КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им.Т.Г.ШЕВЧЕНКО.

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

студента 5 курса механико-математического факультета ЖДАНОВА РЕНАТА ЗУФАРОВИЧА на тему "ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ, КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ, ОПТИКИ и ДИФФУЗИИ"

Кафедра математической физики

Специальность "Математика"

Научный руководитель:
доктор физ-мат. наук, профессор
ФУЩИЧ В.И., зав. отделом ин-та
математики АН УССР

КИЕВ - 84

Содержание

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В сявзи с тем, что в большинстве случаев дифференциальные уравнения в частных производных /ДУЧП/ математической и теоретической физики не могут быть проинтегрированы в замкнутом виде /особенно, если мы имеем дело с многомерными ДУЧП/, а реализация приближенных алгоритмов для их решения не всегдавозможна и эффективна, особую роль играет качественное изучение ДУЧП, применение теоретико-групповых методов для выявления тех или иных особенностей решений данного уравнения. Одной из важнейших задач, решаемых в этом направлении, является изучение свойств симметрии данного ДУЧП. Её важность определяется целым рядом факторов, как-то:

I/ связь симметрии уравнений с возможностью их решения;

2/обусловленностью законов сохранения симметрией рассматриваемых ДУЧП;

3/возможности линеаризации уравнений, связанные с высокой симметрией ДУЧП;

4/ связь метода обратной задачи рассеяния с наличием нетривиальных, нелокальных симметрий и т.д.

5/ примен. метода разд. перем. к ур-ниям, облад. широкой симметрией.

Целью настоящей работы является:

I. Отыскание максимальных локальных групп инвариантности некоторых ДУЧП электродинамики, квантовой механики, оптики с помощью метода Ли~~-Овсянникова~~.

2. Исследование нелокальной симметрии системы уравнений Дирака.

~~Выводы:~~

I. Найдены максимальные локальные группы инвариантности уравнений Клейна-Гордона со взаимодействием, эйконала со взаимодействием,

2. Найдены классы конформно инвариантных волновых уравнений.
3. Найден максимальный набор операторов первого порядка,зависящих от первых производных,для системы уравнений Дирака.

Введение. Краткий обзор литературы.

Математические основы теории симметрии были заложены в трудах выдающегося норвежского математика Софуса Ли /1842-1899/. Им была создана теория непрерывных групп преобразований и их инвариантов. Развитый его учениками этот аппарат получил самое широкое и плодотворное применение в геометрии ,механике и в теории обыкновенных дифференциальных урвнений /ОДУ/ и ДУЧП.

Современному изложению теории С.Ли и ёедальнейшему развитию посвящена фундаментальная монография Л.В.Овсянникова [9]. Им,в частности,построена теория инвариантных и частично инвариантных решений ДУЧП.

В последнее время интенсивно развивается теория групп Ли-Бэклундаявляющихся обоощением локальных групп Ли.Наиболее полное и законченное на сегодняшний день изложение ее методов имеется в монографии Н.Х.Ибрагимова / 6 / /смотри также / 17 / /.

Новый метод исследования групповых свойств систем линейных ДУЧП был предложен В.И.Фущичем / 15 /и подробно изложен в / 12 /

Задачи и методы исследования групповых свойств ДУЧП.

На исключительную роль принципов симметрии в изучении законов природы указывал Вигнер / 11 /, "законы природы обладают структурой называемой нами принципамиинвариантности.В некоторых случаях эта структура простирается настолько далеко,что позволяет находить новые законы природы на основе постулата о том,что законы должны обладать определенной инвариантностью..."Гейзенберг /11/ писал:"... законы сохранения связаны с симметриями, с групповой структурой данного уравнения. Если оно инвариантно относительно определенного преобразования, то из операторов последнего можно построить наблюдаемую величину, котораяостается постоянной в процессе, описываемом данным законом природы".

Зная симметрийные свойства уравнений /ДУЧП/, мы можем изучатьсвойства решений этих уравнений, не находя их явно /!/. Эта одна из наиболее плодотворных идей С.Ли тем более актуальна, что все основные уравнения математической и теоритической физики, как-то: уравнения Ньютона, Лапласа, Даламбера, Лагранжа, Гамильтона-Якоби, Максвелла и т.д., обладают высокой симметрией. Более того, можно утвердить, что именно благодаря этому свойству они выделены среди множества других дифференциальных уравнений, встречающихся в математике. Поэтому исследование групповых свойств уравнений математической и теоретической физики является очень важной и нужной задачей.

Можно выделить два принципиально различных метода исследования групповых свойств ДУЧП:

I/. Метод Ли-~~Овсянникова;~~

2/. Нелиевский метод.

Дадим краткую характеристику этих методов.

I. МЕТОД ЛИ-~~ОВСЯННИКОВА.~~

Этот метод основан на инфинитезимальном подходе, предложенном С.Ли. С помощью доказанных им теорем становится возможным построить алгоритм для отыскания максимальных алгебр инвариантности данного уравнения.

По предложению Овсянникова система из S дифференциальных уравнений к-го порядка :

$$\Omega: \ \omega(\underset{k}{z}) = 0 \qquad /0.1/$$

рассматривается как мнргообразие в к – раз продолженном пространстве $Z = X \times Y$,где $X = \mathbb{R}^{n+1}$, $Y = \mathbb{R}^{m+1}$ – пространства независимых и завиоимых переменных. Полный набор инфинитезимальных операторов /ИФО/:

$$\hat{X} = \xi^{\mu}(x,u)\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \eta^{\nu}(x,u)\frac{\partial}{\partial u^{\nu}}; \ \mu = \overline{0,n}; \ \nu = \overline{0,m} \qquad /0.2/$$

/0.2/ называют операторами симметрии

/здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование/~~и~~. Соответственномаксимальная группа Ли локальных преобразований,допускаемая исследуемой системой ДУ определяется из следующего критерия инвариантности:

$$\underset{k}{\hat{X}}\Omega \big|_{\Omega} = 0$$

Здесь $\underset{k}{\hat{X}}$ –это к-ое продолжение ИФО /0.2/,которое строится по следующим формулам продолжения /Овсянников, /:

$$\underset{k}{\hat{X}} = \hat{X} + \underset{1}{\eta}\underset{1}{\partial} + \ldots + \underset{k}{\eta}\partial_k , \quad k = 1,2,\ldots \qquad /0.4/$$

$$\eta = D_k(\eta - \underset{1}{u}\xi) + \underset{k+1}{u}\underset{1}{\xi}, \quad k = 1,2,\ldots \qquad /0.5a/$$

$$\underset{k+1}{{}^{k}\eta} = D_k\eta - \underset{k+1}{u}D\xi , \quad k = 0,1,2,\ldots \qquad / 0,5 в/$$

$$D_k = \partial_x + \underset{1}{u}\partial_u + u_2\underset{1}{\partial_u} + \ldots + u_k\underset{k-1}{\partial_u} + \ldots \qquad /0.6/$$

–оператор полного дифференцирования. В координатной записи фигурирующие здесь векторы имеют вид:

$$x = (x^0, \ldots, x^n), \quad u = (u^0, \ldots, u^m)$$

$$\underset{k}{u} = (\ldots, u^e_{\nu_1\ldots\nu_k}, \ldots), \quad u^{\ell}_{\nu_1\ldots\nu_k} = \frac{\partial^k u^e}{\partial x^{\nu_1}\ldots\partial x^{\nu_k}}; \quad \ell = \overline{0,m}, \ \nu_i = \overline{0,n}$$

$$\underset{k}{\partial} = \left(\ldots, \frac{\partial}{\partial u^e_{\nu_1\ldots\nu_k}}, \ldots\right), \quad k = 0,1,\ldots$$

$$D_{\mu} = \partial/\partial x^{\mu} + u^e_{\mu}\,\partial/\partial u^e + \ldots + u^e_{\nu_1\ldots\nu_k\mu}\,\partial/\partial u^e_{\nu_1\ldots\nu_k} + \ldots$$

$Z_k = Z_1 \times \tilde{Z}_k$ – пространство в котором действуют операторы $\underset{k}{\hat{X}}$; $\tilde{Z}_k = Y_1 \times \ldots \times Y_k$

"Переход на многооьбразие Ω в условии инвариантности /0.3/ означает не что иное,как выделение на многообразии/0.1/

" свободных" координат,через которые остальные /"зависимые"/ координаты вектора $Z_k = (u, u_1, \dots, u_k)$ тем или иным образом выражаются. Расщепление условияинвариантности /0.3/ относительно этих "свободных" дает систему определяющих уравнений. Эта система является системой линейных / / однородных ДУЧП относительно координат искомого вектора :

Решая эту систему получим:

$$\xi = \xi(x, u, C_1 \dots C_N), \quad \eta = \eta(x, u, C_1 \dots C_N) \qquad /0.7/$$

где C_i – в общем случае могут быть произв.функциями некоторой комбинации переменных $/x,u/$.
Базисные ИФО получаем из этого решения путем поочередного приравнивания одной произвольной постоянной единице,а всех остальных нулю.

Этот алгоритм и его строгое и подробное обоснование приведены в / 9 /.Отметим,что конкретные вычисления допускаемых групп по алгоритму Ли-Овсянникова довольно громоздки.Подробная библиография работ этого направления дана в / 4, 9 /.

ЗАДАЧИ РЕШАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ЭТОГО МЕТОДА.

1. Отыскание максимальной допускаемой в смысле Ли группы инвариантности для заданной системы ДУ.
2. Изучение действия допускаемой группы на множестве решений исследуемой системы ДУ /описание общего строения семейства всех решений ,выделение определенных классов решений,производство новых решений из уже известных и т.д./,что позволяет строить многопараметрические семейства точных решений ДУ.
3. Групповая классификация систем ДУ.
4. Нахождение замены переменных,основываясь на знании допускаемых

групп ,при которой данное ДУпереходит в ДУ имеющего более простую и удобную для отыскания конкретных решений дифференциальную структуру / например линеаризация ДУ /.

Естественным обобщением локальных /точечных /преобразований являются касательные преобразования. Основы теории здесь были заложены С.Ли и его учениками. Однако, представляемые здесь возможности сильно ограничены, так как оно оказывается содержательным лишь в случае одномерного пространства искомых функций и, притом, если преобразование зависит от производных не выше первого порядка. В остальных случаях касательные преобразования сводятся к точечным или контактным преобразованиям, соответствующим число раз продолженным.

Отказ от ограничения порядка производных является здесь принципиальным моментом ,он приводит к понятию группы Ли-Бэклундда. Мы приведемкраткое описание соответствующих построений,

Введем следующее определение:

Однопараметрическая группа преобразований вида.

$$x^{i\prime} = f^{i}(z,a) \quad , \quad i = \overline{1,n}$$

$$u^{\prime\alpha} = \varphi^{\alpha}(z,a) \quad , \quad \alpha = \overline{1,m}$$

$$u^{\alpha\prime}_{i_1\ldots i_s} = \psi^{\alpha}_{i_1\ldots i_s}(z,a) \, , \quad s = 1,2,\ldots \qquad /0.8/$$

действующая в пространстве $Z = \mathbb{R}^n \times V$ называется группой Ли-Бэклунда $\Leftarrow$ эти преобразования сохраняют следующую структуру:

$$\Omega: \; du^{\alpha} = u^{\alpha}_{i} dx^{i} \, , \; du^{\alpha}_{i_1\ldots i_s} = u^{\alpha}_{\nu i_1\ldots i_s} dx^{\nu} , \quad s = 1,2,\ldots$$

/т.е.производные всех порядков при преобразовании /0.8/ переходят в производные/.

$$V = \sum_{s\geq 0} V^s, \quad V^s = \{ u^\alpha_{i_1\ldots i_s} \mid \alpha = \overline{1,m};\ i_k = \overline{1,n} \}$$

$$z = (x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{k}{u}, \ldots)$$

Замечание:

Если $z = (x, u)$,то условие /0.9/ выполняется автоматически группы Ли согласно определению являются группами Ли-Бэклунда.

Группе преобразований /0.8/ ставим в соответствие оператор Ли-Бэклунда:

$$X = \xi^\mu(z)\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \eta^\alpha(z)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \ldots + \zeta^\alpha_{i_1\ldots i_{s'}}(z)\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1\ldots i_s}} + \ldots \qquad /0.10/$$

Здесь координаты $\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}$ определяются формулами "продолжения":

$$\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_{s'}} = D_{i_1}\ldots D_{i_{s'}}(\eta^\alpha - \xi^\nu u^\alpha_\nu) + \xi^j u^\alpha_{j i_1\ldots i_{s'}};\ s\geq 1$$

Рассматриваем систему уравнений порядка s'

$$F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u}) = 0 \qquad /0.12/$$

вместе со всеми его дифференциальным следствиями

$$D_{i_1}\ldots D_{i_{s'}} F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u}) = 0$$

$$s = 1, 2, \ldots;\quad i_k = \overline{1,n}$$

/0.I3/

мы получаем некоторое многообразие в пространстве

$Z = R^n \times V$,обозначим его $[F]$

Тогда уравнение /0.12/ допускает группу Ли-Бэклунда /0.8/ $\overset{def}{\Leftarrow}$ многообразие $[F]$ инвариантно отн. (0.8)

Имеет место следующий критерий инвариантности дифференциал ных многообразий.

Дифференциальное многообразие $[F]$ инвариантно относительно группы /0.8/ с оператором /0.I0/

$$\Leftrightarrow \quad (X F)_{[F]} = 0 \qquad /0.14/$$

/0.14/ – это определющее уравнение.

Для того, чтобы можно было расщепить /0.14/ по "свободным" переменным нам приходится ограничивать порядок производных входящих в компоненты оператора X каким-либо конечным числом.

В этом случае полностью применим алгоритм Ли-Овсянникова, описанный выше. Кроме того существует другой прием-ищутся операторы симметрии/так называемые рекурсивные операторы, ~~см.~~ (0,2) / определяющего уравнения /0.14/ с помощью которых из уже известных решений /0.14/ находится бесконечное /счетное / множество новых решений.

Заметим, что в теории Ли-Бэклундане выполняются теоремы Ли, описывающие связь между группами Ли и алгебрами Ли, допускаемыми данным уравнением. Вследствие этого нельзя, как правило, выбрать конечное подмножество ~~из~~множества допустимых для данного уравнения операторов Ли-Бэклунда, образующих алгебру Ли, кроме того, нельзя по данному допускаемому оператору /0.10 /восстановить допускаемую группу /0,8/. Строгое доказательство использованных здесь утверждений, обстоятельное обсуждение возникающих трудностей можно найти в монографии Н.Х.Ибрагимова/ 6 / /см. также / 17 / /.

