad (\theta = H\cdot|H|^{-1}). \tag{2.4.10}$$

Отже, θ є одиничним вектором, колінеарним з H. Припустимо далі, що $\nabla \times \theta = 0$. Це дозволяє одержати співвідношення

$$[\nabla \times \theta u] = u\cdot[\nabla \times \theta] + [\nabla u \times \theta] \longrightarrow \nabla u \times \theta = 0,$$

$$\nabla u = \theta\cdot|\nabla u|, \qquad (\nabla\cdot\theta u) = u(\nabla\cdot\theta) + \theta\cdot\nabla u,$$

$$\nabla(\nabla\cdot\theta u) = u\cdot\nabla(\nabla\cdot\theta) + 2\nabla u\cdot(\nabla\cdot\theta) + \theta\Delta u . \tag{2.4.11}$$

Підставивши H у вигляді (2.4.10) в рівняння (2.4.9), знаходимо

$$\theta\cdot(u_0 + u\cdot|\nabla u| - \Delta u) = -u\left[\theta_0 - 2\cdot\nabla\ln u\cdot(\nabla\cdot\theta) - \nabla(\nabla\cdot\theta)\right].$$

Вилучимо підмножину розв'язків цього рівняння, яка складається із розв'язків системи

$$u_0 + u\cdot|\nabla u| - \Delta u = 0, \tag{2.4.12}$$

$$\theta_0 - 2\cdot\nabla\ln u\cdot(\nabla\cdot\theta) - \nabla(\nabla\cdot\theta) = 0 . \tag{2.4.13}$$

Скалярне рівняння (2.4.12) можна вважати богатовимірним узагальненням рівняння Бюргерса. Змінні $\theta = \|\theta^1, \theta^2, \theta^3\|^T$ відіграють роль додаткових функціональних параметрів. Зауважимо, що з відомим розв'язком u рівняння (2.4.12) система (2.4.13) є лінійною.

Розглянемо другий екземпляр рівняння (2.4.9)

$$Q_0 + \frac{1}{2}\nabla(Q)^2 - \nabla(\nabla\cdot Q) = 0, \qquad \nabla \times Q = 0 . \tag{2.4.14}$$

Нехай $Q = \tau\cdot w$, де $w = |Q|$, та $\nabla \times \tau = 0$.

На певній підмножині розв'язків (2.4.14) можна замінити системою

$$w_0 + w|\nabla w| - \Delta w = 0 \ , \tag{2.4.15}$$

$$\tau_0 - 2\cdot\nabla\ln w\cdot(\nabla\cdot\tau) - \nabla(\nabla\cdot\tau) = 0 \ . \tag{2.4.16}$$

Припустимо

$$-2\ \nabla\ln w = H - Q \ , \tag{2.4.17}$$

$$-2\ \partial_0 \ln w = \frac{1}{2}\ (H\cdot Q) - \left[\frac{1}{2}\ (H)^2 - (\nabla\cdot H)\right] . \tag{2.4.18}$$

Перехресним диференціюванням виключимо з цієї системи w. Знаходимо рівняння

$$H_0 + \frac{1}{2}\ \nabla(H)^2 - \nabla(\nabla\cdot H) = Q_0 + \frac{1}{2}\ \nabla(H\cdot Q) \ .$$

Отже, при умові

$$Q_0 + \frac{1}{2}\ \nabla(H\cdot Q) = 0 \tag{2.4.19}$$

одержуємо рівняння (2.4.9). Нехай

$$\frac{1}{2}(H\cdot Q) = \frac{1}{2}\ (Q)^2 - (\nabla\cdot Q) \ . \tag{2.4.20}$$

Тоді (2.4.19) стає рівнянням (2.4.14).

Таким чином умова (2.4.20) є необхідною для зведення рівнянь (2.4.12), (2.4.13) до системи (2.4.15), (2.4.16) за допомогою НПЗ (2.4.17), (2.4.18). Виключимо H із рівняння (2.4.18), підставивши

$$H = \tau\cdot w - 2\ \nabla\ln w \ .$$

Дістаємо рівняння

$$w_0 + w\cdot|\nabla w| - \Delta w = \frac{1}{2}\ w\Big\{|\nabla\ w| - (\nabla\cdot Q)\Big\} \ .$$

Поставимо вимогу

$$|\nabla\ w| = (\nabla\cdot Q) \ . \tag{2.4.21}$$

Оскільки

$$(\nabla\cdot\tau w) = w\cdot(\nabla\cdot\tau) + |\nabla\ w| \ ,$$

з умови (2.4.21) випливає $(\nabla\cdot\tau) = 0$. Позначимо

$$u \equiv \overset{(2)}{u} \ , \qquad w \equiv \overset{(1)}{u} \ .$$

Одержані результати сформулюємо у вигляді твердження.

Теорема 2.4.3. Нехай $\overset{(1)}{u}$ – відомий розв'язок рівняння (2.4.12)

$$u_0 + u\cdot|\nabla u| - \Delta u = 0 ,$$

тоді новий його розв'язок $\overset{(2)}{u}$ будується за формулою

$$\left\{\begin{array}{ll}
\overset{(2)}{u} = (\theta\cdot\tau)\overset{(1)}{u} - 2\cdot\theta\cdot\nabla\ln\overset{(1)}{u} , & \\
\frac{1}{2}(\theta\cdot\tau)\overset{(1)}{u}\overset{(2)}{u} + 2\,\partial_0\ln\overset{(1)}{u} = \frac{1}{2}\overset{(2)}{u}{}^2 - (\nabla\cdot\theta\overset{(2)}{u}) , & \\
\theta\overset{(2)}{u} = \tau\overset{(1)}{u} - 2\cdot\nabla\ln\overset{(1)}{u} , & \\
\theta_0 - 2\cdot\nabla\ln\overset{(2)}{u}\cdot(\nabla\cdot\theta) - \nabla(\nabla\cdot\theta) = 0 , & \\
\tau_0 - 2\cdot\nabla\ln\overset{(1)}{u}\cdot(\nabla\cdot\tau) - \nabla(\nabla\cdot\tau) = 0 , & (2.4.22) \\
\nabla\times\theta = 0 , \quad \nabla\times\tau = 0 , \quad (\nabla\cdot\tau) = 0 . & (2.4.23)
\end{array}\right.$$

Рівності (2.4.23) є додатковими умовами відповідної інваріантності рівняння (2.4.9) відносно НПЗ (2.4.17), (2.4.18).

Аналогічний результат одержуємо для багатовимірного рівняння типу Бюргерса

$$u_0 - u\cdot|\nabla u| - \Delta u = 0 , \qquad (2.4.15a)$$

використавши векторні системи

$$H_0 - \frac{1}{2}\nabla(H)^2 - \nabla(\nabla\cdot H) = 0 , \qquad \nabla\times H = 0 ,$$

$$Q_0 - \frac{1}{2}\nabla(Q)^2 - \nabla(\nabla\cdot Q) = 0 , \qquad \nabla\times Q = 0$$

та НПЗ

$$2\nabla\ln w = H + Q , \qquad (2.4.17a)$$

$$2\,\partial_0\ln w = \frac{1}{2}(H\cdot Q) + \frac{1}{2}(H)^2 + (\nabla\cdot H) . \qquad (2.4.18a)$$

Тут, як і раніше,

$$u = |H| , \qquad H = \theta\cdot u , \qquad |\theta| = 1 ,$$

$$w = |Q| , \qquad Q = \tau\cdot w , \qquad |\tau| = 1 .$$

З рівності (2.4.17a) випливає

$$H = 2\,\nabla \ln w - \tau\cdot w\ .$$

Виключивши H за допомогою останнього виразa з рівняння (2.4.18а), для другого екземпляра рівняння (2.4.15а)

$$w_0 - w|\nabla w| - \Delta w = 0$$

знаходимо умови

$$(\nabla\cdot\tau) = -4\,\nabla \ln w\ ,$$

$$\nabla \times \tau = 0\ ,\quad \nabla \times \theta = 0\ . \tag{2.4.23а}$$

Формула розмноження розв'язків для рівняння (2.4.15а) в позначеннях $u(x) \equiv \overset{(2)}{u}(x)$, $w(x) \equiv \overset{(1)}{u}(x)$ має вигляд

$$\left\{\begin{array}{l}
\overset{(2)}{u} = -(\theta\cdot\tau)\,\overset{(1)}{u} + 2\cdot\theta\cdot\nabla\ln\overset{(1)}{u}\ ,\\[2mm]
\frac{1}{2}\,(\theta\cdot\tau)\,\overset{(1)}{u}\,\overset{(2)}{u} - 2\,\partial_0\ln\overset{(1)}{u} = -\frac{1}{2}\,\overset{(2)}{u}{}^2 - (\nabla\cdot\theta\,\overset{(2)}{u})\ ,\\[2mm]
\theta\,\overset{(2)}{u} = -\tau\,\overset{(1)}{u} + 2\cdot\nabla\ln\overset{(1)}{u}\ , \qquad (2.4.22а)\\[2mm]
\overset{(k)}{\theta}_0 - 2\cdot(\nabla\cdot\overset{(k)}{\theta})\nabla\ln\overset{(k)}{u} - \nabla(\nabla\cdot\overset{(k)}{\theta}) = 0\ ,\\[2mm]
\nabla\cdot\overset{(2)}{\theta} = -4\nabla\ln\overset{(1)}{u}\ ,\ \nabla\times\overset{(k)}{\theta} = 0\ ,\\[2mm]
(k = 1,2)\ ,\quad \overset{(1)}{\theta} \equiv \theta\ ,\quad \overset{(2)}{\theta} \equiv \tau\ .
\end{array}\right. \tag{2.4.23б}$$

Отже, вище побудовані ефективні алгоритми розмноження розв'язків НДР як для дійсних скалярних ДР, так і для систем гідродинамічного типу в $\mathbb{R}(1,3)$, а також для рівнянь у комплексному просторі (НРШ). Ідея інваріантності ДР відносно НПЗ допускає узагальнення у формі умовної нелокальної симетрії на певній підмножині розв'язків. Точні розв'язки, одержані за допомогою істотно нелокальних симетрій, не можуть бути знайдені за методом С.Лі.

Основні результати §§ 3,4 опубліковані у роботах [85,118, 120, 182, 185].

Р О З Д І Л III

НЕЛОКАЛЬНА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Проблема природнього узагальнення класичного принципу лінійної суперпозиції на нелінійні ДР математичної фізики аж до останнього часу не знаходила задовільного розв'язання. Окремі результати в цьому напрямку були одержані в 1967 р. Джонсом і Еймсом в роботі [207]. Ними були знайдені формули суперпозиції для рівняння Бюргерса, та декількох рівнянь, лінеаризованих точковими перетвореннями змінних [134,207]. Ідея побудови алгебраїчної формули суперпозиції розв'язків рівняння СГ з використанням НПЗ бере початок з Біанкі. Вона була реалізована для рівняння СГ Маклафліном і Скоттом (див. [238]), а пізніше, для КдФ, - Уолквістом і Естабруком [251]. При цьому істотно використовується однопараметрична довільність НПЗ та комутативність добутку двох таких перетворень з різними значеннями параметрів.

Нехай нелінійне ДР $L_1(x,u)$ допускає лінеаризацію за допомогою НПЗ. Тоді $L_2(y,v)$ - лінійне рівняння. Незалежно від вимірності групи лієвських симетрій рівняння L_2 можна скористатися фундаментальною властивістю кожного лінійного рівняння - принципом суперпозиції його розв'язків: якщо $\overset{(k)}{v}(y)$, $(k = 1,2)$ є розв'язками $L_2(y,v)$, то

$$\overset{(3)}{v}(y) = \overset{(1)}{v}(y) + \overset{(2)}{v}(y)$$

також є для нього розв'язком.

У даному розділі за допомогою НПЗ, які зв'язують рівняння L_1 та L_2, побудовані формули нелінійної суперпозиції розв'язків рівняння L_1. В §1 для розв'язання цих питань використані перетворення годографа. Контактні перетворення Ейлера-Ампера і Лежандра в $\mathbb{R}(1,n-1)$ застосовані у §2. Нелокальні симетрії деяких нелінійних хвильових рівнянь в §3 використані для побудови формул суперпозиції та розмноження розв'язків. Ефективність запропонованих алгоритмів проілюстрована рядом прикладів. Метод знаходить подальший розвиток, якщо вимагати лінеаризації на певній підмножині розв'язків рівняння L_1. Одержані в цьому напрямку результати містяться в §4.

§I. Формули суперпозиції розв'язків для деяких класів годограф-лінеаризованих диференціальних рівнянь

I. У вигляді відповідних тверджень нижче сформульовані критерії, які дозволяють визначити лінеаризовність широких класів рівнянь за допомогою перетворень годографа. Розглянуті перетворення (1.1.20), (1.1.21) та (1.1.23). Отже, для перетворення (1.1.20) маємо твердження.

Теорема 3.I.I. Нелінійне ДРЧП другого порядку в просторі $\mathbb{R}(1,1)$ незалежних змінних $x = (x_0, x_1)$

$$L_1(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}) = 0 \tag{3.1.1}$$

тоді і тільки тоді зводиться до лінійного рівняння

$$L_2 \equiv b^{\mu\nu}v_{\mu\nu} + b^{\mu}v_{\mu} + bv + c = 0 \tag{3.1.2}$$

з $b^{\mu\nu}$, b^{μ}, b, c – довільними гладкими функціями $y = (y_0, y_1)$ за допомогою перетворення (1.1.20), коли $L_1(u)$ має вигляд

$$b^{00}u_1^{-3}\left[u_0^2u_{11} - 2u_0u_1u_{01} + u_1^2u_{00}\right] +$$

$$+ 2b^{10}u_1^{-3}\left[u_1u_{10} - u_0u_{11}\right] + b^{11}u_1^{-3}u_{11} +$$

$$+ b^0u_1^{-1}u_0 - b^1u_1^{-1} - bx_1 - c = 0 \,. \tag{3.1.3}$$

Тут коефіцієнти є функціями аргументів x_0 та u, $b^{\mu\nu} = b^{\nu\mu}$. □

Доведення. Скористаємось формулами другого продовження перетворення (1.1.20). Взявши за вихідне загальне лінійне рівняння (3.1.2), виконаємо його перетворення за допомогою зазначених формул. Приходимо до нелінійного ДР (3.1.3). Відмітимо, що перетворення (1.1.20) є інволютивним. Отже, виконавши перетворення, обернене до (1.1.20) в рівнянні (3.1.3), приходимо знов до лінійного рівняння (3.1.2). Теорема доведена. ■

У випадку $\mathbb{R}(1,3)$ одержуємо відповідне узагальнення попередньої теореми.

Теорема 3.I.2. Нелінійне ДРЧП другого порядку в просторі $\mathbb{R}(1,3)$ незалежних змінних $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ тоді і тільки тоді зводиться до лінійного рівняння (3.1.2) з коефіцієнтами- довільними гладкими функціями $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$, коли $L_1(x,u)$ має вигляд

$$
\begin{aligned}
& b^{kk}u_1^{-3}\left[u_1^2u_{kk} - 2u_1u_ku_{1k} + u_k^2u_{11}\right] + \\
& + \; b^{1k}u_1^{-3}\left[u_1u_{1k} - u_ku_{11}\right] + b^{11}u_1^{-3}u_{11} + \\
& + b^{kr}u_1^{-3}\left[u_1(u_1u_{kr} - u_ku_{1r}) - u_r(u_1u_{1k} - u_ku_{11})\right] + \\
& + b^ku_1^{-1}u_k - b^1u_1^{-1} - bx_1 - c = 0 . \qquad (3.1.4)
\end{aligned}
$$

В рівнянні (3.1.4) коефіцієнти залежать від аргументів (x_0, u, x_2, x_3) $k, r = 0, 2, 3$, $k \neq r$, Підсумовування по індексах, які повторюються, розуміємо в просторі: $\mathbb{R}(0,3)$ з метрикою $g_{kr} = \mathrm{diag}(1,1,1)$. □

Теорема доводиться безпосереднім обчисленням з урахуванням інволютивності перетворення (1.1.21). ■

Зокрема, у клас рівнянь (3.1.4) входить нелінійне рівняння теплопровідності

$$u_0 - u_1^{-2}(1 + u_2^2 + u_3^2)u_{11} - u_{22} - u_{33} +$$
$$+ 2u_1^{-1}(u_2 u_{12} + u_3 u_{13}) = 0 . \qquad (3.1.5)$$

Перетворенням (1.1.21) воно зводиться до лінійного рівняння

$$v_0 - \Delta_{(3)} v = 0 .$$

тут $\Delta_{(3)} \equiv \partial_a \partial_a$, $(a = 1,2,3)$.

Аналогічно попереднім теоремам доводиться твердження для систем ДРЧП першого порядку в $\mathbb{R}(1,1)$ з двома залежними змінними.

Теорема 3.I.3. Система M квазілінійних ДРЧП першого порядку в просторі $\mathbb{R}(1,1)$ змінних $x = (x_0, x_1)$

$$L_1^p(x,\ u,\ \underset{1}{u}) = 0 , \qquad (3.1.6)$$

$$(u = (u^0,\ u^1), \quad p = \overline{1,M})$$

тоді і тільки тоді зводиться до лінійної системи

$$\overset{p}{L_2}(y,v) \equiv b_\mu^{p\nu} v_\mu^\nu + b^{p\nu} v^\nu + c^p = 0 \qquad (3.1.7)$$

з $b_\mu^{p\nu}$, $b^{p\nu}$, c^p – довільними гладкими функціями $y = (y_0, y_1)$ перетворенням (1.1.23), коли рівняння системи (3.1.6) мають вигляд

$$\delta^{-1}\left[b_0^{p0} u_1^1 - b_1^{p0} u_1^0 - b_0^{p1} u_0^1 + b_1^{p1} u_0^0\right] +$$

$$+ b^{p0} x_0 + b^{p1} x_1 + c^p = 0 , \quad (p = \overline{1,M}) . \qquad (3.1.8)$$

В рівнянні (3.1.8) коефіцієнти вже залежать від аргументів $(u^0,\ u^1)$. Підсумовування по індексах $\mu,\nu = 0,1$ в рівнянні (3.1.7) розуміємо в просторі $\mathbb{R}(0,2)$ з метрикою $\tilde{g}_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,1)$. ∎

До класу рівнянь (3.1.8) входить, наприклад, загальна система рівнянь газодинаміки:

$$u_0^1 + \partial_1 \left[f(u^1) + g(u^0) \right] = 0 ,$$

$$u_0^0 + \partial_1 h(u^1 \cdot u^0) = 0 . \qquad (3.1.9)$$

f, g, h – довільні гладкі функції.

II. Вище побудовані рівняння, які лінеаризовані за допомогою перетворень годографа (1.1.20), (1.1.21), (1.1.23). Отже, можна вирішувати питання про розмноження їх розв'язків за формулами суперпозиції.

Теорема 3.І.4. Нехай диференціальне рівняння L_1 зводиться до лінійного рівняння за допомогою перетворення (1.1.20), тоді для нього виконується такий принцип нелінійної суперпозиції розв'язків:

$$\left| \begin{aligned} &\overset{(3)}{u}(x_0, x_1) = \overset{(1)}{u}(x_0, \tau) , \\ &\overset{(1)}{u}(x_0, \tau) = \overset{(2)}{u}(x_0, x_1 - \tau) . \end{aligned} \right. \qquad (3.1.10)$$

Тут і далі $\overset{(k)}{u}(x)$, $(k = 1,2)$ – відомі розв'язки рівняння L_1, $\overset{(3)}{u}(x)$ його ж новий розв'язок. Функціональний параметр $\tau = \tau(x_0, x_1)$ виключається за допомогою другого співвідношення системи (3.1.10) . ▫

Доведення. Нехай $\overset{(s)}{v}(y)$, $(s = 1,2,3)$, є розв'язками лінійного рівняння $L_2(y,v)$. Отже, вони зв'язані між собою співвідношенням

$$\overset{(3)}{v}(y) = \overset{(1)}{v}(y) + \overset{(2)}{v}(y) . \qquad (3.1.11)$$

З іншого боку, кожний розв'язок $\overset{(s)}{v}(y)$, $(s = 1,2,3)$ перетворенням (1.1.2) зв'язаний з відповідним розв'язком $\overset{(s)}{u}(x_0, \overset{s}{x}_1)$ рівняння $L_1(x,u)$. Для розв'язку $\overset{(3)}{u}$ маємо ($\overset{3}{x}_1 \equiv x_1$)

$$\overset{(3)}{u}(x_0,x_1) = y_1, \qquad x_1 = \overset{(3)}{v}(x_0,y_1) = \overset{(1)}{v} + \overset{(2)}{v}.$$

Позначимо $\overset{1}{x_1} = \overset{(1)}{\tau}$, $\overset{2}{x_1} = \overset{(2)}{\tau}$, тоді $x_1 = \overset{(1)}{\tau} + \overset{(2)}{\tau}$. Обернене до (1.1.20) перетворення дає співвідношення

$$\overset{(k)}{v}(x_0,y_1) = \overset{(k)}{\tau}, \qquad y_1 = u(x_0,\overset{(k)}{\tau}), \quad (k = 1,2).$$

Підставивши одержані вирази в попередні рівняння, знаходимо

$$\overset{(3)}{u}(x_0,x_1) = \overset{(1)}{u}(x_0,\tau) = \overset{(2)}{u}(x_0,x_1-\tau).$$

Тут використані зв'язок $\overset{(2)}{\tau} = x_1 - \overset{(1)}{\tau}$ та позначення $\overset{(1)}{\tau} \equiv \tau$. Теорема доведена. ■

Поширимо цей результат на ДРЧП в просторі $\mathbb{R}(1,3)$. Скористаємось при цьому перетворенням (1.1.21).

Теорема 3.I.5. Якщо рівняння лінеаризується за допомогою перетворення (1.1.21), формула нелінійної суперпозиції його розв'язків має вигляд

$$\begin{cases} \overset{(3)}{u}(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3) = \overset{(1)}{u}(x_0,\ \tau,\ x_2,\ x_3); \\ \overset{(1)}{u}(x_0,\ \tau,\ x_2,\ x_3) = \overset{(2)}{u}(x_0,\ x_1-\tau,\ x_2,\ x_3). \ \square \end{cases} \tag{3.1.12}$$

Для систем ДР в $\mathbb{R}(1,1)$, які лінеаризуються перетворенням (1.1.23), теж побудована відповідна формула суперпозиції розв'язків.

Теорема 3.I.6. Якщо система ДРЧП зводиться до лінійної системи за допомогою перетворення (1.1.23), (наприклад належить класу (3.1.8)), принцип нелінійної суперпозиції її розв'язків визначається формулою

$$\begin{cases} \overset{(3)}{u}{}^{\nu}(x_0, x_1) = \overset{(1)}{u}{}^{\nu}(\overset{(0)}{\tau}, \overset{(1)}{\tau}), \qquad (\nu = 0,1), \\ \overset{(1)}{u}(\overset{(0)}{\tau}, \overset{(1)}{\tau}) = \overset{(2)}{u}{}^{\nu}(x_0 - \overset{(0)}{\tau}, x_1 - \overset{(1)}{\tau}), \ \square \end{cases} \qquad (3.1.13)$$

Доведення теорем 3.1.5 та 3.1.6 виконуються аналогічно доведенню теореми 3.1.4.

Таким чином, принцип нелінійної суперпозиції розв'язків виконується, зокрема, для системи газової динаміки (3.1.9).

III. Наведемо приклади використання формул суперпозиції (3.1.10), (3.1.12), (3.1.3) для побудови нових розв'язків НДР по двох відомих частинних розв'язках. Ми розглянемо скалярне нелінійне ДР у просторі $\mathbb{R}(1,3)$ та систему рівнянь газової динаміки для двох функцій з двома незалежними змінними, які допускають зведення до відповідних лінійних рівнянь.

Приклад 3.I.I. Функції

$$\overset{(1)}{u} = x_0 - x_2 - x_3 - \ln\{c_1^{-1}(x_1 - c_2)\},$$

$$\overset{(2)}{u} = \left[\tfrac{9}{4}\, c_1^2 (x_1 - c_2)^2 - x_2^2 - x_3^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

є частинними розв'язками ДРЧП (3.1.5)

$$u_0 - u_1^{-1}(1 + u_2^2 + u_3^2)u_{11} - u_{22} - u_{33} +$$

$$+ 2u_1^{-1}(u_2 u_{12} + u_3 u_{13}) = 0 . \qquad (3.1.14)$$

По розв'язках $\overset{(k)}{u}$, $(k = 1,2)$ за формулою (3.1.12) будуємо $\overset{(3)}{u}$:

$$\overset{(3)}{u}(x) = x_0 - x_2 - x_3 - \ln\{c_1^{-1}(\tau - c_2)\},$$

$$\left[x_0 - x_2 - x_3 - \ln\{c_1^{-1}(\tau - c_2)\}\right]^2 = \tfrac{9}{4}\, c_3^2 (x_1 - \tau - c_4)^2 - x_2^2 - x_3^2 .$$

Виключенням τ з цієї системи знаходимо співвідношення

$$\overset{(3)}{u}{}^2(x) + x_2^2 + x_3^2 = \tilde{c}_3\Big[x_1 - \tilde{c}_2 -$$

$$- c_1 \exp\{x_0 - x_2 - x_3 - \overset{(3)}{u}(x)\}\Big]^{-2}, \qquad (3.1.15)$$

$$\tilde{c}_2 \equiv c_2 + c_4, \qquad \tilde{c}_3 \equiv \frac{9}{4} c_3^2 .$$

Отже. формула (3.1.15) в неявному вигляді визначає новий розв'язок рівняння (3.1.14).

Приклад 3.І.2. Розглянемо частинний випадок системи класу (3.1.9), а саме, рівняння газової динаміки

$$u_0 + uu_1 + 4\lambda^2 \rho\rho_1 = 0 ,$$

$$\rho_0 + (u\,\rho)_1 = 0 .$$

Функціонально незалежними розв'язками цієї системи є такі:

$$\overset{(1)}{u} = \frac{1}{2} x_0 , \qquad \overset{(1)}{\rho} = (2\lambda)^{-1}\sqrt{\frac{1}{4}x_0^2 - x_1} ,$$

$$\overset{(2)}{u} = x_0^{-1}(x_1 + c_1) , \qquad \overset{(2)}{\rho} = c_2 (2\lambda)^{-1} x_0^{-1} .$$

За формулою (3.1.13) будуємо новий розв'язок системи, заданий неявно

$$\overset{(3)}{u}(x_0, x_1) = \frac{1}{2}\overset{(0)}{\tau} , \qquad \overset{(3)}{\rho}(x_0, x_1) = (2\lambda)^{-1} c_2 (x_0 - \overset{(0)}{\tau})^{-1};$$

$$\frac{1}{2}(x_0 - \overset{(0)}{\tau})\overset{(0)}{\tau} = x_1 - \overset{(1)}{\tau} + c_1 ,$$

$$\frac{1}{4}\overset{(0)}{\tau}{}^2 - \overset{(1)}{\tau} = c_2^2 (x_0 - \overset{(0)}{\tau})^{-2} .$$

З останнього рівняння маємо

$$\overset{(1)}{\tau} = \frac{1}{4}\overset{(0)}{\tau}{}^2 - c_2^2 (x_0 - \overset{(0)}{\tau})^{-2} .$$

Після виключення $\overset{(0)}{\tau}$ знаходимо

$$\overset{(3)}{u}{}^2(x_0, x_1) - x_0 \overset{(3)}{u}(x_0, x_1) + c_2^2\Big[x_0 - 2\overset{(3)}{u}(x_0, x_1)\Big]^{-2} + x_1 + c_1 = 0 ,$$

$$\overset{(3)}{\rho}(x_0,x_1) = (2\lambda)^{-1} c_2 \left[x_0 - 2\overset{(3)}{u}(x_0,x_1)\right] .$$

Інші розв'язки цих рівнянь можна одержати за допомогою групового розмноження знайдених.

§2. Класи диференціальних рівнянь, які лінеаризуються перетвореннями Ейлера-Ампера та Лежандра в $\mathbb{R}(1,n-1)$

У даному параграфі описані класи скалярних ДРЧП, які допускають лінеаризацію за допомогою інволютивних контактних перетворень Ейлера-Ампера (1.1.26) та Лежандра (1.1.28) в $\mathbb{R}(1,n-1)$. Для таких рівнянь побудовані формули нелінійної суперпозиції розв'язків. Завершується параграф прикладами використання нелінійної суперпозиції для розмноження розв'язків рівняння L_1, якщо відомі які-небудь два його частинних розв'язки.

I. Класи рівнянь, лінеаризованих зазначеними вище перетвореннями, визначаються двома відповідними твердженнями.

Теорема 3.2.I. Нелінійне ДР другого порядку в просторі $\mathbb{R}(1,n-1)$ незалежних змінних $x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$

$$L_1(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}) = 0$$

тоді і тільки тоді зводиться до лінійного рівняння

$$b^{\mu\nu}v_{\mu\nu} + b^{\mu}v_{\mu} + bv + c = 0 \qquad (3.2.1)$$

з $b^{\mu\nu}$, b^{μ}, b, c – довільними гладкими функціями від $y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ перетворенням Ейлера-Ампера (1.1.26), коли воно має вигляд

$$\Big[b^{00}\det\|u_{\mu\nu}\| - 2b^{0a}u_{0b}\alpha_{ba}(u_{kr}) +$$

$$+ b^{ab}\alpha_{ab}(u_{kr})\Big]\cdot\det\|u_{kr}\| + b^{0}u_0 +$$

$$+ b^{a}x_a - b(x_a u_a - u) - c = 0\ , \qquad (3.2.2)$$

$$(\mu,\nu = \overline{0,n-1}\ ,\ a,\ b,\ k,\ r = \overline{1,n-1}\ ,\quad b^{\mu\nu} = b^{\nu\mu}).$$

В рівнянні (3.2.2) коефіцієнти залежать від аргументів x_0, $\underset{1}{u}$, тобто

$$b(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \longrightarrow b(x_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) . \square$$

Доведення. Скористаємось формулами другого продовження перетворення (1.1.26). Застосуванням цих формул до рівняння (3.2.1) відразуж одержуємо (3.2.2). Перетворення Ейлера--Ампера є інволютивним. Отже, повторне його використання повертає нас до вихідного стану. Іншими словами, записавши рівняння (3.2.2) у змінних $(y, v(y))$ та виконавши в ньому перетворення (1.1.26), одержуємо знов лінійне рівняння (3.2.1). Теорема доведена. ■

Відомо [51], що нелінійне ДР другого порядку в $\mathbb{R}(1,n-1)$ незалежних змінних $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$

$$L_1(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}) = 0$$

перетворенням Лежандра (1.1.28) зводиться до лінійного рівняння (3.2.1) тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд

$$b^{\mu\nu}\det^{-1}\|u_{\gamma\sigma}\|\cdot a_{\mu\nu}(u_{\gamma\sigma}) + b^{\mu}x_{\mu} +$$
$$+ b(x_{\mu}u_{\mu} - u) + c = 0 . \qquad (3.2.3)$$

Коефіцієнти рівняння (3.2.3) залежать від аргументів $\underset{1}{u} = \{u_{\mu}\} = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$, тобто

$$b(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \longrightarrow b(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) .$$

До класу рівнянь (3.2.3) відносяться, зокрема, такі:

1. $\alpha^{\mu}(u_{\lambda})x_{\mu} - f(u_{\lambda}) = 0 \longrightarrow \alpha^{\mu}(y_{\lambda})v_{\mu} - f(y_{\lambda}) = 0$,

2. $\alpha^{\mu}x_{\mu} + f(\beta^{\mu}u_{\mu}) + g(u_{\mu}u^{\mu}) = 0 \longrightarrow \alpha^{\mu}v_{\mu} + f(\beta^{\mu}y_{\mu}) +$
$+ g(y_{\mu}y^{\mu}) = 0$,

3. $\mathrm{Slid}(u_{\mu\nu}) = 0 \longrightarrow \Box v = 0$. (3.2.4)

Аналогічний результат для рівняння третього порядку одержуємо, скориставшись третім продовженням перетворення Лежандра (1.1.28). Для спрощення викладу обмежимо себе випадком двох незалежних змінних.

Теорема 3.2.2. Диференціальне рівняння третього порядку з двома незалежними змінними

$$L_1(y,\ v,\ \underset{1}{v},\ \underset{2}{v},\ \underset{3}{v}) = 0\ ,\quad y = (y_0, y_1) \qquad (3.2.5)$$

перетворенням Лежандра (1.1.28) зводиться до лінійного рівняння

$$b^{\mu\nu\gamma} v_{\mu\nu\gamma} + b^{\mu\nu} v_{\mu\nu} + b^{\mu} v_{\mu} + c = 0 \qquad (3.2.6)$$

з $b^{\mu\nu\gamma}$, $b^{\mu\nu}$, b^{μ}, b, c – довільними гладкими симетричними по індексах функціями y тоді і тільки тоді, коли воно міститься у класі

$$\begin{gathered} b^{\mu\nu\gamma}(\underset{1}{u}) f_{\mu\nu\gamma}(\underset{1}{u},\ \underset{2}{u}) \det^{-3}\|u_{\lambda\sigma}\| + \\ b^{\mu\nu}(\underset{1}{u}) \det^{-1}\|u_{\gamma\sigma}\| \cdot a_{\mu\nu}(u_{\gamma\sigma}) + b^{\mu}(\underset{1}{u}) x_{\mu} + \\ + b(\underset{1}{u})(x_{\mu}u_{\mu} - u) + c(\underset{1}{u}) = 0\ . \end{gathered} \qquad (3.2.7)$$

$f_{\mu\nu\gamma}$, $(\mu,\ \nu,\ \gamma,\ \lambda,\ \sigma = 0,1)$, наведені у формулах (1.1.30a), $\det\|u_{\lambda\sigma}\| \neq 0$. □

Доведення цього твердження є майже дослівним повторенням попереднього для теореми 3.2.1, тому ми його не наводимо.

