АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

УДК 517.9:519.46

Егорченко Ирина Анатольевна

СИММЕТРИЙНЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
член-корреспондент АН УССР
В.И.ФУЩИЧ

Киев – 1988

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Большинство физических систем обладает теми или иными свойствами регулярности, или симметрии. Поэтому естественно, что дифференциальные уравнения, изучаемые в математической физике и моделирующие реальные физические процессы, также обладают широкой симметрией. Более того, наличие широкой симметрии может служить одним из критериев выбора оптимальной математической модели среди некоторого множества уравнений.

Аппарат непрерывных групп, используемый для симметрийного анализа дифференциальных уравнений, был разработан норвежским математиком Софусом Ли (1842-1899) [40, 41]. Первоначальной целью Ли было создание теории интегрирования дифференциальных уравнений, аналогичной теории Абеля для алгебраических уравнений.

Однако роль симметрии дифференциальных уравнений оказывается значительно более широкой. Изучение групп преобразований, относительно которых инвариантна физическая система, позволяет получить важную информацию о системе без решения описывающих ее уравнений. Знание группы, допускаемой уравнением или системой уравнений, позволяет приводить их к более удобному для решения виду, находить законы сохранения, строить семейства решений по одному известному решению. Особую актуальность методы симметрийного анализа приобретают для нелинейных уравнений, к которым трудно или невозможно применить классические методы математической физики.

Современное изложение теории групп Ли и ее применения к исследованию дифференциальных уравнений дано в монографиях [9, 13, 44].

Понятие непрерывной группы представляет собой объединение в одном объекте алгебраической и топологической структур, связанных между собой требованием непрерывности операции группового умножения.

Будем рассматривать локальные преобразования пространства $\mathcal{R}^n$, то есть инъективные преобразования открытых множеств $\mathcal{V} \subset \mathcal{R}^n$, $v: \mathcal{V} \to \mathcal{R}^n$, для которых $v(\mathcal{V})$ открыто в $\mathcal{R}^n$; Δ – интервал в $\mathcal{R}$, симметричный относительно нуля.

<u>Определение 0.I</u>. Локальной однопараметрической группой Ли преобразований пространства $\mathcal{R}^n$ называется однопараметрическое семейство локальных преобразований $f: \mathcal{V} \times \Delta \to \mathcal{R}^n$, которое обладает следующими свойствами:

I. $f(x, 0) = x \quad \forall x \in \mathcal{V}$;

2. $f(f(x, a), b) = f(x, a+b) \quad \forall a, b, a+b \in \Delta, x \in \mathcal{R}^n$;

3. Если $a \in \Delta$ и $f(x, a) = x \ \forall x \in \mathcal{V}$, то $a = 0$.

4. $f \in C^\infty(\mathcal{V} \times \Delta)$

<u>Определение 0.2</u>. Линейный дифференциальный оператор действующий на отображение $F: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^\ell$ по формуле

$$(\xi \cdot \partial) F(x) = \partial_a F(f(x, a))\Big|_{a=0}, \qquad (0.I)$$

где f – отображение, порождающее группу G называется инфинитезимальным оператором этой группы.

Аналогичным образом определяют n -параметрическую локальную группу Ли. Алгебра Ли задается базисными операторами, то есть любой элемент алгебры можно представить в виде линейной комбинации базисных операторов. Согласно определению алгебры Ли коммутатор любой пары ее элементов также принадлежит алгебре.

$$[X_i, X_j] = X_k \in AG.$$

Инфинитезимальные операторы группы Ли образуют алгебру Ли. С помощью теорем о соответствии между группами и алгебрами Ли, доказанных Софусом Ли, можно свести изучение непрерывных групп, допускаемых дифференциальными уравнениями, к изучению соответствующих алгебр, для нахождения которых существуют более эффективные методы.

Алгебру с базисными элементами X_i будем обозначать как $\{X_i\}$.

Пусть L, Q – операторы, действующие из множества отображений $F: R^n \to R^\ell$ в множество R^ℓ.

Определение 0.3. Уравнение

$$L F(x) = 0$$

инвариантно относительно оператора Q, если имеет место соотношение

$$L Q F(x) \Big|_{LF(x)=0} = 0. \tag{0.2}$$

Уравнение (0.2) обычно называют определяющим уравнением.

Рассмотрим алгоритм Ли нахождения алгебры инвариантности системы дифференциальных уравнений [9, 13].

Пусть

$$F^i(x, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{m}{u}) = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad - \tag{0.3}$$

– система k дифференциальных уравнений в частных производных

m -го порядка. Здесь

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad u = (u^1, \ldots, u^l),$$

$$\underset{1}{u} = \left(\frac{\partial u^r}{\partial x_j}\right)_{j=1,\ldots,n}^{r=1,\ldots,l}, \ldots, \underset{m}{u} \left(\frac{\partial^m u^r}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}}\right)_{\substack{j_s = 1,\ldots,n \\ s = 1,\ldots,m}}^{r=1,\ldots,l},$$

F^i – произвольные функции, дифференцируемые по всем своим переменным.

Дифференциальный оператор, допускаемый уравнением (0.3), ищем в виде

$$X = \xi^i(x, u)\,\partial_{x_i} + \eta^r(x, u)\,\partial_{u^r} \qquad (0.4)$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

Все такие операторы описываются определяющим уравнением

$$\overset{m}{X} F^i(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{m}{u})\Big|_{\substack{F^1=0 \\ \ldots \\ F^k=0}} = 0, \quad i = 1, \ldots, k, \qquad (0.5)$$

то есть равенство нулю определяющего уравнения требуется на многообразии решений системы (0.3).

$\overset{m}{X}$ – m -е продолжение оператора X, которое вычисляется следующим образом:

$$\overset{1}{X} = X + \eta_i^r\,\partial_{u_i^r}; \quad \overset{k+1}{X} = \overset{k}{X} + \eta^r_{i_1 \ldots i_k}\,\partial_{u^r_{i_1 \ldots i_k}};$$

$$\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad u^r_{i_1 \ldots i_k} = \frac{\partial^k u^r}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}, \qquad (0.6)$$

$$\partial_{u^{t}_{i_1\dots i_k}} = \frac{\partial}{\partial u^{r}_{i_1\dots i_k}} ,$$

$$\eta^{r}_{i_1\dots i_k j} = \Big(\partial_{x_j} + \sum_{s=0}^{k} u^{d}_{j_1\dots j_s j}\, \partial_{u^{d}_{j_k\dots j_s}}\Big)\eta^{r}_{i_1\dots i_k} -$$

$$- u^{r}_{i_1\dots i_k}\Big(\partial_{x_j} + u^{d}_{j}\,\partial_{u^{d}}\Big)\xi^{i}.$$

С помощью описанного алгоритма можно найти все операторы симметрии в смысле Ли (то есть дифференциальные операторы первого порядка) как линейных, так и нелинейных дифференциальных уравнений.

Кроме нахождения групп преобразований, допускаемых данной системой дифференциальных уравнений, важна также групповая классификация дифференциальных уравнений, то есть деление некоторого множества уравнений на классы в соответствии с допускаемыми ими группами.

Задача классификации уравнений, инвариантных относительно некоторой группы облегчается, если известны дифференциальные инварианты этой группы. Кроме того, с помощью дифференциальных инвариантов можно производить расслоение системы уравнений на автоморфную и разрешающую системы [43].

Дифференциальные инварианты и построение инвариантных уравнений исследовались еще Ли [41], а также в работах [42, 43, 60]. Трессом в [42] была доказана теорема о существовании и конечности функционального базиса дифференциальных инвариантов. Однако нахождению в явном виде дифференциальных инвариантов конкретных групп, используемых в механике и математической физике, посвящено относительн... ...ого ... ... частности, в монографии Э.Спенсера [7] найдены базисы инвариантов ортогональной группы для векторов и тензоров ранга 2. Эти результаты могут быть использованы при построении дифференциальных инвариантов первого и второго порядка для набора скалярных функций, зависящих от трех переменных.

Определение 0.4. Функ...

$$F = F(\quad u)$$

называется инвари...том группы G, задаваемой преобразованиями

$$x'_i = f_i\,(x, u, a), \qquad i = 1, \dots, n;$$

$$u'^{r} = g^{r}\,(x, u, a), \qquad r = 1, \dots, \ell,$$

если выполнено соотношение

$$F(x, u) = F\,(x', u') \tag{0.7}$$

для всех x, u, a, для которых определена группа G.

Инвариант группы будет также инвариантом соответствующей алгебры Ли. Функция F называется инвариантом алгебры Ли с базисными операторами X_i вида (0.4), если выполнено соотношение

$$X_i\,F(x, u) = \lambda_i\,(x, u)\,F \tag{0.8}$$

Если в соотношении (0.8) $\lambda_i\,(x, u) \equiv 0$, то функция $F(x, u)$ называется абсолютным инвариантом алгебры $\{X_i\}$; если $\lambda_i \neq 0$, то $F(x, u)$ называется относительным инвариантом этой алгебры.

Определение 0.5. Функция

$$F = F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{m}{u})$$

называется дифференциальным инвариантом алгебры Ли с базисными операторами X_i, если она является инвариантом m -го продолжения этой алгебры:

$$\overset{m}{X}_i F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{m}{u}) = \lambda_i (x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{m}{u}) F; \quad (0.9)$$

при $\lambda_i \equiv 0$ F называется абсолютным дифференциальным инвариантом, при $\lambda_i \neq 0$ – относительным.

Определение 0.6. Выражения $F^1, \ldots, F^k$, $F^i = F^i(x, u, \ldots, \underset{m}{u})$ называются функционально-зависимыми, если существует такое не тождественно постоянное отображение $\Phi: R^k \to R$, что для любого набора $(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{m}{u})$ выполнено равенство

$$\Phi(F^1, \ldots, F^k) = 0.$$

В противном случае эти выражения называются функционально-независимыми.

Определение 0.7. Набор функционально-независимых инвариантов порядка $z \leq m$ алгебры Ли L, через которые можно выразить любой ее инвариант порядка $z \leq m$, называются функциональным базисом дифференциальных инвариантов порядка m алгебры L.

В диссертации рассматриваются дифференциальные инварианты только первого и второго порядка.

Определение 0.8. Рангом продолженной алгебры операторов $\{ \overset{m}{X}_i \}$

$$\overset{m}{X}_i = \xi^i_a \partial_{x_a} + \eta^i_r \partial_{u_r} + \zeta^{ir}_a \partial_{u^r_a} + \ldots + \zeta^{ir}_{a_1 \ldots a_m} \partial_{u^r_{a_1 \ldots a_m}}, \quad i = 1, \ldots, N$$

называется ранг матрицы, составленной из коэффициентов продолженных базисных операторов алгебры $\{X_i\}$ (то есть максимум рангов таких матриц на всей области определения функций u^r).

$$\begin{bmatrix} \xi^1_1 \ldots \xi^1_n & \eta^{11} \ldots \eta^{1l} & \zeta^{11}_1 \ldots \zeta^{1l}_n \ldots \zeta^{11}_{\underbrace{1 \ldots 1}_{m}} \ldots \zeta^{1l}_{n \ldots n} \\ \xi^2_n \ldots \xi^2_n & \eta^{21} \ldots \eta^{2l} & \zeta^{21}_1 \ldots \zeta^{2l}_n \ldots \zeta^{21}_{1 \ldots 1} \ldots \zeta^{2l}_{n \ldots n} \\ - - - - & - - - - & - - - - - - - - \\ \xi^N_1 \ldots \xi^N_n & \eta^{N1} \ldots \eta^{Nl} & \zeta^{N1}_1 \ldots \zeta^{Nl}_n \ldots \zeta^{N1}_{1 \ldots 1} \ldots \zeta^{Nl}_{n \ldots n} \end{bmatrix} \qquad (0.10)$$

Абсолютные инварианты получаются как решения линейной системы уравнений в частных производных первого порядка (0.9), следовательно, количество элементов функционального базиса инвариантов равно разности количества переменных, входящих в исходное выражение для инварианта x , u , $\underset{1}{u}$ ..., $\underset{m}{u}$ и ранга системы (0.9), то есть ранга продолженной алгебры операторов.

Из (0.5), (0.9) очевидно, что система уравнений (0.3) инвариантна относительно алгебры $\{X_i\}$, если $F^j(x, u, \ldots, \underset{m}{u})$, $j = 1, \ldots, K$ – относительные или абсолютные инварианты m–го порядка этой алгебры.

В качестве математических моделей удобно использовать дифференциальные уравнения, обладающие широкой симметрией, что позволяет эффективно строить многопараметрические семейства точных решений этих уравнений путем редукции их к уравнениям с меньшим числом независимых переменных или к обыкновенным.

Приведем алгоритм симметрийной редукции систем уравнений, следуя [9, 50]. Пусть система (0.3) инвариантна относительно алгебры $\{X_i\}$ с базисными операторами вида (0.4). Тогда анзац

$$u^r = G^r(\varphi^1(\omega), \ldots, \varphi^l(\omega), x), \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \quad (0.11)$$

редуцирует эту систему к системе с $n-1$ независимыми переменными ω, если новые переменные и функции опеределяются из уравнений Лагранжа

$$\frac{dx_1}{\xi^1} = \frac{dx_2}{\xi^2} = \ldots \quad \frac{dx_n}{\xi^n} = \frac{du^1}{\eta^1} = \ldots = \frac{du^l}{\eta^l}. \quad (0.12)$$

Уравнения (0.12) имеют $n+l-$ функционально независимых интегралов. В качестве $n-1$ используем $n-1$ из них, не содержащих u^r, а из остальных l инвариантов выражаем u^r, получая анзац (0.11). Последовательное применение описанного алгоритма или редукция по подалгебрам размерности $n-1$ приводит к системам обыкновенных уравнений. Решения, найденные таким способом, называются инвариантными. Заметим, что не для всех подалгебр применим описанный алгоритм, так как количество независимых интегралов системы уравнений Лагранжа, содержащих u^r, может быть меньше l.

Определение 0.10. Два анзаца вида (0.11) называются эквивалентными относительно группы G, если они переводятся друг в друга преобразованиями из этой группы.

При помощи алгоритма симметрийной редукции для заданной алгебры Ли L можно найти все неэквивалентные анзацы, если искать решения уравнения (0.12) для базисных операторов всех неэквивалентных подалгебр алгебры L заданной размерности.

Если дифференциальное уравнение инвариантно относи некоторой группы G и $u = u(x)$ – его решение, то

$$u^{r'}(x') = u^{r'} = g^{r}(u, x), \quad r = 1, \ldots, \ell; \qquad x^{a'} = f^{a}(x, u), \quad a = 1, \ldots, n, \tag{0.13}$$

где $(f, g): (x, u) \to (x', u')$ – преобразование из группы , также будет решением этого уравнения. Это непосредственно следует из определения инвариантного уравнения.

Формулы (0.13) называются формулами размножения решений.

<u>Определение 0.11</u>. Многопараметрическое семейство решений

$$u = u(x, a), \quad a = (a_1, \ldots, a_N)$$

называется G -неразмножаемым, если все решения, полученные из него преобразованиями из группы G , также принадлежат этому семейству.

Целый ряд волновых процессов описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных вида

$$\Box u + F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, x\right) = 0, \tag{0.14}$$

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi + F\left(|\psi|^2, x\right) \psi = 0, \tag{0.15}$$

поэтому нахождение точных решений таких уравнений представляет собой актуальную задачу математической физики.

В работах солитонного направления изучаются, главным образом, одномерные и двумерные нелинейные уравнения, в частности, одномерное нелинейное уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \lambda |\psi|^2 \psi = 0 \tag{0.16}$$

.

и одномерное нелинейное уравнение $\sin$-Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \sin u = 0. \qquad (0.17)$$

Благодаря открытию Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой [46] эффективного метода решения уравнения Кортевега-де Фриза были построены точные солитонные решения многих двумерных нелинейных уравнений специального вида, в том числе (0.16), (0.17).

Общее решение одномерное уравнение (0.14) имеет только в случае

$$F_1 = \lambda \exp u, \quad u = u(t, x). \qquad (0.18)$$

Все его гладкие решения были построены еще Лиувиллем. Сингулярные решения уравнения (0.14) с нелинейностью (0.18) исследованы М.К.Поливановым и его учениками [15].

Однако до настоящего времени не создано обобщения метода обратной задачи рассеяния для интегрирования многомерных уравнений достаточно общего вида, в частности, уравнений (0.14), (0.15).

Метод получения точных решений с помощью симметрийной редукции оказывается эффективным и для многомерных нелинейных уравнений и систем. Этим методом в работах [22, 24, 36, 48–53, 56,58, 59] были найдены многопараметрические семейства точных решений уравнений (0.14), (0.15) с различными нелинейностями и некоторых других уравнений математической физики.

В диссертации с помощью метода симметрийной редукции найдены точные решения и многопараметрические семейства решений комплексных уравнений эйконала, Эйлера-Лагранжа, Гамильтона-

-Якоби, системы уравнений для векторного потенциала

$$p_\mu p_\mu A_\nu - p_\nu p_\mu A_\mu = A_\nu F\,(A_\mu A_\mu)\,, \quad \mu = 0,1,2,3.$$

Получены также решения комплексного волнового уравнения (0.I4) и уравнения Шредингера (0.I5) с различными нелинейностями. Кроме того, для некоторых из рассматриваемых уравнений приведены симметрийные анзацы, редуцирующие их к уравнениям с меньшим числом независимых переменных и к обыкновенным уравнениям.

Глава I. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

В первой главе построены функциональные базисы дифференциальных инвариантов первого и второго порядка для алгебр Евклида, Пуанкаре и конформной алгебры. На основе этих результатов получены квазилинейные обобщения волнового уравнения для комплексной функции, найдены многопараметрические семейства решений таких уравнений.

§ I. Дифференциальные инварианты алгебры Пуанкаре

Хорошо известно [5], что нелинейное скалярное волновое уравнение

$$\Box u = F(u), \qquad (I.I)$$

где $u = u(x_0 \equiv t, x_1, \ldots, x_n)$, $\Box = p_\mu p_\mu$ – оператор Даламбера,

$$p_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad \mu, \nu = 0, \ldots, n,$$

$g_{\mu\nu} = diag(1, -1, \ldots, -1)$ – метрический тензор, с произвольной функцией F, инвариантно относительно алгебры Пуанкаре с базисными операторами

$$p_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \qquad (I.2)$$

(здесь и далее по греческим индексам подразумевается суммирование от 0 до n, $x_\mu x_\mu = x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2$).

Полная групповая классификация уравнения (I.I) осуществлена в работе [50].

Нелинейное уравнение Лапласа

$$\Delta u = F(u) \tag{I.3}$$

инвариантно относительно алгебры Евклида $AE(n)$, группа Ли которой включает преобразования вращений и сдвигов в евклидовом пространстве; базисные операторы этой алгебры имеют вид

$$\partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a, \; a, b = 1, \ldots, n. \tag{I.4}$$

Здесь и в дальнейшем используемые в качестве индексов строчные латинские буквы a, b, c, d принимают значения от 1 до n, где n – количество пространственных переменных; во всех рассматриваемых случаях $n \geqslant 3$; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

I.I. Инварианты алгебры вращений для векторов и симметричных тензоров ранга 2.

Будем искать дифференциальные инварианты второго порядка алгебры $AE(n)$ с базисными операторами (I.4) в виде

$$F = F(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}),$$

где $u = (u^1, \ldots, u^l)$; $\underset{1}{u}$, $\underset{2}{u}$ – наборы соответственно первых и вторых производных функций u .

Из условия инвариантности относительно операторов сдвига ∂_a следует, что F не должны зависеть от x ; очевидно, что u – инвариант операторов (I.4). Поэтому достаточно искать инварианты, зависящие только от $\underset{1}{u}$ и $\underset{2}{u}$.

$$F = F(\underset{1}{u}, \underset{2}{u}). \tag{I.5}$$

Критерий абсолютной инвариантности (0.9) в этом случае имеет вид

$$\hat{J}_{ab} F(\underset{1}{u}, \underset{2}{u}) = 0, \tag{I.6}$$

$$\hat{J}_{ab} = u_a^r \partial_{u_b^r} - u_b^r \partial_{u_a^r} + u_{ac}^r \partial_{u_{bc}^r} - u_{bc}^r \partial_{u_{ac}^r} \tag{I.7}$$

(по r подразумевается суммирование от 1 до ℓ), так как согласно формуле (0.6) второе продолжение оператора J_{ab} имеет вид

$$\overset{2}{J}_{ab} = J_{ab} + \hat{J}_{ab}.$$

Таким образом, задача нахождения дифференциальных инвариантов алгебры $AE(n)$ первого и второго порядков сводится к построению базиса инвариантов алгебры вращений $AO(n)$ с базисными операторами (I.7) для ℓ векторов и симметричных тензоров ранга 2. Для $n = 3$ эта задача решена в монографии [7].

Для доказательства того факта, что найденные N инвариантов F^i вида (I.5) представляют собой функциональный базис инвариантов алгебры $AO(n)$, необходимо и достаточно показать, что:

1) F^i – инварианты;

2) F^i функционально независимы;

3) набор инвариантов F^i является полным, то есть i равно разности количества элементов u_1, u_2 и ранга системы определяющих уравнений.

<u>Лемма I.I</u>. Ранг алгебры операторов $AO(n)$ (I.7) равен $\frac{n(n-1)}{2}$.

<u>Доказательство</u>. Лемму достаточно доказать для $\ell=1$. Алгебра (I.7) имеет $\frac{n(n-1)}{2}$ базисных операторов. Выпишем столбцы матрицы (0.9), в которых стоят коэффициенты при $\partial_{u_{ab}}$ и положим $u_{ab}=0$ при $a \neq b$:

$$\begin{bmatrix} u_{11}-u_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{11}-u_{33} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & u_{11}-u_{44} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{n-1\,n-1}-u_{nn} \end{bmatrix}$$

По диагонали полученной квадратной матрицы стоят элементы $u_{aa}-u_{bb}$, в остальных клетках – нули. При $u_{aa} \neq u_{bb}$, $a \neq b$ ее определитель не равен нулю и ранг равен $\frac{n(n-1)}{2}$. Следовательно, и ранг матрицы (0.9) для алгебры (I.7) не может быть меньше $\frac{n(n-1)}{2}$. Лемма доказана.

Искомые инварианты вида (I.5) для вектора $(u_1, \dots, u_n)$ и симметричного тензора $(u_{ab})_{a,b=1,\dots,n}$ зависят от $\frac{n(n-1)}{2} + 2n$ переменных. Тогда из леммы I.I следует, что функциональный базис алгебры $AO(n)$ должен состоять из $2n$ элементов.

В качестве функционального базиса инвариантов возьмем следующие выражения:

$$S_k\ (u_{ab}) = u_{a_1a_2}\, u_{a_2a_3} \dots u_{a_ka_1}, \quad k = 1, \dots, n; \tag{I.8}$$

$$R_k\ (u_a, u_{ab}) = u_{a_1}\, u_{a_1a_2}\, u_{a_2a_3} \dots u_{a_{k-1}a_k}\, u_{a_k}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{I.9}$$

Тот факт, что S_k и R_k являются инвариантами алгебры $\{\hat{J}_{ab}\}$, легко доказывается путем их подстановки в условие (I.6).

Инвариант S_k представляет собой след матрицы $(u_{ab})^k$, R_k – свертку матрицы $(u_{ab})^{k-1}$ с парой векторов (u_a).

<u>Теорема I.I</u>. Инварианты S_k, R_k функционально независимы.

<u>Доказательство</u>. Для доказательства независимости S_k, R_k достаточно рассматривать случай $u_{ab} = 0$, $a \neq b$; $u_{aa} \neq 0$. Выпишем якобиан системы инвариантов

$$\left|\begin{array}{ccc|c} & A & & O \\ \hline 0 & \dots & & \\ u_1^2 & \dots & & B \\ (n-1)\,u_1^2 \times u_{11}^{n-2} & \dots & (n-1)\,u_n^2 \times u_{nn}^{n-2} & \end{array}\right| ,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2u_{11} & 2u_{22} & \dots & 2u_{nn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n u_{11}^{n-1} & n u_{22}^{n-1} & \dots & n u_{nn}^{n-1} \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 2u_1 & 2u_2 & \dots & 2u_n \\ 2u_1 u_{11} & 2u_2 u_{22} & \dots & 2u_n u_{nn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2u_1 u_{11}^{n-1} & 2u_2 u_{22}^{n-1} & \dots & 2u_n u_{nn}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Этот якобиан с точностью до множителя равен произведению определителей Ван-дер-Монда и не равен нулю, если $u_{aa} \neq u_{bb}$, $a \neq b$ и $u_a \neq 0$, $a, b = 1, \dots, n$. Следовательно, инварианты (I.8), (I.9) функционально независимы.

Таким образом, мы доказали, что (I.8), (I.9) является функциональным базисом инвариантов алгебры $AO(n)$.

Замечание. В [2] доказано, что при $n \geq 3$ для ортогональной группы $O(n)$ не существует относительных инвариантов.

Рассмотрим случай двух векторов (u_a), (v_a) и двух симметричных тензоров ранга 2 (u_{ab}), (v_{ab}). Операторы алгебры вращений имеют вид (I.7), $u = u^1$, $v = u^2$.

В этом случае функциональный базис состоит из

$$2\left(\frac{n(n-1)}{2} + 2n\right) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+7)}{2}$$

элементов, в качестве которых выберем следующие выражения:

I. $R_k(u_a, u_{ab}) = u_{a_1} u_{a_1 a_2} \dots u_{a_{k-1} a_k} u_{a_k}$,

$$R_k\,(v_a,\, u_{ab}) = v_{a_1} u_{a_1 a_2} \ldots u_{a_{k-1} a_k} v_{a_k};$$

$$\text{II.}\quad S_{jk}\,(u_{ab},\, v_{ab}) = u_{a_1 a_2} \ldots u_{a_{j-1} a_j} \tag{I.10}$$

$$\times\, v_{a_j a_{j+1}} \ldots v_{a_k a_1}, \quad j = 0, \ldots, k,$$

$$k = 1, \ldots, n.$$

Инвариантность выражений (I.10) относительно операторов (I.7) легко доказывается путем их непосредственной подстановки в (I.6). Для доказательства функциональной независимости используем следующую лемму.

Лемма I.2. Пусть

$$U = (u_{ab})_{a,b=1,\ldots,n}\,,\quad V = (v_{ab})_{a,b=1,\ldots,n}$$

– симметричные матрицы. Тогда выражения

$$S_{jk} = \operatorname{spur} U^j V^{k-j},\ k = 1, \ldots, n,\ j = 0, \ldots, k \tag{I.11}$$

функционально независимы. (Элементы матриц считаются независимыми).

Доказательство. Для доказательства функциональной независимости множества (I.11) достаточно показать, что общий ранг их матрицы Якоби равен количеству этих выражений $\frac{n(n+3)}{2}$.

Достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда $u_{ab} = 0$, $a \neq b$. Тогда все выражения (I.11) будут зависеть от $\frac{n(n+3)}{2}$ переменных, и их функциональная независимость равносильна тому, что соответствующий якобиан не равен нулю.

В табл. I.1 выписаны элементы якобиана, необходимые для дальнейших рассуждений. Так как в первых n строках все эле-

Таблица I.I.

$\mathrm{spur}\, U^j V^{k-j}$		Частные производные выражения (I.II) по:														
k	j	u_{11}	u_{22}	…	u_{nn}	v_{11}	v_{12}	…	v_{1n}	v_{22}	v_{23}	…	v_{2n}	…	v_{n-1n}	v_{nn}
1	1	1	1	…	1											
2	2	$2u_{11}$	$2u_{22}$	…	$2u_{nn}$						0					
…	…	…	…	…	…											
n	n	nu_{11}^{n-1}	nu_{22}^{n-1}	…	nu_{nn}^{n-1}											
				0		1	0	…	0	1	0	…	0	…	0	1
2	0					$2v_{11}$	$4v_{12}$	…	$4v_{1n}$	$2v_{22}$	$4v_{23}$	…	$4v_{2n}$	…	$4v_{n-1n}$	$2v_{nn}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

менты, кроме первых n, равны нулю, то якобиан выражений (I.II) равен произведению якобиана элементов $spur\, U^k$, $k=1,\dots,n$, и якобиана всех остальных элементов множества (I.II). Согласно теореме I.I выражения $spur\, U^k$, $k=1,\dots,n$ независимы между собой и их якобиан не равен нулю; таким образом, остается показать неравенство нулю якобиана и функциональную независимость только для элементов

$$spur\, U^j V^{k-j}, \quad j=0,\dots,k-1, \quad k=1,\dots,n.$$

Из табл. I.I видим, что достаточно доказать неравенство нулю их якобиана без $n+1$ -й строки и столбца; вычтя $n+1$ -й столбец из столбцов, соответствующих v_{aa}, мы получим нули в $n+1$ -й строке везде, кроме диагонали.

Следовательно, для доказательства леммы достаточно показать, что независимыми являются следующие выражения:

$$spur\, U^j V^{k-j} \cdot V, \quad j=0,\dots,k, \quad k=1,\dots,n. \qquad (I.12)$$

Это рассуждение позволяет воспользоваться для доказательства леммы принципом математической индукции.

При $n=1$ u_{11} и v_{11} независимы и лемма справедлива.

Предположим ее справедливость при $n-1$ и докажем отсюда утверждение леммы для n.

Пусть выражения

$$spur\, U^j V^{k-j}, \quad j=0,\dots,k, \quad k=1,\dots,n-1,$$
$$U=(u_{ab})_{a,b=1,\dots,n-1},$$
$$V=(v_{ab})_{a,b=1,\dots,n-1}$$

независимы. Исходя из этого легко доказать независимость выражений (I.I2), где U , V – матрицы $(n-1)\times(n-1)$. Значит, независимыми будут эти выражения и для матриц $n\times n$. Отсюда, согласно предыдущим рассуждениям следует независимость (I.II), то есть справедливость леммы.