Несмотря на ряд серьезных трудностей возникающих при реализации изложенного алгоритма, исследование симметрийных свойств в смысле Ли-Бэклунда является принципиально важной задачей так как :

1°. Существует непосредственная связь между наличием нетривиальной симметрии Ли-Бэклунда и интегрируемостью задачи методом обратной задачи рассеяния /ОРЗ/ /см. например / 7, 8 //

2^{0}.Построен регулярный алгоритм нахождения новых законов сохранения для данного ДУ по допускаемым операторам Ли-Бэкмунда /

3^{0}.Для ряда нелинейных ДУ были найденылине линеаризующие нелокальные замены переменных на основе использования симметрийных свойств ДУ /см.например / 22 / /,

Для полноты изложения остановимся на описании нелиевского метода исследования симметрийных свойств линейных систем ДУЧП ,предложенного В.И.Фущичем /следуем / 12 /,стр.5-44/

Любую линейную систему можно представить в виде

$$L(x,\partial)\psi(x)=0 \qquad /0.15/$$

$L(x,\partial)$ - некоторый дифференциальный оператор.

Преобразование

$$x\to x'=\Lambda x,\quad \psi(x)\to\psi'(x')=T(\Lambda)\psi(x) \qquad /0.16/$$

называется преобразованием инвариатности,если:

$$L(x',\partial')\psi'(x')=0. \qquad /0.17/$$

Несложные рассуждения приводят к следующему критерию инвариантности:

$$L(x,\partial)Q_A(x,\partial)\psi(x)\Big|_{L(x,\partial)\psi(x)=0}=0,\quad A=\overline{1,N} \qquad /0.18/$$

где Q_A - ИФО,допускаемые уравнением /0.15/.

Критерий /0.18/ удобно переписать в эквивалентной форме, используя коммутатор/антикоммутатор/:

$$[L,Q_A]_{\underset{(+)}{-}}=R_A L\quad,\ A=\overline{1,N} \qquad /0.19/$$

где R_A - некоторый оператор.Если совокупность операторов $\{Q_A\}$ образует векторное пространство с лиевским законом умножения, то говорят,что уравнение /0.15/ инвариантно относительно алгебры Ли. При этом выполнено

$$[Q_A, Q_B] = f_{ABC} Q_C \qquad /0.20/$$

где f_{ABC} – структурные константы алгебры. Таким образом отыскание лиевской алгебры инвариантности для /0.15/ сводится к отысканию всех Q_A, удовлетворяющих /0,19/,/0.20/

Следовательно задачу исследования алгебраических свойств ДУ обобщить по меньшей мере в таких двух направлениях:

1/отказаться от требований /0.20/,т.е. от условия,чтобы операторы $/Q_A/$ принадлежали алгебре Ли,

2/существенно расширить класс допускаемых операторов удовлетворяющих /0.19/,/0.20/,,т.е. искать решения ,например, в классе псевдодифференциальных или интегродифференциальных операторов. Именно в этом ,последнем направлении ,которое мы назовем нелиевским подходом,и были получены соответствующие результаты для уравнений Максвелла и Дирака.

В / 12 ,стр.11-12/ сформулирован алгоритм отыскания при нелиевском подходе:"Он состоит из следующих этапов:

1/ система ДУ с помощью невырожденного преобразования сводится к каноническому/или диагональному/ виду;

2/находится алгебра инвариантности /АИ/ преобразованного уравнения;

3/если операторы АИ удовлетворяют коммутационным соотношениям /0.20/,то устанавливается ,какое представление алгебры Ли реализует эти операторы в пространстве решений;

4/с помощью обратного преобразования находится АИ исходного уравнения;

5/ по АИ вычисляется группа инвариантности ДУ".

Задачи решаемые с помощью этого метода:

I. Отыскание алгебр инвариантности для конечных и бесконечных /!/ систем линейных дифференциальных и некоторых интегродифференциальных уравнений в классе дифференциальных операторов бесконечного порядка, вплоть до бесконечного /псевдодифференциальные и интегродифференциальные операторы/.

2. Эффективное описание классов уравнений инвариантных относительно заданной группы. Подробная библиография и ряд примеров в этом направлении содержится в / 12 / /см. также моногафию / 16 / /.

Опишем коротко результаты полученные в дипломной работе.

лава I.посвящена теоретико-групповомуанализу некоторых уравнений электродинамики,оптики,диффузии с помощью метода Ли-Овянникова.

§I найдены все нелинейные добавки к уравнению Даламбера,которые оставляют его инвариантным относительно некоторой подалгебры конформной алгебры ,Приводится n-параметрическое емейство точных решений одного из таких уравнений.

§2 описан широкий класс нелинейных уравнений допускающих конф ую алгебру $C(1,n-1)$.Отмечено,что при n=2 нелинейное "волновое" уравнение: $n\,u_{\mu\nu}u^{\mu\nu}-(\Box u)^2=0,$

ожет быть проинтегрировано в замкнутом виде.Приведена максимал ая алгебра инвариантности этого уравнения при произвольном $n\in J$

§3 проведена теоретико-групповая классификация уравнения Клей а-Гордона со взаимодействием.Доказан ряд классификационных еорем,рассмотрен случай комплексного поля $u(x)$.

§4 приводятся результаты теоретико-группового анализа уравнен йконала со взаимодействием.Указаны точные /n-I/-параметричесие решенияэтого уравнения,зависящие от двух произвольных ункций.

§5 описаны некоторые нелинейные,конформно-инвариантные обобения уравнений Маквелла,записанных в терминах потенциалов; айдена в случае $\vec{E}\perp\vec{H}$ максимальная алгебра инвариантности равнения : $\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}^2+\vec{H}^2)+\lambda\,\mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{H})=0,$

которая оказывается бесконечномерной; приводятся также некоторые другие результаты.

§6 посвящен изучению симметрии одномерногоуравнения Колмогорова-Фоккера-Планка.Приведена максимальная алгебра инвариантности этого уравнения,некоторые классы точных решений.

В главе 2 приводятся результаты исследования нелокальной симметрии некоторых уравнений квантовой механики.

В §I рассмотрена задача классификациинелинейных уравнений Шредингера допускающих операторы Ли-Бэклунда определенного вида,зависящих от производных,порядок которых не выше 3.Обнаружено,чтоединственным уравнениеем такого вида является стандартное уравнение Шредингера с нелинейностью $|u|^2u$.

В §2 описан максимальный набор операторов Ли-Бэклунда,зависящих от производных первого порядка,допускаемых системой уравнений Дирака. $\gamma_\mu p^\mu \psi = m\psi$
Приведен соответствующий результатдля безмассового уравнения Дирака.

В §3 изучена симметрия восьмикомпонентного уравнения Дирака.

В дипломной работе доказано I9 теорем и 3леммы,в которых содержится краткий ,но полный итог проделанной работы.

В заключение хочется выразить благодарность моему научному руководителю доктору физ-мат наук,профессору В.И.Фущичу за постановку всех этих задач ,многочисленные советы,внимание проявленное в течение всей работы над дипломным проектом;а также сотрудникам ин-та математики АН УССР Никитину А.Г. и Серову Н.И.за полезное и плодотворное обсуждение рассматриваемых здесь проблем.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ДУ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ЛИ-ОВСЯННИКОВА.

I. О конформной инвариантности нелинейного уравнения Даламбера.

В связи с тем, что реализация алгоритма Ли-Овсянникова в каждом конкретном случае непростая и довольно громоздкая задача а уравнений, обладающих высокой, физически значимой инвариантностью не так уж много, весьма важной является обратная задача теоретико-группового анализа ДУ. Суть этой задачи коротко можно изложить следующим образом:

Пусть $\{\Omega_\alpha (x, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{s}{u}) = 0 \mid \alpha \in A\}$ – набор ДУ порядка s и G – некоторая группа Ли преобразований.

Тогда решить обратную задачу теоретико-группового анализа ДУ значит выделить из набора подмножество ДУ, которые допускают группу G.

Выбор Ω и G диктуется постановкой задачи и физическими соображениями. Например, если в реальном физическом процессе имеют место законы сохранения энергии, импульса, момента количества движения и тот факт, что выполнен либо принцип относительности Галилея, либо принцип относительности Пуанкаре-Эйнштейна, то уравнения, описывающие этот процесс должны быть инвариантны относительно группы Галилея $G(1,3)$ /I,3/ либо, соответственно, относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$ /I,3/ /или ее подгрупп/.

В этом параграфе будет полностью решена задача теоретико-групповой классификации уравнений:

$$\Box u = F(x, u, \underset{1}{u}) \qquad /1.1/$$

инвариантных относительно алгебры $\{J_{\mu\nu}\}_{\mu,\nu=0}^{n-1} \oplus \{K_\mu\}_{\mu=0}^{n-1}$

которая является подалгеброй алгебры $C(1,n-1)$

Здесь

$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta_{n-1}$ -оператор Даламбера,

n - размерность пространства, $\underset{1}{u} = (u_0, \dots, u_{n-1})$; $u_\mu =: \frac{\partial u}{\partial x^\mu}$

Докажем вначале следующую

Лемму:

Наиболее общим уравнением первого порядка инвариантным относительно алгебры $\{J_{\mu\nu}\}_{\mu,\nu=0}^{n-1}$ является ДУ вида

$$\varphi[x_\nu x^\nu, x_\nu u_\nu, u_\nu u^\nu, u] = 0 \qquad /1.2/$$

$x_\nu x^\nu = x_0^2 - x_a^2$; $x_\nu u_\nu = x_0 u_0 + x_a u_a$; $u_\nu u^\nu = u_0^2 - u_a^2$

Доказательство проводим методом Ли-Овсянникова .Уравнение $\hat\varphi(x, u, \underset{1}{u}) = 0$ инвариантно относительно $\{J_{\mu\nu}\}_{\mu,\nu=0}^{n-1}$ $\Longleftrightarrow$

$$\left\{\frac{\partial\hat\varphi}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\hat\varphi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\hat\varphi}{\partial u_\mu} - \frac{\partial\hat\varphi}{\partial u_\nu}\right\} g^{\mu\nu} = 0 \; ; \; 0 \le \mu,\nu \le 3 \qquad /1.3/$$

Здесь $g_{\mu\nu}$ -метрический тензор с сигнатурой $\{1,-1,\dots,-1\}$, т.е. $g_{\mu\nu} = 0,\ \mu \ne \nu$; $g_{00} = -g_{11} = \dots = -g_{n-1\,n-1} = 1$.

Решение системы /I.3/ имеет вид $\hat\varphi = \varphi(x_\nu x^\nu, u_\nu u^\nu, x_\nu u_\nu, u)$ что и завершает доказательство./

Следствие:Уравнение /I.I/ инвариантно относительно $\{J_{\mu\nu}\} \Longleftrightarrow$

$$F = \varphi(x_\nu x^\nu, x_\nu u_\nu, u_\nu u^\nu)$$

Это следует из того,что $\square u$ = о -инвариантно относительно $\{J_{\mu\nu}\}$, и из леммы .

У нас $J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$, $p_\alpha = i g^{\alpha\beta}\partial_\beta$; $\alpha = \overline{0, n-1}$; $\partial_\beta = \frac{\partial}{\partial x^\beta}$.

В / 4 / было показано,что уравнение $\square u = F(u)$ инвариантно относительно алгебры $C(1,n-1)$ вида:

(1) $P_\mu = i g^{\mu\nu}\partial_\nu$;

(ii) $J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$;

(iii) $D = x_\nu p^\nu - \frac{n-2}{2} i u \partial_u$; $\quad 0 \le \mu, \nu \le n-1$.

(iv) $K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu$.

Здесь $p^\alpha = g^{\alpha\beta} p_\beta$,по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

$\Leftrightarrow \quad F(u) = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}$, $\quad n \in \mathbb{N}$ - размерность пространства, $n \ne 2$.

В / 13 / этот результат был обобщён на уравнения:

$$\Box u = F(x, u, \underset{1}{u}) \ -$$

была доказана теорема о том,что $\exists$ замена зависимой переменно[й] $u = u(w)$ такая что для w уравнение /1.1/ переходит в:

$$\Box w = \lambda w^{\frac{n+2}{n-2}}, \ \lambda \in \mathbb{R}^1, \ n \ne 2.$$

Дальнейшим обобщением этих рассмотрений является теорема:

<u>Теорема I</u>: Уравнение /1.1/ допускает алгебру $\{J_{\mu\nu}\} \oplus \{K_\mu\}$

$$\Leftrightarrow F = u^{\frac{n+2}{n-2}} \varphi\left(x_\nu x^\nu u^{\frac{2}{n-2}}, \left(\frac{2}{2-n} \cdot \frac{u_\nu x_\nu}{u} + 1\right) u^{\frac{2}{2-n}} - \frac{1}{(n-2)^2} (x_\nu x^\nu)(u_\nu u^\nu) u^{\frac{6-2n}{n-2}}\right) \quad /1.4/$$

Доказательство этого утверждения проводится применением алгоритм[а] Ли-Овсянникова,вследствие его громоздкости мы не приводим соответствующих выкладок.

$\varphi: \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ -произвольная фунция.

<u>Замечание</u>: Если положить $\varphi \equiv \lambda = Const$ /это соответствует тому ,что мы потребуем инвариантности относительно сдвигов p_μ / то мы получим предыдущие утверждения.

