ОРДЕНА ЛЕНИНА АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ АН УССР

---

И. И. Ю Р И К

# РЕДУКЦИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ ГРУПП ПУАНКАРЕ

Д и с с е р т а ц и я

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук В. И. Ф У Щ И Ч

Киев - 1976

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Со времени появления работы Вигнера [I], в физике элементарных частиц утвердился принцип, согласно которому группа Пуанкаре $\mathcal{P}(1,3)$ является группой точной симметрии элементарных частиц. В рамках этой группы получило обоснование спиновое квантовое число, установлена связь между спином и статистикой, найдены уравнения движения для свободных частиц [2].

Однако, группа Пуанкаре не описывает все свойства симметрии, она лишь в первом приближении отражает свойства мира. В последнее время, в связи с открытием большого числа сильно взаимодействующих частиц /резонансов/ и установлением новых законов сохранения, возникла задача о релятивизации групп $SU(3)$, $SU(6)$ [3], которая, в свою очередь, связана с проблемой о расширении группы Пуанкаре и объединении ее с группами внутренних симметрий $SU(3)$ и $SU(6)$. Последняя проблема в различных направлениях и для различных целей /например, расширив понятие "группа симметрии" данной физической системы [4], описать весь спектр состояний системы представлением более высокой группы, чем та, которая непосредственно коммутирует с гамильтонианом/ была предметом широкого изучения за последнее время /см. обз. [5] /. Следует отметить, что идея расширения группы Пуанкаре тесно связана с довольно старой идеей о расширении четырехмерного пространственно-временного континуума, которая интенсивно обсуждалась в 20-х годах в общей теории относительности в связи с объединением теорий тяготения и электричества.

Так, Калуца [6], используя пятимерное пространство Минковского, пытался объединить уравнения гравитационного и электромагнитного полей. Любопытно отметить, что свободное уравнение движения для бесспиновой частицы было впервые установлено О.Клейном [7] и Фоком [8] на базе пятимерного формализма. Вопросу построения 5-мерной оптики посвящена монография Ю.Румера [9]. Мюллер и Розенфельд [10] на основе пятимерного формализма построили теорию, объединяющую векторные и псевдоскалярные поля. Теория слияния де Бройля, а также составные модели Ферми-Янга, Сакаты, модель кварков, модель Боголюбова [11] также базируется в неявном виде на идее о расширении четырехмерного пространства.

Все многочисленные попытки установить некоторые общие положения будущей теории элементарных частиц в явной или неявной форме связаны с расширением четырехмерного пространства, следовательно, связаны с расширением группы Пуанкаре.

Так, из предположения, что оператор массы является независимой динамической переменной в работах [12-14] было предложено в качестве такого расширения выбрать неоднородную группу де Ситтера $\mathcal{P}(1,4)$. В рамках этой группы состояниям свободного спина-изоспин-мультиплета сопоставляется неприводимое представление группы $\mathcal{P}(1,4)$, причем генераторы сдвигов $P_\alpha$ подгруппы Пуанкаре $\mathcal{P}(1,3)$ интерпретируются как операторы энергии-импульса, а оставшийся генератор $P_4$ - как внутренняя динамическая переменная.

Для описания двухчастичной системы в работе [15] предложено $\mathcal{P}(1,6)$ -инвариантные уравнения, где было показано, что $\mathcal{P}(1,6)$-инвариантное 8-компонентное уравнение типа Дирака дает описание двух частиц спина $s=\frac{1}{2}$ . А из работ [16-18] следует, что квантомеханические уравнения, инвариантные относительно обобщенных групп Пуанкаре $\mathcal{P}(1,n)$ , могут найти применение для описания как отдельных элементарных частиц с учетом их свойств, определяемых внутренними симметриями, так и многочастичных систем.

Помимо указанных приложений, обобщенные группы Пуанкаре могут иметь прямое отношение к задаче о расширении $S$ -матрицы за массовую оболочку [19] и для описания частиц с внутренней структурой [20,21] .

Вышеизложенное показывает необходимость развития теоретико-группового аппарата высших групп для нужд весьма широкого класса физических задач [22] .

Настоящая работа посвящена развитию математического аппарата обобщенных групп Пуанкаре $\mathcal{P}(1,n)$ . Рассматривается весьма важный для физических приложений вопрос - редукция неприводимых унитарных представлений групп $\mathcal{P}(1,4)$ , $\mathcal{P}(1,6)$, $\mathcal{P}(1,n)$ по подгруппе Пуанкаре, т.е. решается следующая задача. Дано унитарное неприводимое представление группы $\mathcal{P}(1,n)$ . Разложить его на неприводимые представления группы Пуанкаре /указать спектр возможных значений операторов Казимира группы $\mathcal{P}(1,3)$ /, задать унитарный оператор, связывающий канонический базис представления с Пуанкаре-базисом [см. § 2] , найти явный вид генераторов представления в $\mathcal{P}(1,3)$ -базисе.

В такой же постановке рассматривается задача о редукции группы $\mathcal{P}(1,n)$ по подгруппе $SO_0(1,n)$ .

Задача о разложении неприводимого унитарного представления группы $G$ на неприводимые компоненты его ограничения на некоторую замкнутую подгруппу $H$ в теории представлений играет большую роль [23] [1]. Однако, до настоящего времени она далека от полного решения. Нет, почти, ни одного общего результата /за исключением, когда $G$ - компактная [24] или нильпотентная группа Ли [23] . Полностью она решена для унитарной группы $\mathcal{U}(p,q)$ [25] /. Однако, в связи с большой важностью этой задачи в теории элементарных частиц за последнее десятилетие появилось большое количество работ [26-48] , где рассматриваются частные случаи групп и представлений.

Так, в 1955 г. Шапиро [29] поставил и рассмотрел задачу о разложении волновой функции, удовлетворяющей уравнению Клейна-Гордона, свободной частицы по неприводимым представлениям однородной группы Лоренца, тем самым решил задачу о редукции $\mathcal{P}(1,3) \supset SO_0(1,3)$ в случае представлений спина нуль [2]. Другим методом этот вопрос рассматривал Долгинов [30] . Впоследствии в [31] было уточнено разложение Шапиро для частиц

---

[1] Заметим, что эта задача связана с задачей о разложении на неприводимые компоненты представлений реализующихся в сечениях $G$ -расслоений над однородными пространствами.

[2] Гельфанд и Граев [49] решили эту задачу для группы Лоренца произвольной размерности, т.е. получили разложение квазирегулярного представления реализующегося на фактор-пространстве $SO_0(1,n)/SO(n)$ .

с ненулевым спином. Эти разложения получили широкое применение в теории элементарных частиц в работах Кадышевского и его сотрудников [50]. Далее, используя теорию представлений группы Лоренца [51, 52], Попов [32] дает простой вывод результатов работы [31].

Стрем [35-37] решает задачу о разложении унитарных неприводимых представлений основной непрерывной серии группы де Ситтера $SO_0(1,4)$ по представлениям группы Лоренца, приводит формулы для разложения матричных элементов.

В работах Мукунды [38] рассматриваются редукции $SO_0(1,2) \supset SO_0(1,1)$, $SO_0(1,3) \supset SO_0(1,2)$. Задается действие генераторов в соответствующих базисах.

Нидерле [40] разлагает максимально вырожденные унитарные неприводимые представления групп $SO_0(p,q)$, $(p \geq q > 1)$ по унитарным неприводимым представлениям максимальной некомпактной группы $SO_0(p,q-1)$.

В настоящей диссертации решена задача о редукции унитарных неприводимых представлений обобщенных групп Пуанкаре $\mathcal{P}(1,n)$ по их подгруппам $\mathcal{P}(1,m)$, $m<n$, $SO_0(1,n)$ в случае, когда оператор Казимира $P^2 = P_\mu P^\mu = \varkappa^2 > 0$. Для неоднородной группы де Ситтера $\mathcal{P}(1,n)$ указан алгоритм разложения приводимого представления на неприводимые, произведена редукция тензорного произведения двух неприводимых представлений, произвольное явно ковариантное представление этой группы разложено по неприводимым представлениям группы Пуанкаре.

Перейдем к краткому изложению результатов.

В § I приводятся необходимые сведения о обобщенных группах Пуанкаре $\mathcal{P}(1,n)$, дается классификация ее унитарных неприводимых представлений. Найдены генераторы $P_\mu$ и $J_{\mu\nu}$ представлений, индуцированных с компактной подгруппы $SO(n)$ в каноническом базисе.

§ 2 посвящен редукции унитарных неприводимых представлений группы $\mathcal{P}(1,n)$ по подгруппе Пуанкаре. Находится явный вид оператора, связывающего канонический базис представления с пуанкаре-базисом. Подробно рассмотрены случаи неоднородной группы де Ситтера и группы $\mathcal{P}(1,6)$ .

В § 3 рассматривается задача о редукции унитарных неприводимых представлений группы $\mathcal{P}(1,n)$ по полупростой подгруппе $SO_0(1,n)$ . В случае $n=3$ эта задача рассматривалась в [38, 44] . В [44] построены матричные элементы генераторов трансляции в Лоренц-базисе. Однако, это построение формально и математически не корректно.

В [38] рассмотрен только случай представлений, соответствующих нулевой массе. Мы осуществляем редукцию $\mathcal{P}(1,n) \supset \supset SO_0(1,n)$ в случае, когда оператор квадрата "массы" $P^2 = = P_\mu P^\mu = \varkappa^2 > 0$ . Используя теорему Вингера-Эккарта [53] , получаем явные формулы действия генераторов трансляции $P_\mu$ в $SO_0(1,n)$ -базисе.

§§ 4–6 посвящены неоднородной группе де Ситтера, которая весьма важна в теории элементарных частиц [54] . Используя результаты § 2, мы получаем разложение явно ковариантного представления этой группы по неприводимым представлениям группы Пуанкаре. Далее, рассматривается задача о тензорном произведении двух представлений класса $I$ группы $\mathcal{P}(1,4)$ . Получена функция "кратности" относительно дискретного параметра. И, наконец, используя методику работ [55–57] , показывается, как разложить произвольное приводимое представление группы де Ситтера $P(1,n)$ на неприводимые.

Перечисленные выше результаты опубликованы в работах [76-79] .

В заключение выражаю глубокую благодарность В.И.Фущичу за постановку задачи и руководство, Д.П.Желобенко за полезные обсуждения. Благодарю также А.Г.Никитина и А.М.Гаврилика за непосредственное участие в приведенных исследованиях.

## § I. ОБОБЩЕННАЯ ГРУППА ПУАНКАРЕ И ЕЕ УНИТАРНЫЕ НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Пусть $X$ - $(1+n)$-мерное псевдоевклидовое векторное пространство с элементами $x=(x_0, x_1, \dots, x_n)$ и метрикой $g_{00}=-g_{11}=\dots=-g_{nn}=1$. Совокупность линейных преобразований $\{(a,\tilde{\Lambda})\}: x_\mu \longrightarrow x'_\mu=\tilde{\Lambda}_\mu^\nu x_\nu+a_\mu,\ a\in X,\ \mu,\nu=0,1,\dots,n$, оставляющих инвариантной квадратичную форму $(x-y)^2 \equiv$ $\equiv g^{\mu\nu}(x_\mu-y_\mu)(x_\nu-y_\nu)$ будем называть обобщенной /полной/ группой Пуанкаре и обозначать через $\tilde{\mathcal{P}}(1,n)$. Таким образом, матрицы $\tilde{\Lambda}$ удовлетворяют условию $\tilde{\Lambda}^T g\tilde{\Lambda}=g$, где $\tilde{\Lambda}^T$ - транспонированная матрица. Группа $\tilde{\mathcal{P}}(1,n)$ включает также и инверсии $I_\mu$ пространства $X$:

$$I_\mu x_\nu=\begin{cases}-x_\nu, & \mu=\nu\\ x_\nu, & \mu\neq\nu\end{cases},\quad I_\mu^2=1,\ [I_\mu, I_\nu]=0 .$$

Поэтому в $\tilde{\mathcal{P}}(1,n)$ можно выделить подгруппу отражений $R_a(1,n)=\{I_0, I_a, I_0 I_a, 1\}$, $a=1,\dots,n$. Очевидно, эта подгруппа является максимальным дискретным делителем в $\tilde{\mathcal{P}}(1,n)$ Факторизуя $\tilde{\mathcal{P}}(1,n)$ по $R_a(1,n)$, получим собственную ортохронную группу $\mathcal{P}(1,n)$, которая является полупрямым произведением вида

$$\mathcal{P}(1,n)=SO_0(1,n)\circledS T(1,n),$$

где $T(1,n)$ - $(1+n)$ -параметрическая абелева группа, а $SO_0(1,n)$ - единичная компонента группы действительных линейных однородных преобразований переменных $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, которые оставляют инвариантной квадратичную форму $x_0^2-x_1^2-\ldots-x_n^2$ Более того, это регулярное полупрямое произведение [58,59] и поэтому общая теория унитарных неприводимых представлений группы $\mathcal{P}(1,n)$ строится методом индуцированных представлений [58,59] .

Пусть $\mathcal{U}$ унитарное неприводимое представление группы $\mathcal{P}(1,n)$, а $P_\mu$ , $J_{\mu\nu}$ – его генераторы. Поскольку генераторы трансляций $P_\mu$ коммутируют между собой, то в пространстве $\mathcal{H}$ представления $\mathcal{U}$ можно выбрать так базис, чтобы $P_\mu$ были одновременно диагональными. Обозначим через $p=(p_0,p_1,\ldots,p_n)$ возможный набор собственных значений операторов $P_0, P_1,\ldots,P_n$ и будем понимать действительные числа $p_0,p_1,\ldots,p_n$ как компоненты вектора в $(1+n)$-мерном пространстве. Очевидно, это пространство / $p$-пространство/ – псевдоевклидово с метрикой $g_{00}=-g_{11}=\ldots=-g_{nn}$.

О п р е д е л е н и е. Множество $\sigma$ всевозможных $p$-векторов, компоненты которых являются собственными значениями генераторов $P_\mu$ называется орбитой представления $\mathcal{U}$ , а $p=(p_0,p_1,\ldots,p_n)\in\sigma$ – спектральным вектором представления $\mathcal{U}$ .

Из общей теории следует, что орбита всякого неприводимого представления группы $\mathcal{P}(1,n)$ образует в $p$-пространстве гиперплоскость, однородную и инвариантную относительно всех преобразований из группы $SO_0(1,n)$ . Более того, найдется неприводимое представление группы $\mathcal{P}(1,n)$ , орбита которого совпадает с некоторой $SO_0(1,n)$-инвариантной и однородной гиперплоскостью $(1+n)$-мерного псевдоевклидового пространства.

Отсюда следует, что орбита $\sigma$ любого унитарного неприводимого представления однозначно задается всего одним $p$-вектором. Обозначим такой вектор через $p^{\circ}$ и будем называть его определяющим вектором представления. Всякий вектор $p \in \sigma$ находится по формуле $p = L(p,p^{\circ})p^{\circ}$, где $L(p,p^{\circ}) \in SO_0(1,n)$. Если на матрицу $L(p,p^{\circ})$ наложить условие $\lim\limits_{p_0 \to p} L(p,p^{\circ}) = \lim\limits_{p \to p^{\circ}} L(p,p^{\circ})$, тогда она определяется однозначно векторами $p$ и $p^{\circ}$. В случае $n=3$, такая матрица называется матрицей вигнерового вращения.

О п р е д е л е н и е. Стационарной /малой/ подгруппой вектора $p$ называется подгруппа $R_p \subset SO_0(1,4)$, все элементы которой оставляют данный вектор инвариантным.

Очевидно, стационарные подгруппы векторов из одной орбиты - изоморфны.

Пусть задано неприводимое представление $\mathcal{D}$ стационарной подгруппы $R_{p^{\circ}}$. $\mathcal{H}$ - пространство квадратично интегрированных функций $\varphi(p,\alpha)$, $p \in \sigma_{p^{\circ}}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ - наборы чисел, которые нумеруют базисные векторы пространства представления $\mathcal{D}$.

Определим операторы $\mathcal{U}(a,\Lambda)$ по формуле

$$(\mathcal{U}(a,\Lambda)\varphi)(p,\alpha) = \exp i\langle a,p\rangle \sum_{\beta} \mathcal{D}_{\alpha\beta}(r_{p^{\circ}}(p,\Lambda))\varphi(\Lambda^{-1}p,\beta), \quad /I.I/$$

где $\mathcal{D}_{\alpha\beta}(r_{p^{\circ}})$ - матричные элементы операторов представления $\mathcal{D}$, $r_{p^{\circ}}(p,\Lambda) \in R_{p^{\circ}}$ и удовлетворяет условию

$$r_{p^{\circ}}(p,\Lambda) = L^{-1}(p,p^{\circ})\Lambda L(\Lambda^{-1}p,p^{\circ}). \quad /I.2/$$

Скалярное произведение в $\mathcal{H}$ может быть задано следующим образом

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int\limits_{\sigma} \sum_{\alpha,\beta} \varphi_1^*(p,\alpha)\Delta_{\alpha\beta}\varphi_2(p,\beta)d\mu(p),$$

$\Delta_{\alpha\beta}$ - компоненты $R_{p^o}$-инвариантного метрического тензора $\Delta = \{\Delta_{\alpha\beta}\}$ в пространстве представления $\mathcal{D}$, $\mu(p)$- $SO_o(1,n)$-инвариантная мера на $\sigma$.

Формула /I.I/ задает унитарное неприводимое представление группы $\mathcal{P}(1,n)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}$ унитарно и неприводимо.

Из результатов Макки следует, что всякое унитарное неприводимое представление группы $\mathcal{P}(1,n)$ однозначно задается своим определяющим вектором и унитарным неприводимым представлением стационарной подгруппы, и имеет вид /I.I/.

Поэтому классификацию неприводимых унитарных представлений группы $\mathcal{P}(1,n)$ можно проводить на основании классификации $SO_o(1,n)$-инвариантных орбит.

Ниже приведены все шесть классов представлений $\mathcal{P}(1,n)$, собственные значения инвариантов $P^2 = g^{\mu\nu}P_\mu P_\nu$, $Sgn\, P_o$, определяющие векторы представлений и стационарные подгруппы. Представления классов $I^+$ и $II^+$ изоморфны представлениям классов $I^-$ и $II^-$, соответственно оператор $Sign\, P_o$ является инвариантом только для представлений $O_I^{\pm}$ и $O_{II}^{\pm}$.

| Класс | Обозначение | $P^2$ | $Sign P_0$ | Вид вектора | Орбита | Стационарные подгруппы |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I^+$ | $O_I^+$ | $\varkappa^2$ | $1$ | $(\varkappa,0,\dots,0),\ \varkappa>0$ | $\langle p,p\rangle=\varkappa^2$ | $SO(n)$ |
| $I^-$ | $O_I^-$ | $\varkappa^2$ | $-1$ | $(-\varkappa,0,\dots,0),\ \varkappa>0$ | $\langle p,p\rangle=\varkappa^2$ | $SO(n)$ |
| $II^+$ | $O_{II}^+$ | $0$ | $1$ | $(1,0,\dots,0,1)$ | $\langle p,p\rangle=0,\ p_0>0$ | $E(n-1)$ |
| $II^-$ | $O_{II}^-$ | $0$ | $-1$ | $(-1,0,\dots,0,1)$ | $\langle p,p\rangle=0,\ p_0<0$ | $E(n-1)$ |
| $III$ | $O_{III}$ | $-\varkappa^2$ | | $(0,\dots,0,\varkappa),\ \varkappa>0$ | $\langle p,p\rangle=-\varkappa^2$ | $SO_0(1,n-1)$ |
| $IV$ | $O_{IV}$ | $0$ | | $(0,\dots,0)$ | $p_n=0$ | $SO_0(1,n)$ |

Покажем теперь, что наша группа $\mathcal{P}(1,n)$ является ручной [23], т.е. каждое ее унитарное представление однозначным образом разлагается в прямой интеграл неприводимых.

Выше было установлено, что для группы $\mathcal{P}(1,n)$ имеются четыре различные подгруппы, с которых ведется индуцирование неприводимых представлений, а именно, $SO(n)$, $E(n-1)$, $SO_0(1,n-1)$, $SO_0(1,n)$. В первом случае группа компактная и является ручной в силу теоремы Петера-Вейля. Во втором случае - регулярное полупрямое произведение коммутативной и компактной групп и, следовательно, тоже является ручной. Наконец, в двух оставшихся случаях имеем связную полупростую группу, поэтому она согласно теореме Харши-Чандра, ручная. Поскольку регулярное полупрямое произведение является ручной группой тогда и только тогда, когда все стационарные подгруппы ручные, то отсюда видим, что группа $\mathcal{P}(1,n)$ - ручная.

Найдем генераторы $P_\mu$, $J_{\mu\nu}$ представлений, индуцирезанных с группы $SO(n)$, т.е. представлений класса $I$. В дальнейшем нас будут интересовать только такие представления.

Операторы $P_\mu$ и $J_{\mu\nu}$ порождают алгебру Ли группы $\mathcal{P}(1,n)$ и удовлетворяют условиям

$$[P_\mu, P_\nu] = 0,$$

$$[P_\mu, J_{\alpha\beta}] = i(g_{\mu\alpha} P_\beta - g_{\mu\beta} P_\alpha), \qquad /1.3/$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] = i(g_{\mu\beta} J_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha} J_{\mu\beta} - g_{\mu\alpha} J_{\nu\beta} - g_{\nu\beta} J_{\mu\alpha}).$$

Параметризуя группы $SO_o(1,n)$ и $T(1,n)$ вещественными параметрами $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ и $a^\mu$, соответственно, элементы $(a,\Lambda) \in \mathcal{P}(1,n)$ можно записать в виде

$$(a,\Lambda) = exp(ia^\mu P_\mu + i\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}), \qquad /1.4/$$

$P_\mu$ и $J_{\mu\nu}$ – генераторы исходного представления группы $\mathcal{P}(1,n)$.

Определяющим вектором, как мы видели, представления класса $I$ является времени подобный вектор

$$p^{(o)} = (\varepsilon\varkappa, 0, \dots, 0), \quad \varkappa > 0, \quad \varepsilon = \pm 1, \qquad /1.5/$$

а стационарная подгруппа $SO(n)$ порождается элементами

$$r_{p^o} = exp\{i\Omega^{ab} S_{ab}\}, \quad a, b = 1, 2, \dots, n \qquad /1.6/$$

$S_{ab} = J_{ab}$, $\Omega^{ab}$ – параметры стационарной подгруппы.

Теперь операторы индуцированного представления можно записать в виде

$$(\mathcal{U}(a,\Lambda)\varphi)(p)=exp\left\{i\langle a,p\rangle+i\Omega^{ab}(p,\omega)S_{ab}\right\}\varphi(\Lambda^{-1}p),$$

где $\varphi(p)$ - столбец, размерность которого совпадает с размерностью представления $\mathcal{D}$ ; $\Omega^{ab}(p,\omega)$ - некоторые функции от $p\in\sigma$ / $\sigma$ - орбита заданная вектором /I.3/ и параметрами $\omega^{\mu\nu}$, фиксирующие элемент $\Lambda\in SO_0(1,n)$ /. Из /I.2/ и /I.6/ получаем уравнение для функций $\Omega^{ab}(p,\omega)$ :

$$L(p,p^0)\Lambda L(\Lambda^{-1}p,p^0)q=exp\left\{i\Omega^{ab}(p,\omega)S_{ab}\right\}q \qquad /I.7/$$

/ $q$ - произвольный вектор $p$-пространства/.
Положив $\omega^{\mu\nu}$ и $a^{\mu}$ бесконечно малыми, можно записать

$$(1+ia^{\mu}P_{\mu}+i\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu})\varphi(p)=$$

$$=(1+ia^{\mu}p_{\mu}-i\omega^{\mu\nu}(S_{\mu\nu})^{\sigma}_{\rho}\,p_{\sigma}\,\frac{\partial}{\partial p_{\rho}}+i\Omega^{ab}(p,\omega)S_{ab})\varphi(p). \qquad /I.8/$$

Откуда

$$(P_{\mu}\varphi)(p)=p_{\mu}\varphi(p), \quad p\in\sigma$$

$$(J_{\mu\nu}\varphi)(p)\left\{-(S_{\mu\nu})^{\sigma}_{\rho}\,p_{\sigma}\,\frac{\partial}{\partial p_{\sigma}}+\left(\frac{\delta\Omega^{ab}}{\delta\omega^{\mu\nu}}\right)\bigg|_{\omega=0}S_{ab}\right\}\varphi(p).$$

Легко показать, что

$$(S_{\mu\nu})_\rho^\sigma P_\sigma \frac{\partial}{\partial P_\rho} = i\left(P_\mu \frac{\partial}{\partial P_\nu} - P_\nu \frac{\partial}{\partial P^\mu}\right) \equiv M_{\mu\nu} .$$

Если векторы $p, p^\circ \in \sigma$, то $\langle p, p\rangle = \varkappa^2$, $\operatorname{sign} p_0 = \varepsilon$, $\varkappa^2 > 0$ и "вигнерово вращение" задается преобразованием

$$q \longrightarrow L(p, p^\circ) q = \frac{\langle p^\circ, p\rangle(\varkappa^2 + 2\langle p^\circ, p\rangle) - \varkappa^2 \langle p, q\rangle}{\varkappa^2(\varkappa^2 + \langle p^\circ, p\rangle)} p +$$

$$+ q - \frac{\langle p^\circ, q\rangle + \langle p, q\rangle}{\varkappa^2 \langle p^\circ, p\rangle} , \qquad L^{-1}(p, p^\circ) = L(p^\circ, p) .$$

Отсюда, учитывая малость параметров, следует, что /I.7/ можно записать

$$q + \delta q - \frac{\langle p^\circ, q\rangle + \langle p, q\rangle}{\varkappa^2 + \langle p^\circ, q\rangle} \delta p^\circ + \frac{\langle q, \delta p^\circ\rangle}{\varkappa^2 + \langle p^\circ, p\rangle}(p^\circ + p) =$$

$$= q + i\Omega^{ab}(p, \omega) S_{ab}\, q , \qquad (\delta q \equiv \Lambda q - q). \qquad /I.9/$$

Поскольку $q$ произвольный вектор, то из /I.9/ находим

$$\Omega^{ab}(p, \omega) = \omega^{ab} - \frac{p^a \omega^{ab}}{\varepsilon\varkappa + P_0} .$$

Таким образом, генераторы представлений класса $I$ имеют вид

$$\begin{aligned} &P_\mu = p_\mu , \quad p \in \sigma \\ &J_{ab} = M_{ab} + S_{ab} , \\ &J_{ab} = M_{oa} - \varepsilon \frac{p^b S_{ba}}{\varkappa + p_0} , \end{aligned} \qquad /I.10/$$

где $\varkappa$ , $\varepsilon$ определяются вектором $p^{\circ}=(\varepsilon\varkappa, 0, \ldots, 0)$ , $S_{ab}$ – генераторы унитарного неприводимого представления группы $SO(n)$ . Операторы /I.10/ действуют на функциях $\varphi(p)$ , удовлетворяющих условиям

$$P^2\varphi(p)=\varkappa^2\varphi(p),$$

$$\operatorname{sign} P_0\,\varphi(p)=\varepsilon\varphi(p),$$

$$\langle\varphi,\varphi\rangle=\int\varphi^{+}(p)\varphi(p)\,\delta(p^2-\varkappa^2)\,\theta(\varepsilon\, p_0)\,dp>0,$$

$$dp=\prod_{\mu}dp_{\mu}\,; \qquad \theta(z)=\begin{cases}1, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

Вид /I.10/ генераторов $\mathcal{P}(1,n)$ называется каноническим, а соответствующий базис – каноническим.