II. Як бачимо, існують широкі класи рівнянь, які допускають лінеаризацію за допомогою перетворень Ейлера-Ампера і Лежандра. До них входять такі важливі рівняння математичної фізики:

$(1 - u_0^2)u_{11} + 2u_0u_1u_{01} - (1 + u_1^2)u_{00} = 0$ – рівняння Борна-Інфельда,

$(1 + u_1^2)u_{22} - 2u_1u_2u_{12} + (1 + u_2^2)u_{11} = 0$ – рівняння мінімальних поверхонь, рівняння

$u_{00} - c_1(\underset{1}{u})u_{11} + c_2(\underset{1}{u})\det\|\underset{2}{u}\| = 0$,

і, зокрема,

$u_{00} - c_1(u_1)u_{11} = 0$, - гіперболічні рівняння поширення хвиль, рівняння ейконала $1 - u_0^2 + u_1^2 = 0$ та інши. Тому надзвичайно важливо знати, в яку форму нелінійної суперпозиції трансформується відповідний принцип суперпозиції лінійних рівнянь. Наведені нижче твердження вирішують поставлене питання.

Теорема 3.2.3. Нехай ДР лінеарізується перетворенням Ейлера-Ампера (1.1.26) в просторі $\mathbb{R}(1,n-1)$ незалежних змінних, тоді формула нелінійної суперпозиції його розв'язків має вигляд

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{(3)}{u}(x_0,\overset{}{x}) = \overset{(1)}{u}(x_0,\overset{(1)}{\tau}) + \overset{(2)}{u}(x_0,x - \overset{(1)}{\tau}) , \\ \overset{(1)}{u}_\alpha(x_0,\overset{(1)}{\tau}) = \overset{(2)}{u}_\alpha(x_0,\overset{(2)}{\tau}) , \\ x = \overset{(1)}{\tau} + \overset{(2)}{\tau} . \end{array}\right. \qquad (3.2.8)$$

Тут $\overset{(k)}{u}$, $(k = 1,2)$ є відомими частинними розв'язками рівняння $L_1(x,u)$, $\overset{(3)}{u}$ - його новий розв'язок. У формулі (3.2.8) позначено:

$x = (x_1 , x_2,\ldots,x_{n-1})$, $\overset{(k)}{\tau} = (\overset{(k)}{\tau_1} , \overset{(k)}{\tau_2},\ldots,\overset{(k)}{\tau_{n-1}})$,

$$u_\alpha(x_0,\tau) \equiv \partial_{\tau_\alpha} u(x_0,\tau) . \square$$

Доведення. Зв'язок між розв'язком $\overset{(3)}{u}$ рівняння $L_1(x_0,x,u)$ та функціями $\overset{(s)}{v}(y_0,y)$, $(s = 1,2,3)$ - розв'язками лінійного рівняння $L_2(y, v)$, забезпечується перетворенням (1.1.26):

$$\overset{(3)}{u}(x_0,x) = y_\alpha \overset{(3)}{v}_\alpha - \overset{(3)}{v} = y_\alpha(\overset{(1)}{v}_\alpha + \overset{(2)}{v}_\alpha) - \overset{(1)}{v} - \overset{(2)}{v} \;;$$

$$x \equiv \overset{3}{x} = \overset{(3)}{v}_\alpha = \overset{(1)}{v}_\alpha - \overset{(2)}{v}_\alpha \;,$$

$$x_0 \equiv \overset{3}{x}_0 = y_0, \qquad (\alpha = \overline{1,n-1}) \;. \tag{3.2.9}$$

Тут використаний зв'язок між розв'язками $\overset{(s)}{v}$, $(s = 1,2,3)$

$$\overset{(3)}{v}(y_0,y) = \overset{(1)}{v}(y_0,y) + \overset{(2)}{v}(y_0,y) \;. \tag{3.2.10}$$

З іншого боку, кожний розв'язок $\overset{(k)}{v}$, $(k = 1,2)$ виразимо через $\overset{(k)}{u}(\overset{k}{x}_0,\overset{k}{x})$, в яких $\overset{k}{x}$ замінимо на параметри $\overset{(k)}{\tau} = (\overset{(k)}{\tau}_1, \overset{(k)}{\tau}_2,\ldots,\overset{(k)}{\tau}_{n-1})$, використавши обернене перетворення Ейлера- Ампера. Одержуємо

$$\overset{(k)}{v}(y_0,y) = \partial_\alpha \overset{(k)}{\tau} \cdot \overset{(k)}{u}_\alpha(x_0,\overset{(k)}{\tau}) - \overset{(k)}{u}(x_0,\overset{(k)}{\tau}) \;,$$

$$y_\alpha = \overset{(k)}{u}_\alpha(x_0,\overset{(k)}{\tau}) \;, \qquad y_0 = \overset{k}{x}_0 \;. \tag{3.2.11}$$

Підставимо вирази для $\overset{(k)}{v}$ в систему (3.2.9), використавши при цьому співвідношення

$$\partial_\alpha \overset{(k)}{\tau} = \overset{(k)}{v}_\alpha \;, \qquad x = \overset{(1)}{\tau} + \overset{(2)}{\tau} \;.$$

Отже, з (3.2.9) маємо

$$\overset{(3)}{u}(x_0,x) = \overset{(1)}{u}(x_0,\overset{(1)}{\tau}) + \overset{(2)}{u}(x_0,\overset{(2)}{\tau}) \;,$$

$$x = \overset{(1)}{\tau} + \overset{(2)}{\tau} \;, \qquad x_0 = \overset{(k)}{x}_0 \;. \tag{3.2.12}$$

Із системи (3.2.11) знаходимо рівність

$$\overset{(1)}{u}(x_0,\overset{(1)}{\tau}) = \overset{(2)}{u}(x_0,\overset{(2)}{\tau}) \;. \tag{3.2.13}$$

Об'єднавши рівняння (3.2.12) та (3.2.13), одержуємо шукану формулу (3.2.8). Теорема доведена. ■

Сформулюємо і доведемо тепер твердження, яке відповідає перетворенню Лежандра.

Теорема 3.2.4. Якщо ДР $L_1(x,u)$ в просторі $\mathbb{R}(1,n-1)$ зводиться до лінійного рівняння перетворенням Лежандра (1.1.28), нелінійна суперпозиція його розв'язків $\overset{(k)}{u}(x)$, $(k = 1,2)$ визначається системою

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{(3)}{u}(x) = \overset{(1)}{u}(\overset{(1)}{\tau}) + \overset{(2)}{u}(\overset{(2)}{\tau}), \\ \overset{(1)}{u}_{\mu}(\overset{(1)}{\tau}) = \overset{(2)}{u}_{\mu}(\overset{(2)}{\tau}), \\ x = \overset{(1)}{\tau} + \overset{(2)}{\tau}. \end{array}\right. \tag{3.2.14}$$

$x=(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$, $\overset{(k)}{\tau} = (\overset{(k)}{\tau}_0, \overset{(k)}{\tau}_1, \overset{(k)}{\tau}_2,\ldots,\overset{(k)}{\tau}_{n-1})$,

$(k = 1,2)$, $\quad u_{\mu}(\tau) \equiv \partial_{\tau_{\mu}} u(\tau)$. □

Доведення. Виконаємо перетворення Лежандра розв'язку $\overset{(3)}{u}(x)$, $(\overset{3}{x} \equiv x)$.

$$\overset{(3)}{u}(x) = y_{\mu} \overset{(3)}{v}_{\mu} - \overset{(3)}{v} = y_{\mu}(\overset{(1)}{v}_{\mu} + \overset{(2)}{v}_{\mu}) - \overset{(1)}{v} - \overset{(2)}{v},$$

$$x_{\mu} = \overset{(3)}{v}_{\mu} = \overset{(1)}{v}_{\mu} + \overset{(2)}{v}_{\mu}. \tag{3.2.15}$$

Тут врахована рівність (3.2.10). В розв'язках $\overset{(k)}{u}(x)$, (k= 1.2) замінимо $\overset{k}{x}$ параметрами $\overset{(k)}{\tau} = (\overset{(k)}{\tau}_0, \overset{(k)}{\tau}_1,\ldots,\overset{(k)}{\tau}_{n-1})$. Виконаємо перетворення функцій $\overset{(k)}{u}(x)$, обернене до (1.1.28).

$$\overset{(k)}{v}(y) = \partial_{\mu} \overset{(k)}{\tau} \cdot \overset{(k)}{u}_{\mu}(\overset{(k)}{\tau}) - \overset{(k)}{u}(\overset{(k)}{\tau}),$$

$$y_{\mu} = \overset{(k)}{u}_{\mu}(\overset{(k)}{\tau}). \tag{3.2.16}$$

Підставимо знайдені вище $\overset{(k)}{v}(y)$ в систему (3.2.15), враховуючи при цьому співвідношення $x = \overset{(1)}{\tau} + \overset{(2)}{\tau}$, $\partial_{\mu} \overset{(k)}{\tau} = \overset{(k)}{v}_{\mu}$, (k=1,2). Із (3.2.15) одержуємо

$$\overset{(3)}{u}(x) = \overset{(1)}{u}(\overset{(1)}{\tau}) + \overset{(2)}{u}(\overset{(2)}{\tau}),$$
$$x = \overset{(1)}{\tau} + \overset{(2)}{\tau}.$$

Друга рівність системи (3.2.14) випливає з (3.2.16). Теорема доведена. ■

У формулах (3.2.8), (3.2.14) $\overset{(k)}{\tau}$ є функціональними параметрами, які належить виключити з системи, щоб знайти розв'язок $\overset{(3)}{u}(x)$ у явному вигляді.

III. Скористаємось знайденими вище формулами для побудови нових розв'язків деяких нелінійних рівнянь по двох відомих. Ми наводимо приклади, в яких розглянуті рівняння різних типів і різної вимірності: це ДР нелілійної теплопровідності від однієї та двох просторових змінних а також одновимірне рівняння Борна-Інфельда - нелінійне рівняння гіперболичного типу.

Приклад 3.2.1. Одновимірне рівняння

$$u_0 u_{11} + 1 = 0, \quad (u_{11} \neq 0) \tag{3.2.17}$$

перетворенням Ейлера-Ампера зводиться до лінійного теплового рівняння $v_0 - v_{11} = 0$. Воно має частинні розв'язки

$$\overset{(1)}{u}(x_0, x_1) = x_0 - \tfrac{1}{2} x_1^2,$$

$$\overset{(2)}{u}(x_0, x_1) = k\left[1 - x_0 + x_1\right]^{\frac{3}{2}}, \qquad k = -\tfrac{2}{3}\sqrt{2}.$$

Скористаємось формулою (3.2.8), прийнявши $\overset{(1)}{\tau} \equiv \tau$, $\overset{(2)}{\tau} \equiv \theta$. Одержуємо систему

$$\overset{(3)}{u}(x_0, x_1) = x_0 - \tfrac{1}{2}\tau^2 + k\left[1 - x_0 + \theta\right]^{\frac{3}{2}},$$

$$\tau = -\tfrac{3}{2} k\left[1 - x_0 + \theta\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$x_1 = \tau + \theta.$$

В другу рівність цієї системи підставимо $\theta = x_1 - \tau$. Після піднесення до другого степеня дістаємо рівняння на τ

$$\tau^2 + 2\tau - 2 - 2x_1 + 2x_0 = 0.$$

Звідси знаходимо τ

$$\tau = -1 \pm \sqrt{3 + 2(x_1 - x_0)} .$$

Позначимо

$$\omega \equiv 2 + x_1 - x_0 \pm \sqrt{3 + 2(x_1 - x_0)} .$$

Тепер розв'язок $\overset{(3)}{u}(x)$ має вигляд

$$\overset{(3)}{u}(x_0, x_1) = x_0 - \omega - \frac{3}{2}\sqrt{2}\cdot\omega^{\frac{3}{2}} . \qquad (3.2.18)$$

Приклад 3.2.2 Нелінійне рівняння теплопровідності

$$u_0 \cdot \det\|u_{ab}\| + \Delta_{(2)} u = 0 , \qquad (3.2.19)$$

$$\Delta_{(2)} \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2 , \quad \det\|u_{ab}\| \neq 0 , \quad (a,\ b = 1,2)$$

за допомогою перетворення Ейлера-Ампера зводиться до лінійного

$$v_0 - \Delta_{(2)} v = 0 .$$

Безпосередньо перевіряється, що рівняння (3.2.19) має частинний розв'язок у параметричній формі

$$\overset{(1)}{u}(x_0, x_1, x_2) = x_1^{-1} r^2 \theta + 2x_0 x_1 \theta^{-1} ,$$

$$8\pi x_1 x_0^2 = \pm\, \theta \cdot \exp\left\{-r^2\theta^2\left[8x_0 x_1^2\right]^{-1}\right\} ,$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 . \qquad (3.2.20)$$

Другий розв'язок беремо у вигляді

$$\overset{(2)}{u}(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 .$$

За формулою (3.2.8) знаходимо

$$\overset{(3)}{u}(x_0, x_1, x_2) = \tau_1^{-1}(\tau_1^2 + \tau^2) + 2x_0\tau_1\theta^{-1} + (x_1 - \tau_1)^2 - (x_2 - \tau_2)^2 ,$$

$$\left[8\pi\tau_1 x_0^2\right]^2 = \theta^2 \exp\left\{-\theta^2 \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{4x_0\tau_1^2}\right\},$$

$$\theta = 2(x_1 - \tau_1), \quad \tau_2\cdot\tau_1^{-1}\cdot\theta = -2(x_2 - \tau_2). \tag{3.2.21}$$

З останніх двох співвідношень маємо

$$\tau_1 = x_1 - \frac{1}{2}\theta,$$

$$\tau_2 = (x_1 - \theta)^{-1} x_2 \left[x_1 - \frac{1}{2}\theta\right].$$

Виключенням цих параметрів з системи (3.2.21) одержуємо розв'язок $\overset{(3)}{u}$

$$\overset{(3)}{u}(x_0,x_1,x_2) = \theta(x_1-\theta)^{-2}\left[x_1 - \frac{1}{2}\theta\right](r^2+\theta^2-2x_1\theta) +$$

$$+ 2x_0\theta^{-1}\left[x_1 - \frac{1}{2}\theta\right] + \frac{1}{4}\theta^2 - x_2^2(x_1-\theta)^{-2}\left[x_1 - \frac{1}{2}\theta\right]^2,$$

$$8\pi x_0^2\left[x_1 - \frac{1}{2}\theta\right] = \pm\theta\cdot\exp\left\{-\frac{\theta^2(r^2+\theta^2-2x_1\theta)}{4x_0(x_1-\theta)^2}\right\}. \tag{3.2.22}$$

Приклад 3.2.3. Рівняння Борна-Інфельда

$$(1-u_0^2)u_{11} + 2u_0u_1u_{01} - (1+u_1^2)u_{00} = 0 \tag{3.2.23}$$

має частинні розв'язки [123]

$$\overset{(1)}{u}(x_0,x_1) = \varphi(x_0^2 - x_1^2) + \alpha\cdot\ln(x_0+x_1), \quad (\tilde{\omega} \equiv x_0^2 - x_1^2),$$

$$(\tilde{\omega} + \alpha^2)\ddot{\varphi} - 2\tilde{\omega}\cdot\dot{\varphi}^3 - 3\alpha\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi} = 0;$$

$$\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = \left[x_0 - x_1\right]^{\frac{1}{2}}\psi(x_0+x_1), \quad (\tilde{w} = x_0+x_1),$$

$$\psi^2\ddot{\psi} - 3\psi\dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi} = 0;$$

які задовольняють умову $\det\|u_{\mu\nu}\| \neq 0$, $(\mu, \nu = 0,1)$. Отже, для побудови нового розв'язку $\overset{(3)}{u}(x_0,x_1)$ рівняння (3.2.23) можна скористатися формулою (3.2.14). Оскільки

$$\overset{(1)}{u}_\mu = (-1)^\mu\cdot 2x_\mu\dot{\varphi} + \alpha(x_0+x_1)^{-1},$$

$$\overset{(2)}{u}_\mu = (-1)^\mu \cdot \frac{1}{2}\left[x_0 - x_1\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \phi + \left[x_0 - x_1\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \dot{\phi} ,$$

то після заміни x_μ в $\overset{(1)}{u}$ параметрами τ_μ і в $\overset{(2)}{u}$ – параметрами θ_μ, враховуючи рівності $\theta_\mu = x_\mu - \tau_\mu$, $(\mu = 0,1)$, одержуємо з формули (3.2.14) розв'язок $\overset{(3)}{u}(x_0, x_1)$:

$$\overset{(3)}{u}(x_0, x_1) = \varphi(\omega) + \alpha \cdot \ln(\tau_0 + \tau_1) + \left[x_0 - x_1 - (\tau_0 - \tau_1)\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \phi(w) ,$$

$$(\tau_0 + \tau_1) \cdot \dot{\varphi}(\omega) = \frac{1}{2}\left[x_0 - x_1 - (\tau_0 - \tau_1)\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \dot{\phi}(w) ,$$

$$(\tau_0 - \tau_1) \cdot \dot{\varphi}(\omega) + \alpha(\tau_0 + \tau_1)^{-1} = \left[x_0 - x_1 - (\tau_0 - \tau_1)\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \dot{\phi}(w) ,$$

$$\omega \equiv \tau_0^2 - \tau_1^2 , \qquad w \equiv x_0 + x_1 - \tau_0 - \tau_1 ,$$

$$(\omega + \alpha^2)\ddot{\varphi} - 2\omega\,\dot{\varphi}^3 - 3\alpha\,\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi} = 0 ,$$

$$\phi\,\ddot{\phi} - 3\,\phi\,\dot{\phi}^2 + 2\,\dot{\phi} = 0 . \qquad (3.2.24)$$

Оскільки групи ліївських симетрій розглянутих ДР є достатньо широкими, знайдені вище розв'язки можна піддати багатопараметричному розмноженню за відповідною групою Лі.

§3. Точні розв'язки та формули суперпозиції розв'язків нелінійних хвильових рівнянь

Вище було показано, що можна ефективно будувати просторі класи нелінійних ДР, які допускають лінеаризацію за допомогою визначеного НПЗ (§§ 1,2 даного розділу). У загальному ж випадку доводиться вивчати властивості щодо лінеаризованості кожного рівняння окремо. У даному параграфі розглянуті рівняння нелінійної теплопровідності, еволюційні рівняння типу Гарі-Діма, нелінійні хвильові рівняння. Для цих рівнянь знайдені лінеаризуючі НПЗ, побудовані формули нелінійної суперпозиції розв'язків та виконано їх розмноження.

I. Звернемось спочатку до нелінійних теплових рівнянь.

1. Формула нелінійної суперпозиції розв'язків $\overset{(k)}{u}(x)$, $(k = 1,2)$ для рівняння Бюргерса (2.3.1)

$$u_0 + uu_1 - u_{11} = 0 \quad ,$$

була побудована за допомогою перетворення Коула-Хопфа в [123] і має вигляд

$$\overset{(3)}{u}(x) = \frac{\overset{(1)}{u}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\,\partial_1^{-1}\overset{(1)}{u}\right\} + \overset{(2)}{u}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\,\partial_1^{-1}\overset{(2)}{u}\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2}\,\partial_1^{-1}\overset{(1)}{u}\right\} + \exp\left\{-\frac{1}{2}\,\partial_1^{-1}\overset{(2)}{u}\right\}} \,. \qquad (3.3.1)$$

Однак, існує інше представлення принципу нелінійної суперпозиції для цього рівняння. Воно дається у наступному твердженні.

Теорема 3.3.I. Формула нелінійної суперпозиції розв'язків рівняння Бюргерса (2.3.1) допускає двохпараметричне представлення у вигляді системи

$$\begin{cases} \overset{(3)}{u}(x_0,x_1) = -2\partial_1 \ln(\overset{(1)}{\tau} + \overset{(2)}{\tau}), & (3.3.2а) \\ -2\,\partial_1 \ln \overset{(k)}{\tau} = \overset{(k)}{u}, \quad (k = 1,2), & (3.3.2б) \\ -2\,\partial_0 \ln \overset{(k)}{\tau} = u_1 - \frac{1}{2}\overset{(k)}{u}{}^2. \ \square & (3.3.2в) \end{cases}$$

При користуванні формулою (3.3.1) внаслідок інтегрування виникають довільні функції, які вимагають довизначення. Для цього одержаний із (3.3.1) вираз для $\overset{(3)}{u}$ слід підставити в рівняння Бюргерса. Якщо застосовувати формулу (3.3.2), тоді довільні функції визначаються за допомогою рівнянь (3.3.2б), (3.3.2в) першого порядку. Отже, знайдене так $\overset{(3)}{u}$ не вимагає додаткової перевірки.

Доведення теореми 3.3.1. Нехай $\overset{(s)}{v}(x)$, $(s = 1,2,3)$, $\overset{(3)}{v} = \overset{(1)}{v} + \overset{(2)}{v}$ – є розв'язками рівняння лінійної теплопровідності $v_0 - v_{11} = 0$. Це рівняння зв'язане з рівнянням Бюргерса (2.3.1) за допомогою ПБ (2.3.5). Отже, перетворенням $\overset{(3)}{u}$ знаходимо

$$\overset{(3)}{u}(x) = -2\partial_1 \ln \overset{(3)}{v} = -2\partial_1 \ln(\overset{(1)}{v} + \overset{(2)}{v}).$$

З іншого боку, кожний розв'язок $\overset{(k)}{v}$, $(k = 1,2)$ зв'язаний з $\overset{(k)}{u}$ співвідношеннями (2.3.5)

$$-2\partial_1 \ln \overset{(k)}{v} = \overset{(k)}{u}, \qquad -2\partial_0 \ln \overset{(k)}{v} = u_1 - \frac{1}{2}\overset{(k)}{u}{}^2.$$

Позначимо $\overset{(k)}{v}(x) \equiv \overset{(k)}{\tau}(x)$, після чого одержуємо шукану систему у вигляді (3.3.2). Теорема доведена. ■

2. Розглянемо рівняння класу (2.3.8)

$$u_0 - \partial_1 (u^{-2} u_1) = 0. \qquad (3.3.3)$$

З формули (2.3.13) випливає, що (3.3.3) зводиться до рівняння лінійної теплопровідності

$$w_0 - w_{11} = 0\ , \qquad (w = w(y_0, y_1)) \qquad (3.3.4)$$

за допомогою перетворень $u = v_1$, та (2.3.10):

$$u_0 = \partial_1 (u^{-2} u_1) \xrightarrow{u=v_1} v_0 = v_1^{-2} v_{11} \xrightarrow{(2.3.10)} w_0 - w_{11}.$$

Якщо $\overset{(k)}{w}$, $(k = 1,2)$ є розв'язками лінійного рівняння (3.3.4), то $\overset{(3)}{w} = \overset{(1)}{w} + \overset{(2)}{w}$ також є розв'язком цього рівняння. Одержані результати дозволяють записати формулу суперпозиції розв'язків рівняння (3.3.3).

Теорема 3.3.2. Нехай відомі два розв'язки $\overset{(k)}{u}(x_0, x_1)$, $(k = 1,2)$ рівняння (3,3.3), тоді новий розв'язок $\overset{(3)}{u}(x_0, x_1)$ цього рівняння будується за формулою

$$\left|\begin{aligned} &\overset{(3)}{u}{}^{-1}(x_0, x_1) = \overset{(1)}{u}{}^{-1}(x_0, \overset{(1)}{\tau}) + \overset{(2)}{u}{}^{-1}(x_0, \overset{(2)}{\tau})\ , \\ &\overset{(1)}{u}(x_0, \overset{(1)}{\tau})\, d\overset{(1)}{\tau} = \overset{(2)}{u}(x_0, \overset{(2)}{\tau})\, d\overset{(2)}{\tau}\ , \\ &x_1 = \overset{(1)}{\tau} + \overset{(2)}{\tau}\ , \\ &\overset{(k)}{\tau}_0 = \overset{(k)}{\tau}_1{}^{-2} \cdot \overset{(k)}{\tau}_{11} \cdot \overset{(k)}{u}{}^{-2}(x_0, \overset{(k)}{\tau})\ . \ \square \end{aligned}\right. \qquad (3.3.5)$$

Доведення. Добуток перетворень $u = v_1$ та (2.3.10) можна представити у вигляді однієї формули

$$u(x_0, x_1) = w_1^{-1}(y_0, y_1)\ , \quad x_1 = w(y_0, y_1)\ , \quad x_0 = y_0\ . \qquad (3.3.6)$$

Зв'яжемо перетворенням (3.3.6) розв'язок $\overset{(3)}{u}$ та $\overset{(3)}{w} = \overset{(1)}{w} + \overset{(2)}{w}$.

$$\overset{(3)}{u} = \frac{1}{\overset{(1)}{w}_1 + \overset{(2)}{w}_1}\ , \qquad x_1 = \overset{(1)}{w} + \overset{(2)}{w}\ . \qquad (3.3.7)$$

Позначимо $y_1 = \theta$ та обернемо перетворення (3.3.6). Для розв'язків $\overset{(k)}{w}$ та $\overset{(k)}{u}$ знаходимо співвідношення

$$\overset{(k)}{w}_{\theta} = \overset{(k)}{u}{}^{-1}(x_0,\overset{(k)}{\tau}), \qquad \overset{(k)}{\tau} = \overset{(k)}{w}(x_0,\theta). \tag{3.3.8}$$

Підстановкою (3.3.8) у формулу (3.3.7) одержуємо

$$\overset{(3)}{u} = \frac{1}{\overset{(1)}{u}{}^{-1} + \overset{(2)}{u}{}^{-1}}, \qquad x_1 = \overset{(1)}{\tau} + \overset{(2)}{\tau},$$

тобто перше і третє співвідношення системи (3.3.5). Крім того, з (3.3.8) знаходимо рівність

$$\frac{\partial \overset{(k)}{\tau}}{\partial \theta} = \overset{(k)}{w}_{\theta} = \overset{(k)}{u}{}^{-1}, \quad (k = 1,2).$$

Останню формулу перепишемо у вигляді

$$d\theta = \overset{(1)}{u}\, d\overset{(1)}{\tau} = \overset{(2)}{u}\, d\overset{(2)}{\tau},$$

звідки випливає друге співвідношення системи (3.3.5).

Для полегшення доведення останнього рівняння системи (3.3.5) зробимо підстановку

$$u = q^{-1}. \tag{3.3.9}$$

Рівняння (3.3.3) тепер має вигляд

$$q_0 - q^2 q_{11} = 0, \tag{3.3.10}$$

а система (3.3.5) стає такою:

$$\overset{(3)}{q}(x_0,x_1) = \overset{(1)}{q}(x_0,\overset{(1)}{\tau}) + \overset{(2)}{q}(x_0,\overset{(2)}{\tau}), \tag{3.3.11а}$$

$$\overset{(1)}{q}{}^{-1}(x_0,\overset{(1)}{\tau})\,d\overset{(1)}{\tau} = \overset{(2)}{q}{}^{-1}(x_0,\overset{(2)}{\tau})\,d\overset{(2)}{\tau}, \tag{3.3.11б}$$

$$x_1 = \overset{(1)}{\tau} + \overset{(2)}{\tau} \tag{3.3.11в}$$

$$\overset{(k)}{\tau}_0 = \overset{(k)}{\tau}_1{}^{-2}\cdot \overset{(k)}{\tau}_{11}\cdot \overset{(k)}{q}{}^{2}(x_0,\overset{(k)}{\tau}). \tag{3.3.11г}$$

Отже, залишається знайти рівняння (3.3.11г). Одержимо деякі допоміжні співвідношення. Для цього продиференціюємо (3.3.11в) по x_1. Знаходимо

$$\overset{(1)}{\tau}_1 + \overset{(2)}{\tau}_1 = 1\ . \qquad (3.3.12)$$

З іншого боку, з (3.3.11б) випливає $\overset{(1)}{\tau}\,\overset{(1)}{q}^{-1} = \overset{(2)}{\tau}\,\overset{(2)}{q}^{-1}$,
звідки

$$\overset{(2)}{\tau}_1 = \overset{(2)}{q}\,\overset{(1)}{q}^{-1}\,\overset{(1)}{\tau}_1\ . \qquad (3.3.13)$$

Підставивши (3.3.13) в (3.3.12), одержуємо

$$\overset{(1)}{\tau}_1 + \overset{(2)}{q}\,\overset{(1)}{q}^{-1}\,\overset{(1)}{\tau}_1 = 1\ ,$$

або

$$\overset{(1)}{\tau}_1 (\overset{(1)}{q} + \overset{(2)}{q}) = \overset{(1)}{q}\ . \qquad (3.3.14a)$$

Аналогічно

$$\overset{(2)}{\tau}_1 (\overset{(1)}{q} + \overset{(2)}{q}) = \overset{(2)}{q}\ . \qquad (3.3.14б)$$

Далі знаходимо

$$\overset{(3)}{q}_0 = \overset{(1)}{q}_0 + \overset{(1)}{q}_1\,\overset{(1)}{\tau}_0 + \overset{(2)}{q}_0 + \overset{(2)}{q}_1\,\overset{(2)}{\tau}_0\ ,$$

$$\overset{(3)}{q}_1 = \overset{(1)}{q}_1\,\overset{(1)}{\tau}_1 + \overset{(2)}{q}_1\,\overset{(2)}{\tau}_1\ ,$$

$$\overset{(3)}{q}_{11} = \overset{(1)}{q}_{11}\,\overset{(1)}{\tau}_1^{\,2} + \overset{(1)}{q}_1\,\overset{(1)}{\tau}_{11} + \overset{(2)}{q}_{11}\,\overset{(2)}{\tau}_1^{\,2} + \overset{(2)}{q}_1\,\overset{(2)}{\tau}_{11}\ . \qquad (3.3.15)$$

Підставимо знайдені вирази $\overset{(3)}{q}_0$, $\overset{(3)}{q}_1$, $\overset{(3)}{q}_{11}$, ($\overset{(3)}{q} = \overset{(1)}{q} + \overset{(2)}{q}$) із (3.3.15) в рівняння (3.3.10).

$$\overset{(1)}{q}_0 + \overset{(1)}{q}_1\,\overset{(1)}{\tau}_0 + \overset{(2)}{q}_0 + \overset{(2)}{q}_1\,\overset{(2)}{\tau}_0 - \left[\overset{(1)}{q} + \overset{(2)}{q}\right]^2 \left[\overset{(1)}{q}_{11}\,\overset{(1)}{\tau}_1^{\,2} + \right.$$

$$\left. + \overset{(1)}{q}_1\,\overset{(1)}{\tau}_{11} + \overset{(2)}{q}_{11}\,\overset{(2)}{\tau}_1^{\,2} + \overset{(2)}{q}_1\,\overset{(2)}{\tau}_{11}\right] = 0\ . \qquad (3.3.16)$$

Перейдемо в рівнянні (3.3.16) на многовид, прийнявши $\overset{(k)}{q}_0 = \overset{(k)}{q}^2\,\overset{(k)}{q}_{11}$. Після розщеплення одержуємо умови (3.3.11a). Оскільки рівняння (3.3.3) і (3.3.10) та системи (3.3.5) і (3.3.11) є еквівалентними, то нами доведено останнє співвідношення системи (3.3.5). Теорема доведена. ■

В ході доведення попередньої теореми нами одержаний ще один цікавий результат.

Наслідок 3.3.I. Принцип нелінійної суперпозиції розв'язків рівняння (3.3.10) допускає представлення у вигляді системи (3.3.11). ■

Приклад 3.3.I. Візьмемо два найпростіших стаціонарних розв'язки рівняння (3.3.10)

$$\overset{(1)}{q} = x_1 , \qquad \overset{(2)}{q} = 2x_1 .$$

Використаємо формулу (3.3.11) для побудови нового розв'язку $\overset{(3)}{q}$. Отже, система (3.3.11) має вигляд

$$\overset{(3)}{q} = \overset{(1)}{\tau} + 2\overset{(2)}{\tau} , \qquad x_1 = \overset{(1)}{\tau} + \overset{(2)}{\tau} ,$$

$$\overset{(1)}{\tau}{}^{-1} d\overset{(1)}{\tau} = \tfrac{1}{2}\overset{(2)}{\tau}{}^{-1} d\overset{(2)}{\tau} , \qquad \overset{(1)}{\tau}_0 = \overset{(1)}{\tau}_1{}^{-2}\overset{(1)}{\tau}_{11}\overset{(1)}{\tau}{}^2 .$$

Звідси одержуємо співвідношення

$$\overset{(2)}{\tau} = x_1 - \overset{(1)}{\tau} , \qquad q = 2x_1 - \overset{(1)}{\tau} ,$$

$$\overset{(1)}{\tau}{}^2 = (x_1 - \overset{(1)}{\tau})\, c(x_0) .$$

Останнє рівняння на $\overset{(1)}{\tau}$ має розв'язок

$$\overset{(1)}{\tau} = -c\left[1 \pm \sqrt{1 + 2x_1 c^{-1}}\right] .$$

Підставивши знайдене $\overset{(1)}{\tau}$ в рівняння

$$\overset{(1)}{\tau}_0 = \overset{(1)}{\tau}_1{}^{-2}\overset{(1)}{\tau}_{11}\overset{(1)}{\tau}{}^2 ,$$

знаходимо умову на c: $\dot{c} + 2c = 0$. Таким чином, $c = e^{-2x_0}$, і шуканий розв'язок $\overset{(3)}{q}$ має вигляд

$$\overset{(3)}{q}(x_0, x_1) = \pm e^{-2x_0}\left[1 + 2x_1 e^{2x_0} \pm \sqrt{1 + 2x_1 e^{2x_0}}\right] .$$

Він вже є нестаціонарним.