Знание симметрии позволяет находить многопараметрические классы точных решений ДУ.В / 13 / предложен эффективный метод,основанный на идеях Л.В.Овсянникова и найдены многопараметрические семейства решений целого ряда ДУЧП. Мы приведем пример использования этого метода для частного случая доказанной теоремы:

$$F = (x_\nu x^\nu u^{\frac{2}{n-2}})^{-1}$$

$$(1.1) \Rightarrow \quad \Box u = (x_\nu x^\nu)^{-1} u^{\frac{n}{n-2}} \qquad /1.5/$$

Мы ищем решение /I.5/ в виде $u = u(\omega)$,где

$\omega = (x_\nu x^\nu)^{-1}(\beta_\mu x^\mu)$ -инвариант группы $\{\mathcal{K}_\mu\}$

/I.5/ $\Rightarrow$ получаем ОДУ:

$$u_{\omega\omega} \frac{\beta_\nu \beta^\nu}{(x_\nu x^\nu)^2} + u_\omega \cdot \frac{(-4 x_\nu \beta^\nu)}{(x_\nu x^\nu)^2} = \frac{u^{\frac{n}{n-2}}}{x_\nu x^\nu}$$

выбрав β_μ так,что $\beta_\nu \beta^\nu = \beta_0^2 - \beta_a^2 = 0$,получаем следующее решение

уравнения /нелинейного/ /I.5/

$$\begin{cases} u = \left\{ \frac{1}{8}(n-2) \ln \left[\frac{\beta_\nu x^\nu}{x_\nu x^\nu} \right] + C \right\}^{\frac{2-n}{2}} ; \quad \beta_\mu, C \subset \mathbb{R}^1 \\ \beta_\nu \beta^\nu = 0 \end{cases}$$

§2. Конформная инвариантность одного класса нелинейных "волновых" уравнений.

Задача теоретико -групповой классификации уравнений второго порядка инвариантных относительно алгебры Пуанкаре $\mathcal{P}(1,n-1)$ полностью еще не решена. Нам удалось ,используя метод Ли-Овсянникова, выделить следующий класс Пуанкаре-инвариантных уравнений второго порядка:

$$F(u, u_\nu u^\nu, u_{\mu\nu} u^\mu u^\nu, u_{\mu\nu} u^{\mu\nu}, \Box u) = 0 \qquad /2.1/$$

Здесь: $u^\alpha = g^{\alpha\beta} u_{x_\beta}$,по повторяющимся индексампредполагается суммирование; $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^1$

В случае,если размерность пространства независимых переменных $n = 2$ класс /2.I/ исчерпывает все пуанкаре-инвариантные уравнения 2 порядк

Очевидно,наиболее общим квазилинейным уравнением вида /2.I/ будет:

$$\varphi(u, u_\nu u^\nu) \Box u + \psi(u, u_\nu u^\nu) u_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + f(u, u_\nu u^\nu) = 0 \qquad /2.2/$$

Верна следующая

<u>Теорема 2.I</u> Уравнение /2.2/ инвариантно относительно алгебры вида:

$$(i)\ P_\mu = i g^{\mu\nu}\partial_\nu;$$
$$(ii)\ J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu;$$
$$(iii)\ D = x_\nu p^\nu + \frac{1}{2}A(u)\, i\partial_u; \qquad /2.3/$$
$$(iv)\ K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu.$$

$\Rightarrow$ A. $\varphi \equiv 1,\ \psi = (n-2)(u_\nu u^\nu)^{-1},\ f = g(u),\ A(u) = 0$

или B. $\varphi \equiv 1,\ f = -\left(A'(u)/A(u) + (n-2)/A(u)\right) + \lambda A(u)\exp\left(-4\int \frac{du}{A(u)}\right);\ \psi = 0$

доказательство проводим ,используя алгоритм Ли-Овсянникова.

Для определения φ, ψ, f получаем следующую систему:

$$(A'-4)x_0\psi + (2A'-4)x_0\psi_{z_3}z_3 + (3A'-8)x_0\psi + A\cdot\psi_u + 2Au_0\psi_{z_3} = 0,$$
$$(A'-4)x_0 f + A'' z_3 x_0 + (2A' + 2(n-2))u_0 + 2(A'-1)u_0\psi_{z_3} +$$
$$A'' x_0 z_3^2\psi + 2A\psi u_{0\nu}u^\nu + f_{z_3}(2A'-4)x_0 z_3 + 2Au_0 f_{z_3} + f_u\cdot A\cdot x_0 = 0,$$

здесь: $z_1 = \Box u;\ z_2 = u_{\mu\nu}u^\mu u^\nu;\ z_3 = u_\nu u^\nu.$

Решая эти уравнения получаем формулы /2.4.A,B/

Замечание: Случай /2.4 B/ подробно изучен в / ,стр. 59-63/

В заключение приведем точные решения уравнения
$$u_\nu u^\nu \Box u + (n-2)u_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + f(u)(u_\nu u^\nu)^2 = 0$$
полученные,упомянутом в §I методом. $f(u)$ -произвольная функция

$1^\circ\ u = \varphi\left(\frac{\beta_\nu x^\nu}{x_\nu x^\nu}\right),\ \beta_\nu\beta^\nu = 0,\ \varphi: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ -произвольная функция.

$2^\circ\ u = \varphi(\alpha_\nu x^\nu),\ \alpha_\nu\alpha^\nu = 0,\ \varphi: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ - " -

/Это решение типа "бегущей волны" в n-мерном пространстве/.

$3^\circ\ x_\nu x^\nu = 3\int\left[\int f(u)du\right]^{-1}du$ /здесь $u = u(x_\nu x^\nu)$ задаётся неявно/

Главной целью этого параграфа является изложение доказательства следующего утверждения:

<u>Теорема 2.2</u> :

Уравнение $u_{\mu\nu}u^{\mu\nu} = F(u, u_\nu u^\nu, u_{\mu\nu}u^\mu u^\nu, \Box u)$ /2.9/

инвариантно относительно алгебры /2.3/ с $A(u) \equiv 2u$

$$\Leftrightarrow F = \frac{1}{n}(\Box u)^2 + u^{-2}\varphi(2u\Box u - n u_\nu u^\nu) \qquad /2.6/$$

$\varphi: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ -произвольная функция, n -размерность пространства независимых переменных.

Доказательство проводится методом Ли-Овсянникова.

Для определенеия F получаем следующую систему ДУЧП:

$$F_{z_3} = 0; \quad 4F - 2z_2 F_{z_2} + 2uF_u = 0;$$

$$4uF_{z_1} + 2nF_{z_2} + 4z_2 = 0.$$

Здесь: $z_1 = u_\nu u^\nu$; $z_2 = \Box u$; $z_3 = u_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$; $z_4 = u_{\mu\nu} u^{\mu\nu}$.

Решая эти уравнения, получаем /2.6/, что и завершает доказательство.

Замечание: В процессе доказательства теоремы было замечено, что уравнение вида: $u_{\mu\nu} u^{\mu\nu} + \varphi(u) u_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = f(u, u_\nu u^\nu, \Box u)$

заменой $w = \exp\left\{2\int\frac{du}{\alpha(u)}\right\}$, $\alpha(u) = 4\exp\left\{-\int\varphi(u)du\right\}\left[\int\exp\left\{\int\varphi(u)du\right\}du\right]$

можно привести к виду :

$$w_{\mu\nu} w^{\mu\nu} = \tilde{f}(w, w_\nu w^\nu, \Box u)$$

В справедливости этого утверждения можно убедиться прямой проверкой.

Для того, чтобы провести теоретико-групповую классификацию уравнений вида:

$$n u_{\mu\nu} u^{\mu\nu} - (\Box u)^2 = u^{-2} \varphi(2u\Box u - n u_\nu u^\nu) \qquad /2.6'/$$

нам понадобится следующая:

Лемма:

$$n u_{\mu\nu} u^{\mu\nu} - (\Box u)^2 = 0 \qquad /2.6''/$$

Максимальной алгеброй инвариантности уравнения /2.6''/ будет следующая 22 - параметрическая алгебра Ли:

$$\left.\begin{aligned}
&(i)\ P_\mu = ig^{\mu\nu}\partial_\nu;\\
&(ii)\ J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu;\\
&(iii)\ D = x_\nu p^\nu + iu\partial_u;\\
&(iv)\ K_\mu = 2x_\mu D - (x_\nu x^\nu)p_\mu;
\end{aligned}\right\} C(1, n-1)$$

$(v)\ I = u\partial_u;$ $\qquad\qquad \mu,\nu = \overline{0, n-1}$

$(vi)\ Q_\mu = x_\mu \partial_u;$

$(vii)\ Q = x_\nu x^\nu \partial_u;$

$(viii)\ T = \partial_u.$

Доказательство проводится применением алгоритма Ли-Овсянникова

Учитывая тот факт, что максимальной алгеброй инвариантности уравнения: $2u\Box u - n u_\nu u^\nu = Const$ будет $C(1,n-1)$ мы получаем, что /2.6/ инвариантно относительно /I/–/УП/ $\Leftrightarrow$ $\varphi = 0$. Кроме того ясно, что $C(1,n-1)$ будет максимальной алгеброй симметрии при произвольной $\varphi: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$.

Если же мы потребуем инвариантности относительно $\{C(1,n-1)\} \oplus \{I\}$, то $\varphi(z) = \lambda z^2$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$

Резюмируем вышесказанное в виде теоремы:

Теорема 3:

Максимальной алгеброй инвариантности уравнения $/2,6'/$ будет

(1) $C(1,n-1)$ если $\varphi: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ –произвольная функция;

(2) $\{C(1,n-1)\} \oplus \{I\}$, если $\varphi(z) = \lambda z^2$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$.

(3) $\{C(1,n-1)\} \oplus \{I, Q_r, Q, T\}$, $\varphi \equiv 0$ ⌋

Интересно отметить, что при n= 2 уравнение $/2.6''/$ можно проинтегрировать в замкнутом виде. Общее решение будет иметь вид:

$$u_1 = f^1(x_0+x_1)(x_0-x_1) + g^1(x_0+x_1) \quad \text{либо}$$
$$u_2 = f^2(x_0-x_1)(x_0+x_1) + g^2(x_0-x_1)$$

где $f^i, g^i: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ –произвольны $C^2(\mathbb{R}^1)$ –функции.

Для доказательства заметим, что при замене:

$$\xi = x_0 + x_1, \quad \eta = x_0 - x_1$$

уравнение $/2.6''/$ при n =2 переходит в :

$$u_{\xi\xi} \cdot u_{\eta\eta} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{немедленно следует}$$

§3. Теоретико-групповой анализ уравнения Клейна-Гордона со взаимодействием.

Рассматриваем комплексное скалярное поле, описываемое уравнением Клейна-Гордона:

$$\begin{cases} \Box u = m^2 u, \\ \Box u^* = m^2 u^*. \end{cases} \qquad /3.1/$$

Хорошо известно /см.например / 1 гл.I,§3/ /что уравнение поля /3.I/ мы можем получить используя вариационный принцип Эйлера-Лагранжа из следующего лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} - m^2 \varphi^* \varphi, \qquad /3.2/$$

В каждом физическом процессе должны выполняться те или иные законы сохранения,например закон сохранения электрического заряда и т.п. Это обстоятельство накладывает вполне определенные ограничения на структуру лагранжиана /3.2/. В частности,закон сохранения электрического заряда требует,чтобы соответствующий лагранжиан допускал одновременные фазовые преобразования комплексно-сопряженных полевых функций,описывающих заряженные частицы:

$$u \to u' \cdot e^{i\theta}, \quad u^{*\prime} \to u e^{-i\theta}, \qquad /3.3/$$

/очевидно,что лагранжиан /3.2/ удовлетворяет этому условию/

В теории взаимодействующих полей важную роль играют преобразования полей,зависящие не от настоящихпараметров,а от параметров, являющихся функциями координат . Т.е. жедательна была бы инвариантность лагранжиана /3.2/ относительно локальных фазовых преобразований вида:

$$u \to e^{i\alpha(x)\cdot e} \cdot u, \quad u^{*\prime} \to e^{-i\alpha(x)\cdot e} u^*. \qquad /3.4/$$

С физической точки зрения инвариантность относительно градиентного преобразования /см.Паули / 10 / /,сооветствует тому,что только выражения билинейные,по и ,и* являются физически измеримыми величинами.

Т.к. при преобразованиях /3.4/:

$$u_{x^\nu} \to e^{ie\alpha(x)} \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} + ie \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x^\nu}\right] u$$

то,чтобы лагранжиан оставался инвариантным,вводят дополнительное векторное поле,преобразующееся одновременно с /3.4/ так,чтобы его преобразование компенсировало бы изменение лагранжиана под влиянием /3.4/. Этого можно достичь введением ковариантных производных/"удлиненных"/:

$$i\frac{\partial}{\partial x^\nu} \to i\frac{\partial}{\partial x^\nu} + eA^\nu, \qquad /3.5/$$

при условии, что закон преобразования поля А имеет вид:

$$A^\nu \to A^\nu + \alpha_{x^\nu}(x) \qquad /3.6/$$

Константа e может быть отождествлена с зарядом, а векторное поле – с электромагнитным полем. Взаимодействие, введенное с помощью ковариантных производных называют минимальным электромагнитным взаимодействием.

В этом параграфе излагается полное решение задачи нахождения максимальной алгебры инвариантности /МАИ/ уравнения Клейна-Гордона со взаимодействием:

$$\pi_\mu \pi^\mu u = (p_\mu + ieA_\mu)(p^\mu + ieA^\mu)u = 0 \qquad /3.7/$$

$$\Leftrightarrow \Box u + eu\partial_\mu A^\mu + 2eA^\mu u_\mu + e^2 A_\mu A^\mu u = 0 \qquad /3.7/$$

Исследованию уравнения /3.7/ посвящен ряд работ, в частности /20/ посвящена выводу уравнения безмассовой частицы с учетом взаимодействия с внешним электромагнитным полем из симметрии поля /имеется в виду релятиввистская инвариантность/в рамках теоретико-групповой методики. В результате было получено уравнение вида /3.7/

В работе /24/ была проведена теоретико- групповая классификация уравнения /3.7/, были найдены все $A^\mu(x)$, такие, что /3.7/ является инвариантным относительно группы Пуанкаре / /1.3/ или ее подгрупп.

Заметим, что /3.7/ получено из уравнения Клейна-Гордона с $m = 0$, путем введения в соответствии с /3.5/ "удлиненной" производной.

Принципиальным отличием нашего подхода является то, что мы рассматриваем функции A^μ как <u>независимые</u> /обычно *a priori* считалось, что $A^\mu = A^\mu(x)$/. В этом случае симметрия уравнения /3.7/ существенно богаче, чеми исследуемая в /   ,   / алгебра Пуанкаре $\mathcal{P}$/I.3/.