Теорема I.2. Инварианты $R_k(u_a, u_{ab})$, $R_k(v_a, v_{ab})$, $S_{jk}(u_{ab}, v_{ab})$ (I.IO) функционально независимы.

Доказательство. Положим $u_{ab}=0$, $a\neq b$. В этом случае якобиан инвариантов (I.IO) представляет собой произведение трех не равных нулю определителей.

$$\left|\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix} 2u_1 & \dots & 2u_n \\ 2u_1u_{11} & \dots & 2u_nu_{nn} \\ \dots & \dots & \dots \\ 2u_1u_{11}^{n-2} & \dots & 2u_nu_{nn}^{n-2} \end{matrix} & 0 & \dots \\
\hline
0 & \begin{matrix} 2v_1 & \dots & 2v_n \\ 2v_1u_{11} & \dots & 2v_nu_{nn} \\ \dots & \dots & \dots \\ 2v_1u_{11}^{n-2} & \dots & 2v_nu_{nn}^{n-2} \end{matrix} & \dots \\
\hline
0 & 0 & \text{якобиан из табл. I.I.}
\end{array}\right|$$

В первых трех столбцах определителя (I.I3) стоят частные производные выражений (I.IO) по u_a , в следующих n столбцах – производные по v_a , в остальных – по u_{aa} , v_{ab} . Если разделить k –е столбцы ($k=1,\dots,n$) на $2u_a$, $k+n$ –е – на $2v_a$, то получим в двух первых квадрантах по диагонали определители Ван-дер-Монда; определитель третьего квадранта не равен нулю по лемме I.2, так как он представляет собой якобиан инвариантов (I.II).

Таким образом, выражения (I.IO) представляют собой функциональный базис инвариантов алгебры вращений для двух тензоров ранга 2 и двух векторов.

Аналогично можно доказать, что набор инвариантов

$$R_k(u^r_a, u^1_{ab}) = u^r_{a_1} u^1_{a_1 a_2} \ldots u^1_{a_{k-1} a_k} u^r_{a_k},$$

$$r = 1, \ldots, m \; ; \; k = 1, \ldots, n, \tag{I.I4}$$

$$S_{jk}(u^1_{ab}, u^r_{ab}) = u^1_{a_1 a_2} \ldots u^1_{a_{j-1} a_j} u^r_{a_j a_{j+1}} \ldots$$

$$\ldots u^r_{a_j a_1}, \; k = 1, \ldots, n, \; j = 0, \ldots, k, \; r = 1, \ldots, m$$

является функциональным базисом дифференциальных инвариантов алгебры Евклида для m скалярных функций $u^1, \ldots, u^m$.

I.2. Дифференциальные инварианты второго порядка расширенной алгебры Евклида и конформной алгебры.

Расширенная алгебра Евклида для скалярной функции определяется как $AE(n) \dotplus D$, где

$$D = x_a \partial_a + \lambda u \partial_u . \tag{I.I5}$$

Для нахождения абсолютных дифференциальных инвариантов этой алгебры к определяющим уравнениям (I.6) необходимо добавить условие

$$\lambda F_u u + (\lambda - 1) u_a F_{u_a} + (\lambda - 2) u_{ab} F_{u_{ab}} = 0. \tag{I.16}$$

Решая уравнение (I.16) для

$$F = F(u, R_k(u_a, u_{ab}), S_k(u_{ab})),$$

получаем функциональный базис инвариантов

$$\frac{R_k(u_a, u_{ab})}{u^{k+1-2/\lambda k}}, \quad k = 1, \ldots, n;$$
$$\frac{S_k(u_{ab})}{u^{k-2/\lambda k}}, \quad k = 1, \ldots, n, \quad \lambda \neq 0. \tag{I.17}$$

Если $\lambda = 0$, то инварианты расширенной алгебры Евклида имеют следующий вид:

$$u, \quad \frac{R_k(u_a, u_{ab})}{(u_{aa})^k}, \quad k = 1, \ldots, n;$$
$$\frac{S_k(u_{ab})}{(u_{aa})^k}, \quad k = 2, \ldots, n. \tag{I.18}$$

Конформная алгебра $AC(n)$ задается базисными операторами ∂_a, J_{ab} (I.4), $\mathcal{D}$ (I.15) и

$$K_a = 2x_a \mathcal{D} - x_b x_b \partial_a. \tag{I.19}$$

Дифференциальные инварианты второго порядка алгебры $AC(n)$ определяются уравнениями (I.6) и (I.16),

$$k_a \overset{2}{K_a} F = 2 k_a x_a \lambda F_u u + 2 k_c x_c (\lambda - 1) u_a F_{u_a} +$$

$$+ 2 k_c u_c \delta_{ab} F_{u_{ab}} + (2\lambda - 2)(u_a k_b + u_b k_a) F_{u_{ab}} +$$

$$+ 2 k_c x_c (\lambda - 2) u_{ab} F_{u_{ab}} + 2 \lambda k_a u F_{u_a} +$$
$$+ 2 (k_a x_b - x_a k_b) u_b F_{u_a} + 4 u_{ac} (k_c x_b -$$
$$- k_b x_c) F_{u_{ab}} = 0$$

(k_a – произвольные действительные числа), которые эквивалентны системе уравнений (I.6), (I.I6) и

$$k_c u_c \delta_{ab} F_{u_{ab}} + (\lambda - 1)(k_a u_b + k_b u_a) F_{u_{ab}} + \lambda u k_a F_{u_a} = 0 \qquad (I.20)$$

Решение такой системы для произвольного n требует громоздких вычислений. Проще из u, u_a, u_{ab} построить конформно-ковариантные тензоры и затем из них строить инварианты алгебры вращений.

<u>Определение I.I</u>. Тензор θ_{ab} называется конформно-ковариантным, если

$$c_{ab} \overset{2}{J}_{ab} \theta_{cd} = - c_{ac} \theta_{ad} - c_{ad} \theta_{ac}, \quad \overset{2}{D} \theta_{ab} = \mu_1 \theta_{ab}, \qquad (I.2I)$$
$$k_c \overset{2}{K}_c \theta_{ab} = \mu_2 k_c x_c \theta_{ab} - \theta_{ac} (x_c k_b - x_b k_c) \mu_3.$$

Здесь $\overset{2}{X}$ – второе продолжение по Ли оператора X.

Приведем обобщение определения I.I.

<u>Определение I.2</u>. Тензоры ранга I и 2 (θ_a) и (θ_{ab}) называются ковариантными относительно некоторого расширения алгебры Евклида $AE(n) \oplus \{L_i\}$, если

$$L_i \theta_a = \sigma^i_{ab} \theta_b + \sigma^i \theta_a,$$

$$L_i \theta_{ab} = \rho^i_{ac} \theta_{cb} + \rho^i_{bc} \theta_{ac} + \rho^i \theta_{ab};$$

здесь ρ^i , σ^i – некоторые функции, σ^i_{ab} , ρ^i_{ab} – антисимметричные тензоры.

Лемма I.3. Выражения

$$S_k(\theta_{ab}) = \theta_{a_1 a_2} \ldots \theta_{a_{k-1} a_k} \theta_{a_k a_1},$$
$$R_k(\theta_a, \theta_{ab}) = \theta_{a_1} \theta_{a_k} \theta_{a_1 a_2} \ldots \theta_{a_1 a_k}, \qquad (I.22)$$
$$k = 1, \ldots, n,$$

где θ_a , θ_{ab} – тензоры, ковариантные относительно алгебры $AE(n) \oplus \{L_i\}$, являются относительными инвариантами этой алгебры.

Доказательство. Условия относительной $AE(n) \oplus \{L_i\}$ – -инвариантности имеют вид (из (0.9))

$$J_{ab} S_k = \overset{1}{\chi}_{ab}(x, u, u_c, u_{cd}) S_k,$$
$$J_{ab} R_k = \overset{2}{\chi}_{ab}(x, u, u_c, u_{cd}) R_k, \qquad (I.23)$$
$$L_i S_k = \overset{3}{\chi}_i(x, u, u_d, u_{cd}) S_k,$$
$$L_i R_k = \overset{4}{\chi}_i(x, u, u_c, u_{cd}) R_k.$$

Непосредственной подстановкой легко установить, что выражения (I.22) удовлетворяют условиям (I.23) и, следовательно, являются относительными инвариантами алгебры $AE(n) \oplus \{L_i\}$ (вместо операторов L_i , J_{ab} при необходимости поставляются соответствующие продолжения).

Количество функционально независимых инвариантов определяется рангом матрицы коэффициентов продолженных базисных операторов алгебры $AE(n) \ni \{L_i\}$.

Используя условие (I.20), легко показать, что при $\lambda \neq 0$ существует конформно-ковариантный тензор только второго порядка

$$\theta_{ab} = \lambda u_{ab} + (1-\lambda)\frac{u_a u_b}{u} + \frac{\lambda \delta_{ab}}{2-n}\left(u_{cc} - \frac{u_c u_c}{u}\right) \qquad (I.24)$$

(считаем, что $n \geqslant 3$).

Согласно леммы I.3 относительными инвариантами конформной алгебры $AC(n)$ с базисными операторами ∂_a, J_{ab}, D, K $(\lambda \neq 0)$ будут выражения $S_k(\theta_{ab})$, $k = 1, 2, \ldots, n$;
легко доказать, что при $\lambda \neq 0$ функциональный базис дифференциальных инвариантов второго порядка этой алгебры имеет вид

$$S_k(\theta_{ab}) \cdot u^{\left(\frac{2}{\lambda}-1\right)k}. \qquad (I.25)$$

В случае $\lambda = 0$ конформно-ковариантными будут тензоры u_a,

$$w_{ab} = u_c u_c \left(u_{ab} + \frac{\delta_{ab}}{2-n} u_{dd}\right) - u_c (u_a u_{bc} + u_b u_{ac});$$

функциональный базис инвариантов второго порядка имеет вид

$$S_k(w_{ab}) \cdot (u_a u_a)^{-2k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

$R_k(u_a, w_{ab})$ и $S_k(w_{ab})$ функционально зависимы.

Доказательство того факта, что построенные наборы инвариантов являются функциональными базисами, проводится аналогично п. I.I.

Инварианты конформной алгебры для m скалярных функций строятся из соответствующих конформно-ковариантных тензоров. Эти тензоры строятся для каждой из функций таким же способом, как и θ_{ab}, w_{ab}.

Используя лемму I.I, можно показать, что ранг дважды продолженной алгебры $AC(n)$ равен $\frac{n(n-1)}{2} + n + 1$.

Для конформной алгебры, задаваемой базисными операторами ∂_a, J_{ab} и

$$\begin{aligned} D &= x_a \partial_a - \lambda u_r \partial_{u_r}, \quad r = 1, \dots, m, \\ K_a &= 2x_a D - x_b x_b \partial_a, \quad a, b = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{I.26}$$

получаем m ковариантных тензоров второго порядка $(\lambda \neq 0)$

$$\theta^r_{ab} = \lambda u^r_{ab} + (1-\lambda)\frac{u^r_a u^r_b}{u^r} + \frac{\lambda \delta_{ab}}{2-n}\left(u^r_{cc} - \frac{u^r_c u^r_c}{u^r}\right) \tag{I.27}$$

и $m-1$ ковариантных тензоров первого порядка

$$\theta^r_a = \frac{u^r_a}{u^r} - \frac{u^1_a}{u^1}, \quad r = 2, \dots, m \tag{I.28}$$

(по r нет суммирования).

Тогда относительные инварианты такой алгебры имеют вид

$$S_{jk}\left(\theta^1_{ab}, \theta^r_{ab}\right), \ r = 2, \dots, m; \ j = 0, \dots, k, \ k = 1, \dots, n;$$

$$R_k\left(\theta^r_a, \theta^1_{ab}\right), \ r = 2, \dots, m; \ k = 1, 2, \dots, n;$$

а абсолютные получаются из них аналогично (I.25).

При $\lambda = 0$ относительные инварианты образуются из u^r_a,

$$w^r_{ab} = u^r_c u^r_c \left(u^r_{ab} + \frac{\delta_{ab}}{2-n} u^r_{dd}\right) - u^r_c\left(\cancel{u^r_a u^r_{bc}} + u^r_b u^r_{ac}\right)$$

и имеют вид

$$S_{jk}\left(w^r_{ab}, w^1_{ab}\right),$$

$$R_k\left(u^r_a, w^1_{ab}\right), \ r = 2, \dots, m, \ j = 0, 1, \dots, k, \ k = 1, \dots, n;$$

функциональный базис абсолютных дифференциальных инвариантов строится из них аналогично (I.18).

I.3. Дифференциальные инварианты алгебры Пуанкаре и конформной алгебры.

Полученные в пп. I.I, I.2 результаты позволяют легко построить функциональные базисы абсолютных инвариантов алгебры Пуанкаре с базисными операторами (I.2) и ее расширений для набора скалярных функций u^r:

$$A\tilde{P}(1,n) = AP(1,n) \oplus \mathcal{D};$$

$$\mathcal{D} = x_\mu p_\mu + i\lambda u^r \partial_{u^r}, \qquad \text{(I.29)}$$

$$AC(1,n) = A\tilde{P}(1,n) \oplus \{K_\mu\},$$

$$K_\mu = 2x_\mu \mathcal{D} - x_\nu x^\nu p_\mu, \quad \mu,\nu = 0,\ldots,n.$$

Для алгебры $AP(1,n)$ функциональный базис абсолютных инвариантов имеет вид

$$S_{jk}(u^r_{\mu\nu}, u^1_{\mu\nu}) = u^1_{\mu_1\mu_2} u^1_{\mu_2\mu_3} \ldots u^1_{\mu_{j-1}\mu_j} \times$$
$$\times u^r_{\mu_j\mu_{j+1}} \ldots u^r_{\mu_{k-1}\mu_k} u^r_{\mu_k\mu_1},$$

$$R_k(u^r_\mu, u^1_{\mu\nu}) = u^r_{\mu_1} u^r_{\mu_k} u^1_{\mu_1\mu_2} u^1_{\mu_2\mu_3} \ldots$$
$$\ldots u^1_{\mu_{k-1}\mu_k}, \qquad j = 0, 1, \ldots, k,$$

$$k = 1, \ldots, n+1, \quad r = 1, \ldots, m;$$

для расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1,n)$:

$$\lambda \neq 0: \quad \frac{u^r}{u^1}, \quad S_{jk}(u^r_{\mu\nu}, u^1_{\mu\nu})(u^1)^{k(\frac{2}{\lambda}-1)},$$

$$R_k(u^r_\mu, u^1_\mu)(u_1)^{\frac{2k}{\lambda}-k-1},$$

$$\lambda = 0: \quad u^r, \quad S_{jk}(u^r_{\mu\nu}, u^1_{\mu\nu})(u_{\alpha\alpha})^{-k},$$

$$R_k(u^r_\mu, u^1_{\mu\nu})(u^1_{\alpha\alpha})^{-k},$$

$$j = 0, 1, \ldots, k, \quad k = 1, \ldots, n+1, \quad r = 1, \ldots, m;$$

конформной алгебры $AC(1,n)$:

$$\lambda \neq 0: \quad S_{jk}(\theta^r_{\mu\nu}, \theta^1_{\mu\nu})(u^1)^{k(\frac{2}{\lambda}-1)},$$

$$\frac{u^r}{u^1}, \quad R_k(\theta^r_\mu, \theta^1_{\mu\nu})(u^1)^{\frac{2k}{\lambda}-k-1},$$

$$j = 0, 1, \ldots, k, \quad k = 1, \ldots, n+1, \quad r = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\lambda = 0: \quad u^r, \quad S_{jk}(w^r_{\mu\nu}, w^1_{\mu\nu})(u^1_\beta u^1_\beta)^{-2k},$$

$$R_k(u^r_\mu, w^1_{\mu\nu})(u^1_\beta u^1_\beta)^{-2k},$$

$$j = 0, 1, \ldots, k, \quad k = 1, \ldots, n+1,$$

$$r = 2, \ldots, m.$$

где ковариантные тензоры имеют вид

$$\theta^r_{\mu\nu} = \lambda u^r_{\mu\nu} + (1-\lambda)\frac{u^r_\mu u^r_\nu}{u^r} + \frac{\lambda g_{\mu\nu}}{1-n} \times$$
$$\times \left(u^r_{\beta\beta} - \frac{u^r_\beta u^r_\beta}{u^r}\right);$$
$$\theta^r_\mu = \frac{u^r_a}{u^r} - \frac{u^1_a}{u^1};$$

$$w^r_{\mu\nu} = u^r_\beta u^r_\beta \left(u^r_{\mu\nu} + \frac{g_{\mu\nu}}{1-n} u^r_{\alpha\alpha}\right) - u^r_\beta \cdot (u^r_{\beta\mu} u^r_\nu + u^r_{\beta\nu} u_\mu)$$

(по r нет суммирования).

Используя замену

$$x_0' = -i x_0$$

и результаты предыдущих пунктов, легко показать, что приведенные системы инвариантов являются полными и независимыми.

§ 2. Инвариантные волновые уравнения для комплексного скалярного поля

В квантовой теории для описания заряженного скалярного поля [6] используется уравнение Даламбера для комплексной функции. В настоящем параграфе исследованы симметрийные свойства нелинейного волнового уравнения

$$\Box u + F(u, u^*, u_\alpha, u^*_\alpha) = 0, \qquad (2.1)$$

$$\Box u^* + F^*(u, u^*, u_\alpha, u^*_\alpha) = 0;$$

и его обобщения

$$L(u, u^*, u_\alpha, u^*_\alpha, u_{\alpha\beta}, u^*_{\alpha\beta}) = g_{\mu\nu}(u, u^*, u_\alpha, u^*_\alpha)\times$$

$$\times u_{\mu\nu} + \tilde{g}_{\mu\nu}(u, u^*, u_\alpha, u^*_\alpha)u^*_{\mu\nu} + b(u, u^*, u_\alpha, u^*_\alpha) = 0, \qquad (2.2)$$

$$L^*(u, u^*, u_\alpha, u^*_\alpha, u_{\alpha\beta}, u^*_{\alpha\beta}) = 0.$$

Здесь $u = u(x)$ – комплексная функция действительной переменной $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$; звездочка означает комплексное сопряжение. Все рассматриваемые функции будем считать дифференцируемыми необходимое число раз.

Далее опишем уравнения вида (2.1) и (2.2), инвариантные относительно естественных расширений алгебры Пуанкаре $AP(1,n) \equiv \langle P_\mu, J_{\mu\nu} \rangle = A$ (1.2) с такими базисными операторами: $(n \geqslant 3)$

$A_1 = A \oplus Q$, где Q – оператор заряда

$$Q = u^* P_u - u P_{u^*}, \quad P_u = -i\frac{\partial}{\partial u}, \quad P_{u^*} = -i\frac{\partial}{\partial u^*}; \qquad (2.3)$$

$$A_2^{(1)} = A \oplus \mathcal{D}_1, \quad A_2^{(2)} = A \oplus \mathcal{D}_2,$$

где оператор дилатации имеет вид

$$\mathcal{D}_1 = x_\mu P_\mu - \lambda(u P_u + u^* P_{u^*}) \quad \text{или} \qquad (2.4)$$

$$\mathcal{D}_2 = x_\mu p_\mu - \lambda(p_u + p_{u^*}); \qquad (2.5)$$

$$A_3 = A_2^{(1)} \oplus Q, \quad A_4^{(k)} = A^{(k)}C(1,n) = AP(1,n) \oplus$$

$$\oplus \{K_\mu^{(k)}, \mathcal{D}^{(k)}\}, \quad k = 1,2; \quad A_5 = A_4^{(1)} \oplus Q;$$

$K_\mu^{(k)}$ – операторы, порождающие конформные преобразования

$$K_\mu^{(1)} = 2x_\mu \mathcal{D}_1 - x_\nu x_\nu p_\mu, \qquad (2.6)$$

$$K_\mu^{(2)} = 2x_\mu \mathcal{D}_2 - x_\nu x_\nu p_\mu. \qquad (2.7)$$

Мы будем строить уравнения вида (2.I), (2.2) с помощью инвариантов этих алгебр. Как хорошо известно [3, 9], дифференциальные инварианты нулевого и первого порядка будут решениями системы

$$\overset{1}{X}_i \Phi(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*) = 0, \qquad (2.8)$$

где $\overset{1}{X}_i$ – первые продолжения базисных операторов соответствующей алгебры. Для отыскания квазилинейных дифференциальных инвариантов второго порядка необходимо найти все линейно независимые решения уравнения

$$\overset{2}{X}_i W(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*, u_{\alpha\beta}, u_{\alpha\beta}^*) = 0, \qquad (2.9)$$

где $W(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*, u_{\alpha\beta}, u_{\alpha\beta}^*) =$

$$= q^{\mu\nu}(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*)u_{\mu\nu} + \tilde{q}_{\mu\nu}(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*)u_{\mu\nu}^* + b(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*), \qquad (2.10)$$

$\overset{2}{X}_i$ – вторые продолжения базисных операторов.

Приведем полученные наборы инвариантов первого порядка:

$$A:\quad u,\ u^*,\ z_1 = u_\alpha u_\alpha,\ z_2 = u^*_\alpha u_\alpha,\ z_3 = u^*_\alpha u^*_\alpha;$$

$$A_1:\quad u^2 + u^{*2},\ z_1 + z_3,\ z_2^2 - z_1 z_3,$$

$$\Omega = z_1 u^{*2} - 2uu^* z_2 + u^2 z_3;$$

$$A_2^{(1)}:\quad \frac{u}{u^*},\ \frac{z_1}{z_2},\ \frac{z_3}{z_2},\ \frac{z_1^{\lambda}}{u^{2(\lambda-1)}};$$

$$A_2^{(2)}:\quad u - u^*,\ \frac{z_1}{z_2},\ \frac{z_3}{z_2},\ z_1^{\frac{\lambda}{2}} \exp u; \tag{2.II}$$

$$A_3:\quad \frac{(z_1+z_3)^{\lambda}}{(u^2+u^{*2})^{\lambda-1}},\ \frac{z_2^2 - z_1 z_3}{(z_1+z_3)^{\lambda}},\ \frac{\Omega}{(u^2+u^{*2})(z_1+z_3)};$$

$$A_4^{(1)}\ (\lambda \neq 0):\quad \frac{u}{u^*},\ \frac{\Omega}{u^{4-2/\lambda}};$$

$$A_4^{(1)}\ (\lambda = 0):\quad u,\ u^*,\ \frac{z_1}{z_2},\ \frac{z_3}{z_2};$$

$$A_4^{(2)}\ (\lambda \neq 0):\quad u - u^*,\ (z_1 + z_3 - 2z_2)^{\lambda/2} \exp u;$$

$$A_5\ (\lambda \neq 0):\quad \Omega\,(u^2 + u^{*2})^{1/\lambda - 2};$$

$$A_5\ (\lambda = 0):\quad u^2 + u^{*2},\ \frac{z_2^2 - z_1 z_3}{(z_1+z_3)^2},\ \frac{\Omega}{z_1+z_3}.$$

Теорема 2.I. Выражения (2.II) представляют собой функциональные базисы дифференциальных инвариантов первого порядка соответствующих алгебр для комплексной скалярной функции.

Доказательство проведем для алгебры Пуанкаре. Искомые инварианты вида

$$F = F\,(u,\ u^*,\ u_\alpha,\ u^*_\alpha)$$

зависят от $2n+4$ переменных и определяются из уравнений

$$\overset{1}{J}_{\mu\nu} F = F_{u_\mu} u_\nu - F_{u_\nu} u_\mu + F_{u^*_\mu} u^*_\nu - \qquad (2.12)$$

$$- F_{u^*_\nu} u^*_\mu = 0 , \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, n.$$

Из уравнения (2.12) находим инварианты u, u^*, z_1, z_2, z_3 (2.11). Легко доказать, что они функционально независимы. Найдем ранг матрицы коэффициентов операторов $\overset{1}{J}_{\mu\nu}$:

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
u_1 & u_0 & 0 & \dots & & 0 & u_1^* & u_0^* & 0 & \dots & & 0 \\
u_2 & 0 & u_0 & \dots & & 0 & u_2^* & 0 & u_0^* & \dots & & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
u_n & 0 & 0 & \dots & & u_0 & u_n^* & 0 & 0 & \dots & & u_0^* \\
\hline
0 & -u_2 & u_1 & \dots & & 0 & 0 & -u_2^* & u_1^* & \dots & & 0 \\
0 & -u_3 & 0 & \dots & & 0 & 0 & -u_3^* & 0 & \dots & & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & -u_n & 0 & \dots & & u_1 & 0 & -u_n^* & 0 & \dots & & u_1^* \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \dots & & u_{n-1} & 0 & 0 & \dots & & -u_n^* & u_{n-1}^*
\end{array}\right] \qquad (2.13)$$

Матрица (2.13) состоит из n полос вида

$$\left[\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
0 & \dots & 0 & -u_k & u_{k-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -u_k^* & u_{k-1}^* & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & -u_{k+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -u_{k+1}^* & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \dots & 0 & -u_n & 0 & \dots & u_{k-1} & 0 & \dots & 0 & -u_n^* & 0 & \dots & u_{k-1}^*
\end{array}\right]$$

Если $\ell+1$ -ю строку ($\ell = 1, \ldots, n-k$) k -й полосы умножить на u_k и затем вычесть из нее первую, умноженную на u_{k-1} , а после разделить на $u_{k+\ell}$, то получим матрицу, состоящую из полос вида

$$\left[\begin{array}{c|ccccc|c|cccc}
 & -u_k & u_{k-1} & 0 & \ldots & 0 & & -u_k^* & u_{k-1}^* & 0 \ \ldots & 0 \\
 & 0 & -u_{k+1} & u_k & \ldots & 0 & & -\frac{1}{u_{k-1}}(u_{k+1}^* u_k - u_k^* u_{k+1}) & -\frac{u_{k-1}^* u_{k+1}}{u_{k-1}} & \frac{u_{k-1}^* u_k}{u_{k-1}} \ \ldots & 0 \\
 & 0 & -u_{k+2} & 0 & \ldots & 0 & & & & & \\
0 & & & & & & 0 & & & & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & 0 & -u_n & 0 & \ldots & u_k & & -\frac{1}{u_{k-1}}(u_n^* u_k - u_k^* u_n) & -\frac{u_{k-1}^* u_n}{u_{k-1}} & 0 \ \ldots & \frac{u_{k-1}^* u_k}{u_{k-1}}
\end{array}\right]$$

Если теперь вычесть из преобразованной таким образом k -й полосы $k+1$ -ю исходной матрицы (из всех строк, кроме первой, вычесть соответствующие строки $k+1$ -й полосы), а затем умножить эти строки на u_{k-1}, то получим из (2.13) матрицу, состоящую из полос вида

$$\left[\begin{array}{cccccccc|ccccc}
0 & \ldots & 0 & -u_k & u_{k-1} & 0 & \ldots & 0 & -u_k^* & u_{k-1}^* & 0 & \ldots & 0 \\
\hline
 & & & & & & & & W_{k+1,k} & W_{k+1,k-1} & W_{k-1,k} & \ldots & 0 \\
 & & & & & & & & W_{k+2,k} & W_{k+2,k-1} & 0 & \ldots & 0 \\
 & & & & 0 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & & & & W_{n,k} & W_{n,k-1} & 0 & \ldots & W_{k-1,k}
\end{array}\right]$$

где $W_{m,n} = u_m^* u_n - u_m u_n^*$.

Преобразуя эту полосу (кроме первой строки) аналогично предыдущему рассуждению, получаем полосу, в которой во всех строках, кроме двух первых, стоят нули.

Выписав сначала первые строки всех полос (n -я содержит всего одну строку), а затем вторые, получим матрицу

$$
\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
-u_1 & u_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -u_1^* & u_0^* & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & -u_2 & u_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & -u_2^* & u_1^* & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & -u_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_3^* & \dots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \dots & u_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & u_{n-2}^* & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & -u_n & u_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & u_n^* & u_{n-1}^* \\
\hline
 & & & & & & -W_{1,2} & W_{2,0} & W_{0,1} & \dots & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & -W_{2,3} & W_{3,1} & \dots & 0 & 0 \\
 & & O & & & & 0 & 0 & -W_{3,4} & \dots & 0 & 0 \\
 & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & W_{n-3,n-1} & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & W_{n,n-2} & W_{n-1,n}
\end{array}\right]
$$

Вычеркивая n -й и два последних столбца, мы получаем треугольную матрицу с неравными нулю элементами на диагонали; значит, ее ранг и ранг матрицы (2.I3) равен $2n-1$ и количество независимых инвариантов первого порядка равно $2n+4-(2n-1)=5$. Таким образом, 5 функционально независимых инвариантов алгебры $AP(1,n)$ (2.II) представляют собой базис инвариантов первого порядка этой алгебры.

Для расширений алгебры Пуанкаре теорема 2.I доказывается аналогично.