II. Розглянемо рівняння типу Гарі-Діма. Це еволюційні рівняння третього порядку в просторі $\mathbb{R}(1,1)$. У класах рівнянь (2.3.26), (2.3.26а), (2.3.27)

$$u_0 - f(u)u_{111} = 0 , \tag{3.3.17}$$

$$z_0 - \partial_1^3 c(z) = 0 , \quad (u = c(z)) , \tag{3.3.17а}$$

$$w_0 - g(w_{11})w_{111} = 0 \tag{3.3.18}$$

містяться рівняння, які допускають нелокальну лінеаризацію. Справді, виконавши перетворення (2.3.29), (2.3.31), (2.3.33) в рівнянні (3.3.17а), знаходимо

$$z_0 = \partial_1^2 \left[\dot{c}(z^{-1})z^{-3}z_1\right] . \tag{3.3.19}$$

Якщо функція $c(z)$ задовольняє умову

$$\dot{c}(z^{-1})z^{-3} = \lambda = \mathrm{const} , \tag{3.3.20}$$

то рівняння (3.3.17а) лінеаризується. Позначимо $z \equiv v$. Тоді $v_0 - \lambda v_{111} = 0$. Таким чином, нами встановлено, що рівняння

$$u_0 - u^{\frac{3}{2}} \cdot u_{111} = 0 , \tag{3.3.21а}$$

$$z_0 - \partial_1{}^3 (z^{-2}) = 0 , \tag{3.3.21б}$$

$$w_0 - w_{11}^{-3}\, w_{111} = 0 \tag{3.3.21в}$$

зводяться до лінійного

$$v_0 - v_{111} = 0 , \quad (\lambda = 1) . \tag{3.3.22}$$

Для кожного з цих рівнянь існує власна формула суперпозиції розв'язків. Наведемо результат для рівняння (3.3.21а).

Теорема 3.3.3. Формула нелінійної суперпозиції розв'язків рівняння (3.3.21а)

$$u_0 - u^{\frac{3}{2}} u_{111} = 0$$

має вигляд

$$\left\{\begin{aligned}
&\overset{(3)}{u}(x_0,x_1) = \overset{(1)}{u}(x_0,\overset{(1)}{\tau}) + \overset{(2)}{u}(x_0,\overset{(2)}{\tau}) + \\
&\quad + 2\sqrt{\overset{(1)}{u}(x_0,\overset{(1)}{\tau})\,\overset{(2)}{u}(x_0,\overset{(2)}{\tau})}, &&(3.3.23а)\\
&\frac{d\overset{(1)}{\tau}}{\sqrt{\overset{(1)}{u}(x_0,\overset{(1)}{\tau})}} = \frac{d\overset{(2)}{\tau}}{\sqrt{\overset{(2)}{u}(x_0,\overset{(2)}{\tau})}}, &&(3.3.23б)\\
&\overset{(1)}{\tau} + \overset{(2)}{\tau} = x_1, &&(3.3.23в)\\
&\overset{(1)}{\tau}_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\overset{(1)}{u}(x_0,\overset{(1)}{\tau})\,\overset{(2)}{u}(x_0,\overset{(2)}{\tau})}}{\sqrt{\overset{(1)}{u}(x_0,\overset{(1)}{\tau})} + \sqrt{\overset{(2)}{u}(x_0,\overset{(2)}{\tau})}}\cdot\\
&\quad\cdot\left[\overset{(1)}{u}_{11}(x_0,\overset{(1)}{\tau}) + \overset{(2)}{u}_{11}(x_0,\overset{(2)}{\tau})\right]. \ \square &&(3.3.23г)
\end{aligned}\right.$$

Доведення. Припустимо, що $\overset{(s)}{v}$, $s = 1,2,3$, $\overset{(3)}{v} = \overset{(1)}{v} + \overset{(2)}{v}$ – розв'язки лінійного рівняння (3.3.22), а $\overset{(k)}{u}(x_0,x_1)$ – відомі розв'язки рівняння (3.3.21а). Новий розв'язок $\overset{(3)}{u}(x_0,x_1)$ цього рівняння зв'язаний з функцією $\overset{(3)}{w}(y_0,y_1)$ співвідношенням

$$\overset{(3)}{u}(x_0,x_1) = \overset{(3)}{w}_{11}^{\,-2}(x_0,x_1).$$

Розв'язок $\overset{(3)}{v}(y_0,y_1)$ зв'язаний з $\overset{(3)}{w}$ перетворенням Ейлера-Ампера

$$\overset{(3)}{w}(x_0,x_1) = y_1\cdot\overset{(3)}{v}_1 - \overset{(3)}{v},$$

$$\overset{(3)}{x_1} = v_1, \quad x_0 = y_0 . \tag{3.3.24}$$

З цих рівнянь випливає, що

$$\overset{(3)}{w}_{11}(x_0,x_1) = \overset{(3)}{v}{}_{11}^{-1}(y_0,y_1) . \tag{3.3.25}$$

Отже,

$$\overset{(3)}{u}(x_0,x_1) = \overset{(3)}{v}{}_{11}^{2}(y_0,y_1) . \tag{3.3.26}$$

В свою чергу, кожний розв'язок $\overset{(k)}{v}$, $(k = 1,2)$ лінійного рівняння (3.3.22) можна зв'язати з функціями $\overset{(k)}{u}(x_0,x_1)$. Замінимо в цих розв'язках x_1 параметрами $\overset{(1)}{\tau}$ і $\overset{(2)}{\tau}$ відповідно. Тоді

$$\overset{(k)}{v} = \overset{(k)}{\tau} \cdot \overset{(k)}{w}_1 - \overset{(k)}{w}, \tag{3.3.27}$$

$$y_1 = \overset{(k)}{w}_1, \quad y_0 = x_0, \quad \overset{(k)}{w} = \overset{(k)}{w}(x_0,\overset{(k)}{\tau}) .$$

Звідси одержуємо рівності

$$\overset{(k)}{w}(x_0,\overset{(k)}{\tau}) = \overset{(k)}{u}{}^{-\frac{1}{2}}(x_0,\overset{(k)}{\tau}), \quad (k = 1,2) .$$

Проінтегрувавши двічі по $\overset{(k)}{\tau}$, знаходимо співвідношення

$$\overset{(k)}{w}(x_0,\overset{(k)}{\tau}) = \int \left[\int \overset{(k)}{u}{}^{-\frac{1}{2}}(x_0,\overset{(k)}{\tau})\,d\overset{(k)}{\tau} \right] d\overset{(k)}{\tau} . \tag{3.3.28}$$

Підставимо знайдені $\overset{(k)}{w}$ у формули (3.3.27) та (3.3.26), де $\overset{(3)}{v}_{11} = \overset{(1)}{v}_{11} + \overset{(2)}{v}_{11}$. Одержуємо

$$\overset{(3)}{u}(x_0,x_1) = \left[\overset{(1)}{u}{}^{\frac{1}{2}}(x_0,\overset{(1)}{\tau}) + \overset{(2)}{u}{}^{\frac{1}{2}}(x_0,\overset{(2)}{\tau}) \right]^{2}, \tag{3.3.29}$$

$$x_1 = \overset{(1)}{\tau} + \overset{(2)}{\tau}, \tag{3.3.30}$$

$$y_1 = \overset{(1)}{w}_1(x_0,\overset{(1)}{\tau}) = \overset{(2)}{w}_1(x_0,\overset{(2)}{\tau}) . \tag{3.3.31}$$

Продиференціювавши (3.3.31) по $\overset{(1)}{\tau}$, знаходимо

$$\frac{d\overset{(2)}{\tau}}{d\overset{(1)}{\tau}} = \frac{\overset{(1)}{w}_{11}}{\overset{(2)}{w}_{11}} . \tag{3.3.32}$$

Замінимо в цій рівності похідні $\overset{(k)}{w}_{11}$ виразами $\overset{(k)}{u}{}^{-\frac{1}{2}}$. Маємо ЗДР

$$\frac{d\overset{(1)}{\tau}}{\sqrt{\overset{(1)}{u}(x_0,\overset{(1)}{\tau})}} = \frac{d\overset{(2)}{\tau}}{\sqrt{\overset{(2)}{u}(x_0,\overset{(2)}{\tau})}} \tag{3.3.33}$$

з поділеними змінними. В результаті інтегрування цього ЗДР виникає довільна функція $\lambda_1(x_0)$. Для уточнення виразу $\overset{(1)}{\tau}$ знайдемо умову (3.3.23г). Скористаємось для цього рівністю (3.3.23а) та обчислимо похідні $\overset{(3)}{u}_0$, $\overset{(3)}{u}_1$, $\overset{(3)}{u}_{11}$, $\overset{(3)}{u}_{111}$.

$$\overset{(3)}{u}_0 = \left[\sqrt{\overset{(1)}{u}} + \sqrt{\overset{(2)}{u}}\right]\left\{\frac{\overset{(1)}{u}_0}{\sqrt{\overset{(1)}{u}}} + \frac{\overset{(2)}{u}_0}{\sqrt{\overset{(2)}{u}}} + \overset{(1)}{\tau}_0\frac{\overset{(1)}{u}_1}{\sqrt{\overset{(1)}{u}}} + \overset{(2)}{\tau}_0\frac{\overset{(2)}{u}_1}{\sqrt{\overset{(2)}{u}}}\right\},$$

$$\overset{(3)}{u}_1 = \overset{(1)}{u}_1 + \overset{(2)}{u}_1 , \tag{3.3.34}$$

$$\overset{(3)}{u}_{11} = \frac{\overset{(1)}{u}_{11}\sqrt{\overset{(1)}{u}} + \overset{(2)}{u}_{11}\sqrt{\overset{(2)}{u}}}{\sqrt{\overset{(1)}{u}} + \sqrt{\overset{(2)}{u}}} ,$$

$$\overset{(3)}{u}_{111} = \frac{\overset{(1)}{u}\,\overset{(1)}{u}_{111} + \overset{(2)}{u}\,\overset{(2)}{u}_{111}}{\sqrt{\overset{(1)}{u}} + \sqrt{\overset{(2)}{u}}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\overset{(1)}{u}\,\overset{(2)}{u}}\left[\overset{(1)}{u}_{111} - \overset{(2)}{u}_{111}\right]\left[\left[\sqrt{\overset{(1)}{u}}\right]_1 - \left[\sqrt{\overset{(2)}{u}}\right]_1\right]}{\left[\sqrt{\overset{(1)}{u}} + \sqrt{\overset{(2)}{u}}\right]^3} .$$

З рівнянь (3.3.23 б,в) знаходимо

$$\overset{(3)}{\tau}_1 = \frac{\sqrt{\overset{(k)}{u}}}{\sqrt{\overset{(1)}{u}} + \sqrt{\overset{(2)}{u}}} ,$$

$$\overset{(1)}{\tau}_0 = - \overset{(2)}{\tau}_0 , \quad \overset{(1)}{\tau}_{11} + \overset{(2)}{\tau}_{11} = 0 . \tag{3.3.35}$$

Підставивши одержані вирази (3.3.34), (3.3.35) в рівняння (3.3.21a), приходимо до шуканого рівняння на $\overset{(1)}{\tau}$ (3.3.23$г$). Знайдена умова сумісно із знайденими вище (3.3.29), (3.3.30), (3.3.33) і утворює формулу (3.3.23). Теорема доведена. ■

Проілюструємо ефективність формули (3.3.23) прикладами.

Приклад 3.3.2. Візьмемо за вихідні найпростіші стаціонарні розв'язки рівняння (3.3.21a)

$$\overset{(1)}{u} = x_1^2 , \qquad \overset{(2)}{u} = 4x_1^2 .$$

Замінимо в цих розв'язках x_1 на параметри $\overset{(1)}{\tau}$ та $\overset{(2)}{\tau}$ відповідно

$$\overset{(1)}{u} = \overset{(1)}{\tau}{}^2 , \qquad \overset{(2)}{u} = 4 \overset{(2)}{\tau}{}^2 .$$

Диференціальне рівняння (3.3.23$б$) для цих функцій має вигляд

$$\frac{d \overset{(2)}{\tau}}{d \overset{(1)}{\tau}} = 2 \frac{\overset{(2)}{\tau}}{\overset{(1)}{\tau}} . \tag{3.3.36}$$

Його загальний розв'язок є таким:

$$\overset{(2)}{\tau} = - \frac{\overset{(1)}{\tau}{}^2}{2\lambda(x_0)} . \tag{3.3.37}$$

Тут $\lambda(x_0)$ – довільна гладка функція. Замінивши у (3.3.37) $\overset{(2)}{\tau}$ за допомогою рівності (3.3.23в) виразом $x_1 - \overset{(1)}{\tau}$, одержуємо рівняння на $\overset{(1)}{\tau}$

$$\overset{(1)}{\tau}{}^2 - 2\lambda \overset{(1)}{\tau} + 2\lambda x_1 = 0 . \tag{3.3.38}$$

Отже,

$$\overset{(1)}{\tau} = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 2x_1\lambda} \quad ,$$

і з формули (3.3.23*а*) випливає

$$\overset{(3)}{u}(x_0,x_1) = \left[\overset{(1)}{\tau} + 2\overset{(2)}{\tau}\right]^2 = \left[2x_1 - \overset{(1)}{\tau}\right]^2 =$$

$$= \left[2x_1 - \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 2x_1\lambda}\,\right]^2 . \qquad (3.3.39)$$

Функцію $\lambda(x_0)$ уточнюємо з умови (3.3.23*г*). Підставивши знайдене $\overset{(1)}{\tau}$ в (3.3.23*г*), приходимо до рівняння на λ: $\dot{\lambda} + 6\lambda = 0$. Отже, $\lambda = c\cdot e^{-6x_0}$, де c – довільна стала. Таким чином, новий розв'язок $\overset{(3)}{u}(x_0,x_1)$ рівняння (3.3.21*а*) має вигляд

$$\overset{(3)}{u}(x_0,x_1) = \left[2x_1 - c\cdot e^{-6x_0} \pm \sqrt{c^2 e^{-12x_0} - 2c\cdot x_1 e^{-6x_0}}\,\right]^2 .$$

Звернемо увагу на те, що з двох стаціонарних розв'язків за допомогою формули (3.3.23) одержано новий розв'язок, який вже є нестаціонарним.

Приклад 3.3.3. Нехай тепер вихідні розв'язки рівняння (3.3.21*а*) є такими:

$$\overset{(1)}{u} = x_1^2 \quad , \qquad \overset{(2)}{u} = 9x_1^2 \quad .$$

Перепишемо їх в змінних $\overset{(1)}{\tau}$, $\overset{(2)}{\tau}$

$$\overset{(1)}{u} = \overset{(1)}{\tau}{}^2 \quad , \qquad \overset{(2)}{u} = 9\,\overset{(2)}{\tau}{}^2 \quad .$$

Розв'язавши ЗДР (3.3.23*б*), на відміну від попереднього прикладу, одержуємо кубічне рівняння на $\overset{(1)}{\tau}$

$$\overset{(1)}{\tau}{}^3 - \lambda\,\overset{(1)}{\tau} + \lambda x_1 = 0 \,, \qquad \lambda = \lambda(x_0) \ . \qquad (3.3.40)$$

Дійсний розв'язок цього рівняння запишемо у вигляді

$$\overset{(1)}{\tau} = -3\,\tilde{\lambda}^{-1} \cos \tfrac{1}{3} \arccos \tilde{\lambda} x_1 \quad ,$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\lambda^{-\frac{1}{2}}(x_0) .$$

Із формули (3.3.23a) знаходимо

$$\overset{(3)}{u}(x_0,x_1) = \left[3x_1 - 2\overset{(1)}{\tau}\right]^2 = 9\left[x_1 - \frac{2}{3}\overset{(1)}{\tau}\right]^2 =$$

$$= 9\left[x_1 + 2\,\tilde{\lambda}^{-1}\cos\frac{1}{3}\arccos\tilde{\lambda}x_1\right]^2 .$$

Умова на $\lambda(x_0)$, знайдена з (3.3.23$г$), має вигляд $\dot{\lambda} - 12\lambda = 0$. Отже,

$$\lambda = c\cdot e^{12x_0} .$$

c – довільна стала. Розв'язок $\overset{(3)}{u}$ тепер одержує остаточний вигляд

$$\overset{(3)}{u}(x_0,x_1) = 9\left[x_1 + 2c\cdot e^{-12x_0}\cos\frac{1}{3}\arccos\left\{cx_1 e^{12x_0}\right\}\right]^2 .$$

Отже, ми розглянули найбільш прості приклади розмноження розв'язків рівняння (3.3.21a). Інші розв'язки можна побудувати аналогічно. Усі одержані розв'язки можуть бути розмножені за відповідною групою Лі рівняння (3.3.21a).

III. Для рівнянь нелінійної теорії коливань, які зводяться до відповідних лінійних рівнянь, також можна побудувати формули нелінійної суперпозиції та виконати розмноження їх розв'язків. Крім того, нижче покажемо, як по відомих частинних розв'язках лінійного рівняння за допомогою НПЗ можна знаходити відповідні розв'язки нелінійного рівняння.

1. Груповий аналіз рівняння (2.3.68)

$$L_1(u) \equiv u_{00} - \partial_1\left[c(u)u_1\right] = 0 \qquad (3.3.41)$$

був виконаний в роботі [137], таким чином, для нього можна побудувати широкі набори частинних розв'язків. Розширити симетрію рівняння (3.3.41) можна за допомогою нелокального перетворення, зв'язавши його з лінійним рівнянням. Це вже зроблено нами для довільної функції $c(u)$ у розділі II (§ 3, теорема 2.3.6). Знайдене НПЗ дозволяє побудувати відповідний принцип нелінійної суперпозиції розв'язків.

Теорема 3.3.4. Нехай $\overset{(k)}{u}(x_0,x_1)$, $(k = 1,2)$ є відомими розв'язками рівняння (3.3.41), тоді новий розв'язок $\overset{(3)}{u}(x_0,x_1)$ цього рівняння будується за формулою

$$\left\{\begin{aligned}
&\overset{(3)}{u}(x_0,x_1) = \overset{(1)}{u}(\overset{(1)}{\tau})\frac{d\overset{(1)}{\tau}_i}{d\,x_1} + \overset{(2)}{u}(\overset{(2)}{\tau})\frac{d\overset{(2)}{\tau}_i}{d\,x_1}\,, && \text{(3.3.42а)}\\
&\overset{(1)}{\tau} + \overset{(2)}{\tau} = x\,, \quad x = (x_0,x_1)\,, \quad \overset{(k)}{\tau} = (\overset{(k)}{\tau}_0, \overset{(k)}{\tau}_1)\,, && \text{(3.3.42б)}\\
&\overset{(1)}{u}(\overset{(1)}{\tau}) = \overset{(2)}{u}(\overset{(2)}{\tau})\,, \quad (k = 1,2)\,, && \text{(3.3.42в)}\\
&\overset{(1)}{u}_0(\overset{(1)}{\tau})d\overset{(1)}{\tau}_1 = \overset{(2)}{u}_0(\overset{(2)}{\tau})d\overset{(2)}{\tau}_1\,. && \text{(3.3.42г)}
\end{aligned}\right.$$

Тут позначено

$$\overset{(k)}{u}_0(\overset{(k)}{\tau}) \equiv \partial_{\overset{(k)}{\tau}_0}\overset{(k)}{u}(\overset{(k)}{\tau})\,. \ \square$$

Доведення. Перетворення (2.3.69), що зв'язує рівняння (3.3.41) з лінійним

$$v_{11} - c(y_1)v_{00} = 0\,, \tag{3.3.43}$$

є добутком перетворень $u = z_1$ та Лежандра

$$\begin{aligned} &z = y_\mu v_\mu - v\\ &x_\mu = v_\mu\,, \qquad (\mu = 0,1)\,. \end{aligned} \tag{3.3.44}$$

Справді, підстановкою $u = z_1$ в рівняння (3.3.41) знаходимо

$$z_{00} - c(z_1)z_{11} = 0\,. \tag{3.3.45}$$

Перетворенням (3.3.44) цього рівняння одержуємо лінійне рівняння (3.3.43). Припустимо, $\overset{(k)}{u}(x_0,x_1)$, $(k = 1,2)$ – відомі розв'язки рівняння (3.3.41). Новий розв'язок $\overset{(k)}{u}(x_0,x_1)$ побудуємо з цих розв'язків, замінивши в них x_0, x_1 параметрами $\overset{(k)}{\tau} = (\overset{(k)}{\tau_0}, \overset{(k)}{\tau_1})$ відповідно. З підстановки $u = z_1$ випливає

$$\int \overset{(s)}{u}(\overset{(s)}{\tau_0}, \overset{(s)}{\tau_1})\, d\overset{(s)}{\tau_1} = \overset{(s)}{z}, \qquad (s = 1,2,3) . \tag{3.3.46}$$

$$\overset{3}{x} \equiv \overset{(3)}{\tau}(x_0,x_1) .$$

Виконаємо перетворення Лежандра (3.3.44) функції $\overset{(3)}{z}$:

$$\overset{(3)}{z}(x_0,x_1) = y_\mu \overset{(3)}{v_\mu} - \overset{(3)}{v} = y_\mu \overset{(1)}{v_\mu} - \overset{(1)}{v} + y_\mu \overset{(2)}{v_\mu} - \overset{(2)}{v} =$$

$$= \overset{(1)}{z}(\overset{(1)}{\tau}) + \overset{(2)}{z}(\overset{(2)}{\tau}), \quad (\mu = 0,1) , \tag{3.3.47}$$

$$x_\mu = \overset{(3)}{v_\mu} = \overset{(1)}{v_\mu} + \overset{(2)}{v_\mu} = \overset{(1)}{\tau_\mu} + \overset{(2)}{\tau_\mu} . \tag{3.3.48}$$

Функції $\overset{(k)}{v}$, $(k = 1,2)$ зв'яжемо з $\overset{(k)}{u}$ за допомогою оберненого перетворення

$$\overset{(k)}{v} = \overset{(k)}{\tau_\mu} \cdot \overset{(k)}{z_\mu} - \overset{(k)}{z} ,$$

$$y_\mu = \overset{(k)}{z_\mu} . \tag{3.3.49}$$

Звідси випливає, що $\overset{(k)}{v_\mu} = \overset{(k)}{\tau_\mu}$. З рівності $y_1 = \overset{(1)}{z}_{\overset{(1)}{\tau_1}} = \overset{(2)}{z}_{\overset{(2)}{\tau_2}}$

в силу співвідношення

$$\overset{(k)}{u} = \overset{(k)}{z}_{\overset{(k)}{\tau_1}} \tag{3.3.50}$$

одержуємо рівність (3.3.42в)

$$\overset{(1)}{u}(\overset{(1)}{\tau}) = \overset{(2)}{u}(\overset{(2)}{\tau}) .$$

Скористаємось тепер умовою

$$y_0 = \overset{(1)}{z}_{\overset{(1)}{\tau}_0} = \overset{(2)}{z}_{\overset{(2)}{\tau}_0} .$$

Продиференціювавши її по $\overset{(1)}{\tau_1}$, знаходимо

$$\overset{(1)}{z}_{\overset{(1)}{\tau}_0\overset{(1)}{\tau}_1} = \overset{(2)}{z}_{\overset{(2)}{\tau}_0\overset{(2)}{\tau}_1} \cdot \frac{d\overset{(2)}{\tau_1}}{d\overset{(1)}{\tau_1}} ,$$

або, враховуючи (3.3.50), формулу (3.3.42*г*)

$$\overset{(1)}{u}_{\overset{(1)}{\tau}_0}(\overset{(1)}{\tau})d\overset{(1)}{\tau_1} = \overset{(2)}{u}_{\overset{(2)}{\tau}_0}(\overset{(2)}{\tau})d\overset{(2)}{\tau_1} .$$

Перепишемо тепер (3.3.47) за допомогою розв'язків $\overset{(s)}{u}$.

$$\int \overset{(3)}{u}(x_0, x_1)dx_1 = \int \overset{(1)}{u}(\overset{(1)}{\tau})d\overset{(1)}{\tau_1} = \int \overset{(2)}{u}(\overset{(2)}{\tau})d\overset{(2)}{\tau_1} .$$

Продиференціювавши це співвідношення по x_1, приходимо до співвідношення (3.3.42*а*). Таким чином, нами одержані усі рівняння системи (3.3.42). Теорема доведена. ■

Побудувавши розв'язки лінійного рівняння (3.3.43), за допомогою НПЗ (2.3.69) знаходимо відповідні розв'язки не лінійного рівняння (3.3.41). Розглянемо декілька випадків залежності $c(u)$.

1). $c(u) = (\alpha u + b)^{-4}$, α, b – довільні сталі. Розв'язок лінійного рівняння має вигляд [147]

$$v(y_0, y_1) = (\alpha u + b)\left[f\left[\frac{1}{\alpha y_1 + b} + \alpha y_0\right] + g\left[\frac{1}{\alpha y_1 + b} - \alpha y_0\right]\right]. \quad (3.3.51)$$

Скориставшись формулами перетворення (2.3.69), знаходимо рівняння, які визначають розв'язок нелінійного рівняння у неявному вигляді

$$x_0 = \alpha(\alpha u + b)(f + g) , \quad (3.3.52)$$

$$x_1 = \alpha\left[f + g - \frac{1}{\alpha u + b}(f' + g')\right] .$$

Тут f, g – довільні функції аргументів $(\alpha u + b)^{-1} + \alpha\tau$ та $(\alpha u + b)^{-1} - \alpha\tau$ відповідно, τ – функціональний параметр $(\tau \equiv y_0)$, штрих позначає звичайну похідну.

2). $c(u) = u^{-2}$; $k_i(s)$, $(i = 1,2)$ – довільні функції параметра s. По розв'язках лінійного рівняння (3.3.43) [147]

$$v(y_0, y_1) = y_1^s\left[k_1(s)e^{\sqrt{s(s-1)}\cdot y_0} + k_2(s)e^{-\sqrt{s(s-1)}\cdot y_0}\right] \quad (3.3.53)$$

знаходимо розв'язок рівняння (3.3.41)

$$x_1^2 s^{-2} u^{2(1-s)} - x_0^2 u^{-2s} s^{-1}(s-1)^{-1} = 4k_1(s)k_2(s) . \quad (3.3.54)$$

Аналогічно будуються розв'язки у випадках, коли $c(u)$ є такими:

$$u^k , \quad \exp u , \quad (u^2 + 1)\exp\left\{-4\operatorname{arctg} u\right\} ,$$

$$(1 + u)^{2(\lambda-1)}\cdot(1 - u)^{-2(\lambda+1)} , \quad u^{-4}\cdot\exp(-2u^{-1}) .$$

3). $c(u) = \lambda\cdot u^k$, λ довільний дійсний параметр. Для побудови розв'язків лінійного рівняння скористаємось поділенням змінних

$$v(y_0, y_1) = h(y_0)\cdot g(y_1) . \quad (3.3.55)$$

Підстановкою (3.3.55) у рівняння (3.3.43) одержуємо два ЗДР

$$g'' = \varkappa\cdot C(y_1)g , \quad (3.3.56)$$

$$\ddot{h} = \varkappa\cdot h . \quad (3.3.57)$$

$\varkappa$ – стала поділення. Із (3.3.57) знаходимо

$$h^1(y_0) = c_1 \operatorname{ch}(\sqrt{\varkappa}\cdot y_0) + c_2 \operatorname{sh}(\sqrt{\varkappa}\cdot y_0) , \quad (\varkappa > 0) ,$$

$$h^2(y_0) = c_1 + c_2\cdot y_0 , \quad (\varkappa = 0) ,$$

$$h^3(y_0) = c_1\cos(\sqrt{|\varkappa|}\cdot y_0) + c_2\sin(\sqrt{|\varkappa|}\cdot y_0) . \quad (\varkappa < 0) . \quad (3.3.58)$$

Відповідні розв'язки рівняння (3.3.57) мають вигляд

α) $k = -2$, $\qquad r = \frac{1}{2}\sqrt{|4\varkappa\lambda + 1|}$,

$$g^1(y_1) = c_3 y_1^{\frac{1}{2}+r} + c_4 y_1^{\frac{1}{2}-r}, \quad (4æ\lambda + 1 > 0),$$

$$g^2(y_1) = c_3\sqrt{y_1} + c_4\sqrt{y_1}\cdot\ln y_1, \quad (4æ\lambda + 1 = 0),$$

$$g^3(y_1) = c_3\sqrt{y_1}\cos(r\cdot\ln y_1) + c_4\sqrt{y_1}\sin(r\cdot\ln y_1), \quad (4æ\lambda + 1 < 0).$$

Отже,

$$v^1 = h^3 g^1, \quad \lambda > 0, \ æ < 0; \qquad (3.3.59а)$$

$$v^2 = h^1 g^3, \quad \lambda < 0, \ æ > 0; \qquad (3.3.59б)$$

$$v^3 = h^2 g^1, \quad r = \tfrac{1}{2}, \ \lambda \in \,]-\infty; +\infty[\,, \ æ = 0; \qquad (3.3.59в)$$

$$v^4 = h^3 g^2, \quad \lambda > 0, \ æ = -(4\lambda)^{-1}, \qquad (3.3.59г)$$

$$v^5 = h^1 g^2, \quad \lambda < 0, \ æ = -(4\lambda)^{-1}. \qquad (3.3.59д)$$

c_j, $(j = \overline{1,4})$ – довільні сталі.

б). $k \neq -2$. Розв'язки рівняння (3.3.56) виражаються за допомогою функцій Бесселя [46]

$$g(y_1) = \sqrt{y_1}\, Z_\beta\left[\frac{r_i}{k+2}\sqrt{\lambda\, æ}\cdot y_1^{\frac{k+2}{2}}\right].$$

Тут $\beta = \frac{1}{k+2}$, $Z_\beta(x) = c_3 J_\beta + c_4 Y_\beta$ – циліндричні функції першого та другого роду відповідно. Таким чином, розв'язки лінійного рівняння (3.3.43) мають вигляд

$$v^6 = h^1\sqrt{y_1}\cdot Z_\beta(\omega^+), \quad \omega^+ \equiv \frac{2i}{k+2}\sqrt{\lambda\, æ}\cdot y_1^{\frac{k+2}{2}}, \qquad (3.3.60а)$$

$$v^7 = h^3\sqrt{y_1}\cdot Z_\beta(\omega^-), \quad \omega^- \equiv \frac{-2}{k+2}\sqrt{\lambda|æ|}\cdot y_1^{\frac{k+2}{2}}, \qquad (3.3.60б)$$

Із розв'язку (3.3.59а) лінійного рівняння знаходимо відповідний розв'язок нелінійного рівняння (3.3.41):

$$(c_1^2 + c_2^2)^2 = \Big[c_1 x_0 (|æ|)^{-\frac{1}{2}}(g^1(u))^{-1} - c_2 x_1 \Big[c_3\Big[\tfrac{1}{2} + r\Big]u^{r-\frac{1}{2}} +$$

$$+ c_4\Big[\tfrac{1}{2} - r\Big]u^{-\frac{1}{2}-r}\Big]^{-1}\Big]^2 + \Big[c_2 x_0 (|æ|)^{-\frac{1}{2}}(g^1(u))^{-1} +$$

$$+ c_1 x_1 \left[c_3\left[\frac{1}{2}+r\right]u^{r-\frac{1}{2}} + c_4\left[\frac{1}{2}-r\right]u^{-r-\frac{1}{2}}\right]^{-1}\Bigg]^2 . \qquad (3.3.61)$$

Аналогічно будуються розв'язки рівняння (3.3.41) із розв'язків (3.3.59 *б–д*). По розв'язках (3.3.60 *а,б*) одержуємо відповідні розв'язки рівняння (3.3.41)

$$(c_2^2 \mp c_1^2)^2 = \Big\{c_2 x_0 \left[\sqrt{|\text{æ}|u}\cdot Z_\beta(\omega^\pm)\right]^{-1} \mp$$

$$\mp c_1 x_1 \left[\frac{1}{2\sqrt{u}} Z_\beta(\omega^\pm) + \sqrt{u}\, Z'_\beta(\omega^\pm)\right]^{-1}\Big\}^2 \mp$$

$$\mp \Big\{c_1 x_0 \left[\sqrt{|\text{æ}|u}\, Z_\beta(\omega^\pm)\right]^{-1} - c_2 x_1 \Big[\frac{1}{2\sqrt{u}} Z_\beta(\omega^\pm) +$$

$$+ \sqrt{u}\, Z'_\beta(\omega^\pm)\Big]^{-1}\Big\}^2 . \qquad (3.3.62)$$

Верхній знак відповідає випадку (3.3.60*а*).