Наряду с /3.7/ мы рассмотрим его непосредственное обобщение

$$\Box u + Bu\partial_\nu A^\nu + CA^\nu u_\nu + DA_\nu A^\nu u = 0. \qquad /3.8/$$

Для уравнения /3.8/ верна следующая классификационная:

Т<u>еорема</u> I:

Максимальной алгеброй инвариантности уравнения /3.8/ является:

I. $D=0$, (1) $C\cdot B \neq 0$, $\{C(1,n-1)\} \oplus \{I = u\partial_u\} \oplus \{Q = \lambda^\mu(x) u^{-C/B} \partial_{A^\mu}\}$

$\lambda^\mu(x)$ - произвольные функции, удовлетв. условно: $\partial_\nu \lambda^\nu(x) = 0$ /3.9/

$\ell = 2(n-2)(2B-C)/C^2$; $k = -(n-2)B/C$.

/ℓ, k - опред. вид $C(1,n-1)$, см. ниже/

(2) $C=0, B\neq 0$; $\{\tilde{\mathcal{P}}(1,n-1), Q = -\frac{2}{B} a_{x^\mu}(x) u \partial_{A^\mu} + a(x) u\partial_u, Q = \lambda^\mu(x)\partial_{A^\mu}\}$

где $\lambda^\mu(x)$ - произвольные функции, удовлетворяющие /3.9/,

$a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — произвольная функция: $\Box a = 0$.

(3) $C\neq 0, B=0$: $\{C(1,n-1), I = u\partial_u\}$

$\ell = -2(n-2)/C$, $k=0$.

II. $D\neq 0$, (1) $C^2 - 4D \neq 0$: $\{C(1,n-1); I = u\partial_u\}$

$\ell = 2(n-2)(2B-C)/(C^2-4D)$, $k = -(n-2)(2D-BC)/(4D-C^2)$.

(2) $C^2-4D=0$, $2B-C\neq 0$ либо $2D-BC\neq 0$;

$\{\tilde{\mathcal{P}}(1,n-1); Q = Ca(x)u\partial_u - 2a_{x^\mu}(x)\partial_{A^\mu}\}$

$a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ - произвольная функция.

(3) $C = 2e$, $D = e^2$, $B = e$.

$\{C(1,n-1); Q = e a(x) u\partial_u - a_{x^\mu}(x)\partial_{A^\mu}\}$

$a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ - произвольная функция.

$2k + \ell\cdot e = 2-n$.

(4) $B = C = 0$,

$\{\tilde{\mathcal{P}}(1,n-1), Q = T^{\mu\nu}(x,A,u)A^\nu\partial_{A^\mu}\}$

$T^{\mu\nu}$ – произвольный антисимметрический тензор второго ранга, т.е.
$$T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}, \quad 0 \le \mu, \nu \le n-1$$

Алгебра $C(1, n-1)$ имеет следующее представление:

(i) $P_\mu = i g^{\mu\nu} \partial_\nu$;

(ii) $J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}$;

(iii) $D = x_\nu p^\nu - A_\nu p^{A\nu} + iku\,\partial_u$;

(iv) $K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu + 2S_{\mu\nu} x^\nu + \ell p_{A^\mu}$.

Матрицы $S_{\mu\nu}$ реализуют представление $D(\frac{1}{2}) \oplus D(\frac{1}{2})$

Алгебра $\tilde{P}(1, n-1)$ определяется операторами (i) – (iii) из /3.10/

Доказательство проводим по методу Ли-Овсянникова, для нахождения коэффициентов инфинитезимального оператора
$X = \xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta^\mu(x, u, A)\partial_{A^\mu} + \eta\,\partial_u$ получаем систему ДУЧП:

$$\xi_\mu = -b_\mu x_\nu x^\nu + 2x_\mu b_\nu x^\nu + C_{\mu\nu} x^\nu + C_{oo} x_\mu + d_\mu; \quad \mu = \overline{0, n-1}$$
$$\eta^\beta g^{\beta\mu} = -\left[g^{\mu\nu}(2b_\nu x^\nu + C_{oo}) + 2(b_\mu x^\nu - b_\nu x^\mu) + C_{\mu\nu}\right]A^\nu + a^\beta g^{\beta\mu};$$
$$C a^\mu + B a^\mu_u \cdot u + 2b_{x_\mu} + 2(n-2)b^\mu = 0;$$
$$2Da^\mu + \qquad C b_{x_\mu} + 2(n-2)b^\mu B = 0;$$
$$B\partial_\nu a^\nu + \Box b(x) = 0, \qquad b^\mu = g^{\mu\nu} b_\nu; \quad \mu = \overline{0, n-1}.$$

Решая эту систему, мы получаем утверждение теоремы I

Замечание I: Отметим, что в результате мы получим новое представление алгебры $C(1, n-1)$, которое является бесконечномерным, в отличие от уже известного представления $c\, K_\mu' = K_\mu|_{\ell=0}$.
Таким образом, добавка ℓp_{A^μ} к оператору K_μ играет весьма существенную роль.

<u>Замечание 2</u>: Уравнение /3.7 / является частным случаем уравнения /3.8/ и его симметрия описывается случаем II.3 теоремы I. Интересно отметить, что среди всех уравнений /3.8/ уравнение/3.7 /, имеющее вполне определенный физический смысл, обладает наиболее высокой симметрией. Заметим так же, что конечное преобразования, порождаемые оператором $Q = e\,a(x)u\,\partial_u - a_{x^\mu}(x)\partial_{A^\mu}$,

имеют вид:

$$\begin{cases} x^{\mu\prime} = x^{\mu}, \\ u' = u\cdot \exp\{\theta\cdot e\, a(x)\}, \\ A^{\mu\prime} = A^{\mu} - \theta\cdot a_{x^{\mu}}(x). \end{cases}$$

где $\theta \in \mathbb{R}^1$ –групповой параметр, что вполне соответствует преобразованиям /3.4/,/3.5/.Это говорит о том,что в физических процессах,описываемых уравнением /3.7 / выполняется /локально/ закон сохранения заряда.

В заключение приведем явный вид матриц $S_{\mu\nu}$,при n= 4,наиболее используемой в литературе /   /.

$$S_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Приведем ряд классификационных теорем связанных с рассматриваемым уравнением /3.7 /.

Теорема 2:

Максимальной алгеброй инвариантности уравнения:

$$\pi_{\mu}\pi^{\mu}u + F(u, A) = 0 \qquad /3.11/$$

будет:

/1/ алгебра $C(1, n-1)$ вида /3.10/ с $\ell = -e^{-1}[2\varkappa + (n-2)]$ (*)

$\Leftrightarrow F = \lambda\, u^{\frac{\varkappa-2}{\varkappa}}$; $\lambda, \varkappa \in \mathbb{R}^1, \varkappa \neq 0$.

/2/ алгебра $C(1, n-1)$ вида /3.10/ с $\ell = 0$

$\Leftrightarrow F(u, A) = u^{\frac{n+2}{n-2}}\varphi(A_{\nu}A^{\nu}\cdot u^{-\frac{4}{n-2}})$, $n > 2$

где $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ –произвольная функция.

Доказательство,проводимое по методу Ли-Овсянникова,достаточно громоздко,поэтому мы его опускаем.

Интересно отметить, что результат, доказанный в / 4 / /см. §I /, является частным случаем доказанной теоремы, т.к. при $l \to 0,\ \Pi_\mu = \partial_\mu + eA^\mu \to \partial_\mu \Rightarrow \Pi_\mu \Pi^\mu \to \Box$, кроме того $l \to 0 \Rightarrow \varkappa \to \frac{n+2}{n-2} \Rightarrow$ следует это замечание. Кроме того, если в /2/ выбрать

$$\varphi(z) = -e^2 z$$

то /3.II/ кроме $C(1,n-1)$ будет допускать дополнительно бесконечномерную алгебру Ли операторов вида:

$$\{Q = \lambda^\mu(x)\, u^{-c/b}\, \partial_{A^\mu}\},\quad \lambda^\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$$

удовлетворяет/3.9/

Непосредственным обобщением этой теоремы является:

<u>Теорема 3:</u>

Уравнение $\Pi_\mu \Pi^\mu u + F(x, A, u) = 0$ /3.I2/

инвариантно относительно подалгебры $C(1,n-1) \supset \{K_\mu, J_{\mu\nu}\}$ алгебры $C(1,n-1)$ $(F_{x^\mu} \neq 0) \iff F = u^{\frac{n+2}{n-2}}\, \varphi(x_\nu x^\nu u^{\frac{2}{n-2}},\ A_\nu A^\nu u^{\frac{4}{n-2}})$

где $\varphi : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ -произвольная функция, $C(1,n-1)$ вида /3.I0/

$$l = 0,\quad k = \frac{2-n}{2}$$

Доказательство проводится методом Ли-Овсянникова, мы его опускаем.

Если мы потребуем инвариантности /3.I2/ относительно $C(1,n-1)$ $\Rightarrow \varphi_{x^\mu} = 0 \Rightarrow F = u^{\frac{n+2}{n-2}}\, \tilde\varphi(A_\nu A^\nu u^{\frac{4}{2-n}})$, т.е. получили теорему 2,/2/.

Рассматрим теперь уравнение Клейна-Гордона со взаимодействием в случае, если $m \neq 0$:

$$\Pi_\mu \Pi^\mu u + f(m)\, u = 0 \qquad /3.13/$$

Мы считаем, что m - является еще одной независимой переменной, т.е.

$$\begin{cases} u = u(x,m) \\ A^\mu = A^\mu(x,m) \end{cases}$$

Тогда имеет место следующее:

<u>Предложение</u>:

Максимальной алгеброй инвариантности уравнения /3.I3/ будет :

(a) $f(m) = \mathrm{Const} : \{\tilde P(1,n-1);\ I = u\partial_u;\ Q = ea(x)\, u\partial_u - a_{x^\mu}(x)\, \partial_{A^\mu}\}$,

$a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ – произвольная функция,

$\tilde{\mathcal{P}}(1,n-1)$ вида (i)-(iii) из /3.10/ и $D = x_\nu p^\nu - A_\mu p^{A\mu}$,

в) $f'(m) \neq Const$, $\{\tilde{\mathcal{P}}(1,n-1);\ I = u\partial_u;\ Q = ea(x)u\partial_u - a_{x^\mu}(x)\partial_{A^\mu}\}$

$a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ произвольная функция,

$\mathcal{P}(1,n-1)$ вида (i)-(iii) из /3.10/ и $D = x_\nu p^\nu - A_\nu p^{A\nu} - 2\frac{f(m)}{f'(m)} i\partial_m$

Замечание: Для того, чтобы сохранить конформную инвариантность необходимо вместо /3.13/ рассматривать

$$\pi_\mu \pi^\mu u + f(m) u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0,$$

тогда максимальной алгеброй инвариантности этого уравнения будет

(i) $C(1,n-1)$ вида (3.10)

(ii) $\check{I} = u\partial_u - \frac{4}{n-2}\frac{f(m)}{f'(m)} i\partial_m$ $(f'(m) \neq 0)$.

До сих пор мы рассматривали лишь действительные поля $u(x)$. Для полноты картины важно изучить и случай комплексного поля $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^1$, $u = u_{Re} + i u_{Im}$. Тогда уравнение описывающее это поле необходимо рассматривать вместе с его сопряжённым $\Rightarrow$ имеем систему:

$$\begin{cases} \pi_\mu \pi^\mu u + F^1(A,u,u^*) = 0, \\ \pi_\mu \pi^\mu u^* + F^2(A,u,u^*) = 0, \quad u^* = u_{Re} - i u_{Im} \end{cases} \qquad /3.14/$$

Докажем следующую:

Теорема 4:

Уравнение /3.14/ инвариантно относительно /1/ алгебры

/1/ $\mathcal{P}(1,n-1)$ в следующем представлении:

(i) $P_\mu = i g^{\mu\nu}\partial_\nu$;

(ii) $J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}$

(iii) $D = x_\nu p^\nu - A_\nu p^{A\nu} + imu\partial_u$, $m \in \mathbb{R}^1$

$$\Leftrightarrow F^1(A,u,u^*) = (F^2(A,u,u^*))^* = u|u|^{-\frac{2}{m}} F\left(A_\nu A^\nu (uu^*)^{\frac{1}{m}}, \frac{u}{u^*}\right)$$

где $|u|^2 = uu^*$, $F: \mathbb{R}^1 \times \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1$ –произвольная функция.

/2/ алгебры $C(1,n-1)$ в представлении /3.10/ с $\ell = 0$, $k = \frac{2-n}{2}$.

$$\Leftrightarrow F^1(A,u,u^*) = (F^2(A,u,u^*))^* = u|u|^{\frac{4}{n-2}} F\left(A_\nu A^\nu |u|^{-\frac{4}{n-2}}, \frac{u}{u^*}\right).$$

где $F: \mathbb{R}^1 \times \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1$ –произвольная функция.

/3/ $C(1,n-1)\oplus O(1,1)$,

где $C(1,n-1)$ реализует представление /3.I0/; $l=0$, $k=\frac{2-n}{2}$,

$O(1,1)$ -одномерная алгебра Ли $Q = u\partial_{u^*} + u^*\partial_u$

$\Longleftrightarrow\ F^1(A,u,u^*) = \{F^2(A,u,u^*)\}^* = uA_\nu A^\nu \varphi[(A_\nu A^\nu)^{\frac{2-n}{2}}\cdot(u^2-u^{*2})]$.

Доказательство проводится методом Ли-Овсянникова, мы его опускаем.

Заметим, что наличие дополнительной / 0 /I,I/ / симметрии имеетважный физический смысл, так как она означает, что физический процесс, описываемый системой /3.I4/ инвариантен относительно вращений:
$$\begin{cases} u^{*\prime} = u^*\cos\alpha - u\sin\alpha \\ u' = u\cos\alpha + u^*\sin\alpha \end{cases} \qquad (*)$$
$$\begin{cases} u^{*\prime} = u^*\operatorname{ch}\alpha + u\operatorname{sh}\alpha \\ u' = u\operatorname{ch}\alpha + u^*\operatorname{sh}\alpha \end{cases} \qquad (**)$$

в фиктивном изотопическом пространстве $/u,u^*/$ $\Rightarrow$ следовательно процесс взаимодействия частицы с внешним полем, описываемый уравнением /3.I4/ с из /3/ являлется изотопически инвариантным. /Выбор $(*)$ или $(**)$ определяется выбром алгебры 0 /I,I/ либо 0 /2/ , соответственно в /3/ будет меняться знак:

$F^1 = uA_\nu A^\nu \varphi[(A_\nu A^\nu)^{\frac{2-n}{2}}(u^2-u^{*2})]$ / $O(1,1)$ -симметрия/.