## § 2. СУЖЕНИЕ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $\mathcal{P}(1,n)$ НА ПОДГРУППУ ПУАНКАРЕ

### I. Редукция $\mathcal{P}(1,4) \supset \mathcal{P}(1,3)$.

Группа $\mathcal{P}(1,4)$ является наиболее естественным обобщением группы Пуанкаре $\mathcal{P}(1,3)$, поэтому мы подробно рассмотрим редукцию $\mathcal{P}(1,4) \supset \mathcal{P}(1,3)$. Она имеет три основных инварианта [14]

$$P^2 = P_\mu^2 = P_0^2 - P_a^2 - P_4^2,$$

$$V_1^2 = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}^2, \quad V_2 = -\frac{1}{4} J_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}, \qquad /2.1/$$

$$\omega_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma} P^\alpha J^{\beta\gamma}.$$

Алгебра Ли группы $\mathcal{P}(1,4)$ порождается операторами $P_\mu$, $J_{\mu\nu}$, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$P_\mu, P_\nu = 0, \quad P_\mu J_{\alpha\beta} = i(g_{\mu\alpha}P_\beta - g_{\mu\beta}P_\alpha),$$

$$/2.2/$$

$$\left[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}\right] = i(g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta} - g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta} - g_{\nu\beta}J_{\mu\nu}.$$

Генераторы $P_\mu$, $J_{\mu\nu}$ в каноническом базисе $|\vec{P}, P_4, j_3, \tau_3; j, \tau, \varkappa>$ имеют вид [см. § I]

$$P_0 = E = \sqrt{P_a^2 + P_4^2 + \varkappa^2}, \qquad P_k = p_k,$$

$$J_{ab} = ip_b\frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a\frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}, \quad a, b = 1,2,3 \qquad /2.3/$$

$$J_{0a} = -ip_0\frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab}p_b + S_{a4}p_4}{E+\varkappa},$$

$$J_{4a} = ip_a \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_4 \frac{\partial}{\partial p_a} + S_{4a}, \qquad /2.3'/$$

$$J_{04} = -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_4} - \frac{S_{4b} p_b}{E + \varkappa},$$

где $S_{k\ell}$ $(k, \ell = 1, 2, 3, 4)$ – матрица неприводимого представления $\mathcal{D}(j, \tau)$ алгебры Ли группы $SO(4) \sim SU(2) \otimes SU(2)$.
Числа $\varkappa$, $j$, $\tau$ характеризуют неприводимые представления класса $I$ $(P_\mu^2 > 0)$ группы $\mathcal{P}(1,4)$. В пространстве $\mathcal{H}$ неприводимого представления группы $\mathcal{P}(1,4)$ операторы

$$J_a^2 = \frac{V_1}{4\varkappa^2} - \frac{V_2}{2\varkappa} = j(j+1)\cdot 1,$$

$$T_b^2 = \frac{V_1}{4\varkappa^2} + \frac{V_2}{2\varkappa} = \tau(\tau+1)\cdot 1, \qquad /2.4/$$

$$P_\mu^2 = \varkappa^2 \cdot 1$$

кратны единичному оператору. Матрицы $J_a$, $T_b$ выражаются через матрицы $S_{k\ell}$ следующим образом

$$J_a = \frac{1}{2}(\varepsilon_{abc}\tfrac{1}{2}S_{bc} + S_{4a}), \quad T_b = \frac{1}{2}(\varepsilon_{abc}\tfrac{1}{2}S_{bc} - S_{4a}). \qquad /2.5/$$

Операторы /2.3/ /2.3 / определены на пространстве Гординга $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ /см. § 6/.
Базисные векторы $|\vec{p}, p_4, j_3, \tau_3; j, \tau, \varkappa\rangle$ нормированы согласно

$$\langle \vec{p}, p_4, j_3, \tau_3; j, \tau, \varkappa | \vec{p}\,', p_4', j_3', \tau_3'; j, \tau, \varkappa\rangle =$$

$$= 2p_0 \delta(\vec{p} - \vec{p}\,')\delta(p_4 - p_4')\delta_{\tau_3 \tau_3'}\delta_{j_3 j_3'},$$

а скалярное произведение имеет вид

$$(\psi_1,\psi_2)=\int \frac{d^4p}{2p_0}\,\psi_1^+(p_k,j_3,\tau_3)\psi_3(p_k,j_3,\tau_3)\,.$$

Определение. Базис неприводимого представления группы $\mathcal{P}(1,4)$, в котором диагональны операторы квадрата массы $M^2=P_0^2-P_a^2$ и спина $W^2=W_0^2-W_a^2$, а также операторы $P_a$ и $S_3$, будем называть пуанкаре-базисом и обозначать его через $|\vec{p},m,s,s_3;j,\tau,\varkappa>$.

Базисные векторы нормируем согласно

$$<\vec{p},m,s,s_3;j,\tau,\varkappa\,|\,\vec{p}',m',s',s_3';j,\tau,\varkappa> =$$

$$=2p_0(\delta(m-m')\delta(\vec{p}-\vec{p}')\delta_{ss'},\,\delta_{s_3s_3'}\,,$$

а это означает, что

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\sum_s\int\frac{dm^2}{2m}\int\frac{d^3p}{2p_0}\,\varphi_1^+(s,s_3,m)\,\varphi_2(s,s_3,m)\,.$$

Собственные значения операторов $M^2$ и $W^2$ соответствуют неприводимым представлениям группы $\mathcal{P}(1,3)$ /см. [60] /.

Наша задача состоит в том, чтобы определить спектр возможных значений $M^2$ и $W^2$, найти явный вид генераторов $J_{\mu\nu}$ и $P_\mu$ в $\mathcal{P}(1,3)$ -базисе и отыскать унитарный оператор, связывающий базис $|\vec{p},p_4,j_3,\tau_3;j,\tau,\varkappa>$ и базис $|\vec{p},m,s,s_3;j,\tau,\varkappa>$.

Неприводимое представление /2.3/ характеризуется величиной $\varkappa^2>0$ и числами $j$, $\tau$, задающими неприводимое представление малой группы $SO(4)$. При сужении на подгруппу $\mathcal{P}(1,3)$ пространство $\mathcal{H}$ разлагается в прямую сумму $\mathcal{P}(1,3)$-инвариантных подпространств $\mathcal{H}_{p_4}$ /одно для каждого значения $p_4$ /. Подпространства $\mathcal{H}_{p_4}$ неприводимы относительно $\mathcal{P}(1,3)$ тогда и только тогда, когда представления малой группы группы $\mathcal{P}(1,3)$ неприводимы. Пересечение групп $SO(4)$ и $\mathcal{P}(1,3)$ есть малая группа в $\mathcal{P}(1,3)$, соответствующая орбите $p_0^2 - p_a^2 = p_4^2 + \varkappa^2$, а это - группа $SO(3)$. Поэтому отсюда следует, что пространство $\mathcal{H}$ разлагается на подпространства, соответствующие унитарным неприводимым представлениям подгруппы $\mathcal{P}(1,3)$ со следующими значениями массы $m$ и спина $S$

$$\varkappa^2 \leq m^2 < \infty \; ; \quad |j-\tau| \leq s \leq j+\tau . \qquad /2.6/$$

Оператор $V_4$, связывающий канонический базис с $\mathcal{P}(1,3)$-базисом, является некоторой матрицей /зависящей от переменных $\vec{p}$, $p_4$ /, заданной в пространстве неприводимого представления группы $\mathcal{P}(1,4)$ размерности $(2j+1)(2\tau+1)$, поэтому естественно для нахождения его явного вида воспользоваться разложением по полной системе ортопроекторов. Будем искать оператор $V_4$ в виде

$$V_4 = \sum_r \sum_\ell a_{r\ell}(\vec{p}, p_4) A_r B_\ell \, . \qquad /2.7/$$

где

$$A_r = \prod_{r \neq r'} \frac{\frac{\vec{J}\cdot\vec{P}}{P} - r}{r - r} \, , \qquad B_\ell = \prod_{\ell \neq \ell'} \frac{\frac{\vec{T}\cdot\vec{P}}{P} - \ell'}{\ell - \ell'} \qquad /2.8/$$

являются операторами проектирования на собственные подпространства эрмитовых операторов $\frac{\vec{J}\cdot\vec{P}}{P}$ , $\frac{\vec{T}\cdot\vec{P}}{P}$ , удовлетворяющие условиям ортогональности и полноты

$$A_r A_{r'} = \delta_{rr'} A_r\,, \quad \sum_{r=-j}^{j} A_r = 1\,, \quad \frac{\vec{J}\cdot\vec{P}}{P} = \sum_{r=-j}^{j} r A_2$$

$$B_{ee'} = \delta_{ee'} B_e\,, \quad \sum_{e=-\tau}^{\tau} B_e = 1\,, \quad \frac{\vec{T}\cdot\vec{P}}{P} = \sum_{e=-\tau}^{\tau} e B_e \qquad /2.9/$$

Обратный оператор $V_4^{-1}$ имеет вид

$$V_4^{-1} = \sum_r \sum_e a'_{re}(\vec{P}, p_4) A_r B_e \qquad /2.I0/$$

Поскольку генераторы $P_0$ , $P_a$ , $J_{ab}$ , $J_{0a}$ в $\mathcal{P}(1,3)$ базисе имеют канонический вид Вигнера-Широкова, то оператор $V_4$ должен удовлетворять условиям

$$V_4 P_0 V_4^{-1} = \sqrt{P_a^2 + m^2}\,, \qquad m^2 = \varkappa^2 + p_4^2 \qquad /2.II/$$

$$V_4 P_k V_4^{-1} = p_k \qquad /2.I2/$$

$$V_4 J_{ab} V_4^{-1} = i p_b \frac{\partial}{\partial p_a} - i p_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab} \qquad /2.I3/$$

$$V_4 J_{0a} V_4^{-1} = -i p_0 \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab} P_b}{P_0 + m} \equiv J'_{0a} \qquad /2.I4/$$

где $P_0$ , $P_a$ , $J_{ab}$ , $J_{0a}$ , $S_{ab}$ из /2.3 / и /2.3/.

Из /2.11-2.13/ следует, что функции $a_{r\ell}$ и $a'_{r\ell}$ являются скалярными относительно трехмерных вращений, т.е.

$$a_{r\ell}(\vec{p}, p_4) = a_{r\ell}(\vec{p}^{\,2}, p_4);$$
$$a^{-1}_{r\ell}(\vec{p}, p_4) = a^{-1}_{r\ell}(\vec{p}^{\,2}, p_4) . \qquad /2.15/$$

Окончательную структуру функций $a_{r\ell}$ и $a^{-1}_{r\ell}$ определяет соотношение /2.14/. Запишем его в форме

$$\left[V_4^{-1}, J_{0a}\right] V_4 = \frac{\left[(\vec{p}\times\vec{j})_a + (\vec{p}\times\vec{T})_a\right](\varkappa - m)}{(E+m)(E+\varkappa)} - \frac{(j_a - T_a)}{E+\varkappa} p_4 . \qquad /2.16/$$

Из уравнения /2.16/ найдем условия, которым должны удовлетворять функции $a_{r\ell}$ и $a^{-1}_{r\ell}$. Для вычисления в явном виде коммутатора, входящего в левую часть уравнения /2.16/, воспользуемся соотношениями [61]

$$\left[A_r\, i\frac{\partial}{\partial p_a}\right] = -\frac{1}{p^2}\left[A_r, (\vec{p}\times\vec{T})_a\right] = \frac{(\vec{p}\times\vec{J})_a}{2p^2}(2A_r - A_{r-1} - A_{r+1}) +$$
$$+ \frac{i}{2p}\left(J_a - \frac{p_a}{p}\,\frac{\vec{J}\cdot\vec{P}}{p}\right)(A_{r+1} - A_{r-1}) ,$$

/2.17/

$$\left[B_\ell, i\frac{\partial}{\partial p_a}\right] = -\frac{1}{p^2}\left[B_\ell, (\vec{P}\times\vec{T})_a\right] = \frac{(\vec{P}\times\vec{T})_a}{2p^2}(2B_\ell - B_{\ell-1} - B_{\ell+1}) +$$
$$+ \frac{i}{2p}\left(T_a - \frac{p_a}{p}\,\frac{\vec{T}\cdot\vec{P}}{p}\right)(B_{\ell+1} - B_{\ell-1}) .$$

Подставляя /2.7/, /2.10/ и /2.16/ и учитывая /2.17/, приходим к уравнению

$$\left[V_4^{-1}, J_{0a}\right] V_4 = \sum_{\ell, r, \ell', r'} \left[ a^{-1}_{r'\ell'} A_{r'\ell'}, \left\{ -iE \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{(\vec{P}\times\vec{J})_a + (\vec{P}\times\vec{T})_a}{E\times m} \right\} \right] \times$$

$$\times a_{r\ell} A_r B_\ell = \sum_{\ell, r, \ell', r'} \left\{ i \frac{P_a}{P} \frac{\partial a^{-1}_{r'\ell'}}{\partial p} A_{r'} B_{\ell'} a_{r\ell} A_r B_\ell - \right.$$

$$- a^{-1}_{r'\ell'} \left[ \left\{ iE \frac{\partial}{\partial p_a} + \frac{(\vec{P}\times\vec{T})_a + (\vec{P}\times\vec{J})_a}{E+m} \right\}, A_{r'} B_{\ell'} \right] \Big\} a_{r\ell} A_r B_\ell =$$

$$= \sum_{\ell' r' \ell r} \left\{ i \frac{P_a}{P} \frac{\partial a^{-1}_{r\ell}}{\partial p} E a_{r\ell} A_r B_\ell - m a^{-1}_{r'\ell'} a_{r\ell} \left( \left[ A_{r'}, i \frac{\partial}{\partial p_a} \right] B_{\ell'} + \right. \right.$$

$$+ \left[ B_{\ell'}, i \frac{\partial}{\partial p_a} \right] A_{r'} \Big) A_r B_\ell = \sum_{r\ell} \left\{ iE \frac{P_a}{P} \frac{\partial a^{-1}_{r\ell}}{\partial p} a_{r\ell} - \right. \qquad /2.18/$$

$$- m \left[ \frac{(\vec{P}\times\vec{J})_a}{P^2} (2a^{-1}_{r\ell} - a^{-1}_{r+1\ell} - a^{-1}_{r-1\ell}) + \frac{(\vec{P}\times\vec{T})_a}{P^2} (2a^{-1}_{r\ell} - \right.$$

$$- a_{r\ell+1} - a_{r\ell-1} + \frac{i}{2P} \left[ \left( J_a - \frac{P_a}{P} \frac{\vec{J}\cdot\vec{P}}{P} \right) (a^{-1}_{r-1\ell} - a^{-1}_{r+1\ell}) + \left( T_a - \frac{P_a}{P} \frac{\vec{T}\cdot\vec{P}}{P} \right) \times \right.$$

$$\times (a^{-1}_{r\ell-1} - a^{-1}_{r\ell+1}) \Big] \Big] \Big\} A_r B_\ell = \frac{\left[ (\vec{P}\times\vec{J})_a + (\vec{P}\times\vec{T})_a \right] (\varkappa - m)}{(E+m)(E+\varkappa)} + \frac{(J_a - T_a) P_4}{E+m} .$$

Приравнивая в /2.18/ коэффициенты при линейно независимых векторах $i \frac{P_a}{P} A_r B_\ell$ , $T_a A_r B_\ell$ , $J_a A_r B_\ell$ , $(\vec{P}\times\vec{J})_a A_r B_\ell$ и $(\vec{P}\times\vec{T})_a A_r B_\ell$ , получаем

$$\frac{\partial a^{-1}_{r\ell}}{\partial p} a_{r\ell} + \frac{m}{2p} \left[ r (a^{-1}_{r-1\ell} + a^{-1}_{r+1\ell}) a_{r\ell} + \ell (a^{-1}_{r\ell-1} + a^{-1}_{r\ell+1}) a_{r\ell} \right] = 0$$

$$\frac{im}{2p} (a^{-1}_{r-1\ell} - a^{-1}_{r+1\ell}) a_{r\ell} = - \frac{P_4}{E+\varkappa} ,$$

$$\frac{im}{2p}(a^{-1}_{r\ell-1} - a^{-1}_{r\ell+1})a_{r\ell} = \frac{p_4}{E+\varkappa},$$

$$\frac{m}{2p^2}(2a^{-1}_{r\ell} - a^{-1}_{r-1\ell} - a^{-1}_{r+1\ell})a_{r\ell} = \frac{\varkappa+m}{(E+m)(E+\varkappa)}, \qquad /2.19/$$

$$\frac{m}{2p}(2a^{-1}_{r\ell} - a^{-1}_{r\ell-1} - a^{-1}_{r\ell+1})a_{r\ell} = \frac{m-\varkappa}{(E+m)(E+\varkappa)}.$$

После несложных преобразований система /2.19/ приводится к виду

$$E\frac{\partial a^{-1}_{r\ell}}{\partial p}a_{r\ell} + i\frac{p_4}{E+\varkappa}(r-\ell) = 0,$$

$$a^{-1}_{r\pm1\ell}\,a_{r\ell} = \frac{\varkappa E + m^2 \mp i p p_4}{m(E+\varkappa)} = e^{\pm i\theta_4},$$

$$a^{-1}_{r\ell\pm1}\,a_{r\ell} = \frac{\varkappa E + m^2 \pm i p p_4}{m(E+\varkappa)} = e^{\mp i\theta_4}, \qquad /2.20/$$

$$\theta_4 = \operatorname{arctg}\frac{pp_4}{m^2+\varkappa E} = 2\operatorname{arctg}\frac{pp_4}{(E+m)(m+\varkappa)},$$

$$\theta_4 = \operatorname{arctg}\frac{pp_4}{m^2+\varkappa E} = 2\operatorname{arctg}\frac{pp_4}{(E+m)(m+\varkappa)}.$$

Покажем, что общее решение системы /2.20/ задается формулой

$$a_{r\ell} = R_4\, e^{i(r-\ell)\theta_4}, \qquad /2.21/$$

где $R_4$ – произвольная функция от $p_4$.

Действительно, представляя $a_{r\ell}$ в форме

$$a_{r\ell} = B_{r\ell}\, e^{i[(r-\ell)\theta_4 - C_{r\ell}]}, \qquad /2.22/$$

где $B_{r\ell}$, $C_{r\ell}$ – функции от $\vec{p}^{\,2}$, $p_4$, получаем из /2.20/

$$B_{r\ell} = B_{r\pm 1\ell} = B_{r\ell\pm 1} = B \; ; \quad C_{r\ell} = C_{r\pm 1\ell} = C_{r\ell\pm 1} = C \, . \qquad /2.23/$$

Обозначив $B_{\ell}^{ir}$ через $R_4$ и подставляя /2.23/ в /2.22/, приходим к /2.21/. Легко видеть, что подстановка /2.21/ в /2.20/ обращает последнее уравнение в тождество.

Принимая во внимание соотношение

$$\frac{S_{4a} P_a}{P} = \sum (r-\ell) A_r B_\ell \, . \qquad /2.24/$$

и подставляя /2.21/ в /2.7/, получаем

$$V_4 = \sqrt{\frac{m}{P_4}} \, exp\left( i \frac{S_{4a} P_a}{P} \, 2 arctg \frac{P P_4}{(E+m)(m+æ)} \right) \qquad /2.25/$$

Формула /2.25/ задает искомый оператор преобразования из канонического базиса к $\mathcal{P}(1,3)$ –базису.

Теперь найдем явный вид генераторов $J_{04}$ , $J_{4a}$ в $\mathcal{P}(1,3)$-базисе. Используя тождество Хаусдорфа–Камбела

$$e^{-A} B e^{+A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{B,A\}^n}{n!} \; , \; \{B,A\}^n = [B, A^{\,n-1}, A] \; , \; \{B,A\}^0 = B \qquad /2.26/$$

имеем

$$V_4 \, i \frac{\partial}{\partial P_a} V_4^{-1} = i \frac{\partial}{\partial P_a} - \frac{P_a S_{4b} P_b P_4}{(E+æ)(E+m)Em} + \frac{P_4 S_{4a}}{m(E+æ)} + \frac{S_{ab} P_b (m-æ)}{m(E+m)(E+æ)} ,$$

$$V_4 S_{4a} V_u^{-1} = \frac{S_{4a}(m^2 + æE)}{m(E+æ)} + \frac{P_a}{P} \; \frac{S_{4b} P_b (m-æ)}{mp(E+m)(E+æ)} + \frac{S_{ab} P_b P_4}{m(E+æ)} ,$$

$$V_4\, i\frac{\partial}{\partial p_4}V_4^{-1} = i\frac{\partial}{\partial p_4} - \frac{æ^2}{2p_4 m^2} + \frac{æ S_{4b}P_b}{Em^2} - \frac{S_{4a}P_a}{E(E+æ)},$$

/2.27/

$$V_4 S_{ab}P_b V_4^{-1} = S_{ab}P_b + \frac{PP_4 S_{ab}P_b}{(E+æ)(E+m)Em} + \frac{S_{ab}P_b P(m-æ)}{m(E+m)(E+æ)} + \frac{PP_4 S_{4a}}{m(E+æ)}.$$

Подействовав на генераторы /2.3/ /2.3$'$/ оператором /2.27/, использовав /2.25/ и сделав затем замену переменных $p_4 \quad \varepsilon_4$, $p_4 \to \varepsilon_4\sqrt{m^2-æ^2}$, $\varepsilon_4 = P_4/|P_4|$, получаем вид операторов $J_{04}$, $J_{4a}$ в $\mathcal{P}(1,3)$-базисе.

Итак, мы пришли к окончательному результату.