Решая систему уравнений (2.9) для рассматриваемых алгебр, получаем для них базис квазилинейных инвариантов второго порядка

$$A:\ \square u,\quad R_1 = u_\alpha u_\beta u_{\alpha\beta},\quad R_2 = u_\alpha u^*_\beta u_{\alpha\beta},$$

$$R_3 = u^*_\alpha u^*_\beta u_{\alpha\beta},\quad \square u^*,\quad R_4 = u_\alpha u_\beta u^*_{\alpha\beta},$$

$$R_5 = u_\alpha u^*_\beta u^*_{\alpha\beta},\quad R_6 = u^*_\alpha u^*_\beta u^*_{\alpha\beta};$$

$$A_1:\ H_1 = u\square u + u^*\square u^*,\quad H_2 = i(u\square u^* - u^*\square u),$$

$$H_3 = M(-R_1 + R_3 + 2R_5) + N(-R_6 + R_4 + 2R_2),$$

$$H_4 = i[N(-R_1 + R_3 + 2R_5) - M(-R_6 + R_4 + 2R_2)],$$

$$H_5 = u(R_1 + R_3) + u^*(R_4 + R_6),$$

$$H_6 = i[u^*(R_1 + R_3) - u(R_4 + R_6)],$$

$$H_7 = u(R_3 - R_5) + u^*(R_4 - R_2),\quad H_8 = i[u(R_4 - R_2) -$$

$$u^*(R_3 - R_5)]\quad (M = u^3 - 3u^{*2}u,\ N = u^{*3} - 3u^*u^2);$$

$$A_2^{(1)}:\ \frac{u\square u}{z_1},\quad \frac{u^*\square u^*}{z_3},\quad \frac{u R_i}{z_2^2},\quad i = 1,\dots,6;$$

$$A_3:\ \frac{H_1}{r_1+r_3},\quad \frac{H_2}{r_1+r_3},\quad \frac{H_3}{(u^{*2}+u^2)(r_1+r_3)^2},\quad \frac{H_4}{(u^{*2}+u^2)(r_1+r_3)^2},$$
$$\frac{H_i}{(r_1+r_3)^2},\quad i=5,\dots,8;$$

$$A_4^{(1)}\ (\lambda\neq 0):\quad Y_1 = u^{\frac{2}{\lambda}-2}\left\{2u\Box u - \frac{2\lambda+n-1}{\lambda}\, r_1\right\},\quad Y_2 = Y_1^*,$$
$$Y_3 = (uu^*)^{\frac{2}{\lambda}-4}u^2\left\{2(1-\lambda)(r_1u^*-r_2u)^2+2\lambda u(u^{*2}R_1 - 2uu^*R_2+u^2R_3)-r_1\Omega\right\},\quad Y_4 = Y_3^*;$$

$$A_4^{(1)}\ (\lambda=0):\quad Z_1=\frac{1}{r^2}\left(r\Box u+(n-1)R_1\right),\quad Z_2=\frac{1}{r_2^2}\left(r_1\Box u^*+(n-1)R_2\right),\quad Z_3=\frac{1}{r_2^2}\left(-r_3\Box u+2r_2\Box u^*+(n-1)R_3\right),$$
$$Z_4=Z_3^*,\quad Z_5=Z_2^*,\quad Z_6=Z_1^*;$$

$$A_4^{(2)}\ (\lambda\neq 0):\quad \hat Y_1=\exp\left(\tfrac{2}{\lambda}u\right)\left\{4\Box u+r_1(5-2\lambda-n)\right\},\quad \hat Y_3=\exp\left(\left(\tfrac{2}{\lambda}-2\right)(u+u^*)+4u\right)\left\{2(r_1-r_2)^2+2\lambda(R_1-2R_2+R_3)-r_1(r_1-2r_2+r_3)\right\},\quad \hat Y_2=\hat Y_1^*,\quad \hat Y_4=\hat Y_3^*; \qquad (2.14)$$

$$A_5\ (\lambda\neq 0):\quad \frac{u^2+u^{*2}}{\Omega}\left\{u\Box u+u^*\Box u^*-\frac{2\lambda+n-1}{2\lambda}(r_1+r_3)\right\},$$
$$\frac{u^2+u^{*2}}{\Omega}\left\{2\lambda uT+2\lambda u^*T^*+2(1-\lambda)\left[(r_1u^*-r_2u)^2-(r_3u-r_2u^*)^2\right]-(r_1+r_3)\Omega\right\},$$
$$\frac{u^2+u^{*2}}{\Omega^2}\left\{(2\lambda-1)(u^*\Box u-u\Box u^*)-(2\lambda+n-1)(u^*T-uT^*)\right\}\quad (T=u^{*2}R_1-2uu^*R_2+u^2R_3);$$

$$A_5\ (\lambda=0):\ \frac{r_2^2}{(r_1+r_3)^2}\left\{M(-Z_1+Z_3+2Z_5)+N(-Z_6+Z_4+2Z_2)\right\},$$

$$\frac{i\, r_2^2}{(r_1+r_3)^2}\{N(-Z_1+Z_3+2Z_5)-M(-Z_6+Z_4+2Z_2)\},$$

$$\frac{r_2^2}{(r_1+r_3)^2}\{u\,(Z_1+Z_3)+u^*(Z_4+Z_6)\},$$

$$\frac{i\, r_2^2}{(r_1+r_3)^2}\{u^*(Z_1+Z_3)-u\,(Z_6+Z_4)\},$$

$$\frac{r_2^2}{(r_1+r_3)^2}\{u\,(Z_3-Z_5)+u^*(Z_4-Z_2)\},$$

$$\frac{i\, r_2^2}{(r_1+r_3)^2}\{u^*(Z_3-Z_5)-u\,(Z_4-Z_2)\};$$

r_i , Ω_2 определяются по формулам (2.II). Приведенные системы инвариантов являются полными при $n \geq 3$. Докажем это утверждение для алгебры Пуанкаре.

Теорема 2.2. Инварианты $\Box u$, $\Box u^*$, R_1 , ... , R_6 (2.I4) представляют собой базис квазилинейных инвариантов второго порядка алгебры Пуанкаре.

Доказательство. Будем искать общий вид инварианта алгебры Пуанкаре вида (2.I0), то есть покажем, что любой такой инвариант есть линейная комбинация инвариантов $\Box u$, $\Box u^*$, R_1 , ..., R_6 . Из (2.9), $\overset{2}{X}=c_{\mu\nu}\,\overset{2}{J}_{\mu\nu}$, получаются определяющие уравнения на коэффициенты $g^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu *}$:

$$g^{\mu\nu}_{u_\alpha}\,c_{\alpha\beta}\,u_\beta+g^{\mu\nu}_{u^*_\alpha}\,c_{\alpha\beta}\,u^*_\beta+g^{\alpha\nu}c_{\alpha\mu}+g^{\mu\alpha}c_{\alpha\nu}=0, \qquad (2.I5)$$

$$g^{*\mu\nu}_{u_\alpha}\,c_{\alpha\beta}\,u_\beta+g^{*\mu\nu}_{u^*_\alpha}\,c_{\alpha\beta}\,u^*_\beta+g^{*\alpha\nu}c_{\alpha\mu}+g^{*\mu\alpha}c_{\alpha\nu}=0.$$

Из (2.I5) находим, что

$$g^{00}_{u_k}\,c_{ke}\,u_e+g^{00}_{u^*_k}\,c_{ke}\,u^*_e=0,$$

откуда $g^{00} = g^{00}(u, u^*, r_1, r_2, r_3, u_0, u_0^*)$, где r_i имеют вид (2.II). Аналогично можно показать, что для всех $\mu, \nu = 0,\dots,n$ $g^{\mu\nu}$ однозначно представляется в виде

$$g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(u, u^*, r_1, r_2, r_3, u_\mu, u^*_\mu, u_\nu, u^*_\nu). \quad (2.16)$$

Из (2.I5) получаем следующие соотношения ($g^{\mu\nu}$ имеют вид (2.I6)):

$$2 g^{0k} = g^{00}_{u_0} u_k + g^{00}_{u_0^*} u_k^*, \quad (2.17)$$

$$g^{k0}_{u_e} c_{k0} u_0 + g^{k0}_{u_0} c_{0e} u_e + g^{k0}_{u_0^*} u_e^* c_{0e} + \quad (2.18)$$

$$+ g^{k0}_{u_e^*} c_{e0} u_0^* + g^{00} c_{0k} + g^{ek} c_{e0} = 0.$$

Подставив (2.I7) в (2.I8), получаем при

$$g^{00}_{u_0} u_0 - g^{00}_{u_0 u_0} u_k^2 - 2 g^{00}_{u_0^* u_0} u_k u_k^* + g^{00}_{u_0^* u_0^*} u_k^{*2} +$$

$$+ g^{00}_{u_0^*} u_0^* + 2 g^{kk} - 2 g^{00} = 0,$$

откуда, учитывая (2.I6)

$$2 g^{00} = g^{00}_{u_0} u_0 + g^{00}_{u_0^*} u_0^* + S^1(u, u^*, r_1, r_2, r_3),$$

$$2 g^{kk} = g^{00}_{u_0 u_0} u_k^2 + 2 g^{00}_{u_0 u_0^*} u_k u_k^*.$$

S^1 - произвольная функция.

Введем обозначения

$$g^{00}_{u_0 u_0} = a(u, u^*, r_1, r_2, r_3),$$

$$g^{00}_{u_0 u_0^*} = b(u, u^*, r_1, r_2, r_3),$$

$$g^{00}_{u_0^* u_0^*} = c(u, u^*, r_1, r_2, r_3).$$

Тогда

$$g^{00} = a u_0^2 + b u_0 u_0^* + c u_0^{*2} + s^1,$$
$$g^{kk} = a u_k^2 + b u_k u_k^* + c u_k^{*} + s^1 \qquad (2.19)$$

(по k нет суммирования).

Аналогично находим, что

$$g^{k0} = 2a u_0 u_k + b(u_0 u_k^* + u_0^* u_k) + 2c u_0^* u_k^*,$$
$$g^{kl} = 2a u_k u_l + b(u_k u_l^* + u_k^* u_l) + 2c u_k^* u_l^*, \qquad (2.20)$$
$$g^{*\mu\nu} = 2d u_\mu u_\nu + l(u_\mu u_\nu^* + u_\mu^* u_\nu) + 2g u_\mu^* u_\nu^* \quad (\mu \neq \nu),$$
$$g^{*\mu\nu} = d u_\mu^2 + e u_\mu u_\mu^* + g u_\mu^{*2} + s_2$$

(суммирование по μ не предполагается; d, e, g, s_2 – функции от u, u^*, z_1, z_2, z_3).

Из (2.19), (2.20) получается максимальная система независимых дифференциальных инвариантов второго порядка, линейных по вторым производным: $\Box u, \Box u^*, R_1, \ldots, R_6$ (2.14).

Соответствующие утверждения для других рассматриваемых алгебр доказываются аналогично.

Симметрийные свойства уравнения 2.1 относительно алгебр A, A_1, ..., A_5 описывает следующая теорема.

Теорема 2.3. Система (2.1) инвариантна относительно алгебр
A, если $F = \varphi(\omega)$;

A_1, если $F = f(\omega) u + i g(\omega) u^*$;

$A_2^{(1)}$, если $F = u^{1-2/\lambda} \varphi(\omega)$;

$A_2^{(2)}$, если $F = \exp u \cdot \varphi(\omega)$;

A_3, если $F = (u^2 + u^{*2})^{-1/\lambda} (u f(\omega) + i u^* g(\omega))$;

$A_4^{(1)}$, если $F = \frac{2\lambda + n - 1}{2\lambda u} r_1 + u^{1-2/\lambda} \varphi(\omega)$ $(\lambda \neq 0)$

(при $\lambda = 0$ инвариантных уравнений вида (2.I) не существует);

$A_4^{(2)}$, если $F = (u^2 + u^{*2})^{\frac{2}{n-1}} (u f(\omega) + i u^* g(\omega))$, $\lambda = \frac{2}{n-1}$

(при $\lambda \neq \frac{2}{n-1}$ инвариантных уравнений вида (2.I) не существует);

A_5, если $F = \frac{n-1}{2\lambda} r_1 + \exp\left(-\frac{2}{\lambda} u\right) \varphi(\omega)$ $(\lambda \neq 0)$

(здесь через f и g обозначены произвольные действительные функции, через φ – произвольные комплексные функции, – инварианты (2.II) соответствующих алгебр).

Для доказательства теоремы используется лиевское условие инвариантности

$$\overset{2}{X}_i L \Big|_{\substack{L=0 \\ L^*=0}} = 0, \quad L = \Box u - F,$$

которое разрешается относительно неизвестной функции F при заданных базисных операторах алгебр A, A_1, ..., A_5.

Перейдем к описанию инвариантных уравнений вида (2.2).

<u>Определение 2.I</u>. Две системы уравнений

$$L_1 = 0, \quad L_1^* = 0;$$

$$L_2 = 0, \quad L_2^* = 0,$$

где L_1, L_2 имеют вид (2.2), называем эквивалентными с точностью до решений уравнений первого порядка или просто эквивалентными, если они представимы в виде

$$L_1 = f L_2 + g L_2^*,$$

$$L_1^* = f^* L_2^* + g^* L_2;$$

здесь $ff^* - gg^* \neq 0$; f , g зависят от u , u^* , u_α, u_α^*,.

Сформулируем критерий инвариантности, применимый к алгебрам A , A_1 , ... , A_5 и уравнениям (2.2), в терминах теории инвариантных многообразий.

Рассмотрим в метрическом пространстве (y , v) многообразие (A) , линейное по v

$$\begin{gathered} A^i = a^i_k(y)\, v^k + b^i(y) = 0, \\ i = 1, \dots, r; \ k = 1, \dots, m; \ y = (y^1, \dots, y^r), \\ r \leq m; \quad \operatorname{rang} \left(a^i_k(y)\right)^{i=1,\dots,r}_{k=1,\dots,m} = r \end{gathered} \tag{2.21}$$

в рассматриваемой области значений y .

<u>Определение 2.2</u>. Два многообразия вида (2.21)

$$(A):\ A^i = 0 \qquad \text{и} \qquad (B):\ B^i = 0$$

назовем эквивалентными, если

$$A^i = c^i_k(y)\, B^k, \ \det\{c^i_k(y)\}_{i,k=1,\dots,r} \neq 0.$$

Пусть инфинитезимальные операторы алгебры $\{\overset{\ell}{X}\}$ имеют вид

$$\overset{\ell}{X} = \overset{\ell}{\xi}{}^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i} + \overset{\ell}{\eta}{}^j_k(y)\, v_j \frac{\partial}{\partial v_k} \tag{2.22}$$

Справедливо следующее утверждение.

<u>Лемма 2.1</u>. Пусть $\{\overset{\ell}{X}\}$, $\ell = 1, \dots, N$ – алгебра операторов вида (2.2) для системы (2.21) $r \leq f$, где f – количество линейно независимых абсолютных инвариантов (линейных по v) алгебры $\{\overset{\ell}{X}\}$. Тогда система (2.21) $\{\overset{\ell}{X}\}$ -инвариантна только в случае,

если существует система

$$(B): \quad (B_i)=0,$$

эквивалентная (2.2I) (A) и такая, что

$$\overset{\ell}{X} B_i = 0 \tag{2.23}$$

для всех i, ℓ.

<u>Доказательство</u>. Очевидно, что любая система, эквивалентная (B), инвариантна относительно алгебры $\{\overset{\ell}{X}\}$. Если система (2.2I) инвариантна относительно операторов $\{\overset{\ell}{X}\}$, то выполняются соотношения

$$\overset{\ell}{X} A_i = \overset{\ell i}{\lambda_j} A^j, \tag{2.24}$$

где $\overset{\ell i}{\lambda_j}$ – некоторые функции от y.

Пусть (A) эквивалентна (B), тогда

$$\overset{\ell}{X} A^i = \overset{\ell}{X}\left(c^i_k(y) B^k\right) = \overset{\ell i}{\lambda_j}(y)\, c^j_k(y)\, B^k. \tag{2.25}$$

Если (B) удовлетворяет условию (2.23), то выполняются и (2.25); то есть любая система эквивалентная (B), инвариантна относительно операторов $\overset{\ell}{X}$.

Для $\overset{\ell}{X}$ из условия (2.24) следует (2.23), если

$$\overset{\ell}{X} c^i_k(y) = \overset{\ell i}{\lambda_j}(y)\, c^j_k(y), \quad i, j, k = 1, \dots, r.$$

Если искать c^i_k в виде $c^i_k(y) = a^i_j(y)\, d^j_k(y)$, то для d^j_k должны выполняться соотношения

$$\overset{\ell}{X} d_k^j(y) + \eta_k^{\ell s}(y) d_s^j(y) \doteq 0,$$

представляющие собой уравнения на коэффициенты линейных инвариантов алгебры $\{\overset{\ell}{X}\}$: $\omega_j = d_k^j(y) v_k + d^j(y)$.

Если существует $f \geq r$ линейно независимых инвариантов такого вида, то существует и набор функций $c_k^i(y)$:

$$\det\{c_k^i(y)\} = \det\{a_j^i(y)\} \det\{d_k^j(y)\} \neq 0,$$

и многообразие (A) представляется в виде

$$A^i = c_k^i B^k \qquad , \text{ где } \quad \overset{\ell}{X} B_k = 0$$

что и требовалось доказать.

Ясно, что инвариантные многообразия могут существовать и в случае, когда $f < r$, но тогда задача их описания является более сложной.

Сформулированное относительно действительных многообразий утверждение легко переносится на случай системы уравнений для комплекснозначной функции.

<u>Теорема 2.4</u>. Если для алгебры с базисными операторами

$$\overset{\ell}{X} = \xi_\mu^\ell(x) \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \left(\eta^{\ell 1}(x) u + \eta^{\ell 2}(x) u^*\right) \frac{\partial}{\partial u} \qquad (2.26)$$
$$+ \left(\eta^{\ell 3}(x) u + \eta^{\ell 4}(x) u^*\right) \frac{\partial}{\partial u^*}$$

существует не менее двух абсолютных инвариантов вида (2.10), то система (2.2) инвариантна относительно этой алгебры только в случае, если она эквивалентна следующей системе:

$$d_i(\omega) W^i + \alpha(\omega) = 0,$$

$$d_i^*(\omega) W^{*i} + \alpha^*(\omega) = 0;$$

где ω – дифференциальные инварианты первого порядка, W^i – инварианты второго порядка вида (2.10) соответствующих алгебр.

Алгебры A, A_1, ..., A_5 удовлетворяют условию (2.26), поэтому для них справедлива теорема 2.4.

Замечание. Используя теорему 2.4 только для тех инвариантов (2.14), в которые входят $\Box u$, $\Box u^*$ и не входят R_i, легко доказать теорему 2.3.

Примеры инвариантных уравнений (мы приводим только по одному уравнению из каждой системы).

Уравнение

$$\Box u - \frac{n-1}{2}\{(R_3 - R_5)r_1 + (R_4 - R_2)r_2\}(r_1 r_3 - r_2^2)^{-1} =$$
$$= (u^2 + u^{*2})^{-1}\left(f(r_1 u + r_2 u^*) + i g(r_2 u - r_1 u^*)\right),$$

где f, g – действительные функции от инвариантов (2.11) первого порядка, инвариантно относительно этой алгебры.

Уравнение

$$u \Box u - \frac{n+1}{2} r_1 = \Phi\left(\frac{u}{u^*}, \frac{\Omega}{u^2}\right);$$

и

$$\frac{2u}{\Omega}\left(u^{*2} R_1 - 2uu^* R_2 + u^2 R_3\right) = r_1 + \Phi\left(\frac{u}{u^*}, \frac{\Omega}{u^2}\right)$$

инвариантно относительно алгебры $AC(1,n)$, $\lambda = 1$; r_i, Ω, R_j определяются формулами (2.11), (2.14).

§ 3. Решения нелинейного волнового уравнения для комплекснозначной функции

Рассмотрим уравнение

$$\Box u = F(u, u^*), \tag{3.1}$$

инвариантное относительно алгебры Пуанкаре $AP(1,n)$ (1.2). Решения волнового уравнения (1.1) для действительной скалярной функции при некоторых F найдены в [22, 50, 51, 52] путем симметрийной редукции по подалгебрам алгебры $AP(1,n)$. Однако такая редукция уравнения для комплексной функции приводит, как правило, к неразрешимым в квадратурах системам обыкновенных уравнений. Для нахождения точных решений уравнений вида (3.1) целесообразно специально искать анзацы, приводящие к разрешимым в квадратурах редуцированным системам. В [53] проведена редукция уравнения (3.1), $F = au^5 + bu^3 + cu$ к одному уравнению для действительной функции.

Изучим редукцию комплексного волнового уравнения с помощью анзаца [18]

$$u = \varphi(\omega), \quad u^* = \varphi^*(\omega), \quad \omega = \omega(x), \tag{3.2}$$

приводящего (3.1) к системе

$$\begin{aligned} &\omega_\mu \omega_\mu \varphi'' + \Box\omega\, \varphi' = F(\varphi, \varphi^*), \\ &\omega_\mu \omega_\mu \varphi^{*\prime\prime} + \Box\omega\, \varphi^{*\prime} = F^*(\varphi, \varphi^*). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Условие разделения переменных в системе (3.3) состоит в том, что новые переменные ω должны удовлетворять соотноше-

$$\Box \omega = \chi(\omega),$$
$$\omega_\mu \omega_\mu = T(\omega). \tag{3.4}$$

Таким образом, для нахождения точных решений уравнения (3.I) в виде (3.2) достаточно решить систему (3.4) и

$$T(\omega)\varphi'' + \chi(\omega)\varphi' = F(\varphi, \varphi^*), \tag{3.5}$$

Системы уравнений вида (3.4), где $\mu = 0,1,2$, рассматривались в работе [47]. Очевидно, что с помощью замены можно прийти к системе такого же вида (3.4), где $T(\omega) \equiv 0$ или $T(\omega) \equiv 1$. Коллинзом в [47] было доказано, что система (3.4) в первом случае совместна только если $\chi(\omega) \equiv 0$, во втором - если

$$\chi(\omega) = \frac{N}{\omega - A}, \tag{3.6}$$

где $N = 0, 1, 2$; $A = const$, а также найдены общие решения полученных совместных систем.

Очевидно, что система (3.4) совместна и при $\mu = 0, 1, \dots, n$ и тех же $T(\omega)$, $\chi(\omega)$. При $T(\omega) \equiv 0$ мы не получаем редукции (3.I) к дифференциальному уравнению. ω находим из системы

$$\Box \omega = \frac{N}{\omega - A},$$
$$\omega_\mu \omega_\mu = 1, \quad N = 0, 1, 2, \dots, n, \quad A = const. \tag{3.7}$$

Частные решения уравнений (3.7), аналогичные найденным в [47], приведены в табл. 3.I.

Таблица 3.I.

N	Решения	Условия на параметры
0	$\omega = \lambda y + F(\beta_i y)$	F – произвольная функция от $\beta_i y$, $y_\nu = x_\nu + a_\nu$, $\lambda^2 = 1$, $\lambda\beta = 0$, $i = 1, \ldots, n$; $a_\nu = const.$
$1, \ldots, n$	$\omega - A = \sqrt{(\lambda_i y)(\lambda_i y)}$	$\lambda^i_\mu \lambda^j_\mu = \delta_{ij}$, $i = 1, \ldots, N+1$; $y_\nu = x_\nu + a_\nu$, $a_\nu = const.$

Далее будем рассматривать системы вида (3.I)

$$\Box u = \lambda u (uu^*)^k, \qquad \Box u^* = \lambda^* u^* (uu^*)^k. \tag{3.8}$$

$$\Box u = (\lambda_1 u + i\lambda_2 u^*)(u^2 + u^{*2})^k, \qquad \Box u^* = (\lambda_1 u^* - i\lambda_2 u)(u^2 + u^{*2})^k; \tag{3.9}$$

инвариантные соответственно относительно операторов $Q_1 = u\partial_u - u^*\partial_{u^*}$ и $Q_2 = u^*\partial_u - u\partial_{u^*}$ (оператор заряда).

Система (3.5) для уравнения (3.8) принимает вид

$$\frac{N}{\omega - A}\varphi' + \varphi'' = \lambda\varphi(\varphi\varphi^*)^k, \qquad \frac{N}{\omega - A}\varphi^{*\prime} + \varphi^{*\prime\prime} = \lambda^*\varphi^*(\varphi\varphi^*)^k; \tag{3.10}$$

где $N = 0, 1, \ldots, n$; ω – инвариантные переменные из табл. 3.I; для уравнений (3.9) эта система имеет вид

$$\frac{N}{\omega-A}\varphi'+\varphi''=(\lambda_1\varphi+i\lambda_2\varphi^*)(\varphi^2+\varphi^{*2})^{\kappa} \qquad (3.11)$$

$$\frac{N}{\omega-A}\varphi^{*\prime}+\varphi^{*\prime\prime}=(\lambda_1\varphi^*-i\lambda_2\varphi)(\varphi^2+\varphi^{*2})^{\kappa}.$$

Решения системы (3.10) удобно искать в виде

$$\varphi=re^{i\theta},\quad \varphi^*=re^{-i\theta}; \qquad (3.12)$$

решения (3.9) – в виде

$$\varphi=r\left(\frac{1+i}{2\sqrt2}e^{\theta}+\frac{1-i}{2\sqrt2}e^{-\theta}\right),$$
$$\varphi^*=r\left(\frac{1-i}{2\sqrt2}e^{\theta}+\frac{1+i}{2\sqrt2}e^{-\theta}\right). \qquad (3.13)$$

Для r и θ получаем уравнения

$$\frac{N}{\omega-A}r'+r''+\alpha\theta'^2r=\lambda_1r^{2\kappa+1},$$
$$\frac{N}{\omega-A}\theta'r+2r'\theta'+r\theta''=\lambda_2r^{2\kappa+1}\qquad(\lambda_1+i\lambda_2)=\lambda, \qquad (3.14)$$

здесь $\alpha=-1$ для (3.10), $\alpha=1$ для (3.11).

Пусть $N=0$. При произвольном κ и $\lambda\in R$ система (3.14) имеет общее решение в неявном виде ~~$(\lambda_1=\lambda)$~~

$$\omega=\int\left(\frac{\lambda}{\kappa+1}r^{2\kappa+2}+\frac{\alpha C_1^2}{r^2}+C_2\right)^{-1/2}dr+C_3, \qquad (3.15)$$

$$\theta=C_1\int r^{-2}\left(\frac{\lambda}{\kappa+1}r^{2\kappa+2}+\frac{\alpha C_1^2}{r^2}+C_2\right)^{-1/2}dr+C_4.$$

При $\kappa=-2$ получаем общее решение (3.14) в элементарных функциях

$$r=\left\{C_2(\omega+C_3)^2+\frac{\lambda-\alpha C_1^2}{C_2}\right\}^{-1/2},$$
$$\theta=\frac{C_1}{\sqrt{\lambda-\alpha C_1^2}}\operatorname{arctg}\frac{C_2(C_3+\omega)}{\sqrt{\lambda-\alpha C_1^2}}+C_4,\quad \lambda-\alpha C_1^2>0; \qquad (3.16)$$

$$\theta = \frac{c_1}{2\sqrt{\alpha c_1^2 - \lambda}} \ln \left| \frac{\omega + c_3 + c_2^{-1}\sqrt{\alpha c_1^2 - \lambda}}{\omega + c_3 - c_2^{-1}\sqrt{\alpha c_1^2 - \lambda}} \right| + c_4, \quad \lambda - \alpha c_1^2 < 0;$$

$c_1 \neq 0$, c_2 , c_3 , c_4 – произвольные действительные числа.

Замечание. Разрешимость систем обыкновенных дифференциальных уравнений в квадратурах связана с наличием у них достаточно широкой симметрии. Системы типа (3.10) приводятся к системам четырех уравнений первого порядка, и можно предполагать, что для их разрешимости в квадратурах необходимо, чтобы ранг базиса алгебры инвариантности был не меньше 4 [9]. Однако это условие не является достаточным. Система (3.10) при $k = -2$ имеет максимальную алгебру инвариантности среди систем такого вида с базисными операторами

$$\partial_\omega, \quad \omega\partial_\omega + \frac{1}{2}(\varphi\partial_\varphi + \varphi^*\partial_{\varphi^*}), \quad \omega^2\partial_\omega + \omega(\varphi\partial_\varphi + \varphi^*\partial_{\varphi^*}),$$
$$\varphi\partial_\varphi - \varphi^*\partial_{\varphi^*},$$

но при $\lambda \in R$ приводится к неразрешимому в квадратурах уравнению Риккати.

Система (3.14) при $N \neq 1$, $N \neq 2$, $k = \frac{N-2}{N-1}$ заменой

$$\tau = (\omega - A)^{N-1}, \quad r = (\omega - A)^{1-N}\rho$$

приводится к виду

$$\ddot\rho + \alpha\dot\theta^2\rho = \lambda_1\rho^{2k+1},$$
$$2\dot\rho\dot\theta + \rho\ddot\theta = \lambda_2\rho^{2k+1}.$$

Ее решения получаются в параметрической форме

$$f\Box\omega + 2 f_\mu \omega_\mu = f^{2k+1}(x)\, G(\omega),$$

$$\omega_\mu \omega_\mu = 0.$$

F , G – произвольные функции.

Приведем несколько частных решений системы (3.19):

$$f(x) = \left((\beta_i x)(\beta_i x)\right)^{a},$$

$$\omega = \frac{\alpha x}{\left((\beta_i x)(\beta_i x)\right)^{b}}, \quad a = -\frac{1}{2k}, \quad \alpha^2 = \alpha\beta_i = 0, \tag{3.20}$$

$$\beta^i_\mu \beta^j_\mu = \delta^{ij}, \quad b = 0, 1.$$

По i подразумевается суммирование, $i = 1, \ldots, m \le n$, $m + 2a - 1 = 0$ при $b = 1$.

Для анзаца (3.18) при f , ω из (3.20) мы получаем редуцированные уравнения и их решения.