$F^1 = uA_\nu A^\nu \varphi[(A_\nu A^\nu)^{\frac{2-n}{2}}(u^2+u^{*2})]$ / $O(2)$ -симметрия./

Если мы теперь рассмотрим систему:
$$\Pi_\mu\Pi^\mu\vec{\Psi} + A_\nu A^\nu F[(A_\nu A^\nu)^{\frac{2-n}{2}}(\Psi_1^2+\Psi_2^2+\Psi_3^2)]A_\nu A^\nu\vec{\Psi} = 0 \qquad /3.I5/$$

$\vec{\Psi} = (u,u^*,\varphi)$, φ -описывает некоторое действ. скалярное поле; то методом Ли-Овсянникова можно доказать, что система /3.I5/ инвариантна относительно $\{C(1,n-1)\}\oplus\{O(3)\}$

где $C(1,n-1)$ реализует следующее представление:

(i) $P_\mu = ig^{\mu\nu}\partial_\nu$;

(ii) $J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}$;

(iii) $D = x_\mu p^\mu - A_\nu p^{A_\nu} + \frac{2-n}{2}i\{u\partial_u + u^*\partial_{u^*} + \varphi\partial_\varphi\}$

(iv) $K_\mu = 2x_\mu D - (x_\nu x^\nu)p_\mu + 2S_{\mu\nu}x^\nu$.

а алгебра 0/3/:

$$
\begin{aligned}
&(i)\,Q_1 = \varphi\partial_u - u\partial_\varphi ;\\
&(ii)\,Q_2 = \varphi\partial_{u^*} - u^*\partial_\varphi ;\\
&(iii)\,Q_3 = u\partial_{u^*} - u^*\partial_u .
\end{aligned}
\qquad /3.16/
$$

$F : \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1$ –произвольная функция .

/3.I6/–представляет собой трехмерную группу вращений в фиктивном изотоническом пространстве $(u, u^*, \varphi) = \vec{\varphi}$,так называемых изотонических векторов.Мы можем интерпретировать систему /3.15/, как ДУ описывающие процесс взаимодействия триплета псевдоскалярных пионов π^+, π^0, π^-,

причем $u^* \to \pi^-$ /отрицательная чстица/,

$u \to \pi^+$ /положительная частица/

$\varphi \to \pi^0$ /нейтральная частица.

Операция комплексного сопряжения означает переход от + частицы к – частице и наоборот. Т.к. $\varphi^* = \varphi \Rightarrow$

φ –нейтральная частица /см. / 1, Приложение № Б/ /

Инвариантность относительно вращений в изотоническом пространстве физически соответствует равноправию частиц внутри мультиплета.Это свойство справедливо для сильных /ядерных/ взаимодействий.

§4. Теоретико-групповое исследование уравнения эйконала со взаимодействием.

Хорошо известно /см.например / / /,что.уравнение эйконала

$$u_0^2 - \sum_{a=1}^{n-1} u_a^2 = u_\nu u^\nu = 0, \qquad /4.I/$$

которое являетcя основным уравнением геометрической оптики,обладает очень высокой симметрией,а именно максимальная алгебра инвариантности, это :

(i) $P_\mu = C_\mu(u)\, i g^{\mu\nu}\partial_\nu$;

(ii) $J_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}(u)\,[x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu]$;

(iii) $K_\mu = B_\mu(u)\{2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu\}$;

(iv) $D = C_{00}(u)\, x_\nu p^\nu$;

(v) $\hat{I} = \eta(u)\,\partial u$

где $C_\mu, C_{\mu\nu}, B_\mu, C_{00}, \eta$ произвольные функции аргумента u

Поэтому представляет интерес введение в уравнение /4.I/ некого "взаимодействия" с внешним полем A^μ и исследование симметрии такого уравнения. Эта задача будет полностью решена в следующей теореме:

Теорема I : $(\pi_\mu u)(\pi_\mu u) = 0,\ u_\nu u^\nu + 2eA^\nu u_\nu + e^2 A_\nu A^\nu = 0,$ /4.2/

или $u_\nu u^\nu + CA^\nu u_\nu + DA_\nu A^\nu = 0,$ /4.3/

Максимальной алгеброй инвариантности уравнения /4.3/ будет:

/I/ $C^2 = 4D \neq 0.$

(i) $C(1,n-1)$ в представлении /3.I0/; $\ell = 0,\ k = \frac{2-n}{2}$

(ii) $Q = \{\varphi_u(x,u)A^\mu - e^{-1}\varphi_{x_\mu}(x,u)\}\partial_{A^\mu} + \varphi(x,u)\partial_u$.

$\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ – произвольная C^1 -функция.

/2/ $C^2 \neq 4D,\ C \neq 0$

(i) $Q = \varphi(u)\partial_u + \varphi_u(u)A^\mu\partial_{A^\mu}$

(ii) $C(1,n-1)$ в представлении /3.I0/; $\ell = 0,\ k = \frac{2-n}{2}$.

/3/ $C^2 \neq 4D,\ C = 0.$

(i) $C(1,n-1)$ в пре̃дставлении /3.I0/, $\ell = 0,\ k = \frac{2-n}{2}$.

(ii) $Q = \varphi(u)\partial_u + \varphi_u A^\mu\partial_{A^\mu}$;

(iii) $Q = T^{\mu\nu}(x,u,A)A^\nu\partial_{A^\mu}$.

$T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu},\quad 0 \le \mu,\nu \le n-1$; $\varphi: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ – произвольная ф.

Замечание: Вновь ,как и в теореме 3.I среди уравнений /4.3/ наи

более высокой симметрией обладает уравнение $(\pi_\mu \varphi)(\pi^\mu \varphi) = 0$.
Если в /I/ положить $\varphi_u = 0 \Rightarrow Q = e^{-1}\varphi_{x_\mu}\partial_{A^\mu} - \varphi(x)\partial_u$.
который порождает следующую группу преобразований:

$$\begin{cases} A^{\mu\prime} = A^\mu + \theta_1 \cdot e^{-1}\varphi_{x_\mu}(x) \\ u' = u - \theta_1 \varphi(x) \quad , \qquad \theta_1 \in \mathbb{R}^1 \end{cases} \qquad /4.4/$$

Если же мы рассмотрим $\varphi(x,u) = f(x)\cdot u$
то соответствующий оператор $Q = (f(x)A^\mu - e^{-1}f_{x_\mu}(x)u)\partial_{A^\mu} + f(x)u\partial_u$

будет порождать следующие преобразования:

$$\begin{cases} A^{\mu\prime} = \{\theta_2 e^{-1} f_{x_\mu}(x)\cdot u + A^\mu\} e^{\theta_2 f(x)} \\ u' = u e^{\theta_2 f(x)} \quad , \qquad \theta_2 \in \mathbb{R}^1 \end{cases} \qquad /4.5/$$

Тогда используя тривиальное частное решение уравнения /4.2/

$$\begin{cases} u = \varphi(\alpha_\nu x^\nu / x_\nu x^\nu), \quad \alpha_\nu \alpha^\nu = 0 \\ A^\mu = 0 \end{cases}$$

, где $\varphi: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ - произвольная функция, /в том, что это действительно решение можно убедиться непосредственной проверкой/, мы посредством формул /4.4/,/4.5/ можем получить набор решений уравнения /4.2/, зависящий от 2 /!/ произвольных функций. Этот результат сам по себе довольно впечатляет. Нам кажется, что это довольно эффектный пример использования методов теории групп Ли применительно к решению ДУЧП.

В заключение отметим, что /4.5/ выражает инвариантность уравнения /4.2/ относительно градиентных преобразований, т.е. имеет место "закон сохранения заряда", правда в более сложной форме, чем это было для уравнения /3,7 /.

§5. Групповой анализ некоторых нелинейных уравнений элетродинамики.

Рассматриваем следующее нелинейное обобщение уравнений

Максвелла записанных в потенциалах:

$$\Box A^{\alpha} = \varphi^1(\partial_\nu A^\nu, A_\nu A^\nu) A^\nu_{\nu\alpha} + \varphi^2(\partial_\nu A^\nu, A_\nu A^\nu) A^\nu A_{\nu\alpha} + \varphi^3(\partial_\nu A^\nu, A_\nu A^\nu) A^\alpha, \quad \alpha = \overline{0,3} \qquad /5.1/$$

Верна следующая теорема:

Теорема I.

Система уравнений /5.I/ инварианта относительно алгебры $C(1, n-1)$ вида $\Longleftrightarrow$

(1) $k=0,\ \ell=0:\ F^1 \equiv 1,\ F^2 \equiv 0,\ F^3 \equiv \lambda A_\nu A^\nu,\ \lambda \in R^1.$

(2) $k=0,\ \ell = -\frac{2}{e},\ F^1 \equiv 1,\ F^2 \equiv 0,\ F^3 = \lambda(\partial_\nu A^\nu - e A_\nu A^\nu),\ \lambda, e \in R^1, e \neq 0.$

Доказательство проводим по алгоритму Ли-Овсянникова.

В / 18 / было установлено, что система уравнений

$$\begin{cases} \Box A^{\alpha} = \partial^\alpha \partial_\nu A^\nu \\ \partial_\mu \Box A^\mu = 0 \end{cases} \qquad /5.2/$$

инвариантна относительно конформных преобразований алгебры $C(1, n-1)$. Вместо системы /5.2/ мы рассмотрим более общую, а имнно:

$$\begin{cases} \Box A^{\alpha} = \partial^\alpha \partial_\nu A^\nu \\ \partial_\mu \Box^m A^\mu = 0, \quad m \in N \end{cases} \qquad /5.2'/$$

$\Box^1 = \partial_0^2 - \Delta_{n-1};\ \Box^{k+1} = \Box^k \cdot \Box,\ k \geq 1$

/при $m=1$ мы получим /5.2/ /. Для этого нам понадобится следующая:

Лемма I

Для того, чтобы уравнение $\partial_\mu \Box^m A^\mu = 0$, $m \in N$, $x = (x_0, x_1, \ldots x_{n-1})$, $n \in N$.

было инвариантно относительно конформной алгебры $C(1, n-1)$ вида /3.I0/ с $k=0,\ \ell=0$ необходимо, чтобы A^μ удовлетворяли системе уравнений "типа Максвелла".

$$\Box^{m-1}\{\Box A^\nu + \varphi(n,m)\partial^\nu \partial_\mu A^\mu\} = 0, \quad \nu = \overline{0, n-1} \qquad /5.3/$$

где $\varphi(n,m) = (2nm - 4m^2 - 8m)/(2(n-2))$,

Доказательство, проводимое по алгоритму Ли-Овсянникова, довольно громоздко и мы его опускаем.

Из леммы следует, что система /5.2 / будет конформно инвариантна $\Longleftrightarrow$ $\varphi(n,m) = -1$. Но для уравнений Максвелла $n=4 \Rightarrow \varphi(4,m) = -m^2 \Rightarrow m = 1$, /т.к. мы рассматриваем случай $m \in N$/. Следовательно мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 2:

Среди систем вида /5.2 / конформно инвариантной будет только система /5.2/, причем уравнения Максвелла являются необходимым условием конформной инвариантности уравнения:

$$\partial_\mu \Box A^\mu = 0.$$

Известно, что уравнение эйконала, являясь характеристическим уравнением для уравнения Даламбера, обладает в некотором смысле более богатой симметрией. Поэтому возникает вопрос: -выполнено ли это утверждение для векторных полей описываемых уравнениями Максвелла? Следующая теорема дает отрицательный ответ на этот вопрос.

<u>Теорема 3.</u>

Максимальной алгеброй инвариантности системы уравнений

$$\begin{cases} (A^0_{x_0})^2 - \sum\limits_{a=1}^{n-1} (A^0_{x_a})^2 = 0 \\ (A^b_{x_0})^2 - \sum\limits_{a=1}^{n-1} (A^b_{x_a})^2 = 0, \quad b = \overline{1,n-1}. \end{cases}$$

будет

(1) $C(1,n-1)$:

(i) $P_\mu = ig^{\mu\nu}\partial_\nu$;
(ii) $J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$;
(iii) $D = x_\nu p^\nu$;
(iv) $K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu$.

(2) $Q_\mu = \partial_{A^\mu}$, $\quad \mu = \overline{0,n-1}$.

$(3)\ \tilde{Q}_\mu = A^\mu \partial_\mu A^\mu$. / по μ - не суммировать /

Доказательство проводится по методу Ли-Овсянникова, мы его опускаем.

Как видим, симметрия системы /5.4/ "хуже", чем симметрия уравнений Максвелла, т.к. векторное поле преобразуется здесь, как скалярное поле/отсутствует "тасовка" компонент в операторах $\mathcal{J}_{\mu\nu}, \mathcal{K}_\mu$ /.

Перейдем теперь к исследованию закона сохранения энергии, который является следствием уравнений Максвелла.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2) + \lambda\, \mathrm{div}\,(\vec{E} \times \vec{H}) = 0,\ \lambda \in R^1,\ \lambda \neq 0, \qquad /5.5/$$

Здесь $\vec{E}^2 = (\vec{E}, \vec{E}),\ \vec{H}^2 = (\vec{H}, \vec{H})$.

Введем $x_0 = \lambda t \Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2) + \mathrm{div}\,(\vec{E} \times \vec{H}) = 0 \qquad /5.5'/$$

Важность этого уравнения вызвана тем, что, во-первых, оно является законом для всех физических процессов, описываемых уравнением Максвелла, во-вторых, в реальном физическом эксперименте мы не можем проверить непосредственно уравнения Максвелла, но зато можем проверить выполнение /5.5'/

В начале мы исследуем /5.5 / при дополнительном условии:

$(\vec{E}, \vec{H}) = 0$ т.е. $\vec{E} \perp \vec{H}$. Сразу же оговорим, что мы не ставим задачу исследовать инвариантность этого условия, относительно полученной алгебры. При выполнении этого условия можно считать, что:

$\vec{E} = (E, 0, 0),\quad \vec{H} = (0, H, 0)$ Тогда:

$$(5.5') \Rightarrow EE_0 + HH_0 + E_1 H + H_1 E = 0 \qquad /5.6/$$

Докажем следующее утверждение:

Теорема 4:

Уравнение /5.6/ допускает бесконечномерную алгебру Ли операторов $X = \xi^{\mu}(x)\partial_{\mu} + \eta(x,E,H)\partial_{E} + \zeta(x,E,H)\partial_{H}$,

причем
$$\begin{cases} \eta = \left(-\frac{1}{2}\xi^{1}_{1}\right)E + \left(\xi^{0}_{1} - \frac{1}{2}\xi^{1}_{0}\right)H; \\ \zeta = \left(-\frac{1}{2}\xi^{1}_{1}\right)H + \left(\frac{1}{2}\xi^{1}_{0}\right)E. \end{cases}$$

где $\xi^{\mu}(x)$ произвольные решения следующей системы ДУЧП:
$$\begin{cases} \xi^{0}_{0} = \xi^{1}_{1}; \\ \xi^{1}_{00} - \xi^{0}_{11} = \Box \xi^{0}_{1}. \end{cases}$$

Доказательство было проведено методом Ли-Овсянникова.