Т е о р е м а. Пространство $\mathcal{H}$ унитарного неприводимого представления группы $\mathcal{P}(1,4)$ с $æ^2>0$, $P_0>0$, разлагается на подпространства, соответствующие унитарным неприводимым представлениям подгруппы $\mathcal{P}(1,3)$ со следующими значениями инвариантов $M^2$ и $W^2$ $æ^2 \le m^2 < \infty$, $|j-\tau| \le s \le j+\tau$. Оператор перехода от базиса $|\vec{p}, p_4, j_3; j, \tau, æ>$ к $\mathcal{P}(1,3)$-базису задается формулой /2.25/, а операторы $J_{\mu\nu}$, $P_\mu$ в $\mathcal{P}(1,3)$-базисе имеют вид

$$P_0 = \sqrt{p^2+m^2}, \qquad P_a = p_a, \quad P_4 = \varepsilon_4\sqrt{m^2+æ^2}, \quad \varepsilon_4 = \pm 1$$

$$J_{ab} = ip_b\frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a\frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab},$$

/2.28/

$$J_{0a} = -ip_0\frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab}P_b}{E+m},$$

$$J_{04} = -iE\left\{\varepsilon_4\sqrt{1+\frac{æ^2}{m^2}}, \frac{\partial}{\partial m}\right\} - \frac{æ}{m}\,\frac{S_{4a}P_a}{m},$$

$$J_{4a} = ip_a\left\{\varepsilon_4\sqrt{1-\frac{æ^2}{m^2}}, \frac{\partial}{\partial m}\right\} - i\varepsilon m\sqrt{1-\frac{æ^2}{m^2}}\,\frac{\partial}{\partial p_a} +$$

$$+\frac{\varkappa P_a S_{4b} P_b}{m^2(E+m)}+\varepsilon_4\sqrt{1+\frac{\varkappa^2}{m^2}}\,\frac{S_{ab}P_b}{E+m}+\frac{\varkappa}{m}S_{4a},$$

$$\{A,B\}=AB+BA.$$

З а м е ч а н и е. Если в /2.28/ положить $\varkappa=0$ $(p_4\neq 0)$, то операторы $J_{\mu\nu}$, $P_0$ имеют вид [14]

$$P_0=\sqrt{p^2+m^2}, \quad m^2=p_4^2,$$

$$J_{ab}=ip_b\frac{\partial}{\partial p_a}-ip_a\frac{\partial}{\partial p_b}+S_{ab},$$

$$J_{04}=-iE\left\{\varepsilon_4\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{m^2}},\frac{\partial}{\partial m}\right\},$$

$$J_{4a}=\frac{i}{2}P_a\left\{\varepsilon_4\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{m^2}},\frac{\partial}{\partial m}\right\}-i\varepsilon_4\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{m^2}}\,\frac{\partial}{\partial p_a}-\varepsilon_4\frac{S_{ab}P_b}{E+m}.$$

А. В случае $\varkappa^2<0$ генераторы канонического неприводимого представления группы $\mathcal{P}(1,4)$ выглядят так

$$P_0=\sqrt{p_a^2-\eta^2}, \quad P_k=p_k, \quad P_\mu P^\mu=-\eta^2,$$

$$J_{ab}=ip_b\frac{\partial}{\partial p_a}-ip_a\frac{\partial}{\partial p_b}+S_{ab},$$

$$J_{0a}=-ip_0\frac{\partial}{\partial p_a}+S_{0a},$$

$$J_{a4}=ip_4\frac{\partial}{\partial p_a}-ip_a\frac{\partial}{\partial p_4}-\frac{S_{ab}P_b-S_{a0}P_0}{p_4+\eta},$$

$$J_{04}=-ip_0\frac{\partial}{\partial p_a}-\frac{S_{0a}P_a}{p_4+n},$$

где $S_{\mu\nu}$ - генераторы неприводимого представления группы $SO_0(1,3)$. С помощью изометрического преобразования

$$V = exp\left(-i\,\frac{S_{0a}P_a}{P}\,arcth\,\frac{P}{E}\right)$$

и последующей замены переменной $p_4 \to \varepsilon_4\sqrt{m^2-\varkappa^2}$ , получаем

$$P_0 = \sqrt{P_a^2+m^2}\,,\quad P_a = p_a\,,\quad m = \sqrt{p_4^2-\eta^2}$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}\,,$$

$$J_{0a} = -ip_0\frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{0b}P_b}{E+m}\,,$$

$$J_{04} = -ip_0\frac{\partial}{\partial p_4} + \frac{\eta}{m}\,\frac{S_{0a}P_a}{m}\,,$$

$$J_{a4} = \frac{i}{2}P_a\left\{\frac{P_4}{m},\frac{\partial}{\partial m}\right\} - ip_4\frac{\partial}{\partial p_a} + \frac{P_a m S_{4b}P_b}{m^2(E+m)} - \frac{P_4 S_{ab}P_b}{m(E+m)} - \frac{n}{m}S_{0a}\,.$$

Если $P_4^2 > \eta^2$ , то эти формулы задают представление группы $\mathcal{P}(1,4)$ в $\mathcal{P}(1,3)$ -базисе.

Б. В некоторых физических задачах /когда нарушена $\mathcal{P}(1,3)$ симметрия, но сохраняется еще симметрия относительно подгруппы $\mathcal{P}(1,2)$/ удобно использовать $\mathcal{P}(1,2)$ -базис. В связи с этим интересно продолжить редукцию до подгруппы $\mathcal{P}(1,2)$ . Это означает переход к такому базису, в котором генераторы $P_0$ , $P_\alpha$ , $J_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta = 1,2)$ имеют каноническую форму

$$P_0 = E = \sqrt{P_\alpha^2+m_1^2}\,,\quad P_\alpha = p_\alpha\,,\quad m_1^2 = m^2+p_3^2\,.$$

$$J_{12} = x_1 p_1 - x_2 p_1 + S_{12}\,,$$

$$J_{0\alpha} = -ip_0\frac{\partial}{\partial p_\alpha} - \frac{S_{\alpha\beta}P_\beta}{E+m_1}\,,$$

Найдем вид остальных генераторов группы $\mathcal{P}(1,4)$ . Для этого достаточно определить оператор $V_3$ , удовлетворяющий условиям

$$V_3 P_0 V_3^{-1} = E \quad , \quad V_3 P_\alpha V_3^{-1} = P_\alpha , \qquad /2.29/$$

$$V_3 J_{0\alpha} V_3^{-1} = -iP_0 \frac{\partial}{\partial P_\alpha} - \frac{S_{\alpha\beta} P_\beta}{E+m} , \qquad /2.30/$$

где операторы $P_0$ , $P_\alpha$ , $J_{0\alpha}$ , $S_{\alpha\beta}$ заданы в $\mathcal{P}(1,3)$ -базисе.

Представим $V_3$ в виде

$$V_3 = R_3 \exp\left(i \frac{S_{3\alpha} P_\alpha}{|P|_3} \theta_3\right) , \qquad P_3 = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} , \qquad /2.31/$$

где $R_3$ и $\theta_3$ – некоторые функции от $P_3$ , $P_4$ и $P_3, P_4, |P|_3$, соответственно. Чтобы определить эти функции, подставим /2.31/ в /2.30/. Тогда имеем

$$\left[V_3^{-1}, -iP_0 \frac{\partial}{\partial P_\alpha} - \frac{S_{\alpha\beta} P_\beta}{E+m}\right] V_3 = -\frac{S_{\alpha 3} P_3}{E+m} + \frac{(m-m_1) S_{\alpha\beta} P_\beta}{(E+m)(E+m_1)} . \qquad /2.32/$$

Используя /2.26/, получаем

$$\left[V_3^{-1}, -iP_0 \frac{\partial}{\partial P_\alpha} - \frac{S_{\alpha\beta} P_\beta}{E+m_1}\right] V_3 = \frac{P_\alpha}{P} E \frac{\partial \theta_3}{\partial |P|_3} \cdot \frac{S_{3\alpha} P_\alpha}{|P|_3} -$$
$$- m_1 \frac{S_{\alpha\beta} P_\beta}{|P|_3^2} (1-\cos\theta_3) + \frac{m}{|P|_3}\left(S_{3\alpha} - \frac{P_\alpha}{|P|_3} \frac{S_{3\beta} P_\beta}{|P|_3}\right) \sin\theta_3 , \qquad /2.33/$$

откуда

$$\theta_3 = 2 \operatorname{arctg} \frac{|P|_3 P_3}{(E+m)(E+m_1)} . \qquad /2.34/$$

Множитель $R_3$ выберем в виде $R_3=\sqrt{\frac{m_1}{p_3}}$, тогда скалярное произведение в $\mathcal{P}(1,2)$ –базисе будеть иметь форму

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\int_{\varkappa^2}^{\infty}\frac{dm^2}{2m}\int_{m^2}^{\infty}\frac{dm_1}{2m_1}\int\frac{d^2p}{E}\,\varphi_1^+\varphi_2\ .$$

Теперь, используя /2.30/, /2.34/, можно найти действие генераторов $J_{03}$, $J_{04}$, $J_{34}$ группы $\mathcal{P}(1,4)$ в $\mathcal{P}(1,2)$ –базисе. Имеем

$$J_{03}=-\frac{i}{2}P_0\left\{\lambda_{mm},\frac{\partial}{\partial m_1}\right\}-\frac{m}{m_1}\,\frac{S_{3a}P_a}{m_1}\ ,\quad \Lambda_{mm_1}=\varepsilon_1\sqrt{1-\frac{m^2}{m_1}}\ ,$$

$$J_{43}=-\frac{im}{2}\left\{\lambda_{\varkappa m}\lambda_{mm_1},\frac{\partial}{\partial m}\right\}+\frac{\varkappa m_1}{m^2}S_{43}\ ,$$

$$J_{04}=-i\left\{\frac{\lambda_{\varkappa m}E_m}{\lambda_{mm_1}m^2},\frac{\partial}{\partial m}\right\}+\lambda_{\varkappa m_1}\frac{S_{3a}P_a}{m_1}-\frac{E\lambda_{mm_1}\varkappa}{m_2}S_{43}-\frac{\varkappa}{mm_1}S_{4\alpha}P_\alpha\ .$$

В. В случае $\varkappa^2<0$ генераторы канонического неприводимого представления группы $\mathcal{P}(1,4)$ выглядят как

$$P_0=\sqrt{p_k^2-\eta^2}\ ,\quad P_k=p_k\ ,\quad P_\mu P^\mu=-\eta^2,$$

$$J_{ab}=ip_b\,\frac{\partial}{\partial p_a}-ip_a\,\frac{\partial}{\partial p_b}+S_{ab}\ ,$$

$$J_{0a}=-ip_0\,\frac{\partial}{\partial p_a}+S_{0a}\ ,$$

$$J_{a4}=ip_4\,\frac{\partial}{\partial p_a}-ip_a\,\frac{\partial}{\partial p_4}-\frac{S_{ab}P_b-S_{a0}P_0}{P_4+\eta}\ ,$$

$$J_{04}=-ip_0\,\frac{\partial}{\partial p_a}-\frac{S_{0a}P_a}{P_a+\eta}\ ,$$

где $S_{\mu\nu}$ – генераторы неприводимого представления группы $SO_0(1,3)$. С помощью изометрического преобразования

$$V = V' exp\left(-i \frac{S_{0a} P_a}{P} \, arctg \frac{P}{E}\right) ,$$

где

$$V' = \begin{cases} 1, & P_4^2 > \eta^2 \\ exp\left[i \frac{S_{3a} P_a}{P_3}\left(arctg \frac{|P|_3 P_3}{m^3 - i\eta E} - i \, arctg \frac{|P_3|}{E}\right)\right] & \end{cases}$$

эти генераторы приводятся к виду

$$P_0 = \sqrt{P_a^2 + m^2} , \quad P_a = P_a , \quad P_4 = {}_4\sqrt{m^2 + \eta^2} \; ; \; m^2 > 0$$

$$J_{ab} = i p_b \frac{\partial}{\partial p_a} - i p_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}$$

$$J_{0a} = -i p_0 \frac{\partial}{\partial p_0} - \frac{S_{ab} P_b}{E + m}$$

$$J_{04} = -i p_0 \frac{\partial}{\partial p_4} + \frac{\eta}{m} \frac{S_{0a} P_a}{m}$$

и

$$P_0 = \sqrt{P_a^2 + m^2} , \quad P_a = P_a , \quad P_4 = {}_4\sqrt{m^2 + \eta^2} , \; m^2 < 0$$

$$J_{12} = i P_2 \frac{\partial}{\partial p_1} - i P_1 \frac{\partial}{\partial p_2} + S_{12} ,$$

$$J_{\alpha 3} = i \frac{\partial}{\partial p_3} p_a - i \frac{\partial}{\partial p_a} p_3 - \frac{S_{\alpha\beta} P_\beta - i S_{3a} P_0}{P_3 + im}$$

$$\alpha = 1,3$$

$$J_{0\alpha} = -i p_0 \frac{\partial}{\partial p_\alpha} + i S_{3\alpha}$$

$$J_{03} = -i p_0 \frac{\partial}{\partial p_3} - \frac{i S_{3a} P_a}{P_3 + im} ,$$

$$J_{04} = -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_4} - i\frac{p_4 S_{3b} p_b}{m^2} - \frac{\eta}{m^3} S_{03}(p_0 p_3 + p_3^2) + \frac{\eta S_{0\alpha} p_\alpha}{m^3}(p_0 - p_3)$$

для $p_4^2 > \eta^2$ и $p_4^2 < \eta^2$ , соответственно.

2. Редукция $\mathcal{P}(1,n) \supset \mathcal{P}(1,3)$ .

А. Покажем сначала, как представление алгебры $\mathcal{P}(1,n)$ может быть задано в $\mathcal{P}(1,n-1)$ -базисе. Каноническое неприводимое представление генераторов группы $\mathcal{P}(1,n)$ задается формулами

$$P_0 = E = \sqrt{p_k^2 + \varkappa^2}, \quad P_k = p_k, \quad k = 1,2,\ldots,n;$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \quad x_a = i\frac{\partial}{\partial p_a}, \quad a = 1,2,\ldots,n-1;$$

$$J_{0a} = -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab} p_b}{E+\varkappa} - \frac{S_{an} p_n}{E+\varkappa}, \qquad /2.35/$$

$$J_{an} = x_a p_4 - x_4 p_a + S_{an},$$

$$J_{0n} = -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_4} - \frac{S_{na} p_a}{E+\varkappa}. \qquad /2.36/$$

Здесь $S_{kl}$ - матрицы неприводимого представления $\mathcal{D}(m_1, m_2, \ldots, m_{[\frac{n}{2}]})$ алгебры $SO(n)$ , $m_i$ - числа Гельфанда-Цетлина. Операторы /2.35/ эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\psi_1, \psi_2) = \int \frac{d^4 p}{p_0} \psi_1^+ \psi_2 . \qquad /2.37/$$

В $\mathcal{P}(1,n-1)$ -базисе генераторы /2.35/, по определению, имеют вид прямой суммы генераторов канонических представлений группы $\mathcal{P}(1,n-1)$ . Если представление алгебры $SO(n)$ задано в базисе $SO(n) \supset SO(n-1) \supset \ldots$ , то эти генераторы имеют форму

$$P_0 = E = \sqrt{p_a^2 - m_n^2}\ , \quad m_n^2 = \varkappa^2 + p_n^2\ , \quad P_a = p_a$$

$$J_{ab} = i p_b \frac{\partial}{\partial p_a} - i p_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}\ , \qquad /2.38/$$

$$J_{0a} = -i p_0 \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab}\, p_b}{E + m_n}\ ,$$

Задача нахождения явного вида генераторов $P_\mu$ , $J_{\mu\nu}$ в $\mathcal{P}(1,n)$ - базисе сводится к отысканию изометрического оператора, преобразующего генератора /2.35/ к виду /2.38/.

По аналогии с разделом 2 оператор преобразования будем искать в виде

$$V_n = R_n \exp i \frac{S_{na}\, p_a}{|P|_n}\, \theta_n\ , \qquad P_n = \sqrt{p_a^2}\ , \quad a < n\ , \qquad /2.39/$$

где $R_n$ и $\theta_n$ - некоторые функции от $p_n$ и $|P|_n$ , соответственно, которые предстоит найти.

Оператор $V_n$ преобразует /2.35/ и /2.38/, если выполняются соотношения

$$\left[V_n^{-1}, J_{0a}\right] V_n = \frac{S_{ab}\, p_b\,(\varkappa - m_n)}{(E+m_n)(E+\varkappa)} + \frac{S_{na}\, p_n}{E+\varkappa}\ . \qquad /2.40/$$

Подставляя /2.38/, /2.39/ в /2.40/ и используя тождества

$$V_n^{-1} i \frac{\partial}{\partial p_a} V_n = i \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{p_a}{p} \frac{\partial \theta}{\partial p} S_p + \frac{S_{ab} p_b}{p^2}(1-\cos\theta) - \frac{1}{p}\left(S_{na} - \frac{p_a}{p} S_p\right)\sin\theta$$

$$V_n S_{ab} V_n^{-1} = S_{ab} p_b - p^2 \left( V_n i \frac{\partial}{\partial p_a} V_n^{-1} - i \frac{\partial}{\partial p_a} \right) ,$$

приходим к уравнению

$$\frac{p_a}{p} E \frac{\partial \theta_n}{\partial p} - m \left[ \frac{S_{ab} p_b}{p^2} (1-\cos\theta_n) - \frac{1}{p}\left( S_{na} - \frac{p_a}{p} S_p \right) \sin\theta_n \right] =$$

$$- \frac{S_{ab} p_b (\varkappa - m)}{(E+m)(E+\varkappa)} - \frac{S_{na} p_n}{(E+\varkappa)} .$$

Приравнивая коэффициенты при линейно независимых векторах $\frac{p_a}{|p|_n} \frac{S_{nb} p_b}{|p|_n}$ , $S_{ab} p_b$ и $S_{na}$ , получаем систему уравнений для искомых функций

$$E \frac{\partial \theta_n}{\partial |p|_n} - \frac{m}{p} \sin\theta = 0 , \qquad m \sin\theta_n = \frac{|p|_n p_n}{E+\varkappa} ,$$

$$m(\cos\theta_n - 1) = \frac{p^2(\varkappa - m_n)}{(E+m_n)(E+\varkappa)} , \qquad /2.41/$$

Решение системы /2.41/ задается формулой

$$\theta_n = 2 \operatorname{arctg} \frac{|p|_n p_n}{(E+m_n)(m_n+\varkappa)} . \qquad /2.42/$$

Из условия нормировки базисных векторов получаем, что множитель $R_n = \sqrt{\frac{m_n}{p_n}}$ .

Теперь, используя явный вид оператора $V_n$ , нетрудно найти выражения для генераторов $J_{on}$ , $J_{an}$ и $\mathcal{P}(1,n-1)$ -базисе.

Принимая во внимание тождества

$$V_n\, i\frac{\partial}{\partial p_a}V_n^{-1}=i\frac{\partial}{\partial p_a}-\frac{p_a p_n S_{nb} p_b}{E m_n(E+m_n)(E+\varkappa)}+$$

$$-\frac{S_{ab}p_b(m_n-\varkappa)}{m_n(E+m_n)(E+\varkappa)}-\frac{p_n S_{na}}{m_n(E+\varkappa)}\ ,$$

$$V_n S_{na} V_n^{-1}=i\left[S_{nb}p_b\ ,V_n\, i\frac{\partial}{\partial p_a}V_n^{-1}\right]=S_{na}\frac{m_n^2+\varkappa E}{m_n(E+\varkappa)}+$$

$$+\frac{p_n}{p_n}\ \frac{S_{nb}p_b(m_n-\varkappa)}{m_n(E+m_n)(E+\varkappa)}-\frac{S_{ab}p_b p_n}{m_n(E+\varkappa)}\ ,$$

$$V_n\, i\frac{\partial}{\partial p_a}V_n^{-1}=i\frac{\partial}{\partial p_n}+S_{na}p_a\left(\frac{\varkappa}{E m_n^2}-\frac{1}{E(E+\varkappa)}-\frac{i\varkappa^2}{2p_n m_n^2}\right)$$

и, сделав замену переменных $p_n\longrightarrow\sqrt{m_n^2-\varkappa^2}$ , получаем

$$J_{na}=\frac{ip_a}{2}\left\{\frac{p_n}{m_n}\ ,\ \frac{\partial}{\partial m_n}\right\}-ip_n\frac{\partial}{\partial p_a}+\frac{p_a\varkappa S_{nb}p_b}{m_n^2(E+m_n)}+$$

$$+\ \frac{p_n S_{ab}p_b}{m_n(E+m_n)}+\frac{\varkappa}{m_n}S_{na}\ , \qquad /2.43/$$

$$J_{on}=-\frac{i}{2}E\left\{\frac{p_n}{m_n}\ ,\ \frac{\partial}{\partial m_n}\right\}-\frac{\varkappa}{m_n}\ \frac{S_{na}p_a}{m_n}\ .$$

Итак, мы нашли, что явный вид генераторов группы $\mathcal{P}(1,n)$ в $\mathcal{P}(1,n-1)$ -базисе задается формулами /2.38/, /2.43/. Генераторы /2.38/, /2.43/ эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\varphi_1\, ,\varphi_2)=\int\limits_{\varkappa^2}^{\infty}\frac{dm_{\varkappa}^2}{2m_n}\sum_{\rho}\int\frac{d^{n-1}p}{p_0}\varphi_1^+\varphi_2\ ,$$

где $\rho$ - набор чисел, характеризующих неприводимые представления группы $SO(n-1)$, содержащиеся в представлении $\mathcal{D}(m_1, m_2, \dots, m_{[\frac{n}{2}]})$.

Б. Получим теперь представление алгебры $\mathcal{P}(1,n)$ в $\mathcal{P}(1,n-2)$ - базисе. Используя приведенные выше результаты, заключаем, что оператор

$$V_{n-1} = \sqrt{\frac{m_{n-1}}{p_{n-1}}}\; exp\, i\, \frac{2S_{n-1a}P_a}{|P|_{n-1}}\, arctg \frac{|P|_{n-1}\, p_{n-1}}{(E+m_n)(E+m_{n-1})}\,, \qquad /2.44/$$

где

$$m_{n-1} = \sqrt{\varkappa^2 + p_n^2 + p_{n-1}^2}\,, \quad |P|_{n-1} = (\sum_{a<n-1} p_a^2)^{1/2}$$

преобразует генераторы /2.38/ к виду

$$P_0 = E\,, \quad P_a = p_a\,, \quad a = 1,2,n-1; \quad P_n = \varepsilon_n \sqrt{m_n^2 - \varkappa^2}\,,$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}\,,$$

$$J_{0a} = -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab}\,p_b}{E+m_{n-1}}\,, \qquad /2.45$$

$$J_{0\,n-1} = -\frac{i}{2} E \left\{ \frac{p_{n-1}}{m_{n-1}}\,,\, \frac{\partial}{\partial m_{n-1}} \right\} - \frac{m_n}{m_{n-1}}\, \frac{S_{n-1a}P_a}{m_{n-1}}\,.$$

Для того, чтобы задать вид остальных генераторов в $\mathcal{P}(1,n-2)$ - базисе, достаточно найти генератор $\mathcal{J}_{n\,n-1}$ /остальные определяются из коммутационных соотношений /2.2/. Используя тождества

$$V_{n-1}^{-1}\, x_n\, V_{n-1} = x_n - \frac{p_n p_{n-1} S_{n-1a} P_a}{m_n m_{n-1}^2 E} + \frac{i}{2}\, \frac{-p_n}{m_{n-1}^2}\,,$$

$$V_{n-1}^{-1}\, x_{n-1}\, V_{n-1} = x_{n-1} + S_{n-1\,a} P_a \left( \frac{m_n}{E m_{n-1}^2} - \frac{1}{E(E+m_n)} \right) + i \frac{m_n^2}{P_{n-1} m_{n-1}^2} \,,$$

$$V_{n-1}^{-1} S_{n\,n-1} V_{n-1} = S_{n,n-1} \cos\theta_{n-1} - \frac{S_{nb} P_b}{P_{n-1}} \sin\theta_{n-1}\,, \qquad b < n-1$$

получаем

$$J_{n\,n-1} = x_n P_{n-1} - x_{n-1} P_n + \frac{x\, m_{n-1}}{m_n^2} S_{n\,n-1} - \frac{i}{2} \frac{\varkappa^2 P_{n-1} - m_n^2 P_n^2}{m_n^2 P_n E_{n-1}} \,. \qquad /2.46/$$

Генераторы /2.45/, /2.46/ эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\varkappa^2}^{\infty} \frac{dm_n^2}{2m_n} \int_{m_n^2}^{\infty} \frac{dm_{n-1}^2}{2m_{n-1}} \sum_{\alpha} \int \frac{d^{n-2} p}{P_0} \varphi_1^+(m_{n-1}, \alpha)\, \varphi_2(m_{n-1}, \alpha),$$

где через $\alpha$ обозначены числа, нумерующие неприводимые представления алгебры $SO(n-2)$, содержащиеся в представлении $\mathcal{D}(m_1, m_2, \ldots, m_{[\frac{n}{2}]})$ группы $SO(n)$.

