# Розвиток ідей
# І. П. Мельниченка та В. Ф. Ковальова
# для комплексних комутативних
# двовимірних алгебр

Грищук С. В.

*Інститут математики НАН України, м. Київ*

serhii.gryshchuk@gmail.com, gryshchuk@imath.kiev.ua

## 1. Алгебра Собреро /Ing. Dott. Luigi Sobrero, (1934)/

$$\mathbb{S} := \{s = a + jb + j^2c + j^3d : a, b, c, d \in \mathbb{R}\},\ (1 + j^2)^2 = 0.$$

$$s = \cdots = a_1 + Ib_1 + (c_1 + Id_1)\,\Omega,$$

$$a_1 = a - c,\ b_1 = \tfrac{b+d}{2},\ c_1 = d - \tfrac{3}{2}\tfrac{b+d}{2},\ d_1 = c_1,$$

$$I := \frac{1}{2}\left(3j + j^3\right),\ I^2 = -1,$$

$$\Omega := 1 + j^2,\ \Omega^2 = 0.$$

$$\mathbb{S} \cong \mathbb{C} \bigoplus \Omega\,\mathbb{C}.$$

**Аналітичні функції:**

$\mu_{s_0} := \{s_0 = x + jy : x, y \in \mathbb{R}\}$, $D_{s_0}$ — область в $\mu_{s_0}$.

$$\Phi : D_{s_0} \longrightarrow \mathbb{S} :$$

$$\Phi'(s_0) := \lim_{\mu_{s_0} \ni \Delta s_0 \to 0} \frac{\Phi(s_0 + \Delta s_0) - \Phi(s_0)}{\Delta s_0} \, \forall s_0 \in D_{s_0}.$$

Аналог ум. CR:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = j \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Leftrightarrow$$

$a_y = -d_x, b_y = a_x, c_y = b_x - 2d_x; \Phi = a + jb + j^2 c + j^3 d.$

$$\Delta^2 d(x,y) := \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) d(x,y) = 0 \quad (1)$$

при всіх $(x, y) \in \{(x, y) : x + jy \in D_{s_0}\}$.

Собреро: $\Phi(s_0) := \Phi(s_0 + j^2 c + j^3 d)$, $c$,$d$ — фіксовані.
Елементарні функції: $e^{s_0}$, $\log s_0$, $s_0^n$, $n = 1, 2, \ldots$

Ханс Георг Хан ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ Основы линейной теории и ее применения /Перевод с немецкого Е. А. Когана, под ред. Э. И. Григолюка, зав-ий редакц. доктор физ.-мат. наук, профессор Б. В. Шабат/, М.: Изд-во «МИР», 1988, 344 с.:

"Упомянем еще метод Собреро [34] решения плоской задачи теории упругости с помощью гиперкомплексных функций напряжений; он малоэффективен (см. относящиеся к этому вопросу работы [35, 36])

стр. 121 (Гл. 6 «Обзор различных методов решения уравнений теории упругости»).

34. Sobrero L. Theorie der ebenen Elastizitat. — Hamburger Math. Einzelschr., 1934, 17.

35. Schmidt K. Behandlung ebener Elastizitatsprobleme mit Hilfe hyperkomplexer Singularitaten. — Ing.-Arch., 1951, 19, 324—341.

36. Stahl K. Cber die Losung ebener Elastizitatsaufgaben in komplexer und hyperkomplexer Darstellung. — Ing.-Arch., 1954, 22, 1—20.

## 2. Бігармонічна алгебра

$$\mathbb{B} := \{c_1 e + c_2 \rho : c_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2\},\ \rho^2 = 0, \qquad (2)$$

Тв.: $\mathbb{B} \cong \mathbb{S}$.

В. Ф. Ковальов та І. П. Мельниченко (в 1976 р.) розглянули алгебру $\mathbb{B}$, давши їй термін **бігармонічна алгебра**, та її **бігармонічні** базиси $(e_1, e_2)$:

$$(e_1^2 + e_2^2)^2 = 0,\ e_1^2 + e_2^2 \neq 0. \qquad (3)$$

І. П. Мельниченко (1986 р.) описав усі бігармонічні базиси:

$$e_1 = \alpha_1 e + \alpha_2 \rho,\ e_2 = \pm\left(\alpha_1 e + \left(\alpha_2 - \frac{1}{2\alpha_1}\right)\rho\right),$$

$\alpha_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha_2 \in \mathbb{C}$, а також показав, що серед 2-dim комутативних алгебр з одиницею над $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, що містять базиси з властивістю (3), єдиною є бігармонічна алгебра.