Замечание: Т.к. из $\xi^{0}_{1} = \xi^{0}_{1} \Rightarrow \xi^{1}_{00} - \xi^{0}_{11} = \Box \xi^{0}_{1}$,

то эта алгебра содержит конформную алгебру С/I,I/

вида:
$$\begin{aligned} &(i)\ P_{\mu} = i g^{\mu\nu}\partial_{\nu}; \\ &(ii)\ J_{\mu\nu} = x_{\mu}p_{\nu} - x_{\nu}p_{\mu}; \\ &(iii)\ D = x_{\nu}p^{\nu} - \tfrac{1}{2}(Ep_{E} + Hp_{H}); \\ &(iv)\ K_{\mu} = 2x_{\mu}D - x_{\nu}x^{\nu}p_{\mu} + 2S_{\mu\nu}x^{\nu};\quad p_{E} = i\frac{\partial}{\partial E},\ p_{H} = i\frac{\partial}{\partial H}. \end{aligned}$$

здесь: $S_{\mu\nu} = -S_{\nu\mu}$; $S_{01} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма:

Лемма 2:

Пусть $F(\underset{s}{u}) = 0$, $s \geq 1$ –

–система ДУЧП порядка s; $U = \{u : F(\underset{s}{u}) = 0\}$ –

– множество всех решений системы /5.7/.

$g(F)$ –алгебра симметрии /5.7/.

Рассмотрим далее систему $G(\underset{p}{u}) = 0$, $p \geq 1$ /5.8/

$V = \{u : G(\underset{p}{u}) = 0\}$, $g(G)$ –алгебра симметрии.

Предположим, что $U \subset V$ /*/

Утверждение: МАИ системы уравнений: /5.9/
$$\begin{cases} F(\underset{s}{u}) = 0, \\ G(\underset{p}{u}) = 0. \end{cases}$$

необходимо включать в себя алгебру $g(F)$

Доказательство:

Пусть $\{G_\alpha(F) | \alpha \in A\}$ -группы Ли порождаемые алгеброй $g(F)$. Они переводят решения /5.7/ в решения /5.7/. Но вследствие условия /*/ множество решений /5.7/ и /5.9/, совпадает $\Rightarrow \{G_\alpha(F) | \alpha \in A\}$ переводят решения /5.9/ в решения /5.9/ $\Rightarrow$ по опр. они являются допустимыми для системы /5.9/ $\Rightarrow$ МАИ /5.9/ содержит алгебру $g(F)$ $\lrcorner$

Этот простой факт дает возможность сделать полезный вывод. Т.к. уравнение /5.5/ является следствием уравнений Максвелла /т.е. на решениях системы Максвелла оно выполняется тождественно/, то множество его решений содержит в себе множество решений уравнений Максвелла. Следовательно выполнено утверждение леммы для системы следующего вида /мы рассматриваем уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме, в системе единиц Хевисайда, где $\hbar = c = 1$, см. [ ].

$$\vec{p} \times \vec{E} = i \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad \vec{p} \times \vec{H} = -i \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$
$$\vec{p} \cdot \vec{E} = 0; \quad \vec{p} \cdot \vec{H} = 0 \qquad /5.10/$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2) + \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = 0$$
$$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3): p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}.$$

Т.о. мы можем утверждать система /5.10/ инвариантна относительно конформной алгебры с/1.3/, конкретный вид которой указан в / 16 , стр.29/. Это утверждение особенно важно в связи с тем, что /5.5/ взятое в отдельности не является конформно инвариантным если мы потребуем конформной инвариантности , то необходимым условием будут выступать уравнения Максвелла. Следовательно, если в процессе изучения физического явления , нам удается обнаружить, например, релятивисткую инвариантность, то мы можем утверждать , что данное явление может быть описано уравнениями Максвелла. Это рассуждение возможно и не очень строгое, но на идейном уровне оно дает верное описание возможностей связанных с описанием симметрии уравнения /5.5/.

§6. Симметрия и точные решения одномерного уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка.

Многомерное уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка /ФПК/ является частным случаем прямого уравнения Колмогорова /см. 2, стр.54/ и в общем случае записывается следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t_0,x_0,t,x) = -(\vec{\nabla}, a(t,x)p(t_0,x_0,t,x)) + \\ +\frac{1}{2}(\vec{\nabla},\vec{\nabla} b(t,x)\cdot p(t_0,x_0,t,x)). \qquad /6.1/$$

Здесь $p:(\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}^1_+$ плотность вероятности перехода системы в состояние x за время $t-t_0$, при условии, что в момент времени $\tau=t_0$, система находилась в состоянии x_0, $a(t,x)$ - коэфф. сноса, $b(t,x)$ -коэфф. диффузии.

Мы будем рассматривать одномерный аналог уравнения ФПК, а именно /мы считаем, что $b\equiv 1$ /

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - a(x)\frac{\partial p}{\partial x} \qquad /6.2/$$

Уравнение /6.2/ с помощью стандартной замены

$$p = u\exp\{\int a(x)dx\} \qquad /6.3/$$

приводится к уравнению типа Шредингера:

$$u_0 = u_{x_1x_1} + b(x_1)u \qquad /6.4/$$

где $x_0=\frac{1}{2}t$, $x_1=x$, $b(x_1)=\frac{1}{2}(2a_{x_1}-2a^2)=a_{x_1}-a^2$. /6.5/

В работе / 14 / был выделен класс потенциалов $a(x)$ /названных безотражательными/, которыепозволяют найти точное решение задачи Коши:

$$\begin{cases} (6.2) \\ p(t_0,x_0,t,x)\Big|_{t=t_0} = \delta(x-x_0) \end{cases}$$

В нашем понимании возможность нахождения широких классов точных решений ДУ тесно связанас наличием высокой симметрии. Поэтому представляет интерес нахождения класса потенциалов уравнения /6.4/, для которых это ДУ обдадает высокой симметрией. Решением этой задачи является

Теорема I: Симметрия уравнения /6.4/ будет максимальной если $b(x_1) = b^2 x_1^2 + b^1 x_1 + b^0$; $b^\nu = Const$, $\nu = \overline{0,2}$

причем соответствующая алгебра имеет вид:

(i) $X_0 = \partial_0$;

(ii) $X_1 = (\operatorname{ch}\lambda x_0)\partial_{x_1} + \frac{\lambda}{2} x_1 \operatorname{sh}\lambda x_0 + \frac{b_1}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda x_0$;

(iii) $X_{-1} = (\operatorname{sh}\lambda x_0)\partial_{x_1} + \frac{\lambda}{2} x_1 \operatorname{ch}\lambda x_0 + \frac{b_1}{\lambda}\operatorname{ch}\lambda x_0$;

(iv) $X_2 = \frac{1}{2\lambda}(\operatorname{sh}2\lambda x_0)\partial_{x_0} + \left\{\frac{1}{2} x_1 \operatorname{ch}2\lambda x_0 + \frac{b_1}{\lambda^2}\operatorname{ch}2\lambda x_0\right\}\partial_{x_1} +$
$+ \frac{\lambda}{4} x_1^2 \operatorname{sh}2\lambda x_0 + \frac{b_1}{\lambda} x_1 \operatorname{sh}2\lambda x_0 + \frac{1}{4}\operatorname{ch}2\lambda x_0 + \left(\frac{b_0}{2\lambda} + \frac{b_1^3}{2\lambda^3}\right)\operatorname{sh}2\lambda x_0$;

(v) $X_{-2} = \frac{1}{2\lambda}(\operatorname{ch}2\lambda x_0)\partial_{x_0} + \left\{\frac{1}{2} x_1 \operatorname{sh}2\lambda x_0 + \frac{b_1}{\lambda^2}\operatorname{sh}2\lambda x_0\right\}\partial_{x_1} +$
$+ \frac{\lambda}{4} x_1^2 \operatorname{ch}2\lambda x_0 + \frac{b_1}{\lambda} x_1 \operatorname{ch}2\lambda x_0 + \frac{1}{4}\operatorname{sh}2\lambda x_0 + \left(\frac{b_0}{2\lambda} + \frac{b_1^3}{2\lambda^3}\right)\operatorname{ch}2\lambda x_0$.

Здесь $\lambda = 2\sqrt{b_2}$, $b_2 > 0$, /Если $b_2 < 0$, то в / / вместо гиперболических функций будут стоять обычные $\sin$ и $\cos$ /

Доказательство:

Для нахождения коэффициентов инфинитезимального оператора $X = \xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta(x)$ по методу Ли-Овсянникова получаем следующую систему ДУЧП:

$\xi^0_1 = 0$, $\xi^1_1 = \frac{1}{2}R$; $\xi^0_0 = R$, $\xi^1_0 = 2\eta_{x_1}$; $\eta_0 - \eta_{x_1 x_1} = \xi^1 B_{x_1} + RB$

Решая эту систему, получаем утверждение теоремы.

Замечание. Среди потенциалов, для которых в / 14 / найдено точное решение /6.2 /, есть $a(x) = \xi_1 \operatorname{th}\xi_1 x$. Этот потенциал подпадает под утверждение теоремы, т.к. в этом случае $b(x) = a_x - a^2 = \xi_1$.

В заключение мы приведем некоторые классы точных решений, которые были получены методом, описанным в / 13 / для уравнения /6. 3 / с $b(x_1) = b^2 x_1^2 + b^1 x_1 + b^0$

$$(i)\ u(x_0, x_1) = C_1 \operatorname{ch}^{-1/2} \lambda x_0 \times \exp\left\{\left(-\frac{\lambda}{4} x_1^2 - \frac{b_1}{\lambda} x_1\right) \operatorname{th} \lambda x_0 + \frac{b_1^3}{\lambda^3} (\operatorname{th} \lambda x_0 - \lambda x_0) - b^0 x_0\right\}$$

$$(ii)\ u(x_0, x_1) = C_2 \operatorname{sh}^{-1/2} \lambda x_0 \times \exp\left\{\left(-\frac{\lambda}{4} x_1^2 - \frac{b_1}{\lambda} x_1\right) \operatorname{cth} \lambda x_0 + \frac{b_1^3}{\lambda^3} (\lambda x_0 - \operatorname{cth} \lambda x_0) - b^0 x_0\right\}$$

$C_i \in \mathbb{R}^1.$

Далее мы считаем, что $b_1 = 0$

$$(iii)\ u(x_0, x_1) = \varphi(\omega) \operatorname{sh}^{-1/4} 2\lambda x_0 \times \exp\left\{-\frac{\lambda x_1^2}{4} \operatorname{cth} 2\lambda x_0 - b^0 x_0\right\}$$

где $\varphi(\omega)$ –произвольное решение ОДУ: $-\lambda^2 \varphi + \frac{3}{2} \varphi' \omega^3 + \varphi'' \omega^4 = 0,$

$$\omega = 4(\operatorname{sh} 2\lambda x_0)/x_1^2$$

$$(iv)\ u(x_0, x_1) = \varphi(\omega) \operatorname{ch}^{-1/4} 2\lambda x_0 \times \exp\left\{-\frac{\lambda x_1^2}{4} \operatorname{th} 2\lambda x_0 - b^0 x_0\right\}.$$

где $\varphi(\omega)$ –произвольное решение ОДУ:

$$\frac{1}{8} \lambda^2 \varphi + 3 \varphi' \omega^3 + \varphi'' \omega^4 = 0, \quad \omega = (\operatorname{ch} 2\lambda x_0)/x_1^2.$$

Глава 2. Теоретико–групповой анализ нелокальной симметрии некоторых уравнений квантовой механики.

§I. Обратная задача теоретико–группового анализа для нелинейного уравнения Шредингера.