Нехай $g(y_1) = \varphi(y_1, c_1, c_2)$ є певним розв'язком рівняння (3.3.56) з довільним $c(y_1)$, тоді розв'язки відповідного нелінійного рівняння (3.3.41) будуються за формулою

$$(c_2^2 \mp c_1^2)^2 = \left[\frac{c_2 x_0}{\sqrt{|\text{æ}|}\cdot\varphi(u)} \mp \frac{c_1 x_1}{\dot\varphi(u)}\right]^2 \mp \Big[\frac{c_1 x_0}{\sqrt{|\text{æ}|}\cdot\varphi(u)} -$$

$$- \frac{c_2 x_1}{\dot\varphi(u)}\Big]^2 . \qquad (3.3.63)$$

Верхний знак відповідає $\text{æ} > 0$, нижній – випадку $\text{æ} < 0$.

2. Система рівнянь одновимірної газової динаміки

$$u_0 + uu_1 + \dot\varphi(\rho)\rho_1 = 0 ,$$

$$\rho_0 + u\rho_1 + u_1\rho = 0 \qquad (3.3.64)$$

з довільною гладкою функцією $\varphi(\rho)$ допускає лінеаризацію перетворенням годографа (1.1.23) (див. теорему 3.1.3, і формулу (3.1.9)). Але система (3.3.64) має ще іншу важливу властивість, яку ми доводимо нижче.

Теорема 3.3.5. Система рівнянь (3.3.64) нелокальними перетворенням змінних

$$1).\quad u = q_1 ,\quad q_0 = -\tfrac{1}{2}u^2 - \varphi(\rho) ,\qquad (3.3.65а)$$

$$\rho = p_1 ,\quad p_0 = -u\rho ;\qquad (3.3.65б)$$

$$2).\quad x_1 = z(t,x) ,\quad p = x ,\quad x_0 = t ;\qquad (3.3.66)$$

$$3).\quad z = y_\mu v_\mu - v ,\quad (\mu = 0,1) ,$$

$$t = v_0 ,\quad x = v_1 .\qquad (3.3.67)$$

зводиться до лінійного рівняння

$$v_{11} - c(y_1)v_{00} = 0 ,$$

$$c(y_1) = y_1^3\dot{\varphi}(y_1^{-1}) . \ \square\qquad (3.3.68)$$

Доведення. Із системи рівнянь (3.3.65) знаходимо

$$q_0 = -\tfrac{1}{2}p_0^2p_1^{-2} - \varphi(p_1) ,$$

$$q_1 = -p_0p_1^{-1} .$$

Виключивши перехресним диференціюванням з цієї системи q, одержуємо рівняння

$$\left[-\tfrac{1}{2}p_0^2p_1^{-2} + \varphi(p_1)\right]_1 = (p_0p_1^{-1})_0 .$$

Перепишемо це рівняння інакше

$$p_1^{-3}\left[p_1^2p_{00} - 2p_0p_1p_{01} + p_0^2p_{11}\right] = \dot{\varphi}(p_1)p_{11} .$$

Тепер очевидно, що це рівняння перетворенням змінних (3.3.66) зводиться до такого:

$$z_{tt} = z_1^3\cdot\dot{\varphi}(z_1^{-1})z_{11} \equiv c(z_1)z_{11} .$$

Перетворення Лежандра (3.3.67) зводить останнє до лінійного рівняння

$$v_{11} - c(y_1)v_{00} = 0 .$$

Отже, теорема доведена. ■

Таким чином, усі результати, одержані для рівнянь (3.3.41) та (3.3.43), можна за допомогою НПЗ поширити на систему рівнянь газової динаміки (3.3.64).

§4. Умовна нелокальна лінеаризація

Поставивши вимогу лінеаризованості рівняння $L_1(x,u)$ на певний підмножині розв'язків, одержуємо відповідне узагальнення методу нелокальної лінеаризації. Наведемо нижче декілька прикладів умовної лінеаризації рівнянь.

1. Розглянемо скалярне тривимірне рівняння теплопровідності

$$L_2(w) = w_0 - \Delta w = 0 . \tag{3.4.1}$$

Нехай існує така вектор- функція H, в якій виконуються співвідношення системи

$$\begin{cases} H = 2\,\nabla \ln w\ , \quad H = \|h^1, h^2, h^3\|^T, & (3.4.2) \\ \frac{1}{2}(H)^2 + (\nabla\cdot H) = \partial_0 \ln w\ , \quad \nabla\times H = 0\ . & (3.4.3) \end{cases}$$

З умови сумісності рівнянь (3.4.2), (3.4.3) випливає, що з рівнянням (3.4.1) зв'язані такі векторні рівняння:

$$H_0 - \frac{1}{2}\nabla(H)^2 - \nabla(\nabla\cdot H) = 0\ , \tag{3.4.4}$$

$$\nabla\times H = 0\ . \tag{3.4.5}$$

Припустимо далі, що $|H|^2 = (h^1)^2 + (h^2)^2 + (h^3)^2 = u^2$, тобто $H = \theta\cdot u$, де $|\theta| = 1$, $\theta = \|\theta^1, \theta^2, \theta^3\|^T$. Тоді аналогічно тому, як це було зроблено в другому розділі §4, з рівняння (3.4.4) одержуємо рівність

$$\theta\Big[u_0 - u|\nabla u| - \Delta u\Big] = -\,u\Big[\theta_0 - 2\nabla\ln u\cdot(\nabla\cdot\theta) - \nabla(\nabla\cdot\theta)\Big]\ .$$

Поставимо вимогу, щоб на деякій підмножині розв'язків рівняння (3.4.4) виконувались співвідношення

$$L_1(u) = u_0 - u\cdot|\nabla u| - \Delta u = 0\ , \tag{3.4.6}$$

$$\theta_0 - 2\nabla\ln u\cdot(\nabla\cdot\theta) - \nabla(\nabla\cdot\theta) = 0\ , \tag{3.4.7}$$

$$\nabla\times\theta = 0\ . \tag{3.4.7a}$$

В нових змінних система (3.4.4), яка зв'язує рівняння (3.4.1) та (3.4.6), має вигляд

$$\begin{cases} \nabla \ln w = \frac{1}{2}\, \theta u & (3.4.8) \\ \partial_0 \ln w = \frac{1}{4}\, u^2 + \frac{1}{2}(\nabla\cdot\theta u)\ . & (3.4.9) \end{cases}$$

Рівняння (3.4.6) можна вважати тривимірним узагальненням рівняння Бюргерса. Отже, за допомогою НПЗ (3.4.8), (3.4.9) воно зводиться до лінійного рівняння (3.4.1). Із формули (3.4.8) одержуємо таке узагальнення підстановки Коула-Хопфа:

$$u = 2\sqrt{(\nabla \ln w)^2}\ . \qquad (3.4.10)$$

Теорема 3.4.I. Нелокальне перетворення змінних (3.4.10) є лінеаризуючим перетворенням для тривимірного рівняння Бюргерса (3.4.6). □

Доведення. Виконаємо друге диференціальне продовження співвідношення (3.4.10). Маємо

$$u_0 = 2|\nabla \ln w|^{-1}\cdot \nabla \ln w\cdot\partial_0 \nabla \ln w\ ,$$

$$\nabla u = 2|\nabla \ln w|^{-1}\cdot \nabla \ln w\cdot(\nabla\cdot\nabla \ln w)\ ,$$

$$(\nabla\cdot\nabla u) = 2|\nabla \ln w|^{-1}\cdot \nabla \ln w\cdot\nabla\cdot\Delta \ln w\ . \qquad (3.4.11)$$

Підставимо (3.4.11) в рівняння (3.4.6). Знаходимо

$$\partial_0(\nabla \ln w) - 2(\nabla \ln w)\cdot\Delta \ln w - \nabla(\Delta \ln w) =$$

$$= \left[w^{-1}\nabla - w^{-2}\cdot\nabla w\right](w_0 - \Delta w) = 0\ .$$

Таким чином, нелінійне рівняння L_1 зв'язане з лінійним рівнянням L_2 операторною рівністю

$$L_1(u) = \lambda\, L_2(w)\ , \qquad (3.4.12)$$

де

$$\lambda = w^{-1}\nabla - w^{-2}\nabla w\ .$$

Теорема доведена. ■

Приклад 3.4.I. Припустимо, що функція

$$u = 2\sqrt{[\nabla \ln \varphi(x_0,\omega)]^2}\ , \qquad (3.4.13)$$

$$\omega = \alpha\cdot x = \alpha_a x_a , \quad (a = 1,2,3)$$

є розв'язком нелінійного рівняння (3.4.6). Підставимо цей нелокальний анзац в рівняння (3.4.6). Знаходимо відповідну умову на φ

$$\left[\varphi^{-1}\cdot\partial_\omega - \varphi^{-2}\cdot\varphi_\omega\right]\left[\varphi_0 - \varphi_{\omega\omega}\right] = 0 . \qquad (3.4.14)$$

Отже, відбувається редукція рівняння (3.4.6) до форми (3.4.14).

Аналогічно, анзац

$$u = 2\sqrt{[\nabla \ln\{2(n-1)x_0 + x\}]^2} ,$$
$$x \equiv (x_1, x_2, x_3), \quad (n = 4)$$

дає рівність:

$$\left[w^{-1}\nabla - w^{-2}\nabla w\right]\left[\partial_0 - \Delta\right]\left\{2(n-1)x_0 + x\right\} = 0 .$$

Тут

$$w \equiv 2(n-1)x_0 + x .$$

Теорема 3.4.2. Формула нелінійної суперпозиції певної підмножини розв'язків $\overset{(k)}{u}(x)$, $(k = 1,2)$ рівняння (3.4.6) має вигляд

$$\overset{(3)}{u}(x) = 2\left|\frac{\overset{(1)}{\tau}\overset{(1)}{u}\overset{(1)}{\theta} + \overset{(2)}{\tau}\overset{(2)}{u}\overset{(2)}{\theta}}{\overset{(1)}{\tau} + \overset{(2)}{\tau}}\right| , \qquad (3.4.15а)$$

$$\overset{(3)}{\theta}\overset{(3)}{u}(x) = 2(\overset{(1)}{\tau} + \overset{(2)}{\tau})^{-1}(\overset{(1)}{\tau}\overset{(1)}{u}\overset{(1)}{\theta} + \overset{(2)}{\tau}\overset{(2)}{u}\overset{(2)}{\theta}) , \qquad (3.4.15б)$$

$$\overset{(k)}{\tau}_0 = \tfrac{1}{2}\overset{(k)}{\tau}\left[\tfrac{1}{2}\overset{(k)}{u}{}^2 + (\nabla\cdot\overset{(k)}{\theta}\overset{(k)}{u})\right] , \qquad (3.4.15в)$$

$$\nabla\overset{(k)}{\tau} = \tfrac{1}{2}\overset{(k)}{\tau}\overset{(k)}{\theta}\overset{(k)}{u} , \quad \nabla\times\overset{(s)}{\theta} = 0 , \qquad (3.4.15г)$$

$$\partial_0 \ln(\overset{(1)}{\tau} + \overset{(2)}{\tau}) = \left[\frac{\overset{(1)}{\tau}\overset{(1)}{u}\overset{(1)}{\theta} + \overset{(2)}{\tau}\overset{(2)}{u}\overset{(2)}{\theta}}{\overset{(1)}{\tau} + \overset{(2)}{\tau}}\right]^2 +$$

$$+ \left[\nabla\frac{\overset{(1)}{\tau}\overset{(1)}{u}\overset{(1)}{\theta} + \overset{(2)}{\tau}\overset{(2)}{u}\overset{(2)}{\theta}}{\overset{(1)}{\tau} + \overset{(2)}{\tau}}\right] \square . \qquad (3.4.15д)$$

Тут $\overset{(k)}{u}$, $(k = 1,2)$ – відомі розв'язки ДР (3.4.6), $\overset{(s)}{\theta}$, $(s = 1, 2,3)$ та $\overset{(k)}{\tau}$, $(k = 1,2)$– функціональні параметри, $\overset{(k)}{\tau_0} - \Delta \overset{(k)}{\tau} = 0$.

Доведення. Нехай $\overset{(s)}{w}$, $(s = 1,2,3)$ є розв'язками лінійного рівняння (3.4.1). Виразимо новий розв'язок $\overset{(3)}{u}(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, через $\overset{(3)}{w} = \overset{(1)}{w} + \overset{(2)}{w}$ за допомогою системи (3.4.8), (3.4.9). Отже,

$$\overset{(3)}{\theta}\overset{(3)}{u} = 2\nabla \ln \overset{(3)}{w} = 2\nabla \ln(\overset{(1)}{w} + \overset{(2)}{w}) = \frac{\overset{(1)}{w}\overset{(1)}{u}\overset{(1)}{\theta} + \overset{(2)}{w}\overset{(2)}{u}\overset{(2)}{\theta}}{\overset{(1)}{w} + \overset{(2)}{w}},$$

$$\tfrac{1}{2}\overset{(3)}{u}{}^2 + (\nabla \cdot \overset{(3)}{\theta}\overset{(3)}{u}) = 2\,\partial_0 \ln(\overset{(1)}{w} + \overset{(2)}{w}) .$$

З іншого боку зв'яжемо $\overset{(k)}{w}$ з $\overset{(k)}{u}$.

$$2\nabla \ln \overset{(k)}{w} = \overset{(k)}{\theta}\overset{(k)}{u}, \quad (k = 1,2)$$

$$2\partial_0 \ln \overset{(k)}{w} = \tfrac{1}{2}\overset{(k)}{u}{}^2 + (\nabla \cdot \overset{(k)}{\theta}\overset{(k)}{u}) .$$

Позначимо $\overset{(k)}{w} \equiv \overset{(k)}{\tau}$. Тепер шукана формула має вигляд (3.4.15). Рівняння (3.4.15а) одержуємо взяттям модуля від рівності (3.4.15б). Теорема доведена. ■

2. Нелінійне хвильове рівняння

$$L_1(u) \equiv \left[u_1 u_{00} - u_{11}\right]^2 - u_0^2 u_{11} u_{00} = 0 \qquad (3.4.16)$$

безпосередньо не зводиться до рівняння

$$L_2(v) \equiv v_1 = 0 , \qquad v = v(y_0, y_1) . \qquad (3.4.17)$$

Продовжимо простір залежних змінних введенням функціонального параметра $\tau(y_0, y_1)$. Додамо до рівняння (3.4.17) умову

$$L_3(\tau) \equiv \tau_0 = 0 . \qquad (3.4.18)$$

Тепер можна перевірити, що нелокальне перетворення змінних першого роду [117]

$$u = \frac{1}{3}(2y_0 - y_1^3)v_0 - \frac{2}{3}v + \int y_1^4 \cdot \tau_1 dy_1 ,$$

$$x_1 = y_1^{-1} v_0 + \tau ,$$

$$x_0 = y_1 v_0 - \int y_1^2 \cdot \tau_1 dy_1 \qquad (3.4.19)$$

здійснює зв'язок між рівнянням (3.4.16) та системою (3.4.17), (3.4.18). Тобто, маємо

$$L_1(u) = \lambda L_2(v) + \tilde{\lambda} L_3(\tau) .$$

Ще один приклад умовної лінеаризації зв'язаний з рівнянням

$$u_{00} + u_{11} + \lambda_1^2 h \cdot \exp\{2hu\} = 0 . \qquad (3.4.20)$$

Це рівняння зводиться до лінійного

$$L_2(v) \equiv v_{00} + v_{11} = 0 , \quad v = v(x_0, x_1) \qquad (3.4.21)$$

з додатковими умовами

$$L_3(v) \equiv \tau_{00} + \tau_{11} = 0 , \quad \tau = \tau(x_0, x_1) , \qquad (3.4.22)$$

або у вигляді системи

$$v_1 + \tau_0 = 0 , \quad v_0 - \tau_1 = 0 .$$

У даному випадку одержуємо співвідношення

$$L_1(u) = \lambda L_2(v) + \tilde{\lambda} L_3(\tau) .$$

Відповідні нелокальні перетворення мають вигляд [117]

$$u^{I}(x_0, x_1) = (2h)^{-1} \ln \frac{2c_1(v_0^2 + v_1^2)}{8h^2\lambda_1^2\left\{\pm \begin{matrix} \mathrm{ch} \\ i\,\mathrm{sh} \end{matrix}\left[c_1^{\frac{1}{2}}(v+\tau) + c_2\right] + 1\right\}} ;$$

$$u^{II}(x_0, x_1) = (2h)^{-1} \ln \frac{-4(v_0^2 + v_1^2)}{8h^2\lambda_1^2(v + \tau + c_1)^2} ;$$

$$u^{III}(x_0, x_1) = (2h)^{-1} \ln \frac{-2c_1(v_0^2 + v_1^2)}{8h^2\lambda_1^2\left\{\pm \begin{matrix} \mathrm{sh} \\ i\,\mathrm{ch} \end{matrix}\left[c^{\frac{1}{2}}(v+\tau) + c_2\right] + i\right\}} ;$$

$$c^{\frac{1}{2}} = (i \pm 1)\sqrt{\tfrac{1}{2}\, c_1}\ , \qquad c_1 \in \mathbb{R}\ ,$$

$$u^{IV}(x_0, x_1) = (2h)^{-1} \ln \frac{v_0^2 + v_1^2}{h^2\lambda_1^2(v^2 + \tau^2 + 1)^2}\ ;$$

h, λ_1 – довільні параметри,

c_i, $(i = 1,2)$ – сталі інтегрування.

Отже, в тих випадках, коли знайдена нелокальна симетрія ДР L_1 у вигляді конструктивного алгоритму його зведення до лінійного рівняння, нелінійний принцип суперпозиції розв'язків L_1 може бути представлений у вигляді відповідної формули. При цьому бажано знати класи рівнянь, які допускають лінеаризацію за допомогою даного НПЗ. Розмноження розв'язків рівнянь L_1 породжує такі розв'язки, які принципово не можуть бути побудовані класичним методом С.Лі. Так, з двох стаціонарних розв'язків були одержані нові вже нестаціонарні розв'язки нелінійних рівнянь.

Проблема лінеаризації багатовимірних ДРЧП може бути розв'язана, зокрема, продовженням простору залежних змінних за рахунок введення функціональних параметрів. Додаткові умови до рівняння L_1 дозволяють при цьому одержати нелокальну лінеаризацію на деякій підмножині розв'язків вихідного рівняння.

Результати §§ 1,2 опубліковані в роботах [21,187] та [184, 186] відповідно. Основний матеріал §§ 3,4 викладено в роботах [21,85,94,182,185,249] і [117,118,248].

Р О З Д І Л IV

НЕЛОКАЛЬНІ АНЗАЦИ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

У даному розділі (§1) для розглянутих вище важливих рівнянь нелінійної математичної фізики (L_1) за допомогою НПЗ одержано розширення ліївської симетрії ($\dim G_r L_1 < \dim G_r L_2$). Додаткові ліївські симетрії використовуються (див. розділ І, §4) для побудови відповідних нелокальних анзаців досліджуваних рівнянь. Здійснена їх нелокальна редукція і знайдені широкі сукупності точних розв'язків.

В §2 інваріантність допоміжних рівнянь L_2 відносно певних НПЗ використовується також для побудови нелокальних анзаців та формул розмноження розв'язків нелінійних рівнянь L_1, які зв'язані іншим нелокальним перетворенням з рівняннями L_2. Крім того, відомо [123], що кожний розв'язок $\overset{(1)}{v}(y)$ лінійного рівняння $L_2(y,v)$ за допомогою операторів Q_s, ($s = \overline{1,r}$) його ліївської симетрії перетворюється у розв'язок $\overset{(2)}{v}(y)$ того ж самого рівняння L_2 за формулою

$$\overset{(2)}{v}(y) = Q_s \overset{(1)}{v}(y) .$$

Ця нелокальна симетрія допоміжних рівнянь L_2 дозволила побудувати в §2 відповідні формули розмноження розв'язків та нелокальні анзаци рівнянь L_1.

Серед досліджуваних рівнянь (L_1) присутні рівняння нелінійної топлопровідності, зокрема $u_0 = \partial_1 (c(u)u_1)$, еволюційні рівняння типу Гарі-Діма, одновимірне рівняння нелінійної теорії коливань $u_{00} = \partial_1 (c(u)u_1)$.

§I. Нелокальні анзаци, породжені ліївськими симетріями

Нижче розглянуті випадки, коли внаслідок НПЗ рівняння L_1 воно зводиться до рівняння L_2, ліївська симетрія якого ширша, ніж у вихідного рівняння.

I. Отже, звернемось до одновимірних рівнянь нелінійної теплопровідності. Багато які з цих рівнянь, як видно з §3 розділу III, можуть бути зв'язані за допомогою НПЗ з лінійним тепловим рівнянням

$$L_2 \equiv v_0 - v_{11} = 0, \qquad v = (y_0, y_1) . \qquad (4.1.1)$$

Тому наведемо зараз деякі широко відомі результати групового аналізу цього рівняння. Алгебра ліївської інваріантності (4.1.1) має вигляд [68,70]: $\langle P_0, P_1, I, S, D, G, \Pi\rangle$, де

$$P_0 = \partial_0 , \quad P_1 = \partial_1 , \ I = v\,\partial_v ,$$

$$S = b(y_0, y_1)\partial_v , \quad b_0 = b_{11} ,$$

$$D = 2y_0\partial_0 + y_1\partial_1 , \quad G = y_0\partial_1 - \tfrac{1}{2} y_1 v\,\partial_v ,$$

$$\Pi = y_0^2\partial_0 + y_0 y_1\partial_1 - \tfrac{1}{4}(y_1^2 + 2y_0)\, v\,\partial_v . \qquad (4.1.2)$$

У монографії [70] наведені такі результати класифікації алгебри (4.1,2) за системою незалежних одновимірних підалгебр:

$а)$ $L_1 = D + \alpha I , \quad Q_1[v] = 2y_0 v_0 + y_1 v_1 + \alpha v ,$

б) $L_2 = P_0 + 2\lambda I + \Pi , Q_2[v] = (y_0^2 + 1)v_0 + y_0 y_1 v_1 - \tfrac{1}{4}(y_1^2 + 2y_0 - 2\lambda)v ,$

в) $L_3 = P_0 + G , \quad Q_3[v] = v_0 + 2y_0 v_1 + y_1 v ,$

г) $L_4 = P_0 + \alpha I , \quad Q_4[v] = v_0 + \alpha v ,$

д) $L_5 = P_0 + cP_1 , \quad Q_5[v] = v_0 + cv_1 . \qquad (4.1.3)$

α, c, λ – довільні сталі параметри. Праворуч від операторів L_s, $(s = \overline{1,5})$ розміщені ліві частини відповідних ДРЧП першого порядку $Q_s[v]$. Ними скористуємось пізніше.

Анзаци, породжені операторами (4.1.3) та редуковані з

(4.1.1) ЗДР, є такими [70]:

а) $v = y_0^{\alpha}\cdot\varphi(\omega)$, $\omega = y_1 y_0^{-\frac{1}{2}}$, $\ddot\varphi + \frac{1}{2}\omega\,\dot\varphi - \alpha\varphi = 0$;

б) $v = (y_0^2+1)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{y_0 y_1^2}{y_0^2+1} - \lambda\cdot\mathrm{arctg}\,y_0\right\}\cdot\varphi(\omega)$,

$$\omega = (y_0^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot y_1 , \qquad \ddot\varphi + (\omega^2+2\lambda)\varphi = 0 ;$$

в) $v = \exp\left\{y_0 y_1 + \frac{2}{3}y_0^3\right\}\varphi(\omega)$, $\omega = y_1 + y_0^2$, $\ddot\varphi - \omega\varphi = 0$;

г) $v = \exp\left\{\alpha y_0\right\}\varphi(\omega)$, $\omega = y_1$, $\ddot\varphi - \alpha\varphi = 0$;

д) $v = \varphi(\omega)$, $\omega = y_1 - cy_0$, $\ddot\varphi + c\dot\varphi = 0$. (4.1.4)

1. Той факт, що рівняння Бюргерса

$$L_1 \equiv u_0 + uu_1 - u_{11} = 0 \qquad (4.1.5)$$

зводиться до лінійного рівняння (4.1.1) підстановкою Коула-Хопфа

$$u = -2(\ln v)_1 , \qquad x = y , \qquad (4.1.6)$$

дозволяє побудувати для нього нелокальні анзаци по відповідних ліївських анзацах (4.1.4).

Твердження 4.I.I. Нелокальні анзаци для рівняння (4.1.5), які породжені нелокальним перетворенням (4.1.6) та ліївськими анзацами (4.1.4) б) та в) лінійного рівняння (4.1.1), мають вигляд

$$u = -2(x_0^2+1)^{-\frac{1}{2}}\left[\varphi^{-1}\dot\varphi - x_0\omega\right] , \quad \omega = x_1(x_0^2+1)^{-\frac{1}{2}} ; \qquad (4.1.7)$$

$$u = -2\left[\varphi^{-1}\dot\varphi + x_0\right] , \qquad \omega = x_1 + x_0^2 . \qquad (4.1.8)$$

Відповідні до цих анзаців симетрії та редуковані ЗДР визначаються співвідношеннями

$$\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\partial_1^{-1}u\right\}\left[(x_0^2+1)(u_1 - \tfrac{1}{2}u^2) + x_0 x_1 u + \right.$$

$$+ \tfrac{1}{2}(x_1^2 + 2x_0 - 2\lambda)\Big] = 0 \,, \tag{4.1.9}$$

$$\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\partial_1^{-1}u\right\}\left[\tfrac{1}{2}u_1 - \tfrac{1}{4}u^2 + x_0 u - x_1\right] = 0 \,. \tag{4.1.10}$$

$$\ddot{\varphi} + (\omega^2 + 2\lambda)\varphi = 0 \,, \tag{4.1.9a}$$

$$\ddot{\varphi} - \omega\varphi = 0 \,. \;\square \tag{4.1.10a}$$

Доведення. Лiївськi анзаци (4.1.4) пiдставимо у формулу (4.1.6). Лише два з одержаних анзацiв (випадки б) i в)) мають структуру (4.1.7), (4.1.8), яка принципово не може бути зведена до вигляду (4.1.4). Отже, одержанi функцiї (4.1.7) та (4.1.8) є iстотно нелокальними анзацами рiвняння (4.1.5). Те, що вони редукують рiвняння (4.1.5), випливає з операторної рiвностi (2.4.20a)

$$L_1(u) = -2v^{-1}\left[\partial_1 - v^{-1}v_1\right]L_2(v) \,.$$

Диференцiальнi рiвняння (4.1.9), (4.1.10) одержуємо, виконавши перетворення (4.1.6) рiвнянь $Q_2[v] = 0$ та $Q_3[v] = 0$. Твердження доведено. ■

2. Алгебру операторiв лiївської iнварiантностi рiвняння

$$u_0 u_{11} + 1 = 0 \tag{4.1.11}$$

знаходимо стандартним методом класичного групового аналiзу [69,70]. Вона має вигляд: $\langle P_0, P_1, P_2, Q, D_1, D_2 \rangle$, де

$$P_0 = \partial_0 \,, \quad P_1 = \partial_1 \,, \quad P_2 = \partial_u \,, \quad Q = x_1\partial_u \,,$$

$$D_1 = x_1\partial_1 + u\,\partial_u \,, \qquad D_2 = 2x_0\partial_0 + u\,\partial_u \,. \tag{4.1.12}$$

Нееквiвалентнi лiївськi анзаци для рiвняння (4.1.11) та вiдповiднi редукованi ЗДР є такими:

1. $u = x_1^{-1}\varphi(\omega) - \tfrac{1}{2}cx_1 \,, \quad \dot{\varphi}\left[\omega^2\ddot{\varphi} - 2\omega\dot{\varphi} + 2\varphi\right] + 4\omega^3 = 0 \,;$

$$\omega = x_1 x_0^{\frac{1}{4}} \,,$$

$$2.\quad u = x_1^{\frac{k+2}{k}} \cdot \varphi(\omega)\,, \qquad \dot\varphi\Big[\omega^2\ddot\varphi + 2\,\frac{2k+1}{k^2}\,\omega\,\dot\varphi + 2\,\frac{k+2}{k^2}\,\varphi\Big] -$$

$$\omega = x_1 x_0^{-\frac{k}{4}}\,, \qquad -\frac{4}{k}\,\omega^{\frac{4}{k}-1} = 0\;;$$

$$3.\quad u = x_1^{\frac{k+2}{4}} \cdot \varphi(\omega) - \frac{1}{2}\,c x_1\,, \quad \omega = x_1 x_0^{-\frac{k}{4}}, \quad \frac{k+2}{4}\,\varphi\,\ddot\varphi + 1 = 0\;;$$

$$4.\quad u = \varphi(\omega)\,,\ \omega = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1\,,\ \alpha_0\alpha_1^2\dot\varphi\,\ddot\varphi + 1 = 0\,. \qquad (4.1.13)$$

Твердження 4.I.2. Нелокальні анзаци для рівняння (4.1.11), породжені лівськими анзацами (4.1.4) б), в), та редуковані ЗДР мають вигляд

$$u = x_1\tau - (x_0^2+1)^{-\frac{1}{4}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{x_0\tau^2}{x_0^2+1} - \lambda\,\mathrm{arctg}\,x_0\right\}\varphi(\omega)\,,$$

$$x_1 = \left[\dot\varphi - \frac{x_0\tau}{\sqrt{x_0^2+1}}\,\varphi\right](x_0^2+1)^{-\frac{3}{4}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{x_0\tau^2}{x_0^2+1} - \lambda\,\mathrm{arctg}\,x_0\right\},$$

$$\ddot\varphi + (\omega^2 + 2\lambda)\varphi = 0, \quad \omega = (x_0^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot\tau\;; \qquad (4.1.14а)$$

$$u = x_1\tau - \exp\left\{x_0\tau + \frac{2}{3}\,x_0^3\right\}\varphi(\omega)\,,$$

$$x_1 = \left[\,\dot\varphi + x_0\varphi\,\right]\cdot\exp\left\{x_0\tau + \frac{2}{3}x_0^3\right\},$$

$$\ddot\varphi - \omega\varphi = 0\,, \quad \omega = \tau + x_0^2\,. \ \square \qquad (4.1.14б)$$

Доведення. Рівняння (4.1.11) зводиться до лінійного (4.1.1) за допомогою перетворення Ейлера-Ампера (1.1.26) в $\mathbb{R}(1,1)$, (див. теорему 3.2.1). Справді. Перетворення Ейлера-Ампера в просторі $\mathbb{R}(1,1)$ має вигляд

$$u = y_1 v_1 - v\,, \qquad v_{11} \neq 0\,, \qquad (1.1.26а)$$

$$x_1 = v_1\,, \qquad x_0 = y_0\,.$$

Похідні перетворюються за формулами

$$u_0 = -v_0\,, \quad u_1 = y_1\,, \quad u_{11} = v_{11}^{-1}\,.$$

Отже

$$u_0 u_{11} + 1 = - v_{11}^{-1} [v_0 - v_{11}] = 0 . \qquad (4.1.14б)$$

Формули (4.1.14a,$б$) одержуємо безпосередньо підстановкою анзаців (4.1.4) у формули перетворення (1.1.26a). Тільки (4.1.4) $б$) та $в$) відповідають нелокальні анзаци рівняння (4.1.11). Редукція до ЗДР випливає з рівності (4.1.14$в$). Твердження доведено. ■

3. Розглянемо рівняння

$$u_0 - \partial_1 (u^{-2} u_1) = 0 . \qquad (4.1.15)$$

Максимальна алгебра інваріантності рівняння (4.1.15) чотиривимірна. Вона була знайдена Л. В. Овсянніковим в роботі [67] і має вигляд: $\langle P_0, P_1, D_1, D_2 \rangle$,

$$P_0 = \partial_0 , \quad P_1 = \partial_1 , \quad D_1 = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 ,$$
$$D_2 = x_1 \partial_1 - u \partial_u . \qquad (4.1.16)$$

Рівняння (4.1.15) приводиться до лінійного рівняння (4.1.1) за допомогою перетворень

$$u = w_1^{-1} , \quad w = w(x_0, x_1) , \qquad (4.1.17)$$

$$x_0 = y_0 , \quad x_1 = v , \quad w = y_1 \qquad (4.1.18)$$

(див. розділ II, §3, (2.3.9), (2.3.10)). Оскільки алгебра (4.1.2) ширша, ніж (4.1.16), то рівняння (4.1.15) може мати певні неліївські симетрії.