В. Аналогично определяется представление алгебры $\mathcal{P}(1,n)$ в $\mathcal{P}(1,n-3)$ –базисе. Подвергая генераторы /2.45/ и /2.46/ преобразованию

$$V_{n-2} = \sqrt{\frac{m_{n-2}}{P_{n-2}}}\, exp\left( 2i \frac{S_{n-2\,a} P_a}{|P|_{n-2}}\, arctg \frac{|P|_{n-2}\, P_{n-2}}{(E+m_{n-2})(m_{n-2}+m_{n-1})} \right)$$

$$|P|_{n-2} = \left( \sum_{a<n-2} P_a^2 \right)^{\frac{1}{2}} \; ; \quad m_{n-2} = (\varkappa^2 + P_n^2 + P_{n-1}^2 + P_{n-2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

и учитывая коммутативность /2.46/ и /2.36/, имеем

$$P_0 = E \ , \quad P_a = p_a \ , \quad P_n = \varepsilon_n \sqrt{m_n^2 - \varkappa^2} \, , \ P_{n-1} = \varepsilon_{n-1} \sqrt{m_{n-1}^2 - m_n^2}$$

$$\mathcal{J}_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab} \ ; \quad b, a < n-2 ,$$

$$\mathcal{J}_{0a} = i p_0 \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab} P_b}{E + m} ,$$

$$\mathcal{J}_{0\,n-2} = -\frac{i}{2} E \left\{ \frac{P_{n-2}}{m_{n-2}} , \frac{\partial}{\partial m_{n-2}} \right\} - \frac{m_{n-1}}{m_{n-2}} \frac{S_{n-2\,a} P_a}{m_{n-2}} , \qquad /2.47/$$

$$\mathcal{J}_{n-1,n-2} = \frac{i}{2} \left\{ \frac{P_{n-1} P_{n-2}}{m_{n-1}} , \frac{\partial}{\partial m_{n-1}} \right\} + \frac{m_n m_{n-2}}{m_{n-1}^2} S_{n\,n-2} ,$$

$$\mathcal{J}_{n,n-1} = \frac{i}{2} \left\{ \frac{P_n P_{n-1}}{m_n} , \frac{\partial}{\partial m_n} \right\} + \frac{\varkappa\, m_{n-1}}{m_n^2} S_{n\,n-1} .$$

Г. Подвергая генераторы /2.47/ последовательно преобразованиям

$$V_{n-\ell} = \sqrt{\frac{m_{n-1}}{p_{n-\ell}}} \exp\left( 2i \, \frac{S_{n-\ell\,a} P_a}{|P|_{n-\ell}} \, \operatorname{arctg} \frac{|P|_{n-\ell} \, P_{n-\ell}}{(E + m_{n-\ell})(m_{n-\ell} + m_{n-\ell+1})} \right),$$

где

$$|P|_{n-\ell} = \Big( \sum_{a < n-\ell} P_a^2 \Big)^{\frac{1}{2}} , \qquad m_{n-\ell} = \Big( \varkappa^2 + \sum_{\alpha=1}^{\ell} P_{n-\alpha}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} , \ \ \ell = 3, 4, \dots, n-3$$

используя результаты п.п. А–Г, получаем

$$P_0 = E \ , \quad P_a = p_a$$

$$\mathcal{J}_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}$$

$$\mathcal{J}_{oa} = -ip_o \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab} P_b}{E + m_4}$$

$$\mathcal{J}_{on-\alpha} = -\frac{i}{2}\left\{\frac{P_{n-\alpha}}{m_{n-\alpha}}, \frac{\partial}{\partial m_{n-\alpha}}\right\} - \frac{m_{n-\alpha+1}}{m_{n-\alpha}} \frac{S_{n-\alpha\, a} P_b}{m_{n-\alpha}} \qquad /2.48/$$

$$\mathcal{J}_{n-\alpha, n-\alpha+1} = \frac{i}{2}\left\{\frac{P_{n-\alpha} P_{n-\alpha+1}}{m_{n-\alpha}}, \frac{\partial}{\partial m_n}\right\} + \frac{\varkappa m_{n-\alpha+1}}{m^2_{n-\alpha}} S_{n\, n-1} \; .$$

Генераторы /2.48/ эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\varkappa^2}^{\infty} \frac{dm_n^2}{2m_n} \int_{m^2}^{\infty} \frac{dm_{n-1}^2}{2m_{n-1}} \cdots \int_{m_5^2}^{\infty} dm_4 \sum_{\lambda} \frac{d m^{n-1} P}{P_o} \varphi_1^+(m_4, \lambda) \varphi_2(m_4, \lambda),$$

где $\lambda$ - набор чисел, характеризующих представления группы $SO(n-\ell)$, входящих в представление $\mathcal{D}(m_1, m_2, \ldots, m_{[\frac{n}{2}]})$ группы $SO(n)$.

Таким образом, генераторы группы $\mathcal{P}(1,n)$ в $\mathcal{P}(1,3)$ - базисе имеют вид /2.48/. Оператор преобразования из /2.35/ и /2.48/ задается формулой

$$V = \prod_{\ell=1}^{n-3} V_{n-\ell} \; .$$

3. Редукция $\mathcal{P}(1,6) \supset \mathcal{P}(1,3)$.

Особый интерес для физики представляет редукция группы $\mathcal{P}(1,6)$, поскольку представления этой группы можно отождествлять с системой двух релятивистских частиц [13-15]. Подставляя в /2.48/ $n=3$ и используя коммуникационные соотношения /2.2/, получаем генераторы группы $\mathcal{P}(1,6)$ в пуанкаре-базисе в виде

$$P_0 = E = \sqrt{p_a^2 + m_4^2}\ ; \quad P_a = p_a\ , \quad P_4 = {}_4\sqrt{m_4^2 - m_5^2}$$

$$P_5 = {}_5\sqrt{m_5^2 - m_6^2}\ ; \quad P_6 = {}_6\sqrt{m_6^2 - \varkappa^2}$$

$$\mathcal{J}_{ab} = ip_b \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}\ ;$$

$$\mathcal{J}_{0a} = -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab} P_b}{E + m_4}\ ;$$

$$\mathcal{J}_{4a} = \frac{i}{2}\left\{\frac{P_4 P_a}{m_4}, \frac{\partial}{\partial m_4}\right\} - iP_4 \frac{\partial}{\partial p_a} + \frac{P_a m_5 S_{4b} P_b}{m_4^2 (E + m_4)} +$$

$$+ \frac{P_4 S_{ab} P_b}{m_4 (E + m_4)} + \frac{m_5}{m_4} S_{4a}\ ;$$

$$\mathcal{J}_{04} = -ip_0 \left\{\frac{P_4}{m_4}, \frac{\partial}{\partial m_4}\right\} - \frac{\varkappa}{m_4} \frac{S_{4a} P_a}{m_4}\ ;$$

$$\mathcal{J}_{5a} = \frac{i}{2}\left\{\frac{P_a P_5}{m_5}, \frac{\partial}{\partial m_5}\right\} + \frac{i}{2}\left\{\frac{P_a P_5}{m_4}, \frac{\partial}{\partial m_4}\right\} - iP_5 \frac{\partial}{\partial p_a} +$$

$$+ \frac{P_a P_4 P_5 S_{4b} P_b}{m_5 m_4^2 (E + m_4)} + \frac{P_5 S_{ab} P_b}{m_4 (E + m_4)} + \frac{P_a m_6 S_{5b} P_b}{m_5 m_4 (E + m_4)} -$$

$$- \frac{P_4 P_5}{m_4 m_5} S_{4a} + \frac{m_6 P_a P_4}{m_5^2 m_4} S_{54} - \frac{m_6}{m_5} S_{5a}\ ;$$

$$\mathcal{J}_{54} = \frac{i}{2}\left\{\frac{P_5 P_4}{m_5}, \frac{\partial}{\partial m_5}\right\} + \frac{m_6 m_4}{m_5^2} S_{54}\ ;$$

$$\mathcal{J}_{05} = -\frac{iP_0}{2}\left\{\frac{P_5}{m_5}, \frac{\partial}{\partial m_5}\right\} - i\frac{P_0}{2}\left\{\frac{P_5}{m_4}, \frac{\partial}{\partial m_4}\right\} +$$

$$+ \frac{P_5 P_4 S_{4a} P_a}{m_5 m_4^2} - \frac{m_6 S_{5a} P_4}{m_4 m_5} - \frac{m_6 E S_{54} P_4}{m_5^2 m_4};$$

$$\mathcal{J}_{65} = \frac{i}{2}\left\{\frac{P_0 P_5}{m_6}, \frac{\partial}{\partial m_6}\right\} + \frac{\varkappa m_5}{m_6^5} S_{65}$$

$$\mathcal{J}_{06} = -\frac{i}{2} P_0 P_6 \sum_{\alpha=4}^{6}\left\{\frac{1}{m_\alpha}, \frac{\partial}{\partial m_\alpha}\right\} - \frac{\varkappa S_{6b} P_b}{m_4 m_6} + \frac{P_5 P_b S_{5b} P_b}{m_4 m_5 m_6} + \frac{P_4 P_6 S_{4b} P_b}{m_4^2 m_5} -$$

$$- \frac{\varkappa P_0 P_5}{m_5 m_6^2} S_{65} - \frac{\varkappa P_0 P_4}{m_4 m_5 m_6} S_{64} + \frac{P_0 P_4 P_5 P_6}{m_4 m_6^2 m_4} S_{54};$$

$$\mathcal{J}_{6a} = \frac{i}{2} P_a P_6 \sum_{\alpha=4}^{6}\left\{\frac{1}{m_\alpha}, \frac{\partial}{\partial m_\alpha}\right\} - iP_6 \frac{\partial}{\partial P_a} - \frac{1}{m_4(P_0 + m_4)}\left[\frac{P_a \varkappa S_{6b} P_b}{m_6} -\right.$$

$$\left. - \frac{P_a P_5 P_6 S_{5b} P_b}{m_5 m_6} - \frac{P_4 P_6 P_a S_{4b} P_b}{m_4 m_5} + P_6 S_{ab} P_b\right] + \frac{\varkappa P_a P_5 S_{65}}{m_5 m_6^2} +$$

$$- \frac{\varkappa P_a P_4 S_{64}}{m_4 m_5 m_6} - \frac{P_a P_4 P_5 P_6 S_{54}}{m_4 m_4^2 m_6} - \frac{P_5 P_6 S_{5a}}{m_5 m_6} - \frac{P_4 P_6 S_{4a}}{m_4 m_5} +$$

$$+ \frac{\varkappa}{m_6} S_{6a},$$

$$\mathcal{J}_{64} = \frac{i}{2} P_4 P_6 \sum_{\alpha=5}^{6}\left\{\frac{1}{m_5}, \frac{\partial}{\partial m_6}\right\} + \frac{\varkappa P_4 P_5 S_{65}}{m_5 m_6^2} + \frac{\varkappa m_4 S_{64}}{m_5 m_6} - \frac{m_4 P_5 P_6 S_{54}}{m_5^2 m_6}$$

Эти генераторы эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\int\limits_{\varkappa^2}^{\infty}\frac{dm_6^2}{2m_6}\int\limits_{m_6^2}^{\infty}\frac{dm_5^2}{2m_5}\int\limits_{m_5^2}^{\infty}\frac{dm_4^2}{2m_4}\sum_{\lambda}\int\frac{d^3p}{p_0}\,\varphi_1^+(\lambda)\,\varphi_2(\lambda)\ ,$$

где $\lambda$ – набор чисел, характеризующих представления группы $SO(3)$, входящие в представление $\mathcal{D}(m_1,m_2,m_3)$ группы $SO(6)$.

## § 3. СУЖЕНИЕ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $\mathcal{P}(1,n)$ НА ПОДГРУППУ $SO_o(1,n)$

В настоящем параграфе мы укажем разложение унитарного представления класса $J$ группы $\mathcal{P}(1,n)$ на неприводимые компоненты его ограничения на полупростую подгруппу $SO_o(1,n)$. Найдем явный вид генераторов $J_{\mu\nu}$, $P_\mu$ в $SO_o(1,n)$ -базисе.

О п р е д е л е н и е. Базис неприводимого унитарного представления группы $\mathcal{P}(1,n)$, состоящий из базисов Гельфанда-Цетлина подпространств, являющихся пространствами неприводимых представлений максимальной компактной подгруппы $SO(n)$, будем называть $SO_o(1,n)$ -базисом, если в нем диагональны все операторы Казимира группы $SO_o(1,n)$.

Сначала остановимся на изучении неприводимых представлений группы $SO_o(1,n)$.

I. Представления группы $SO_o(1,n)$.

Пусть $KAN$ – разложение Ивасавы [62] для группы $SO_o(1,n)$, где $K$ есть $SO(n)$, $A$ – абелева подгруппа. $N$ – нильпотентная подгруппа $M = Z_K(A) = SO(n-1)$. Конечномерное неприводимое представление $\mu$ подгруппы $M$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\mu$ и комплексная линейная форма $\Lambda$ на однородном линейном пространстве $\alpha = \log A$ определяют обычным путем представление параболической подгруппы $P = ANM$, которое, в свою очередь, индуцирует представление $\mathcal{U}_{\mu,\Lambda}$ основной /неунитарной/ серии группы $SO_o(1,n)$ в пространстве $\mathcal{H}_{\mu,\Lambda}$, т.е., элементарное представление группы $SO_o(1,n)$. В качестве пространства $\mathcal{H}_{\mu,\Lambda}$ обычно выбирают пространство вектор-функций на $K$ .

Неприводимые представления $\mu$ подгруппы $M$ определяются старшим весом $\Lambda_\mu$ с компонентами $\Lambda_{\mu i}$ $i=1,2,\dots,\left[\frac{n-1}{2}\right]$:

$$\Lambda_{\mu 1} \geqslant \Lambda_{\mu 2} \geqslant \dots \geqslant |\Lambda_{\mu p}| \quad , \quad n=2p+1$$

$$\Lambda_{\mu 1} \geqslant \Lambda_{\mu 2} \geqslant \dots \geqslant \Lambda_{\mu k} \quad , \quad n=2p. \qquad /3.1/$$

Неприводимые представления $\omega$ подгруппы $K$ задаются старшим весом $\Lambda_\omega$ с компонентами $\Lambda_{\omega i}$ $i=1,2,\dots,\left[\frac{n}{2}\right]$:

$$\Lambda_{\omega 1} \geqslant \Lambda_{\omega 2} \geqslant \dots \geqslant \Lambda_{\omega p} \geqslant \Lambda_{\omega} \quad n=2p+1$$

$$\Lambda_{\omega 1} \geqslant \Lambda_{\omega 2} \geqslant \dots \geqslant |\Lambda_{\omega p}| \qquad n=2p \qquad /3.2/$$

числа $\Lambda_{\mu i}$ и $\Lambda_{\omega i}$ целые или полуцелые.

Сделаем преобразования. Вместо $\Lambda_{\mu i}$ , $i=1,2,\dots,p$ введем так называемые $\ell$-координаты, т.е. числа

$$\ell_i = \Lambda_{\mu i} + p-i \quad , \quad n=2p+1$$

$$\ell_i = \Lambda_{\mu i} + p-i \quad , \quad n=2p \quad . \qquad /3.3/$$

Поскольку всякая линейная форма $\Lambda$ на $a=\log A$ определяется единственным образом через значение ее на нормированном базисном элементе $H$ , введем вместо $\Lambda$ число $c=\Lambda-p$ . Таким образом, представление $n_{\mu\Lambda}$ задается набором чисел $\ell \equiv (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ и числом $c$ , Будем поэтому вместо $\pi_{\mu,\Lambda}$ писать $\pi_{\ell,c}$. Заметим, что существует однозначная связь чисел $(\ell,c)$ с собственными значениями операторов Казимира группы $SO_0(1,n)$.

При сужении на $K$ представление $\pi(\ell,c)$ группы $SO_0(1,2p+1)$ разлагается на те и только те неприводимые представления $K$, чьи старшие веса удовлетворяют неравенствам

$$\ell_{1,2p+1} > \ell_1 \geqslant \ell_{2,2p+1} > \ell_2 \geqslant \ldots \geqslant \ell_{p,rp+1} > |\ell_p|$$

$$\ell_{i,2p+1} = \Lambda_{\omega i+p+1-i} \,. \qquad /3.4/$$

В случае группы $SO(1,2p)$ условие /3.4/ заменяется на условие

$$\ell_{1,2p} \geqslant \ell_1 > \ell_{2,2p} \geqslant \ell_2 > \ldots \geqslant \ell_{p+1} > |\ell_{p,2p}|$$

$$\ell_{i2p} = \Lambda_{\omega i+p-i} \,. \qquad /3.5/$$

Более того, каждое неприводимое представление $K$ входит в разложение не более чем один раз.

Классификация неприводимых [I/] представлений алгебры Ли группы $SO_0(1,n)$ дана в [63,64]. Для удобства воспроизведем ее здесь.

---

I/ Здесь и всюду ниже под неприводимым представлением понимаем квази-простое неприводимое представление, для которого все операторы Казимира кратны единичному оператору.

Случай $SO_0(1,2p+1)$.

I. Представления $\mathcal{D}(\ell, c)$, где $c$ не является целым или полуцелым числом одновременно с $\ell$, либо $|c|$ совпадает с одним из $\ell_i$, либо $|c| < |\ell_p|$. Представление $\mathcal{D}(\ell, c)$ содержит те и только те неприводимые представления алгебры $SO(2p+1)$, старше веса которых удовлетворяют условию

$$\infty > \ell_{1,2p+1} > \ell_1 \geq \ell_{2,2p+1} > \ell_2 \geq \ldots > \ell_{p-1} \geq \ell_{p,2p+1} > |\ell_p| \quad . \qquad /3.6/$$

Представления $\mathcal{D}(\ell, c)$ и $\mathcal{D}(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{p-1}, -\ell_p, c)$ эквивалентны.

II. Представления $\mathcal{D}^j(\ell, c)$, $j = 1, 2, \ldots, p-1$ ($j$ – серия, где $c$ – целое или полуцелое одновременно с $\ell$ и $\ell_j > c > \ell_{j+1}$. Представление $\mathcal{D}^j(\ell, c)$ содержит те и только те неприводимые представления алгебры $SO(2p+1)$, старшие веса которых удовлетворяют условию /3.6/ и условию $c \geq \ell_{j+1,2p+1}$.

Все представления этого класса попарно не эквивалентны.

III. Конечномерные представления $F_\mu$, $\mu = (c, \ell)$, где $c$ – целые или полуцелые одновременно с $\ell$ и $c > \ell_1$. $\ell$ -координатами старшего веса $F_\mu$ являются $\mu = (c, \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_p)$.

Случай $SO_0(1,2p)$.

I. Представления $\mathcal{D}(\ell, c)$, где $c$ не является целым или полуцелым одновременно с $\ell$, либо одно из чисел $c$ или $1-\ell$ совпадают с одним из $\ell_i$, $i = 1, 2, \ldots, p-1$.

Представление $\mathcal{D}(\ell, c)$ содержит те и только те неприводимые представления алгебры $SO(2p)$, старшие веса которых удовлетворяют условию

$$\infty > \ell_{1,2p} \geq \ell_1 > \ell_{2,2p} \geq \ldots > \ell_{p-1\,2p} \geq \ell_{p-1} > |\ell_{p\,2p}| \quad . \qquad /3.7/$$

Представления $\mathcal{D}(\ell, c)$ и $\mathcal{D}(\ell, 1-c)$ эквивалентны.

II. Представления $\mathcal{D}^j(\ell, c)$, где $c$ – целые или полуцелые одновременно с $\ell$, и $\ell_j > c > |\ell_{j+1}|$, $j=1,2,\ldots,p-2$, или $\ell_{p-1} > c > 0$, $(j=p-1)$. Представление $\mathcal{D}^j(\ell, c)$ содержит те и только те неприводимые представления $SO(2p)$, старшие веса которых удовлетворяют /3.7/ и условию $c > \ell_{j+1,2p}$ Все представления этого класса неэквивалентны.

III. Представления $\mathcal{D}^{\pm}(\ell, c)$, где $\ell_{p-1} \geq 2$, $c$ целое или полуцелое одновременно с $\ell$, и $\ell_{p-1} > c > 0$ Представление $\mathcal{D}^{\pm}(\ell, c)$ содержит те и только те представления $SO(2p)$, старшие веса которых удовлетворяют условию /3.7/ и условию $\pm \ell_{p,2p} > c$.

IУ. Конечномерные представления $F_\mu$, $\mu = (c, \ell)$, $c > \ell_1$, $\ell$ -координатами старших весов $F_\mu$ являются $\mu = (c, \ell_1, \ell_2, \ldots$ $\ldots \ell_{p-1})$. Символами $\mathcal{D}(\ell, c)$, $F_\mu$, $\mathcal{D}^j(\ell, c)$, $\mathcal{D}^{\pm}(\ell, c)$ будем также обозначать инфинитезимально неприводимые представления группы $SO_0(1, n)$, соответствующие вышеперечисленным неприводимым представлениям алгебры.

Унитарные неприводимые представления.

Случай $SO_0(1, 2p+1)$.

I. Основная непрерывная серия $\mathcal{D}(\ell, i\rho)$, где $\rho$ – действительное. При $\ell_p = 0$, $\rho \geq 0$ представления $\mathcal{D}(\ell, i\rho)$ и

$\mathcal{D}(\ell, -i\rho)$ унитарно эквивалентны. Спектр сужения $\mathcal{D}(\ell, i\rho)$ на $SO(2p+1)$ задается условием /3.6/.

II. Дополнительная непрерывная серия $\mathcal{D}(\ell, \sigma)$, $0<\sigma<t$, где $t$ - целое число, $1 \le t \le p-1$, а $\ell_{p-\nu+1} = \nu - 1$ для $\nu = 1, 2, \ldots, t$ - целые числа такие, что $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{p-t}$ Спектр сужения $\mathcal{D}(\ell, \sigma)$ на $SO(2p+1)$ задан условием /3.6/.

III. $j$ - серия представлений, $\mathcal{D}^j(\ell, p-j)$, $j = 1, \ldots, p-1$, где $\ell_1 > \ell_2 > \ldots > \ell_j \ge p-j+1$ все целые, а $\ell_\nu = p - \nu$ для $\nu = j+1, j+2, \ldots, p$. Спектр сужения $\mathcal{D}^j(\ell, p-j)$ на $SO(2p+1)$ задается условиями /3.6/ и $\ell_{j+1, 2p+1} = p-j$.

IУ. Вырожденная непрерывная серия, $\mathcal{D}(\ell, \tau)$, где $\ell_\nu = p - \nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, $0 < \tau < p$. Спектр сужения $\mathcal{D}(\ell, \tau)$ на $SO(2p+1)$ задается /3.6/.

Перечисленные представления попарно неэквивалентные. Заметим, что в классификации унитарных неприводимых представлений, приведенной в [63-65], отсутствуют представления класса IУ. На это указано и в работе [66].

Случай $SO_0(1, 2p)$.

I. Основная непрерывная серия, $\mathcal{D}(\ell, \frac{1}{2} + i\rho)$, где $\rho > 0$. Числа $\ell_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, p-1$ все целые или все полуцелые. Спектр сужения $\mathcal{D}(\ell, \frac{1}{2} + i\rho)$ на $SO(2p)$ задается /3.7/.

II. Дополнительная непрерывная серия, $\mathcal{D}(\ell, \sigma)$, где $\frac{1}{2} \le \sigma < t+1$, $t$ - целое число такое что $0 \le t \le p-1$. Числа $\ell_{2p+1, \nu}$ - все целые, причем $\ell_{p-\nu} = \nu - 1$ для $\nu = 1, 2, \ldots, t$, а $\ell_1 > \ell_2 > \ldots > \ell_{p-t+1} \ge t$. Спектр сужения $\mathcal{D}(\ell, \sigma)$ на $SO(2p)$ определяется /3.7/.

III. $j$ - серия представлений $\mathcal{D}^j(\ell, p-j-1)$, $j = 1, 2, \ldots, p-1$, где $\ell_1 > \ell_2 > \ldots > \ell_j \ge p-j$ /все целые/, а $\ell_\nu = p - \nu - 1$ для

$\nu = j+1, j+2, \dots, p-1.$

IУ. Дискретные серии, $\mathcal{D}^{\pm}(\ell, q)$, где $q$ – целое или полуцелое одновременно с $\ell_\nu$ и лежит в интервале $\ell_{p-1} > q \geq \frac{1}{2}$, $\ell_1 > \ell_2 > \dots > \ell_{p-1}$. Спектр сужения $\mathcal{D}^{\pm}(\ell, q)$ на $SO(2p)$ определен /3.7/ и условием $\pm \ell_{p,2p} \geq q$.

Перечисленные унитарные неприводимые представления группы $SO_0(1,2p)$ все унитарно неэквивалентны.

Опишем генераторы /см. [63-64] /. В случае группы $SO_0(1,2p)$ нам достаточно выписать формулы действия $J_{2p+1,2p}$, $J_{2p+1,2p}$, а в случае группы $SO_0(1,2p+1)$ $J_{2p+2,2p+1}$.

Имеем:

$$J_{2p+1,2p} |\alpha\rangle = \sum_{j=1}^{p} A_{2p,j}(\alpha) |\alpha_{2p}^{+j}\rangle - \sum_{j=1}^{p} A_{2p,j}(\ell_{2p,j}-1) |\alpha_{2p}^{-j}\rangle , \qquad /3.8/$$

где

$$A_{2p,j}(\alpha) = \frac{1}{2} \left| \frac{\prod_{\nu=1}^{p-1}\left[(\ell_{\nu 2p-1}-\frac{1}{2})^2-(\ell_{j2p}+\frac{1}{2})^2\right]\prod_{\nu=1}^{p}\left[\ell_{\nu 2p+1}-\frac{1}{2})^2-\ell_{j2p}+\frac{1}{2})^2\right]}{\prod_{\nu\neq j}(\ell^2_{\nu,2p}-\ell^2_{j2p})\left[\ell^2_{\nu 2p}-(\ell_{j2p}+1)^2\right]} \right|^{1/2} \qquad /3.8/$$

$$J_{2p+2,2p+1}|\alpha\rangle \doteq \sum_{j} B_{2p+1,j}(\alpha)|\alpha_{2p+1}^{+j}\rangle = \sum_{j=1}^{p} B_{2p+1,j}(\ell_{j2p+1}-1)|\bar{\alpha}_{2p+1}^{j}\rangle +$$

$$+ C_{2p+2}|\alpha\rangle , \qquad /3.9/$$

где

$$B_{2p+1j}(\alpha)=\left|\frac{\prod_{\nu=1}^{p}(\ell^2_{\nu 2p}-\ell^2_{j2p+1})\prod_{\nu=1}^{p+1}(\ell^2_{\nu 2p+2}-\ell^2_{j2p+1})}{\ell^2_{j2p+1}(4\ell^2_{j2p+1}-1)\prod_{\nu\neq j}(\ell^2_{\nu 2p+1}-\ell^2_{j2p+1})(\ell_{\nu 2p+1}-1)^2-\ell^2_{j2p+1}}\right|^{1/2}$$ /3.9′/

$$\ell_{2p+2}=\frac{\prod_{\nu=1}^{p}\ell_{\nu 2p}\prod_{\nu=1}^{p+1}\ell_{2p+2,\nu}}{\prod_{\nu=1}^{p}\ell_{2p+1,\nu}(\ell_{2p+1,\nu}-1)}\,. \qquad /3.9''/$$

Через $\alpha$ мы обозначили схему Гельфонда-Цетлина [67], соответствующую базисному елементу $|\alpha\rangle$.

2. Редукция $\mathcal{P}(1,n)\supset SO_0(1,n)$.