Хорошо известно, что между интегрируемостью задачи методом ОРЗ /обратной задачи рассеяния/ и наличием у соответствующего ДУ нелокальной симметрии в смысле Ли–Бэклунда существует тесная связь /см. например / 7 /, а также / 8 / /. Все скалярные ДУ, обладающие нелокальной симметрией по Ли–Бэклунду, либо интегрируются методом ОРЗ, либо нелокальной заменой сводятся к линейным ДУ. Хорошей иллюстрацией этого факта служит следующая теорема

Теорема I:

Система уравнений:

$$\begin{cases} iu_t + u_2 + \varphi(u, u^*) = 0 \\ -iu_t^* + u_2^* + \varphi^*(u, u^*) = 0 \end{cases} \qquad /1.1/$$

$$\Updownarrow x_0 = -it$$

$$\begin{cases} u_0 + u_2 + \varphi(u, u^*) = 0 \\ -u_0^* + u_2^* + \varphi^*(u, u^*) = 0 \end{cases} \qquad /1.1'/$$

где: $u = u_{Re} + iu_{Im} : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}^1; \; u^* = u_{Re} - iu_{Im};$

$u_0 = \frac{\partial}{\partial x_0} u; \; u_i = \frac{\partial^i}{\partial x^i} u; \; i = 1, 2 \ldots$

допускает операторы симметрии Ли-Бэклунда вида:

$$X = \eta(u, u_1, u_2, u_3, u^*)\partial_u + \bar{\eta}(u, u^*, u_1^*, u_2^*, u_3^*)\partial_{u^*} + \ldots \qquad /1.2/$$

$\Leftrightarrow \varphi(u, u^*) = \alpha u^2 u^* + \beta u$, причём:

$$\begin{cases} \eta = Au_3 + (3\alpha Auu^* + B)u_1 + Cu; \\ \bar{\eta} = Au_3^* + (3\alpha Auu^* + B)u_1^* - Cu; \quad A, B, C \subset \mathbb{R}^1 \end{cases} \qquad /1.3/$$

Доказательство проводим методом, который аналогичен методу Ли-Овсянникова. Для нахождения $\eta(\ldots)$ и $\bar{\eta}(\ldots)$ получаем систему ДУЧП : /обозначим $u^* = v$ /

$$-\eta_u \cdot \varphi - (\varphi_u u_1 + \varphi_v v_1)\eta_{u_1} + (\varphi_u u_2 + \varphi_{uu} u_1^2 + 2\varphi_{uv} u_1 v_1 + \varphi_{vv} v_1^2 + \varphi_v v_2)(-\eta_{u_2}) - (\varphi_u u_3 + 3\varphi_{uu} u_1 u_2 + \varphi_{uuu} u_1^3 + 3\varphi_{uuv} u_1^2 v_1 + 3\varphi_{uvv} u_1 v_1^2 + 3\varphi_{uv}(u_2 v_1 + u_1 v_2) + 3\varphi_{vv} v_1 v_2 + \varphi_v v_3 + \varphi_{vvv} v_1^3) + (v_2 + \varphi(v, u))\eta_v + \sum_{i,j=0}^{3} u_{i+1} u_{j+1} \eta_{u_i u_j} + 2v_1 \sum_{i=0}^{3} u_{i+1} \eta_{u_i v} + v_1^2 \varphi_{vv} + \varphi_u \cdot \eta + \varphi_v \bar{\eta} = 0.$$

/Уравнение для $\bar{\eta}(\ldots)$ / записывается аналогично/

"Расщепляя" эти уравнения по независимым переменным и решая по-

полученне ДУЧП, получаем /I.3/

Следовательно, единственнм нелинейным уравнением вида /I.I/, допускающим нетривиальную группу явлется хорошо известное нелинейное уравнение Шредингера:

$$iu_t + u_2 + \alpha |u|^2 u = 0, \quad |u|^2 = uu^* \qquad /I.4/$$

причем соответствующий оператор симметрии имеет вид:

$$Q = (u_3 + 3\alpha uu^* u_1)\partial_u + (u_3^* + 3\alpha uu^* u_1^*)\partial_{u^*} + \ldots \qquad /I.5/$$

Хорошо известно /см.например / 25 / /, что уравнение /I.4/ интегрируется методом ОЗР.

Замечание: Как показал Kumei / 23 /, в классе операторов Ли-БЭКлунда зависящих от производных до 3 порядка включительно, операторов, отличных от /I.5/ нет.

Многомерные ДУЧП нельзя, как правило, проинтегрировать методом ОЗР. На языке теориигрупп Ли-Бэклунда это означает, что в случае многомерной задачи, соответствующее ДУ допускает /как правило !/ нетривиальную группу Ли-Бэклунда в том случае, если оно линейно /или приводимо к линейному/. Об этом же свидететьствует следующее утверждение:

Среди уравнений вида:

$$\begin{cases} iu_t + \Delta_{n-1} u + \varphi(u, u^*) = 0 \\ -iu_t + \Delta_{n-1} u + \varphi^*(u, u^*) = 0 \end{cases} ; \quad n \geq 2 \qquad /I.5/$$

допускающих нетривиальную симметрию по Ли-Бэклунду с операторами вида:

$$X = \eta(u, u_1, u_2, u_3, u^*)\partial_u + \bar{\eta}(u, u^*, u_1^*, u_2^*, u_3^*)\partial_{u^*} + \ldots$$

$$u = (\ldots, u_{x_{\nu_1 \ldots \nu_k}}, \ldots), \quad \nu_i = \overline{1, n-1}.$$

нелинейных нет, т.е. $\varphi(u, u^*) = \alpha u, \quad \alpha \in R^1$ /I.6/

и соответственно:

$$\begin{cases} \eta = \sum_{k=0}^{3} A^{\nu_1 \ldots \nu_k} u_{\nu_1 \ldots \nu_k} + Bu^* \\ \bar{\eta} = \sum_{k=0}^{3} A^{\nu_1 \ldots \nu_k} u^*_{\nu_1 \ldots \nu_k} + Bu \end{cases} \qquad /I.7/$$

Доказательство проводится по алгоритму типа алгоритма Ли-Овсянникова, мы его опускаем. Заметим, что резкое отличие многомерного случая /I.5/ от одномерного /I.I /, связано с тем, что в первом случае определяющие уравнения являются "переопределенными" /из-за наличия нескольких пространственных переменных/ что и приводит к /I.6/, /I.7/.

§2. Симметрия уравнений Дирака.

В этом параграфе будет установлена симметрия уравнений Дирака в классе операторов Ли-Бэклунда зависящих от первых производных, причем будет доказано, что эта симметрия максимальная.

Рассматриваем:

$$\gamma_\mu p^\mu \psi = m\psi \quad , \psi = (\psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3)^T \quad \text{–четырехкомпонентный спинор} \qquad /2.I/$$

$$- \quad p_\mu = i g^{\mu\nu} \partial_\nu , \quad p^\mu = g^{\mu\nu} p_\nu , \quad \mu = \overline{0,3}$$

γ_μ –четырехрядные матрицы Дирака, реализующие представление алгебры Клиорфорда-Дирака:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2 g_{\mu\nu} ; \quad 0 \le \mu, \nu \le 3 \qquad /2.2/$$

В работах / 3 , 5 /показано, что алгебра Пуанкаре $\mathcal{P}$/I,3/, где:

$$(i) \; P_\mu = p_\mu = i g^{\mu\nu} \partial_\nu ;$$
$$(ii) \; J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu} , \quad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \qquad /2.3/$$

является максимальной локальной алгеброй инвариантности уравнений /2.I/. Однако релятивистская инвариантность не исчерпывает симметрийные свойства уравнения Дирака. В / 16 /, было установлено, что в классе интегро-дифференциальных операторов симметрия уравнений Диракаопределяется следующей алгеброй Ли:

$$\mathcal{P}(1,3) \oplus GL(2, \mathbb{C}^1) \oplus GL(2, \mathbb{C}^1) \qquad /2.4/$$

Для доказательства этой теоремыиспользуется нелиевская методика предложенная В.И.Фущичем / см. / 12 / /.

Нашей цельб является ,нахождение максимальной алгебры инвариантности уравнений /2.I/в классе операторов Ли-Бэклунда вида:

$$X = \eta^{\alpha}(x,\psi,\underset{1}{\psi})\partial_{\psi^{\alpha}} + \ldots \quad , \quad \underset{1}{\psi} = (\ldots, \psi^{\alpha}_{x^{\mu}}, \ldots); \quad 0 \le \mu,\alpha \le 3 \qquad /2.5/$$

Имеет место следующая теорема:

<u>Теорема I</u> :

Максимальный набор операторов симметрии уравнения /2.I/ это: /с точностью до эквивалентности на решениях системы /2.I/

$$\left.\begin{array}{l} (i)\ P_{\mu} = \psi^{\alpha}_{x_{\mu}}\partial_{\psi^{\alpha}} + \ldots \\ (ii)\ J_{\mu\nu} = \{\psi^{\alpha}_{x^{\mu}}x^{\nu} - \psi^{\alpha}_{x^{\nu}}x^{\mu} + [S_{\mu\nu}\psi]^{\alpha}\}\partial_{\psi^{\alpha}} + \ldots \end{array}\right\} \mathcal{P}(1,3)$$

$$(iii)\ \Sigma_{\mu\nu} = \{\tfrac{m}{2}S_{\mu\nu}\psi + (\gamma_{\mu}p_{\nu}\psi - \gamma_{\nu}p_{\mu}\psi)\}^{\alpha}\partial_{\psi^{\alpha}} + \ldots;$$

$$(iv)\ \Theta_{\mu} = \{\gamma_4 p_{\mu}\psi + m\gamma_{\mu}\gamma_4\psi\}^{\alpha}\partial_{\psi^{\alpha}} + \ldots \qquad /2.6/$$

$$(v)\ I = \psi^{\alpha}\partial_{\psi^{\alpha}} + \ldots \quad , \qquad 0 \le \mu,\nu \le 3$$

Здесь $\gamma_4 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, $\{A\}^{\alpha}$ – -тая компонента вектора А по повторяющимся индексам преполагается суммирование.

Мы приведем основные этапы доказательства:

Для нахождения коэффициентов оператора X из /2.5/ мы получаем следующее определяющее уравнение:

$$\{\gamma_{\mu}D_{\mu} + im\}^{\alpha}\eta^{\alpha}(x,\psi,\underset{1}{\psi})\Big|_{\gamma_{\mu}p^{\mu}\psi = m\psi} = 0; \quad D_{\mu} = \partial_{\mu} + \psi^{\alpha}_{\mu}\partial_{\psi^{\alpha}} + \ldots + \psi^{\alpha}_{\mu\nu_1\ldots\nu_s}\partial_{\psi^{\alpha}_{\nu_1\ldots\nu_s}} + \ldots \qquad /2.7/$$

Расщепляя /2.7/ по независимым переменным $\psi^{\alpha}_{\mu\nu}$ получаем следующую систему ДУЧП:

$$\begin{cases} (-\gamma_a\eta_{\psi_a} + \gamma_e\eta_{\psi_e})\gamma_a\gamma_e = \gamma_a\eta_{\psi_e} + \gamma_e\eta_{\psi_a} \\ (\gamma_0\eta_{\psi_a} + \gamma_a\eta_{\psi_0})\gamma_0\gamma_a = \gamma_0\eta_{\psi_0} + \gamma_a\eta_{\psi_a} \end{cases}$$

Здесь $\eta_{\psi_{\mu}} = \{\eta^{\alpha}_{\psi^{\beta}_{\mu}}\}^{3}_{\alpha,\beta=0} = A_{\mu}(x,\psi,\underset{1}{\psi})$ – переменные четырехрядные матрицы . Раскладываем их по специально выбранному базису /см. / 1 , гл.I.§6/ /:

$$A^{\mu}(x,\psi,\bar\psi)=\sum_{\nu=1}^{16}\alpha^{\mu\nu}(x,\psi,\bar\psi)B_{\nu}\ ;\ \mu=\overline{0,3}$$ и

поставляя в /2.8/ находим общее решение /с точностью до эквивалентности на решениях /2.I/:

$$(1)\quad \eta=C^{\mu\nu}_{(1)}(x,\psi)\{\gamma^{\nu}\psi_{\mu}-\gamma^{\mu}\psi_{\nu}\},$$
$$(2)\quad \eta=C^{\mu}_{(2)}(x,\psi)\gamma_4\psi_{\mu}+G_{\mu}(x,\psi),$$
$$(3)\quad \eta=C^{\mu}_{(3)}(x,\psi)\psi_{\mu}+B(x,\psi).\qquad \nu,\mu=\overline{0,3}$$

Здесь $C^{\mu\nu}_{(1)}$, $C^{\mu}_{(2,3)}$ –некоторые скалярные функции,пока произвольные,

$G_{\mu\nu}$, G_{μ}, G – переменные матрицы. Для определения неизвестных функций из /2.8/ получаем:

$$\gamma_{\mu}\eta_{x^{\mu}}+\gamma_{\mu}\{\eta_{\psi^{\alpha}}\psi^{\alpha}_{\mu}\}+\gamma_{0}\eta_{\psi_0}\{-m^2\psi\}+(\gamma_0\eta_{\psi_a}+\gamma_a\eta_{\psi_0})\times$$
$$\times(-im\gamma_0\psi_a)=-im\eta \qquad /2.9/$$

$\Rightarrow$ расщепляя /2.9/ по независимым переменным и решая полученную систему получаем утверждение теоремы.

Замечание I: Операторы /2.6/ не образуют алгебру ли,но как было показано в / 16 ,см.89/ ,рассматривая их линейные комбинации можно выделить алгебру Ли,изоморфную алгебре A_8 :

$$(i)\quad \hat\Sigma_{\mu\nu}=\{\tfrac{im}{2}[\gamma_{\mu},\gamma_{\nu}]+i(1-i\gamma_4)(\gamma_{\mu}p_{\nu}-\gamma_{\nu}p_{\mu})\}\psi\partial_{\psi}+\ldots$$
$$(ii)\quad \hat\Sigma_{0}=I;$$
$$(iii)\quad \hat\Sigma_{1}=(m\gamma_4-i(1-i\gamma_4)\gamma_{\mu}p^{\mu})\psi\partial_{\psi}$$

с такими коммутационными соотношениями:

$$[\hat\Sigma_{\mu\nu},\hat\Sigma_{\lambda\sigma}]=2im(g_{\mu\sigma}\Sigma_{\nu\lambda}+g_{\nu\lambda}\hat\Sigma_{\mu\sigma}-g_{\mu\lambda}\hat\Sigma_{\nu\sigma}-g_{\nu\sigma}\hat\Sigma_{\mu\lambda}).$$
$$[\hat\Sigma_{1},\hat\Sigma_{0}]=[\hat\Sigma_{1},\hat\Sigma_{\mu\nu}]=[\hat\Sigma_{0},\hat\Sigma_{\mu\nu}]=0.$$

Замечание 2: Интересно,что отметить,что все операторы /2.6/, в частности нелокальные / III /,/IУ/, могут быть получены из очевидного решения $\eta=\psi$ с помощью операторов симметри уравнения /2.7/. Действительно, ищем операторы симметрии уравнения /2.7/ первого порядка $\Rightarrow$ $\hat{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}_\mu D_\mu + \mathcal{Y}$ - должен удовлетворить след. ДУ:

$$[\gamma_\mu D_\mu + im, \mathcal{Y}_\mu D_\mu + \mathcal{Y}] = (Z_\nu D_\nu + Z)(\gamma_\mu D_\mu + im) \qquad /2.10/,$$

где $\hat{Z} = Z_\nu D_\nu + Z$ - произвольный оператор первого порядка. Ясно что, если $\hat{\mathcal{Y}}$ удовлетворяет /2.10/ $\Rightarrow$ след. утверждение:

η -решение /2.7/ $\Rightarrow \hat{\mathcal{Y}}\eta = \mathcal{Y}_\mu D_\mu \eta + \mathcal{Y}\eta$ -решение /277/

Решая /2.10/ получаем, в частности:

$$(i)\ \tilde{\Sigma}_{\mu\nu} = im\gamma_\mu\gamma_\nu + (\gamma_\mu D^\nu - \gamma_\nu D^\mu),\quad D^\alpha = g^{\alpha\beta} D_\beta$$

$$(ii)\ \tilde{\Theta}_\mu = i\gamma_4 D^\mu + m\gamma_\mu\gamma_4 \quad , \quad 0 \le \mu,\nu \le 3.$$

откуда и следует утверждение.