Твердження 4.I.3. Нелокальні анзаци рівняння (4.1.15), породжені ліївськими анзацами (4.1.4) б), в) лінійного рівняння (4.1.1) за допомогою НПЗ (4.1.17), (4.1.18), та редуковані ЗДР мають вигляд

$$u(x_0, x_1) = x_1^{-1} (x_0^2 + 1) \left[(x_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \varphi^{-1} \dot{\varphi} - x_0 \tau \right]^{-1} ,$$

$$x_1 = (x_0^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{x_0\tau^2}{x_0^2+1} - \lambda \operatorname{arctg} x_0\right\}\varphi ,$$

$$\ddot\varphi + (\omega^2 + 2\lambda)\varphi = 0,\ \varphi = \varphi(\omega),\ \omega = \tau(x_0^2 + 1)\ ; \qquad (4.1.19)$$

$$u(x_0, x_1) = x_1^{-1}\left[\varphi^{-1}\dot\varphi + x_0\right]^{-1} ,$$

$$x_1 = \exp\left\{x_0\tau + \tfrac{2}{3}x_0^3\right\}\varphi ,$$

$$\ddot\varphi - \omega\varphi = 0 , \qquad \omega = \tau + x_0^2 \ . \ \square \qquad (4.1.20)$$

Доведення. Підставимо анзаци (4.1.4) у формули нелокального перетворення змінних

$$u = v_1^{-1}(x_0,\tau) , \qquad x_1 = v(x_0,\tau) , \qquad (*)$$

які є добутком перетворень (4.1.17), (4.1.18). З одержаних анзаців тільки (4.1.19) та (4.1.20) є суттєво неліївськими, тобто вони не можуть бути зведені до форми (4.1.4). Диференціальними наслідками формул НПЗ (*) є залежності для перетворення похідних:

$$u_1 = -v_1^{-3}v_{11}\ ; \quad u_0 = v_1^{-3}(v_0 v_{11} - v_1 v_{10})\ ;$$

$$v_{11} = 3v_1^{-5}v_{11}^2 - v_1^{-4}v_{111} \ .$$

Підставимо їх в ДР (4.1.15). Одержимо

$$u_0 + 2u^{-3}u_1^2 - u^{-2}u_{11} = [-v_1^{-2}\partial_1 + v_1^{-3}v_{11}](v_0 - v_{11}) = 0 \ .$$

З цієї рівності випливають редуковані ядра - ЗДР, які наведені в твердженні. Що і треба було довести. ■

Зауваження 4.1.1. Додатковою ліївською симетрією лінійного рівняння (4.1.1) можна скористатися інакше у вигляді відповідних скінчених перетворень групи його симетрії. Наведемо приклад.

Твердження 4.1.4. Перетворення Галілея

$$y_0' = y_0 , \quad y_1' = y_1 - 2ay_0 , \quad \overset{(2)}{v} = \overset{(1)}{v}\cdot\exp\left\{ay_1 - a^2 y_0\right\} ,$$

де

$$\overset{1}{y}_{\mu} = y_{\mu}\ , \quad \overset{2}{y}_{\mu} = y'_{\mu}\ , \quad (\mu = 0,1)\ ,$$

породжує формулу розмноження розв'язків рівняння (4.1.15), яка має вигляд

$$\left|\begin{array}{l} \overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = \dfrac{\overset{(1)}{u}(x_0,\tau)}{\alpha x_1\cdot\overset{(1)}{u}(x_0,\tau) + x_1\tau^{-1}}\ , \\ \tau_1 = \dfrac{1}{\alpha x_1\cdot\overset{(1)}{u}(x_0,\tau) + x_1\tau^{-1}}\ , \\ \tau_0 = \overset{(1)}{u}{}^{-2}(x_0,\tau)\,\tau_1^{-2}\tau_{11}\ .\ \square \end{array}\right.$$

Доведення. Розв'язки $\overset{(k)}{u}$ та $\overset{(k)}{v}$, $(k = 1,2)$ рівнянь (4.1.15) та (4.1.1) зв'язані за допомогою НПЗ

$$\overset{(k)}{u}(\overset{k}{x}_0,\overset{k}{x}_1) = \overset{(k)}{v}{}_1^{-1}(\overset{k}{y}_0,\overset{k}{y}_1)\ , \quad \overset{k}{x}_1 = \overset{(k)}{v}(\overset{k}{y}_0,\overset{k}{y}_1)\ . \qquad (*)$$

Перетворення Галілея дає нам рівність

$$\overset{(2)}{v}_1\,(y_0,y'_1) = \left[\overset{(1)}{v}_1 + \alpha\overset{(1)}{v}\right]\exp\left\{\alpha y_1 - \alpha^2 y_0\right\}\ .$$

Позначимо

$$\overset{2}{x}_{\mu} \equiv x_{\mu},\quad (\mu = 0,1)\ ,\ \overset{1}{x}_1 \equiv \tau\ , \quad y_1 \equiv \theta.$$

Застосувавши перетворення Галилея до НПЗ (*), маємо

$$\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = \frac{1}{\left[\overset{(1)}{v}_{\theta}\overset{(1)}{v}{}^{-1} + \alpha\right]\overset{(1)}{v}\cdot\exp\left\{\alpha\theta - \alpha^2 x_0\right\}} =$$

$$= \frac{\overset{(1)}{u}(x_0,\tau)}{\alpha x_1\cdot\overset{(1)}{u}(x_0,\tau) + x_1\tau^{-1}}\ ,$$

$$\theta_1 \equiv \frac{\partial\theta}{\partial x_1} = \overset{(2)}{v}{}_1^{-1} = \overset{(2)}{u}(x_0,x_1)\ ,$$

$$\tau_1 \equiv \frac{\partial \tau}{\partial x_1} = \overset{(1)}{v_\theta} \cdot \theta_1 = \overset{(1)}{u}{}^{-1} \cdot \overset{(2)}{u} = \frac{1}{\alpha x_1 \overset{(1)}{u} + x_1 \tau^{-1}} .$$

Таким чином, нами одержані два перших рівняння шуканої формули. Для знаходження останнього співвідношення скористаємось рівностями

$$\overset{(2)}{u}(x_0, x_1) = \tau_1 \cdot \overset{(1)}{u}(x_0, \tau) ,$$

$$\overset{(2)}{u}_0 = \tau_1 \left[\overset{(1)}{u}_0 + \overset{(1)}{u}_\tau \cdot \tau_0 \right] + \overset{(1)}{u} \tau_{10} ,$$

$$\overset{(2)}{u}_1 = \tau_1^2 \overset{(1)}{u}_\tau + \overset{(1)}{u} \tau_{11} .$$

Підставивши знайдені вирази у рівняння (4.1.15), знаходимо

$$\tau_1 \left[\overset{(1)}{u}_0 + \tau_0 \overset{(1)}{u}_\tau \right] + \overset{(1)}{u} \tau_{10} - \partial_1 \left\{ \tau_1^{-2} \overset{(1)}{u}{}^{-2} \left(\overset{(1)}{u}_\tau \tau_1^2 + \overset{(1)}{u} \tau_{11} \right) \right\} =$$

$$= \overset{(1)}{u}_\tau \tau_0 \tau_1 + \overset{(1)}{u} \tau_{11} - \partial_1 \left[\overset{(1)}{u} \overset{(1)}{u}{}^{-2} \tau_1^{-2} \tau_{11} \right] =$$

$$= \overset{(1)}{u}_\tau \tau_0 \tau_1 + \overset{(1)}{u} \tau_{11} - \overset{(1)}{u}_\tau \tau_1 \overset{(1)}{u}{}^{-2} \tau_1^{-2} \tau_{11} - \overset{(1)}{u} \cdot \partial_1 \left[\overset{(1)}{u}{}^{-2} \tau_1^{-2} \tau_{11} \right] =$$

$$= - \left[\overset{(1)}{u} \cdot \partial_1 - \overset{(1)}{u}_\tau \tau_1 \right] \left[\tau_0 - \overset{(1)}{u}{}^{-2} \tau_1^{-2} \tau_{11} \right] = 0 .$$

Отже, твердження доведено. ■

4. Групова класифікація одновимірного рівняння нелінійної теплопровідності

$$u_0 - \partial_1 \left[c(u) u_1 \right] = 0 \qquad (4.1.21)$$

була виконана Л.В. Овсянніковим в роботі [67]. Одержані ним результати такі:

$c(u)$ довільна : $\langle P_0, P_1, D_1 \rangle$,

$$P_0 = \partial_0 , \quad P_1 = \partial_1 , \quad D_1 = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 ;$$

$$c(u) = \lambda u^k,\ (k \neq 0):\ \langle P_0,\ P_1,\ D_1,\ D_2 = x_1\partial_1 + \frac{2}{k}\, u\, \partial_u\rangle\ ;$$

$$c(u) = \lambda\cdot\exp u\quad :\ \langle P_0,\ P_1,\ D_1,\ D_3 = x_1\partial_1 + 2\partial_u\rangle\ ;$$

$$c(u) = \lambda u^{-\frac{4}{3}}\quad :\ \langle P_0,\ P_1,\ D_1,\ D_4,\ \Pi\rangle\ ,$$

$$D_4 = x_1\partial_1 - \frac{3}{2}\, u\, \partial_u\ ,$$

$$\Pi = x_1^2\partial_1 - 3x_1 u\, \partial_u\ . \tag{4.1.22}$$

λ, k – довільні сталі.

Відомо (див. наприклад [210]) і було показано в розділі II, §3, що послідовність перетворень (2.3.9)-(2.3.11)

$$u(x_0, x_1) = v_1(x_0, x_1) \tag{4.1.23}$$

$$x_0 = y_0\ ,\quad x_1 = w(y_0, y_1)\ ,\quad v = y_1\ ; \tag{4.1.24}$$

$$w_1(y_0, y_1) = z(y_0, y_1) \tag{4.1.25}$$

змінює рівняння (4.1.21), але залишає його у тому ж самому класі:

$$z_0 = \partial_1\left[c(z)z_1\right] \longrightarrow z_0 = \partial_1\left[\tilde{c}(z)z_1\right]\ ,$$

$$\tilde{c}(z) = z^{-2}c(z^{-1})\ , \tag{4.1.26}$$

(див. формулу (2.3.13)) .

З формули (4.1.26) випливає, що перетворення (4.1.23)-(4.1.25) встановлюють зв'язок рівняння

$$u_0 - \partial_1\left[u^{-\frac{2}{3}}\cdot u_1\right] = 0 \tag{4.1.27}$$

з іншим нелінійним рівнянням класу (4.1.21)

$$z_0 - \partial_0\left[z^{-\frac{4}{3}}z_1\right] = 0\ ,\qquad z = z(y_0, y_1)\ . \tag{4.1.28}$$

Симетрія рівняння (4.1.28) у класі лієвських симетрій ширша, ніж у рівняння (4.1.27). Скористаємось додатковими симетріями рівняння (4.1.28) для побудови нелокальних анзаців, які редукують рівняння (4.1.27). В роботі [183] знайдені такі ліївські анзаци для рівняння (4.1.28):

$$1.\quad z = y_1^{-\frac{3}{2}}\varphi(\omega)\ ,\qquad \omega = y_0\ ;$$

$$2.\quad z = y_1^{-3}\varphi(\omega)\ ,\qquad \omega = \alpha y_0 + y_1^{-1}\ ;$$

$$3.\quad z = y_0^{\frac{3}{4}}\, y_1^{-3}\varphi(\omega)\ ,\qquad \omega = \alpha\cdot\ln y_0 + y_1^{-1}\ ;$$

$$4.\quad z = (y_1^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}\varphi(\omega)\ ,\qquad \omega = y_0 + \lambda\cdot\mathrm{arctg}\, y_1\ ;$$

$$5.\quad z = (y_1^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}\varphi(\omega)\ ,\qquad \omega = y_0 + \lambda\cdot\mathrm{arth}\, y_1\ ;$$

$$6.\quad z = y_0^{\frac{3}{4}}(y_1^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}\varphi(\omega)\ ,\qquad \omega = \ln y_0 + \lambda\cdot\mathrm{arctg}\, y_1\ ;$$

$$7.\quad z = y_0^{\frac{3}{4}}(y_1^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}\varphi(\omega)\ ,\qquad \omega = \ln y_0 + \lambda\cdot\mathrm{arth}\, y_1\ ; \tag{4.1.29}$$

Відповідні анзаци 1–3 для функції $u(x_0, x_1)$ мають вигляд

$$1.\quad u = \left[\varphi(x_0)x_1^2 + \psi(x_0)\right]^{-\frac{3}{2}}\ , \tag{4.1.30}$$

$$2.\quad u = -\partial_1 \ln \tau\ ,\qquad \omega = \tau + \psi(x_0)\ ,$$

$$\left[x_1 + \varphi(x_0)\right]\left[\dot\psi(x_0)\right]^{\frac{3}{4}} = -\tau\cdot\dot g(\omega) + g(\omega)\ ; \tag{4.1.31}$$

$$3.\quad u = \tau_1\ ,\qquad \omega = g(\tau) + \psi(x_0)\ ,$$

$$\left[x_1 + \varphi(x_0)\right]\left[\dot\psi(x_0)\right]^{\frac{3}{4}} = \int \dot g(\tau)h(\omega)d\tau\ ; \tag{4.1.32}$$

φ, ψ, g, h – довільні гладкі функції. Анзаци (4.1.30) – (4.1.32) редукують рівняння (4.1.21) до таких ЗДР:

$$1.\quad \dot\varphi + 4\varphi^2 = 0\ ,\qquad \dot\psi - 2\varphi\,\psi = 0\ ;$$

$$2.\quad \dot\varphi - \lambda_1\dot\psi^{\frac{1}{4}} = 0\ ,\qquad \ddot\psi - \lambda_2\dot\psi^2 = 0\ ,$$

$$3\,\ddot g^{-\frac{1}{3}} + \lambda_3\dot g + \frac{3}{4}\lambda_2 g - \lambda_1 = 0\ ; \tag{4.1.33}$$

3. $\dot{\varphi} = 0$, $\qquad\qquad \dot{\psi} - \lambda_2 \dot{\psi}^2 = 0$,

$$2\,\dddot{g}\cdot\dot{g} - 3\,\ddot{g}^2 - 2\lambda_1 \dot{g}^4 = 0 ,$$

$$h^{-\frac{4}{3}}\,\ddot{h} - \frac{4}{3}\,h^{-\frac{7}{3}}\,\dot{h}^2 + 3\lambda_1 h^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{4}\,\lambda_2 h - \dot{h} = 0 .$$

Тут λ_i, $(i = 1,2,3)$ – довільні сталі.

Зокрема, проінтегрувавши другу систему рівнянь з (4.1.33) при $\lambda_2 = 0$, одержуємо розв'язок

$$u^{\frac{1}{3}} = \frac{-c_1\left[\frac{5}{4}\,c_1^3 x_1 + c_2 x_0\right]}{\tau(\tau - 4c_3 x_0)} ,$$

$$(\tau + c_3 x_0)(\tau - 4c_3 x_0)^4 = \left[\frac{5}{4}\,c_1^3 x_1 + c_2 x_0\right]^4 .$$

c_i, $(i = 1,2,3)$ є довільними сталими параметрами.

II. В §3 розділу II встановлено, що рівняння Гарі–Діма (2.3.47)

$$u_0 - u^3 u_{111} = 0 \qquad (4.1.34)$$

допускає зведення до іншого нелінійного рівняння (2.3.49)

$$w_0 - w_{11}^{-\frac{3}{2}}\, w_{111} = 0 \qquad (4.1.35)$$

за допомогою нелокального перетворення

$$u(x_0, x_1) = w_{11}^{-\frac{1}{2}}(x_0, x_1) . \qquad (4.1.36)$$

Із порівняння таблиць 2 та 3 додатка I випливає, що ліївська симетрія рівняння (4.1.34) ширша, ніж відповідна симетрія рівняння (4.1.35). Анзаци 6-12 таблиці 2 додатка I одержані тільки за рахунок розширення алгебри інваріантності рівняння $u_0 = u^p u_{111}$ з $p = 3$ добавленням оператора П. Отже, кожний з ліївських анзаців 6-12 рівняння (4.1.34) вигляду

$$u = f(x)\varphi(\omega) + g(x) \qquad (4.1.37)$$

нелокальним перетворенням (4.1.36) зв'язаний з відповідним зображенням розв'язку w рівняння (4.1.35)

$$w(x_0, x_1) = \int \left[\int \left[f(x)\varphi(\omega) + g(x) \right]^{-2} dx_1 \right] dx_1 \quad . \qquad (4.1.38)$$

Довільні функції, що виникають у процесі інтегрування, уточнюються з умови редукції рівняння (4.1.35) анзацем (4.1.38).

Розглянемо, наприклад, анзац 11 рівняння (4.1.34)

$$u = x_1^2 \varphi(\omega) \ , \qquad \omega = x_0 + x_1^{-1} \ . \qquad (4.1.39)$$

Для зручності обчислень позначимо

$$\varphi(\omega) = \left[\dddot{\phi}(\omega) \right]^{-\frac{1}{2}} \ . \qquad (4.1.40)$$

Тепер формула (4.1.38) має вигляд

$$w = \int \left[\int x_1^{-4} \cdot \dddot{\phi}(x_0 + x_1^{-1}) dx_1 \right] dx_1 \ . \qquad (4.1.41)$$

Проінтегрувавши праву частину рівності (4.1.41) декілька разів по частинах, знаходимо нелокальний анзац

$$w = \dot{\phi}(\omega) - 2x_1 \phi(\omega) + \lambda_1(x_0) x_1 + \lambda_2(x_0) \ ,$$

$$\omega = x_0 + x_1^{-1} \ . \qquad (4.1.42)$$

Одержаний вираз є частинним випадком безпосереднього узагальнення класичного локального анзацу (4.1.37),

$$w = h(x) \cdot \dot{\phi}(\omega) + f(x) \cdot \phi(\omega) + g(x) \ . \qquad (4.1.43)$$

Анзац (4.1.42) редукує рівняння (4.1.35). Справді, обчислимо значення похідних

$$w_0 = \ddot{\phi} - 2x_1 \dot{\phi} + \dot{\lambda}_1 x_1 + \dot{\lambda}_2 \ ,$$

$$w_1 = - x_1^{-2} \ddot{\phi} + x_1^{-1} \dot{\phi} - 2\phi + \lambda_1 \ ,$$

$$w_{11} = x_1^{-4} \dddot{\phi} \ ,$$

$$w_{111} = - x_1^{-6} (\phi^{IV} + 4x_1 \dddot{\phi}) \ . \qquad (4.1.44)$$

Підставивши знайдені вирази (4.1.44) у рівняння (4.1.35), знаходимо ЗДР з редукованим ядром

$$\left[2x_1\partial_\omega - 1\right]\left[2\dddot{\varphi}^{-\frac{1}{2}} - \ddot{\varphi}\right] = 0 \qquad (4.1.45)$$

та умови на λ_i, $(i = 1,2)$: $\dot{\lambda}_i = 0$. Інфінітезімальний оператор, що відповідає анзацу (4.1.39), має вигляд

$$\tilde{X} = \partial_0 + x_1^2\partial_1 + 2x_1 u\,\partial_u .$$

Відповідне до нього ДРЧП є таким:

$$\tilde{Q}[u] = u_0 + x_1^2 u_1 - 2x_1 u = 0 . \qquad (4.1.46)$$

Перетворенням (4.1.36) цього рівняння знаходимо ДР, яке визначає симетрію (4.1.42)

$$Q[w] = w_{011} + x_1^2 w_{111} + 4\,x_1 w_{11} = 0 . \qquad (4.1.47)$$

Для побудови нелокальних анзаців рівняння (4.1.35) скористаємось їх представленням (4.1.43). З умови редукції рівняння (4.1.35) до ЗДР одержуємо такі значення коефіцієнтів h, f, g та ω:

1.(6). $\omega = x_0$, $h = 0$, $f = \frac{1}{6}x_1^{-2}\varphi^{-3}(\omega)$, $g = \lambda_1 x_1 + \lambda_2$

2.(11). $\omega = x_0 + x_1^{-1}$; $h = 1$, $f = -2x_1$, $g = \lambda_1 x_1 + \lambda_2$

3.(8). $\omega = \ln x_0 + x_1^{-1}$; $h = x_0^{\frac{1}{3}}$, $f = -2x_1 x_0^{\frac{1}{3}}$, $g = \lambda_1 x_1 + \lambda_2$

4.(7). $\omega = \ln x_0 + \operatorname{arth} x_1$; $h = -x_0^{-\frac{1}{3}}$, $f = 2x_1 x_0^{-\frac{1}{3}}$,

$$g = x_0^{-\frac{1}{3}}\Big\{-2\int \varphi(\omega)dx_1 + 2\int \varphi(\omega)\,\frac{(x_1^2+1)}{(x_1^2-1)}\,dx_1 +$$

$$+ 8\int\Big\{\int\varphi(\omega)\,\frac{x_1}{(x_1^2-1)^2}\,dx_1\Big]dx_1 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 .$$

5.(9). $\omega = \ln x_0 - \operatorname{arctg} x_1$; $h = x_0^{-\frac{1}{3}}$, $f = -2x_1 x_0^{-\frac{1}{3}}$,

$$g = x_0^{-\frac{1}{3}}\Big\{2\int \phi(\omega)dx_1 - 2\int \phi(\omega)\,\frac{(1-x_1^2)}{(1+x_1^2)}\,dx_1 -$$

$$-8\int\Big[\int\phi(\omega)\,\frac{x_1}{(x_1^2+1)^2}\,dx_1\Big]dx_1 - \lambda_1 x_1 + \lambda_2 \ .$$

6.(10). $\omega = x_0 + \operatorname{arcth} x_1$; $h = 1$, $f = -2x_1$,

$$g = -2\int \phi(\omega)dx_1 + 2\int \phi(\omega)\,\frac{1+x_1^2}{1-x_1^2}\,dx_1 -$$

$$-8\int\Big[\int\phi(\omega)\,\frac{x_1}{(1-x_1^2)^2}\,dx_1\Big]dx_1 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 \ .$$

7.(12). $\omega = x_0 - \operatorname{arctg} x_1$; $h = 1$, $f = -2x_1$,

$$g = -2\int \phi(\omega)dx_1 - 2\int \phi(\omega)\,\frac{1-x_1^2}{1+x_1^2}\,dx_1 +$$

$$+8\int\Big[\int\phi(\omega)\,\frac{x_1}{(1+x_1^2)^2}\,dx_1\Big]dx_1 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 \ . \qquad (4.1.48)$$

λ_i, $(i = 1,2)$ – довільні гладкі функції, які уточнюються підстановкою у рівняння відповідних анзаців (4.1.43).

Зауваження 4.1.2. Побудовані вище анзаци (4.1.43), (4.1.48) можуть бути одержані з відповідних лієвських анзаців 6–12 рівняння (4.1.34). Тому поруч з номерами анзаців рівняння (4.1.35) в (4.1.48) у дужках наведені відповідні номери анзаців рівняння (4.1.34), (див. табл. 2, додаток І).

Анзаци 1–7 редукують рівняння (4.1.35) до таких ЗДР:

1. $\dot\varphi = 0$, $\dot\lambda = -4\varphi$, $\dot\lambda_2 = 0$,

2. $\big[2x_1\partial_\omega - 1\big]\big[2\,\ddot\phi^{-\frac{1}{2}} - \ddot\phi\big] = 0$, $\dot\lambda_1 = \dot\lambda_2 = 0$,

3. $\big[\partial_\omega - 2x_1\big]\big[\frac{2}{3}\phi + \dot\phi - 2\,\ddot\phi^{-\frac{1}{2}}\big] = 0$, $\dot\lambda_1 = \dot\lambda_2 = 0$.

4. $\frac{1}{3}\varphi - \dot\varphi + \varphi^3(4\dot\varphi - \dddot\varphi) = 0$,

5. $\frac{1}{3}\varphi - \dot{\varphi} + \varphi^3(4\dot{\varphi} + \dddot{\varphi}) = 0$,

6. $\dot{\varphi} - \varphi^3(4\dot{\varphi} - \dddot{\varphi}) = 0$,

7. $\dot{\varphi} + \varphi^3(4\dot{\varphi} + \dddot{\varphi}) = 0$. (4.1.49)

Неліївським анзацам (4.1.43), (4.1.48) видповідають ДРЧП, які визначають цю нелокальну симетрію:

1. $x_1 w_{111} + 4 w_{11} = 0$,

2. $w_{011} + x_1^2 w_{111} + 4x_1 w_{11} = 0$,

3. $x_0 w_{011} + x_1^2 w_{111} + 4(x_1 - \frac{1}{6})w_{11} = 0$,

4. $x_0 w_{011} + (x_1^2 - 1)w_{111} + 4(x_1 - \frac{1}{6})w_{11} = 0$,

5. $x_0 w_{011} + (x_1^2 + 1)w_{111} + 4(x_1 - \frac{1}{6})w_{11} = 0$,

6. $w_{011} + (x_1^2 - 1)w_{111} + 4x_1 w_{11} = 0$,

7. $w_{011} + (x_1^2 + 1)w_{111} - 4x_1 w_{11} = 0$, (4.1.50)

За допомогою анзаців (4.1.43), (4.1.48) знайдені, наприклад, розв'язки

$$w = k^{-2}\int\left[\int x_1^{-\frac{8}{3}}\left[1 + x_0 x_1\right]^{-\frac{4}{3}} dx_1\right]dx_1 \ , \quad k = \left[\frac{3}{2}\right]^{\frac{2}{3}} ;$$

$$w = -\frac{9}{2}c^{-2}\left[\frac{3}{2}(x_0 + x_1)^{\frac{2}{3}} + \lambda_1 x_1 + \lambda_2\right] ;$$

$$w = a\int\left[\int\left[x_1^2 + 1\right]^{-\frac{4}{3}}(1 - bx_1^{\frac{2}{3}})dx_1\right]dx_1 \ ,$$

$$a = (-4)^{-\frac{1}{3}}\cos^{\frac{2}{3}}(3x_0) \ , \quad b = \mathrm{tg}^{\frac{2}{3}}(3x_0) \ .$$

c – довільна стала, $\lambda_i(x_0)$, $(i = 1,2)$ уточнюються підстановкою у рівняння.

III. Групова класифікація рівняння

$$u_{00} - \partial_1 [c(u)u_1] = 0 \qquad (4.1.51)$$

була виконана Еймсом, Лохнером та Адамсом в роботі [137] і зводиться до слідуючого:

1. $c(u)$ – довільна : $\langle P_0, P_1, D_1 \rangle$, де

$$P_0 = \partial_0 \ , \ P_1 = \partial_1 \ , \ D_1 = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 \ ;$$

2. $c(u) = k_1 \exp(k_2 u)$: $\langle P_0, P_1, D_1, Q \rangle$, де

$$Q = k_2 x_1 \partial_1 + 2 u \partial_u \ ;$$

3. $c(u) = k_1 u^{k_2}$: $\langle P_0, P_1, D_1, D_2 \rangle$, де

$$D_2 = k_2 x_1 \partial_1 + 2 u \partial_u \ ;$$

4. $c(u) = k_1 u^{-\frac{4}{3}}$: $\langle P_0, P_1, D_1, D_2, \Pi_1 \rangle$, де

$$\Pi_1 = - x_1^2 \partial_1 + 3x_1 u \partial_u \ ;$$

5. $c(u) = k_1 u^{-4}$: $\langle P_0, P_1, D_1, D_2, \Pi_2 \rangle$, де

$$\Pi_2 = x_0^2 \partial_0 + x_0 u \partial_u \ . \qquad (4.1.52)$$

Відповідні ліївські анзаци знаходимо стандартним методом:

1. $u = \varphi(\omega)$, $\omega = x_0^{-1} x_1$;
2. $u = \varphi(\omega) - 2(c + 1)\ln x_0$, $\omega = x_1 x_0^c$;
3. $u = x_0^{-2\frac{c+1}{a}} \cdot \varphi(\omega)$, $\omega = x_1 x_0^c$;
4. а). $c = 1$,

$$u = (x_1^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{ \frac{3}{2} \operatorname{arctg} x_1 \right\} \varphi(\omega) ,$$

$$\omega = \operatorname{arctg} x_1 - \ln x_0 \ ;$$

б). $c = -1$,

$$u = (x_1^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{ -\frac{3}{2} \operatorname{arth} x_1 \right\} \varphi(\omega) ,$$

$$\omega = \operatorname{arth} x_1 + \ln x_0 \ ;$$

в). $c = 0$,

$$u = x_1^{-3}\exp\left[-\tfrac{3}{2}x_1^{-1}\right]\varphi(\omega)\ ,\ \omega = \ln x_0 + x_1^{-1}\ ;$$

5. a). $c = 1$,

$$u = (x_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x_1\right\}\varphi(\omega)\ ,$$

$$\omega = \operatorname{arctg} x_1 - \ln x_0\ ;$$

б). $c = -1$,

$$u = (x_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{\tfrac{1}{2}\operatorname{arth} x_1\right\}\varphi(\omega)\ ,$$

$$\omega = \operatorname{arth} x_1 + \ln x_0\ ;$$

в). $c = 0$,

$$u = x_0\cdot\exp\left[\frac{1}{2x_0}\right]\varphi(\omega)\ ,\ \omega = \ln x_1 + x_0^{-1}\ . \qquad (4.1.53)$$

Тут a, c – довільні сталі параметри. Нелінійне рівняння (4.1.51) в розділі II, §3 було зв'язано з лінійним рівнянням

$$v_{11} = c(y_1)v_{00}\ , \qquad v = v(y_0, y_1) \qquad (4.1.54)$$

нелокальним перетворенням

$$u = y_1\ , \qquad x_0 = v_0\ , \qquad x_1 = v_1\ . \qquad (4.1.55)$$

Рівняння ж (4.1.54) детально досліджене з класичної групової точки зору в роботі [147] Блюменом та Кумей. З цих результатів, зокрема, випливає, що рівняння з $c(y_1)$ вигляду

$$(by_1^2 + c\cdot y_1 + d)^{-2}\exp\left\{2(c-a)\int(by_1^2 + c\cdot y_1 + d)^{-1}dy_1\right\} \qquad (4.1.56)$$

допускає чотирипарметричну групу Лі. Одночасно рівняння (4.1.51) з тією ж самою функцією $c(u)$, як видно з (4.1.52), допускає лише трипараметричну групу $\langle P_0, P_1, D_1\rangle$. Із рівнянь (4.1.54) з $c(y_1)$ вигляду (4.1.56) в роботі [147] вилучені канонічні форми, для яких побудовані відповідні лієвські анзаци та виконана редукція до ЗДР. На цих підставах за допомогою НПЗ (4.1.55) будуємо нелокальні анзаци рівняння (4.1.51), ДРЧП, які визначають нелокальні симетрії, та редуковані ЗДР.