Чтобы выяснить, какие из вышеприведенных представлений порождаются унитарным неприводимым представлением класса I группы $\mathcal{P}(1,n)$, необходимо разложить соответствующее пространство на неприводимые относительно подгруппы $SO_0(1,n)$ пространства. Такая задача, в случае $n=3$ была решена в работах [29-32].

Унитарное неприводимое представление класса I имеет вид

$$(\mathcal{U}^{\varkappa}(a,\Lambda)\varphi)(p,\alpha)=\exp\langle ia,p\rangle\sum_{\beta}\mathcal{D}_{\alpha\beta}(r_{p_0}(p,\Lambda))\varphi(\Lambda^{-1}p,\beta), \qquad /3.10/$$

где

$\mathcal{D}_{\alpha\beta}(r_{p_0})$ – матричные элементы представления $\mathcal{D}(m_1,m_2,\ldots,m_{[\frac{n}{2}]})$ группы $SO(n)$,

$$r_{p^\circ}(p,\Lambda) = L(p,p^\circ)\Lambda L(\Lambda^{-1}p,p^\circ) \quad , \qquad L(p,p^\circ)\in SO_0(1,n) ,$$

$$p\in\sigma = \{ p : \langle p , p\rangle = \varkappa^2 \} ,$$

$$p^\circ = (\varkappa, 0, \ldots, 0), \quad \varkappa > 0.$$

Сужение такого представления на $SO_0(1,n)$ выглядит как

$$(\mathcal{U}(\Lambda)\varphi)(p,\alpha) = \sum_\beta \mathcal{D}_{\alpha\beta}(r_{p^\circ}(p,\Lambda)\varphi(\Lambda^{-1}p,\beta), \quad /3.11/$$

Оно унитарно, т.е., справедливо равенство

$$\|\mathcal{U}(\Lambda)\varphi\|^2 = \int |\varphi(\Lambda^{-1}p,\alpha)|^2 dp = \|\varphi\|^2 ,$$

где

$$dp = \frac{dp_0\, dp_1 \ldots dp_{n-1}}{|p_n|}$$

и, следовательно, разлагается однозначным образом в прямой интеграл унитарных неприводимых представлений группы $SO_0(1,n)$.

Рассмотрим случай, когда $\mathcal{D}$ – тривиальное представление. Разложение такого представления проводится по общей схеме, найденной И.М.Гельфандом и М.И.Граевым .

Каждой функции $\varphi(p,\alpha)$ поставим в соответствие функцию

$$h(\xi,\alpha) = \int \varphi(p,\alpha)\delta(\langle p,\xi\rangle - \varkappa)dp .$$

заданную на верхней поле конуса $\langle\xi,\xi\rangle = 0$

При этом функции $\varphi(\Lambda^{-1}p,\alpha)$ соответствует функция

$$h_\Lambda(\xi,\lambda)=\int\varphi(\Lambda^{-1}p,\alpha)\delta(\langle p,\xi\rangle-\varkappa)dp=$$

$$=\int\varphi(p,\alpha)\delta(\langle\Lambda p,\xi\rangle-\varkappa)dp=\int\varphi(p,\alpha)\delta(\langle p,\Lambda^{-1}\xi)-\varkappa)dp=h(\Lambda^{-1}\xi,\alpha).$$

Это означает, что представление /3.11/ переходит в квази-регулярное представление

$$\mathcal{U}_\Lambda h(\xi,\alpha)=h(\Lambda^{-1}\xi,\alpha)$$

в пространстве функций на конусе.

Чтобы получить разложение такого представления, нужно сделать преобразование Меллина функции $h(\xi)$ :

$$F_\sigma(\xi,\alpha)=\int_0^\infty h(t\xi,\alpha)t^{-\sigma-1}dt.$$

Это однородные функции по $\xi$ степени $\sigma$. Поэтому на них реализуются неприводимые представления.

Фурье компоненты функции $\varphi(p)$ теперь легко получить:

$$F_\sigma(\xi,\alpha)=\int_0^\infty t^{-\sigma-1}dt\int\varphi(p,\alpha)\delta(t\langle p,\xi\rangle-\varkappa)dp.$$

Отсюда

а разложение функции $\varphi(p)$ получаем, используя преобразование Гельфанда-Граева [49].

В случае $n=2k+1$

$$\varphi(p,\alpha)=\frac{(-1)^k}{2(2\pi)^{2k+1}}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} d\sigma\int F_\sigma(\xi,\alpha)\delta^{(2k)}(\langle p,\xi\rangle-\varkappa)\,d\xi\ .$$

В случае $n=2k$

$$\varphi(p,\alpha)=\frac{(-1)^k\Gamma(2k)}{(2\pi)^{2k}}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} d\sigma\int F_\sigma(\xi,\alpha)(\langle p,\xi\rangle-\varkappa)^{-2k}\,d\xi\ ,$$

$$a>0$$

Таким образом в разложение представления /3.II/ входят все унитарные представления основной непрерывной серии по одному разу, для которых $\ell=0$, т.е. представления серии $\mathcal{D}(0,i\rho)$ $(\mathcal{D}(0,\frac{1}{2}+i\rho))$.

Теперь пусть $\mathcal{D}$ - произвольное унитарное неприводимое представление.

Поставим $\varphi(p,\alpha)$ в соответствие функцию

$$f(\lambda,\alpha)=\sum_\beta \mathcal{D}_{\alpha\beta}(r_{p^0})\,\varphi(p,\beta)\ ,$$

где $p=\Lambda^{-1}p_0$, $p_0=(\varkappa,0,\dots,0)$.

При этом представление /3.11/ на новые формулы действует по формуле

$$(\mathcal{U}_{\Lambda_0}\chi)(\Lambda,\alpha)=\chi(\Lambda_0^{-1}\Lambda,\alpha). \qquad /3.12/$$

Функции $\chi(\Lambda,\alpha)$ заданы на группе $SO_0(1,n)$ и нетрудно убедиться, что они квадратично-интегрируемые. Поэтому /3.12/ задает регулярное представление. Но функции $\chi$ удовлетворяют еще дополнительному условию:

$$\chi(k\Lambda,\alpha)=\sum_{\beta}\mathcal{D}_{\alpha\beta}(k)\chi(\Lambda,\beta)\ , \quad k\in SO(n). \qquad /3.13/$$

Это следует из равенства

$$r_{p^0}(k\Lambda,(k\Lambda)^{-1}p^0)=r_{p^0}(k,p^0)r_{p^0}(\Lambda,\Lambda^{-1}p_0^0).$$

Теперь, используя результаты работы [68] и условие /3.13/, получаем :

в случае

$$\chi(\Lambda,\alpha)=\sum_{\bar m_1\geq \ell_1>\bar m_2}\ \sum_{\bar m_2\geq \ell_2>\bar m_3}\cdots\sum_{\bar m_{p-1}\geq \ell_{p-1}>|\bar m_p|}\int_{-\infty}^{\infty}\times$$

$$\times iP(\ell_1,\ldots,\ell_{p-1},i\rho)\,th\,\pi\rho\,Sp(\mathcal{U}_\Lambda^*\mathcal{U}_\chi)d\rho\ +$$

$$+\sum_{\ell_{p-1}>\ell_0>\frac{1}{2}}\ \sum_{\bar m_1\geq \ell_1>\bar m_2}\ \sum_{\bar m_2\geq \ell_2>\bar m_3}\cdots\sum_{\bar m_{p-1}\geq \ell_{p-1}>|\bar m_p|}P(\ell_0,\ell_1,\ldots$$

$$\ldots,\ell_{p-1})S_p'(\mathcal{U}_\Lambda^*\mathcal{U}_\chi),$$

где $\ell_0 = q$, $\bar{m}_i = m_i + p - i$,

$$P(x_1,\dots,x_p) = x_1 x_2 \dots x_p \prod_{1\le s<r\le p} (x_r^2 - x_s^2);$$

$S'_p(\mathcal{U}_x)$ – сумма следов двух дискретных серий /см. [68] / $\mathcal{D}^{\pm}$ в случае $SO_0(1,2p+1)$

$$\chi(\Lambda,\alpha) = \sum_{\bar{m}_1>\ell_1\ge\bar{m}_2} \; \sum_{\bar{m}_2>\ell_2\ge\bar{m}_3} \dots \sum_{m_p>\ell_p\ge-\bar{m}_p} \int_{-\infty}^{\infty} P(\ell_1,\dots,\ell_p) S_p(\mathcal{U}_\lambda^* \mathcal{U}_\lambda) d\rho,$$

где $P(x_1,\dots,x_p) = \prod_{1\le s<r\le p} (x_r^2 - x_s^2)$, $\bar{m}_i = m_i + p - i + 1$.

Отсюда следует

Теорема. Унитарное неприводимое представление /3.10/ группы $\mathcal{P}(1,n)$ однозначным образом разлагается в прямой интеграл унитарных неприводимых представлений группы $SO_0(1,n)$. В разложение входят по одному разу представления $\mathcal{D}(\ell,\frac{1}{2}+i\rho)$, $\mathcal{D}^{\pm}(\ell,\rho)$ $(\bar{m}_1\ge\ell_1>\bar{m}_2\ge\ell_2>\dots>\ell_{p-1}>|\bar{m}_p|$, $\rho\ne\frac{1}{2})$ в случае $n=2p$ и $\mathcal{D}(\ell,i\rho)$ $(\bar{m}_1>\ell_1\ge\bar{m}_2>\ell_2\ge\dots\ge\bar{m}_p>\ell_p\ge-\bar{m}_p)$ в случае $n=2p+1$.

4. Матричные элементы генераторов трансляции

Здесь на основе теоремы Вигнера-Эккерта [53] будет дана конструкция матричных элементов алгебры Ли группы $\mathcal{P}(1,n)$ в

$SO_0(1,n)$ -базисе.

Определение. Зависящий от индекса и действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ оператор $P_t$ называется тензорным оператором, если в $\mathcal{H}$ действует представление /унитарное или неунитарное/ $g \to T_g$ некоторой группы $G$, для которого

$$T_g P_t T_g^{-1} = \sum_{t'} \mathcal{D}^j_{tt'}(g) P_{t'} , \qquad /3.14/$$

где $\mathcal{D}^j_{tt'}(g)$ - матричные элементы некоторого представления $\mathcal{D}^j$ группы $G$.

Предположим, что $\mathcal{D}^j$ - конечномерно, а $T_g$ - унитарно. Тогда $\mathcal{H}$ можно разложить в прямой интеграл

$$\oplus \int \oplus \sum \mathcal{H}_{\chi, i_\chi} \, d\mu(\chi) \qquad /3.15/$$

гильбертовых пространств $\mathcal{H}_{\chi, i_\chi}$, в которых реализуются неприводимые представления $g \to T^\chi_g$, $\chi = (\ell, \rho)$, $\ell$ - совокупность целочисленных параметров; $\rho$ - совокупность действительных параметров. Индекс $i_\chi$ разделяет кратные представления.

В каждом $\mathcal{H}_{\chi i_\chi}$ будем рассматривать ортонормированный базис $|\chi, i_\chi, m\rangle$, состоящий из базисов подпространств, являющихся пространствами неприводимых представлений максимальной компактной подгруппы $SO(n)$ группы $G$. Тогда вектор-функция $F(\chi, i_\chi)$ из $\mathcal{H}$ может быть записана в виде

$$F(\varkappa, i_\varkappa) = \sum_m f(\varkappa, i_\varkappa, m) | \varkappa, i_\varkappa, m> . \qquad /3.16/$$

Далее, рассмотрим в $\mathcal{H}$ всюду плотное и непрерывно вложенное в $\mathcal{H}$ пространство $\Phi$, состоящее из вектор-функций $F(\varkappa, i_\varkappa)$, для которых функции $f(\varkappa, i_\varkappa)$ можно аналитически продолжить по параметрам индекса $\rho$ во все комплексное пространство и пусть $\Phi$ включается в области определения всех операторов $P_t$ и непрерывно отображается ими в себя.

Каждый оператор $P_t$ определяет обобщенную функцию от переменных $\varkappa_2, i_{\varkappa_2}, m_2$ :

$$P_t F(\varkappa, i_\varkappa) = \sum_{m'} (f(\varkappa_2, \nu_{\varkappa_2}, m_2), <\varkappa, i_\varkappa, m' | P_t | \varkappa_2, i_{\varkappa_2}, m_2>) | \varkappa, i_\varkappa, m'> , \qquad /3.17/$$

где $F \in \Phi$ и имеет вид /3.16/.
Очевидно, /3.17/ определяет вектор-функцию $\Phi$ .

Согласно теореме [53] ядра $<\varkappa_1, i_\varkappa, m_1 | P_t | \varkappa_2, i_{\varkappa_2}, m_2>$ тензорного оператора $P_t$ таковы, что

$$P_t F(\varkappa, i_\varkappa) = \sum_{m'} \sum_{\varkappa_2, i_{\varkappa_2}, m_2} f(\varkappa_2, i_{\varkappa_2}, m_2) \times$$

$$\times \sum_{\nu_2} <\varkappa, m'; j^*, t | \varkappa_2, \nu_2, m_2> <\varkappa, i_\varkappa | D^j | \varkappa_2, i_{\varkappa_2}, \overset{?}{\nu}_2> | \varkappa, i_\varkappa, m'>, \qquad /3.18/$$

где при каждом фиксированном $\varkappa$ суммирование ведется по тем $\varkappa_2$, для которых неприводимые представления $T_g^{\varkappa_2}$ содержатся в разложении тензорного произведения представлений $T_g^{\varkappa}$

и $\mathcal{D}^j_g$ /ряд Клебша-Гордона/, а величины $\langle \chi, i_\chi | \mathcal{D}^j | \chi_2, i_{\chi_2}, \nu_2 |$ /редуцированные матричные элементы/ не зависят от $m, m', m_2$. Через $\langle \chi, m'; j^*, t | \chi_2, \nu_2, m_2 \rangle$ обозначены коэффициенты Клебша-Гордона, соответствующие разложению /ряду/ Клебша-Гордона.

Если в /3.14/ вместо $g$ подставим однопараметрическую дифференцируемую подгруппу $g(t)$, продифференцируем обе части по $t$ и возьмем значение при $t=0$, то получим

$$[T_a, P_t] = \sum_{t'} \mathcal{D}^j_{tt'}(a) P_{t'}, \qquad /3.19/$$

где $a$ - касательный вектор к $g(t)$ в единице, т.е. элемент алгебры Ли группы $G$. Это соотношение определяет тензорный оператор $P_t$ в ифинитезимальной форме.

Теперь мы видим, что в нашем случае генераторы трансляции $P_\mu$, $\mu = 0,1,2,\dots,n$ преобразуются по векторному представлению $1,0,\dots,0 = [1]_n$ группы $SO_0(1,n)$, а представление $T$ имеет вид /3.11/.

Учитывая результаты предыдущего раздела, из /3.18/ получаем:

$$P_\mu F(\chi) = \sum_{m'} \sum_{\chi_2 m_2} f(\chi_2, m_2) \sum_{\nu_2} \langle \chi, m'; j^*, \mu | \chi_2, m_2 \rangle \times$$

$$\times \langle \chi | \mathcal{D}^j(\chi_2, \nu_2) | \chi_2, m' \rangle, \qquad /3.20/$$

где $\chi = [\ell_{n+1}, c]$, $\mathcal{D}^j = \mathcal{D}^{[1]_n}$

через $\ell_{n+1}$ обозначены $\ell$-координаты сигнатуры представления $SO_0(1,n)$.

Ряд Клебша-Гордона тензорного произведения имеет вид [69] :

$$\left[\ell_{n+1}, c\right] \otimes [1]_{n+1} = \varepsilon_n^{\ell}\left[\ell_{n+1}, c\right] \oplus \sum_i \left\{\left[\ell^{i}_{n+1}, c\right] \oplus \left[\ell^{-i}_{n+1}, c\right]\right\} \oplus$$
$$\oplus\left[\ell_{n+1}, c+1\right] \oplus \left[\ell_{n+1}, c+1\right],$$

где

$$\varepsilon_n^{\ell} = \begin{cases} 0, & n=2p+1 \\ 1, & n=2p,\ \ell_{p,2p+1}>1 \\ 0, & n=2p,\ \ell_{p,2p+1}=1 \end{cases} \qquad /3.2I/$$

Выпишем коэффициенты Клебша-Гордона разложения /3.2I/, фигурирующие в /3.20/.

Случай $SO_0(1,2p)$,

$$\left\langle \begin{matrix} [\ell_{2p+1}, c] & [1] \\ [\ell_{2p}] & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [\ell^{j}_{2p+1}, c] \\ [\ell_{2p}] \end{matrix} \right\rangle = \left|\prod_{v=1}^{p}(\ell^2_{v,2p} - \ell^2_{j2p+1})\right|^{1/2}, \ j=1,2,\ldots,p$$

$$\left\langle \begin{matrix} [\ell_{2p+1}, c] & [1] \\ [\ell_{2p}] & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [\ell^{-j}_{2p+1}, c] \\ [\ell_{2p}] \end{matrix} \right\rangle = -\left|\prod_{v=1}^{p}\left[\ell^2_{v2p} - (\ell_{j2p+1}-1)^2\right]\right|^{1/2}$$

$$\left\langle \begin{matrix} [\ell_{2p+1}, c] & [1] \\ [\ell_{2p}] & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [\ell_{2p+1}, c] \\ [\ell_{2p}] \end{matrix} \right\rangle = \prod_{v=1}^{p} {}^{p}\,\ell_{v,2p}$$

$$\left\langle \begin{matrix} [\ell_{2p+1}, c] & [1] \\ [\ell_{2p}] & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [\ell_{2p+1}, c] \\ [\ell_{2p}] \end{matrix} \right\rangle = \left|\prod_{v=1}^{p}(\ell^2_{v,2p} - c^2)\right|^{1/2} \qquad /3.22/$$

$$\left\langle \begin{matrix} [\ell_{2p+1}, c] & [1] \\ [\ell_{2p}] & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [\ell_{2p+1}, c-1] \\ [\ell_{2p}] \end{matrix} \right\rangle = -\left|\prod_{v=1}^{p}\left[\ell^2_{v2p} - (c-1)^2\right]\right|^{1/2}$$

Случай $SO_0(1,2p-1)$

$$\left\langle \begin{matrix} [\ell_{2p},c] & [1] \\ [\ell_{2p-1}] & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [\ell^{i}_{2p},c] \\ [\ell_{2p-1}] \end{matrix} \right\rangle = \left| \prod_{\nu=1}^{p-1} \left[ (\ell_{\nu 2p-1} - \tfrac{1}{2})^2 - (\ell_{i 2p} + \tfrac{1}{2})^2 \right] \right|^{1/2},$$

$$\left\langle \begin{matrix} [\ell_{2p},c] & [1] \\ [\ell_{2p-1}] & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [\ell^{-i}_{2p},c] \\ [\ell_{2p}] \end{matrix} \right\rangle = \left| \prod_{\nu=1}^{p-1} \left[ (\ell_{\nu 2p-1} - \tfrac{1}{2})^2 - (\ell_{i 2p} - \tfrac{1}{2})^2 \right] \right|^{1/2},$$

$$\left\langle \begin{matrix} [\ell_{2p},c] & [1] \\ [\ell_{2p-1}] & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [\ell_{2p},c+1] \\ [\ell_{2p-1}] \end{matrix} \right\rangle = \left| \prod_{\nu=1}^{p-1} \left[ (\ell_{\nu 2p-1} - \tfrac{1}{2})^2 - (c + \tfrac{1}{2})^2 \right] \right|^{1/2}, \qquad /3.23/$$

$$\left\langle \begin{matrix} [\ell_{2p},c] & [1] \\ [\ell_{2p-1}] & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [\ell_{2p},c-1] \\ [\ell_{2p-1}] \end{matrix} \right\rangle = - \left| \prod_{\nu=1}^{p-1} (\ell_{\nu 2p-1} - \tfrac{1}{2})^2 - (c - \tfrac{1}{2})^2 \right] \right|^{1/2}.$$

С учетом этих выражений из /3.20/ следует формула действия оператора $P_0$ трансляции вдоль "временной" оси

Случай $\mathcal{P}(1,2p)$

$$P_0 F([\ell_{n+1},c]) = P_0 \sum_{\ell_{2p}} f_{2p}(\ell_{2p+1},c) \left| \begin{matrix} \ell_{2p} \\ \vdots \end{matrix} \right\rangle_{[\ell_{2p+1},c]} =$$

$$= \sum_{\ell'_{2p}} \left| \ell'_{2p} \right\rangle_{\ell_{2p+1},c} \left\{ \sum_{j=1}^{p-1} \left| \prod_{\nu=1}^{p} (\ell'^2_{\nu 2p} - \ell^2_{j 2p+1}) \right|^{1/2} \rho_j(\ell_{2p+1},c) f_{\ell'_{2p}}(\ell^{j}_{2p+1},c) - \right.$$

$$- \sum_{j=1}^{p-1} \left| \prod_{\nu=1}^{p} (\ell'^2_{\nu 2p} - (\ell_{j 2p+1} - 1)^2 \right|^{1/2} \tau_j(\ell_{2p+1},c) f_{\ell'_{2p}}(\ell^{-j}_{2p+1},c) + \qquad /3.24/$$

$$+ \prod_{\nu=1}^{p} \ell'_{\nu 2p} \sigma_{(2p+1,c)} f_{\ell'_{2p}}(\ell_{2p+1},c) +$$

---

Выписанные коэффициенты Клебша-Гордона не нормированы.

$$+\left|\prod_{\nu=1}^{p}(\ell'^{2}_{\nu 2p}-c^2)\right|^{1/2}\rho_p(\ell_{2pH},c)f\ell'_{2p}(\ell_{2pH},cH)-$$

$$-\left|\prod_{\nu=1}^{p}(\ell'^{2}_{\nu 2p}-(c-1)^2)\right|^{1/2}t_p(\ell_{2p+1},c)f\ell'_{2p}(\ell_{2pH},c-1)\Big\}\quad ,$$

где суммирование ведется по всем допустимым сигнатурам цепочки подгрупп $SO(2p)\supset SO(2p-1)\ldots\supset SO(2)$, причем сигнатура $\ell_{2p}$ удовлетворяет /3.5/.

Случай $\mathcal{P}(1,2p-1)$

$$P_o F([\ell_{n+1},c])=P_o\sum_{\ell_{2p+1}}f_{\ell_{2p+1}}(\ell_{2p+2},c)|\ell_{2p+1}>[\ell_{2p+2},c]=$$

$$=\sum_{\ell'_{2p+1}}|\ell'_{2p+1}>[\ell_{2p+2},c]\quad\sum_{j=1}^{p}\left|\prod_{\nu=1}^{p}\left[(\ell'_{\nu 2p+1}-\frac{1}{2})^2-(\ell_{j2p+2}+\frac{1}{2})^2\right]\right|^{1/2}\times$$

$$\times\rho_j(\ell_{2p+2},c)f\ell'_{2p+1}(\ell^{j}_{2p+2},c)-\sum_{j=1}^{p}\left|\prod_{\nu=1}^{p}(\ell'_{\nu 2p+1}-\frac{1}{2})^2-(\ell_{j2p+2}-\frac{1}{2})^2\right]\right|^{1/2}\times$$

$$\times\tau_j(\ell_{2p+2},c)+\left|\prod_{\nu=1}^{p}\left[(\ell'_{\nu 2p+1}-\frac{1}{2})^2-(c+\frac{1}{2})^2\right]\right|^{1/2}\rho_{p+1}(\ell_{2p+2},c)f\ell'_{2p+1}(\ell_{2p+2},c+1)-$$

$$-\left|\prod_{\nu=1}^{p}\left[(\ell'_{\nu 2p+1}-\frac{1}{2})^2-(c-\frac{1}{2})^2\right]\right|^{1/2}\tau_{pH}(\ell_{2p+2},c)f_{\ell_{2p+1}},(\ell_{2p+2},c-1)\Big\},$$

где суммирование ведется по всем допустимым сигнатурам цепочки подгрупп $SO(2p+1)\supset SO(2p)\supset\ldots\supset SO(2)$, а сигнатура $\ell_{2p+1}$ удовлетворяет /3.4/.