Замечание 3: Из доказательства следует, что формула (*) выполнена и в том случае, когда вместо /2.1/ рассматриваем $\gamma_\mu p^\mu \psi = F(\psi)$, где $F = (F^0, F^1, F^2, F^3)^T$ - некоторая функция. В частности, она верна для

Исходя из этого, легко доказать, что имеет место:

Теорема 2: Максимальный набор операторов симметрии уравнения /2.1/ при $m=0$, вида /2.5/, это:

$$\left.\begin{aligned} &(i)\ \mathcal{P}(1,3); \\ &(ii)\ D = x_\nu p^\nu + i; \\ &(iii)\ K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu + 2S_{\mu\nu}x^\nu; \end{aligned}\right\} C(1,3)$$

$$\begin{aligned} &(iv)\ I = \psi\partial_\psi + \dots; \\ &(v)\ Q = (\gamma_4\psi)\partial_\psi + \dots; \\ &(vi)\ \Sigma_{\mu\nu} = (\gamma_\mu p_\nu\psi - \gamma_\nu p_\mu\psi)\partial_\psi + \dots; \\ &(vii)\ \Theta_\mu = (\gamma_4\psi_\mu)\partial_\psi + \dots . \end{aligned} \qquad /2.11/$$

§3. Симметрия восьмикомпонентного уравнения Дирака.

В данном параграфе мы изучим максимальную симметрию уравнений Дирака:

$$\gamma_\mu p^\mu \psi = \psi \cdot m$$

вместе с сопряженными уравнениями:

$$\gamma_\mu p^\mu \bar\Psi = m\bar\Psi\ ,\quad \bar\Psi = \Psi^* = (\Psi_{Re} + i\Psi_{Im})^* = \Psi_{Re} - i\Psi_{Im}$$

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}\ ,\quad 0 \le \mu,\nu \le 3$$

Матрицы мы выбрали в следующем представлении:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \gamma_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix};\ \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix};\ \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Систему /3.I/,/2.I/ можно записать в следующем виде:

$$\Gamma_\mu p^\mu \tilde\Psi = m\tilde\Psi \qquad /3.2/$$

Здесь $\Gamma_\mu = \left(\begin{array}{c|c} \gamma_\mu & \hat 0 \\ \hline \hat 0 & \gamma_\mu \end{array}\right)$, $\mu = \overline{0,3}$, $\tilde\Psi = (\Psi, \bar\Psi)^T$

Очевидно,что -удовлетворяют алгебре Клиффорда-Дирака:

$$\Gamma_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\Gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}. \qquad /3.3/$$

Благодаря увеличению числа компонент волновой функции уравнение /3.2/ имеет более высокую симметрию чем /2.I/. В / 16 / было показано,что в классе интегродифференциальных операторов /3.2/ инвариантно относительно 42-мерной алгебры ЛИ изоморфной $\mathcal{P}(1,3) \oplus GL(4,\mathbb{C}^1) \oplus GL(4,\mathbb{C}^1)$

Мы исследуем максимальную симметрию системы /3.2/ в классе операторов Ли-Бэклунда,зависящих от $/ x, \Psi, \Psi_1 /$:

$$X = \tilde\eta(x, \tilde\Psi, \tilde\Psi_1)\partial_{\tilde\Psi} + \ldots$$

$$\tilde\eta = (\eta, \eta^*) \qquad /3.4/$$

Мы докажем следующую теорему:

<u>Теорема I</u>:

Максимальный набор операторов вида /3.4/ допускаемых уравнением /3.2/ это:

(i) $\mathcal{P}(1,3)$: (a) $P_\mu = \tilde\Psi_\mu \partial_{\tilde\Psi} + \ldots$

(б) $J_{\mu\nu} = \{x_\mu p_\nu \tilde\Psi - x_\nu p_\mu \tilde\Psi + \frac{i}{4}[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]\tilde\Psi\}\partial_{\tilde\Psi} + \ldots$

(ii) Группа Паули :

$$(a)\ Q_1 = (\Gamma_4 \Gamma_5 \tilde{\psi})\partial_{\tilde{\psi}} + \dots$$
$$(б)\ Q_2 = (i\Gamma_4 \Gamma_5 \tilde{\psi})\partial_{\tilde{\psi}} + \dots$$
$$(в)\ Q_3 = (i\Gamma_5 \Gamma_6 \tilde{\psi})\partial_{\tilde{\psi}} + \dots$$

/3.6/

(iii) $Q_j\, J_{\mu\nu}\ ,\ 0 \le \mu,\nu \le 3,\quad Q_j$ из (3.6), $j = \overline{1,3}$

(iv) $I = \tilde{\psi}\,\partial_{\tilde{\psi}} + \dots$ /3.7/

(v) $\Sigma_{\mu\nu} = \{\frac{m}{2}[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]\tilde{\psi} + (\Gamma_\mu p_\nu \tilde{\psi} - \Gamma_\nu p_\mu \tilde{\psi})\}\partial_{\tilde{\psi}} + \dots$

(vi) $Q_a \Sigma_{\mu\nu}\ ,\ \mu,\nu = \overline{0,3}\ ;\ a = \overline{1,3}$

(vii) $\Theta_\mu = [\Gamma_0 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \{p_\mu \tilde{\psi} - m\,\Gamma_\mu \tilde{\psi}\}]\partial_{\tilde{\psi}} + \dots$

(viii) $Q_a \Theta_\mu\ ;\ \mu = \overline{0,3}\ ;\ a = \overline{1,3}.$ /3.8/

Здёсь

$$\Gamma_4 = \left(\begin{array}{c|c} \hat{0} & \gamma_4 \\ \hline \gamma_4 & \hat{0} \end{array}\right);\ \Gamma_5 = i\left(\begin{array}{c|c} \hat{0} & \gamma_4 \\ \hline -\gamma_4 & \hat{0} \end{array}\right);\ \Gamma_6 = \left(\begin{array}{c|c} \gamma_4 & \hat{0} \\ \hline \hat{0} & -\gamma_4 \end{array}\right),\ \hat{0} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Доказательство проводим методом Ли–Овсянникова, анологично ,как в в /2.7/ получаем определяющее уравнение :

$$\{\Gamma_\mu D_\mu + im\}^\alpha\, \xi^\alpha(x, \tilde{\psi}, \tilde{\bar{\psi}})\Big|_{\Gamma_\mu p^\mu \tilde{\psi} = m\tilde{\psi}} = 0.$$

/3.9/

Совершенно анологично получаем систему ДУЧП для нахождения $\{\xi^\alpha_{\tilde{\psi}_\beta}\}^3_{\alpha,\beta=0}$,

$$\begin{cases} (-\Gamma_a\, \xi_{\tilde{\psi}_a} + \Gamma_b\, \xi_{\tilde{\psi}_b})\Gamma_a \Gamma_b = \Gamma_a\, \xi_{\tilde{\psi}_b} + \Gamma_b\, \xi_{\tilde{\psi}_a}\ ;\ a,b = \overline{1,3} \\ (\Gamma_0\, \xi_{\tilde{\psi}_a} + \Gamma_a\, \xi_{\tilde{\psi}_0})\Gamma_0 \Gamma_a = \Gamma_0\, \xi_{\tilde{\psi}_0} + \Gamma_a\, \xi_{\tilde{\psi}_a} \end{cases}$$

/3.10/

Обозначив 8-рядные матрицы $\xi_{\tilde{\psi}_\mu} = A^\mu(x, \tilde{\psi}, \tilde{\bar{\psi}})$,

решаем /3.10/.Эта задача существенно упростится,если мы заметим, что:

$$A^\mu = A^\mu_{(1)} + A^\mu_{(2)} + A^\mu_{(3)} + A^\mu_{(4)}$$

/3.11/

/3.II/

где: $A^m_{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A}^m_{(1)} & \\ \hline & \tilde{A}^m_{(1)} \end{array}\right)$; $A^m_{(2)} = \left(\begin{array}{c|c} \hat{0} & \tilde{A}^m_{(2)} \\ \hline \tilde{A}^m_{(2)} & \hat{0} \end{array}\right)$

$$A^m_{(3)} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A}^m_{(3)} & \hat{0} \\ \hline \hat{0} & -\tilde{A}^m_{(3)} \end{array}\right) \quad ; \quad A^m_{(4)} = \left(\begin{array}{c|c} \hat{0} & \tilde{A}^m_{(4)} \\ \hline -\tilde{A}^m_{(4)} & \hat{0} \end{array}\right)$$

где $\tilde{A}^m_{(a)}$ –переменные четырехрядные матрицы.

Очевидно,что $A^m_{(a)}$ –линейно независимы.Кроме тоголегко убедится что матрицы/точнее классы матриц/ /I/–/4/–коммутируют с $\Gamma_0,\dots,\Gamma_3$ Следовательно для каждого из классов /I/–/4/ мы получим уравнени типа /3.II/.

Но решить /3.II/ для $\tilde{\eta}\,\tilde{\psi}_r = A^m_{(a)}$ $\Longleftrightarrow$ решить /2.8/ для $\eta_{\psi_r} = \tilde{A}^m_{(a)}$, $r=\overline{0,3}$.Анологичное рассуждение приводит к условию на $\tilde{A}^m_{(a)}$ аналогичному /2.9/.

Таким образом,общее решение /3.9/ имеет вид:

$$\tilde{\eta} = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline B & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & -C \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} 0 & D \\ \hline -D & 0 \end{array}\right) \qquad /3.I2/$$

Здесь А,В,С,Д, –произвольные решения /2,7/.Теперь нам необходимо учесть условие того,что $\bar{\psi} = \psi^*$.

т.к. $\psi \mapsto \psi + \varepsilon\eta,\ \bar{\psi} \mapsto \bar{\psi} + \varepsilon\bar{\eta} \Rightarrow \bar{\eta} = \eta^*$

Следовательно : $\bar{\eta} = \eta^*$ /3.I3/

/Напомним,что $\tilde{\eta} = (\eta, \bar{\eta})^T$ /.Учитывая в /3.I2/ условие /3.I3/, получаем утверждение теоремы.

Замечание I: Операторы $(i)-(iv)$ –дают максимальную в локальном смысле алгебру инвариантности уравнения /3.2/.

Замечание 2. Операторы /3.5/–/3.8/ не образуют алгебру Ли, но было замечено /см. / //,что /3.2/ инвариантно относительно I6 –параметри–

ческой алгебры Ли,образуемой линейными комбинациями операторов /3.8/:

$$(i)\ \Sigma_{mn} = \left\{ \frac{1}{2} [\Gamma_m, p_n] + \frac{1}{m} (1 - i\Gamma_6)(\Gamma_m p_n - \Gamma_n p_m) \right\} \tilde{\Psi}$$

$$(ii)\ \Sigma_6 = I\,, \quad m, n = \overline{0,5}$$

/3.I4/

/т.к. $p_{3+a} \tilde{\Psi} = 0 \Rightarrow$ при $n, m > 3$,/3.I4/-задает матричные преобразования/.

Литература

I. Боголюбов Н.Н.,Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей.-М: Наука,1973.

2. Гихман И.И.,Скороход А.В. Теория случайных процессов.- М.: Наука,1973 ,т.2.

3.Данилов Ю.А.Групповые свойства уравнений Дирака.- М.,1968.- /Предпринт /Ин-т атомной энеркии им.И.В.Курчатова;ИАЭ-1736/.

4.Ибрагимов Н.Х.Групповые свойства некоторых диффиренциальных уравнений.-Новосибирск:Наука,1967.

5.Ибрагимов Н.Х.Об инвариантности уравнений Дирака.- Докл.АН СССР,1969,185,№6, с.1226-1228.

6.Ибрагимов Н.Х.Группы преобразований в математическойфизике.- М.:Наука,1983.

7.Ибрагимов Н.Х.,Шабат А.Б.Уравнение Корнивега-де Фриза с групповой точки зрения -Докл.АН СССР ,1979,244,№1.

8.Мешков А.Г.Симметрия скалярных полей.-Теор. и математическая физика,1983,55, №2.

9.Овсянников Л.В.Групповой анализ дифференциальных уравнений.- М.:Наука,1978.

10.Паули В.Релятивистская теория элементарных частиц-ИЛ,М.:1947.

11.Принцип относительности:Сб.работ классиков релятивизма. М.:Атомиздат,1973,с.67-93.

12.Теоретико-групповые методы в математической физике :Сб.научн. тр. /Отв.ред.Ю.А.Митропольский,В.И.Фущич.-К.:Ин-т математики АН УССР,1978.

13.Теоретико-алгебраические исследования в математической фиэике:Сб.научн.трудов/отв.ред.В.И.Фущич.-К:Ин-т математики АН УССР

1981.

14. Федосова А.И. Безотражательные потенциалы и точные решении уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. – Дифф. уравнения, 1980, 16, №4, с. 671–678.

15. Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики. – Докл. АН СССР, 1976, 227, №3, с. 539–542.

16. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. Киев: Наукова думка, 1983.

17. Ibragimov N.H., Anderson R.L. Lie-Bäcklund tangent transformations. – J. Math. Anal. and Appl., 1977, v. 59, n°1.

18. Flato M., Simon J., Sternheimer D. Conformal invariance of field equations. – Ann. Phys. (USA), 1970, v. 61, n°1.

19. Fushich V.I., Serov N.I. The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal eqs. – Journal of Phys. A: Math. and Gen., v. 16, n°15, 1983.

20. Hoogland H. Minimal electromagnetic coupling in elementary quantum mechanics, a group theoretical derivation. – Journal of Physics A: Math. and Gen., v. 11, n°5, 1978.

21. Olver P.J. Evolution eqs possessing infinitely many symmetries. – J. Math. Phys., 1977, v. 18, n°6.

22. Reid G., Cullen J., Lie-Bäcklund groups and the linearisation of differential eqs – Journal of Phys. A: Math. and Gen., 1983, v. 16, n°9.

23. Kumei S., Journal of Math. Physics, v. 18, N2.