1. $c(u) = (u^2+1)^{-2}\exp\left\{-4a\cdot\mathrm{arctg}\,u\right\}$:

а). $x_0 = (u^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\exp\left\{(s+2a)\mathrm{arctg}\,u\right\}\varphi(\omega)$,

$$x_1 = (u+s)(u^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{s\cdot\mathrm{arctg}\,u}\cdot\varphi(\omega) +$$

$$+ 2a\tau x_0(u^2+1)^{-1}\dot\varphi(\omega) ,$$

$$\omega = \tau\cdot e^{2a\cdot\mathrm{arctg}\,u} ;$$

$$x_1(u^2+1) - 2ax_0\partial_1^{-1}u_0 - (u+s)(x_0\partial_1^{-1}u_0 + x_1u - \partial_1^{-1}u) = 0 ,$$

$$(4a^2\omega^2-1)\ddot\varphi + 4a(a+s)\omega\dot\varphi + (1+s^2)\varphi = 0 .$$

б). $x_0 = (u^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{a\cdot\mathrm{arctg}\,u}\Big\{(4a^2\tau+2a)e^{2a\cdot\mathrm{arctg}\,u}\cdot$

$$\cdot\varphi(\omega) + 4a^2\tau\left[\omega + (1+2a\tau)e^{2a\cdot\mathrm{arctg}\,u}\right]e^{2a\cdot\mathrm{arctg}\,u}\cdot\dot\varphi(\omega)\Big\} ,$$

$$x_1 = (a+u)(u^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{a\cdot\mathrm{arctg}\,u}\left[\omega + (1+2a\tau)e^{2a\cdot\mathrm{arctg}\,u}\right]\cdot$$

$$\cdot\varphi(\omega) + 4a^3\tau^2(u^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{3a\cdot\mathrm{arctg}\,u}\Big[\omega +$$

$$+ (1+2a\tau)e^{2a\cdot\mathrm{arctg}\,u}\Big]\dot\varphi(\omega) ,$$

$$\omega = 2a^2\tau^2e^{2a\cdot\mathrm{arctg}\,u} ;$$

$$x_1(\partial_1^{-1}u_0)(1+u^2) - \frac{1}{4a}x_0\left[4a^2(\partial_1^{-1}u_0)^2 + e^{-4a\cdot\mathrm{arctg}\,u} - 1\right] -$$

$$- \left[(\partial_1^{-1}u_0)(a+u) + a\right](x_0(\partial_1^{-1}u_0) + x_1u - \partial_1^{-1}u) = 0 ;$$

$$4a^2(\omega^2-1)\ddot\varphi + 8a^2(1+s)\omega\dot\varphi + \left[1 + a^2(1+2s)^2\right]\varphi = 0 .$$

2. $c(u) = (1-u)^{-2(1+a)}(1+u)^{-2(1-a)}$:

а). $x_0 = (1-u^2)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{a+s}\cdot\varphi(\omega)$,

$$-x_1 = u(1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{s}\cdot\varphi + (1-u^2)^{\frac{1}{2}}\frac{2s}{(1+u)^2}\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{s-1}\cdot\varphi +$$

$$+ 2\tau a(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{a+s-1}\frac{1}{(1+u)^2}\dot\varphi(\omega) ,$$

$$\omega = \tau\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{s} ;$$

$$x_1(u^2-1) - 2ax_0\partial_1^{-1}u_0 - (u+2a)(x_0\partial_1^{-1}u_0 + x_1 u - \partial_1^{-1}u) = 0 ,$$

$$(4a^2\omega^2-1)\ddot\varphi + 4a(a+2s)\omega\dot\varphi + (4s^2-1)\varphi = 0 .$$

б). $$x_0 = (1-u^2)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{\frac{3}{2}a}\left[4a^2\tau + 2a\right]\varphi(\omega) +$$

$$4a^2\tau(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{\frac{3}{2}a}\left[(1+2a\tau)\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{a} + \omega\right]\dot\varphi(\omega) ,$$

$$-x_1 = \left\{u(1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{\frac{1}{2}a} + (1-u^2)^{\frac{1}{2}}\frac{a}{(1+u)^2}\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{\frac{1}{2}a-1}\right\}\cdot$$

$$\cdot\left[(1+2a\tau)\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{a} + \omega\right]\varphi + 2\frac{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+u)^2}\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{\frac{1}{2}a}\cdot$$

$$\cdot\left\{a(1+2a\tau)\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{a-1} + 2a^3\tau^2\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{a-1} - \frac{1}{2}a\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{a-1} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}a\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{-a-1}\right\}\varphi(\omega) + \frac{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+u)^2}\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{\frac{1}{2}a}\cdot$$

$$\cdot\left[(1+2a\tau)\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{a} + \omega\right]\left\{(4a^3\tau^2 - a)\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{a-1} +\right.$$

$$\left.+a\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{-a-1}\right\}\dot\varphi(\omega) ,$$

$$\omega = 2a^2\tau^2\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{a} - \frac{1}{2}\left[\left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{a} + \left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{-a}\right] ;$$

$$x_1(u^2-1)\partial_1^{-1}u_0 + \frac{1}{4a}x_0\left[1 - 4a^2(\partial_1^{-1}u_0)^2 - \left[\frac{1-u}{1+u}\right]^{-2a}\right] -$$

$$-\left[(a+u)(\partial_1^{-1}u_0) + a\right](x_0\partial_1^{-1}u_0 + x_1 u - \partial_1^{-1}u) = 0 ,$$

$$4a^2(\omega^2-1)\ddot{\varphi} + 8a^2(s+1)\omega\dot{\varphi} + \left[a^2(2s+1)^2 - 1\right]\varphi = 0 .$$

3. $c(u) = u^{-4}e^{-\frac{2}{u}}$:

а). $x_0 = u\cdot e^{\frac{s+1}{u}}\cdot\varphi(\omega)$,

$$x_1 = \left[1 - \frac{s}{u}\right]e^{\frac{s}{u}}\cdot\varphi(\omega) - \frac{\tau}{u}e^{\frac{s+1}{u}}\cdot\dot{\varphi}(\omega) ,$$

$$\omega = \tau\cdot e^{\frac{1}{u}} ;$$

$$x_1u^2 + x_0\partial_1^{-1}u_0 - (u-s)(x_0\partial_1^{-1}u_0 + x_1u - \partial_1^{-1}u) = 0 ,$$

$$(\omega^2-1)\ddot{\varphi} + (2s+1)\omega\dot{\varphi} + s^2\varphi = 0 .$$

б). $x_0 = -2u\cdot e^{\frac{1}{2u}}e^{-2s\tau\cdot e^{\frac{1}{u}}\omega^{-1}}\cdot\varphi(\omega)\left[s\cdot e^{\frac{1}{u}}\omega^{-1} - 2s\cdot\tau^2\omega^{-2}e^{\frac{2}{u}}\right] +$

$$+ 2\tau\cdot u\cdot e^{\frac{3}{2u}}\cdot e^{-2s\tau\cdot e^{\frac{1}{u}}\omega^{-1}}\cdot\dot{\varphi}(\omega) ,$$

$$x_1 = \left[1 - \frac{1}{2u}\right]e^{-2s\tau\cdot e^{\frac{1}{u}}\omega^{-1}}\cdot\varphi(\omega) + u\cdot e^{\frac{1}{2u}}\left\{\frac{2s\cdot\tau}{u^2}e^{-\frac{1}{u}}\cdot\omega^{-1} +\right.$$

$$+ 2\tau\cdot s\cdot e^{-\frac{1}{u}}\omega^{-2}\left[\frac{\tau^2}{u^2}e^{\frac{1}{u}} + \frac{1}{u^2}e^{-\frac{1}{u}}\right]\cdot e^{-2s\tau\cdot e^{\frac{1}{u}}\omega^{-1}}\cdot\varphi(\omega) -$$

$$-u\left[\frac{\tau^2}{u^2}e^{\frac{1}{u}} + \frac{1}{u^2}e^{-\frac{1}{u}}\right]\cdot e^{\frac{1}{2u}}\cdot e^{-2s\tau\cdot e^{\frac{1}{u}}\omega^{-1}}\cdot\dot{\varphi}(\omega) ,$$

$$\omega = \tau^2e^{\frac{1}{u}} - e^{-\frac{1}{u}} ;$$

$$2x_1u(\partial_1^{-1}u_0) + x_0((\partial_1^{-1}u_0)^2 + e^{-\frac{2}{u}}) - \left[(2u-1)\partial_1^{-1}u_0 +\right.$$

$$\left.+ 2s\right](x_0\partial_1^{-1}u_0 + x_1u - \partial_1^{-1}u) = 0 ,$$

$$4\omega^2\ddot{\varphi} + 8\omega\dot{\varphi} + (1 - 16s^2\omega^{-2})\varphi = 0 .$$

§2. Анзаци, породжені нелокальними симетріями

1. Для знаходження по лівських анзацах рівняння Бюргерса

$$u_0 + u_1 u - u_{11} = 0 \qquad (4.2.1)$$

відповідних нелокальних анзаців скористаємось його нелокальними симетріями (2.3.3) та (2.3.4)

$$\overset{(2)}{u} = -2(\ln \overset{(1)}{u})_1 + \overset{(1)}{u} , \qquad (4.2.2)$$

$$\overset{(2)}{u} = (-2)\left[\frac{\overset{(1)}{u}_1{}^2 + \frac{1}{2}\overset{(1)}{u}{}^2\overset{(1)}{u}_1 - \overset{(1)}{u}\,\overset{(1)}{u}_{11}}{\frac{1}{2}\overset{(1)}{u}{}^3 - \overset{(1)}{u}\,\overset{(1)}{u}_1} - \frac{\overset{(1)}{u}_0}{\overset{(1)}{u}} - \frac{1}{2}\overset{(1)}{u}\right] . \qquad (4.2.3)$$

Істотно відмінні лівські анзаци та редуковані ЗДР для (4.2.1) знаходимо за системою одновимірних підалгебр алгебри Лі інваріантності цього рівняння стандартним методом [60,70]. Вони є такими:

1. $u = \varphi(\omega), \quad \omega = \lambda_0 x_0 - \lambda_1 x_1 , \quad \lambda_0\dot\varphi - \alpha_1\varphi\dot\varphi - \alpha_1^2\ddot\varphi = 0 ;$

2. $u = x_0^{-\frac{1}{2}}\cdot\varphi(\omega) + a , \quad \frac{1}{2}\varphi - 2\omega^{\frac{1}{2}}\varphi\dot\varphi + 3\dot\varphi + 4\omega\ddot\varphi = 0 ;$

   $\omega = x_0^{-1}(x_1 - ax_0)^2 ,$

3. $u = x_1^{-1}\varphi(\omega) , \quad 2\omega^{-1}\varphi - 2\dot\varphi + \omega\dot\varphi - 2\varphi\dot\varphi + \omega^{-1}\varphi^2 + 4\omega\ddot\varphi = 0 ;$

   $\omega = x_0^{-1}x_1^2 ,$

4. $u = x_0^{-1}\varphi(\omega) + x_0^{-1}x_1 , \quad \omega = x_0^{-1}x_1 , \quad \varphi\dot\varphi - \ddot\varphi = 0 . \qquad (4.2.4)$

a – груповий параметр. Наведені різультати дозволяють довести твердження.

Твердження 4.2.I. Нелокальні анзаци першого та другого порядку для рівняння (4.2.1), які відповідають лівським анзацам (4.2.4) та нелокальним симетріям (4.2.2), (4.2.3), породжуються анзацами (4.2.4) 2,4 і мають вигляд:

$$u = -\frac{4\omega^{\frac{1}{2}}\cdot\dot{\varphi}(\omega)}{x_0^{\frac{1}{2}}\cdot\varphi(\omega)+ ax_0} + x_0^{-\frac{1}{2}}\varphi(\omega) + a\,, \tag{4.2.5}$$

$$\omega = x_0^{-1}(x_1 - ax_0)^2\;;$$

$$u = -2\,\frac{x_0^{-1}\dot{\varphi}(\omega) + 1}{\varphi(\omega) + x_1} + x_0^{-1}\varphi(\omega) + \omega\,,$$

$$\omega = x_0^{-1}x_1\;; \tag{4.2.6}$$

$$u = 2\left[\frac{2x_0^{-\frac{3}{2}}\left[2\omega\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}\right]\left[x_0^{-\frac{1}{2}}\varphi + a\right] - 4x_0^{-2}\omega\dot{\varphi}^2 - x_0^{-1}\omega^{\frac{1}{2}}\left[x_0^{-\frac{1}{2}}\varphi + a\right]^2\cdot\dot{\varphi}}{\frac{1}{2}\left[x_0^{-\frac{1}{2}}\varphi + a\right]^3 - 2x_0^{-1}\omega^{\frac{1}{2}}\left[x_0^{-\frac{1}{2}}\varphi + a\right]} + \right.$$

$$\left. + \frac{x_0^{-1}\omega\left[x_0^{-\frac{1}{2}} + 2a\omega^{-\frac{1}{2}}\right]\dot{\varphi} + \frac{1}{2}x_0^{-\frac{3}{2}}\varphi}{x_0^{-\frac{1}{2}}\varphi + a} + \frac{1}{2}\left[x_0^{-\frac{1}{2}}\varphi + a\right]\right],$$

$$\omega = x_0^{-1}(x_1 - ax_0)^2\;; \tag{4.2.7}$$

$$u = 2x_0^{-1}\left[\frac{\ddot{\varphi}(\varphi + x_1) - (\dot{\varphi} + x_0)^2 - \frac{1}{2}(\dot{\varphi} + x_0)(\varphi + x_1)^2}{\frac{1}{2}(\varphi + x_1)^3 - (\dot{\varphi} + x_0)(\varphi + x_1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega\dot{\varphi} + \varphi + x_1}{\varphi + x_1} + \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}x_1\right],$$

$$\omega = x_0^{-1}x_1\,. \tag{4.2.8}$$

Ядра редукованих рівнянь є

$$4\omega\ddot{\varphi} + 3\dot{\varphi} - 2\omega^{\frac{1}{2}}\varphi\cdot\dot{\varphi} + \frac{1}{2}\varphi = 0\,, \tag{4.2.5a}$$

$$\ddot{\varphi} - \varphi\cdot\dot{\varphi} = 0\,, \tag{4.2.6a}$$

відповідно. □

Доведення. Нелокальні анзаци (4.2.5)-(4.2.8) одержимо, підставивши відповідні лївськи анзаци (4.2.4) 2,4 рівняння (4.2.1) у формули нелокальних симетрій (4.2.2) та (4.2.3). Ці нелокальні перетворення породжують операторні рівності

$$L(\overset{(2)}{u}) = \lambda_1 L(\overset{(1)}{u}) ,$$

$$L(\overset{(3)}{u}) = \lambda_2 \lambda_1 L(\overset{(1)}{u}) .$$

Тут позначено

$$L(u) \equiv u_0 + u \cdot u_1 - u_{11} ,$$

$$\lambda_1 = 2[- \overset{(1)}{u}{}^{-1} \partial_1 + \overset{(1)}{u}{}^{-2} \overset{(1)}{u_1} + \tfrac{1}{2}] ,$$

$$\lambda_2 = [\overset{(1)}{u} (\overset{(1)}{u_1} - \tfrac{1}{2} \overset{(1)}{u}{}^2)^{-1} \partial_1 + 2\partial_1 (\overset{(1)}{u} - 2\partial_1 \ln \overset{(1)}{u})^{-1} + 1] .$$

З наведених співвідношень знаходимо відповідні ядра (4.2.5a), (4.2.6a) редукованих за допомогою анзаців (4.2.5)-(4.2.8) рівнянь. Твердження доведено. ■

Оскільки рівняння (4.2.1) зв'язано НПЗ (4.1.6) з лінійним рівнянням (4.1.1)

$$L_2 \equiv v_0 - v_{11} = 0 , \qquad (4.2.1a)$$

існує ще й інший механізм знаходження нелокальних анзаців. Цей механізм породжується нелокальною симетрією лінійного рівняння

$$\overset{(2)}{v}(y) = Q_s \overset{(1)}{v}(y) . \qquad (4.2.9)$$

Q_s, $(s = \overline{1,r})$ - відповідні оператори лївської симетрії L_2. Розглянемо, зокрема, оператор P_1 алгебри (4.1.2). Тоді $Q = \partial_1$ і рівняння (4.2.9) має вигляд

$$\overset{(2)}{v}(y) = \partial_1 \overset{(1)}{v}(y) , \qquad (y \equiv x) . \qquad (4.2.10)$$

У даному випадку є вірним таке твердження.

Теорема 4.2.I. Нехай симетрія лінійного рівняння L_2 визначається рівністю (4.2.10), тоді формула розмноження розв'язків рівняння (4.2.1), має вигляд

$$\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = -2\partial_1 \ln \overset{(1)}{u}(x_0,x_1) + \overset{(1)}{u}(x_0,x_1) , \qquad (4.2.11)$$

тобто збігається з нелокальною симетрією (4.2.2) рівняння (4.2.1). □

Доведення. Для розв'язку $\overset{(2)}{u}$ рівняння (4.2.1) скористаємось підстановкою Коула-Хопфа

$$\overset{(2)}{u} = -2(\ln \overset{(2)}{v})_1 , \qquad (4.2.11a)$$

яка зв'язує його з лінійним рівнянням L (4.1.1). Замінимо тут $\overset{(2)}{v}$ за допомогою формули (4.2.10). Одержуємо

$$\overset{(2)}{u} = -2 \overset{(1)}{v}_1{}^{-1} \overset{(1)}{v}_{11} . \qquad (4.2.12)$$

В рівності (4.2.12) за допомогою формул

$$\overset{(1)}{v}_1 = -\frac{1}{2} \overset{(1)}{u} \overset{(1)}{v} ,$$

$$\overset{(1)}{v}_{11} = -\frac{1}{2}\left[\overset{(1)}{u}_1 - \frac{1}{2} \overset{(1)}{u}{}^2 \right] \overset{(1)}{v} \qquad (4.2.12a)$$

виключимо змінну $\overset{(1)}{v}$. Знаходимо

$$\overset{(2)}{u} = \frac{\frac{1}{2} \overset{(1)}{u}{}^2 - \overset{(1)}{u}_1}{\frac{1}{2} \overset{(1)}{u}} = -2\partial_1 \ln \overset{(1)}{u} + \overset{(1)}{u} ,$$

тобто (4.2.11). Теорема доведена. ■

Розглянемо зв'язок між розв'язками лінійного рівняння L_2 у випадку оператора G групи Галілея алгебри (4.2.1).

$$\overset{(2)}{v} = G \overset{(1)}{v} = y_0 \overset{(1)}{v}_1 + \frac{1}{2} y_1 \overset{(1)}{v} . \qquad (4.2.13)$$

Відповідні нелокальні анзаци для рівняння (4.2.1) визначаються твердженням.

Теорема 4.2.2. Якщо симетрія лінійного рівняння

(4.2.1a) визначается рівністю (4.2.13), розмноження розв'язків рівняння Бюргерса (4.2.1) виконується за формулою

$$\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = 2(x_1 - x_0\overset{(1)}{u})^{-1}(x_0\overset{(1)}{u}_1 - \tfrac{1}{2}x_0\overset{(1)}{u}{}^2 + \tfrac{1}{2}x_1\overset{(1)}{u} - 1) \text{ . } \square(4.2.14)$$

Доведення. Скористаємось знов перетворенням (4.2.11a), в яке підставимо

$$\overset{(2)}{v} = x_0\overset{(1)}{v}_1 + \tfrac{1}{2}\, x_1\overset{(1)}{v} \,,$$

$$\overset{(2)}{v}_1 = x_0\overset{(1)}{v}_{11} + \tfrac{1}{2}\, x_1\overset{(1)}{v}_1 + \tfrac{1}{2}\overset{(1)}{v} \,. \qquad (4.2.13a)$$

Отже,

$$\overset{(2)}{u} = -2\,\frac{x_0\overset{(1)}{v}_{11} + \frac{1}{2}\, x_1\overset{(1)}{v}_1 + \frac{1}{2}\overset{(1)}{v}}{x_0\overset{(1)}{v}_1 + \frac{1}{2}\, x_1\overset{(1)}{v}} \,. \qquad (4.2.15)$$

Виключимо в правій частині (4.2.15) змінну $\overset{(1)}{v}$ за допомогою співвідношень (4.2.12a). Одержуємо

$$\overset{(2)}{u} = 2\,\frac{x_0\overset{(1)}{u}_1 - \frac{1}{2}\, x_0\overset{(1)}{u}{}^2 + \frac{1}{2}\, x_1\overset{(1)}{u} - 1}{x_1 - x_0\overset{(1)}{u}} \,,$$

тобто формулу (4.2.14). Теорема доведена. ■

Таким чином, видно, що навіть для такого добре вивченого рівняння, як рівняння Бюргерса (4.2.1), вдається одержати сукупность нових результатів завдяки дослідженню його нелокальних симетрій.

2. У розділі III (§2, приклад 3.2.1) було розглянуто рівняння

$$u_0 u_{11} + 1 = 0 \,, \qquad (4.2.16)$$

яке лінеаризується за допомогою перетворення Ейлера-Ампера в $\mathbb{R}(1,1)$. Припустимо, що розв'язки відповідного лінійного рівняння L_2 (4.2.1a) зв'язані між собою оператором $Q = \partial_1$:

$$\overset{(2)}{v}(y_0,y_1) = \partial_1 \overset{(1)}{v}(y_0,y_1) . \qquad (4.2.17)$$

Ця нелокальна симетрія L_2 та перетворення Ейлера-Ампера породжують відповідну нелокальну симетрію рівняння (4.2.16).

Теорема 4.2.3. Якщо симетрія лінійного рівняння (4.2.1a) має вигляд (4.2.17), розмноження розв'язків диференціального рівняння (4.2.16) виконується за формулою

$$\left| \begin{array}{l} \overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = x_1 \overset{(1)}{u}_\tau(x_0,\tau) - \tau , \\ x_1 \overset{(1)}{u}_{\tau\tau}(x_0,\tau) = 1 . \ \square \end{array} \right. \qquad (4.2.18)$$

Доведення. Виконаємо перетворення розв'язку $\overset{(2)}{u}(x_0,x_1)$

$$\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = y_1 \overset{(2)}{v}_1 - \overset{(2)}{v} = y_1 x_1 - \overset{(2)}{v} ,$$

$$x_1 = \overset{(2)}{v}_1 , \qquad x_0 = y_0 . \qquad (4.2.19)$$

Тут $\overset{(2)}{v}(y_0,y_1)$ – відповідний розв'язок лінійного рівняння. У формули (4.2.19) підставимо $\overset{(2)}{v}(y_0,y_1) = \partial_1 \overset{(1)}{v}(y_0,y_1)$. Одержуємо

$$\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = y_1 x_1 - \overset{(1)}{v}_1 ,$$

$$x_1 = \overset{(1)}{v}_{11} , \qquad x_0 = y_0 . \qquad (4.2.20)$$

З іншого боку

$$\overset{(1)}{v} = \tau \overset{(1)}{u}_\tau - \overset{(1)}{u} , \qquad \overset{(1)}{u} = \overset{(1)}{u}(x_0,\tau) ,$$

$$y_1 = \overset{(1)}{u}_\tau , \qquad y_0 = x_0 , \qquad (4.2.21)$$

$$\overset{(1)}{v}_1 = \tau , \qquad \overset{(1)}{v}_{11} = \overset{(1)}{u}_{11}^{\,-1} .$$

Підставивши формули (4.2.21) в співвідношення (4.2.20), знаходимо шукану формулу (4.2.18). Теорема 4.2.4 доведена. ■

Для побудови нелокальних анзаців нелінійного рівняння

(4.2.16) скористаємось лїівськими анзацами (4.1.4) б), в) та симетрією

$$\overset{(2)}{v}(x) = \partial_1 \overset{(1)}{v}(x)$$

лінійного рівняння (4.2.1а). Отже, продиференціювавши анзаци (4.1.4) б), в) по x_1, виконаємо у них перетворення Ейлера-Ампера. Знаходимо шукані анзаци та відповідні ЗДР - редуковані ядра рівнянь, одержаних з (4.2.16):

$$б).\ u(x_0,x_1) = x_1\tau - \left[\dot{\varphi} - \frac{x_0\tau}{\sqrt{x_0^2+1}}\varphi\right](x_0^2+1)^{-\frac{3}{4}}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{x_0\tau^2}{x_0^2+1} - \lambda\cdot\mathrm{arctg}\, x_0\right\},\quad \omega = (x_0^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot\tau,$$

$$x_1 = \left[\ddot{\varphi} - 2\frac{x_0\tau}{x_0^2+1}\dot{\varphi} + \frac{x_0^2\tau^2 - x_0^3 - x_0}{x_0^2+1}\varphi\right]\cdot$$

$$\cdot(x_0^2+1)^{-\frac{5}{4}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{x_0\tau^2}{x_0^2+1} - \lambda\cdot\mathrm{arctg}\, x_0\right\},\quad \varphi = \varphi(\omega),$$

$$\ddot{\varphi} + (\omega^2 + 2\lambda)\varphi = 0;$$

$$в).\ u(x_0,x_1) = x_1\tau - \left[\dot{\varphi} + x_0\varphi\right]\exp\left\{x_0\tau + \tfrac{2}{3}x_0^3\right\},\quad \omega = \tau + x_0^2,$$

$$x_1 = \left[\ddot{\varphi} + 2x_0\dot{\varphi} + x_0^2\varphi\right]\exp\left\{x_0\tau + \tfrac{2}{3}x_0^3\right\},\quad \ddot{\varphi} - \omega\varphi = 0. \qquad (4.2.22)$$

Формула розмноження розв'язків, яка побудована виходячи з симетрії лінійного рівняння

$$\overset{(2)}{v}(y_0,y_1) = G\,\overset{(1)}{v}(y_0,y_1), \qquad (4.2.23)$$

породженої оператором G групи Галілея, визначається твердженням.

Теорема 4.2.4. Нехай симетрія лінійного рівняння (4.2.1а) визначається рівністю (4.2.23), тоді розмноження розв'язків рівняння (4.2.16), одержане за допомогою НПЗ (4.2.19), виконується за формулою

$$\left\{\begin{aligned} &\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = x_0\overset{(1)}{u}_\tau \overset{(1)}{u}_{\tau\tau}^{-1} + \tfrac{1}{2}\tau \overset{(1)}{u}_\tau^{2} - x_0\overset{(1)}{u}_\tau , \\ &x_1 = x_0 \overset{(1)}{u}_{\tau\tau}^{-1} + \tau \overset{(1)}{u}_\tau - \tfrac{1}{2}\overset{(1)}{u} . \ \square \end{aligned}\right. \qquad (4.2.24)$$

Доведення. Нелокальна симетрія (4.2.13) лінійного рівняння (4.2.1a) має наслідками співвідношення (4.2.13*a*). Отж, виконаємо перетворення Ейлера-Ампера (4.2.19) розв'язку $\overset{(2)}{u}$ рівняння (4.2.16) і заміну змінної $\overset{(2)}{v}$ за формулами (4.2.13*a*). Знаходимо

$$\begin{aligned} &\overset{(2)}{u} = y_1 \overset{(2)}{v}_1 - \overset{(2)}{v} = y_1 (y_0 \overset{(1)}{v}_{11} + \tfrac{1}{2} y_1 \overset{(1)}{v}_1) - y_0 \overset{(1)}{v} , \\ &x_1 = \overset{(2)}{v}_1 = y_0 \overset{(1)}{v}_{11} + \tfrac{1}{2} y_1 \overset{(1)}{v}_1 + \tfrac{1}{2}\overset{(1)}{v} . \end{aligned} \qquad (4.2.25)$$

З рівностей (4.2.25) виключимо змінну $\overset{(1)}{v}$ за допомогою оберненого перетворення Ейлера-Ампера (4.2.21). Співвідношення (4.2.25) мають вигляд

$$\begin{aligned} &\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = \overset{(1)}{u}_\tau \left[x_0\overset{(1)}{u}_{\tau\tau}^{-1} + \tfrac{1}{2}\overset{(1)}{u}_\tau\cdot\tau \right] - x_0 \overset{(1)}{u}_\tau , \\ &x_1 = x_0\overset{(1)}{u}_{\tau\tau}^{-1} + \tfrac{1}{2}\overset{(1)}{u}_\tau\cdot\tau + \tfrac{1}{2}(\tau \overset{(1)}{u}_\tau - \overset{(1)}{u}) . \end{aligned}$$

Після спрощення цих рівнянь одержуємо шукану формулу. Що і треба було довести. ■

Аналогічно можуть бути побудовані формули розмноження розв'язків рівняння (4.2.16) для решти операторів алгебри (4.2.1).

Ефективність формул розмноження розв'язків (4.2.18), (4.2.24) проілюструємо прикладами.

Приклад 4.2.I. Розглянемо розв'язок рівняння (4.2.16)

$$\overset{(1)}{u} = x_0 - \frac{1}{2} x_1^2 .$$

Перепишемо його, замінивши x_1 параметром τ та обчислимо похідні:

$$\overset{(1)}{u} = x_0 - \frac{1}{2}\tau^2 , \quad \overset{(1)}{u}_\tau = - \tau , \quad \overset{(1)}{u}_{\tau\tau} = -1 .$$

Скористаємось тепер формулою (4.2.24). Одержуємо

$$\overset{(2)}{u} = 2x_0\tau + \frac{1}{2} \tau^3 , \quad x_1 = - \frac{3}{4}(2x_0 + \tau^2) . \qquad (4.2.26)$$

З другого рівняння знаходимо

$$\tau = \sqrt{2}\left[- \frac{2}{3} x_1 - x_0\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Підставивши одержане τ у (4.2.26), приходимо до розв'язку

$$\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = 2^{\frac{3}{2}}\cdot\left[- \frac{2}{3} x_1 - x_0\right]^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\cdot\left[- \frac{2}{3} x_1 - x_0\right]^{\frac{3}{2}} .$$

Приклад 4.2.2. Візьмемо частинний розв'язок рівняння (4.2.16) у вигляді

$$\overset{(1)}{u}(x_0,x_1) = k\left[x_1 - x_0 + 1\right]^{\frac{3}{2}} , \; k = - \frac{2}{3} \sqrt{2} .$$

Замінимо в ньому x_1 на параметр τ та обчислимо похідні.

$$\overset{(1)}{u}_\tau(x_0,\tau) = -\sqrt{2}[\tau - x_0 + 1]^{\frac{1}{2}} , \quad \overset{(1)}{u}_{\tau\tau}(x_0,\tau) = - \frac{1}{\sqrt{2}}[\tau - x_0 + 1]^{-\frac{1}{2}} .$$

Підставимо одержані результати у формулу (4.2.18). Маємо

$$\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = -\sqrt{2}x_1[\tau - x_0 + 1]^{\frac{1}{2}} - \tau , \quad x_1 = -\sqrt{2}[\tau - x_0 + 1]^{\frac{1}{2}} .$$

З другого співвідношення випливає

$$\tau = \frac{1}{2} x_1^2 + x_0 - 1 .$$

Таким чином, шуканий розв'язок має вигляд

$$\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_0 - 1 .$$

3. Розв'язки нелінійного рівняння теплопровідності (4.1.15)

$$u_0 - \partial_1 (u^{-2} u_1) = 0 \tag{4.2.27}$$

зв'язані з розв'язками лінійного рівняння (4.2.1a) за допомогою формули, яка була одержана у розділі III, (§3,(3.3.6)),

$$\overset{(2)}{u}(x_0, x_1) = \overset{(2)}{v}{}_1^{-1}(y_0, y_1),$$

$$x_1 = \overset{(2)}{v}(y_0, y_1), \qquad x_0 = y_0 . \tag{4.2.28}$$

Цим НПЗ та нелокальними симетріями лінійного рівняння скористаємось для побудови формул розмноження розв'язків рівняння (4.2.27).

Теорема 2.4.5. Нехай симетрія лінійного рівняння визначається рівністю $\overset{(2)}{v} = \partial_1 \overset{(1)}{v}$, тоді новий розв'язок $\overset{(2)}{u}(x_0, x_1)$ рівняння (4.2.27) по відомому розв'язку $\overset{(1)}{u}(x_0, x_1)$ будується за формулою

$$\left| \begin{aligned} &\overset{(2)}{u}(x_0, x_1) = - \overset{(1)}{u}{}^3(x_0, \tau)\, u_\tau^{-1}(x_0, \tau), \\ &x_1 = \overset{(1)}{u}{}^{-1}(x_0, \tau). \ \square \end{aligned} \right. \tag{4.2.29}$$

Доведення. Виконаемо підстановку

$$\overset{(2)}{v}(y_0, y_1) = \overset{(1)}{v}_1(y_0, y_1)$$

у рівнянні (4.2.28) . Маємо

$$\overset{(2)}{u}(x_0, x_1) = \overset{(1)}{v}{}_{11}^{-1}(y_0, y_1), \ x_1 = \overset{(1)}{v}_1(y_0, y_1), \ x_0 = y_0 . \tag{4.2.30}$$

Зв'язок між розв'язками $\overset{(1)}{u}(x_0, \tau)$ та $\overset{(1)}{v}(y_0, y_1)$ є таким :

$$\overset{(1)}{u}(x_0, \tau) = \overset{(1)}{v}{}_1^{-1}(y_0, y_1), \ \tau = \overset{(1)}{v}(y_0, y_1), \ x_0 = y_0 , \tag{4.2.31}$$

що дозволяє систему (4.2.30) звести до вигляду

$$\overset{(2)}{u}(x_0, x_1) = \left[\partial_{y_1} \overset{(1)}{u}{}^{-1}\right]^{-1} = \left[-\frac{u_\tau}{\overset{(1)}{u}{}^2} \right]^{-1} \cdot \frac{d\tau}{dy_1} ,$$

$$x_1 = \overset{(1)}{u}{}^{-1}(x_0,\tau) . \tag{4.2.32}$$

З другого рівняння системи (4.2.31) знаходимо

$$\frac{d\tau}{dy_1} = \overset{(1)}{v}_1 = \overset{(1)}{u}{}^{-1}(x_0,\tau) . \tag{4.2.33}$$

Отже, підставивши (4.2.33) у формулу (4.2.32), одержуємо систему (4.2.29). Теорема доведена. ■

Приклад 4.2.3. Рівняння (4.2.27) має частинний розв'язок

$$\overset{(1)}{u} = x_0^{\frac{1}{2}} x_1^{-1}\left[-\ln\left\{x_0^{\frac{1}{2}} x_1\right\}\right]^{-\frac{1}{2}} .$$

За допомогою формули (4.2.29) знаходимо новий розв'язок

$$\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = x_0^{\frac{3}{2}} \tau \left[\ln \tau - \frac{1}{2}\right]^{-1} ,$$

$$\ln \tau = x_0^2 x_1^2 \tau^2 .$$

Теорема 4.2.6. Якщо симетрія лінійного рівняння визначається рівністю $\overset{(2)}{v} = \partial_0 \overset{(1)}{v}$, формула розмноження розв'язків рівняння (4.2.27) є такою:

$$\begin{cases} \overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = \overset{(1)}{u}{}^{5}(x_0,\tau)\left[\overset{(1)}{u}{}_{\tau}^{2} - \overset{(1)}{u}{}^{3}\overset{(1)}{u}_0\right]^{-1} , \\ x_1 = -\overset{(1)}{u}{}^{3}(x_0,\tau)\,\overset{(1)}{u}_{\tau}(x_0,\tau) . \;\square \end{cases} \tag{4.2.34}$$

Доведення. З умови $\overset{(2)}{v} = \partial_0 \overset{(1)}{v}$ теореми випливає $\overset{(2)}{v}_1 = \overset{(1)}{v}_{01}$. Отже, виконавши перетворення (4.2.28), одержуємо

$$\begin{gathered} \overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = \overset{(2)}{v}_1{}^{-1} = \overset{(1)}{v}_{01}{}^{-1} , \\ x_1 = \overset{(2)}{v} = \overset{(1)}{v}_0 = \overset{(1)}{v}_{11} , \quad x_0 = y_0 . \end{gathered} \tag{4.2.35}$$

Для виключення з рівнянь (4.2.35) змінної $\overset{(1)}{v}$ скористаємось співвідношеннями

$$\overset{(1)}{u}(x_0,\tau) = \overset{(1)}{v}{}_1^{-1}(x_0,y_1)\ , \qquad \tau = \overset{(1)}{v}(x_0,y_1)\ .$$

Тоді з (4.2.35) випливає система

$$\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = \overset{(1)}{v}{}_{01}^{-1} = \left[\partial_{y_0}\overset{(1)}{u}{}^{-1}(x_0,\tau)\right]^{-1}\ ,$$

$$x_1 = \overset{(1)}{v}{}_{11} = \left[\partial_{y_1}\overset{(1)}{u}{}^{-1}(x_0,\tau)\right]^{-1}\ . \qquad (4.2.36)$$

Зауважимо, що

$$\frac{d\tau}{dy_1} = \overset{(1)}{v}{}_1(x_0,y_1) = \overset{(1)}{u}{}^{-1}(x_0,\tau)\ ,$$

$$\partial_{y_0}\overset{(1)}{u}{}^{-1}(x_0,\tau) = -\frac{\overset{(1)}{u}{}_0 + \overset{(1)}{u}{}_\tau\cdot\dfrac{d\tau}{dy_0}}{\overset{(1)}{u}{}^2}\ ,$$

$$\frac{d\tau}{dy_0} = \overset{(1)}{v}{}_0 = \overset{(1)}{v}{}_{11} = \partial_{y_1}\left[\overset{(1)}{u}{}^{-1}(x_0,\tau)\right]\ . \qquad (4.2.37)$$

Підставивши одержані вирази у рівняння системи (4.2.36), знаходимо

$$\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = \left[\partial_{y_0}\overset{(1)}{u}{}^{-1}(x_0,\tau)\right]^{-1} = \left[\frac{\overset{(1)}{u}{}_\tau^2\,\overset{(1)}{u}{}^{-3} - \overset{(1)}{u}{}_0}{\overset{(1)}{u}{}^2}\right]^{-1}\ ,$$

$$x_1 = \partial_{y_1}\overset{(1)}{u}{}^{-1} = -\overset{(1)}{u}{}^3\,\overset{(1)}{u}{}_\tau^{-1}\ ,$$

звідки випливає формула (4.2.34). Теорема доведена.■

З одержаних у даному розділі результатів випливає, що розширення ліївської симетрії досліджуваних рівнянь L_1 за допомогою НПЗ може бути ефективно використано для побудови їх нелокальних анзаців. Нам здається, що найбільш важливою властивістю одержуваних нелокальних анзаців є те, що вони дають точну інформацію про структуру розв'язків відповідних НДРЧП. Узагальнюючи ці анзаци шляхом введення довільних елементів можна одержувати принципово нові нелокальні анзаци і точні розв'язки. Таким чином нами запропонований регулярний метод дослідження структури нелокальних анзаців для НДР, які мають нетривіальну неліївську симетрію. Слід відмітити, що цей метод може бути ефективно застосований також у тому випадку, коли ДР не має неліївської симетрії, але допускає умовну симетрію (наприклад, допускає умовну нелокальну лінеарізацію, див.§ 4 розділ III). Наявність нелокальних симетрій допоміжних рівнянь та НПЗ, що зв'язують їх з досліджуваними рівняннями L_1, дозволяє відповідній нелокальній симетрії надати вигляд формул розмноження розв'язків. Ці формули дозволяють побудувати, наприклад, з ліївських анзаців відповідні нелокальні анзаци та частинні розв'язки рівнянь L_1.