Если использовать коммутационное соотношение

$$[P_o, P_n] = [P_o, [J_{n+1,n}, P_o]] = 0,$$

то для коэффициентов $\sigma$ , $\rho$ , $\tau$ , фигурирующих в /3.24/, получим следующие уравнения

$$(\ell_{2p+1}, j-1)\sigma(\ell_{2p+1}) = (\ell_{2p+1}, j+1)\sigma(\ell'_{2p+1}), \tag{3.26}$$

$$\begin{cases} (\ell_{i\,2p+1} - \ell_{j\,2p+1} + 1)\rho_j(\ell^i_{2p+1})\rho_i(\ell_{2p+1}) = (\ell_{i2p+1} - \ell_{j2p+1} - 1)\rho_i(\ell^j_{2p+1})\rho_j(\ell_{2p+1}) \\ (\ell_{i\,2p+1} + \ell_{j\,2p+1})\tau_i(\ell^j_{2p+1})\rho_j(\ell_{2p+1}) = (\ell_{i2p+1} + \ell_{j2p+1} - 2)\rho_j(\ell^{-i}_{2p+1})\tau_j(\ell_{2p+1}) \\ (\ell_{i2p+1} - \ell_{j2p+1} + 1)\tau_i(\ell^{-j}_{2p+1})\tau_j(\ell_{2p+1}) = (\ell_{i2p+1} - \ell_{j2p+1} - 1)\tau_j(\ell^{-i}_{2p+1})\tau_i(\ell_{2p+1}) \end{cases} \tag{3.27}$$

$$\begin{cases} (\ell_{j2p+1} + 1)\sigma(\ell^j_{2p+1})\rho_j(\ell_{2p+1}) = (\ell_{j2p+1} - 1)\rho_j(\ell_{2p+1})\sigma(\ell_{2p+1}) \\ \ell_{j\,2p+1}\,\tau_j(\ell_{2p+1})\sigma(\ell_{2p+1}) = (\ell_{j\,2p+1} - 2)\sigma(\ell^{-j}_{2p+1})\tau_j(\ell_{2p+1}) \end{cases} \tag{3.28}$$

$$\sum_i \frac{2\ell_{i2p+1} + 1}{\ell^2_{k2p} - \ell^2_{i\,2p+1}}\rho_i(\ell_{2p+1})\tau_i(\ell^i_{2p+1})\left|\prod_{r=1}^{p}(\ell^2_{r2p} - \ell^2_{i2p+1})\right| +$$

$$+ \frac{2\ell_{i\,p+1} - 3}{(\ell_{i2p+1} - 1)^2 - \ell^2_{k2p}}\rho_i(\ell^{-i}_{2p+1})\tau_i(\ell_{2p+1})\left|\prod_{r=1}^{p}\left[\ell^2_{r2p} - (\ell_{i2p+1} - 1)^2\right]\right| =$$

$$= \frac{1}{\ell^2_{k2p}}\prod_{r=1}^{p}\ell^2_{r2p}\,\sigma^2(\ell_{2p+1}). \tag{3.29}$$

Из /3.26/ следует, что выражение $\ell_{j2p+1}(\ell_{j2p+1} - 1)\sigma(\ell_{2p+1})$ не зависит от $\ell_{j\,2p+1}$ для $j=1,2,\dots,p-1$, поэтому мы можем записать

$$\sigma(\ell_{2p+1})\prod_{\nu=1}^{p-1}\ell_{\nu 2p+1}(\ell_{\nu 2p+1}-1)c(c-1)=\sigma_0(c)\ ,$$

где $\sigma_0(c)$ периодическая с периодом $L$ функция только от $c$. Следовательно, при $\sigma_0(c)\neq 0$

$$\sigma(\ell_{2p+1})=\frac{\sigma_0(c)}{\prod\limits_{\nu=1}^{p-1}\ell_{\nu 2p+1}(\ell_{\nu 2p+1}-1)c(c-1)}\ .$$

Если $\sigma_0(c)=0$, то либо $\sigma(\ell_{2p+1})=0$, либо $c=$ 0,I, так что "диагональные" слагаемые в /3.26/ отсутствуют.

Как нетрудно убедиться, решением уравнений /3.26-3.29/ будет следующее:

$$\rho_j(\ell_{2p+1})=\left|\frac{\prod\limits_{\nu=1}(\ell^2_{\nu 2p+1}-\ell^2_{2p+1,j})}{\ell^2_{2p+1j}(4\ell^2_{2p+1j}-1)\prod\limits_{\nu\neq j}^{p}(\ell^2_{2p+1\nu}-\ell^2_{2p+1j})(\ell_{2p+1\nu}-1)^2-\ell^2_{2p+1}}\right|\ell_{p+1\,2p+2}\,,$$

$$j=1,2,\dots,p-1 \qquad /3.30/$$

$$\rho_p(\ell_{2p+1},c)=\left|\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{p}(\ell^2_{\nu 2p+2}-c^2)}{c^2(4c^2-1)\prod\limits_{\nu=1}^{p-1}(\ell^2_{\nu 2p+1}-c^2)\left[(\ell_{\nu 2p+1}-1)^2-c^2\right]}\right|^{1/2}\times$$

$$\times\ \ell_{p+1,2p+2}$$

$$\sigma(\ell_{2p+1}) = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{p+1} \ell_{\nu 2p+2}}{\prod\limits_{\nu=1}^{p-1} \ell_{\nu 2p+1}(\ell_{\nu 2p+1}-1)c(c-1)}$$

$$\tau_j(\ell_{2p+1}, c) = \rho_j(\ell_{2p+1}^{-j}, c), \quad \tau_p(\ell_{2p+1}, c) = \rho_p(\ell_{2p+1}, c-1).$$

Соотношения, аналогичные /3.26-3.29/, нетрудно получить в случае группы $\mathcal{P}(1, 2p+1)$. /Мы их не выписываем/. Приведем только в явном виде решение этих соотношений

$$\rho_j(\ell_{2p+2}, c) = \frac{1}{2}\ell_{p+1,2p+3}\left|\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{p}\left[(\ell_{\nu,2p+3}-\frac{1}{2})^2-(\ell_{j,2p+2}+\frac{1}{2})\right]}{\prod\limits_{\nu\neq i}(\ell^2_{\nu 2p+2}-\ell^2_{j 2p+2})\left[\ell^2_{\nu 2p+2}-(\ell_{j 2p+2}+1)^2\right]}\right|^{1/2}$$

$$j = 1, 2, \ldots, p$$

$$\rho_{p+1}(\ell_{2p+2}, c) = \frac{1}{2}\ell_{p+1,2p+3}\left|\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{p}\left[(\ell_{\nu 2p+3}-\frac{1}{2})^2-(c+\frac{1}{2})^2\right]}{\prod\limits_{\nu=1}^{p}(\ell^2_{\nu 2p+2}-c^2)\left[\ell^2_{\nu 2p+2}-(c+1)^2\right]}\right|^{1/2}$$

/3.31/

$$\tau_j(\ell_{2p+2}, c) = \rho_j(\ell_{2p+2}^{-j}, c),$$

$$\tau_{p+1}(\ell_{2p+2}, c) = \rho_{p+1}(\ell_{2p+2}, c-1).$$

Таким образом, действие оператора трансляции $P_0$ в случае групп $\mathcal{P}(1, 2p)$ и $\mathcal{P}(1, 2p+1)$ задается формулами, соответственно. /3.24/ и /3.25/, где функции $\sigma$ , $\rho$ , $\tau$ имеют вид /3.30/ и /3.31/, соответственно.

Формулы действия всех остальных операторов трансляции получаются коммутированием $P_0$ с операторами подалгебры $SO_0(1,n)$ , которые в $SO_0(1,n)$ -базисе действуют согласно /3.8/ и /3.9/.

## § 4. РЕДУКЦИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЯВНО КОВАРИАНТНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $\mathcal{P}(1,n)$ ПО НЕПРИВОДИМЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ

Явно ковариантное представление неоднородной группы де Ситтера $\mathcal{P}(1,4)$ задается следующим образом

$$(T(a,\Lambda)\varphi)(p)=exp\left\{i<a,p>+\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\right\}\varphi(\Lambda^{-1}p),$$

$$\Lambda=exp(i\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}), \qquad /4.1/$$

в пространстве $\mathcal{H}$ квадратично интегрируемых функций $\varphi(p,\alpha)$ / $p\in R_5$ - пространство Минковского, $\alpha$ - наборы, нумерующие базис пространства представления $\mathcal{D}(SO_0(1,n))$ со скалярным произведением

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\sum_{\alpha}\int\varphi_1^+(p,\alpha)\varphi_2(p,\alpha)d^5p\,. \qquad /4.2/$$

Генераторы $J_{\mu\nu}$, $P_\mu$ в представлении /4.1/ имеют вид

$$P_\mu=p_\mu\,,\quad J_{\mu\nu}=ip_\mu\frac{\partial}{\partial p_\nu}-ip_\nu\frac{\partial}{\partial p_\mu}+S_{\mu\nu}$$

где $S_{\mu\nu}$ - матрицы представления $\mathcal{D}(SO_0(1,n))$ .

Очевидно, что представление приводимо. Оператор, который приводит его к канонической форме, выглядит как

$$U_1=exp\left\{-i\varepsilon\frac{S_{0a}P^a}{|P|}\,arctg\frac{|P|}{|P_0|}\right\},\quad P_\mu P^\mu>0, \qquad /4.3/$$

$$\mathcal{U}_2 = \exp\left\{-i\,\frac{p^\alpha S_{\alpha 4}}{\sqrt{p_\alpha p^\alpha}}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{p_\alpha p^\alpha}}{p_4}\right\}, \quad p_\mu p^\mu < 0. \qquad /4.4/$$

Преобразованные генераторы принимают, соответственно, вид

$$P_\mu = p_\mu \quad , \quad J_{ab} = ip_a\frac{\partial}{\partial p_b} - ip_b\frac{\partial}{\partial p_a} + S_{ab} \; ,$$

$$J_{0b} = ip_0\frac{\partial}{\partial p_b} - ip_b\frac{\partial}{\partial p_0} - \frac{\varepsilon S_{ab}\, p^b}{p_0 + \varkappa} \quad , \qquad /4.5/$$

$$\varepsilon = \pm 1 \, , \quad p_\mu p^\mu > 0;$$

$$P_k = p_k \, , \quad P_0 = \sqrt{p_k^2 - \eta^2} \, , \quad p_\mu p^\mu = -\eta^2 \, .$$

$$J_{ab} = ip_b\frac{\partial}{\partial p_a} - p_a\frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab} \, , \qquad J_{0a} = ip_a\frac{\partial}{\partial p_0} - ip_0\frac{\partial}{\partial p_a} + S_{0a} \, ,$$

$$J_{a4} = ip_4\frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a\frac{\partial}{\partial p_4} - \frac{S_{ab}\,p_b - S_{a0}\,p_0}{p_n + \eta} \, , \qquad /4.6/$$

$$J_{04} = ip_4\frac{\partial}{\partial p_0} - ip_0\frac{\partial}{\partial p_4} - \frac{S_{0a}\,p_a}{p_4 + \eta} \quad , \quad p_\mu p^\mu < 0 .$$

При этом

$$\varphi(p,\alpha) = \sum_{\varepsilon,\Lambda}\int d\varkappa^2\, \mathcal{U}(j\,|\,\varkappa,\varepsilon,p,\Lambda)\, f(\varkappa,\varepsilon,p,\Lambda) \, ,$$

где $f(\varkappa,\varepsilon,p,\Lambda)$ принадлежит пространству канонического представления /4.5/ /4.6/, а $\mathcal{U}(j\,|\,\varkappa,\varepsilon,p,\Lambda)$ – матричные элементы оператора $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$ . Скалярное произведение /4.2/ в терминах функций $f(\varkappa, \varepsilon, p, \Lambda)$ принимает вид

$$(\varphi_1, \varphi_2)=\sum_{\varepsilon,\Lambda}\int_{-\infty}^{\infty} d\varkappa^2 \int d^5p\, f_1^*(\varkappa, \varepsilon, p, \Lambda) f(\varkappa, \varepsilon, p, \Lambda) \ .$$

Теперь, используя результаты § 2, разложим представление /4.I/ по неприводимым представлениям группы Пуанкаре.

Подействовав на /4.5/ и /4.6/ операторами

$$\mathcal{U}_3=\sqrt{\frac{m}{P_4}}\, exp\left(i\frac{S_{4a}P_a}{P}\, 2arctg\frac{PP_4}{(P_0+m)(m+\sqrt{P_\mu P^\mu})}\right)$$

и

$$\mathcal{U}_4=\begin{cases} V=\sqrt{\frac{m}{P_4}}\, exp\left(-i\frac{S_{0a}P_a}{P}\, arctg\frac{P}{P_0}\right), \ P_4^2>-P_\mu P^\mu, \ P_\mu P^\mu<0 \\ V\cdot exp\left(i\frac{S_{3a}P_a}{P_3}\left(arctg\frac{PP_3}{m^3+P_0\sqrt{P_\mu P^\mu}}-i\, arctg\frac{P_3}{P_0}\right)\right) \\ P_4^2<-P_\mu P^\mu \ , \quad P_\mu P^\mu<0 \ , \end{cases}$$

получаем при $P_\mu P^\mu>0$ :

$$P_0=p_0 \ ; \quad P_a=p_a \ . \quad a=1,2,3$$

$$P_4=\varepsilon_4\sqrt{m^2+P_\mu P^\mu} \ , \quad \varepsilon_4=\pm 1 \ ,$$

$$J_{ab}=ip_b\frac{\partial}{\partial p_a}-ip_a\frac{\partial}{\partial p_b}+S_{ab} \ ,$$

$$J_{0a} = ip_b \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a \frac{\partial}{\partial p_b} - \frac{S_{0b} P_b}{P_0 + m}$$

$$J_{04} = i\frac{\partial}{\partial p_0} P_4 - i\left\{\frac{P_0 P}{m}, \frac{\partial}{\partial m}\right\} - \frac{\sqrt{P_\mu P^\mu}}{m} \cdot \frac{S_{4a} P_a}{m}, \qquad /4.7/$$

$$J_{a4} = i\left\{\frac{P_a P_4}{m}, \frac{\partial}{\partial m}\right\} - ip_4 \frac{\partial}{\partial m} + \frac{\sqrt{P_\mu P^\mu}\, P_a S_{4b} P_b}{m^2 (P_0 + m)} +$$

$$+ \frac{P_4 S_{ab} P_b}{m P_0 + m} + \frac{\sqrt{P_\mu P^\mu}}{m} S_{4a};$$

при $P_\mu P^\mu < 0$, $P_4^2 > -P_\mu P^\mu$:

$$P_0 = p_0, \quad P_a = p_a, \quad P_4 = \varepsilon_4 \sqrt{m^2 \cdot (P_\mu P^\mu)^2},$$

$$J_{ab} = ip_b \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}, \qquad /4.8/$$

$$J_{0a} = ip_a \frac{\partial}{\partial p_0} - ip_0 \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab} P_b}{P_0 + m},$$

$$J_{04} = ip_4 \frac{\partial}{\partial p_0} - \left\{\frac{P_4 P_0}{m}, \frac{\partial}{\partial m}\right\} + \frac{i\sqrt{P_\mu P^\mu}}{m} \cdot \frac{S_{0a} P_a}{m};$$

при $P_\mu P^\mu < 0$, $P_4^2 < -P_\mu P^\mu$:

$$P_0 = p_0, \quad P_a = p_a, \quad P_4 = \varepsilon_4 \sqrt{m^2 - P_\mu P^\mu},$$

$$J_{12} = ip_1 \frac{\partial}{\partial p_2} - ip_1 \frac{\partial}{\partial p_2} + S_{12},$$

$$J_{\alpha 3} = ip_\alpha \frac{\partial}{\partial p_3} - ip_3 \frac{\partial}{\partial p_\alpha} - \frac{S_{\alpha\beta} P_\beta - iS_3 P_0}{P_3 + im} \quad ,$$

$$J_{0a} = ip_a \frac{\partial}{\partial p_0} - ip_0 \frac{\partial}{\partial p_a} + iS_{3a} \, ,$$

$$J_{03} = ip_3 \frac{\partial}{\partial p_0} - ip_0 \frac{\partial}{\partial p_3} - i \frac{S_{3a} P_a}{P_3 + im} \quad , \qquad /4.9/$$

$$J_{04} = ip_4 \frac{\partial}{\partial p_0} - \frac{i}{2} \left\{ \frac{P_4 P_0}{m} , \frac{\partial}{\partial m} \right\} - i \frac{P_4 S_{3B} P_B}{m^2} + \frac{i\sqrt{P_\mu P^\mu}}{m^3} +$$

$$+ S_{03}(P_0 P_3 + P_3^2) + \frac{S_{0\alpha} P_\alpha}{m^3} i\sqrt{P_\mu P^\mu} (P_0 - P_3) .$$

Теорема. Оператор, преобразующий представление /4.I/ в прямой интеграл неприводимых представлений группы $\mathcal{P}(1,3)$ имеет вид

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \mathcal{U}_3 + \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_4 \quad . \qquad /4.10/$$

При этом функции $\varphi(p, \alpha)$ представляются следующим образом

$$\varphi(p, \alpha) = \sum_{\varepsilon, \lambda} \int d\varkappa^2 \int dm \; \mathcal{U}(j | \varkappa^2, \varepsilon, \vec{p}, m, \Lambda) \psi(\varepsilon, \Lambda, \varkappa^2, \vec{p}, m) \; ,$$

где $\psi(\varepsilon, \Lambda, \varkappa^2, \vec{p}, m)$ принадлежит пространству неприводимого представления /4.7/, /4.8/, /4.9/ группы $\mathcal{P}(1,4)$ , а $\mathcal{U}(j | \varkappa^2, \varepsilon, \vec{p}, m, \Lambda)$ – матричные элементы оператора /4.IO/. Скалярное произведение /4.2/ записывается в виде

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int\limits_{0+\delta}^{\infty} d\text{æ}^2 \sum_{\varepsilon,\Lambda} \int\limits_{\text{æ}^2}^{\infty} \frac{dm^2}{2m} \int d^4p\, \psi_1^+(\varepsilon, \Lambda, \text{æ}^2, \vec{p}, m) \times$$

$$\times \psi_2(\varepsilon, \Lambda, \text{æ}^2, \vec{p}, m) + \int\limits_{-\infty}^{0-\delta} d\text{æ}^2 \sum_{\varepsilon,\Lambda,\Lambda'} \int\limits_{-\infty}^{0+\delta} \frac{dm^2}{2m} \int d^4p\, \psi_1^+(\varepsilon, \text{æ}^2, \vec{p}, m, \Lambda') \times$$

$$\times W \psi_2(\varepsilon, \text{æ}^2, \vec{p}, m, \Lambda) + \int\limits_{-\infty}^{0-\delta} d\text{æ}^2 \sum_{\varepsilon,\Lambda} \int\limits_{0-\delta}^{\infty} \frac{dm^2}{2m} \int d^4p \times$$

$$\times \psi_1(\varepsilon, \Lambda, \text{æ}^2, \vec{p}, m)\, \psi_2(\varepsilon, \Lambda, \text{æ}^2, \vec{p}, m),$$

где $W = W(\Lambda | \text{æ}^2, \varepsilon\vec{p}, m, \Lambda')$ – матричные элементы оператора $W = (\mathcal{U}_4^{-1})^+ \mathcal{U}_4^{-1}$.

## § 5. О ТЕНЗОРНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ ГРУППЫ ДЕ СИТТЕРА

Здесь будет рассмотрен случай тензорного произведения двух неприводимых представлений группы $\mathcal{P}(1,4)$, принадлежащих классу I, которые характеризуются положительными значениями $\varkappa^2$ инварианта $P^2$ и целыми значениями $s$, $t$ собственными значениями инвариантов $\vec{S}$, $\vec{T}$ алгебры $SO(4)$:

$$\vec{S}^2 = s(s+1) \quad , \quad \vec{T}^2 = t(t+1) \quad , \qquad /5.1/$$

где $-(2s+1)(2t+1)$ -мерная единичная матрица, а

$$S^2 = \frac{W}{4\varkappa^2} + \frac{\varepsilon}{2\varkappa}\vec{V} \, , \quad \vec{T}^2 = \frac{\vec{W}}{4\varkappa^2} - \frac{\varepsilon}{2\varkappa}\vec{V} \qquad /5.2/$$

$W$, $V$ - инварианты группы $\mathcal{P}(1,4)$ [14].

Такие представления, как мы видели /см. § I/ можно реализовать в гильбертовом пространстве $L^2(P^+, V_{s,t}, dp)$ вектор-функций по формуле:

$$(T_g^{s,t,\varkappa} f)'(p) = \exp i\varkappa \langle p, a \rangle \mathcal{D}^{s,t}(k,(\Lambda,p)) f(\Lambda^{-1}p) \ , \qquad /5.3/$$

где $g = (\Lambda, a) \in \mathcal{P}(1,4)$,

$$P^+ = \{p;\ p \in R_5\ ,\ (p,p) = 1\ ,\ p_0 > 0\}\ ,$$

$K(\Lambda, p) \in SO(4)$ и будет определен ниже,

$V_{s,t}$ – линейное пространство размерности

$\mathcal{D}^{s,t}$ – унитарное неприводимое представление группы $SO(4)$ в пространстве $V_{s,t}$,

$$dp = p_0^{-1} dp_1\, dp_2\, dp_3\, dp_4\,, \quad \langle p,a \rangle = p_0 a_0 - p_1 a_1 - p_2 a_2 - p_3 a_3 - a_4 p_4$$

Введем на $P^+$ такую параметризацию

$$\begin{aligned} p_0 &= ch\, u\,, \\ p_1 &= sh\, u\, \sin\theta \sin\psi \sin\varphi\,, \\ p_2 &= sh\, u\, \sin\theta \cos\psi\,, \\ p_3 &= sh\, u\, \sin\theta \sin\psi \cos\varphi\,, \\ p_4 &= sh\, u \cos\theta\,. \end{aligned} \tag{5.4}$$

С точностью до множеств меньшей размерности эти формулы устанавливают взаимно однозначное соответствие между $P^+$ и областью:

$$0 \le u < \infty\,, \quad 0 \le \theta\,,\ \psi < \pi\,,$$
$$0 \le \varphi < 2\pi\,.$$

Таким образом

$$p = (ch\, u, sh\, u \sin\theta \sin\psi \sin\varphi,\ sh\, u \sin\theta \cos\psi\,,$$
$$sh\, u \sin\theta \sin\psi \cos\varphi,\ sh\, u \cos\theta).$$

Пусть векторы $e_i$ $(i = 0,1,2,3,4)$ образуют ортонормированный базис в пространстве $R_5$. Группу $SO_0(1,4)$ в дальнейшем будем обозначать через $H$, а группу $SO(4)$ – через $K$.

$L$ , $M$ - подгруппы преобразований из $H$ , сохраняющие инвариантными фиксированные векторы $e_0$ , $e_4$ и $e_1$ , $e_2$ , $e_3$ , соответственно.

Рассмотрим теперь такие элементы:

$$\alpha_n = \begin{pmatrix} ch\, u & 0 & 0 & 0 & sh\, u \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ sh\, u & 0 & 0 & 0 & ch\, u \end{pmatrix},$$

$$\alpha\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ 0 & 0 & \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\alpha_u \in M$, $\alpha\psi$, $\alpha\varphi \in L$ и не трудно проверить, что $p = \alpha\varphi\,\alpha\psi\,\alpha_\theta\,\alpha_u\,\ell_o$.

Построим отображение множества $P^+$ в группу $H$ по формуле

$$S: p \longrightarrow \alpha\varphi\,\alpha\psi\,\alpha_\theta\,\alpha_u\,. \qquad /5.5/$$

Оно непрерывно и определено везде на $P^+$ за исключением множеств меньшей размерности.

Поскольку

$$\Lambda^{-1} S(p)\ell_o = S(\Lambda^{-1}p)\ell_o\,, \qquad /5.6/$$

то имеем

$$\Lambda^{-1} S(p) = S(\Lambda^{-1}p)\alpha(\Lambda, p)\,, \qquad /5.7/$$

где $\alpha(\Lambda, p) \in K$. Теперь $K(\Lambda, p)$ в /5.3/ определим следующим образом

$$K(\Lambda, p) = \alpha(\Lambda, p)^*\,.$$

Так как справедливы соотношения

$$(\Lambda_1\Lambda_2)^{-1} S(p) = \Lambda_1^{-1}(\Lambda_2^{-1} S(p)) = \Lambda_2^{-1} S(\Lambda^{-1}p)\alpha(\Lambda, p) =$$

$$= S((\Lambda_1\Lambda_2)^{-1}p)\alpha(\Lambda_2, \Lambda_1^{-1}p)\alpha(\Lambda_1, p)\,,$$

$$(\Lambda_1\Lambda_2)^{-1} S(p) = S((\Lambda_1\Lambda_2)^{-1}p)\alpha(\Lambda_1\Lambda_2, p)\,,$$

то

$$\alpha(\Lambda_2, \Lambda^{-1}p)\alpha(\Lambda_1 p) = \alpha(\Lambda_1\Lambda_2 p)\,. \qquad /5.8/$$

Откуда

$$K(\Lambda_1, p) K(\Lambda_2, \Lambda_1^{-1} p) = K(\Lambda_1 \Lambda_2, p) . \qquad /5.9/$$

Формулы /5.3/ и /5.9/ полностью неприводимое унитарное представление группы $\mathcal{P}(1,4)$ класса I.

Тензорное произведение двух таких представлений можно определить в пространстве $L^2(P^+ \times P^+, V_{s_1 t_1} \otimes V_{s_2 t_2}, dp_1 \, dp_2)$ по формуле

$$(T_g f)(p_1, p_2) = (T_g^{s_1 t_1 \varkappa_1} \otimes T_g^{s_2 t_2 \varkappa_2})(p_1, p_2) = \qquad /5.10/$$

$$= \exp i \langle \varkappa_1 p_1 + \varkappa_2 p_2, a \rangle \left[ \mathcal{D}^{s_1 t_1}(K(\Lambda, p_1)) \otimes \mathcal{D}^{s_2 t_2}(K(\Lambda, p_2)) \right] f(\Lambda^{-1} p_1, \Lambda^{-1} p_2)$$

Будем решать задачу о разложении этого представления на неприводимые.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма I. Представление /5.10/ является непрерывной прямой суммой вида

$$\oplus \int\limits_{\varkappa_1 + \varkappa_2}^{\infty} \mathcal{U}(\varkappa) \sigma(\varkappa) d\varkappa ,$$

где $\sigma(\varkappa) > 0$ , $\mathcal{U}(\varkappa)$ - унитарное приводимое представление, для которого инвариант $P^2 = \varkappa^2$ .