## 2.1 Моногенні функції

$$\text{Фікс. ББ } (e_1, e_2):$$

$$e_1 = e, e^2 = e_1 + 2ie_2,$$

$$(\rho = 2e + 2ie_2).$$

$$\mu := \{\zeta = xe_1 + ye_2 : x, y \in \mathbb{R}\},\ D_\zeta \text{ — область в } \mu.$$

$$\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B} :$$

$$\Phi'(\zeta) := \lim_{\mu \ni \Delta\zeta \to 0} \frac{\Phi(\zeta + \Delta\zeta) - \Phi(\zeta)}{\Delta\zeta}\ \forall \zeta \in D_\zeta.$$

$$\text{Аналог ум. CR:}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = e_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Leftrightarrow$$

$$U_{1y} = U_{3x}, U_{2y} = U_{4x}, U_{3y} = U_{1x} - 2U_{4x}, U_{4y} = U_{2x} + 2U_{3x},$$

$$\Phi(\zeta) = U_1(x, y)\, e_1 + U_2(x, y)\, ie_1 + U_3(x, y)\, e_2 + U_4(x, y)\, ie_2, \tag{4}$$

$$\zeta = xe_1 + ye_2,\ U_k \colon D \longrightarrow \mathbb{R},\ k = \overline{1, 4},$$
$$D := \{(x, y) : \zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta\}.$$

## 2.2 Зображення моногенних функції через аналітичні функції комплексної змінної

Має місце зображення (Грищук С. В., Плакса С. А. (2009)) довільної моногенної функції $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ через дві аналітичні функції $F, F_0 \colon D_z \longrightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2,$ комплексної змінної $z \in D_z := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : xe_1 + ye_2 \in D_\zeta\}$:

$$\Phi(\zeta) = F(z)e_1 - \left(\frac{iy}{2}\, F'(z) - F_0(z)\right) \rho\, \forall \zeta \in D_\zeta. \quad (5)$$

В. Ф. Ковальов встановив (1986) формулу (5) для областей, що є опуклими у напрямку осі $Oy$.

### 2.3 Моногенні та бігармонічні функції

Оскільки

$$\Delta^2\Phi(\zeta) = (e_1^2 + e_2^2)^2\Phi^{(4)}(\zeta) = 0\,\forall\zeta \in D_\zeta,$$

то $\Delta^2 U_k(\zeta) = 0$, $k = \overline{1,4}$, для компонент розкладу

$$\Phi(\zeta) = U_1(x,y)\,e_1 + U_2(x,y)\,ie_1 + U_3(x,y)\,e_2 + U_4(x,y)\,ie_2.$$

Доведено, що **кожна бігармонічна функція у однозв'язній області є першою компонентою відповідної моногенної функції, знайдено конструктивний опис усіх таких моногенних функцій**; встановлені основні аналітичні властивості моногенних функцій, що є аналогічними до властивостей голоморфних функцій комплексної змінної: інтегральні теорема і формула Коші, теорема Морери, теорема єдиності, розвинення Тейлора і Лорана;

нехай $u(x,y)$ — бігармонічна функція у однозв'язній області $D$, тоді $\exists\Phi(\zeta) = u(x,y)e_1 + \ldots$

( Грищук С. В., Плакса С. А. (2009)).

**2.4 Крайова (1-3)-задача для мон-их функцій**
Розглянемо крайову задачу типу задачі Шварца для моногенних функцій $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ в області $D_\zeta$, яка полягає у знаходженні моногенної в $D_\zeta$ функції за заданими граничними значеннями першої та третьої компонент $U_k = \mathrm{U}_k[\Phi]$, $k \in \{1, 3\}$, з розкладу (4), тбт. ставляться наступні крайові умови:

$$U_1(x, y) = u_1(\zeta)\,, \quad U_3(x, y) = u_3(\zeta) \qquad \forall\, \zeta \in \partial D_\zeta, \tag{6}$$

де $u_1$ та $u_3$ — фіксовані дійснозначні функції границі $\partial D_\zeta$ області $D_\zeta$. Дану задачу, назвемо *(1-3)-задачею* для моногенних функцій в області $D_\zeta$.