Для уравнений (3.8):

I) $b = 0$, $m + 2a - 1 \neq 0$ –

$$\varphi'\omega + \varphi\,\frac{m + 2a - 1}{2} = \frac{\lambda}{4a}\,\varphi\,(\varphi\varphi^*)^k;$$

$$\varphi = c\left(1 - c_1\,\omega^{k(m+2a-1)}\right)^{-\frac{1}{2k}} e^{\,i\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\ln\omega - \frac{1}{2k}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)} \times \tag{3.21}$$

$$\times\, e^{-i\frac{\lambda_2}{2\lambda_1} c_1 \omega^{m+2a-1}}, \quad cc^* = \left[\lambda_1^{-1} 2a(m + 2a - 1)\right]^{\frac{1}{2k}}.$$

При $m + 2a - 1 = 0$ мы получаем решения

$$\varphi = c\left(\lambda_1 k^2 \ln\omega + c_1\right)^{-\frac{\lambda}{2k\lambda_1}},$$

$$cc^* = 1. \tag{3.22}$$

2) $b = 1$:

$$\Phi'\omega - a\Phi = \frac{\lambda}{2(m+2a-1)}\,\Phi(\Phi\Phi^*)^{\kappa}, \qquad (3.23)$$

$$\Phi = c\,\omega^{-i\frac{\lambda_2}{2\kappa\lambda_1}}\,|1-c_1\omega|^{-\frac{\lambda}{2\kappa\lambda_1}},$$

$$cc^* = \left(-\frac{2a(m+2a-1)}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}}.$$

Аналогично можно получить решения редуцированных уравнений для системы (3.9); если Φ имеет вид (3.13), тогда

I) $b=0$, $m+2a-1\neq 0$:

$$r = \left(1-c_1\omega^{\kappa(m+2a-1)}\right)^{-\frac{1}{2\kappa}}\left[(m+2a-1)a\right]^{\frac{1}{2\kappa}}(\lambda_1+\lambda_2)^{-\frac{1}{2\kappa}},$$

$$\theta = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\cdot\frac{m+2a-1}{2}\ln\omega - \frac{1}{\kappa}\,\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\times \qquad (3.24)$$

$$\times\ln\left|1-c_1\omega^{\kappa(m+2a-1)}\right|;$$

2) $b=0$, $m+2a-1=0$:

$$r = \left(2\kappa^2(\lambda_1+\lambda_2)\ln\omega + c_1\right)^{-\frac{1}{2\kappa}},$$

$$\theta = -\frac{1}{2\kappa}\,\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\ln\left|2\kappa^2(\lambda_1+\lambda_2)\ln\omega + c_1\right| \qquad (3.25)$$

3) $b=1$, $m+2a-1\neq 0$;

$$r = \left(-\frac{a(m+2a-1)}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{\frac{1}{2\kappa}}|1-c_1\omega|^{-\frac{1}{2\kappa}}, \qquad (3.26)$$

$$\theta = -\frac{1}{2\kappa}\,\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\ln|\omega| + \ln|1-c_1\omega|\right).$$

Подставляя полученные решения (3.21)-(3.26) редуцированных уравнений в анзац (3.18), (3.20), получаем многопараметрические семейства точных решений уравнений (3.8), (3.9) соответственно.

Анзац (3.18), (3.20) при $b \neq 0$, $b \neq 1$ позволяет получить редуцированные уравнения второго порядка:

$$\Phi'' \omega^2 4b(b-1) + \Phi' \omega (4b^2 - 2b(m+1) + 4a(1-2b)) + 2a\Phi(2a+m-1) = \lambda \Phi F(\Phi\Phi^*), \tag{3.27}$$

$F = (\Phi\Phi^*)^k$ для уравнений (3.8),

$F = (\Phi^2 + \Phi^{*2})^k$ для уравнений (3.9).

Мы приведем параметрические решения уравнений (3.27) для

$$b = \frac{2a}{m+4a-1}, \quad \lambda = \lambda^* \ (\lambda_2 = 0, \ \lambda = \lambda_1) \tag{3.28}$$

$$\omega = \int \left(\frac{\lambda}{k+1} z^{2k+1} + \frac{\alpha C_1^2}{z^2} + C_2 + Bz^2 \right)^{-1/2} dz + C_3,$$

$$\theta = C_1 \int z^{-2} \left(\frac{\lambda}{k+1} z^{2k+2} + \frac{\alpha C_1^2}{z^2} + C_2 + Bz^2 \right)^{-1/2} dz + C_4$$

Для (3.8) $\alpha = -1$ и Φ представляется в виде (3.12), для (3.9) $\alpha = 1$ и Φ представляется в виде (3.13).

Далее будем искать конформно-инвариантные многопараметрические семейства решений для конформно-инвариантной системы

$$\Box u = u^3 F\left(\frac{u}{u^*}, \frac{\Omega}{u^6}\right), \tag{3.29}$$

$$\Box u^* = u^{*3} F^*\left(\frac{u}{u^*}, \frac{\Omega}{u^6}\right).$$

Ω определяется соотношением (2.II).

Конформно-инвариантные семейства решений для конкретных F строим, используя формулы конформного размножения решений, приведенные в [59].

Для нахождения решений использовался анзац (3.I8), где

I) $f = (x^2)^{-1/2}$, $\omega = \alpha x$;

$$2)\quad f = (x^2)^{-1/2}, \quad \omega = \frac{\alpha x}{x^2}; \quad \alpha^2 = 0. \tag{3.30}$$

I) $f = \left(x^2 - 2\varepsilon x \cdot \delta x + \delta^2 (\varepsilon x)^2\right)^{-1/2}$, $\omega = \alpha x$;

$$2)\quad f = \left(2\alpha x \cdot \beta x - \beta^2 (\alpha x)^2 + c\,\alpha x\right)^{-1/2}, \tag{3.3I}$$

$\omega = \alpha x$; $\alpha^2 = \varepsilon^2 = \alpha\varepsilon = \alpha\delta = 0$, $\alpha\beta = \varepsilon\delta = 1$.

Если u, u^* определяются при помощи анзацев (3.I8), (3.30), (3.3I), то $\Omega \equiv 0$. Тогда редуцированные уравнения имеют вид

$$\varkappa \varphi - 2\varphi'\omega = \varphi^3 F\left(\frac{\varphi}{\varphi^*}\right), \tag{3.32}$$

$$\varkappa \varphi^* - 2\varphi^{*\prime}\omega = \varphi^{*3} F^*\left(\frac{\varphi}{\varphi^*}\right);$$

$\varkappa = -1$ для (3.30), $\varkappa = 1$ для (3.3I).

Решения уравнения (3.32) в неявном виде могут быть получены для произвольных F. Приведем многопараметрические семейства решений, неразмножаемые преобразованиями из конформной группы $C(1,3)$, для систем

$$\Box u = (u^2 + u^{*2})(g_1 u + i g_2 u^*), \tag{3.33}$$

$$\Box u^* = (u^2 + u^{*2})(g_1 u^* - i g_2 u);$$

Таблица 3.2.

Анзац	$\varkappa$	ω	$\{f(x)\}^{-2}$
(3.30) 2)	-1	$\dfrac{\alpha x + \alpha\tau x^2 + \alpha b\,\sigma(\tau,x)}{x^2 + 2bx + 2b\tau x + b^2\sigma(\tau,x)}$	$(x^2 + 2bx + 2b\tau x^2 + b^2\sigma(\tau,x))\,\sigma(\tau,x)$
(3.30) I)	-1	$\dfrac{\alpha x + \alpha\tau x^2 + \alpha b\,\sigma(\tau,x)}{\sigma(\tau,x)}$	
(3.3I) 2)	1		$\omega\, b(\tau,x)\{2(\beta x + \beta\tau x^2) - \beta^2(\alpha x + \alpha\tau x^2) + (c + 2b\beta - \beta^2\alpha b)\,\sigma(\tau,x)\}$
(3.3I) I)	1		$(\varepsilon x + \varepsilon\tau x^2)(\delta x + \delta\tau x^2) + \delta^2(\varepsilon x + \varepsilon\tau x^2)^2 + \sigma(\tau,x)[x^2 + 2bx + 2b\beta x^2 - 2b\delta(\varepsilon x + \varepsilon\tau x^2) - 2b\varepsilon(\delta x + \delta\tau x^2) + \delta^2 2\varepsilon b(\varepsilon x + 2\varepsilon\tau x^2) + \sigma(\tau,x)(b^2 - 2b\varepsilon - b\delta + \delta^2(\varepsilon b)^2]$

$$\Box u = (g_1 + i g_2) u (u u^*);$$
$$\Box u^* = (g_1 - i g_2) u^* (u u^*). \qquad (3.34)$$

Здесь g_1, g_2 – действительные функции от $\Omega (u^2 + u^{*2})^{-3}$, $g_1(0) \neq 0$.

Такие семейства, полученные при помощи анзацев (3.I8) и (3.30), (3.3I), задаются следующими формулами:

$$u = f(x)\, \omega^{æ/2} \left\{ A_2 \frac{1+i}{4} |A_1 + æ \omega^{æ} c_1|^{-\frac{c_1 + c_2}{2c_1}} + A_2^{-1} \frac{1-i}{4} |A_1 + æ \omega^{æ} c_1|^{-\frac{c_1 - c_2}{2c_1}} \right\} \qquad (3.35)$$

$$(c^j = g^j(0),\ A^j \in R,\ c_1 \neq 0,\ A_2 \neq 0).$$

– решения уравнений (3.33),

$$u = f(x)\, \omega^{æ/2} |A_1 + æ c_1 \omega^{æ}|^{-1/2} e^{i(A_2 - \frac{c_2}{2c_1} \ln |A_1 + æ c_1 \omega^{æ}|)} \qquad (3.36)$$

$$(c^j = g^j(0),\ A^j \in R,\ c_1 \neq 0)$$

– решения уравнений (3.34). f, ω и $æ$ подставляются в (3.35), (3.36) из табл. 3.2 $(b(\tau, x) = 1 + 2\tau x + \tau^2 x^2)$.

§ 4. Комплексные обобщения уравнения эйконала и Эйлера-Лагранжа

4.I. Комплексное уравнение эйконала.

Как известно [49], уравнение Гамильтона (эйконала)

$$u_\alpha u_\alpha - 1 = 0 \tag{4.1}$$

инвариантно относительно алгебры Пуанкаре $AP(1, n+1)$ с базисными операторами P_{x_A},

$$J_{AB} = x_A P_{x_B} - x_B P_{x_A}; \qquad A, B = 0, 1, \ldots, n+1; \quad x_{n+1} = u. \tag{4.2}$$

Комплексным аналогом уравнения (4.1) можно считать уравнение первого порядка для комплексной функции, инвариантное относительно алгебры $AP(1, n+2)$ с базисными операторами (4.2), $A, B = 0, 1, \ldots, n+2$; $x_{n+2} = u^*$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. Уравнение

$$(u_\alpha u_\alpha - 1)(u_\alpha^* u_\alpha^* - 1) = (u_\alpha u_\alpha^*)^2 \tag{4.3}$$

является единственным уравнением первого порядка, инвариантным относительно алгебры $AP(1, n+2)$. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (4.3) является конформная алгебра $AC(1, n+2)$ с базисными операторами (4.2) P_{x_A}, J_{AB}, $A, B = 0, 1, \ldots, n+2$ и

$$D = x_A P_{x_A}, \qquad K_A = 2x_A D - x_B x_B P_{x_A}. \tag{4.4}$$

Теорема доказывается с помощью метода Ли.

Решения уравнения эйконала (4.1) приведены в [50]. Выпишем некоторые точные решения уравнения (4.3). Это уравнение связывает две функции, что позволяет считать одну из них до некоторой степени произвольной.

Будем искать решения в виде

$$u = u_1(\omega) + i\,u_2(\omega),$$

$$u_1 = \mathrm{Re}\,u, \quad u_2 = \mathrm{Im}\,u, \quad \omega_\alpha \omega_\alpha = 1.$$

Тогда

$$u = \int \{ \sqrt{\Phi^2(\omega) + 1/2} + i\,\Phi(\omega) \}\, d\omega. \tag{4.5}$$

Подставив в (4.5) вместо ω решения уравнения Гамильтона [49 , 50], получим частные решения уравнения (4.3).

Точные решения рассматриваемого уравнения можно получить и с помощью редукции по подалгебрам алгебры инвариантности $AC(1, n+2)$. Классификация таких подалгебр и последующая полная редукция потребуют слишком громоздких вычислений, поэтому ограничимся только примерами редукций.

Анзац $u = \varphi(\omega)$ редуцирует уравнение (4.3) к уравнению для функции φ, когда ω – инварианты подалгебр $AP(1, n)$.

Остальные анзацы при $n = 3$, получаемые в результате редукции к обыкновенным уравнениям по одномерным подалгебрам алгебры $AP(1,3) \oplus Q$ приведены в табл. 4.I.

Таким способом можно получить достаточно большое количество частных решений, в которые произвольная функция входит аналогично (4.5), причем благодаря широкой симметрии уравнения (4.3) из них можно получить многопараметрические инвариантные семейства решений.

Приведем пример такого семейства:

$$u = \alpha x\,[\varphi(\beta x) + i\sqrt{\varphi^2(\beta x) + \tfrac{1}{2}}\,],$$
$$\alpha^2 = -1, \quad \beta^2 = \alpha\beta = 0; \tag{4.6}$$

Таблица 4.I.

Анзацы, редуцирующие уравнение (4.3) к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Анзац

$$u = e^{\theta(x)}\frac{1+i}{2}f(\omega) + e^{-\theta(x)}\frac{1-i}{2}g(\omega), \quad f, g \in R$$

для уравнения (4.3) дает следующее редуцированное уравнение:

$$1+2\theta_\alpha\theta_\alpha fg - 2\omega_\alpha\omega_\alpha f'g' - 2\theta_\alpha\omega_\alpha(f'g - fg')$$
$$-2(\theta_\alpha\theta_\alpha\omega_\beta\omega_\beta - (\theta_\alpha\omega_\alpha)^2)(f'g + fg')^2 = 0.$$

Анзац

$$u = \varphi(\omega) + \theta(x)$$

приводит к редуцированному уравнению

$$1 - (\varphi'^2 + \varphi^{*\prime 2})\omega_\alpha\omega_\alpha - (\varphi' + \varphi^{*\prime})2\omega_\alpha\theta_\alpha - 2\theta_\alpha\theta_\alpha +$$
$$+ (\varphi' - \varphi^{*\prime})^2(\theta_\alpha\theta_\alpha\omega_\beta\omega_\beta - (\theta_\alpha\omega_\alpha)^2) = 0.$$

Соотношения на коэффициенты инвариантов в таблице: $(a^2 = a_\mu a_\mu)$

$$a^2 = -b^2 = -c^2 = -d^2 = 1, \quad ab = ac = ad = bd = bc = cd = 0.$$

№	$\omega(x)$	$\theta(x)$	$\omega_\alpha\omega_\alpha$	$\theta_\alpha\omega_\alpha$	$\theta_\alpha\theta_\alpha$
I.	bx	ax	-1	0	1
2.	$((bx)^2+(cx)^2)^{1/2}$	ax	-1	0	1
3.	$((bx)^2+(cx)^2+(dx)^2)^{1/2}$	ax	-1	0	1

Продолжение табл. 4.I.

№	$\omega(x)$	$\theta(x)$	$\omega_\alpha \omega_\alpha$	$\theta_\alpha \omega_\alpha$	$\theta_\alpha \theta_\alpha$
4.	ax	bx	1	0	-1
5.	cx	bx	-1	0	-1
6.	$ax+cx$	bx	0	0	1
7.	$((ax)^2-(cx)^2)^{1/2}$	bx	1	0	-1
8.	$dx+\ln\lvert ax+cx\rvert$	bx	-1	0	-1
9.	dx	$ax+bx$	-1	0	0
I0.	$((ax)^2-(cx)^2-(dx)^2)^{1/2}$	bx	1	0	-1
II.	$((cx)^2+(dx)^2)^{1/2}$	$ax+bx$	-1	0	0
I2.	$((bx)^2+(cx)^2)^{1/2}$	$\operatorname{arctg}\frac{bx}{cx}+\alpha ax$	-1	0	$-\frac{1}{\omega^2}+\alpha^2$

Продолжение табл. 4.I.

№	$\omega(x)$	$\theta(x)$	$\omega_\alpha \omega_\alpha$	$\theta_\alpha \omega_\alpha$	$\theta_\alpha \theta_\alpha$
I3.	$((bx)^2 + (cx)^2)^{1/2}$	$\operatorname{arctg}\frac{bx}{cx} + \varphi(ax+dx)$	-1	0	$-\frac{1}{\omega^2}$
I4.	$((bx)^2 + (cx)^2)^{1/2}$	$\operatorname{arctg}\frac{bx}{cx} + \alpha dx$	-1	0	$-\frac{1}{\omega^2} - \alpha^2$
I5.	$((ax)^2 - (bx)^2)^{1/2}$	$\ln\lvert ax + bx\rvert$	1	$\frac{1}{\omega}$	0
I6.	$((ax)^2 - (bx)^2)^{1/2}$	$\ln\lvert ax + bx\rvert + \alpha cx$	1	$\frac{1}{\omega}$	$-\alpha^2$
I7.	$((ax) + (bx))^2 - 2\alpha cx$	$\alpha^2 ax + \frac{1}{3}(ax + bx)^3 - \alpha cx \times (ax + bx)$	$-4\alpha^2$	0	$\alpha^2\omega + \alpha^4$
I8.	$((ax)^2 - (bx)^2 - (cx)^2)^{1/2}$	$\ln\lvert ax + bx\rvert$	1	$\frac{1}{\omega}$	0
I9.	$((ax)^2 - (bx)^2 - (cx)^2 - (dx)^2)^{1/2}$	$\ln\lvert ax + bx\rvert$	1	$\frac{1}{\omega}$	0
20.	$((ax)^2 - (bx)^2 - (cx)^2)^{1/2}$	$\ln\lvert ax + bx\rvert + \alpha dx$	1	$\frac{1}{\omega}$	$-\alpha^2$

ϕ – произвольная действительная функция.

Из (4.6) можно получить $AC(1, n+2)$ -инвариантное семейство решений с помощью формулы конформного преобразования переменных

$$x_A' = \frac{x_A + b_A x_B x_B}{\Sigma(x_A, b_A)},$$

$$\Sigma(x_A, b_A) = 1 + 2b_A x_A + b_A b_A \cdot x_B x_B,$$

b_A – произвольные действительные параметры.

Максимально размноженное семейство решений получаем в неявном виде

$$e_{n+1} + \frac{u + b_{n+1} x_B x_B}{\Sigma(x_A, b_A)} = \left(\alpha e + \frac{\alpha x + \alpha b \cdot x_B x_B}{\Sigma(x_A, b_A)}\right) \times$$
$$\times \left(\varphi(\omega) + i\sqrt{\varphi^2(\omega) + 1/2}\right),$$

где

$$\omega = \beta e + \frac{\beta x + \beta b \cdot x_B x_B}{\Sigma(x_A, b_A)},$$

e_A, b_A – произвольные действительные числа.

4.2. Комплексное уравнение Эйлера-Лагранжа.

Перейдем к описанию $AP(1, n+2)$ - инвариантных квазилинейных уравнений второго порядка.

Для алгебры $AP(1, n+2)$ нельзя применить теорему 2.3, так как ее базисные операторы нельзя задать в виде (2.19). Поэтому описание $AP(1, n+2)$ -инвариантных уравнений требует специального рассмотрения.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. Единственной системой вида (2.2), инвариантной относительно алгебры $AP(1, n+2)$, является система

$$\left((u_\alpha u^*_\alpha)^2 - (u_\alpha u_\alpha - 1)(u^*_\alpha u^*_\alpha - 1)\right)\Box u + (u^*_\alpha u^*_\alpha - 1) u_\mu u_\nu u_{\mu\nu} - 2u^*_\alpha u_\alpha u_\mu u^*_\nu u_{\mu\nu} + (u_\alpha u_\alpha - 1) u^*_\mu u^*_\nu u_{\mu\nu} = 0, \quad (4.7)$$

$$\left((u_\alpha u^*_\alpha)^2 - (u_\alpha u_\alpha - 1)(u^*_\alpha u^*_\alpha - 1)\right)\Box u^* + (u^*_\alpha u^*_\alpha - 1) \times u_\mu u_\nu u^*_{\mu\nu} - 2u^*_\alpha u_\alpha u_\mu u^*_\nu u^*_{\mu\nu} + (u_\alpha u_\alpha - 1) \times u^*_\mu u^*_\nu u^*_{\mu\nu} = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(x_\alpha, u, u^*)$, которая задает решения системы (2.2) в неявном виде:

$$\varphi(x_\alpha, u, u^*) = 0, \qquad (4.8)$$
$$\varphi^*(x_\alpha, u, u^*) = 0.$$

Для этой функции из квазилинейной системы (2.2) получаем аналогичную систему уравнений

$$L(\varphi, \varphi^*, \varphi_A, \varphi^*_A, \varphi_{AB}, \varphi^*_{AB}) = 0,$$
$$L^*(\varphi, \varphi^*, \varphi_A, \varphi^*_A, \varphi_{AB}, \varphi^*_{AB}) = 0.$$

Теорема 2.3 позволяет описать все такие системы, инвариантные относительно $AP(1, n+2)$. Из этих инвариантных систем выберем те, которые путем преобразований с помощью равенств (4.8) и их дифференциальных следствий приводятся к системам уравнений вида (2.2). Таким образом находим единственную с точностью до эквивалентности $AP(1, n+2)$-инвариантную систему вида (4.7).

Система (4.7) представляет собой комплексное обобщение уравнения типа Эйлера-Лагранжа

$$\Box u\,(1-u_\nu u_\nu)+u_\mu u_\nu u_{\mu\nu}=0;$$

точные решения и симметрия которого изучались в работе [24].

Максимальной алгеброй инвариантности системы (4.7) является алгебра $AP(1,n+2)\oplus\mathcal{D}$ (4.4).

Решения уравнения (4.7) могут быть получены путем редукции по анзацам из табл. 4.I. Для анзаца $u=\varphi(\omega)$ редуцированное уравнение имеет вид

$$-\varphi'\Box\omega-\varphi''\omega_\alpha\omega_\alpha+\varphi'(\varphi^{*\prime 2}+\varphi'^2)(\Box\omega\cdot\omega_\alpha\omega_\alpha-$$

$$-\omega_\alpha\omega_\beta\omega_{\alpha\beta})=0.$$

Если $\omega_\alpha\omega_\alpha=\Box\omega=0$, то произвольная функция будет решением уравнения (4.7).

<u>Замечание 4.I</u>. Используя метод Ли, можно доказать, что комплексным аналогом уравнения

$$u_\alpha u_\alpha=0,$$

инвариантного относительно бесконечномерной алгебры, включающей алгебру Пуанкаре $AP(1,n)$, будет уравнение

$$u_\alpha u_\alpha\cdot u^*_\beta u^*_\beta-(u^*_\alpha u_\alpha)^2=0.$$

Глава II. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО АЛГЕБР ГАЛИЛЕЯ И ИХ РАСШИРЕНИЙ

В этой главе построены функциональные базисы дифференциальных инвариантов первого и второго порядка алгебр Галилея для действительной и комплексной скалярных функций. Предложено комплексное обобщение уравнения Гамильтона-Якоби, исследована его симметрия и найдены семейства точных решений. Получены многопараметрические семейства решений галилеевски-инвариантного нелинейного уравнения Шредингера.

§ 5. Дифференциальные инварианты алгебр Галилея

5.I. Дифференциальные инварианты алгебры Галилея для действительной скалярной функции.

Однородное уравнение теплопроводности

$$2\mu \Phi_t + \Phi_{aa} = 0,$$

$$\Phi = \Phi(t, \vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad n \geq 3 \tag{5.I}$$

инвариантно [54] относительно расширенной алгебры Галилея $A\tilde{G}_1(1,n)$ с базисными операторами

$$AG_1(1,n) = \{\partial_a, \partial_t, J_{ab}, \Phi\partial_\Phi, G_a^{(1)}\}, \quad -$$

$$G_a^{(1)} = t\partial_a + \mu x_a \Phi\partial_\Phi; \tag{5.2}$$

$$D = 2t\partial_t + x_a\partial_a + \lambda\Phi\partial_\Phi,$$

$$A\tilde{G}_1(1,n) = AG_1(1,n) + \{D, A\},$$

где $\quad \mathcal{A} = t\mathcal{D} - t^2\partial_t + \frac{\mu \vec{x}^2}{2}\Phi\partial_\Phi,$

$$\lambda = -\frac{n}{2}. \tag{5.3}$$

Нелинейные обобщения уравнения (5.I) исследовались в работах [3I, 32, 55].

Для построения новых классов нелинейных уравнений, инвариантных относительно алгебры $AG_1(1,n)$ и ее расширений используются дифференциальные инварианты заданных алгебр. С целью упрощения вычислений при нахождении инвариантов сделаем замену

$$\Phi = \exp\varphi; \tag{5.4}$$

базисные операторы (5.2), (5.3) приобретают вид

$$\begin{gathered}\partial_a,\ \partial_t,\ J_{ab},\ \partial_\varphi,\\ G_a^{(1)} = t\partial_a + \mu x_a\partial_\varphi,\\ \mathcal{D} = 2t\partial_t + x_a\partial_a + \lambda\partial_\varphi,\\ \mathcal{A} = t\mathcal{D} - t^2\partial_t + \frac{\mu\vec{x}^2}{2}\partial_\varphi; \quad \lambda = -\frac{n}{2}.\end{gathered} \tag{5.5}$$

Дифференциальные инварианты рассматриваемых алгебр будем искать в виде

$$F = F(\varphi_a,\ \varphi_t,\ \varphi_{at},\ \varphi_{tt},\ \varphi_{ab}). \tag{5.6}$$

x_a, t, φ не входят в выражение для инвариантов, так как базис алгебры $AG_1(1,n)$ (5.5) включает операторы ∂_a, ∂_t, ∂_φ.

Из критерия Ли абсолютного дифференциального инварианта (0.9) получаем систему определяющих уравнений инвариантов алгебры $AG_1(1,n)$:

$$\varphi_a F_{\varphi_{ab}} - \varphi_b F_{\varphi_a} + \varphi_{at} F_{\varphi_{bt}} - \varphi_{bt} F_{\varphi_{at}} + \varphi_{ac} F_{\varphi_{bc}} - \varphi_{bc} F_{\varphi_{ac}} = 0, \tag{5.7}$$
$$\varphi_a F_{\varphi_t} - \mu F_{\varphi_a} + 2\varphi_{at} F_{\varphi_{tt}} + \varphi_{ab} F_{\varphi_{bt}} = 0,$$
$$a, b = 1, \dots, n.$$

В случае алгебры $AG_1(1, n) \oplus \mathcal{D}$ добавляется уравнение

$$2\varphi_t F_{\varphi_t} + \varphi_a F_{\varphi_a} + 4\varphi_{tt} F_{\varphi_{tt}} + 3\varphi_{at} F_{\varphi_{at}} + 2\varphi_{ab} F_{\varphi_{ab}} = 0 \tag{5.8}$$

и для $A\tilde{G}_1(1, n)$ – уравнение

$$\lambda\varphi_t - 2\varphi_t F_{\varphi_t} - \varphi_a F_{\varphi_{at}} + \mu\,\delta_{ab} F_{\varphi_{ab}} = 0. \tag{5.9}$$

Аналогично проведенным в § I рассуждениям вычисляем максимальное количество функционально независимых инвариантов, то есть количество элементов базиса. Ранг второго продолжения операторов $\{J_{ab}, G_a\}$ равен $\frac{n(n-1)}{2} + n$, выражение (5.6) зависит от $3n + 2 + \frac{n(n-1)}{2}$ переменных; следовательно, базис абсолютных дифференциальных инвариантов второго порядка алгебры $AG_1(1, n)$ состоит из $2n + 2$ элементов.

Для каждой из алгебр $AG_1(1, n) \oplus \mathcal{D}$, $A\tilde{G}_1(1, n)$ ранг вторых продолжений базисных операторов будет увеличиваться и число инвариантов уменьшаться на единицу.

Случаи $\mu \neq 0$, $\mu = 0$ требуют отдельного рассмотрения. Пусть сначала $\mu \neq 0$.

Искомые инварианты удобно строить из ковариантных тензоров (определение I.2). Непосредственной подстановкой в уравнения (5.7) легко проверить, что тензоры

$$\varphi_{ab}, \quad \theta_a = \mu\varphi_{at} + \varphi_b\varphi_{ab} \tag{5.10}$$

будут галилеевски-ковариантными (G_a имеет вид (5.6), $\mu \neq 0$).

Из φ_a, φ_{ab}, φ_{at}, φ_t, φ_{tt} строим базис абсолютных дифференциальных инвариантов алгебры $AG_1(1,n)$ (5.6):

$$\text{I.}\quad M_1 = 2\mu\varphi_t + \varphi_a\varphi_a,$$

$$M_2 = \mu^2\varphi_{tt} + 2\mu\varphi_a\varphi_{at} + \varphi_a\varphi_b\varphi_{ab}; \tag{5.II}$$

$$\text{II.}\quad R_j = \theta_{a_0}\theta_{a_j}\varphi_{a_0a_1}\ldots\varphi_{a_{j-1}a_j},\quad j=0,1,\ldots,n-1;$$

$$\text{III.}\quad S_j = \varphi_{a_0a_1}\varphi_{a_1a_2}\ldots\varphi_{a_{j-1}a_j}\varphi_{a_ja_0},\quad j=0,1,\ldots,n-1;$$

– $2n+2$ инварианта.

Легко проверить путем непосредственной подстановки, что они удовлетворяют уравнениям (5.7).

Теорема 5.I. Выражения (5.II) функционально независимы.

Доказательство. Если считать φ_a, φ_{ab} произвольными тензорами и положить $\varphi_a \equiv 0$, $\varphi_{ab} = 0$ ($a \neq b$), то из (5.II) получим $2\mu\varphi_t$, $\mu^2\varphi_{tt}$, $R^j(\varphi_{at}, \varphi_{ab})$, $S^j(\varphi_{ab})$. Независимость первых двух выражений от остальных очевидна, независимость R^j, S^j следует из теоремы I.I. Отсюда ясно, что и инварианты (5.II) функционально независимы.