Доказательство. Пусть $p_1$ и $p_2 \in P^+$ , $p_1 \neq p_2$ . Докажем, что существуют такие $h \in H$ и $m_u \in M$ , что

$$p_1 = h \ell_0 \ , \ p_2 = h m_u \ell_0 \ , \qquad /5.11/$$

где $m_u$ определяется однозначно, а $h$ – с точностью до множителя из $L^{\circ}$. Пусть $p_1 = h'\ell_0$. Для элемента $h'^{-1}p_2$ можно найти такие $k \in K$ и $m_u \in M$, что $h'^{-1}p_2 = k m_u \ell_0$. Тогда, положив $h_1 = h'k$, имеем /5.II/. Предположим, что $p_1 = h_1 p_0$, $p_2 = h_1 m_{u_1} \ell_0$. Тогда $h_1 = h\alpha$, $\alpha \in K$ и $\alpha m_{u_1} \ell_0 = m_u \ell_0$. Но поскольку $\langle p, p \rangle = ch\, u$, $u > 0$, то $u = u_1$.

Таким образом, $\alpha m_u \ell_0 = m_u \ell_0$, где $m_u \ell_0 = ch\, u\, \ell_0 + sh\, u\, \ell_4$. Следовательно, $\alpha \in L \subset K$. Так как множество векторов из $P^+ \times P^+$, для которых $p_1 = p_2$ является множеством меньшей размерности, то это позволяет с точностью до множеств меры нуль относительно $dp_1\, dp_2$ установить гомеоморфизм

$$(p_1, p_2) \longrightarrow (u, \tilde{h}) \qquad /5.I2/$$

между $P^+ \times P^+$ и $Z^+ \times \tilde{H}$, где $Z^+ = (0, \infty)$, $\tilde{H}$ – фактор-пространство $H/L$.

Причем

$$dp_1\, dp_2 = \rho(u, \tilde{h})\, du\, d\tilde{h}$$

$$(\Lambda^{-1}p_1, \Lambda^{-1}p_2) = (u, \Lambda^{-1}\tilde{h}),$$

где $\rho(u, \tilde{h})$ – положительная и непрерывная функция, $d\tilde{h}$ – инвариантная мера на $\tilde{H}$.

Поскольку мера $dp_1\, dp_2$ $H$-инвариантна, то мера $\rho(u, \tilde{h})\, du\, d\tilde{h}$ должна быть инвариантной при отображении

$$(u, \tilde{h}) \longrightarrow (u, \Lambda\tilde{h}),$$

т.е., $p(u,\tilde{h}) = p(u,\Lambda\tilde{h})$, $\Lambda \in H$

Следовательно,

$$dp_1 dp_2 = p(u) du d\tilde{h}.$$

Наконец

$$\begin{gathered} \varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2 = h(\varkappa_1 \ell_0 + \varkappa_2 m_u \ell_0) = h((\varkappa_1 + \varkappa_2 \operatorname{ch} u)\ell_0 + \\ + \varkappa_2 \operatorname{sh} u \ell_4) = h/\varkappa(u) m_{u'} \ell_0, \end{gathered} \qquad /5.13/$$

где $\varkappa(u) = \langle \varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2, \varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2 \rangle$. Гомеоморфизм /5.II/ индуцирует унитарное отображение пространства

$$L^2(P^+ \times P^+, V_{s_1 t_1} \otimes V_{s_2 t_2}, dp_1 dp_2) \qquad L^2(\mathfrak{X}^+ \times \tilde{H}, V_{s_1 t_1} \otimes V_{s_2 t_2}, p(u) du d\tilde{h}).$$

При этом отображении представление $T_g$ переходит в представление

$$(T_g f)(u,\tilde{h}) = \exp i\varkappa(u) \langle h m_{u'} \ell_0, a \rangle \times$$

$$\times \left[\mathcal{D}^{s_1 t_1}(k(\Lambda, h\ell_0) \otimes \mathcal{D}^{s_2 t_2}(k(\Lambda, h m_u \ell_0))\right] f(u, \Lambda^{-1}\tilde{h}),$$

где $h$ – произвольный представитель класса $\tilde{h} \in H/L$, а $m_{u'}$ определяется из /5.13/.

Рассмотрим пространство

$$L^2(\tilde{H}, V_{s_1 t_1} \otimes V_{s_2 t_2}, d\tilde{h})$$

и определим в нем представление

$$(V_g^{\varkappa,u} f)(\tilde{h}) \overset{\circ}{=} \exp(i\varkappa\langle hm_u \cdot \ell_o, a\rangle \qquad /5.14/$$

$$\times \mathcal{D}^{s_1 t_1}(k(\Lambda, h\ell_o)) \otimes \mathcal{D}^{s_2 t_2}(k(\Lambda, hm_u \ell_o)) \; f(\Lambda^{-1}\tilde{h}) .$$

Теперь видим, что

$$T_g = \oplus \int_{Z^+} V_g^{\varkappa(u),u} \rho(u) du ,$$

$$P^2 f(u,\tilde{h}) = \varkappa(u)^2 f(u,\tilde{h}) .$$

Поскольку $\varkappa(u)$ является функцией от $u$, причем $\varkappa_1 + \varkappa_2 < \varkappa(u) < \infty$, то, вводя новую переменную $\varkappa$, получаем

$$T_g = \oplus \int_{\varkappa_1+\varkappa_2}^{\infty} V(\varkappa) \sigma(\varkappa) d\varkappa ,$$

где $\rho(u)du = \sigma(\varkappa)d\varkappa$, $\sigma(\varkappa) > 0$, $V(\varkappa) = V^{\varkappa(u),u}$.

Таким образом лемма I доказана.

Лемма 2. Пусть

$$\mathcal{D}(u_1, u_2) \equiv \mathcal{D}^{s_1 t_1}(k(\Lambda, hm_{u_1}, \ell_o)) \otimes \mathcal{D}^{s_2 t_2}(k(\Lambda, hm_{u_2}. \ell_o)),$$

$$(R_g^{\varkappa,u_1,u_2} f)(\tilde{h}) = \exp i\varkappa \langle h\ell_o, a\rangle \mathcal{D}(u_1,u_2) f(\Lambda^{-1}\tilde{h}), \quad h \in \tilde{h} ,$$

$R^{\varkappa,0,0} \equiv R^{\varkappa}$. Тогда представление $\mathcal{U}^{\varkappa,u}$ эквивалентно унитарному представлению $R^{\varkappa}$.

Доказательство. Так как для $\ell \in L$, $m \in M$ имеем $\ell m = m\ell$, то из $h \equiv h' (\mathrm{mod}\, L)$ следует, что $hm_u \equiv h'm_u (\mathrm{mod}\, L)$. Это означает, что отображение

$$h \longrightarrow hm_u$$

индуцирует гомеоморфизм $\tilde{H}$ в $\tilde{H}$.

$$h \longrightarrow \varphi_u(\tilde{h}) .$$

Причем $\varphi_u(\Lambda\tilde{h}) = \Lambda\varphi_u(\tilde{h})$, $\Lambda \in H$, $d\varphi_u(\tilde{h}) = p(u)d\tilde{h}$.

Определим в пространстве $L^2(\tilde{H}, V_{s_1t_1} \otimes V_{s_2t_2}, d\tilde{h})$ унитарный оператор

$$(W_u f)(\tilde{h}) = p(u)^{1/2} f(\varphi_u(\tilde{h})) .$$

Легко проверить, что

$$W_{u'} = R^{\varkappa, u', u-u'} = \mathcal{U}^{\varkappa, u} W_{u'} . \qquad /5.15/$$

Далее, пусть

$$V_{u_1u_2}(\tilde{h}) \equiv \mathcal{D}^{s_1t_1}(k(hm_{u_1}, h^{-1}, hm_{u_1}\ell_0)) \otimes \mathcal{D}^{s_2t_2}(k(hm_{u_2}h^{-1}, hm_{u_2}\ell_0)),$$

$$(V_{u_1u_2} f)(\tilde{h}) = V_{u_1u_2}(\tilde{h}) f(\tilde{h}).$$

Очевидно, $V_{u_1u_2}$ унитарный оператор. Докажем, что

$$R^{\varkappa_1, u_1+u_2} V_{u_1 u_2} = V_{u_1 u_2} R^{\varkappa} . \qquad /5.16/$$

Для этого достаточно показать, что

$$\mathcal{D}(u_1, u_2) V_{u_1 u_2}(\Lambda^{-1}\tilde{h}) = \mathcal{D}(0,0) V_{u_1 u_2}(\tilde{h}) . \qquad /5.17/$$

Из /5.9/ имеем

$$k(\Lambda, hm_u \ell_0) k(\Lambda^{-1} hm_u h^{-1}\Lambda, \Lambda^{-1} hm_u \ell_0) = k(hm_u h^{-1}\Lambda, hm_u \ell_0) ,$$

$$k(hm_u h^{-1}, hm_u \ell_0) k(\Lambda, (hm_u h^{-1})^{-1} hm_u \ell_0) = k(hm_u h^{-1}\Lambda, m_u \ell_0) .$$

Откуда получаем равенство

$$k(\Lambda, hm_u \ell_0) k(\Lambda^{-1} hm_u h^{-1}\Lambda, \Lambda^{-1} hm_u \ell_0) =$$
$$/5.18/$$
$$= k(hm_u h^{-1}\Lambda, hm_u \ell_0) k(\Lambda, h\ell_0) .$$

Поскольку равенство /5.18/ справедливо при любом $u > 0$ , в частности и для $u = u_1, u_2$ , то отсюда непосредственно получаем /5.17/, а, следовательно, и /5.16/.

Теперь построим унитарный оператор в пространстве $L^2(Z^+ \times \tilde{H}, V_{s_1 t_1} \otimes V_{s_2 t_2}$ :

$$S_u = W_{u'} W_{-u', u-u'} ,$$

$$\mathcal{S}_u : f \longrightarrow S_u f(u, \tilde{h}) .$$

Используя /5.15/, /5.16/, получаем

$$\mathcal{U}^{\varkappa,u} S_u = S_u R^{\varkappa}.$$

Лемма 2 доказана.

Л е м м а 3. Представление $R^{\varkappa}$ разлагается в прямую сумму неприводимых представлений $\mathcal{D}^{s,t}$ группы $K$. Каждое представление $\mathcal{D}^{s,t}$ входит в разложение с такой кратностью, с какой оно входит в представление $O_k \otimes \mathcal{D}^{s_1,t_1} \otimes \mathcal{D}^{s_2,t_2}$ где $(O_k f)(t) = f(k^{-1}t)$, $k \in K$, $t$ точка единичной сферы в пространстве $R_4 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $h = S(he_0)\gamma(h)$, где $S$ отображение /5.5/, $\gamma(h)$ - непрерывно и определено почти везде на $H$. Обозначим через $\Phi$ единичную сферу в $R_u$. Поскольку $\gamma(he) = \gamma(h)e$, $e \in L$, то отображение

$$\tilde{h} \longrightarrow (he_0, \gamma(h)e_0), \quad h \in \tilde{h} \tag{5.19}$$

определяет гомеоморфизм между $\tilde{H}$ и $P^+ \times \Phi$.

Из /5.7/ имеем

$$\Lambda^{-1}h = \Lambda^{-1}S(he_0)\gamma(h) = S(\Lambda^{-1}he_0)\alpha(\Lambda^{-1}, he_0)\gamma(h).$$

С другой стороны $\Lambda^{-1}h = S(\Lambda^{-1}he_0)\gamma(\Lambda^{-1}h)$. Поэтому $\gamma(\Lambda^{-1}h) = \alpha(\Lambda, he_0)\gamma(h)$. Следовательно, если $\tilde{h} = (p, t)$, где $p = ge_0$, $\gamma(h)e_0 = t \in \Phi$, $h \in \tilde{h}$, то

$$\Lambda^{-1}\tilde{h} = (\Lambda^{-1}p, \alpha(\Lambda,p)t) .$$

Кроме того, при подходящей нормировке $d\tilde{h} = dp\,dt$, где $dt$ - инвариантная мера на $\Phi$.

Из всего этого следует, что отображение /5.19/ индуцирует унитарное отображение пространства $L^2(\tilde{H}, V_{s_1t_1} \otimes V_{s_2t_2}, d\tilde{h})$ в пространство $L^2(P^+ \times \Phi, V_{s_1t_1} \otimes V_{s_2t_2}, dp\,dt)$, в котором представление $R^{\varkappa}$ имеет вид:

$$(R^{\varkappa}_g f)(p,t) =$$

$$= \exp i\varkappa\langle p,a\rangle \left[\mathcal{D}^{s_1t_1}(k(\Lambda,h\ell_0)) \otimes \mathcal{D}^{s_2t_2} k(\Lambda,h\ell_0)\right) f(\Lambda^{-1}p, \alpha(\Lambda,p),t) ,$$

где $h \in \tilde{h}$, $\tilde{h} = (p,t)$.

Поскольку

$$L^2(P^+ \times \Phi), V_{s_1t_1} \otimes V_{s_2t_2}, dp\,dt) = L^2(P^+, dp) \otimes L^2(\Phi, dt) \otimes V_{s_1t_1} \otimes V_{s_2t_2} ,$$

то, положив $(P_\Lambda f)(p) = f(\Lambda^{-1}p)$, $\Lambda \in H$, $p \in P^+$, $(O_k f)(t) = f(k^{-1}t)$, $k \in K$, $t \in \Phi$, получаем

$$(R^{\varkappa}_g f)(p,t) = \exp i\varkappa\langle p,a\rangle (P_\Lambda \otimes O_{k(\Lambda,p)} \otimes \mathcal{D}(\Lambda,p)) f(p,t) ,$$

где $\mathcal{D}(\Lambda,p) = \mathcal{D}^{s_1t_1}(k(\Lambda,p)) \otimes \mathcal{D}^{s_2t_2}(k(\Lambda,p))$, $k(\Lambda,p)$ из /5.9/.

Унитарное представление $O_k$ группы $K$ разлагается в прямую мсумму неприводимых представлений $\mathcal{D}^{s,t}$, причем, каждое $\mathcal{D}^{s,t}$ входит в разложение однократно.

В разложении тензорного произведения двух унитарных неприводимых представлений группы $K$ также каждое неприводимое встречается по крайней мере один раз. Поэтому можем записать

$$L^2(\Phi) \otimes V_{s_1 t_1} \otimes V_{s_2 t_2} = \oplus \sum_{s,t} \mathcal{H}_{s,t}$$

или для представлений

$$O_k \otimes \mathcal{D}^{s_1 t_1} \otimes \mathcal{D}^{s_2 t_2} = \oplus \sum_{s,t} \bar{\mathcal{D}}^{s,t},$$

где $\bar{\mathcal{D}}^{s,t}$ – приводимое представление, которое кратно $\mathcal{D}^{s,t}$ и реализуется в пространстве $\mathcal{H}_{s,t}$. Теперь видим, что представление $R^{\varkappa}$ в пространстве $L^2(P^+, dp) \otimes \mathcal{H}_{s,t}$ имеет вид

$$(R_g^{\varkappa} f)(p) = \exp i\varkappa\langle p,a\rangle (P_\Lambda \otimes \bar{\mathcal{D}}^{s,t}(k(\Lambda,p))f(p) =$$

$$= \exp i\varkappa\langle p,a\rangle \bar{\mathcal{D}}^{s,t}(k(\Lambda,p))f(\Lambda^{-1}p), \qquad g=(\Lambda,a).$$

Отсюда получаем утверждение леммы 3.

Т е о р е м а. Тензорное произведение двух унитарных неприводимых представлений $T^{\varkappa_1, s_1, t_1}$ и $T^{\varkappa_2, s_2, t_2}$, где $s_i, t_i$ $(i=1,2)$ целые, а $\varkappa_i^2 > 0$ может быть записано в форме

$$\oplus \sum_{s,t} \int\limits_{\varkappa_1+\varkappa_2}^{\infty} c(s,t)\, T^{\varkappa,s,t}\, \alpha(\varkappa)\, d\varkappa \quad , \qquad \alpha(\varkappa)>0, \qquad /5.20/$$

где функция $c(s,t)$ имеет вид

$$c(s,t)=\begin{cases} (2s+1)(2t+1)(2m_1+1)(2m_2+1); & s\le|s_1-s_2|, \quad t\le|t_1-t_2|, \\ (k_1(k_1+1)+2K_1+1)(k_2(k_2+1)-2K_2+1); & |s_1-s_2|\le s\le s_1+s_2, \ |t_1-t_2|\le t\le t_1+t_2, \\ (2M_1+1)(2M_2+1)(2m_1+1)(2m_2+1); & s\ge s_1+s_2, \quad t\ge t_1+t_2, \\ (2s+1)(2M_2+1)(2m_2+1)(2m_1+1); & s\le|s_1-s_2|, \quad t\ge t_1+t_2, \\ (2s+1)(2m_1+1)(k_2(k_2+1)-2K_2+1); & s\le|s_1-s_2|, \ |t_1-t_2|\le t\le t_1+t_2, \\ (k_1(k_1+1)-2K_1+1)(2t+1)(2m_2+1); & |s_1-s_2|\le s\le s_1+s_2, \ t\le|t_1-t_2|, \\ (k_1(k_1+1)-2K_1+1)(2M_2+1)(2m_2+1); & |s_1-s_2|\le s\le s_1+s_2, \ t_1\ge t_1+t_2, \\ (2M_1+1)(2m_1+1)(2t+1)(2m_2+1); & s\ge s_1+s_2, \quad t\le|t_1-t_2|, \\ (2M_1+1)(2m_1+1)(K_2(k_2+1)-2K_2+1); & s\ge s_1+s_2, \ |t_1-t_2|\le t\le t_1+t_2 \end{cases}$$

$k_1=s_1+s_2+s$, $K_1=s_1^2+s_2^2+s^2$, $m_1=\min(s_1,s_2)$, $M_1=\max(s_1,s_2)$,

$k_2=t_1+t_2+t$, $K_2=t_1^2+t_2^2+t$, $m_2=\min(t_1,t_2)$, $M_2=\max(t_1,t_2)$.

Доказательство. Справедливость формулы /5.20/ следует из предыдущих лемм. Рассмотрим функцию $c(s,t)$.

Пусть $N(\alpha;\beta;j;\dots|\mu)$ означает кратность представления, которое характеризуется совокупностью параметров $\mu$, в представлении $\alpha\otimes\beta\otimes j\otimes\dots$. Тогда нашу функцию можно записать в виде

$$C(s,t)=\sum_{s_3,t_3} N(s_1,t_1\,;\,s_2,t_2\,;\,s_3,t_3\,|\,s,t)\ .$$

Но известно, что

$$N(\alpha\,|\,\beta)=N(\alpha\otimes\hat{\beta}\,|\,1)\ ,$$

где $1$ – тривиальное представление, и

$$\mathcal{D}^{s_1,t_1}\otimes\mathcal{D}^{s_2,t_2}=\sum_{p=s_1-s_2}^{s_1+s_2}\ \sum_{\ell=t_1-t_2}^{t_1+t_2}\mathcal{D}^{p,\ell}\ .$$

Таким образом, можем записать

$$c(s,t)=\sum_{s_3 t_3} N(s_1t_1\,;\,s_2t_2\,;\,s_3t_3\,;\,s,t\,|\,0,0)=$$

$$=\sum_{s_3 t_3} N(s_1t_1\,;\,s_2t_2\,;\,st\,|\,s_3t_3)=$$

$$=\sum_{p=|s_1-s_2|}^{s_1+s_2}\ \sum_{\ell=|t_1-t_2|}^{t_1+t_2}(2\min(p,s)+1)(2\min(\ell,t)+1)\ .$$

Теперь нетрудно получить конечный вид функции $c(s,t)$ .

Рассмотрим теперь тензорное произведение двух неприводимых представлений квантово механической группы Пуанкаре $\mathcal{P}(1,3)\subset\mathcal{P}(1,4)$ , индуцированных с максимальной компактной подгруппы $SO(3)$ .

Из предыдущих результатов легко получить теорему.

Т е о р е м а. Тензорное произведение двух унитарных неприводимых представлений $T^{m_1 s_1}$, $T^{m_2 s_2}$ группы Пуанкаре, где $m_1, m_2 > 0$, $s_1, s_2 = 0, 1, 2, \ldots$, разлагается на неприводимые по формуле

$$T^{m_1, s_1} \otimes T^{m_2, s_2} = \oplus \sum_{s=0}^{\infty} \int_{m_1+m_2}^{\infty} k(s) T^{m, s} \rho(m) dm,$$

где

$$\rho(m) > 0,\ k(s) = \begin{cases} (2s+1)(2m+1), & s \leq |s_1 - s_2| , \\ \ell(\ell+1) - 2L + 1, & |s_1 - s_2| \leq s \leq s_1 + s_2 , \\ (2M+1)(2m+1) , & s \geq s_1 + s_2 , \end{cases}$$

$$m = \min(s_1, s_2) , \quad \ell = s_1 + s_2 + s , \quad M = \max(s_1, s_2) , \quad L = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 .$$

## § 6. РЕДУКЦИЯ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛИ НЕОДНОРОДНОЙ ГРУППЫ ДЕ СИТТЕРА

Как было показано в § I, группа де Ситтера $\mathcal{P}(1,4) = SO_0(1,4) \otimes T$ является ручной, т.е. произвольное ее унитарное представление разлагается в прямой интеграл неприводимых, притом, однозначно. Интересно и очень важно в физических приложениях [54] получить непосредственно разложение, явно задать действие генераторов алгебры $\mathcal{P}(1,4)$ .

В этом параграфе мы покажем, как получить такое разложение, используя метод работ [55–57] .

Пусть в пространстве $\mathcal{H}$ реализуется некоторое представление алгебры $\mathcal{P}(1,4)$ эрмитовыми операторами $J_{\mu\nu}, P_\mu$. Операторы $J_{\mu\nu}$ , $P_\mu$ удовлетворяют условиям

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 ,$$

$$-i\,[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = g_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} + g_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} , \qquad /6.1/$$

$$-i\,[J_{\nu\sigma}, P_\mu] = g_{\mu\sigma} P_\nu - g_{\mu\nu} P_\sigma ,$$

$g_{00}=1,\; g_{kl} = -\delta_{kl};\; \mu,\nu,\ldots = 0,1,2,3,4 ;\; k,l = 1,2,3,4,$
и определены на пространстве Гординга $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ .

Рассмотрим наиболее интересный для теоретической физики класс представлений, которые в разложении содержат только неприводимые представления с инвариантом $\varkappa^2 = P_0^2 - P_k^2 > 0$ .

Предположим, что оператор Нельсона [70]

$\Delta=-\sum_{\mu} P_{\mu}^{2}-\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu} \overset{c}{J}{}_{\mu\nu}^{2}$ существенно самосопряжен, т.е. представления интегрируемые.

Выберем такой базис в $\mathcal{H}$, чтобы операторы $(P_o^2-P_k^2)^{1/2}$, $sgn\, P_o$, $P_k$ были одновременно диагональными. Поскольку $P_k$ эрмитовы, то существует по крайней мере одно собственное значение, скажем $p_k'$, общее для всех $P_k$. Обозначим через $|p_k', \varkappa, \varepsilon, \alpha)$ собственный вектор операторов $P_k$, $(P_o^2-P_k^2)^{1/2}$, $sgn\, P_o$ с собственными значениями $p_k'$, $\varkappa$, $\varepsilon$, $\alpha$.

Рассмотрим вектор

$$|\varphi)\equiv exp(-i\theta_k\cdot J_k)|p_k', \varkappa, \varepsilon, \alpha), \qquad /6.2/$$

где $p_k'=-\varepsilon\varkappa\frac{\theta_k}{\theta} sh\,\theta$, $\theta=\left(\sum_k \theta_k^2\right)^{1/2}$, $\theta_k-J_k=\sum_k \theta_k J_{0k}$.

Из коммутационных соотношений /6.I/ и равенства

$$e^{A}Be^{-A}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{B,A\}^{(n)}}{n!}, \quad \{B,A\}^{(n)}=\left[\{B,A\}^{(n-1)},A\right]$$

$$\{B,A\}^{\circ}=B, \qquad /6.2/$$

которое справедливо для произвольных эрмитовых операторов $A$ и $B$, получаем

$$P_k\ \varphi) = exp\,(i\theta_k\ J_k)\left\{P_k + P_o\frac{sh\,\theta}{\theta}\,\theta_k + \theta_k P_k\ \frac{ch\,\theta - 1}{\theta^2}\,\theta_k\right\} p'_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha) =$$

$$= exp\,(i\theta_k \cdot J_k)\left\{\theta_k\,\varepsilon\varkappa\,\frac{ch\,\theta}{\theta}\,sh\,\theta - \varepsilon\varkappa\,\theta_k\,\frac{sh\,\theta}{\theta} +\right.$$

$$\left. + \theta_k \cdot P_k\ \frac{ch\,\theta - 1}{\theta^2}\,\theta_k\right\} |p'_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha) = 0\,.$$

Таким образом, точка нуль принадлежит пересечению спектров операторов $P_k$. Обозначим собственные векторы, соответствующие значениям $0, \varkappa, \varepsilon$, $|0, \varkappa, \varepsilon, \alpha>$, $\alpha$ – переменная вырождения и, когда она пробегает все свои значения, то получаем все линейно независимые векторы с собственными значениями $0, \varkappa, \varepsilon$.