Результати §§ 1,2 є опублікованими у роботах [86,182,185, 187,249].

ЗАКЛЮЧЕННЯ

Основні результати, одержані у дисертаційній роботі складаються з того, що:

- розроблено симетрійний підхід дослідження нелокальних симетрій НДР та їх використання для побудови точних розв'язків;
- описані широкі класи ДР, які є інваріантними відносно перетворень годографа, Лежандра і Ейлера-Ампера в $\mathbb{R}(1,n)$, інших НПЗ, або допускають лінеарізацію за допомогою цих перетворень;
- проведена теоретико-групова класифікація ДРЧП другого порядку, інваріантних відносно груп Лоренца $O(1,n)$ та Пуанкаре $P(1,n)$, які допускають перетворення Лежандра;
- запропоновані нові формули розмноження розв'язків нелінійних ДР, інваріантних відносно НПЗ;
- введено поняття умовної інваріантності ДР відносно НПЗ та побудовані класи умовно інваріантних відносно НПЗ рівнянь;
- побудовані формули нелінійної суперпозиції розв'язків ДР, які зводяться до лінійних за допомогою НПЗ;
- введено поняття умовної нелокальної лінеарізації ДР, побудовані класи ДР, які допускають умовну нелокальну лінеарізацію;
- за допомогою НПЗ одержано розширення ліївської симетрії широкого кола ДР математичної фізики, знайдені нелокальні симетрії, побудовані нелокальні анзаци, виконана нелокальна редукція ДР.

Перелічені вище результати включають аналіз нелокальних симетрій ряду важливих рівнянь математичної фізики: нелінійних рівнянь теплопровідності і, зокрема $u_0 = \partial_1 (c(u)u_1)$, еволюційних рівнянь третього порядку типу Гарі-Діма та КдФ, одновимірного рівняння нелінійної теорії коливань $u_{00} = \partial_1 (c(u)u_1)$, тривимірного рівняння типу Бюргерса

$$u_0 - u|\nabla u| - \Delta u = 0 ,$$

систем рівнянь нелінійної гідро- та газодинаміки та багатьох інших. Для більшості цих рівнянь вперше виконаний класичний груповий аналіз; знайдені ліївські симетрії використані для дослідження нелокальних симетрій.

Усі твердження строго доведені, а ефективність одержаних формул проілюстрована прикладами.

ДОДАТКИ

Додаток I. Групова класифікація рівнянь $u_0 = u^p u_{111}$ та $w_0 = w_{11}^k w_{111}$, [248]

У даному додатку досліджена ліївська симетрія рівнянь

$$u_0 - u^p u_{111} = 0\,, \qquad (I.1)$$

$$w_0 - w_{11}^k w_{111} = 0\,, \qquad (I.2)$$

$$v_0 - v_{111} = 0\,. \qquad (I.3)$$

Для них побудовані точні розв'язки та формули їх розмноження за відповідною групою Лі.

1. Основний результат групової класифікації рівняння (I.1) сформулюємо у вигляді твердження.

Теорема I.1. Максимальна алгебра інваріантності (MAI) рівняння (I.1) з довільним $p \neq 0$ є такою: $\langle P_0, P_1, D_1, D_2 \rangle$, де

$$P_0 = \partial_0\,, \quad P_1 = \partial_1\,,$$

$$D_1 = p \cdot x_1 \partial_1 + 3u \cdot \partial_u\,,$$

$$D_2 = p \cdot x_0 \partial_0 - u \cdot \partial_u\,. \qquad (I.4)$$

При $p = 3$ алгебра (I.4) поповнюється оператором

$$\Pi = x_1^2 \partial_1 + 2x_1 u \cdot \partial_u\,. \;\square \qquad (I.5)$$

Теорема доводиться за допомогою стандартного методу С. Лі. Формула розмноження розв'язків у відповідності з алгеброю (I.4) має вигляд

$$\overset{(2)}{u}(\overset{2}{x}_0, \overset{2}{x}_1) = e^{3a-b}\, \overset{(1)}{u}(e^{pb} \cdot \overset{1}{x}_0 + \theta_0;\; e^{pa} \cdot \overset{1}{x}_1 + \theta_1)\,. \qquad (I.6)$$

a, b, θ_0, θ_1 – групові параметри. При $p = 3$ розв'язок розмножується за більш складним законом:

$$\overset{(2)}{u}(\overset{2}{x}_0,\overset{2}{x}_1) = e^{3a-b+\frac{-2æ}{æ-[e^{pa}\cdot\overset{1}{x}_1+\theta_1]^{-1}}}\cdot\overset{(1)}{u}\left[e^{pb}\cdot\overset{1}{x}_0+\right.$$

$$\left.+\theta_0\ ;\ \frac{-1}{æ-[e^{pa}\cdot\overset{1}{x}_1+\theta_1]^{-1}}\right].$$

æ – груповий параметр. Лiївські анзаци та редуковані ЗДР для (I.1) з довільним p наведені у таблиці 1.

Таблиця 1.

N п/п	Анзац u	Інваріантна змінна ω	Редуковане рівняння
1	$x_0^{\frac{2}{p}}\varphi(\omega)$	$x_0^{-1}x_1$	$\frac{2}{p}\varphi - \omega\dot{\varphi} - \varphi^p\dddot{\varphi} = 0$
2	$x_0^{-\frac{1}{p}}\varphi(\omega)$	$x_1 - \ln x_0$	$\frac{1}{p}\varphi + \dot{\varphi} + \varphi^p\dddot{\varphi} = 0$
3	$x_0^{-\frac{1}{p}}\varphi(\omega)$	x_1	$\frac{1}{p}\varphi^{1-p} + \dddot{\varphi} = 0$
4	$x_1^{\frac{3}{p}}\varphi(\omega)$	$x_1 e^{-x_0}$	$\omega\dot{\varphi} + \varphi^p\left[\gamma\varphi + 9\frac{1}{p}(3\frac{1}{p} - 1)\omega\,\dot{\varphi} + 9\frac{1}{p}\,\omega^2\ddot{\varphi} + \omega^3\dddot{\varphi}\right] = 0$
5	$x_1^{\frac{3}{p}}\varphi(\omega)$	x_0	$\dot{\varphi} - \gamma\varphi^{p+1} = 0$
6	$\varphi(\omega)$	$\alpha_0 x_0 - \alpha_1 x_1$	$\alpha_0\dot{\varphi} - \alpha_1^3\varphi^p\dddot{\varphi} = 0$

Тут позначено

$$\gamma = 3p^{-1}(3p^{-1} - 1)(3p^{-1} - 2)\ .$$

По анзацах 3, 5, 6 побудовані такі частинні розв'язки рівняння (I.1):

$$u = (p\gamma)^{\frac{1}{p}}\cdot x_0^{-\frac{1}{p}}\cdot x_1^{\frac{3}{p}}\ ,$$

$$u = \left[\beta(\alpha_0 x_0 - \alpha_1 x_1) + c\right]^{\frac{2}{p}}\ ,$$

$$\beta = \frac{1}{2}\,p\sqrt{\frac{2\alpha_0}{\alpha_1^3(p-1)(2-p)}}\ ,$$

$$u = x_1^{\frac{3}{p}} \left[c - \gamma p x_0 \right]^{-\frac{1}{p}} ,$$

c – довільна стала.

Лiївські анзаци та редуковані ЗДР для (I.1) з $p = 3$ наведемо у таблиці 2.

Таблиця 2.

N п/п	Анзац u	Інваріантна змінна ω	Редуковане рівняння
1	$x_0^{\frac{2}{3}}\varphi(\omega)$	$x_0^{-1}x$	$\frac{2}{3}\varphi - \omega\dot{\varphi} - \varphi^3\dddot{\varphi} = 0$
2	$x_0^{-\frac{1}{3}}\varphi(\omega)$	$x_1 - \ln x_0$	$\frac{1}{3}\varphi + \dot{\varphi} + \varphi^3\dddot{\varphi} = 0$
3	$x_0^{-\frac{1}{3}}\varphi(\omega)$	x_1	$\frac{1}{3}\varphi^{-2} + \dddot{\varphi} = 0$
4	$x_1\varphi(\omega)$	$x_1 e^{-x_0}$	$\dot{\varphi} + \omega\varphi^3(3\ddot{\varphi} + \omega\dddot{\varphi}) = 0$
5	$\varphi(\omega)$	$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1$	$\alpha_0\dot{\varphi} + \alpha_1^3\varphi^3\dddot{\varphi} = 0$
6	$(x_1^2 + \varepsilon)\varphi(\omega)$	x_0	$\dot{\varphi} = 0$, $(\varepsilon = 0, \pm 1)$
7	$x_0^{-\frac{1}{3}}(x_1^2 - 1)\varphi(\omega)$	$\ln x_0 + \operatorname{arth} x_1$	$\frac{1}{3}\varphi - \dot{\varphi} + \varphi^3(4\dot{\varphi} - \dddot{\varphi}) = 0$
8	$x_0^{-\frac{1}{3}}x_1^2\varphi(\omega)$	$\ln x_0 + x_1^{-1}$	$-\frac{1}{3}\varphi + \dot{\varphi} + \varphi^3\dddot{\varphi} = 0$
9	$x_0^{-\frac{1}{3}}(x_1^2 + 1)\varphi(\omega)$	$\ln x_0 - \operatorname{arctg} x_1$	$\frac{1}{3}\varphi - \dot{\varphi} + \varphi^3(4\dot{\varphi} + \dddot{\varphi}) = 0$
10	$(x_1^2 - 1)\varphi(\omega)$	$x_0 + \operatorname{arth} x_1$	$\dot{\varphi} - \varphi^3(4\dot{\varphi} - \dddot{\varphi}) = 0$
11	$x_1^2\varphi(\omega)$	$x_0 + x_1^{-1}$	$\dot{\varphi} + \varphi^3\dddot{\varphi} = 0$
12	$(x_1^2 + 1)\varphi(\omega)$	$x_0 - \operatorname{arctg} x_1$	$\dot{\varphi} + \varphi^3(4\dot{\varphi} + \dddot{\varphi}) = 0$

По анзацах 5, 10, 11, 12 побудовані деякі частинні розв'язки рівняння (I.1) з $p = 3$:

$$u = c_1 x_1^2 + c_2 x_1 + c_3 ,$$

$$u = (x_1^2-1)\left\{4 - 4\,\mathrm{th}^2\left[3(x_0 + \mathrm{arth}\, x_1) + c_1\right]\right\}^{-\frac{1}{3}} ,$$

$$u = x_1^2\left\{ \frac{3}{2} (x_0 + x_1^{-1}) + c_1\right\}^{\frac{2}{3}} ,$$

$$u = -(x_1^2+1)\left\{4\,\mathrm{tg}^2\left[c_1 - 3(x_0 - \mathrm{arctg}\, x_1)\right]+4\right\}^{-\frac{1}{3}} ,$$

$$u = \left[\frac{3}{2} \sqrt{\frac{-\alpha_0}{\alpha_1^3}} (\alpha_0 x_0 - \alpha_1 x_1) + c_1\right]^{\frac{2}{3}} .$$

c_j, $(j = 1,2,3)$ – довільні сталі.

Зауваження. Анзаци 6–12 таблиці 2 одержані тільки за рахунок розширення алгебри інваріантності рівняння (I.1) з $p = 3$ добавленням оператора П (I.5).

2. Для рівняння (I.2)

$$w_0 = w_{11}^k w_{111} \tag{I.2}$$

одержані такі результати групової класифікації.

Теорема I.2. Максимальна алгебра інваріантності (MAI) рівняння (I.2) з довільним $k \neq 0$ має вигляд: $\langle P_0, P_1, P_2, I, D, D\rangle$, де

$$P_0 = \partial_0 , \quad P_1 = \partial_1 , \quad P_2 = \partial_w , \quad I = x_1 \partial_w ,$$
$$D = (3 + 2k) x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 ,$$
$$D_1 = - k x_0 \partial_0 + w\cdot\partial_w . \tag{I.7}$$

При $k = -\frac{3}{2}$, що відповідає $p = 3$, розширення MAI не відбувається, а алгебра породжується операторами

$$P_0 = \partial_0 , \quad P_1 = \partial_1 , \quad P_2 = \partial_w , \quad I = x_1 \partial_w ,$$
$$D = x_1 \partial_1 , \quad D_1 = \frac{3}{2} x_0 \partial_0 + w\cdot\partial_w . \tag{I.7a}$$

Розмноження розв'язку $w(x_0, x_1)$ рівняння (I.2) з довільним k за групою Лі з алгеброю (I.7) виконується за формулою

$$\overset{(2)}{w}(x_0^2, x_1^2) = e^{(e^{a}\cdot x_1 + \theta_1)\varkappa} \cdot \overset{(1)}{w}(e^{\frac{3}{2}b}\cdot x_0 + \theta_0;\ e^{a}\, x_1^1 + \theta_1) + \theta_2 .$$

a, b, θ_γ, $(\gamma = 1,2,3)$, $\varkappa$ – групові параметри. Знайдені для (I.7) анзаци та редуковані ЗДР містяться у таблиці 3.

Таблиця 3.

N п/п	Анзац w	Інваріантна змінна ω	Редуковане рівняння
1	$x_0^{\frac{1}{3+k}}\varphi(\omega) + \frac{x_1}{3+k}\ln x_0$	$x_0^{-\frac{1}{3+k}}\cdot x_1$	$\varphi - \omega\dot\varphi + \omega - (3+k)(\ddot\varphi)^k\dddot\varphi = 0$
2	$x_0^{\frac{1}{3+k}}\varphi(\omega)$	$x_0^{-\frac{1}{3+k}}\cdot x_1$	$\varphi - \omega\dot\varphi - (3+k)(\ddot\varphi)^k\dddot\varphi = 0$
3	$x_0^{-\frac{1}{k}}\varphi(\omega) - x_1 - 1$	$x_1 + \frac{1}{k}\ln x_0$	$\varphi - \dot\varphi + k(\ddot\varphi)^k\dddot\varphi = 0$
4	$x_0^{-\frac{1}{k}}\varphi(\omega)$	$x_1 + \frac{1}{k}\ln x_0$	$\varphi - \dot\varphi + k(\ddot\varphi)^k\dddot\varphi = 0$
5	$x_0^{-\frac{1}{k}}\varphi(\omega) + \alpha_1 x_1$	x_1	$\varphi + k(\ddot\varphi)^k\dddot\varphi = 0$
6	$\varphi(\omega) + \frac{1}{2}x_1^2$	$x_0 - \varepsilon x_1$	$\dot\varphi + (1+\varepsilon^2\ddot\varphi)^k\varepsilon^3\dddot\varphi = 0,\ (\varepsilon = 0,1)$
7	$\varphi(\omega) + x_1$	$x_0^{-\frac{1}{3+2k}}\cdot x_1$	$\omega\dot\varphi + (3+2k)(\ddot\varphi)^k\dddot\varphi = 0$
8	$\varphi(\omega) + \ln x_1$	$x_0^{-\frac{1}{3+2k}}\cdot x_1$	$\omega\dot\varphi + (3+2k)(\ddot\varphi - \omega^{-2})^k(\dddot\varphi + 2\omega^{-3}) = 0$
9	$\varphi(\omega) + \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1$	$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1$	$\beta_0 + \alpha_0\dot\varphi - \alpha_1^{2k+3}(\ddot\varphi)^k\dddot\varphi = 0$

Наведемо розв'язки, які відповідають анзацам 5, 6, 9:

$$w = x_0^{-\frac{1}{k}}(\lambda\cdot x_1)^{-\frac{4k+3}{k}}, \qquad \lambda = m(\beta\sigma)^{-\frac{k+1}{k}},$$

$$m = -\frac{3(k+1)}{k}, \qquad \sigma^{-1} = \left[-\frac{k+1}{k}\right]^{\frac{1}{k+1}},$$

$$\beta = m(m-1)(m-2);$$

$$w = \varphi(x_0 - x_1) + \frac{1}{2}x_1^2, \quad \theta = c_1 - (k+1)\varphi,$$

$$-\frac{1}{k+1}\int\left\{\frac{-2}{k+2}\theta^{\frac{k+2}{k+1}} + \frac{2}{k+1}\theta - \left[\frac{2c_1}{k+1} + 2c_2\right]\right\}^{-\frac{1}{2}} d\theta = x_0 - x_1 + c_3;$$

$$w = \frac{1}{k+1}\left\{c_1 - \left[\frac{k}{2}\left[\frac{-2}{k+2}\right]^{\frac{1}{2}}(x_0 - x_1) + c_3\right]^{\frac{2(k+1)}{k}}\right\} + x_1;$$

$$w = x_0 + \frac{2(2k+3)}{k+2}\left[(k+1)x_1 + c_1\right]^{\frac{2k+3}{k+1}} + c_2 x_1 + c_3;$$

$$w = 2x_0 - \ln x_1 + c_1 x_1 + c_2;$$

$$w = \lambda\left[\alpha_1 x_1 + \frac{1}{8}\alpha_0 x_0 + c_1\right]^{\frac{2}{3}}, \qquad \lambda = -18\alpha_1^{-2}\left[\frac{9}{4}\cdot\frac{\alpha_0}{\alpha^3}\right]^{-\frac{2}{3}};$$

$$w = c_1 x_1^2 + c_2 x_1 + c_3.$$

c_j, $(j = 1,2,3)$ – сталі інтегрування.

3. Виключене з розглянутих вище випадків ($p \neq 0$, $k \neq 0$) лінійне рівняння (I.3)

$$v_0 - v_{111} = 0$$

має таку нескінченну алгебру інваріантності: $\langle P, P, I, D, P\rangle$,

$$P_0 = \partial_0, \quad P_1 = \partial_1, \quad I = v\,\partial_v,$$

$$D = 3x_0\partial_0 + x_1\partial_1,$$

$$P_2 = b(x_0, x_1)\partial_v, \quad (b_0 - b_{111} = 0). \tag{I.8}$$

У таблиці 4 дані відповідні анзаци та редуковані ЗДР.

Таблиця 4.

N п/п	Анзац v	Інваріантна змінна ω	Редуковане рівняння
1	$x_0^{-\frac{1}{3}}\ \varphi(\omega)$	$x_0^{-\frac{1}{3}}\cdot x_1$	$\varphi + \omega\dot{\varphi} + 3\dddot{\varphi} = 0$
2	$e^{x_1}\varphi(\omega)$	$x_0 - \alpha x_1$	$\varphi - (1 + 3\alpha)\dot{\varphi} + 3\alpha^2\ddot{\varphi} - \alpha^3\dddot{\varphi} = 0$
3	$\varphi(\omega)+\alpha\cdot\ln x_1$	$x_0^{-\frac{1}{3}}\cdot x_1$	$\omega\varphi + 3\ddot{\varphi} + 6\alpha\omega^{-3} = 0$
4	$\varphi(\omega)+\beta_0 x_0+\beta_1 x_1$	$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1$	$\alpha_0\dot{\varphi} + \beta_0 - \alpha_1^3\dddot{\varphi} = 0$

Розв'язок рівняння (I.3) за допомогою групи Лі з алгеброю (I.8) розмножується за формулою

$$\overset{(2)}{v}(\overset{2}{x_0},\overset{2}{x_1}) = e^{\varkappa}\cdot\overset{(1)}{v}(e^{3b}\cdot\overset{1}{x_0} + \theta_0;\ e^{b}\cdot\overset{1}{x_1} + \theta_1) + ab(x_0,x_1)\ .$$

a, θ_μ, $(\mu = 0,1)$, $\varkappa$ – параметри групи. Побудовані такі точні розв'язки лінійного рівняння (I.3):

$$v = e^{x_1}\Big\{c_1 e^{\lambda_1(x_0-x_1)} + e^{-\frac{1}{2}\lambda_1(x_0-x_1)}(c_2\cdot\cos\lambda_2(x_0 - x_1) +$$

$$+ c_3\lambda_2\cdot\sin\lambda_2(x_0 - x_1)\Big\}\ ,\quad \operatorname{sh}\alpha = \frac{1}{2}\cdot 3^{\frac{3}{2}}\ ,$$

$$\lambda_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sh}\frac{1}{3}\alpha\ ,\quad \lambda_2 = \operatorname{ch}\frac{1}{3}\alpha\ .$$

$$v = c_1\exp(x_0 + x_1)\ ,$$

$$v = c_1\cos(x_0 + x_1) + c_2\sin(x_0 - x_1) + c_3\ ,$$

$$v = c_1\operatorname{ch}(x_0 + x_1) + c_2\operatorname{sh}(x_0 + x_1) + c_3\ ,$$

$$v = x_0 + \frac{1}{6}x_1^3\ ,$$

$$v = c_1 x_1^2 + c_2 x_1 + c_3\ .$$

c_j, $(j = 1,2,3)$ – довільні сталі.

Додаток II. Доведення формул (2.3.64) та (2.3.65)

Розглянемо довільне рівняння Ріккаті

$$\tau_1 = \tau^2 + h(x) , \qquad \text{(II.1)}$$

де $\tau_1 \equiv \partial_x \tau$. Припустимо, що τ_* є частинним розв'язком цього рівняння, тобто

$$\tau_{*1} - \tau_*^2 - h(x) \equiv 0 . \qquad \text{(II.2)}$$

Зробимо підстановку

$$\tau = \tau_* + \varphi^{-1} , \qquad \text{(II.3)}$$

де $\varphi = \varphi(x)$ – нова невідома функція.

Підставивши τ з (II.3) у рівняння (II.1), одержуємо співвідношення

$$\tau_{*1} - \dot{\varphi}\cdot\varphi^{-1} = \tau_*^2 + 2\tau_*\cdot\varphi^{-1} + \varphi^{-2} + h(x) . \qquad \text{(II.4)}$$

З врахуванням рівняння (II.2), помноживши (II.4) на φ^2, приходимо до лінійного рівняння для функції φ

$$\dot{\varphi} + 2\tau_*\varphi + 1 = 0 . \qquad \text{(II.5)}$$

Загальний розв'язок рівняння (II.5) має вигляд

$$\varphi = \frac{\int \exp\{2 \int \tau_* dx \} dx + c}{\exp\{2\int \tau_* dx\}} .$$

Таким чином, загальний розв'язок ДР (II.1) можна зобразити у вигляді

$$\tau = \tau_* + \frac{\exp\{2\int \tau_* dx\}}{\int \exp\{2 \int \tau_* dx \} dx + c} ,$$

або інакше

$$\tau = \tau_* + \partial_x [\ln(\int \exp\{2 \int \tau_* dx \} dx + c)] . \qquad \text{(II.6)}$$

c – стала інтегрування.

Врахувавши те, що $\overset{(n)}{\tau} = \overset{(n)}{\tau}(x_0, x_1)$, скористаємось цим результатом у формулах (2.3.63а,б). Тоді

$$\overset{(n)}{\tau} = \overset{(n)}{\tau}_* + \partial_1 [\ln(\int \exp\{2 \int \overset{(n)}{\tau}_* dx_1\} dx_1 + \overset{(n)}{c}(x_0))] . \qquad \text{(II.7)}$$

Частиний розв'яток рівняння (2.3.63б) $\overset{(n)}{\tau}_*$ при умові (2.3.63а) виражається через загальний розв'язок рівняння (2.3.63б), знайдений на (n-1) - му кроці за формулою

$$\overset{(n)}{\tau}_* = - \overset{(n-1)}{\tau} . \qquad \text{(II.8)}$$

Справді, в силу співвідношень (2.3.63а,б)

$$\overset{(n)}{\tau}_1 = \overset{(n)}{\tau}{}^2 + \overset{(n)}{u} ,$$

$$\overset{(n)}{u} = \overset{(n-1)}{u} - 2 \overset{(n-1)}{\tau}_1$$

одержуємо рівняння

$$\overset{(n)}{\tau}_1 = \overset{(n)}{\tau}{}^2 + \overset{(n-1)}{u} - 2 \overset{(n-1)}{\tau}_1 . \qquad \text{(II.9)}$$

Перевіремо, що частиний розв'язок $\overset{(n)}{\tau}_*$, знайдений по формуле (II.8) задовольняє рівняння (II.9). Підставимо в рівняння

$$\overset{(n)}{\tau}_{*1} = \overset{(n)}{\tau}_*{}^2 + \overset{(n-1)}{u} - 2 \overset{(n-1)}{\tau}_1$$

$\overset{(n)}{\tau}_*$ із формули (II.8). Маємо

$$- \overset{(n-1)}{\tau}_1 = \overset{(n-1)}{\tau}{}^2 + \overset{(n-1)}{u} - 2 \overset{(n-1)}{\tau}_1 .$$

Тобто, при умові (2.3.63а) рівняння обертається у тотожність. Отже, формула (II.8) доведена.

Позначимо

$$\overset{(n-1)}{v} = - \partial_1 [\ln(\int \exp\{-2 \int \overset{(n-1)}{\tau}_* dx_1\} dx_1 + \overset{(n-1)}{c}(x_0))] . \qquad \text{(II.10)}$$

Врахувавши (II.8), знаходимо представлення розв'язку рівняння (2.3.63б) у вигляді (2.3.64)

$$\overset{(n)}{\tau} = - \overset{(n-1)}{\tau} - \overset{(n-1)}{v} .$$

Якщо останню формулу використати як рекурентну, одержуємо

$$\overset{(n-1)}{\tau} = -\overset{(n-2)}{\tau} - \overset{(n-2)}{v} = \overset{(n-3)}{\tau} + \overset{(n-3)}{v} - \overset{(n-2)}{v} = \ldots$$

$$= -[\overset{(n-2)}{v} - \overset{(n-3)}{v} + \overset{(n-4)}{v} - \ldots + (-1)^{n-4}\overset{(2)}{v} + (-1)^{n-3}(\overset{(1)}{v} + \overset{(1)}{\tau})] .$$

Позначимо $-\overset{(1)}{\tau} = \overset{(0)}{v}$. Тоді

$$-\overset{(n-1)}{\tau} = \sum_{m=0}^{n-2}(-1)^{n-2-m}\cdot\overset{(m)}{v} . \qquad \text{(II.11)}$$

Після підстановки (II.11) в (II.10) приходимо до формули (2.3.65)

$$\overset{(n+1)}{v} = -\partial_1[\ln(\int\exp(2\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\int\overset{(m)}{v}\,dx_1)dx_1 + \overset{(n+1)}{c}(x_0))] .$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи.-М.: Мир, 1987. - 478 с.

2. Адлер С., Дашен Р. Алгебры токов и их применение в физике частиц.- М.: Мир., 1970. - 435 с.

3. Айнс Э.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- Харьков: ГОНТИ - НКТП -ДНТВУ, 1939. - 719 с.

4. Альфорс Л. Преобразование Мебиуса в многомерном пространстве.- М.: Мир, 1986.- 111 с.

5. Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Квазилокальные симметрии уравнений математической физики // Математическое моделирование. Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики. - М.: Наука, 1987. - с. 22-56.

6. Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Групповые свойства и точные решения уравнений нелинейной фильтрации // Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. - Новосибирск, 1987. - с. 24-27.

7. Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Преобразования Беклунда и нелокальные симметрии // Докл. АН СССР.- 1987. - 297, № 1 - с. 11-14.

8. Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техн. Современ. пробл. математики. Новейшие достижения. - М.: ВИНИТИ, 1989.- т.34. - с. 3-83.

9. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Модель релятивистской струны в физике адронов.- М.: Энергоатомиздат, 1987.- 176 с.

10. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения: В 2-х т. - М.: Мир, 1980.- т. 1.- 455 с., т. 2.- - 395 с.

II. Биркгоф Г. Гидродинамика.- М.: Из-во иностр. лит., I963. - 400 с.

I2. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. - М.: Наука, I98I. - 448 с.

I3. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. - М.: Наука, I976. - 479 с.

I4. Валландер С.В. Об интегрировании гиперболической системы двух уравнений при двух независимых переменных // Докл. АН СССР. - I952. - LXXXIII, № 5. - с. 637-639.

I5. Валландер С.В. Нелинейные уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными, сводящиеся к линейным // Вестник ЛГУ. - I954. - № 5. - с. 20I-204.

I6. Васильев А.М. Теория дифференциально - геометрических структур. - М.: МГУ, I987. - I90 с.

I7. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. - М.; Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, I948. - 295 с.

I8. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции.- М. : Наука, I988. - 5I2 с.

I9. Виноградов А.М., Воробьев Е.М. Применение симметрии для нахождения точных решений уравнения Заболотской-Хохлова // Акустический Журнал. - I976. - 22, № I. - с. 23-27.

20. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, I986. - 336 с.

2I. Владимиров В.А., Тычинин В.А. Нелокальная линеаризация одной системы гидродинамических уравнений, допускающих бесконечную группу инвариантности // Краевые задачи математической физики. - Киев : Наукова думка , I990. - с. 59-62.

22. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1976. - 527 с.

23. Владимиров В.С., Волович И.В. Локальные и нелокальные токи для нелинейных уравнений // Теорет. и матем. физика. - 1985. - 62, № 1. - с. 3-29.

24. Владимиров В.С., Волович И.В. Законы сохранения для нелинейных уравнений // Актуальные проблемы вычислительной математики и математич. моделирования. - Новосибирск, СО АН СССР: Наука, 1985. - с. 147-162.

25. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Замкнутые формы, ассоциированные с линейными дифференциальными операторами // Дифференциальные уравнения.- 1980.- 16, № 5 - с. 845-867.

26. Герман Р. Продолжения преобразования Баклунда и теория Ли, как средства для изучения нелинейных дифференциальных уравнений // Солитоны в действии п/р К.Лонгрена и Э. Скотта. - М.: Мир, 1981. - с. 45-71.

27. Гурса Е. Інтегрування рівнянь з частинними похідними першого порядку. - Київ: Радянська школа, 1941. - 415 с.

28. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных.- М., Л.: ОНТИ-ГТТИ, 1934. -359 с.

29. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения.- М.: Мир, 1988.- 694 с.

30. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. - М.: Наука, 1979. - 760 с.

31. Еругин Н.П. Приводимые системы // Труды мат. ин-та АН СССР. - 1946. - 13. - 93 с.

32. Жаринов В.В. О соответствии Беклунда // Матем. сборник.- 1988 - 136, № 2. - с. 274-291.

33. Жаринов В.В. Внешняя геометрия дифференциальных ура-

внений и формула Грина // Известия АН СССР. Сер. мат.- 1989. - 53, № 4. - с. 708-730.

34. Жибер А.В., Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. Уравнения типа Лиувилля // Докл. АН СССР.- 1979.- 249, № 1.- с. 26-29.

35. Жибер А.В., Шабат А.Б. Уравнения Клейна - Гордона с нетривиальной группой // Докл. АН СССР. - 1979. - 247, № 5. - с. 1103-1107.

36. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. - М.: Наука, 1980. - 319 с.

37. Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д. Уравнение Кортевега-де Фриза - вполне интегрируемая гамильтонова система // Функ. анализ и его прилож. - 1971. - 5, № 4. - с. 18-27.

38. Ибрагимов Н.Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики. - Новосибирск: Новосибирский ун-т, 1972. - 159 с.

39. Ибрагимов Н.Х. К теории групп преобразований Ли-Беклунда // Математ. сборник.- 1979. - 109, № 2. - с. 229-253.

40. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике.- М.: Наука, 1983.- 280 с.

41. Ибрагимов Н.Х., Андерсон Р.Л. Группы касательных преобразований Ли-Беклунда // Докл. АН СССР.- 1976.- 227, № 3.- с. 539-542.

42. Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. Уравнение Кортевега - де Фриза с групповой точки зрения // Докл. АН СССР.- 1979. - 224, № 1.- с. 57-61.

43. Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. Эволюционные уравнения с нетривиальной группой Ли-Беклунда // Функц. анализ и его прилож.- 1980.- 14, № 1.- с. 25-36.

44. Калоджеро Ф. Почему некоторые системы уравнений с частными производными одновременно широко применимы и интегрируемы? // Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов.- Киев: Наукова думка, 1990.- с. 65-116.

45. Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений.- М.: Мир, 1985.- 469 с.

46. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1971.- 575 с.

47. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка.- М.: Наука, 1966. - 260 с.

48. Картан Э. Интегральные инварианты.- М.; Л.: Гостехиздат, 1940.- 214 с.

49. Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения.- М.: МГУ, 1962.- 237 с.

50. Коноплева Н.П., Попов В.Н. Калибровочные поля.- М.: Атомиздат, 1980.- 236 с.

51. Курант Р. Уравнения с частными производными. - М. : Мир, 1964. - 830 с.

52. Лебедев Д.Р., Манин Ю.И. Гамильтонов оператор Гельфанда-Дикого и коприсоединенное представление группы Вольтерра // Функц. анализ и его прилож. - 1979.- 13, № 4 - с. 40-46.

53. Лезнов А.Н., Савельев М.В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем.- М.: Наука, 1985.- 279 с.

54. Лопатин А.К. Асимптотическое расщепление почти инвариантных систем дифференциальных уравнений // Теоретико-груп-

повые методы в физике, т.2. Труды международного семинара. Звенигород 28-30 ноября 1979 г. - М.: Наука, 1980. - с. 342-348.

55. Лэкс П.Д. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны // Математика. - 1969. - 13 , № 5. - с. 128-150.

56. Манин Ю.И. Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Современ. пробл. математики.- М.: ВИНИТИ, 1978.- т.11. - с. 5-152.

57. Марченко В.А. Нелинейные уравнения и операторные алгебры. - Киев: Наукова думка, 1986. - 152 с.

58. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. - М. : Мир, 1981. - 342 с.

59. Митропольский Ю.А. О приводимости дифференциальных уравнений нелинейной механики 1. Приводимость на основании обобщенного метода усреднения. - Киев, 1982. - 56 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 82.4).

60. Митропольский Ю.А. О приводимости дифференциальных уравнений нелинейной механики 2. Приводимость на основании метода ускоренной сходимости.- Киев, 1982.-39 с. - (Препринт /АН УССР. Ин-т математики; № 82.5).

61. Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н.(мл.), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты.- Киев: Наукова думка, 1987. - 296 с.

62. Михайлов А.В., Шабат А.Б., Соколов В.В. Симметрийный подход к классификации интегрируемых уравнений // Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. - Киев: Наукова думка, 1990. - с. 213-279.

63. Михайлов А.В., Шабат А.Б., Ямилов Р.И. Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем // Успехи матем. наук. - 1987.- 42, № 4. - с. 3-53.

64. Новиков С.П. Интегрируемые задачи в теории нелинейных волн // Нерешенные задачи механики и прикладной математики. - М.: Наука, 1977. - с. 115-121.

65. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике.- М.: Мир, 1989. - 326 с.

66. Ньюэлл А., Табор М. Интегрируемость // Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. - Киев: Наукова думка, 1990. - с. 117-158 .

67. Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР.- 1959. - 125, № 3 - с. 217-221.

68. Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений.- Новосибирск: Новосибирский ун-т, 1966. - 131 с.

69. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 399 с.

70. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. - М.: Мир, 1989. - 639 с.

71. Поммаре Ж. Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. - М.: Мир, 1983. - 398 с.

72. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы.- М.: Наука, 1973 - 519 с.

73. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия. - М.: Наука, 1988. - 496 с.

74. Прикарпатский А.К. Геометрическая структура и Бэк -

лунд - преобразование одной системы нелинейных эволюционных уравнений в частных производных // Укр. матем. журнал. - 1980. - 32, № 1. - с. 124-127.

75. Прикарпатский А.К., Микитюк И.В. Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях. - Киев: Наукова думка, 1991. - 288 с.

76. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля.- М.: Мир, 1985.- 416 с.

77. Рашевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. - М.; Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947. - - 354 с.

78. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике.- М.: Наука, 1978. - 687 с.

79. Сидоров А.Ф. Об одном классе точных решений уравнений гидродинамики // Изв. СО АН СССР. Сер. техн.- 1967.- 3.- с. 26-29.

80. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике .- Новосибирск: Наука, 1984. - 272 с.

81. Солитоны. Сб. науч. статей п/р Р.Буллаф, Ф.Кодри. - М.: Мир, 1983. - 408 с.

82. Спенсер Д. Переопределенные системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Математика. - 1970. - т. 14, № 2. - с. 66-90; т.14, № 3. - с. 99-126.

83. Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. - М.: Наука, 1971. - 854 с.

84. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. - М.: Наука, 1986. - 527 с.

85. Тичинін В.А. Про лінеаризацію багатовимірного рівняння типу Бюргерса // Доп. АН України.-1994.- № 5. - с. – .

86. Тичинін В.А. Нелокальні анзаци для нелінійного хвильового рівняння // Доп. АН України.-1994.- № 6. - с. – .

87. Тычинин В.А. Приведение некоторых автономных уравнений нелинейных колебаний к линейным однородным. Преобразование зависимой переменной // Динамика и прочность тяжелых машин,вып.4. - Днепропетровск: Днепропетровский ун-т, 1979. - с. 143-148.

88. Тычинин В.А. Приведение некоторых автономных урав - нений нелинейных колебаний к линейным однородным. Прео - бразование независимых и зависимых переменных // Динамика и прочность тяжелых машин, вып. 5. - Днепропетровск: Днепропетровский ун-т, 1980. - с. 167-174.

89. Тычинин В.А. Использование преобразований Ли-Беклунда для приведения некоторых уравнений в частных производных к удобному для интегрирования виду // Дифференциальные уравнения и их приложения. - Днепропетровск: Днепропетровский ун-т, 1980. - с. 57-62.

90. Тычинин В.А. О некоторых нелинейных уравнениях в частных производных второго порядка, приводимых преобразо - ванием Ли-Беклунда зависимой переменной к уравнению линейной теплопроводности // Дифференциальные уравнения и их приложения.- Днепропетровск: Днепропетровский ун-т. 1980.- с. 63-67.

91. Тычинин В.А. О преобразованиях Ли-Беклунда в некоторых задачах нелинейного тепло-массообмена // Математические методы тепломассопереноса. - Днепропетровск: Днепропетровский ун-т, 1980. - с. 60-65.

92. Тычинин В.А. Преобразование Беклунда дифференциаль-

ных уравнений, приводимых конечным преобразованием Ли-Беклунда.- Днепропетровск, 1980.- 19 с.- Рукопись представлена Днепропетровским ун-том. Деп. в ВИНИТИ 18 июля 1980 г., № 3172.80.

93. Тычинин В.А. Нелокальная линеаризация и групповые свойства уравнений гиперболического и параболического типов. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.- мат. наук.- Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1983 - 14 с.

94. Тычинин В.А. Нелокальная линеаризация и точные решения уравнения Борна-Инфельда и некоторых его обобщений // Теоретико. груп. исслед. уравн. матем. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. - с. 54-60.

95. Тычинин В.А. Симметрия и точные решения уравнения $u_t = h(u)u_{xx}$ // Симметрийный анализ и решения уравнений математической физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988.- с. 72-77.

96. Тычинин В.А. О нелокальных преобразованиях, связывающих уравнения $u_{tt} = h(u)u_{xx}$ и $w_{tt} = (h(w)w_x)_x$ // Симметрия и решения уравнений математической физики. - Киев: Ин-т математематики АН УССР, 1989. - с. 84-85.

97. Тычинин В.А. О построении новых точных решений нелинейных уравнений по известным частным // Симметрия и решения уравнений математической физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. - с. 86-89.

98. Тычинин В.А. Нелинейные уравнения, связанные преобразованием Эйлера-Ампера с уравнениями Кортевега - де Фриза, их точные решения и нелокальные симметрии // Специальные граничные задачи теории теплообмена.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. - с. 91-96.

99. Тычинин В.А. Нелокальные симметрии и точные решения нелинейного волнового уравнения // Теоретико- алгебраический анализ уравнений математической физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. - с. 84-97.

100. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. - М.: Мир, 1977. - 622 с.

101. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. - М.; Л.: ОГИЗ, 1948. - 430 с.

102. Фрид Д., Уленбек К. Инстантоны и четырехмерные многообразия.- М.: Мир, 1988.- 269 с.

103. Фущич В.И. О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения // Теор. и мат. физика.-1971. - 7, № 1. - с. 3-12.

104. Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных // Теоретико-групп. методы в матем. физике. - Киев : Ин-т математики АН УССР, 1978. - с. 5-44.

105. Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики // Теорет.-алгебраич. исслед. в матем. физике. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. - с. 6-27.

106. Фущич В.И. О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики // Теорет.-алгебраич. методы в задачах матем. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1993. - с. 4-23.

107. Фущич В.И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? // Симметрия и решения нелинейных уравнений математич. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987.- с. 4-16.

108. Фущич В.И. О симметрии и точных решениях многомер-

ных нелинейных волновых уравнений // Укр. матем. журнал. - I987. - 37, № I.- с. II6-I23.

I09. Фущич В.И. Об одном обобщении метода С. Ли // Теорет.- алгебраич. анализ уравн. матем. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, I990. - с. 4-9.

II0. Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. - Киев: Наукова думка, I99I. - 304 с.

III. Фущич В.И., Жданов Р.З. Нелиевские анзацы и точные решения нелинейного спинорного уравнения // Укр. матем. журнал. - I990. - 42, № 7. - с. 958 - 962.

II2. Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В. Совместность и решения нелинейных уравнений Д'Аламбера и Гамильтона.- Киев, I990.- 65 с.-(Препринт / АН УССР. Ин-т. математики; № 90.39).

II3. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. - Киев: Наукова думка, I983. - 200 с.

II4. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. - М.: Наука, I989. - 400 с.

II5. Фущич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность нелинейных уравнений акустики // Докл. АН УССР. - I988. - № I0.А. - с. 28-33.

II6. Фущич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. - I990. - № 7. А. - с. 24-27.

II7. Фущич В.И., Тычинин В.А. О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований. - Киев, I982. - 53 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 82.33).

II8. Фущич В.И., Тычинин В.А. Точные решения и принцип суперпозиции для нелинейного волнового уравнения // Докл. АН УССР. - 1990. - № 5. А. - с. 32-36.

119. Фущич В.И., Тычинин В.А., Жданов Р.З. Нелокальная линеаризация и точные решения некоторых уравнений Монжа - Ампера, Дирака. - Киев, 1985.- 27 с.-(Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 85.34).

120. Фущич В.И., Тычинин В.А., Серов Н.И. Формула размножения решений уравнений Кортевега - де Фриза // Укр. матем. журнал.- 1992.- 44, № 5. - с. 716-719.

121. Фущич В.И., Чопик В.И. Условная инвариантность нелинейного уравнения Шредингера // Докл. АН УССР. - 1990. - № 4. А. - с. 30-33.

122. Фущич В.И., Штелень В.М. Об инвариантных решениях нелинейного уравнения Дирака // Теорет. матем. физика.- 1987. - 72, № 1.- с. 35-44.

123. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики.- Киев: Наукова думка, 1989.- 336 с.

124. Хелгассон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. - М.: Мир, 1964.- 533 с.

125. Царев С.П. О скобках Пуассона и одномерных гамильтоновых системах гидродинамического типа // Докл. АН СССР.- 1985.- 282, № 3. - с. 534-537.

126. Шапеев В.П. Логическая схема алгоритма Картана // Комплексы программ математической физики.- Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1974.- с. 116-125.

127. Шаповалов В.Н. К групповым свойствам линейных уравнений // Изв. вузов. Физика.- 1968.- № 6.- с. 75-80.

128. Шаповалов В.Н. Симметрия дифференциальных уравнений

I,2 // Изв. вузов. Физика.- 1977.- № 6.- с. 57-70.

129. Шутц Б. Геометрические методы математической физики.- М.: Мир, 1984.- 303 с.

130. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований.- М.: И-Л, 1947.- 359 с.

131. Яненко Н.Н. Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных // Труды четвертого Всесоюзного матем. съезда, т.2, 1964. - с. 247-252.

132. Ablovitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H. The inverse scattering transform. Fourier analysis for non - linear problems // Stud. Appl. Math.- 1974.- 53.-p. 249-315.

133. Adler M. On a trace functional for formal pseudo - differential operators and symplectic structure of the Korteveg - de Vries equations // Inventiones math.- 1979 - 50. - p. 219-248.

134. Ames W.F. Nonlinear partial differential equations in engineering, vol.1. - N.Y.: Academic press, 1965.- 511 p.

135. Ames W.F. Nonlinear partial differential equations in engineering, vol.2. - N.Y.:Academic press, 1972.- 301 p.

136. Ames W.F., Lohner R.J., Adams E. Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$ // Int. J. Non-Linear Mech. - 1981. - 16, № 5-6. - p. 439-447.

137. Ames W.F., Lohner R.J., Adams E. Group properties of $u_{tt} = (f(u)\, u_x)_x$ // Nonlinear phenomena in mathematical sciences /Ed. V. Lakshmikanthan.- N.Y.: Academic press, 1982. - p. 1-6.

138. Anderson R.L., Davison S.M. A generalization of Lie's "counting" theorem for second-order ordinary differen-

tial equations // J. Math. Anal. and Appl.- 1974. - 48. - p. 301-315.

139. Anderson R.L., Fokas A.S. Group theoretical nature of Bäcklund transformations // Letters in Math. Phys. - 1979. - 3. - p. 117-126.

140. Anderson R.L., Ibragimov N.H. Lie-Bäcklund trans - formations in applications. - Philadelphia: SIAM, 1979.

141. Anderson R.L., Kumei S., Wulfman C.E. Generaliza - tion of the concept of invariance of differential equations. Results of application to some Schrödinger equations // Phys. Rev. Lett. - 1972. - 28, № 15. - p. 988-991.

142. Archan K.De., Chowdhury A.R. On the inverse problem and prolongation structure for the modified anisotropic Heisenberg spin chain // J. Math. Phys.- 1987.- 28, № 2. - p. 319-322.

143. Bäcklund A.V. Uber Flächentransformationen // Math. Ann. - 1876. - 9, - p. 297-320.

144. Bianchi L. Lesoni di Geometria Differenziale, vol.1. - Pisa: Enrico Spoerri, 1922.

145. Bluman G.W., Cole J.D. Similarity Methods for Differential equations.- N.Y.: Springer, 1974. - 332 p.

146. Bluman G.W., Kumei S. On the remarkable nonlinear diffusion equation $u_t-(a(u+b)^{-2}u_x)_x = 0$ // J. Math. Phys. - 1980. - 21, № 5. - p. 1019 - 1023.

147. Bluman G.W., Kumei S. On invariance properties of wave equations //J. Math. Phys.- 1987.- 28, № 2.- p. 307 - - 318.

148. Bluman G.W., Kumei S. Exact solutions for wave equations of two-layered media with smooth transition // J.

Math. Phys. - 1988. - 29, № 1. - p. 86-96.

149. Bluman G.W., Reid G.J. New classes of symmetries for partial differential equations //J. Math. Phys.- 1988.- 29 , № 4. - p. 806-811.

150. Bohr H., Chowdhury A.R. Kac-Moody algebras derived from linearisation system using various reductions and extended to super-symmetry // J. Phys. A.- 1985. - 18.- p. 3423-3431.

151. Boiti M., Konopelchenko B.G., Pempinelli F. Bäck - lund transformations via gauge transformations in 2+1 dimensions // Inverse Problems. - 1985. - 1. - p. 33-56.

152. Boiti M., Leon J., Pempinelli F. Waves in the Davey-Stewartson equation. - Lecce, 1990. - 17 p. (Preprint).

153. Boiti M., Pempinelli F., Pogrebkov A.K., Poliva - nov M.C. New features of Bäcklund and Darboux transforma - tions in 2+1 dimensions.- Lecce, 1990. - 25 p. (Preprint).

154. Case K.M. Bäcklund transformations in four-dimen - sional space-time // Lett. Math. Phys.- 1980.- 4.- p. 87-92.

155. Champagne B., Winternitz P. On the infinite-dimensional symmetry group of the Davey-Stewartson equations // J. Math. Phys. - 1988. - 29, № 1. - p. 1-8.

156. Chen H.H. Relation bitween Bäcklund transformations and invers scattaring problems // Lett. Notes. Math. - 1976. - 515.- p. 241-252.

157. Chen H.H. A Bäcklund transformation in two dimen - sions // J. Math. Phys. - 1975. - 16, № 12. - p. 2382- 2384.

158. Chen H.H., Lin J.E. On the integrability of multidimensional nonlinear evolution equations // J. Math. Phys. - 1987. - 28, № 2. - p. 347-350.

159. Chowdhury A.R., Ahmad Siraj. On the prolongation approach in three dimensions for the conservation laws and Lax pair of the Benjamin - Ono equation // J. Math. Phys. - 1987. - 28 , № 8. - p. 1697-1699.

160. Chowdhury A.R., Paul S. On the prolongation structure of a new Integrable system // Hadronic Journal. - 1985. - 8, № 2. - p. 97-99.

161. Chowdhury A.R., Naskar M. On the complete integrability of the supersymmetric nonlinear Schrödinger equation // J. Math. Phys. - 1987. - 28, № 8. - p. 1809-1812.

162. Christiansen P.L., A Bäcklund transformation for the 3+1 dimensional sin-Gordon equation // Proceedings of the 8th International conference on Nonlinear Oscillations, vol.1. - Prague, 1979. - p. 349-354.

163. Clairin J. Sur les transformations de Baecklund // Ann. Sci. École Norm. Sup. 3e. - 1910. - 27. - p. 451- 489.

164. Clarkson P.A., Kruskal M.D. New similarity reductions of the Boussinesq equation // J. Math. Phys.- 1989. - 30, № 10. - p. 2201-2213.

165. Cole J.D. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics // Quart. Appl. Math. - 1951. - 9. - p. 225-236.

166. Crampin M., Mc Carthy P.J . On a geometrical pro - perty of the Bäcklund transformation of the Sine - Gordon equation // Lett. Math. Phys.- 1978. - 2, № 4.- p. 303- 312.

167. Cullen J.J., Reid J.L. Lie Bäcklund groups and the linearisation of differential equation // J. Phys. A.-1983.- - 16, № 9. - p. 1889 -1910.

168. David D., Kamran N., Levi D., Winternitz P. Sym -

metry reduction for the Kadomtsev-Petviashvili equation using a loop algebra // J. Math. Phys. - 1986. - 27, № 5. p. 1225-1237.

169. Dhooghe P.F.J. Partial differential equations and Bäcklund maps // Bull de la Soc. Math. de Belgique. - 1977. - 29, № 11.B. - p. 111-134.

170. Dhooghe P.F.J. Evolution equations and sl(2,R) - valued Bäcklund forms // Reports on Math. Phys. - 1985. - 21, № 2. - p. 159-175.

171. Dhooghe P.F.J. Bäcklund equations on Kac-Moody-Lie algebras and integrable systems // J. Geom. and Phys.- 1984. - 1, № 2. - p. 9-38.

172. Dickson L.E. Differential equations from the group standpoint // Annals of Math. - 1924. - 25. - p. 287-379.

173. Dodd R.K., Morris H.C. Bäcklund transformations // Lect. Notes. Math. - 1980. - 810. - p. 63-94.

174. Estabrook F.B. Some old and new techniques for the practical use of exterior differential forms // Lect. Notes Math. - 1976. - 515. - p. 136-161.

175. Estabrook F.B. Moving frames and prolongation algebras // J. Math. Phys. - 1982. - 23, № 11. - p. 2071 -2076.

176. Flanders H. Differential forms with applications to the physical sciences. - N.Y.; London: Academic press, 1963. - 200 p.

177. Fokas A.S., Fuchssteiner B. Bäcklund transformations for hereditary symmetries // Nonlinear Anal. Theory Meth. and Appl. - 1981. - 5, № 4. - p. 423-432.

178. Forsyth A.R. Theory of differential equations, vol. 5, 6. - N.Y.: Dover Publication, 1959. - 478 p., - 596 p.

179. Fuchssteiner B., Fokas A.S. Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries // Physica. - 1981. - 4.D., № 1. - p. 47-66.

180. Fushchich W.I. Exact solutions of multidimensional nonlinear Dirac's and Schrödinger's equations.- Minneapolis, 1988.- 14 p.- (Preprint / Institute for Math. and its Appl., № 467).

181. Fushchich W.I., Kornyak W.W. Computer algebra application for determining Lie and Lie-Bäcklund symmetries of differential equations // J. Symb. Comp. - 1989. - 7, № 8. - p. 611-619.

182. Fushchich W.I., Serov N.I., Tychinin V.A., Amerov T.K. On nonlocal symmetries of the nonlinear heat equa tion // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy - 1992. - № 11.- p. 27-33.

183. Fushchich W.I., Tsifra I.M. On a reduction and solution of nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A. - 1987. - 20, № 2. - p. L.45 - L.48.

184. Fushchich W.I., Tychinin V.A. Generating solutions for nonlinear equations by the Legendre transformation // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy.- 1992.- № 7.A.- p. 20-25.

185. Fushchich W.I., Tychinin V.A. Nonlocal symmetry and generating solutions for Harry-Dym equations // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy.- 1992.- № 9.A.- p. 24-30.

186. Fushchych W.I., Tychinin V.A. Generating solutions for nonlinear equations via the Euler-Ampére transformation // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. - 1993. - № 7.- p.40-45.

187. Fushchych W.I., Tychinin V.A. Hodograph transformations and generating solutions for nonlinear differential equations // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. - 1993.- № 10.-

52-58 p.

188. Fushchich W.I., Zhdanov R.Z. On the reduction and some new exact solutions of the nonlinear Dirac and Dirac - Klein-Gordon equations // J. Phys. A.- 1988.- 21, №1.-p. L5--L9.

189. Fushchich W.I., Zhdanov R.Z. On some new exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations. -Minneapolis, 1988 - 5p.-(Preprint/Institute for Math. and its Appl. № 468)

190. Fushchich W.I., Zhdanov R.Z. Nonlocal ansätze for the Dirac equation // J. Phys. A. - 1988.- 21.- p. L.1117 - L.1121.

191. Fushchich W.I., Zhdanov R.Z. Symmetry and exact solutions of nonlinear spinor equations // Physics Reports.- 1989.- 172, № 4 - p. 123-174.

192. Gardner R.B. Constructing Bäcklund transformations in partial differential equations and geometry // Lect. Notes Pure and Appl. Math. vol. 48.- N.Y.: Dekker,1979.

193. Gardner R.B., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg - de Vries equation // Phys. Rev. Lett. - 1967.-19.-p. 1095-1097.

194. Goldschmidt H. Integrability criteria for systems of non - linear partial differential equations // J. Differ. Geom. - 1967.- 1.- p. 269-307.

195. Harrison B.K., Estabrook F.B. Geometric approach to invariance groups and solution of partial differential systems // J. Math. Phys. - 1971.- 12, № 4. -p. 653-666.

196. Hermann R. E.Cartan's geomrtric theory of partial differential equations // Advances in Math. - 1965.- 1.-

p. 265-317.

197. Hermann R. The pseudopotentials of Estabrook and Wahlquist, the geometry of solutions and the theory of con - nections // Phys. Rev. Lett. - 1976. - 36.- p. 835-836 .

198. Hermann R. The geometry of nonlinear differential equations, Bäcklund transformations, and solitons. Part A. - Brookline: Math. Sci. Press, 1976.- 313 p.

199. Hirota R. Direct method of finding exact solutions of nonlinear evolution equations // Lect. Notes Math. - 1976.- 515. - p. 40-68.

200. Holm D.D., Kupershmidt B.A. The analogy between spin glasses and Yang - Mills fluids // J. Math. Phys. - 1988.- 29, № I - p. 21-30.

201. Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure. Appl. Math. - 1950.- 3.- p. 201 - 230.

202. Ibragimov N.H., Anderson R.L. Lie - Bäcklund tan - gent transformations // J. Math. Anal. and Appl.- 1977.- 59, № 1 - p. 145-162.

203. Jacob A., Sternberg S. Coadjoint structures, soli- tons, and integrability // Lect. Notes Phys. - 1980.- 120.- p. 52-84.

204. Janet M. Les systemes d'equations aux derivées partielles // J. Math. pures et appl. - 1920.- 3.-p. 65.

205. Janet M. Leçons sur les systemes d'equations aux derivees partielles. - Paris: Gauthier - Villars, 1929.

206. Johnson H.H. Classical differential invariants and application to partial differtial equations // Math. Ann.- 1962. - 148. -p. 308-329.

207. Jones S.E., Ames W.F. Nonlinear superposition // J. Math. Anal. and Appl.- 1967. -17. -p. 484-487.

208. Kac V.G. Infinite dimensional Lie algebra.- Boston: Birkhauser, 1983.

209. Kaup D.J. The lump solutions and the Bäcklund transformation for the three dimensional three-wave resonant interaction // J. Math. Phys.- 1981.- 22, № 6.- p. 1176-1181.

210. King J.R. Some non-local transformations between nonlinear diffusion equation // J. Phys. A. - 1990.- 23.- p. 5441-5464.

211. King J.R. Exact results for the nonlinear diffusion equations $u_t = \partial_x(u^{-3/4}u_x)$ and $u_t = \partial_x(u^{-2/3}u_x)$ // J. Phys. A. - 1991. -24. -p. 2521-2545.

212. Konopelchenko B.G., Dubrovsky V.G. Bäcklund - Calogero group and general form of integrable equations for the two-dimensional Gelfand-Dikij-Zakharov-Shabat problem. Bi-local approach // Physica. 1985. - 16.D. -p. 79-98.

213. Krasil'shchik I.S., Vinogradov A.M. Nonlocal trends in the Geometry of differential equations: Symmetries, conservation laws, and Bäcklund transformations // Acta. Appl. Math. - 1989. - 15. - p. 161-209.

214. Kumei S. Invariance transformations, invariance groups of the sine-Gordon equations // J. Math. Phys.- 1975. - 16, № 12. - p. 2461-2468.

215. Kumei S., Bluman G.W. When nonlinear differential equations are equivalent to linear differential equations // SIAM J. Appl. Math. - 1982.- 42, № 5. - p. 1157-1173.

216. Kumpera A., Spencer D.C. Systems of linear partial differential equations deformation of pseudo-group structu-

res. - Montreal: SMS. Les press de l'universite de Montreal, 1972. - 100 p.

217. Kundu A. Explicit auto-Bäcklund relation through gauge transformation // J. Phys. A.- 1987.- 20. - p. 1107 - 1114.

218. Kuranishi M. Lectures on involutive system of partial differential equations.- São Paulo: Publicaçoes de Sociedade de Matemática de São Paulo, 1967. - 75p.

219. Lamb G.L.Jr. Bäcklund transformations at the turn of the century // Lect. Notes. Math. - 1976.- 515.- p. 69-79.

220. Lecture Notes in Mathematics.- 1976.- 515.- 283 p.

221. Loewner C. A transformation theory of partial differential equations of gasdynamics // Nat. Advis. Comm. Aeronat. Tech. Notes. -1950. - 2065.- p. 1-56.

222. Magri F.A. Simple model of the integrable Hamil - tonian equation // J. Math. Phys. -1978. - 19, № 5.- p.1156 - 1162.

223. Magri F.A. A geometrical approach to the nonlinear solvable equations // Lect. Notes Phys. - 1980. - 120. - p. 233-263.

224. Matsuno Y. New integrable nonlinear integrodiffe - rential equations and related solvable finite - dimensional dynamical systems // J. Math. Phys.- 1988.- 29, № 1.- p. 49- -56.

225. Newell A.C. The interrelation between Bäcklund transformations and the inverse scattering transform // Lect. Notes Math. - 1976. - 515. - p. 227-239.

226. Nirmala N., Vedan M.J., Baby B.V. Auto-Bäcklund transformation, Lax pairs and Painleve property of a vari -

able coefficient Korteweg-de Vries equation I // J. Math. Phys. -1986. - 27, № 11. - p. 2640-2646.

227. Nutku Y. On a new class of completely integrable nonlinear wave equations 11. Multi-Hamiltonian structure // J. Math. Phys. -. 1987. - 28, № II.- p. 2579-2585.

228. Olver P.J. Applications of Lie groups to differential equations. - N. Y.: Springer, 1986. - 497 p.

229. Olver P.J., Rosenau P. The construction of special solutions to partial differential equations // Phys. Lett. - 1986. - 114. A., № 3. - p. 107-112.

230. Papachirstou C.J., Harrison B.K. Nonlocal symmetries and Bäcklund transformations for self-dual Yang - Mills system // J. Math. Phys. - 1988. - 29, № 1 p. 238-243.

231. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. 1. General method and the Poincaré group // J. Math. Phys. - 1975.- 16, № 8. - p. 1597-1614.

232. Payne D.A. Bäcklund transformations in several variables // J. Math. Phys.- 1980.- 21, № 7. - p. 1593-1602.

233. Pirani F. Geometry of Bäcklund transformations // Lect. Notes Phys. - 1980. - 120. - p. 212-217.

234. Pirani F., Robinson D., Shadwick W.F. Jet bundle formulation of Bäcklund transformations to nonlinear evolu - tion equations.- Dordrecht: D. Reidel Publ. Co, 1979.- 132 p.

235. Pommaret J.F. Bäcklund problem, differe ntial algebra and group theory // Lect. Notes Phys. - 1983. - 180. - p. 183 - 191.

236. Riquier C.H. Les systemes d'equations aux derivée partielles. - Paris: Gouthier - Villars, 1910.

237. Ritt J.F. Differential equations from the algebraic standpoint.- 1932, reprinted 1948. - 172 p.

238. Rogers C., Shadwick W.F. Bäcklund transformations and their applications. - N.Y.: Academic press, 1982, - 321 p.

239. Saito S., Saitoh N. Gauge and dual symmetries and linearization of Hirota's bilinear equations // J. Math. Phys. - 1987. - 28, № 5. - p. 1053-1055.

240. Sasaki R. Canonical structure of Bäcklund trans - formations // Phys. Lett. - 1980. - 78. A.-p. 7-10.

241. Sattinger D.H., Zurkowski V.D. Gauge theory of Bäcklund transformations II // Physica.- 1987.- 26.D.- p. 225-250.

242. Seymour B.R., Varley E. Exact solutions descri - bing soliton-like interactions in a nondispersive medium // SIAM J. Appl. Math. - 1982. - 42, № 4.- p. 804-221.

243. Scheunert M. Invariant suppersymmetric multilinear forms and the Casimir elements of P-type Lie superalgebras // J. Math. Phys. - 1987. - 28, № 5. - p. 1181-1191.

244. Strampp W. Bäcklund transformations for diffusion equations // Physica. - 1982. - 6. D., № 1. - p. 113-118.

245. Tanaka K. Curvature form and solutions of nonlinear models // J. Math. Phys. - 1986. -30, № I.- p. 172-174.

246. Thomas J.M. Riquier's theory // Annals of Math. - 1929.- 30.- 1934.- 35.

247. Thomas J.M. Systems and roots.- W. Byrd Press, 1962.

248. Tychinin V.A. The group classification of equations $u_0=u^p u_{111}$ and $w_0=w_{11}^k w_{111}$ // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. - I992. № IO.A. - p. 24-28.

249. Tychinin V.A. Nonlocal symmetry and generating solutions of the equation $u_0u_{11}+1=0$ // Symmetry analysis of equations of mathematical physics.- Kiev: Inst. of Math. of the Academy of Sciences of Ukraine, 1993.- p.26-33.

250. Wadati M., Sanuki H., Konno K. Relationships among inverse method, Bäcklund transformation and infinite number of conservation laws // Progr. Theoret. Phys. - 1975. - 53.- p. 418-436.

251. Wahlquist H.D., Estabrook F.B. Bäcklund transformation for solution of the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett. - 1973. -31, № 23. - p. 1386-1389.

252. Wahlquist H.D., Estabrook F.B. Prolongation structures of nonlinear evolution equations // J. Math. Phys. - 1975. -16, № 1 - p. 1-7.

253. Weiss J. Periodic fixed points of Bäcklund transformations and the Korteweg - de Vries equation // J. Math. Phys. - 1986. - 27, № 11, - p. 2647-2656.

254. Weston V.H. Factorization of the wave equation in higher dimensions // J. Math. Phys. - 1987. - 28, № 5. - p. 1061-1068.

255. Weston V.H. Factorization of the wave equation in a nonplanar stratified medium // J. Math. Phys. - 1988. - 29. № I. - p. 36-45.

256. Yamagata Hideo. On restricted Bäcklund transformations for some quasilinear hyperbolic equations in 3+1 dimensions // Math. jap. - 1980. - 25, № 6 -p. 643-653.

257. Zakharov V.E. Integrable systems in multidimensional spaces // Lect. Notes. Phys. - 1982. -153.-p. 190-216.