Отметим, что M^1 – единственный абсолютный инвариант первого порядка; линейный по вторым производным абсолютный инвариант должен записываться в виде

$$k_1(M_1)M_2 + k_2(M_1)\varphi_{aa}.$$

Инварианты (5.II) являются относительными инвариантами алгебры Галилея, дополненной масштабными преобразованиями $AG_1(1,n) \oplus D$; ее абсолютные инварианты можно представить в виде

$$\frac{M_2}{M_1^2}\ ;\ \frac{R_j}{M_1^{3+j}}\ ,\ \frac{S_j}{M_1^{j+1}}\ ,\quad j=0,1,\dots,n-1. \tag{5.12}$$

Решая уравнение (5.9), где

$$F=F\left(M_1,\ M_2,\ R_j,\ S_j\right)$$

получаем базис относительных инвариантов алгебры $A\tilde{G}_1(1,n)$.

I. $$N_1 = 2\mu\varphi_t + \varphi_a\varphi_a + \varphi_{aa},$$

$$N_2 = \varphi_{tt} + \frac{1}{\mu^2}\left\{2\mu\left(\frac{\varphi_t\varphi_{aa}}{n} + \varphi_a\varphi_{at}\right) + \varphi_a\varphi_b\varphi_{ab} + \frac{\varphi_a\varphi_a\varphi_{bb}}{n} + \frac{\varphi_{aa}^2}{n}\right\}. \tag{5.13}$$

II. $$I_j = \sum_{k=0}^{j} R_k\left(\varphi_{aa}\right)^{j-k}\frac{(-n)^k j!}{k!\,(j-k)!},\quad j=0,1,\dots,n-1.$$

III. $$J_j = \sum_{k=0}^{j}\frac{(-n)^k (j-1)!\,(j+1)}{(k+1)!\,(j-k)!}S_k\left(\varphi_{aa}\right)^{j-k},\quad j=1,2,\dots,n-1.$$

Из относительных инвариантов (5.13) строятся $2n$ абсолютных инвариантов:

$$\frac{N_2}{N_1^2}\ ;\ \frac{I_j}{M_1^{3+j}}\ ,\ j=0,1,\dots,n-1;\ \frac{J_j}{M_1^{1+j}}\ ,\ j=1,\dots,n-1. \tag{5.14}$$

Доказательство функциональной независимости инвариантов (5.12), (5.13) проводится аналогично доказательству теоремы 5.1.

Замечание 5.1. Алгебра $A\tilde{G}_1(1,n)$ с базисными операторами (5.6), $\mu\neq 0$ не имеет абсолютных инвариантов первого порядка, а также квазилинейных инвариантов.

Замена $\varphi=\ln\Phi$ в инвариантах (5.11), (5.12), (5.14) позволяет получить системы абсолютных инвариантов алгебр $AG_1(1,n)$, $AG_1(1,n)\oplus D$, $A\tilde{G}_1(1,n)$ с базисными операторами (5.2).

Для алгебры Галилея $AG_1(1,n)$, относительно которой инвариантно уравнение теплопроводности (5.I), получаем из (5.II) базис инвариантов второго порядка:

I. $$M_1 = 2\mu \frac{\Phi_t}{\Phi} + \frac{\Phi_a \Phi_a}{\Phi^2},$$

$$M_2 = \mu^2 \left(\frac{\Phi_{tt}}{\Phi} - \frac{\Phi_t^2}{\Phi^2} \right) + 2\mu \frac{\Phi_a}{\Phi} \left(\frac{\Phi_{at}}{\Phi} - \frac{\Phi_a \Phi_t}{\Phi^2} \right) + \frac{\Phi_a \Phi_b}{\Phi^2} \left(\frac{\Phi_{ab}}{\Phi} - \frac{\Phi_a \Phi_b}{\Phi^2} \right);$$

II. $$R_j = \theta_{a_0} \theta_{a_j} \left(\frac{\Phi_{a_0 a_1}}{\Phi} - \frac{\Phi_{a_1} \Phi_{a_0}}{\Phi^2} \right) \ldots \left(\frac{\Phi_{a_{j-1} a_j}}{\Phi} - \frac{\Phi_{a_{j-1}} \Phi_{a_j}}{\Phi^2} \right),$$

$$\theta_a = 2\mu \left(\frac{\Phi_{at}}{\Phi} - \frac{\Phi_a \Phi_t}{\Phi^2} \right) + \frac{\Phi_b}{\Phi} \left(\frac{\Phi_{ab}}{\Phi} - \frac{\Phi_a \Phi_b}{\Phi^2} \right), \quad j = 0, \ldots, n-1;$$

III. $$S_j = \left(\frac{\Phi_{a_0 a_1}}{\Phi} - \frac{\Phi_{a_0} \Phi_{a_1}}{\Phi^2} \right) \ldots \left(\frac{\Phi_{a_{j-1} a_j}}{\Phi} - \frac{\Phi_{a_{j-1}} \Phi_{a_j}}{\Phi^2} \right) \times$$
$$\times \left(\frac{\Phi_{a_j a_1}}{\Phi} - \frac{\Phi_{a_j} \Phi_1}{\Phi^2} \right), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Уравнение (5.I) через эти инварианты записывается как

$$\Phi \left(M_1 + S_0 \right) = 0;$$

его левая часть является относительным инвариантом алгебры $AG_1(1,n)$.

Рассмотрим случай $\mu = 0$. Тогда базисные операторы (5.6) расширенной алгебры Галилея приобретают вид

$$\partial_t, \ \partial_a, \ \partial_\varphi, \ J_{ab},$$
$$G_a^{(1)} = t \partial_a, \tag{5.15}$$

$$\mathcal{D} = 2t\partial_t + x_a\partial_a + \lambda\partial_\varphi,$$

$$\mathcal{A} = t^2\partial_t + tx_a\partial_a + \lambda t\partial_\varphi,$$

λ – произвольное действительное число.

Для этой алгебры ковариантными тензорами первого и второго порядка будут φ_a, φ_{ab}. Не вдаваясь в подробности решения определяющих уравнений (5.7) – (5.9), приведем базисы дифференциальных инвариантов.

Абсолютные инварианты алгебры $AG_1(1,n)$ $(\mu = 0)$ (5.I5):

I.
$$M_1 = \varphi_t - \varphi_a b_a, \quad M_2 = \varphi_{tt} - \varphi_{at} b_a,$$

где b_a определяются из соотношений $\varphi_{at} = \varphi_{ab} b_b$; или

$$\hat{M}_1 = \begin{vmatrix} \varphi_t & \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_{1t} & \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{nt} & \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}, \tag{5.I6}$$

$$\hat{M}_2 = \begin{vmatrix} \varphi_{tt} & \varphi_{1t} & \dots & \varphi_{nt} \\ \varphi_{1t} & \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{nt} & \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix};$$

II.
$$R_j = \varphi_{a_0}\varphi_{a_j}\varphi_{a_0a_1}\dots\varphi_{a_{j-1}a_j}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1; \tag{5.I7}$$

III. $$S_j = \varphi_{a_0a_1}\dots\varphi_{a_{j-1}a_j}\varphi_{a_ja_0}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Замечание 5.2. Инварианты (5.16) были найдены в работе [57] как решение задачи о нахождении уравнений второго порядка, инвариантных относительно алгебры Галилея при $\mu = 0$.

Инварианты (5.17) представляют собой инварианты группы Евклида $E(n)$, построенные из φ_a, φ_{ab}.

Алгебра Галилея $AG_1(1,n)$ в $\mathcal{D}$ (5.15) имеет базис абсолютных инвариантов следующего вида:

$$\frac{M_1^2}{M_2};\ \frac{R_j}{M_1^{j+1}},\ \frac{S_j}{M_1^{j+1}},\ j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Относительные инварианты алгебры $AG_1(1,n)$ (5.15):

I. $M = (\varphi_t - \sigma_a \varphi_a)^2 + (\varphi_{tt} - \varphi_{at}\sigma_a)(\lambda + \varphi_a \varphi_b \tau_{ab})$,

где τ_{ab} – элементы матрицы, обратной к матрице $\{\varphi_{ab}\}_{a,b=1,\ldots,n}$.

II. $R_j(\varphi_a, \varphi_{ab})$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

III. $S_j(\varphi_{ab})$, где R_j, S_j имеют вид (5.17).

Базис абсолютных инвариантов алгебры $A\tilde{G}_1(1,n)$ ($\mu = 0$):

$$\frac{R_j}{M^{1/2(j+1)}},\ \frac{S_j}{M^{1/2(j+1)}},\ j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Доказательства полноты и независимости приведенных систем инвариантов проводятся аналогично случаю $\mu \neq 0$.

5.2. Инварианты алгебры Галилея для комплексной скалярной функции.

В основе квантовой механики лежит уравнение Шредингера [6] с нулевой правой частью

$$im\,\psi_t - \psi_{aa} = 0 \qquad (5.18)$$

($\Psi = \Psi(t, \vec{x})$ – комплекснозначная скалярная функция), которое инвариантно относительно алгебры Галилея; базисные операторы в этом случае имеют вид

$$
\begin{gathered}
p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad p_0 = i\frac{\partial}{\partial t};\\
J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \quad J = \Psi\partial_\Psi - \Psi^*\partial_{\Psi^*},\\
G_a^{(2)} = t\partial_a + im x_a J, \quad a, b = 1, \ldots, n,\\
D = 2t\partial_t + x_a\partial_a + \lambda I \quad (I = \Psi\partial_\Psi + \Psi^*\partial_{\Psi^*}),\\
A = t^2\partial_t + t x_a\partial_a + \frac{\lambda t}{2} I + \frac{im\vec{x}^2}{2} J \quad \left(\lambda = -\frac{n}{2}\right).
\end{gathered} \tag{5.19}
$$

Инвариантныи нелинейные обобщения уравнения (5.18) рассмотрены в работах [33, 57].

Построим функциональные базисы абсолютных дифференциальных инвариантов второго порядка алгебры Галилея (5.19). В этом случае для упрощения вычислений также целесообразна замена, аналогичная (5.4)

$$\varphi = \ln \Psi. \tag{5.20}$$

Так как Ψ – комплекснозначная функция, то замена (5.20) не является взаимно однозначной; будем считать, что

$$Im\, \varphi = \operatorname{arctg}\frac{Re\,\Psi}{Im\,\Psi}.$$

Операторы (5.19) приобретают вид

$$
\begin{gathered}
p_0, p_a, \quad J_{ab}, \quad J = \partial_\varphi - \partial_{\varphi^*}, \quad G_a = t\partial_a + im x_a J,\\
D = 2t\partial_t + x_a\partial_a + \lambda I, \quad \text{где}\\
I = \partial_\varphi + \partial_{\varphi^*},
\end{gathered} \tag{5.21}
$$

$$\mathcal{A} = t^2\partial_t + t x_a \partial_a + \frac{im\vec{x}^2}{2} J + \frac{\lambda t}{2} I, \quad \lambda = -\frac{n}{2}.$$

Для построения инвариантов алгебры $AG_2(1,n) = \{p_0, p_a, J_{ab}, J, G_a\}$ $(m \neq 0)$ выпишем сначала ковариантные тензоры:

$$\begin{aligned} &\theta_a = im\,\varphi_{at} + \varphi_{ab}\varphi_b, \; \theta_a^*, \\ &\varphi_a + \varphi_a^*, \quad \varphi_{ab}, \quad \varphi_{ab}^*. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Алгебра $AG_2(1,n)$ имеет $\frac{n(n-1)}{2} + 5n + 4$ независимых инварианта.

I. $\varphi + \varphi^*$,

$$\begin{aligned} &M_1 = 2im\,\varphi_t + \varphi_a\varphi_a, \\ &M_1^* = -2im\,\varphi_t^* + \varphi_a^*\varphi_a^*, \\ &M_2 = -m^2\varphi_{tt} + 2im\,\varphi_a\varphi_{at} + \varphi_a\varphi_b\varphi_{ab}, \\ &M_2^* = -m^2\varphi_{tt}^* - 2im\,\varphi_a^*\varphi_{at}^* + \varphi_a^*\varphi_b^*\varphi_{ab}^*. \end{aligned} \tag{5.23}$$

II. $3n$ инвариантов строятся из θ_a, θ_a^* (5.22), $\varphi_a + \varphi_a^*$, φ_{ab}:

$$R_j^1 = \theta_{a_0}\theta_{a_j}\varphi_{a_0a_1}\ldots\varphi_{a_{j-1}a_j},$$

$$R_j^2 = \theta_{a_0}^*\theta_{a_j}^*\varphi_{a_0a_1}\ldots\varphi_{a_{j-1}a_j},$$

$$R_j^3 = (\varphi_{a_0} + \varphi_{a_0}^*)(\varphi_{a_j} + \varphi_{a_j}^*)\varphi_{a_0a_1}\ldots\varphi_{a_{j-1}a_j},$$

$j = 0, 1, \ldots, n-1.$

III. $\frac{n(n+3)}{2}$ инвариантов строятся из φ_{ab}, φ^*_{ab}: (5.24)

$$S_j^l = \varphi_{a_0a_1}\ldots\varphi_{a_{l-1}a_l}\varphi^*_{a_la_{l+1}}\ldots\varphi^*_{a_{j-1}a_j}\varphi^*_{a_ja_{j+1}},$$
$$l = 0, 1, \ldots, j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Независимость инвариантов (5.23) (между собой и от инвариантов (5.24)) очевидна, независимость инвариантов (5.24) следует из результатов § I.

Базис инвариантов алгебры Галилея, дополненной масштабными преобразованиями $AG_2(1,n)\oplus D$, имеет вид

I) $\lambda \neq 0$:

$$M_1 e^{\frac{2}{\lambda}(\varphi+\varphi^*)}, \quad M_1^* e^{\frac{2}{\lambda}(\varphi+\varphi^*)}, \quad M e^{\frac{4}{\lambda}(\varphi+\varphi^*)},$$
$$M_2^* e^{\frac{4}{\lambda}(\varphi+\varphi^*)}, \quad R_j^k e^{\frac{6+2j}{\lambda}(\varphi+\varphi^*)} \quad (k=1,2),$$
$$R_j^3 e^{\frac{2+2j}{\lambda}(\varphi+\varphi^*)}, \quad S_j^l e^{\frac{2j+2}{\lambda}(\varphi+\varphi^*)}, \quad l=0,1,\ldots,j; \ j=0,1,\ldots,n.$$

2) $\lambda = 0$:

$$\varphi+\varphi^*, \quad \frac{M_1^*}{M_1}, \quad \frac{M_2}{M_1^2}, \quad \frac{M_2^*}{M_1^2}; \quad \frac{R_j^k}{M_1^{3+j}} \quad (k=1,2),$$
$$\frac{R_j^3}{M_1^{1+j}}, \quad \frac{S_j^l}{M_1^{1+j}}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \quad l = 0, 1, \ldots, j.$$

Выпишем относительные инварианты алгебры $A\tilde{G}_2(1,n) = AG_2(1,n) \oplus \{D, A\}$ с базисными операторами (5.I9)

I. $\varphi + \varphi^*$,

$$N_1 = 2im\,\varphi_t + \varphi_a\varphi_a + \varphi_{aa},$$
$$N_1^* = -2im\,\varphi_t^* + \varphi_a^*\varphi_a^* + \varphi_{aa}^*, \qquad (5.25)$$
$$N_2 = \varphi_{tt} - \frac{1}{m^2}\Big\{2im\Big(\frac{\varphi_t\varphi_{aa}}{n} + \varphi_a\varphi_{at}\Big) +$$

$$+ \varphi_a \varphi_b \varphi_{ab} + \frac{\varphi_a \varphi_a \varphi_{bb}}{n} + \frac{\varphi_{aa}^2}{n} \}, N_2^*.$$

II. $$\hat{R}_j^k = \sum_{\ell=0}^{j} R_\ell^k (\varphi_{aa})^{j-\ell} \frac{(-n)^\ell j!}{\ell! (j-\ell)!},$$

$k = 1, 2, 3$; $j = 0, 1, \ldots, n-1$; R_ℓ^k имеют вид (5.24).

III.

$$\hat{S}_j^k = \sum_{\ell=0}^{j} \sum_{m=0}^{k} S_m^\ell (-n)^\ell C_k^m C_k^{\ell+1-m} \varphi_{aa}^{k-m} \times$$

$$\times \varphi_{aa}^{*\,(j-\ell)-(k-m)} + j (\varphi_{aa})^k (\varphi_{aa}^*)^{j-k-1}, \ k = 0, \ldots, j, \ j = 1, \ldots, n-1.$$

Абсолютные инварианты строятся из относительных:

$$N_1 e^{-\frac{4}{n}(\varphi+\varphi^*)}, \ N_1^* e^{-\frac{4}{n}(\varphi+\varphi^*)}, \ N_2 e^{-\frac{8}{n}(\varphi+\varphi^*)},$$

$$N_2^* e^{-\frac{8}{n}(\varphi+\varphi^*)}; \ \hat{R}_j^k e^{-\frac{4}{n}(3+j)(\varphi+\varphi^*)} \quad (k = 1, 2),$$

$$\hat{R}_j^3 e^{-\frac{4}{n}(1+j)(\varphi+\varphi^*)}, \ j = 0, 1, \ldots, n-1;$$

$$\hat{S}_j^k e^{-\frac{4}{n}(j+1)(\varphi+\varphi^*)}, \ k = 0, 1, \ldots, j,$$

$$j = 0, 1, \ldots, n-1;$$

$\hat{R}_j^k$, $\hat{S}_j^k$ имеют вид (5.23).

Доказательства инвариантности, полноты и независимости приведенных систем проводятся аналогично п. 5.I.

Пусть в (5.2I) $m = 0$. Тогда базисы инвариантов алгебры $AG_2(1, n)$ имеют следующий вид:

I. $\varphi + \varphi^*$, $M_1 = \varphi_t - \varphi_a \sigma_a$, $M_1^* = \varphi_t^* - \varphi_a^* \sigma_a^*$,

$$M_2 = \varphi_{tt} - \varphi_{at}\, \sigma_a ,$$

$$M_2^* = \varphi_{tt}^* - \varphi_{at}^*\, \sigma_a^* ,$$

где σ_a определяются из соотношения $\varphi_{bt} = \sigma_a \varphi_{ab}$

II. $$R_j^1 = \varphi_{a_0} \varphi_{a_j} \varphi_{a_0 a_1} \ldots \varphi_{a_{j-1} a_j} ,$$

$$R_j^2 = \varphi_{a_0}^* \varphi_{a_j}^* \varphi_{a_0 a_1} \ldots \varphi_{a_{j-1} a_j} ,$$

$$R_j^3 = (\sigma_{a_0} - \sigma_{a_0}^*)(\sigma_{a_j} - \sigma_{a_j}^*) \varphi_{a_0 a_1} \ldots \varphi_{a_{j-1} a_j} \tag{5.26}$$

III. S_j^ℓ вида (5.24), $\ell = 0, 1, \ldots, j$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Базис абсолютных-инвариантов алгебры $AG_2(1,n) + D$ $(m=0)$:

1) $\lambda \neq 0$:

$$M_1 e^{\frac{2}{\lambda}(\varphi+\varphi^*)} ,\quad M_1^* e^{\frac{2}{\lambda}(\varphi+\varphi^*)} ,\quad M_2 e^{\frac{4}{\lambda}(\varphi+\varphi^*)} ,$$

$$M_2^* e^{\frac{4}{\lambda}(\varphi+\varphi^*)} ;\quad R_j^k e^{\frac{2}{\lambda}(j+1)(\varphi+\varphi^*)} \quad (k = 1, 2, 3) ,$$

$$S_j^\ell e^{\frac{2}{\lambda}(j+1)(\varphi+\varphi^*)} ,\quad \ell = 0, 1, \ldots, j,\quad j = 0, 1, \ldots, n-1;$$

R_j^k, S_j^ℓ здесь имеют вид (5.26);

2) $\lambda = 0$: $\varphi + \varphi^*$, $\dfrac{M_1^*}{M_1}$, $\dfrac{M_2}{M_1^2}$, $\dfrac{M_2^*}{M_1^2}$, $\dfrac{R_j^i}{M_1^{j+1}}$, $\dfrac{S_j^\ell}{M_1^{j+1}}$,

$$\ell = 0, 1, \ldots, j ,\quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Относительные инварианты алгебры $A\tilde{G}_2(1,n)$ $(m=0)$

I. $$\varphi + \varphi^* ,\quad N_1 = (\varphi_t - \sigma_a \varphi_a)^2 + (\varphi_{tt} - \sigma_a \varphi_{at}) \times$$
$$\times (\lambda + \varphi_a \varphi_b r_{ab}) ,\quad N_1^* , \tag{5.27}$$

где $\{ r_{ab} \}_{a,b=1,2,\ldots,n} = \{ \varphi_{ab} \}^{-1}_{a,b=1,\ldots,n}$.

II. R_j^1 , R_j^2 вида (5.26);

I) $\lambda = 0$: $N_2 = (\varphi_t - \varphi_c b_c)\varphi_a^* \varphi_b^* r_{ab}^* - (\varphi_t^* - \varphi_c^* b_c^*) \times$

$\times \varphi_a \varphi_b \varphi_{ab}$, $R_j^3 = \rho_{a_0} \rho_{a_j} \varphi_{a_0 a_1} \ldots \varphi_{a_{j-1} a_j}$,

где $\rho_a = (\varphi_t - b_b \varphi_b)(\varphi_c^* r_{ac} - \varphi_c r_{ac}^*) - \varphi_b \varphi_d r_{bd}(b_a - b_a^*)$;

2) $\lambda \neq 0$: $N_3 = \varphi_t - \varphi_t^* - \tau_a (\varphi_a - \varphi_a^*)$,

$R_j^4 = \tau_{a_0} \tau_{a_j} \varphi_{a_0 a_1} \ldots \varphi_{a_{j-1} a_j}$,

где $\tau_a = (\varphi_b \varphi_t + \lambda \varphi_{bt})\hat{r}_{ab}$, $\{ \hat{r}_{ab} \} = \{ \lambda \varphi_{ab} + \varphi_a \varphi_b \}^{-1}$.

III. S_j^l вида (5.24).

Базис абсолютных инвариантов:

I) $\lambda \neq 0$:

$N_1 e^{\frac{4}{\lambda}(\varphi + \varphi^*)}$, $N_1^* e^{\frac{4}{\lambda}(\varphi+\varphi^*)}$, $N_3 e^{\frac{3}{\lambda}(\varphi+\varphi^*)}$;

$R_j^k e^{\frac{2}{\lambda}(j+1)(\varphi+\varphi^*)}$ $(k = 1, 2, 3)$; $S_j^l e^{\frac{2}{\lambda}(j+1)(\varphi+\varphi^*)}$,

$l = 0, 1, \ldots, j$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

2) $\lambda = 0$: $\varphi + \varphi^*$,

$$\frac{N_1^2}{N_2}, \quad \frac{N_1^{*2}}{N_2}, \quad \frac{S_j^l}{N_1^{\frac{j+1}{2}}}, \quad \frac{R_j^k}{N_1^{\frac{j+1}{2}}} \quad (k = 1, 2, 4),$$

$l = 0, 1, \ldots, j$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

N_k, S_j^l, R_j^k имеют вид (5.27).

Из построенных дифференциальных инвариантов можно получить инварианты алгебры $AG_2(1,n)$ (5.19) при помощи замены (5.20).

5.3. Инвариантные уравнения.

Полученные результаты позволяют построить новые классы инвариантных уравнений. Например, уравнения вида

$$\varphi_t = F(\varphi_a, \varphi_{at}, \varphi_{ab}), \tag{5.28}$$

инвариантные относительно алгебры (5.26), $\mu \neq 0$, описывает следующая теорема.

Теорема 5.2. Уравнение (5.28) инвариантно относительно алгебры $AG_1(1,n)$ (5.6), $\mu \neq 0$ только в случае, если

$$F = \Phi(R^j, S^j) - \frac{\varphi_a \varphi_a}{2\mu},$$

где R^j, S^j имеют вид (5.11).

Доказательство теоремы следует из требования эквивалентности (5.28) выражению $\Psi(M_1, S_j, R_j)$.

Из инвариантов алгебры $AG_1(1,n)$ (5.2) аналогично получается вид уравнения (5.28), инвариантного относительно этой алгебры.

Уравнение

$$\varphi_{tt} = F(\varphi_t, \varphi_a, \varphi_{at}, \varphi_{ab})$$

инвариантно относительно алгебры $AG_1(1,n)$ $(\mu \neq 0)$ если

$$F = -\frac{1}{\mu^2}(2\mu\varphi_a\varphi_{at} + \varphi_a\varphi_b\varphi_{ab}) + \Phi(R_j, S_j, M_1),$$

M_1 , R_j , S_j имеют вид (5.II).

Таким же способом можно построить новые классы инвариантных уравнений и для комплексной скалярной функции.

§ 6. Комплексное обобщение уравнения Гамильтона-Якоби и его решения

Известно [23], что нерелятивистское уравнение Гамильтона--Якоби

$$2\mu \varphi_t + \varphi_a \varphi_a = 0, \tag{6.1}$$

имеет широкую алгебру инвариантности, базис которой состоит из $\frac{1}{2}(n+3)(n+4)$ операторов

$$\begin{aligned}
&\partial_t, \ \partial_a, \ \partial_\varphi, \quad J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a, \\
&G_a = t\partial_a + \mu x_a \partial_\varphi, \\
&H_a = \varphi \partial_a + \mu x_a \partial_t, \\
&D = 2t\partial_t + x_a \partial_a, \\
&E = t\partial_t - \varphi \partial_\varphi, \ B = \varphi^2 \partial_\varphi + x_a \varphi \partial_a + \frac{\mu x^2}{2}\partial_t, \\
&A = t^2 \partial_t + x_a t \partial_a + \mu \frac{x^2}{2}\partial_\varphi, \\
&K = 2x_a x_b \partial_b - x^2 \partial_a + 2x_a t \partial_t + 2x_a \varphi \partial_\varphi - \frac{2}{\mu}\varphi t \partial_a.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Алгебру $H(1,n) = \{\partial_t, \partial_a, \partial_\varphi, J_{ab}, G_a, H_a\}$ будем называть алгеброй Гамильтона. Интересно отметить, что операторы G_a и H_a , A и B переходят друг в друга при замене $\varphi \to t$, $t \to \dot{\varphi}$.

Найдем комплексное уравнение первого порядка, инвариантное относительно алгебры Гамильтона с базисными операторами

$$
\begin{aligned}
&\partial_a,\ \partial_t,\ \partial_\varphi,\ \partial_{\varphi^*},\ J_{ab},\\
&G_a = t\,\partial_a + i m x_a\,(\partial_\varphi - \partial_{\varphi^*}),\\
&H_a = (\varphi - \varphi^*)\,\partial_a + 2 i m x_a\,\partial_t.
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
&w = (\varphi_a + \varphi_a^*)(\varphi_a + \varphi_a^*),\\
&M = 2im\,\varphi_t + \varphi_a \varphi_a,\\
&M^* = -2im\,\varphi_t^* + \varphi_a^* \varphi_a^* \ -
\end{aligned}
$$

– инварианты первого порядка алгебры Галилея. Комплексные инварианты алгебры Гамильтона ищем в виде

$$F = F(w, M, M^*).$$

Согласно определению 0.5 дифференциального инварианта получаем уравнения на инварианты:

$$(M + 3M^* - w)F_{M^*} - 2(M - M^*)F_w = 0,$$

$$(w - 3M - M^*)F_M - 2(M - M^*)F_w = 0.$$

Решая эту систему, получаем выражение для абсолютного инварианта алгебры $H(1,n)$ с базисными операторами (6.3):

$$\frac{(w - M - M^*)^2 - 4MM^*}{w - 2M - 2M^*}. \tag{6.4}$$

Таким образом, $H(1,n)$ - инвариантное комплексное уравнение первого порядка имеет вид

$$(w - M - M^*)^2 - 4MM^* = \lambda (w - 2M - 2M^*). \tag{6.5}$$

Наиболее простое из уравнений вида (6.5)

$$(\varphi_a \varphi_a^* - im\varphi_t + im\varphi_t^*)^2 - (\varphi_a\varphi_a + 2im\varphi_t)\times$$
$$\times(\varphi_a^*\varphi_a^* - 2im\varphi_t^*) = 0 \tag{6.6}$$

можно считать комплексным аналогом уравнения Гамильтона-Якоби (6.I). Левые части обоих уравнений представляют собой относительные дифференциальные инварианты алгебр Гамильтона с базисными операторами (6.2) и (6.3).

Справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 6.I</u>. Максимальная локальная симметрия уравнения (6.6) определяется алгеброй, базисные элементы которой имеют вид

$$\begin{aligned}
&\partial_a,\ \partial_t,\ \partial_\varphi,\ \partial_{\varphi^*},\ J_{ab},\\
&G_a = t\partial_a + imx_a(\partial_\varphi - \partial_{\varphi^*}),\\
&H_a = (\varphi-\varphi^*)\partial_a + 2imx_a\partial_t,\\
&D = x_a\partial_a + (\varphi-\varphi^*)(\partial_\varphi - \partial_{\varphi^*}),\\
&E = t\partial_t + \varphi^*\partial_\varphi - \varphi\partial_{\varphi^*},\\
&B = x_b(\varphi-\varphi^*)\partial_b + imx^2\partial_t +\\
&+\frac{1}{2}(\varphi-\varphi^*)^2(\partial_\varphi - \partial_{\varphi^*}).
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Доказательство теоремы проводится посредством применения алгоритма Ли.