Легко убедиться, что каждый общий собственный вектор операторов $P_k$, $(P_o^2 - P_k^2)^{1/2}$, $sgn\,P_o$ с собственными значениями $p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha$ есть линейная комбинация по $\alpha$ векторов вида

$$|p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha> = exp\,(-i\theta_k \cdot J_k)\,|0, \varkappa, \varepsilon, \alpha>\,. \qquad /6.3/$$

Поскольку операторы $(P_o^2 - P_k^2)^{1/2}$ и $sgn\,P_o$ коммутируют с оператором $exp\,(-i\theta_k \cdot J_k)$ и справедливо равенство

$$exp(-i\theta_k \cdot J_k) P_k\, exp\,(i\theta_k \cdot J_k) = P_k + P_o\frac{sh\,\theta}{\theta}\,\theta_k + \theta_k \cdot P_k\ \frac{ch\,\theta - 1}{\theta^2}\,\theta_k\,,$$

то вектор $|p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha>$ является общим собственным вектором для операторов $P_k$, $(P_0^2 - P_k^2)^{1/2}$, $sgn\, P_0$ соответственно с собственными значениями $p_k$, $\varkappa$, $\varepsilon$ .

Векторы $|p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha\rangle$, очевидно, не принадлежат пространству $\mathcal{H}$ . Они являются обобщенными собственными векторами. Справедлива следующая

**Теорема I.** В пространстве Гординга $\mathcal{D}$ можно так ввести топологию со счетной системой мер

$$(\varphi_1, \varphi_2)_n = (\varphi_1, (\Delta+1)^n \varphi_2), \qquad \Delta = \sum_\mu P_\mu^2 + \frac{1}{2} J_{\mu\nu}^2 ,$$

где $(\varphi_1, \varphi_2)$ скалярное произведение в $\mathcal{H}$ , относительно которого $J_{\mu\nu}$ , $P_\mu$ эрмитовы, что пополнив $\mathcal{D}$ по ней, получим пространство $\psi$ , обладающее следующими свойствами:

I. $\psi$ - плотно в $\mathcal{H}$

2. Обертывающая алгебра $E(\mathcal{P}/1,4)$ является алгеброй непрерывных /относительно топологии $\psi$ / операторов на $\psi$.

3. $\psi$ - ядерно.

Приведем доказательство ядерности $\psi$ . Используя результаты работы [71] и тот факт, что группу $\mathcal{P}(1,4)$ можно получить сжатием группы $SO_0(1,5)$ в смысле Инно-Вигнера [72, 73] , достаточно показать, что существует такой оператор $X$ , принадлежащий $E(SO_0(1,5))$ , для которого

$$X^* = X^{**} \quad \text{и} \quad X^{-1} \text{- ядерный}$$

Рассмотрим оператор $A=(C+1)^n$ , где $C$ - казимир группы

$SO_0(1,5)$ второго порядка. Из теоремы Нельсона [74] следует, что $C$ и $C^n$ существенно самосопряженные, поэтому $A^* = A^{**}$.

Покажем далее, что $A^{-1}$ - оператор Гильберта-Шмидта. Очевидно

$$A^{-1} = \sum_i \frac{1}{(C_i - 1)^n} P_i \; ,$$

где $P_i$ - проекторы на подпространство $\mathcal{H}_i$ / $\mathcal{H}_i$ - собственное пространство казимира $C$ с собственным значением $c_i$ /. Кроме того, легко проверить, что при достаточно больших $n$ выполняется неравенство

$$\sum \left( \frac{1}{(c_i + 1)^n} \dim \mathcal{H}_i \right)^2 < \infty \; .$$

Таким образом, $A^{-1}$ - оператор Гильберта-Шмидта. Поскольку квадрат оператора Гильберта-Шмидта всегда существенно самосопряжен, то за $X$ мы можем взять оператор $(A^{-1})^2$ .
Итак, $\psi$ - ядерно.

Из свойств I-3 следует, что ядерная спектральная теорема применима и векторы $|p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha>$ принадлежат пространству $\psi^*$ $(\psi \subset \mathcal{H} \subset \psi^*)$.

Зададим действие на векторы $|p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha>$ генераторов $P_\mu$ , $J_{\mu\nu}$ .

По построению имеем

$$P_k |p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha> = p_k \; |p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha>,$$

$$P_0 \, | p_k , \varkappa , \varepsilon , \alpha > = \varepsilon \, w(\varkappa, p) \, | p_k , \varkappa , \varepsilon , \alpha > ,$$

где $\omega(\varkappa, p) = (\varkappa^2 + p_k^2)^{1/2}$ .

Поскольку $P_k J_{ij} \, | 0, \varkappa, \varepsilon, \lambda > = 0$ , то

$$J_{k\ell} \, | 0, \varkappa, \varepsilon, \alpha > = \sum_{\alpha'} S_{k\ell}^{\alpha\alpha'} \, | 0, \varkappa, \varepsilon, \alpha' > \qquad /6.4/$$

и нетрудно убедиться, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Если $S_{k\ell} \, | p_k , \varkappa, \varepsilon, \alpha > \equiv$

$\equiv \sum_{\alpha'} S_{k\ell}^{\alpha\alpha'} \, | p_k , \varkappa , \varepsilon , \alpha' >$, $S_\alpha^{\pm} \equiv S_{4a} \pm S_{bc}$ , то

$$[S_a , S_b] = 4i \sum_c \varepsilon_{abc} S_c ; \qquad a, b, c = 1, 2, 3 .$$

Отсюда следует, что операторы $S_{k\ell}$ являются генераторами компактной подгруппы $SO(4) \subset \mathcal{P}(1,4)$ .

Теорема 2. Операторы $J_{k\ell}$ , $J_{0k}$ , действуют на векторы $| p_k , \varkappa , \varepsilon , \alpha >$ по формулам

$$J_{k\ell} = i \left( p_k \frac{\partial}{\partial p_\ell} - p_\ell \frac{\partial}{\partial p_k} \right) + S_{k\ell} , \qquad /6.5/$$

$$J_{0k} = - i \varepsilon \omega(\varkappa, p) \frac{\partial}{\partial p_k} + \varepsilon \frac{S_{k\ell} p_\ell}{\omega(\varkappa, p_k) + \varkappa} . \qquad /6.6/$$

Приведем доказательство равенства /6.6/ и рассмотрим оператор $J_{04}$ . Для остальных генераторов доказательство аналогично.

$$J_{04}|p_k,\varkappa,\varepsilon,\alpha> = exp(-i\theta_k\cdot J_k)exp(i\theta_k\cdot J_k)J_{0k}\, exp(-i\theta_k\cdot J_k)|0,\varkappa,\varepsilon,\lambda>.$$

Из /6.I/ и /6.2/ имеем

$$exp(i\theta_k\cdot J_k)J_{04}\, exp(-i\theta_k\cdot J_k) = ch\,\theta\, J_{04} -$$

$$-\frac{sh\,\theta}{\theta}(\theta_1 J_{41}+\theta_2 J_{42}+\theta_3 J_{43})-\theta_4\frac{ch\,\theta-1}{\theta^2}\theta_k\cdot J_k \quad .$$

Отсюда

$$J_{04}|p_k,\varkappa,\varepsilon,\alpha> = ch\,\theta\; exp(-i\theta_k\cdot J_k)J_{04}\,|0,\varkappa,\varepsilon,\alpha> -$$

$$-\frac{sh\,\theta}{\theta}\; exp(-i\theta_k\cdot J_k)(\theta_1 J_{41}+\theta_2 J_{42}+\theta_3\, J_{43}\;|\,0,\varkappa,\varepsilon,\alpha> -$$

$$-\theta_4\frac{ch\,\theta-1}{\theta^2}\; exp(-i\theta_k\cdot J_k)\;|0,\varkappa,\varepsilon,\alpha> =$$

$$= ch\,\theta\; exp(-i\theta_k\cdot J_k)J_{04}\, exp(i\theta_k\cdot J_k)|p_k,\varkappa,\varepsilon,\alpha> -$$

$$-\frac{sh\,\theta}{\theta}(\theta_1 S_{41}+\theta_2 S_{42}+\theta_3 S_{43})|p_k,\varkappa,\varepsilon,\alpha> -$$

$$-\theta_4\frac{ch\,\theta-1}{\theta^2}\theta_k\cdot J_k\;|\,p_k,\varkappa,\varepsilon,\alpha>.$$

Если использовать /6.5/, то получим

$$J_{04}\,|\,p_k,\varkappa,\varepsilon,\alpha> = \frac{ch\,\theta}{\theta}\,sh\,\theta\Big(\theta_1 p_4\frac{\partial}{\partial p_1}+\theta_2\frac{\partial}{\partial p_2}+$$

$$+\theta_3 p_4\frac{\partial}{\partial p_3}\Big)|\,p_k,\varkappa,\varepsilon,\alpha>+\frac{sh\,\theta(ch\,\theta-1)}{\theta}(\theta_1 S_{41}+\theta_2 S_{42}+$$

$$+\theta_3 S_{43})\,|\,p_k,\varkappa,\varepsilon,\alpha>-\theta_4\frac{sh^2\theta}{\theta^2}\,\theta_k\cdot J_k\,|\,p_k,\varkappa,\varepsilon,\alpha>.$$

Заметим, что

$$\frac{\theta_4}{\theta_2}\,(\theta_k\cdot J_k)=-i\varepsilon\,\frac{\omega(\varkappa,p)}{p_k^2}\,p_k\Big(p_k\cdot\frac{\partial}{\partial p_k}\Big)\,.$$

Теперь легко получить окончательный результат

$$J_{04}\,|\,p_k,\varkappa,\varepsilon,\alpha>=-i\varepsilon\,\omega(\varkappa,p)\frac{\partial}{\partial p_k}+\varepsilon_k\,\frac{p_1 S_{41}+p_2 S_{42}+p_3 S_{43}}{\omega(\varkappa,p_k)+\varkappa}\,.$$

Таким образом, генераторы алгебры $\mathcal{P}(1,4)$ имеют канонический вид типа Фолди-Широкова [75] .

Л е м м а . Операторы $S_{k\ell}$ - эрмитовы, т.е. справедливо равенство

$$<p_k,\varkappa,\varepsilon,\alpha\,|\,S_{k\ell}\,|\,p'_k,\varkappa',\varepsilon',\alpha'>=(<p'_k,\varkappa',\varepsilon',\alpha'\,|\,S_{k\ell}\,|\,p_k,\varkappa,\varepsilon,\alpha>)^*.$$

Доказательство. Строим следующие операторы I4

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{6}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma}\,U_{\alpha\beta\gamma}\,, \qquad /6.7/$$

где

$$U_{\alpha\beta\gamma} = P_\alpha J_{\beta\gamma} + P_\beta J_{\gamma\alpha} + P_\gamma J_{\alpha\beta}\,, \qquad /6.8/$$

$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma}$ - единичный полностью антисимметричный тензор пятого ранга с $\varepsilon_{01234} = 1$. Соответствие между компонентами тензоров /6.7/ и /6.8/ можно записать

$$(\omega_{\mu\nu}) = \left\{\begin{matrix} \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} & \omega_{04} \\ & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} \\ & & \omega_{23} & \omega_{24} \\ & & & \omega_{34} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} -U_{234} & -U_{314} & -U_{134} & -U_{321} \\ & U_{034} & U_{042} & U_{023} \\ & & U_{013} & U_{031} \\ & & & U_{012} \end{matrix}\right\}$$

Справедливы следующие коммутационные соотношения

$$[P_\mu\,,\ \omega_{\rho\sigma}] = 0$$

$$-i\,[J_{\mu\nu}, \omega_{\rho\sigma}] = g_{\mu\sigma}\,\omega_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}\,\omega_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}\,\omega_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}\,\omega_{\mu\rho}\,,$$

$$-i\,[\omega_{\mu\nu}, \omega_{\rho\sigma}] = P_\alpha\,\omega_{\beta\gamma}\,(g_{\mu\sigma}\,\varepsilon_{\nu\rho\alpha\beta\gamma} + g_{\nu\rho}\,\varepsilon_{\mu\sigma\alpha\beta\gamma} -$$

$$- g_{\mu\rho}\,\varepsilon_{\nu\sigma\alpha\beta\gamma} - g_{\nu\sigma}\,\varepsilon_{\mu\rho\alpha\beta\gamma}).$$

Поскольку операторы $\omega_{\mu\nu}$ эрмитовы, то отсюда, используя приведенное выше утверждение и то что операторы $S_{k\ell}$ коммутируют с операторами $P_k$, $(P_0^2 - P_k^2)^{1/2}$, $sgn\, P_0$, получаем утверждение леммы.

Т е о р е м а 3. Векторы $|p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha\rangle$ удовлетворяют ортонормированным соотношениям

$$\langle p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha | p_k', \varkappa', \varepsilon', \alpha'\rangle = \omega(\varkappa, p)\,\delta_{\varepsilon\varepsilon'}\,\delta_{\alpha\alpha'}\,\delta(p_k - p_k')\,\delta(\varkappa - \varkappa').$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим ядро

$$K(p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha | p_k', \varkappa', \varepsilon', \alpha') = \langle p_k', \varkappa', \varepsilon', \alpha' | p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha\rangle,$$

Очевидно

$$k(p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha | p_k', \varkappa', \varepsilon', \alpha') = k^*(p_k', \varkappa', \varepsilon', \alpha' | p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha),$$

$$\sum_{\varepsilon} \sum_{\varepsilon} \int d\varkappa \int d\varkappa' \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} \int dp_k\, dp_k'\; f^*(p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha)\, \times$$

$$\times f(p_k', \varkappa', \varepsilon', \alpha')\, k(p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha | p_k', \varkappa', \varepsilon', \alpha') \geqslant 0$$

для произвольной функции I. Кроме того,

$$K(p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha | p_k', \varkappa', \varepsilon', \alpha') = \delta_{\varepsilon\varepsilon'}\,\delta(\varkappa - \varkappa')\,\delta(p_k - p_k')\,K^{\alpha,\alpha'}(p_k, \varkappa, \varepsilon), \qquad /6.9/$$

где $K^{\alpha\alpha'}(p_k, \varkappa, \varepsilon)$ – положительно определенное ядро, которое зависит от $p_k, \varkappa, \varepsilon$ .

Из предыдущей леммы следует, что оператор

$$\mathcal{U} = exp\,(i\mathcal{U}_{r\ell} L_{\varepsilon\ell})\ ,$$

где $L_{r\ell} = ip_\ell \dfrac{\partial}{\partial p_2} - p_r \dfrac{\partial}{\partial p_\ell}$ , $\mathcal{U}_{r\ell}$ - шестерка действительных чисел, унитарный и в нашем базисе действует следующим образом

$$\mathcal{U}\,|p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha\rangle = |p'_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha\rangle\ , \qquad /6.10/$$

$$p'_k = R^{\ell}_k(u)\,p\ell\ , \quad R(u) = exp\,(iur\ell M_{r\ell})\ ,$$

где

$$M_{41} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{42} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{43} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С /6.9/, /6.10/ имеем

$$\langle p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha | \overset{\circ}{\mathcal{U}} | p'_k, \varkappa', \varepsilon', \alpha' \rangle = \langle p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha | R^{\ell}_k(u) p_\ell, \varkappa, \varepsilon, \alpha \rangle ,$$

$$\delta_{\varepsilon\varepsilon'} \delta(\varkappa - \varkappa') \delta(p_k - R^{\ell}_k(u) p'_\ell) K^{\alpha\alpha}(p_k, \varkappa, \varepsilon) =$$

$$= \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \delta(\varkappa - \varkappa') \delta(R(-u) p_k - p'_k) K^{\alpha\alpha'}(R^{\ell}_k(u) p_\ell, \varkappa, \varepsilon) .$$

Отсюда

$$K^{\alpha\alpha'}(p_k, \varkappa, \varepsilon) = K^{\alpha\alpha'}(R^{\ell}_k(u) p_\ell, \varkappa, \varepsilon) .$$

Это означает, что

$$K^{\alpha\alpha'}(p_k, \varkappa, \varepsilon) = K^{\alpha\alpha'}(p, \varkappa, \varepsilon) ,$$

где $p = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4)^{1/2}$.

Рассмотрим оператор $V$

$$V | p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha \rangle = - i \varepsilon \omega(\varkappa, p) \left( \frac{\partial}{\partial p_1} \right) | p \quad , \varkappa, \varepsilon, \alpha \rangle .$$

Очевидно, он эрмитов, поэтому из соотношения

$$\langle p_k, \varkappa, \varepsilon, \alpha | V | p'_k, \varkappa', \varepsilon', \alpha' \rangle =$$

$$- i \varepsilon' \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \delta(\varkappa - \varkappa') K^{\alpha\alpha'}(p, \varkappa, \varepsilon) \delta(p_2 - p'_2) \delta(p_4 - p'_4) \omega(\varkappa, p') \frac{\partial}{\partial p'_2} \delta(p_1 - p'_1)$$

следует, что

$$K^{\alpha\alpha'}(p,\varkappa,\varepsilon)\,\omega(\varkappa,p')\,\delta^{(1)}(p_1-p_1')=K^{\alpha\alpha'}(p',\varkappa,\varepsilon)\,\omega(\varkappa,p)\,\delta^{(1)}(p_1-p_1')\ ,$$

где $p'=(p_1'^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2)^{1/2}$.

Отсюда

$$\frac{d}{dp}K^{\alpha\alpha'}(p,\varkappa,\varepsilon)=\frac{p}{\omega^2(\varkappa,p)}K^{\alpha\alpha'}(p,\varkappa,\varepsilon)\ .$$

Общее решение этого дифференциального уравнения есть

$$K^{\alpha\alpha'}(p,\varkappa,\varepsilon)=\omega(\varkappa,p)\,K^{\alpha\alpha'}.$$

С предыдущих рассуждений следует, что $K^{\alpha\alpha'}$ должно быть положительно определенным ядром по $\alpha$ .

Наконец, нетрудно показать, что $\alpha$ можно так выбрать, что $K^{\alpha\alpha'}=\delta_{\alpha\alpha'}$, /см. [56] /. Теорема 3 доказана.

Таким образом, из вышеприведенных результатов следует, что система векторов $p_k,\varkappa,\varepsilon,\alpha>$ образует ортонормированный базис, в котором интегрируемое унитарное представление /6.I/ разлагается по неприводимым, а функция перехода $\langle x|p_k,\varkappa,\varepsilon,\alpha\rangle$ от исходного базиса $|x\rangle$ к базису $|p_k,\varkappa,\varepsilon,\alpha\rangle$ имеет вид $exp(-i\theta_k\cdot J_k)g(x;\varkappa,\varepsilon,\alpha)$ где функции $g$ - линейно независимые решения уравнений

$$P_k g=0\ ,\quad P_0 g=\varepsilon\varkappa g\ .$$

## Литература

1. E.P.Wigner, Ann.Mat., 40, 149, 1939.
2. V.Bargman, E.P.Wigner, Proc.Nat.Acad.Sci.USA, 34, 211, 1948.
3. H.Ruegg, W.Ruhl, T.Sathanam, Preprint CERN, 66/1106/5, 1966.
4. И.А.Малкин, В.И.Манько, Письма ЖЭТФ, 2, № 5, 1965; ЯФ, 3, 372, 1966.
5. G.C.Hegerfeldt, J.Hennig, Fort.Phys., 16, 9, 1968.
6. Th.Kaluza, Sitz.Prenss.Acad.p.966, 1921.
7. O.Klein, Zs.f.Phys, 37, 895, 1926.
8. V.Fock, Zs.f.Phys, 39, 226, 1926.
9. Ю.Б.Румер, Исследование по 5-оптике, Физматгиз, 1956.
10. C.Miller, L.Rosenfeld, Det, Kgl.Danske Vid.Sel., 17, 8, 1940.
11. Н.Н.Боголюбов и др., Препринт ОИЯИ, Р-2141, Дубно, 1965.
12. В.И.Фущич, УФЖ, 12, 741, 1967; 13, 368, 1968.
13. V.Fushhhich, I.Krivsky, Nucl.Phys. 137, 79, 1968.
14. В.И.Фущич, ТМФ, 4, 360, 1970.
15. V.Fushchich, Let.Nuovo Cim., 10, 163, 1974.
16. В.И.Фущич, Препринт ИТФ-17, Киев, 1969.
17. В.И.Фущич, Л.П.Сокур, Препринт ИТФ-69-33, Киев, 1969.
18. Л.П.Сокур, В.И.Фущич, ТМФ, 6, 348, 1971.
19. A.D.Dankov, V.G.Kagyshevsky, M.D.Mateev, R.M.Mir-Kasimov, Preprint, Dubna, E2-7936, 1974.

20. J.J.Aghassi, P.Roman, R.M.Santilli, J.Math.Phys., 61, 2, 1974.

21. L.Castell, Nuovo Cim., 49, 285, 1967.

22. И.М.Лизин, Л.А.Шелепин, Труды ФИАН, 70, 22I, I973
А.Н.Лезнов, М.В.Савельев, ЭЧАЯ, 7, вып. I, I976

23. А.А.Кириллов, Элементы теории представлений, "Наука", I972.

24. Д.П.Желобенко, Компактные группы Ли и их представления, "Наука", I970.

25. И.М.Гельфанд, М.И.Граев, Сб., Физика высоких энергий и теория элементарных частиц, "Наукова думка", Киев, I967.

26. Н.Я.Виленкин, Я.А.Смородинский, ЖЭТФ, 46, I973, I964

27. М.А.Либерман, Я.А.Смородинский, М.Б.Шефтель, ЯФ, 7, 202, I968.

28. М.А.Либерман, А.А.Макаров, Я.Ф., 9, I3I4, I959.

29. И.С.Шапиро, ДАН СССР, I06, 647, I956.

30. А.З.Долгинов, ЖЭТФ, 30, 747, I956.

31. Чжоу-Гуан-Чжао, Л.Г.Заставенко, ЖЭТФ, 35, I4I7, I958.

32. В.С.Попов, ЖЭТФ, 37, III6, I959.

33. M.Toller, Internal report no.75, 1965, Departament of Physics, Univ. of Rome.

34. A.Sciarrino, M.Toller, Internal report no.108, 1966,

35. S.Strim, Arkiv Fysik, 34, 215, 1967.

36. S.Strim, Arkiv Fysik, 40, 1, 1968.

37. S.Strim, Ann. Inst.Henri Poincare, 13, 77, 1970.

38. N.Mukunda,J.Math.Phis.,8,2210,1967;9,50,532,1968.

39. N.T.Evans,J.Math.Phis.,8,170,1967.

40. J.Niederle,J.Math.Phis.,8,1921,1967.

41. C.P.Boyer,F.Ardalan,J.Math.Phis.,12,2070,1971.

42. Ю.В.Новожилов, Е.В.Прохватилов, ТМФ, I, IOI, I969.

43. E.Angelopoulos,J.Math.PHIS.,15,155,1974.

44. A.M.Chakrabarti,J.Math.Phis.,9,no.8,1968.

45. A.O.Barut,A.Bohm,J.Math.Phis,,11,2938,1970.

46. W.Macfadyen,J.Math.Phis.,J.Math.Phis.,12,492,1436,1971.

47. S.K.Bose,R.Parker,J,Math.Phis.,12,1009,1971.

48. N.Mukunda,J.Math.Phis.,15,477,1974.

49. И.М.Гельфанд, М.И.Граев, И.Я.Виленкин, Обобщенные функции, т.6, "Наука", I966.

50. В.Г.Кадышевский , Р.М.Мир-Касилов, Н.В.Скачков, в сб."Проблемы физики элементарных частиц и атомного ядра", Атомиздат, I972.

51. I.M.Gelfand,M.A.Naimark,J.Phis.USSR,10,931,1946.

52. И.М.Гельфанд, М.А.Наймарк, Из. АН СССР, серия мат. II, 4II, I947.

53. G.F.Koster,Phis.Rev.,109,227,1958.
A.U.Klymik,Reports Math.PHIS.,7,153-1975.

54. В.И.Фущич, Диссертация, Киев, I97I.

55. H.E.Moses,Nuovo Cimehto,Seric10,40,1965.

56. J.S.Lomont,H.E.Moses,J.Math.Phis.,9,12,1968.

57. H.E.Moses,J.Math.Phis.,8,4,1967.

58. G.W.Mackey,Ann.Math.,55,101,1952;58,193,1953.

59. G.W.Mackey,Acta Math.,99,265,1958.

60. Ю.М.Широков, ЖЭТФ, 33, 86I, II96, I208, I957; 34,7I7, I958

61. В.И.Фущич, А.Л.Грищенко, А.Г.Никитин, ТМФ,8, I92, I97I.

62. K.Iwasawa,Ann.of Math.,50,507,1949.

63. U.Ottoson,Com.Math.Phis.,8,228,1968.

64. F.Schwarz,J.Math.Phis.,12,131,1971.

65. T.Hirai,Proc.Jap.Acad.,38,83,1962.

66. V.Dobvev et al.,IAS Preprint,Prinston,May 1975.

67. И.М.Гельфанд, М.Л.Цетлин, ДАН СССР, 7I, I0I7, I950.

68. T.Hirai,Proc.Jap.Acad.,42,323,1966.

69. A.Klimyk,Preprint ITP-74-72E,Kiew 1974.

70. E.Nelson,Ann.Math.,70,572,1959.

71. J.K.Roberts,Com.Math.Phis.,3,98,1966.

72. E.Inonu,E.P.Wigner,Proc.N.A.S.,39,50,1953.

73. J.Mickelsson,J.Niederle,Preprint TRIESTE,IC/71/138.

74. E.Nelson,W.E.Stinespring,Am.J.Math.,81,1959.

75. L.Foldy,Phis.Rev.,102,568,1956.

76. И.И.Юрик, УМЖ, № 4, I975.

77. И.И.Юрик, УМЖ, № 6, I976.

78. А.Г.Никитин, В.И.Фущич, И.И.Юрик, ТМФ, № 2, I976.

79. В.И.Фущич,А.Г.Никитин,И.И.Юрик,Препринт ИМ-75-5,КиевI975.