Решения комплексного уравнения Гамильтона-Якоби можно получить при помощи редукции по подалгебрам его алгебры инвариантности. Приведем несколько галилеевски-инвариантных анзацев, построенных аналогично анзацам для нелинейного уравнения Шредингера [58] .

$$\varphi = g(x) + \psi(\omega_1, \omega_2). \tag{6.8}$$

(I) $g(x) = \frac{imx^2}{2t}, \quad \omega_1 = \frac{\alpha x}{t}, \quad \omega_2 = \frac{x^2}{t^2};$

(2) $g(x) = 0, \quad \omega_1 = t, \quad \omega_2 = \sqrt{x^2};$

(6.9)

(3) $g(x) = 0, \quad \omega_1 = t, \quad \omega_2 = \alpha x, \quad \alpha^2 = 1;$

(4) $g(x) = 0, \quad \omega_1 = t, \quad \omega_2 = \sqrt{x^2 - (\alpha x)^2}, \quad \alpha^2 = 1;$

(5) $g(x) = \frac{imx^2}{2t}, \quad \omega_1 = \alpha x, \quad \omega_2 = t.$

Редуцированные уравнения для таких анзацев имеют следующий вид

(I) $\psi_1 \psi_2^* - \psi_2 \psi_1^* = 0;$

(2) – (4) $2(\psi_2 \psi_1^* - \psi_1 \psi_2^*)(\psi_2 + \psi_2^*) +$ (6.IO)

$+ im(\psi_1 + \psi_1^*) = 0;$

(5) $2\alpha^2 \{(\psi_1 + \psi_1^*)(\psi_1 \psi_2^* - \psi_1^* \psi_2)\} +$

$+ im\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}(\psi_1^* + \psi_1) + \psi_2 + \psi_2^*\right)^2 = 0.$

Решения редуцированных уравнений (6.10) и анзацы (6.8), (6.9) дают решения комплексного уравнения Гамильтона-Якоби.

$$u = \frac{imx^2}{2t} + \psi\left(\frac{\alpha x}{t} + c\,\frac{x^2}{t}\right);$$

$$u = \frac{imx^2}{2t} + \psi\left(\frac{\alpha x}{t}\right) + if(t);$$

$$u = \frac{imc^2}{4}t + \psi(\omega + ct),$$

где $\omega = \alpha x$, $\sqrt{x^2}$, $\sqrt{x^2-(\alpha x)^2}$, $\alpha^2 = -1$ ($\omega_a\omega_a = 1$). ψ – произвольная комплексная функция, f – произвольная действительная, c – произвольное действительное число.

В [58] приведена формула размножения решений при помощи преобразований из группы Галилея. Если $u = u_1(x)$ есть решение уравнения, инвариантного относительно операторов G_a (6.3), то новое решение такого уравнения может быть найдено по формуле

$$u_2 = im\left(\tfrac{1}{2}\vec{v}^2 t + \vec{v}\vec{x}\right) + u_1(t, \vec{x} + \vec{v}t),$$

v_a – произвольные действительные параметры.

Используя аналогию между операторами G_a и H_a (6.3), можно вывести формулу преобразований, порождаемых операторами H_a :

$$u_3 = u_1\left(t - im\left(\tfrac{1}{2}\vec{v}^2 u_3 + \vec{v}\vec{x}\right), \vec{x} + \vec{v}u_3\right)$$

Задаваемая в неявном виде функция $u = u_3(x)$ будет решением уравнения (6.6), если $u = u_1(x)$ – его решение.

§ 7. Точные решения нелинейного уравнения Шредингера.

Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера

$$2im\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_a\partial x_a}=\psi F(|\psi|), \qquad (7.1)$$

где $a=1, \ldots, n$, $\psi=\psi(t,x_1,\ldots,x_n)$ – комплексозначная функция, $|\psi|=\sqrt{\psi\psi^*}$, звездочка обозначает комплексное сопряжение. Все рассматриваемые функции предполагаются дважды дифференцируемыми.

Будем искать точные решения уравнения (7.1) с произвольной функцией $F=F(|\psi|)$.

Известно (см. [58] и цитируемую там литературу), что уравнение (7.1) инвариантно относительно алгебры Галилея с базисными операторами

$$\begin{aligned} &p_0=i\frac{\partial}{\partial x_0}, \quad p_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a},\\ &J_{ab}=x_ap_b-x_bp_a,\\ &J=\psi\frac{\partial}{\partial\psi}-\psi^*\frac{\partial}{\partial\psi^*},\\ &G_a=x_0p_a+mx_aJ, \quad a,b=1,\ldots,n. \end{aligned} \qquad (7.2)$$

Это свойство уравнения (7.1) позволяет искать его решения с помощью симметрийных анзацев [18]

$$\psi=f(t,\vec{x})\,\varphi(\omega). \qquad (7.3)$$

Таким способом в [58] построены многопараметрические семейства решений уравнения (7.1), где $F=\lambda|\psi|^{4/n}$, $n=3$.

Это уравнение можно редуцировать к системе обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи анзацев вида (7.3) (алгоритм построения симметрийных анзацев приведен, например, в [50]), однако полученные уравнения, как правило, не решаются в квадратурах.

Поэтому для нахождения точных решений нелинейных уравнений вида (7.I) целесообразно специально искать анзацы, приводящие к разрешимым в квадратурах системам обыкновенных уравнений.

Ограничимся случаем, когда в (7.3) $f(t,\vec{x}) \equiv 1$ и будем искать условия на ω, необходимые для редукции уравнения (7.3) с произвольной функцией F.

Подставляя анзац

$$\psi = \varphi(\omega) \tag{7.4}$$

в (7.I), получаем уравнение

$$2im\,\varphi'\omega_t + \omega_a\omega_a\,\varphi'' + \omega_{aa}\,\varphi' = \varphi\, F(|\varphi|),$$

$$\omega_a = \frac{\partial\omega}{\partial x_a}, \quad \omega_t = \frac{\partial\omega}{\partial t}, \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{d\omega}.$$

Новую переменную ω будем считать действительной. В этом случае для редукции уравнения (7.I) с помощью анзаца (7.4) переменная ω должна удовлетворять следующим условиям:

$$\omega_t = \chi(\omega); \tag{7.5}$$

$$\omega_a\omega_a = \tau(\omega), \qquad \omega_{aa} = \theta(\omega). \tag{7.6}$$

Так как ω принимает только действительные значения, то $\tau(\omega) \equiv 0$ только если $\omega = const$; поэтому без ограничения общности можем считать, что $\tau(\omega) = 1$

В работе [47] проведен анализ совместности и решений системы (7.6) для $n = 3$. Используя эти результаты, полагаем, что

$$\theta(\omega) = \frac{N}{\omega - A}, \quad N = 0, 1, \ldots, n, \quad A = const.$$

При $n = 3$ такое выражение для h следует из требования совместности системы (7.6).

Перейдем от уравнений (7.5), (7.6) к системе

$$\begin{aligned} &\omega_t = \chi(\omega), \\ &\omega_a \omega_a = 1, \\ &\omega_{aa} = \frac{N}{\omega - A}. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Аналогично § 3 получаем решения системы (7.7):

I) $N = 0$:

$$\omega = \alpha_a x_a + Bt + C,$$

$$\chi(\omega) = B,$$

$$\alpha_a \alpha_a = 1,$$

α_a, B, C – постоянные.

2) $N = 1, \ldots, n$:

$$\omega = \sqrt{(\alpha_a^i y_a)(\alpha_b^i y_b)} + Bt + C,$$

$$i = 1, \ldots, N, \quad \alpha_a^i \alpha_a^j = \delta^{ij}, \quad y_b = x_b + a_b,$$

a_b, B, C – произвольные постоянные.

Уравнение (7.I) при таких ω редуцируется к виду

$$2imB\varphi' + \frac{N}{\omega - A}\varphi' + \varphi'' = \varphi F(|\varphi|) \tag{7.8}$$

Заменой $\varphi = e^{i\theta} r$ (7.8) приводится к системе уравнений для действительных функций

$$\begin{aligned} &r'' - 2mBr\theta' + \frac{N}{\omega - A}r' - r\theta'^2 = rF(r), \\ &2mBr' + 2r'\theta' + r\theta'' + \frac{N}{\omega - A}r\theta' = 0. \end{aligned} \tag{7.9}$$

При $N = 0$ получается общее решение системы (7.9) в квадратурах

$$\begin{aligned} \omega = \int \Big\{ 2\int \Big[rF(r) + 2mBr\left(\frac{c_1}{r^2} - mB\right) + \\ + r\left(\frac{c_1}{r^2} - mB\right)^2 \Big] dr \Big\}^{-1/2} dr, \end{aligned} \tag{7.10}$$

$$\theta = \int \frac{c_1}{r^2}\, d\omega - mB\omega.$$

Известно [9], что решения уравнений, инвариантных относительно некоторой группы, могут быть размножены преобразованиями из этой группы. В частности, если $\psi = \psi(t, \vec{x})$ решение уравнения, инвариантного относительно алгебры Галилея с базисными операторами (7.2), то

$$\psi^{(1)} = \exp[im(\tfrac{1}{2} v_a v_a t + v_a x_a)] \times$$
$$\times \psi(t, \vec{x} + \vec{v}t), \quad \vec{v} = (v_1, \ldots, v_n), \quad v_a = const. \tag{7.11}$$

также будет решением этого уравнения [58]. Многопараметрическое семейство решений будет галилеевски-инвариантным, если оно сохраняет свою форму при применении преобразования (7.11).

Из решений (7.10) получается следующее галилеевски-инвариантное семейство:

$$\omega = \alpha_a x_a + (\alpha_a v_a + B)t + C =$$
$$= \int \Big\{ 2 \int [r F(r) + 2mBr\Big(\frac{C_1}{r^2} - mB\Big) +$$
$$+ r\Big(\frac{C_1}{r^2} - mB\Big)^2] dr \Big\}^{-1/2} dr,$$

$$\theta = -m\Big(\frac{v_a v_a}{2} t + v_a x_a\Big) - mB\omega +$$

$$+ \int \frac{C_1}{r^2} d\omega.$$

Для произвольной функции F мы построили решения уравнения (7.1) в неявном виде. При некоторых F эти неявные выражения можно проинтегрировать в элементарных функциях. Например, при

$$F(r) = \frac{d}{dr} \frac{1}{r} [(S'(r))^{-2} - C_2 + \frac{C_1^2}{r^2}],$$

$S(r)$ – произвольная элементарная функция, решение системы (7.9) имеет вид

$$\begin{aligned} &\varphi = re^{i\theta}, \\ &r = \sigma(\omega); \quad \omega = S(r), \\ &\theta = \int \frac{C_1}{r^2} d\omega, \quad \omega = \alpha_a x_a + C. \end{aligned} \qquad (7.12)$$

Пример. Пусть

$$F = -\left(\lambda^2 r^{\kappa} + \frac{\mu^2}{r^4}\right),$$

тогда $\psi = re^{i\theta}$,

$$r = \frac{\lambda\sqrt{2}}{2\kappa}\,\omega^{-2\kappa},$$

$$\theta = \frac{2\kappa\lambda\mu}{\sqrt{3}\,(1-2\kappa)}\,\omega^{1-2\kappa} + C,$$

где $\omega = \alpha_a x_a + C$.

При $B = 0$, $F = \lambda|\psi|^{\kappa}$ можно найти решения типа (7.10), используя для системы (7.9) замену

$$z = (\omega - A)^{1-N},$$

$$r = z^{\frac{2}{\kappa}}\rho.$$

В этом случае получаются стационарные решения в параметрической форме

$$\psi = re^{i\theta},$$

$$r = \rho\left(C_3 + (N-1)\int\left(\frac{\lambda}{k+1}\rho^{2k+2} + \frac{C_1^2}{\rho^2} + C_4\right)^{-1/2} d\rho\right),$$

$$\theta = C_1 (N-1)^2 \int \rho^{-2}\left(\frac{\lambda}{k+1}\rho^{2k+2} + \frac{C_1^2}{\rho^2} + C_4\right)^{-1/2} d\rho - C_2 \qquad (7.13)$$

$$\omega = \left\{C_3 + (N-1)\int\left(\frac{\lambda}{k+1}\rho^{2k+2} + \frac{C_1^2}{\rho^2} + C_4\right)^{-1/2} d\rho\right\}^{\frac{1}{N-1}}.$$

Здесь $C_1 \neq 0$, C_2 , C_3 , C_4 – постоянные, выбранные таким образом, чтобы r , θ , ω были действительными.

Применив к (7.12), (7.13) преобразование (7.11), можно получить многопараметрические семейства решений, зависящих от времени.

Глава III. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

В третьей главе проведена групповая классификация системы уравнений для комплексного векторного потенциала

$$
\begin{aligned}
&p_\mu p_\mu A_\nu - p_\nu p_\mu A_\mu = j_\nu, \\
&p_\mu p_\mu A^*_\nu - p_\nu p_\mu A^*_\mu = j^*_\nu; \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3;
\end{aligned}
\qquad (8.\text{I})
$$

где $j_\nu = F_\nu (A_\mu, A^*_\mu)$; $j^*_\nu = F^*_\nu (A_\mu, A^*_\mu)$; а также найдены базисы дифференциальных инвариантов первого порядка алгебры Пуанкаре и конформной алгебры. Построены семейства решений линейной и нелинейной системы (8.I).

§ 8. Симметрийный анализ уравнений для комплексного векторного поля

Система уравнений (8.I) с нулевыми правыми частями в классе дифференциальных операторов первого порядка имеет алгебру инвариантности, определяемую следующими базисными операторами

$$p_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad I = A_\mu p_{A_\mu} + A^* p_{A^*_\mu}, \text{ где } p_{A_\mu} = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial A_\nu},$$

$$
\begin{aligned}
J_{\mu\nu} &= x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + A_\mu p_{A_\nu} - A_\nu p_{A_\mu} + \\
&+ A^*_\mu p_{A^*_\nu} - A^*_\nu p_{A^*_\mu}, \quad D = x_\mu p_\mu + \lambda I,
\end{aligned}
\qquad (8.2)
$$

$$Q_1 = A_\mu p_{A^*_\mu}, \quad Q_2 = A^*_\mu p_{A_\mu}, \quad K_\mu = 2x_\mu D + x_\nu x_\nu p_\mu +$$

$$+ 2x_\nu J_{\mu\nu} - 2x_\nu x_\mu p_\nu, \quad \lambda = -1.$$

В данном параграфе рассмотрена задача нахождения всех систем вида (8.I), инвариантных относительно алгебры (8.2) и ее подалгебр. Для действительного случая такая задача решена в работе [38].

В комплексном случае решение сформулированной задачи дает следующая теорема.

<u>Теорема 8.I</u>. Система уравнений (8.I) для комплексного векторного потенциала инвариантна относительно следующих алгебр:

I) $AP(1,3) = \{P_\mu, J_{\mu\nu}\}$,

если $F^\nu = A^\nu \varphi(S_1, S_2, S_3)$, $F^{*\nu} = A^{*\nu}\varphi^*(S_1, S_2, S_3)$,

где $S_1 = A_\mu A_\mu$, $S_2 = A^*_\mu A_\mu$, $S_3 = A^*_\mu A^*_\mu$.

2) $AP(1,3) \oplus D$, $D = x_\mu P_\mu + \lambda I$,

если $F^\nu = A^\nu S_1^{-1/\lambda}\psi\left(\frac{S_1}{S_2}, \frac{S_1}{S_3}\right)$;

3) $AP(1,3) \oplus Q$, $Q = Q_1 + \beta Q_2$, $\beta = \pm 1$;

если $F^\nu = A^\nu\left(\Phi + \frac{\varphi}{S_2}\left(-\frac{\omega_1}{\omega_2}\sqrt{\beta}\,(S_1 + \beta S_3) + i\right)\right)$, (8.3)

$\omega_1 = \sqrt{-\beta}\,(S_1 - \beta S_3)$, $\omega_2 = S_1 S_3 - S_2^2$, $\Phi = \Phi(\omega_1, \omega_2)$, $\varphi = \varphi(\omega_1, \omega_2)$;

4) $AP(1,3) \oplus Q \oplus D$,

если $F^\nu = A^\nu \omega_1^{-1/\lambda}\left(\Phi + \frac{\varphi\omega_1}{S_2}\left(-\sqrt{\beta}\frac{\omega_1}{\omega_2}(S_1 + \beta S_3) + i\right)\right)$, (8.4)

$\Phi = \Phi\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2}\right)$, $\varphi = \varphi\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2}\right)$;

5) $AC(1,3) = AP(1,3) \oplus D \oplus \{K_\mu\}$,

если $F^\nu = A^\nu S_1 \psi\left(\frac{S_1}{S_2}, \frac{S_1}{S_3}\right)$; (8.5)

6) $AC(1,3) \oplus Q$,

если F^{ν} имеет вид (8.4) при $\lambda = -1$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно по алгоритму Ли [9] получить уравнения на функции F^{ν}, $F^{*\nu}$. Ясно, что $F^{*\nu}$ является комплексно сопряженной к F^{ν}, поэтому выпишем только условия на F^{ν}:

$$\eta^{\mu}_{A_\lambda} F^{\lambda} + \eta^{\mu}_{A^*_\lambda} F^{*\lambda} - 2\xi^0_0 F^{\mu} = \eta^{\nu} F^{\mu}_{A_\nu} + \eta^{*\nu} F^{\mu}_{A^*_\nu},$$

где η^{μ}, $\eta^{*\mu}$, ξ^{μ} – коэффициенты инфинитезимального оператора $X = \eta^{\mu}_{P_{A_\mu}} + \eta^{*}_{\mu} P_{A^*_\mu} + \xi^{\mu} P_{\mu}$.

Для конкретных операторов получаются следующие условия инвариантности:

I) $AP(1,3)$:

$$C_{\mu\alpha} F^{\alpha} = C_{\alpha\beta} \left(F^{\mu}_{A_\beta} A_{\alpha} + F^{\mu}_{A^*_\beta} A^*_{\alpha} \right),$$

$C_{\mu\alpha}$ – антисимметричный тензор;

2) $AP(1,3) \oplus D$:

$$(\lambda - 2) F^{\mu} = \lambda \left(F^{\mu}_{A_\nu} A_{\nu} + F^{\mu}_{A^*_\nu} A^*_{\nu} \right); \tag{8.6}$$

3) $AP(1,3) \oplus Q$.

Рассмотрим оператор $\alpha Q_1 + \beta Q_2$. Уравнения на F^{μ} и $F^{*\mu}$ для этого оператора будут выглядеть следующим образом:

$$\beta F^{*\mu} = \alpha F^{\mu}_{A^*_\nu} A_{\nu} + \beta F^{\mu}_{A_\nu} A^*_{\nu},$$

$$\alpha F^{\mu} = \alpha F^{*\mu}_{A^*_\nu} A_{\nu} + \beta F^{*\mu}_{A_\nu} A^*_{\nu}.$$

Ясно, что сопряженное к первому уравнению должно быть эквивалентно второму, если $F^{\mu} \not\equiv 0$. отсюда получаем $\alpha\alpha^* = \beta\beta^*$. Пусть $\alpha = 1$, тогда $\beta \in R$ может принимать значения 1, -1. Так как система (8.I) должна быть инвариантна относительно алгебры Пуанкаре, то F^{μ} и $F^{*\mu}$ можно искать в виде

$$F^{\mu} = A^{\mu}\,\psi\,(S_1, S_2, S_3), \quad F^{*\mu} = A^{*\mu}\,\psi^*\,(S_1, S_2, S_3).$$

Из S_1, S_2, S_3 строятся следующие абсолютные инварианты алгебры $AP(1,3) \oplus Q$, $\omega_1 = S_1 - \beta S_3$, $\omega_2 = S_1 S_3 - S_2^2$ – действительные для $\beta = \pm 1$.

Решая систему определяющих уравнений, получаем, что

$$\psi = \Phi\,(\omega_1, \omega_2) + \frac{\varphi\,(\omega_1, \omega_2)}{S_2}\left(-\frac{\omega_1\sqrt{\beta}}{\omega_2}\,(S_1 + \beta S_3) + i\right).$$

4) $AP(1,3) \oplus Q \oplus D$: F^{μ} ищем в виде (8.3). Получаем следующее уравнение на φ, Φ :

$$\Phi + \lambda\omega_1\Phi_{\omega_1} + 2\lambda\omega_2\Phi_{\omega_2} + \frac{1}{S_2}\Big(-\frac{\omega_1\sqrt{\beta}}{\omega_2}(S_1 + \beta S_3) + \tag{8.7}$$

$$+ i\Big)\Big)(\lambda\omega_1\varphi_{\omega_1} + \lambda\omega_2\varphi_{\omega_2} - \varphi(\lambda - 1)) = 0$$

решая которое, находим, что F^{μ}, $F^{*\mu}$ имеют вид (8.4).

5) $AC(1,3)$: в этом случае определяющее уравнение совпадает с (8.6) при $\lambda = -1$.

6) $AC(1,3) \oplus Q$: определяющее уравнение совпадает с (8.7) при $\lambda = -1$.

Решение определяющих уравнений дает функции, приведенные в условии теоремы.

Теорему 8.I можно обобщить на случай $F^{\nu} = F^{\nu}(A_{\mu}, A^*_{\mu}, A^{\mu}_{\nu}, A^{*\mu}_{\nu})$; $A^{\mu}_{\nu} = -i\,p_{\nu} A^{\mu}$.

Тогда произвольные функции в ее условии будут зависеть от дифференциальных инвариантов нулевого и первого порядка соответствующих алгебр с базисными операторами (8.2).

Для нахождения базисов таких инвариантов ограничимся вначале случаем, когда A_μ – действительная функция. Вместо A^μ_ν удобно рассматривать пару тензоров второго порядка

$$B_{\mu\nu} = A^\mu_\nu + A^\nu_\mu \quad \text{– симметричный тензор,}$$
$$B_{\mu\nu} = B_{\nu\mu}; \tag{8.8}$$
$$F_{\mu\nu} = A^\mu_\nu - A^\nu_\mu \quad \text{– антисимметричный тензор,}$$
$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}.$$

Базисные операторы алгебры Пуанкаре для тензоров $B_{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}$ и вектора A_μ будут иметь вид

$$\hat{J}_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + A_\mu p_{A_\nu} - A_\nu p_{A_\mu} +$$
$$+ B_{\mu\alpha} p_{B_{\nu\alpha}} - B_{\nu\alpha} p_{B_{\mu\alpha}} + F_{\mu\alpha} p_{F_{\nu\alpha}} - F_{\nu\alpha} p_{F_{\mu\alpha}}, \tag{8.9}$$

$$\mu, \nu, \alpha = 0, 1, 2, 3; \quad p_{B_{\nu\alpha}} = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial B_{\nu\alpha}}, \quad p_{F_{\mu\alpha}} = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial F_{\nu\alpha}}.$$

Величины A_μ, $B_{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}$ имеют 20 независимых компонент, ранг 6 операторов $\hat{J}_{\mu\nu}$ (8.9) равен 6; следовательно, для алгебры Пуанкаре с базисными операторами (8.9) можно построить 14 функционально независимых инвариантов от A_μ, $B_{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}$. Путем непосредственной подстановки в уравнение

$$\hat{J}_{\mu\nu}\, \Phi(A_\alpha, B_{\alpha\beta}, F_{\alpha\beta}) = 0 \tag{8.10}$$

легко показать, что выражения

$$S = A_\mu A_\mu, \ A_\mu B_{\mu\nu} A_\nu, \ A_\mu B_{\mu\nu} B_{\nu\alpha} A_\alpha, \tag{8.11}$$

$$A_\mu B_{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} A_\alpha, \ A_\mu F_{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} A_\beta, \ B_{\mu\mu},$$

$$B_{\mu\nu} B_{\mu\nu}, \ B_{\mu\nu} F_{\nu\alpha} F_{\alpha\mu}, \ B_{\mu\nu} B_{\nu\alpha} B_{\alpha\mu},$$

$$B_{\mu\nu} B_{\nu\alpha} B_{\alpha\beta} B_{\beta\mu}, \ F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \ F_{\alpha\beta} F_{\beta\nu} F_{\nu\mu} F_{\mu\alpha},$$

$$F_{\mu\nu} F_{\nu\alpha} B_{\alpha\beta} B_{\beta\mu}, \ F_{\mu\nu} B_{\nu\alpha} F_{\alpha\beta} B_{\beta\mu}$$

инвариантны относительно операторов $\hat{J}_{\mu\nu}$; их функциональная независимость следует из неравенства нулю якобиана.

Базис инвариантов алгебры Пуанкаре, дополненной масштабными преобразованиями $AP(1,3) \oplus D$ имеет вид

$$(A_\mu B_{\mu\nu} A_\nu)^{2\lambda} S^{1-3\lambda}, \ (A_\mu B_{\mu\nu} B_{\nu\alpha} A_\alpha)^{\lambda} S^{1-2\lambda},$$

$$(A_\mu B_{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} A_\nu)^{\lambda} S^{1-2\lambda}, \ (A_\mu F_{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} A_\beta)^{\lambda} S^{1-2\lambda}, \tag{8.12}$$

$$(B_{\nu\nu})^{2\lambda} S^{1-\lambda}, \ (B_{\mu\nu} B_{\mu\nu})^{\lambda} S^{1-\lambda}, \ (B_{\mu\nu} B_{\nu\alpha} \times$$

$$\times B_{\alpha\mu})^{2\lambda} S^{3(1-\lambda)}, \ (B_{\mu\nu} B_{\nu\alpha} B_{\alpha\mu} B_{\beta\mu})^{\lambda} S^{2(1-\lambda)},$$

$$(F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta})^{\lambda} S^{1-\lambda}, \ (F_{\alpha\beta} F_{\beta\nu} F_{\nu\mu} F_{\mu\alpha})^{\lambda} S^{2(1-\lambda)},$$

$$(B_{\mu\alpha} B_{\nu\alpha} F_{\alpha\beta} F_{\beta\mu})^{\lambda} S^{2(1-\lambda)}, \ (B_{\mu\nu} F_{\nu\alpha} B_{\alpha\beta} F_{\mu\beta})^{\lambda} \times$$

$$\times S^{2(1-\lambda)}, \ (B_{\mu\nu} F_{\nu\alpha} F_{\alpha\mu})^{2\lambda} S^{3(1-\lambda)}.$$

Для нахождения дифференциальных инвариантов конформной алгебры будем искать конформно ковариантные тензоры (см. § I). Для операторов K_μ (8.2) такие тензоры имеют вид

$$\hat{B}_{\mu\nu} = \left(A_\mu A_\nu (\lambda+1) - A_\beta A_\beta g_{\mu\nu}\right)\frac{B_{\alpha\alpha}}{\lambda+3} +$$

$$+ A_\alpha A_\alpha B_{\mu\nu} - A_\mu A_\alpha B_{\alpha\nu} - A_\nu A_\alpha B_{\alpha\mu} -$$

– симметричный тензор $(\lambda = -1)$, (8.I3)

$$\hat{F}_{\mu\nu} = A_\alpha A_\alpha F_{\mu\nu} - A_\alpha F_{\mu\alpha} A_\nu + A_\alpha F_{\nu\alpha} A_\mu -$$

– антисимметричный тензор. A_μ также является конформно ковариантным вектором. Количество независимых относительных инвариантов конформной алгебры равно I4 – 4 = I0; мы строим их из тензоров (8.I3) аналогично инвариантам (8.II).

$$A_\mu A_\mu,\ \hat{B}_{\nu\nu},\ \hat{B}_{\mu\nu}\hat{B}_{\mu\nu},\ \hat{B}_{\mu\nu}\hat{B}_{\nu\alpha}\hat{B}_{\alpha\mu},$$
$$\hat{B}_{\mu\nu}\hat{B}_{\nu\alpha}\hat{B}_{\alpha\beta}\hat{B}_{\beta\mu},\ \hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu}, \tag{8.I4}$$
$$\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\alpha}\hat{F}_{\alpha\beta}\hat{F}_{\beta\nu},\ \hat{B}_{\alpha\beta}\hat{F}_{\beta\mu}\hat{F}_{\alpha\mu},$$
$$\hat{B}_{\mu\nu}\hat{B}_{\nu\alpha}\hat{F}_{\alpha\beta}\hat{F}_{\beta\mu},\ \hat{B}_{\alpha\beta}\hat{F}_{\beta\mu}\hat{B}_{\nu\mu}\hat{F}_{\nu\alpha}.$$

Заметим, что инварианты типа $A_\mu \hat{B}_{\mu\nu} A_\nu$ будут функционально зависеть от инвариантов (8.I4).

Базис абсолютных инвариантов конформной алгебры $AC(1,3)$ для действительных A_μ имеет вид $(\hat{B}_{\nu\nu})S^{-2}$,

$$\hat{B}_{\alpha\beta}\hat{B}_{\alpha\beta}S^{-4},\ \hat{B}_{\alpha\beta}\hat{B}_{\beta\nu}\hat{B}_{\nu\alpha}\cdot S^{-6},\ \hat{B}_{\alpha\beta}\hat{B}_{\beta\nu}\hat{B}_{\nu\mu}\times$$
$$\times\hat{B}_{\mu\alpha}S^{-8},\ S^{-8}\hat{B}_{\mu\alpha}\hat{F}_{\alpha\beta}\hat{B}_{\beta\nu}\hat{F}_{\nu\mu},\ S^{-4}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu}, \tag{8.I5}$$
$$S^{-8}\hat{B}_{\mu\alpha}\hat{B}_{\alpha\beta}\hat{F}_{\beta\nu}\hat{F}_{\nu\mu},\ \hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}_{\nu\alpha}\hat{F}_{\alpha\beta}\hat{F}_{\beta\mu}\cdot S^{-8},$$

$$(\hat{B}_{\alpha\beta}\hat{F}_{\beta\mu}\hat{F}_{\mu\alpha})S^{-6};$$

где $\hat{B}_{\mu\alpha}$, $\hat{F}_{\mu\alpha}$ определяются формулами (8.13), (8.8).

Аналогично получаются базисы инвариантов для комплексной функции A_μ. Для алгебры Пуанкаре (8.2) они имеют вид

$$B_{\alpha\beta}B^*_{\alpha\beta},\ B^*_{\alpha\beta}B_{\beta\nu}B_{\nu\alpha},\ B^*_{\alpha\beta}B^*_{\beta\nu}B_{\nu\alpha},\ B^*_{\mu\alpha}B_{\alpha\beta}B_{\beta\nu}B_{\nu\mu},$$

$$B^*_{\mu\alpha}B^*_{\alpha\beta}B_{\beta\nu}B_{\nu\mu},\ B^*_{\mu\alpha}B^*_{\alpha\beta}B^*_{\beta\nu}B_{\nu\mu},$$

14 инвариантов (8.11) и 14 сопряженных им, где A_μ – комплекснозначная функция;

для алгебры $AP(1,3)\oplus D$ – $(\lambda\neq 0)$.

$$\frac{S}{S^*},\ (B_{\alpha\beta}B^*_{\alpha\beta})^{\lambda}S^{1-\lambda},\ (B^*_{\alpha\beta}B_{\alpha\mu}B_{\mu\beta})^{2\lambda}S^{3(1-\lambda)};$$

$$(B^*_{\alpha\beta}B^*_{\alpha\mu}B_{\mu\beta})^{2\lambda}S^{3(1-\lambda)},\ (B^*_{\mu\alpha}B_{\alpha\beta}B_{\beta\nu}B_{\nu\mu})^{\lambda}S^{2(1-\lambda)},$$

$$(B^*_{\mu\alpha}B^*_{\alpha\beta}B_{\beta\nu}B_{\nu\mu})^{\lambda}S^{2(1-\lambda)},\ (B^*_{\mu\alpha}B^*_{\alpha\beta}B^*_{\beta\nu}B_{\nu\mu})^{\lambda}S^{2(1-\lambda)},$$

13 инвариантов (8.2), где A_μ – комплекснозначная функция, и 13 сопряженных им;

для алгебр $AP(1,3)\oplus Q$, $AP(1,3)\oplus Q\oplus D$ базисы строятся из ковариантных тензоров

$$A_\mu + iA^*_\mu,\ B_{\mu\nu}+iB^*_{\mu\nu},\ F_{\mu\nu}+iF^*_{\mu\nu},$$

$$A_\mu - iA^*_\mu,\ B_{\mu\nu}-iB^*_{\mu\nu},\ F_{\mu\nu}-iF^*_{\mu\nu}.$$

Свертки таких тензоров представляют собой абсолютные инварианты (мы не приводим их из-за громоздкости) алгебры $AP(1,3)$

$\dotplus Q$ и относительные – алгебры $AP(1,3) \dotplus Q \dotplus D$, абсолютные инварианты которой строятся аналогично соответствующим инвариантам алгебры $AP(1,3) \dotplus D$.

Для алгебры $AC(1,3) = AP(1,3) \dotplus \{D, K_\mu\}$ независимые относительные инварианты представляют собой

1) 10 инвариантов (8.14) для комплексной функции A_μ и 10 сопряженных им инвариантов;

2) $\hat{B}_{\alpha\beta}\hat{B}^*_{\alpha\beta}$, $\hat{B}^*_{\alpha\beta}\hat{B}_{\beta\mu}\hat{B}_{\mu\alpha}$, $\hat{B}^*_{\alpha\beta}\hat{B}^*_{\beta\mu}\hat{B}_{\mu\alpha}$,

$\hat{B}^*_{\mu\nu}\hat{B}_{\nu\alpha}\hat{B}_{\alpha\beta}\hat{B}_{\beta\mu}$, $\hat{B}^*_{\mu\nu}\hat{B}^*_{\nu\alpha}\hat{B}_{\alpha\beta}\hat{B}_{\beta\nu}$,

$\hat{B}^*_{\mu\nu}\hat{B}^*_{\nu\alpha}\hat{B}^*_{\alpha\beta}\hat{B}_{\beta\mu}$;

3) $A^*_\mu\hat{B}_{\mu\nu}A^*_\nu$, $A^*_\mu\hat{B}_{\mu\nu}\hat{B}_{\nu\alpha}A^*_\alpha$,

$A^*_\mu\hat{B}_{\mu\nu}\hat{B}_{\nu\alpha}\hat{B}_{\alpha\beta}A^*_\beta$, $A^*_\mu\hat{B}_{\mu\nu}\hat{F}_{\nu\alpha}A^*_\alpha$.

Абсолютные инварианты строятся из них аналогично (8.15). Инварианты алгебры $AC(1,3) \dotplus Q$ строятся из ковариантных тензоров

$$A_\mu + iA^*_\mu,\ A_\mu - iA^*_\mu,\ \hat{B}_{\mu\nu} + i\hat{B}^*_{\mu\nu},\ \hat{B}_{\mu\nu} - i\hat{B}^*_{\mu\nu},$$

$$\hat{F}_{\mu\nu} + i\hat{F}^*_{\mu\nu},\ \hat{F}_{\mu\nu} - i\hat{F}^*_{\mu\nu},$$

$\hat{B}_{\mu\nu}$, $\hat{F}_{\mu\nu}$ имеют вид (8.13).

§ 9. Редукция и точные решения линейных и нелинейных уравнений для векторного поля

Рассмотрим нелинейную систему уравнений для векторного потенциала

$$P_\mu P_\mu A_\nu - P_\nu P_\mu A_\mu = F^\nu(A_\mu), \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \qquad (9.\mathrm{I})$$

В настоящем параграфе найдены решения уравнения (9.I) в случае, когда оно инвариантно относительно алгебры Пуанкаре $AP(1,3)$ с базисными операторами (8.2), то есть

$$F^\nu = F(A_\mu A_\mu) A_\nu. \qquad (9.2)$$

Для нахождения частных решений такой системы мы будем использовать редукцию по подалгебрам алгебры $AP(1,3)$. Анзацы и редуцированные уравнения для трехмерных подалгебр алгебры $AP(1,3)$ даны в приложении.

Для некоторых систем редуцированных уравнений удалось получить частные решения.

9.I. Решения линейной системы для векторного поля.

Приведем решения однородного уравнения для векторного потенциала ($F^\nu \equiv 0$), полученные как общие или частные решения редуцированных систем обыкновенных уравнений; здесь φ, ψ, ρ, f^i – произвольные функции, c^i d^i – произвольные константы.

I) $A_0 = c_1 x_1 + c_2, \quad A_2 = c_3 x_1 + c_4,$

$$A^1 = f(x_1), \quad A^3 = c_5 x_1 + c_6; \qquad (9.3)$$

$$A_3 = \rho(\omega)\, x_3 + x_0 \left(\frac{c_1}{\omega^2} + c_2\right),$$

$$\omega = |x_0^2 - x_3^2|^{1/2};$$

8) $$A_0 = (c_1 \sin \ln \omega + c_2 \cos \ln \omega)\, e^{\frac{1}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2}} +$$

$$+ (c_3 \cdot \sin \ln \omega + c_4 \cos \ln \omega)\, e^{-\frac{1}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2}},$$

$$A_1 = x_1 \varphi(\omega) - \left(\frac{c_5}{\omega^2} + c_6\right) x_2, \quad A_2 = x_1 \left(\frac{c_5}{\omega^2} + c_6\right) + x_2 \varphi(\omega),$$

$$A_3 = (c_1 \sin \ln \omega + c_2 \cos \ln \omega)\, e^{\frac{1}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2}} -$$

$$- (c_3 \sin \ln \omega + c_4 \cos \ln \omega)\, e^{-\frac{1}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2}},$$

$$\omega = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2};$$

9) $$A_0 = f_1(x_1 + i x_2, \omega_3) + f_3(x_1 - i x_2, \omega_3) - \rho_{\omega_3}(\vec{\omega}),$$

$$A_1 = \rho_{\omega_1}(\vec{\omega}) - f_3(\omega_3) - \varphi_{\omega_3}(x_1 - i x_2, \omega_3),$$

$$A_2 = \rho_{\omega_2}(\vec{\omega}),$$

$$A_3 = \varphi_{\omega_1}(x_1 + i x_2, \omega_3) + \psi_{\omega_1}(x_1 - i x_2, \omega_3) -$$

$$- f_1(x_1 + i x_2, \omega_3) - f_3(x_1 - i x_2, \omega_3) + \rho_{\omega_3}(\vec{\omega}),$$

$$\vec{\omega} = (x_1, x_2, x_0 + x_3);$$

I0) $$A_0 = f_1(x_1 + i x_2) + f_2(x_1 - i x_2)$$

$$A_1 = \varphi_{\omega_1}(x_1, x_2),$$

$$A_2 = \varphi_{\omega_2}(x_1, x_2) + \psi(x_2) + c x_1,$$

$$A_3 = f_3(x_1 + i x_2) + f_4(x_1 - i x_2);$$

II) $A_0 = \rho_{x_0}(x_0, x_1),$

$$A_1 = -\rho_{x_1}(x_0, x_1) + \varphi(x_1) + c\,x_0,$$

$$A_2 = f_1(x_0 + x_1) + f_2(x_0 - x_1),$$

$$A_3 = f_3(x_0 + x_1) + f_4(x_0 - x_1);$$

I2) $A_0 = x_0\,\rho(\omega) + \dfrac{x_1\,\psi(\omega) + \Phi(\omega)}{x_0 + x_3},$

$$A_1 = \psi(\omega) + x_1\,\rho(\omega),$$

$$A_2 = \frac{c_1}{\omega} + c_2,$$

$$A_3 = x_3\,\rho(\omega) - \frac{x_1\,\psi(\omega) + \Phi(\omega)}{x_0 + x_3},$$

$$\omega = |x_0^2 - x_1^2 - x_3^2|^{1/2}, \quad \rho = \rho(\omega),$$

$$\Phi = c_3,$$

$$\psi = \frac{c_5}{\omega} + c_6;$$

I3) $A_0 = x_0\,\rho(\omega) + \dfrac{1}{x_0 + x_3}\left(c_1 + \Phi(\omega)x_1 + \psi(\omega)x_2\right);$

$$A_1 = \rho(\omega)\,x_1 + \Phi(\omega),$$

$$A_2 = \rho(\omega)\,x_3 + \psi(\omega),$$

$$A_3 = \rho(\omega)\,x_3 - \frac{1}{x_0 + x_3}\left(c_1 + x_1\,\Phi(\omega) + \psi(\omega)x_2\right),$$

$$\Phi = \frac{c_2}{\omega^2} + c_3, \quad \psi = \frac{c_4}{\omega^2} + c_5,$$

$$\omega = |x_\mu x_\mu|^{1/2};$$

$$A_2 = \frac{2}{m^2} R'(x_2),$$

$$A_3 = R(x_2)(x_0 + x_3) - \frac{S(x_2)}{(x_0 + x_3)},$$

$$R = C_3 \sin m x_2 + C_4 \cos m x_2,$$

$$S = C_5 \sin m x_2 + C_6 \cos m x_2;$$

4) $$A_0 = (x_0 + x_3) R(x_2) + \frac{S x_1 + T + x_1^2 R}{x_0 + x_3},$$

$$A_1 = 2x_1 R + S,$$

$$A_2 = \frac{4}{m^2} R',$$

$$A_3 = (x_0 + x_3) R - \frac{S x_1 + T + x_1^2 R}{x_0 + x_3},$$

$$R = C_1 \sin m x_2 + C_2 \cos m x_2,$$

$$T = C_5 \sin m x_2 + C_6 \cos m x_2 - \frac{x_2}{m} (C_3 \cos m x_2 -$$

$$- C_4 \sin m x_2);$$

$$S = C_3 \sin m x_2 + C_4 \cos m x_2;$$

5) $$A_0 = C_1 \sin m x_2 + C_2 \cdot \cos m x_3,$$

$$A_1 = - R \sin \frac{x_0}{\alpha} + S \cos \frac{x_0}{\alpha},$$

$$A_2 = R \cos \frac{x_0}{\alpha} + S \sin \frac{x_0}{\alpha}, \quad A_3 = 0,$$

$$R = C_3 \sin \sqrt{m^2 + \frac{1}{\alpha^2}}\, x_3 + C_4 \cos \sqrt{m^2 + \frac{1}{\alpha^2}}\, x_3,$$

$$S = C_5 \sin \sqrt{m^2 + \frac{1}{\alpha^2}}\, x_3 + C_6 \cos \sqrt{m^2 + \frac{1}{\alpha^2}}\, x_3, \quad \alpha = const > 0;$$

6) $$A_0 = F^1 + \frac{1}{\alpha} (F^1 (x_0 + x_3)^2 + F^2 (x_0 + x_3) + F^3),$$

$$A^1 = \frac{1}{\alpha^2} (2 (x_0 + x_3) F^1 + F^2), \quad A_2 = 0,$$

$$A_3 = F^1 - \frac{1}{\alpha^2}\left(F^1 (x_0 + x_3)^2 + (x_0 + x_3) F^2 + F^3\right),$$

$$F^b(x_2) = c^b \sin m x_2 + d^b \cos m x_2, \quad \alpha = const > 0;$$

7) $$A_0 = \alpha F^1 - F^2 + \frac{F^1}{2\alpha}(x_0 + x_3)^2,$$

$$A_1 = (x_0 + x_3) F^1,$$

$$A_2 = F^3(\omega),$$

$$A_3 = F^2(\omega) - \frac{F^1}{2\alpha}(x_0 + x_3)^2,$$

$$F^b = c^b \sin \omega + d^b \cos \omega, \quad b = 1, 2, 3, \quad \alpha = const > 0,$$

$$\omega = 2\alpha m \left((x_0 + x_3)^2 - 2\alpha x_1\right);$$

8) $$A_0 = R(\omega)(x_0 + x_3) + \frac{S(\omega)}{x_0 + x_3},$$

$$A_1 = x_1 T(\omega) - x_2 P(\omega),$$

$$A_2 = x_1 P(\omega) + x_2 T(\omega),$$

$$\omega = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$$

$$R''\omega + R' + m^2 \omega R = 0,$$

$$S''\omega + S' + m^2 \omega S = 0,$$

$$P''\omega + 3P' + m^2 \omega P = 0,$$

$$T = \frac{4}{m^2} P';$$

9) $A_0 = R(\omega)$, $A_1 = -x^2 T(\omega)$,

$A_2 = x_1 T(\omega)$, $A_3 = S(\omega)$,

$R''\omega + R' + m^2 R\omega = 0$,

$S''\omega + S' + m^2 S\omega = 0$,

$T''\omega + 3T' + m^2 T\omega = 0$,

$\omega = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$;

I0) $A_0 = x_3\, S(\omega)$,

$A_1 = R(\omega)$,

$A_2 = T(\omega)$,

$A_3 = x_0\, S(\omega)$,

$S''\omega + 3\, S - m^2\omega\, S = 0$,

$R''\omega + R' - m^2\omega R = 0$,

$T''\omega + T' - m^2\omega T = 0$,

$\omega = |x_0^2 - x_3^2|^{1/2}$.

Решения (8–I0) выражаюся через функции Бесселя:

8) $R = Z_0^1(m\omega)$, $S = Z_0^2(m\omega)$,

$P = \frac{1}{\omega} Z_1(m\omega)$;

9) $R = Z_0^1(m\omega)$, $S = Z_0^2(m\omega)$,

$T = \frac{1}{\omega} Z_1(m\omega)$;

I0) $R = Z_0^1(im\omega)$, $T = Z_0^2(im\omega)$,

$$S = \frac{1}{\omega} Z_1 (im\omega),$$

где $Z_\nu = A J_\nu + B Y_\nu$, J_ν , Y_ν – функции Бесселя первого и второго рода, A , B – произвольные постоянные.

9.2. Решения нелинейной системы для векторного поля.

Задача решения редуцированных уравнений для нелинейной $AP(1,3)$ – инвариантной системы

$$p_\mu p_\mu A_\nu - p_\nu p_\mu A_\mu + A_\nu F(A_\mu A_\mu) = 0 \qquad (9.6)$$

является существенно более сложной, чем в линейном случае. Однако для некоторых из приведенных в приложении уравнений удается найти семейства точных решений.

Редукция по подалгебрам $\langle J_{12} + P_0 + P_3, P_1, P_2 \rangle$ и $\langle J_{12} + P_0 + P_3, J_{01} - J_{13}, J_{02} - J_{23} \rangle$ приводит к системам обыкновенных уравнений первого порядка.

$$A^0 = A^3 = 0,$$

$$4\varphi' = \psi F(-\varphi^2 - \psi^2),$$

$$-4\psi' = \varphi F(-\varphi^2 - \psi^2),$$

1) $A^1 = \varphi \sin(x_0 - x_3) + \psi \cos(x_0 - x_3)$, $A_2 = \varphi \cos(x_0 - x_3) + \psi \sin(x_0 - x_3)$, $\omega = x_0 + x_3$, $\varphi = \varphi(\omega)$, $\psi = \psi(\omega)$.

В этом случае

$$\varphi = C_2 \sin \lambda\omega + C_1 \cos \lambda\omega, \qquad (9.7)$$

$$\psi = C_1 \sin \lambda\omega - C_2 \cos \lambda\omega,$$

$$\lambda = \frac{1}{2} F(-C_1^2 - C_2^2).$$

2) $A_0 = x_0 S(\omega) + \frac{K}{\omega}$, $A_1 = x_1 S(\omega) + \varphi\cos\theta + \psi\sin\theta$,

$$A_2 = x_2 S(\omega) + \varphi\sin\theta - \psi\cos\theta, \tag{9.8}$$

$$A_3 = S(\omega) x_3 - \frac{K}{\omega}.$$

Здесь $K = \Phi(\omega) + x_1(\varphi\cos\theta + \psi\sin\theta) + x_2(\varphi\sin\theta - - \psi\cos\theta) - S x_\mu x_\mu$, $\omega = x_0 + x_3$, $\theta = \frac{x_\mu x_\mu}{2\theta}$

Для такого анзаца редуцированная система уравнений имеет вид

$$\Phi \equiv S \equiv 0,$$
$$2\left(\psi' + \frac{1}{\omega}\psi\right) = \varphi F(-\varphi^2 - \psi^2),$$
$$-2\left(\varphi' + \frac{1}{\omega}\varphi\right) = \psi F(-\varphi^2 - \psi^2);$$
$$\rho = \frac{1}{2}\int F\left(-\frac{c_1}{\omega^2}\right)d\omega, \tag{9.9}$$
$$\varphi = c_2\sin\rho + c_3\cos\rho,$$
$$\psi = c_2\cos\rho - c_3\sin\rho, \qquad c_2^2 + c_3^2 = c_1.$$

Анзац (9.8) и функции (9.9) дают следующее решение системы (9.6):

$$A_1 = \varphi\cos\theta + \psi\sin\theta,$$
$$A_2 = \varphi\sin\theta - \psi\cos\theta, \tag{9.10}$$
$$A_0 = -A_3 = \frac{1}{\omega}(x_1 A_1 + x_2 A_2).$$

Решения системы (9.6) в неявном виде можно получить при помощи анзацев, редуцирующих ее к системе

$$\pm\sigma'' = \sigma F(\Omega),$$
$$\pm\rho'' = \rho F(\Omega),$$
$$\pm\Phi'' = \Phi F(\Omega).$$

Приведем такие решения для $F(\Omega) = \lambda\Omega$.

I) $A_0 = 0$, $A_1 = r\,ch\,\theta$, $A_2 = r\,sh\,\theta\,\sin\alpha$,

$A_3 = r\,sh\,\theta\,\cos\alpha$, $\alpha = const$,

$r = r(x_1)$, $\theta = \theta(x_1)$: (9.II)

$$x_1 = \int \left(\frac{\lambda}{2} r^4 + \frac{c_1^2}{r^2} + c_2 \right)^{-1/2} dr,$$

$$\theta = c_1 \int \left(\frac{\lambda}{2} r^8 + c_1^2 r^2 + c_2 r^4 \right)^{-1/2} dr.$$

В нелинейном случае мы искали только действительные решения.

2) $A_0 = 0$, $A_1 = r\cos\theta$, $A_2 = r\sin\theta\sin\alpha$,

$A_3 = r\sin\theta\cos\alpha$, $\alpha = const$, $r = r(x_0)$, $\theta = \theta(x_0)$:

$$x_0 = \int \left(\frac{\lambda}{2} r^4 - \frac{c_1^2}{r^2} + c_2 \right)^{-1/2} dr,$$

$$\theta = c_1 \int \left(\frac{\lambda}{2} r^8 - c_1^2 r^2 + c_2 r^4 \right)^{-1/2} dr;$$

3) $A_0 = \sigma(\omega) + \alpha^2 \left(\sigma (x_0 + x_3)^2 + (x_0 + x_3)\rho + \varphi(\omega) \right)$,

$A_1 = \alpha \left(2(x_0 + x_3)\sigma + \rho(\omega) \right)$, $A_2 = 0$,

$A_3 = \sigma(\omega) - \alpha^2 \left((x_0 + x_3)^2 \sigma + (x_0 + x_3)\rho + \varphi(\omega) \right)$,

$\omega = x_2$, $\sigma = c_3\, r\, ch\,\theta$, $\rho = 2r\, sh\,\theta$

$$\Phi = \frac{1}{c_3} \; r \operatorname{ch} \theta ,$$

$$x_2 = \int \left(-\alpha^2 \lambda r^4 + \frac{c_1^2}{r^2} + c_2 \right)^{-1/2} dr ,$$

$$\theta = c_1 \int \left(-\alpha^2 \lambda r^8 + c_1^2 r^2 + c_2 r^4 \right)^{-1/2} dr ;$$

4) $A_0 = -\rho(\omega)$, $A_1 = 0$, $A_2 = \tau(\omega)$, $A_3 = \rho(\omega)$,

$$\omega = (x_0 + x_3)^2 - 2\alpha x_1 , \quad \alpha = \mathrm{const} > 0 ,$$

$$\omega = \int \left(\frac{\lambda}{8} \tau^4 + c_1 \right)^{-1/2} d\tau ,$$

$$\rho = (c_2 \omega + c_3) \tau .$$

Из приведенных решений с помощью операции группового размножения можно получить многопараметрические семейства решений [I2]

$$A'_\mu = \beta_{\mu\nu} A_\nu (\beta_{\mu\nu} x_\nu + \delta_\mu) ,$$

$$\beta_{0a} = \beta_{a0} , \quad \beta_{ab} = -\beta_{ba} , \quad \beta_{\mu\nu} \beta_{\nu\alpha} = g_{\mu\alpha} .$$

Приведем примеры пуанкаре-инвариантных семейств. Для уравнения (9.I), где $F_\nu \equiv 0$ из (3) (9.3) получаем семейство решений

$$A_\mu = \alpha_{\mu\nu} f_\nu (\beta y) ,$$

$$\alpha_{\mu\nu} \beta_\nu = \beta^2 = 0 ,$$

$$y_\nu = x_\nu + \delta_\nu .$$

Из (4) $\quad A_\mu = \delta_\mu \ln \left((\alpha y)^2 + (\beta y)^2 \right)$,

$$\alpha^2 = \beta^2 = -1 , \quad \alpha\beta = \alpha\delta = \beta\delta = 0 ;$$

(5) $$A_\mu = \delta_\mu \ln |(\alpha y)^2 - (\beta y)^2|,$$
$$\alpha^2 = -\beta^2 = 1, \quad \alpha\beta = \alpha\delta = \beta\delta = 0.$$

(6) $$A_\mu = \frac{\alpha_\mu \beta y}{\delta y}, \quad \alpha\delta = \delta^2 = \beta\delta = 0.$$

Для уравнения (9.4)

$$A_\mu = k_\mu \cos m\alpha y + l_\mu \sin m\alpha y,$$
$$\alpha^2 = 1, \ k_\mu \alpha_\mu = l_\mu \alpha_\mu = 0, \ y_\nu = x_\nu + \delta_\nu.$$

Для уравнения (9.6)

$$A_\mu = k_\mu \sin(\lambda \alpha x + \beta x) + l_\mu \cos(\lambda \alpha x + \beta x),$$
$$\lambda = \frac{1}{4} F(c_1), \quad k_\mu k_\mu = l_\mu l_\mu = -c_1, \tag{9.I2}$$
$$k_\mu l_\mu = \alpha^2 = \beta^2 = k_\mu \alpha_\mu = k_\mu \beta_\mu = l_\mu \alpha_\mu = l_\mu \beta_\mu = 0, \ \alpha_\mu \beta_\mu = 2.$$

Решения уравнения (9.6) при $F_\nu = \lambda A_\nu (A_\mu A_\mu)$ можно размножить также при помощи конформных преобразований [54]. Отметим, что решения (9.II), (9.I2) являются регулярными по λ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение приведем основные результ~~аты, полученные~~ в диссертации.

В первой главе построены функциональные базисы дифференциальных инвариантов второго порядка алгебр Евклида и Пуанкаре, а также их расширений для скалярных функций. Построены новые классы пуанкаре-инвариантных квазилинейных волновых уравнений для комплексного скалярного поля. Найдены многопараметрические семейства решений нелинейного комплексного волнового уравнения. Построены комплексные обобщения уравнений эйконала и Эйлера-Лагранжа, исследована их симметрия, найдены семейства их точных решений.

Во второй главе построены функциональные базисы дифференциальных инвариантов второго порядка алгебры Галилея для действительной и комплексной скалярных функций, найдены новые нелинейные инвариантные уравнения. Получено комплексное обобщение уравнения Гамильтона-Якоби, исследована его симметрия, найдены семейства точных решений. Построены в неявном виде точные решения галилеевски-инвариантного уравнения Шредингера с произвольной нелинейностью.

В третьей главе построены пуанкаре- и конформно-инвариантные нелинейные системы уравнений для комплексного векторного поля. Найдены базисы дифференциальных инвариантов первого порядка этих групп. Проведена редукция по трехмерным подалгебрам алгебры Пуанкаре и найдены семейства точных решений линейных и нелинейных систем уравнений для векторного поля.

Основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми и могут быть использованы при решении задач квантовой механики, теории поля для описания физических процессов, инвариантных относительно групп Пуанкаре, Галилея и конформной группы.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю члену-корреспонденту АН УССР, профессору В.И.Фущичу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. – М.: Гостехиздат, 1934. – 360 с.
2. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. – М.: Гос. изд-во иностр. лит, 1947. – 408 с.
3. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. – М.: Изд-во иностр. лит., 1947. – 358 с.
4. Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 240 с.
5. Ибрагимов Н.Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1967. – 57 с.
6. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. – М.: Наука, 1973.–416 с.
7. Спенсер Э. Теория инвариантов. – М.: Мир, 1974. – 158 с.
8. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. – 528 с.
9. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
10. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. – М.: Наука, 1980. – 317 с.
11. Миллер У. Разделение переменных. – М.: Мир, 1981. – 340 с.
12. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. – Киев: Наукова думка, 1983. – 196 с.
13. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1983. – 200 с.
14. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматгиз, 1961. – 704 с.
15. Джарджадзе Р.П., Погребков А.К., Поливанов М.К. Сингулярные решения $\Box\varphi + (\frac{m^2}{\lambda})\exp\varphi = 0$ и динамика особенностей// Теорет. и

и мат. физика. – I979. – 40, № 3. – С. 22I – 234.

I6. Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики//Докл. АН СССР. – I979. – 246, № 4. – С. 846-850.

I7. Фущич В.И. О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики//Теоретико-алгебраические исследования уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, I983. – С. 4-23.

I8. Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики//Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. – Киев: Ин-т математики АН УССР, I98I. – С. 6-28.

I9. Фущич В.И. О пуанкаре-, галилеево-инвариантных нелинейных уравнениях и методах их решений//Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, I985. – С. 4-I9.

20. Фущич В.И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений//Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, I987. – С. 4-I6.

2I. Фущич В.И. О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений//Укр. мат. журн. – I987. – 39, № I. – С. II6-I23.

22. Сегеда Ю.Н. Об инвариантных решениях нелинейного волнового уравнения//Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. – Киев: Ин-т математики АН УССР, I98I. – С. 54-58.

23. Штелень В.М. Касательные преобразования релятивистского уравнения Гамильтона-Якоби//Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, I983. – С. 63-66.

24. Фущич В.И., Серов Н.И. О некоторых точных решениях многомерного нелинейного уравнения Эйлера-Лагранжа//Докл. АН СССР. - 1984. - 278. - С. 847-851.

25. Серов Н.И. О симметрии одной нелинейной системы волновых уравнений//Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. - С. 128 - 130.

26. Шульга М.В. Симметрия и некоторые точные решения уравнения Даламбера с нелинейным условием//Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. - С. 36-38.

27. Егорченко И.А. О частных решениях двух систем нелинейных многомерных волновых уравнений//Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. - С. 47-54.

28. Егорченко И.А. Пуанкаре-инвариантные квазилинейные уравнения для комплекснозначных функций. - Киев, 1987. - 28 с. - (Препринт/Ин-т математики АН УССР; 87.3).

29. Фущич В.И., Егорченко И.А. О симметрийных свойствах комплекснозначных нелинейных волновых уравнений//Докл. АН СССР, - 1988. - 298, № 2. - С. 347-351.

30. Благодарный А.И. Системы дифференциальных уравнений, инвариантные относительно группы Галилея//Динамика сплошной среды. - Новосибирск, 1977. - № 30. - С. 71-87.

31. Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях//Диф. уравнения. - 1983. - 19, № 7. - С. 1215-1223.

32. Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения анизотропной теплопроводности с источником. – М., I982. – 20 с. – (Препринт/Ин-т прикл. математики АН СССР; № I37).

33. Фущич В.И., Штелень В.М. О линейных и нелинейных системах дифференциальных уравнений, инвариантных относительно группы Шредингера//Теорет. и мат. физика. – I983. – 56, № 3. – С. 387–394.

34. Чернига Р.М. О двумерных нелинейных уравнениях, инвариантных относительно алгебры Галилея//Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, I985. – С. I07–II4.

35. Серова М.М. О нелинейных уравнениях теплопроводности, инвариантных относительно групп Галилея//Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, I985. – С. II9–I23.

36. Баранник Л.Ф., Марченко В.А. О симметрийной редукции для четырехмерного уравнения теплопроводности//Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, I987. – С. 54–58.

37. Егорченко И.А. О групповой классификации уравнений для комплексного векторного потенциала//Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, I985. – С. 66–70.

38. Штелень В.М. Об одном способе построения точных решений многомерных линейных дифференциальных уравнений//Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, I987. – С. 3I–36.

39. Фущич В.И., Цифра И.М. О симметрии нелинейных уравнений

электродинамики//Теорет. и мат. физика. - I985. - 64, № I. - С. 4I-50.

40. Lie S. Gesammelte Abhandlungen. - Leipzig: B.G.Teubner. - Oslo: H.Aschehoug Co. Bd. 1, 1934; Bd. 2 (Teil I), 1935; Bd. 2 (Teil 2), 1937; Bd. 3, 1922; Bd. 4, 1929; Bd. 5, 1924; Bd. 6, 1927.

41. Lie S. Über Differentialinvarianten//Math. Ann. - 1884. - 24, N 1. - S. 52-89.

42. Tresse A. Sur les invariants differentiels des groupes continus des transformations//Acta math. - 1894. - 18. - P. 1-88.

43. Vessiot E. Sur l´integration des sistems differentiels qui admittent des groupes continus de transformations//Acta math. - 1904. - 28. - P. 307-349.

44. Olver P.J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. - New York: Springer-Verlag, 1987. - 498 pp.

45. Fushchich W.I., Nikitin A.G. Symmetries of ~~Maxwell´s~~ Equations. - Dordrecht: D.Reidel Publishing Company, 1987. - 214 pp.

46. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation//Phys. Rev. Lett. - 1967. - 19. - P. 1095-1097.

47. Collins C.B. Complex potential equations. I//Math. Proc. Camb. Phil. Soc. - 1976. - 80. - P. 165-187.

48. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H. Subgroups of the Poincaré group and their invariants//J. Math. Phys. - 1976. - 17. - P. 977-984.

49. Fushchich W.I., Shtelen W.M. The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation//Lett. Nuovo Cim. - 1982. - 41. - P. 372-374.

50. Fushchich W.I., Serov N.I. The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equation//J. Phys. A. - 1983. - 16. - P. 3645-3656.

51. Grundland A., Harnad J., Winternitz P. Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations//J. Math. Phys. - 1984. - 25. - P. 791-807.

52. Winternitz P., Grundland A.M., Tuszynski J.A. Exact solutions of the multidimensional classical φ^6-field equations obtained by symmetry reduction//J. Math. Phys. - 1987. - 28. - P. 2194-2212.

53. Grundland A.M., Tuszynski J.A. Symmetry breaking and bifurcation solutions in the classical complex φ^6-field theory//J. Phys. A. - 1987. - 20. - P. 6243-6258.

54. Goff J.A. Transformations leaving invariant the heat equation of physics//Amer. J. Math. - 1927. - 49. - P. 117-122.

55. Bluman G.W., Kumei S. On the remarcable nonlinear diffusion equation $\frac{\partial}{\partial x}[a(u+b)^{-2}\frac{\partial u}{\partial x}]-\frac{\partial u}{\partial t}=0$ //J. Math. Phys. - 1980. - 21. - P. 1019-1023.

56. Fushchich W.I., Moskaliuck S.S. On some exact solutions of the nonlinear Schrödinger equation in three spatial dimensions// Lett. Nuovo Cim. - 1981. - 31. - P. 571-576.

57. Fushchich W.I., Cherniga R.M. The Galilean relativistic principle and nonlinear PDE//J. Phys. A. - 1985. - 18. - P. 3491-3503.

58. Fushchich W.I., Serov N.I. On some exact solutions of the three-dimensional nonlinear Schrödinger equation//J. Phys. A. - 1987. - 20. - L929-933.

59. Fushchich W.I., Shtelen W.M. On some exact solutions of the nonlinear equations of quantum electrodynamics//Phys. Lett. -

1983. - 128B. - P. 215-217.

60. Michal A.D. Differential invariants and invariant partial differential equations under continious transformation groups in normed linear spaces//Proc. Nat. Acad. Sci. - 1951. - 37. - P. 623-627.

61. Fushchich W.I., Tsifra I.M. On a reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry//J. Phys. A. - 1987. - 20. - P. 45-48.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Редукция уравнений для векторного потенциала

$$P_\mu P_\mu A^\nu - P_\nu P_\mu A^\mu + A^\nu F(A^\mu A^\mu) = 0.$$

Анзацы и редуцированные уравнения.

Подалгебра	Анзац $\lambda, \alpha, \beta > 0$	Редуцированное уравнение	$\Omega = A_\mu A_\mu$
I.	II.	III.	IУ.
1. $\langle P_0, P_2, P_3 \rangle$	$A_\mu = A_\mu(x_1)$	$-A_0'' = A_0 F(\Omega)$ $0 = A_1 F(\Omega)$ $-A_2'' = A_2 F(\Omega)$ $-A_3'' = A_3 F(\Omega)$	$A_\mu A_\mu$.
2. $\langle P_0+P_3, P_1, P_2 \rangle$	$A_\mu = A_\mu(\omega)$, $\omega = x_0 + x_3$	$-A_0'' - A_3'' = A_0 F(\Omega)$ $0 = A_1 F(\Omega)$ $0 = A_2 F(\Omega)$ $A_0'' + A_3'' = A_3 F(\Omega)$	$A_\mu A_\mu$
3. $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$	$A_\mu = A_\mu(x_0)$	$0 = A_0 F(\Omega)$ $A_1'' = A_1 F(\Omega)$ $A_2'' = A_2 F(\Omega)$ $A_3'' = A_3 F(\Omega)$	$A_\mu A_\mu$

I.	II.	III.	IУ.
4. $\langle P_0, P_3, J_{12}\rangle$	$A_0 = A_0(\omega)$ $A_1 = x_1\varphi(\omega) - x_2\psi(\omega)$ $A_2 = x_1\psi(\omega) + x_2\varphi(\omega)$ $A_3 = A_3(\omega)$, $\omega = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$	$-\frac{1}{\omega}A_0' - A_0'' = A_0F(\Omega)$ $0 = \varphi F(\Omega)$ $-\frac{3}{\omega}\psi' - \psi'' = \psi F(\Omega)$ $-\frac{1}{\omega}A_3' - A_3'' = A_3F(\Omega)$	$A_0^2 - A_3^2 -$ $-\omega^2(\varphi^2 +$ $+\psi^2)$
5. $\langle J_{03}, P_1, P_2\rangle$	$A_0 = x_0\rho(\omega) + x_3\sigma(\omega)$ $A_1 = A_1(\omega)$ $A_2 = A_2(\omega)$ $A_3 = x_0\sigma(\omega) + x_3\rho(\omega)$ $\omega = (x_0^2 - x_3^2)^{1/2}$	$0 = \rho F(\Omega)$ $\frac{1}{\omega}A_1' + A_1'' = A_1F(\Omega)$ $\frac{1}{\omega}A_2' + A_2'' = A_2F(\Omega)$ $\frac{3}{\omega}\sigma' + \sigma'' = \sigma F(\Omega)$	$\omega^2(\rho^2 - \sigma^2) -$ $-A_1^2 - A_2^2$
6. $\langle J_{03}, P_0 + P_3, P_2\rangle$	$A_0 = (x_0 + x_3)\rho(\omega) +$ $+\dfrac{\sigma(\omega)}{x_0 + x_3}$ $A_1 = A_1(\omega)$ $A_2 = A_2(\omega)$ $A_3 = (x_0 + x_3)\rho(\omega) -$ $-(x_0 + x_3)^{-1}\sigma(\omega)$ $\omega = x_1$	$-\rho'' = \rho F(\Omega)$ $-A_1'' = A_1F(\Omega)$ $2\rho' = A_2F(\Omega)$ $-\sigma'' = \sigma F(\Omega)$	$4\rho\sigma -$ $-A_1^2 - A_2^2$
7. $\langle J_{03} + \lambda J_{12}, P_1, P_2\rangle$	$A_0 = x_0\rho(\omega) + x_3\sigma(\omega)$ $A_1 = \varphi\cos\theta + \psi\sin\theta$ $A_2 = \varphi(\omega)\sin\theta -$ $-\psi(\omega)\cos\theta$ $A_3 = x_3\rho(\omega) + x_0\sigma(\omega)$ $\theta = \lambda\ln\lvert x_0 + x_3\rvert$ $\omega = (x_0^2 - x_3^2)^{1/2}$	$0 = F(\Omega)$ $\sigma'' + \frac{3}{\omega}\sigma' = \sigma F(\Omega)$ $\varphi'' + \frac{1}{\omega}\varphi' + \frac{2\lambda}{\omega}\psi' = \varphi F(\Omega)$ $\psi'' + \frac{1}{\omega}\psi' - \frac{2\lambda}{\omega}\varphi' =$ $= \psi F(\Omega)$	$(\rho^2 - \sigma^2)\omega^2 -$ $-\varphi^2 - \psi^2$

I.	II.	III.	IY.
8. $\langle J_{03}+\lambda J_{12},\ P_0,\ P_3\rangle$	$A_0=\rho(\omega)e^{\theta}+\sigma(\omega)e^{-\theta}$ $A_1=x_1\varphi(\omega)-x_2\psi(\omega)$ $A_2=x_1\psi(\omega)+x_2\varphi(\omega)$ $A_3=\rho(\omega)e^{\theta}-\sigma(\omega)e^{-\theta}$ $\theta=\frac{1}{\lambda}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}$, $\omega=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$	$0=\varphi F(\Omega)$ $-\frac{3}{\omega}\psi'-\psi''=\psi F(\Omega)$ $-\frac{1}{\omega}\rho'-\rho''\frac{1}{\lambda^2\omega^2}\rho=$ $=\rho F(\Omega)$ $-\frac{1}{\omega}\sigma'-\sigma''\frac{1}{\lambda^2\omega^2}\sigma=$ $=\sigma F(\Omega)$	$4\rho\sigma-$ $-\omega^2(\varphi^2+$ $+\psi^2)$
9. $\langle J_{01}-J_{13},\ P_0+P_3,\ P_2\rangle$	$A_0=x_1\psi+\omega\sigma+$ $+\frac{x_1^2\sigma}{\omega}+\Phi(\omega)$ $A_1=\omega\psi+2x_1\sigma$ $A_2=A_2(\omega)$ $A_3=\omega\sigma-x'\psi-$ $-\Phi-\frac{x_1^2\sigma}{\omega}$ $\omega=x_0+x_3$	$0=\psi F(\Omega)$ $0=\sigma F(\Omega)$ $-6\sigma'-\frac{2\sigma}{\omega}-2\sigma''\omega=$ $=\Phi F(\Omega)$ $0=A_2F(\Omega)$	$4\sigma\Phi\omega-$ $-\psi^2\omega^2-$ $-A_2^2$
10. $\langle J_{03},\ J_{12},\ P_0+P_3\rangle$	$A_0=\rho(\omega)(x_0+x_3)+$ $+\sigma(x_0+x_3)^{-1}$ $A_1=x_1\varphi(\omega)-x_2\psi(\omega)$. $A_2=x_1\psi(\omega)+x_2\varphi(\omega)$ $A_3=\rho(\omega)(x_0+x_3)-$ $-\sigma(\omega)(x_0+x_3)^{-1}$ $\omega=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$	$-\frac{1}{\omega}\rho'-\rho''=\rho F(\Omega)$ $-\frac{1}{\omega}\sigma'-\sigma''=\sigma F(\Omega)$ $4\rho'=\varphi F(\Omega)$ $-\frac{3}{\omega}\psi'-\psi''=$ $=\psi F(\Omega)$	$4\rho\sigma-$ $-\omega^2(\varphi^2+$ $+\psi^2)$

I.	II.	III.	IУ.
II. $\langle J_{01}-J_{13},\ J_{02}-J_{23},\ P_0+P_3\rangle$	$A_0 = x_0\sigma(\omega) + x_1\varphi(\omega) + x_2\psi(\omega) + \Phi$ $A_1 = x_1\sigma(\omega) + \omega\varphi(\omega)$ $A_2 = x_2\sigma(\omega) + \omega\psi(\omega)$ $A_3 = x_3\sigma(\omega) - x_1\varphi(\omega) - x_2\psi(\omega) - \Phi$ $\Phi = \theta(\omega) - \dfrac{\sigma(\omega)x_\mu x_\mu}{2\omega}$ $\omega = x_0 + x_3$	$0 = \psi F(\Omega)$ $0 = \varphi F(\Omega)$ $0 = \sigma F(\Omega)$ $-\dfrac{2\sigma}{\omega} - 5\sigma' - \omega\sigma'' = \theta F(\Omega)$	$2\sigma\theta\omega - \varphi^2\omega^2 - \psi^2\omega^2$
I2. $\langle J_{01}-J_{13},\ J_{03},\ P_0+P_3\rangle$	$A_0 = \sigma(\omega)\theta + \theta^{-1}(\Phi(\omega) + \psi(\omega)x_1 + \sigma x_1^2)$ $A_1 = 2\sigma(\omega)x_1 + \psi(\omega)$ $A_2 = A_2(\omega)$ $A_3 = \sigma(\omega)\theta - \theta^{-1}(\Phi(\omega) + x_1^2\sigma(\omega) + x_1\psi(\omega))$ $\theta = x_0 + x_3,\quad \omega = x_2$	$-\psi'' = \psi F(\Omega)$ $-\sigma'' = \sigma F(\Omega)$ $-\Phi'' - 2\sigma = \Phi F(\Omega)$ $4\sigma' = A_2 F(\Omega)$	$-\psi^2 + 4\sigma\Phi - A_2^2$
I3. $\langle J_{01}-J_{13},\ J_{03},\ P_2\rangle$	$A_0 = x_0\sigma(\omega) + \theta^{-1}(\Phi(\omega) + x_1\psi(\omega))$ $A_1 = \sigma(\omega)x_1 + \psi(\omega)$ $A_2 = A_2(\omega)$ $A_3 = x_3\sigma(\omega) - \theta^{-1}(\Phi(\omega) + x_1\psi(\omega))$ $\theta = x_0 + x_3,$ $\omega = (x_0^2 - x_1^2 - x_3^2)^{1/2}$	$\psi'' + \dfrac{2}{\omega}\psi' = \psi F(\Omega)$ $\Phi'' = \Phi F(\Omega)$ $A_2'' + \dfrac{2}{\omega}A_2' = A_2 F(\Omega)$ $-\dfrac{1}{\omega^2}\Phi'' + \dfrac{1}{\omega^3}\Phi' = \sigma F(\Omega)$	$\sigma^2\omega^2 - \psi^2 - A_2^2$

I.	II.	III.	IУ.
14. $\langle J_{01}-J_{13},\ J_{02}-J_{23},\ J_{03}\rangle$	$A_0=\sigma(\omega)x_0+\theta^{-1}(\Phi(\omega)$ $+\varphi(\omega)x_1+\psi(\omega)x_2)$ $A_1=\sigma(\omega)x_1+\varphi(\omega)$ $A_2=\sigma(\omega)x_2+\psi(\omega)$ $A_3=\sigma(\omega)x_3-\theta^{-1}(\Phi+$ $+\varphi(\omega)x_1+\psi(\omega)x_2)$ $\theta=x_0+x_3$ $\omega=(x_\mu x_\mu)^{1/2}$	$\varphi''+\frac{3}{\omega}\varphi'=\varphi F(\Omega)$ $\psi''+\frac{3}{\omega}\psi'=\psi F(\Omega)$ $\frac{1}{\omega}\Phi'+\Phi''=\Phi F(\Omega)$ $\frac{1}{\omega^3}\Phi'-\frac{1}{\omega^2}\Phi''=$ $=\sigma F(\Omega)$	$\sigma^2\omega^2+$ $+2\sigma\Phi-$ $-\varphi^2-\psi^2$
15. $\langle J_{01}-J_{13},\ J_{02}-J_{23},\ J_{12}+\lambda J_{03}\rangle$	$A_0=\sigma(\omega)x_0+K$ $A_1=x_1\sigma(\omega)+\varphi(\omega)\cos\theta$ $+\psi(\omega)\sin\theta$ $A_2=x_2\sigma(\omega)+\varphi(\omega)\sin\theta$ $-\psi(\omega)\cos\theta$ $A_3=x_3\sigma(\omega)-K,$ $K(x_0+x_3)=\Phi(\omega)+x_1\times$ $\times(\varphi\cos\theta+\psi\sin\theta)+$ $+x_2(\varphi\sin\theta-\psi\cos\theta),$ $\theta=\lambda\ln\lvert x_0+x_3\rvert$ $\omega=(x_\mu x_\mu)^{1/2}$	$\frac{1}{\omega^3}\Phi'-\frac{1}{\omega^2}\Phi''=\sigma F(\Omega)$ $\Phi''+\frac{1}{\omega}\Phi'=\Phi F(\Omega)$ $\varphi''+\frac{3}{\omega}\varphi'+\lambda\psi'\frac{2}{\omega}=$ $=\varphi F(\Omega)$ $\psi''+\frac{3}{\omega}\psi'-\lambda\varphi'\frac{2}{\omega}=$ $=\psi F(\Omega)$	$\sigma^2\omega^2-$ $-\varphi^2-\psi^2+$ $+2\sigma\Phi$
16. $\langle J_{12}+\alpha P_0,\ P_1,\ P_2\rangle$	$A_0=A_0(\omega)$ $A_1=-\varphi\sin\frac{x_0}{\alpha}+\psi\cos\frac{x_0}{\alpha}$ $A_2=\varphi(\omega)\cos\frac{x_0}{\alpha}+$ $+\psi(\omega)\sin\frac{x_0}{\alpha}$ $A_3=A_3(\omega)$ $\omega=x_3$	$-A_0''=A_0F(\Omega)$ $0=A_3F(\Omega)$ $-\frac{1}{\alpha^2}\varphi-\varphi''=\varphi F(\Omega),$ $-\frac{1}{\alpha^2}\psi-\psi''=\psi F(\Omega)$	$A_0^2-\varphi^2-$ $-\psi^2-A_3^2$

I.	II.	III.	IУ.
I7. $\langle J_{12} + \alpha P_3,\ P_1,\ P_2 \rangle$	$A_0 = A_0(\omega)$ $A_1 = \varphi(\omega) \sin \frac{x_3}{\alpha} +$ $+ \psi(\omega) \cos \frac{x_3}{\alpha}$ $A_2 = \varphi(\omega) \cos \frac{x_3}{\alpha} -$ $- \psi(\omega) \sin \frac{x_3}{\alpha}$ $A_3 = A_3(\omega)$ $\omega = x_0$	$0 = A_0 F(\Omega)$ $\varphi'' + \frac{1}{\alpha^2}\varphi = \varphi F(\Omega)$ $\psi'' + \frac{1}{\alpha^2}\psi = \psi F(\Omega)$ $A_3'' = A_3 F(\Omega)$	$A_0^2 - \varphi^2 -$ $- \psi^2 - A_3^2$
I8. $\langle J_{03} + \alpha P_1,\ P_0,\ P_3 \rangle$	$A_0 = \rho(\omega) e^{\frac{x_1}{\alpha}} +$ $+ \sigma(\omega) e^{-\frac{x_1}{\alpha}}$ $A_1 = A_1(\omega)$ $A_2 = A_2(\omega)$ $A_3 = \rho(\omega) e^{\frac{x_1}{\alpha}} -$ $- \sigma(\omega) e^{-\frac{x_1}{\alpha}}$ $\omega = x_2$	$-\rho'' - \frac{1}{\alpha^2}\rho = \rho F(\Omega)$ $-A_1'' = A_1 F(\Omega)$ $0 = A_2 F(\Omega)$ $-\sigma'' - \frac{1}{\alpha^2}\sigma = \sigma F(\Omega)$	$4\rho\sigma -$ $- A_1^2 - A_2^2$
I9. $\langle J_{12} + P_0 + P_3,\ P_1,\ P_2 \rangle$	$A_0 = A_0(\omega)$ $A_1 = \varphi(\omega) \sin\theta +$ $+ \psi(\omega) \cos\theta$ $A_2 = \varphi(\omega) \cos\theta -$ $- \psi(\omega) \sin\theta$ $A_3 = A_3(\omega)$ $\theta = x_0 - x_3$ $\omega = x_0 + x_3$	$-A_0'' - A_3'' = A_0 F(\Omega)$ $A_0'' + A_3'' = A_3 F(\Omega)$ $4\varphi' = \psi F(\Omega)$ $-4\psi' = \varphi F(\Omega)$	$A_0^2 - \varphi^2 -$ $- \psi^2 - A_3^2$

I.	II.	III.	IУ.
20. $\langle J_{01}-J_{13}+\alpha P_3,\ P_0+P_3,\ P_1\rangle$	$A_0=\sigma(\omega)+\frac{1}{\alpha^2}(\sigma(\omega)\theta^2+\rho(\omega)\theta)+\varphi(\omega)$ $A_1=\frac{1}{\alpha}(2\sigma(\omega)\theta+\rho(\omega))$ $A_2=A_2(\omega)$ $A_3=\sigma(\omega)-\frac{1}{\alpha^2}(\sigma(\omega)\theta^2+\rho(\omega)\theta)-\varphi(\omega)$ $\theta=x_0+x_3,\quad \omega=x_2$	$-\sigma''=\sigma F(\Omega)$ $-\varphi''=\varphi F(\Omega)$ $-\rho''=\rho F(\Omega)$ $0=A_2F(\Omega)$	$4\rho\sigma-\frac{1}{\alpha^2}\rho^2-A_2^2$
21. $\langle J_{01}-J_{13}+\alpha P_3,\ P_0+P_3,\ P_2\rangle$	$A_0=\alpha\psi(\omega)-\rho(\omega)+\frac{\psi(\omega)}{2\alpha}((x_0+x_3)+\varphi(\omega))^2$ $A_1=\psi(x_0+x_3+\varphi)$ $A_2=A_2(\omega)$ $A_3=\rho(\omega)-\frac{\psi(\omega)}{2\alpha}(x_0+x_3+\varphi(\omega))^2$ $\omega=(x_0+x_3)^2-2\alpha x_1$	$-4\alpha^2\psi''=\psi F(\Omega)$ $\cancel{0=\psi\varphi F(\Omega)}$ $4\alpha^2(\rho''-\frac{1}{2\alpha}(\psi\varphi^2)'')=(\rho-\frac{1}{2\alpha}(\psi\varphi^2))F(\Omega)$ $-4\alpha^2A_2''=A_2F(\Omega)$	$\alpha^2\psi^2-2\alpha\rho\psi-A_2^2$
22. $\langle J_{03}+\alpha P_1,\ P_0+P_3,\ P_2\rangle$	$A_0=\rho(\omega)\theta+\frac{\sigma(\omega)}{\theta}$ $A_1=A_1(\omega)$ $A_2=A_2(\omega)$ $A_3=\rho(\omega)\theta-\frac{\sigma(\omega)}{\theta}$ $\theta=x_0+x_3$ $\omega=x_1-\alpha\ln\lvert\theta\rvert$	$-\rho''=\rho F(\Omega)$ $-\sigma''+\alpha(2\rho'-2\alpha\rho''+A_1'')=\sigma F(\Omega)$ $2(\rho'-\alpha\rho'')=A_1F(\Omega)$ $-A_2''=A_2F(\Omega)$	$4\sigma\rho-A_1^2-A_2^2$

I.	II.	III.	IУ.
23. $\langle J_{01} - J_{13} + \alpha P_3,\ P_0 + P_3,\ P_1 + \beta P_2 \rangle$	$A_0 = \sigma(\omega) + \alpha^{-2}(\sigma(\omega)\theta^2$ $+ \rho(\omega)\theta) + \Phi(\omega)$ $A_1 = \frac{1}{\alpha}(2\sigma(\omega)\theta + \rho(\omega))$ $A_2 = A_2(\omega)$ $A_3 = \sigma(\omega) - \frac{1}{\alpha^2}(\sigma(\omega)\theta^2 +$ $+ \rho(\omega)\theta) - \Phi(\omega)$ $\theta = x_0 + x_3$ $\omega = 2\alpha x_2 + \beta(\theta^2 - 2\alpha x_1)$	$-4\alpha^2(\beta^2+1)\sigma'' = \sigma F(\Omega)$ $-4\alpha^2(\beta^2+1)\Phi'' = \Phi F(\Omega)$ $-4\alpha^2\rho'' - 4\beta\alpha^3 A_2'' = \rho F(\Omega)$ $-4\alpha^2\beta^2 A_2'' - 4\alpha\beta\rho'' =$ $= A_2 F(\Omega)$	$\Phi\sigma -$ $- \frac{1}{\alpha^2}\rho^2 -$ $- A_2^2$
24. $\langle J_{01} - J_{13},\ J_{03} + \alpha P_2,\ P_0 + P_3 \rangle$	$A_0 = \sigma(\omega)\theta + \theta^{-1}(\psi(\omega)x_1$ $+ \Phi(\omega) + x_1^2\sigma(\omega))$ $A_1 = 2\sigma(\omega)x_1 + \psi(\omega)$ $A_2 = A_2(\omega)$ $A_3 = \sigma(\omega)\theta - \frac{1}{\theta}(\psi(\omega)x_1 +$ $+ \Phi(\omega) + x_1^2\sigma(\omega))$ $\theta = x_0 + x_3$ $\omega = x_2 - \alpha \ln\vert\theta\vert$	$-\sigma'' = \sigma F(\Omega)$ $-\psi'' = \psi F(\Omega)$ $-\Phi'' - 2\sigma + \alpha(A_2'' +$ $+ 4\sigma' - 2\alpha\sigma'') =$ $= \Phi F(\Omega)$ $4\sigma' - 2\alpha\sigma'' = A_2 F(\Omega)$	$4\sigma\Phi -$ $- \psi^2 - A_2^2$
25. $\langle J_{01} - J_{13},\ J_{03} + \alpha P_1,\ P_0 + P_3 \rangle$	$A_0 = \sigma(\omega)\theta + \frac{1}{\theta}(\Phi(\omega)$ $+ \psi(\omega)\theta_1 + \theta_1^2\sigma(\omega))$ $A_1 = 2\sigma\theta_1 + \psi(\omega)$ $A_2 = A_2(\omega)$ $A_3 = \sigma(\omega)\theta - \frac{1}{\theta}(\Phi(\omega) +$ $+ \psi(\omega)\theta_1 + \theta_1^2\sigma(\omega))$ $\theta_1 = x_1 - \alpha\ln\vert\theta\vert$ $\theta = x_0 + x_3 \quad \omega = x_2$	$-\sigma'' = \sigma F(\Omega)$ $-\psi'' = \psi F(\Omega)$ $-\Phi'' - 2\sigma = \Phi F(\Omega)$ $4\sigma' = A_2 F(\Omega)$	$4\sigma\Phi -$ $- \psi^2 - A_2^2$

I.	II.	III.	IУ.
26. $\langle J_{01} - J_{13},\ J_{02} - J_{23},\ J_{12} + P_0 + P_3 \rangle$	$A_0 = \sigma(\omega)x_0 + \frac{K}{\omega}$ $A_1 = x_1\sigma(\omega) + \varphi(\omega)\cos\theta + \psi(\omega)\sin\theta$ $A_2 = x_2\sigma(\omega) + \varphi(\omega)\sin\theta - \psi(\omega)\cos\theta$ $A_3 = x_3\sigma(\omega) - \frac{K}{\omega}$ $K = \Phi(\omega) + x_1(\varphi\cos\theta + \psi\sin\theta) + x_2(\varphi\sin\theta - \psi\cos\theta) - \sigma x_\mu x_\mu$ $\omega = x_0 + x_3$ $\theta = \frac{x_\mu x_\mu}{2(x_0+x_3)}$	$0 = \sigma F(\Omega)$ $-3\sigma' - \omega\sigma'' = \frac{1}{\omega}\Phi F(\Omega)$ $2(\psi' + \frac{1}{\omega}\psi) = \varphi F(\Omega)$ $2(-\varphi' - \frac{1}{\omega}\varphi) = \psi F(\Omega)$	$2\sigma\Phi - \varphi^2 - \psi^2$
27. $\langle J_{01} - J_{13},\ J_{03} + \alpha P_1 + \beta P_2,\ P_0 + P_3 \rangle$	$A_0 = \sigma(\omega)\theta + \frac{\psi(\omega)\theta_1}{\theta} + \frac{1}{\theta}(\Phi(\omega) + \theta_1^2\sigma(\omega))$ $A_1 = 2\sigma(\omega)\theta_1 + \psi(\omega)$ $A_2 = A_2(\omega)$ $A_3 = \sigma(\omega)\theta - \frac{1}{\theta}(\Phi(\omega) + \psi(\omega)\theta_1 + \sigma(\omega)\theta_1^2)$ $\theta_1 = x_1 - \alpha \ln\lvert\theta\rvert$ $\theta = x_0 + x_3$ $\omega = x_2 - \beta\ln\lvert\theta\rvert$	$-\sigma'' = \sigma F(\Omega)$ $-\psi'' = \psi F(\Omega)$ $-\Phi'' - 2\sigma + \beta(A_2'' + 4\sigma' - 2\beta\sigma'') = \Phi F(\Omega)$ $4\sigma' - 2\beta\sigma'' = A_2 F(\Omega)$	$4\sigma\Phi - \psi^2 - A_2^2$