Вперше такого типу задачі розглядав В. Ф. Ковальов (1986) за умови, що $u_k \in H^{1+\alpha}(\partial D_\zeta)$, $0 < \alpha < 1$, область $D_\zeta$ є опуклою у напрямку $Oy$, обмежена гладким контуром $\partial D_\zeta$.

Він вживав для (1-3)-задачі термін — "основна крайова задача Шварца".

## 2.5 (1-3)-задача та крайові задачі для бігармонічних функцій

Нехай $D$ — обмежена область площини $xOy$. *Бігармонічна задача* полягає у знаходженні бігармонічної функції $V\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ за крайовими умовами:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),\,(x,y)\in D} \frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = v_1(x_0,y_0)\,,$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),\,(x,y)\in D} \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = v_3(x_0,y_0) \qquad \forall\,(x_0,y_0)\in\partial D\,, \tag{7}$$

де $v_k\colon \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$, $k\in\{1,3\}$.

Нехай $\Phi_1$: $\Phi_1(\zeta) = V(x,y)\,e_1 + V_2(x,y)\,ie_1 + V_3(x,y)\,e_2 + V_4(x,y)\,ie_2$.

З умови $CR_{\mathbb{B}}$ з $\Phi=\Phi_1 \Rightarrow V_3(x,y)_x = V(x,y)_y$. Отже,

$$\Phi_1'(\zeta) = V_x\,e_1 + V_{2x}\,ie_1 + V_y\,e_2 + V_{4x}\,ie_2 \tag{8}$$

$\Rightarrow$ бігармонічна задача з крайовими умовами (7) зводиться до (1-3)-задачі в області $D_\zeta$ для функції $\Phi\equiv\Phi_1'$ з крайовими умовами (6) з $u_k := v_k$, $k\in\{1,3\}$.

Основна бігармонічна задача $\forall\,(x_0,y_0)\in\partial D$:

$$W(x_0,y_0) = w_1(x_0,y_0), \quad \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}}(x_0,y_0) = w_2(x_0,y_0) \qquad , \tag{9}$$

де $w_k\in C^1(\partial D)$, $k=1,2$, зводиться до розв'язання відповідної бігармонічної задачі (терм. "Осн. біг. з. Шв.").

## 2.5 Методи розв'язання (1-3)-задачі та відповідних крайових задач для бігармонічних функцій

Ковальов В. Ф. (1986) окреслив можливість редукцій бігармонічних задач Шварца до (1-4)-задачі, суттєвим при цьому є властивість того, що

$$f(z) := (U_1 - U_4) + i\,(U_2 + U_3)\,, z = x + iy \in D_z,$$

є аналітичною функцією комплексною змінної та, застосування формул розв'язків для класичних задач Шварца.

Досліджено ( Грищук С., Плакса С., (2015-2017)) розв'язність (1-3)-задачі в формі гіперкомплексного інтеграла типу Коші

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_\zeta} \Big(\varphi_1(\tau)e_1 + \varphi_3(\tau)e_2\Big)(\tau-\zeta)^{-1}\, d\tau \qquad \forall\, \zeta \in D_\zeta\,, \tag{10}$$

де функції $\varphi_1 \colon \partial D_\zeta \longrightarrow \mathbb{R}$ і $\varphi_3 \colon \partial D_\zeta \longrightarrow \mathbb{R}$ задовольняють умови Діні типу $\int_0^1 \frac{\omega(\varphi,\eta)}{\eta}\, d\eta < \infty$, $\omega(\varphi,\varepsilon) := \sup\limits_{\tau_1,\tau_2 \in \partial D_\zeta,\, \|\tau_1-\tau_2\| \le \varepsilon} \|\varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2)\|$.

Тоді (1-3)-задача та відповідні бігармонічні крайові задачі редуковано до системи інтегральних рівнянь Фредгольма вигляду:

$$\frac{g_m(t)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_m(\eta) K_m(t,\eta)\, d\eta -$$

$$-\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_n(\eta) K_n(t,\eta)\, d\eta = \widetilde{u}_m(t) \;\; \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\{(m,n)\} = \{(1,3),(3,1)\}.$$

## 2.4 Система Ляме для ізотропного тіла та компоненти моногенних функцій

*Let a function* (4) *is monogenic in a domain* $D_\zeta$. *Then the next pairs of functions*

$$u(x,y) = \frac{2}{c}\,U_1(x,y) - \frac{2+c}{c}\,U_4(x,y),\ v(x,y) = U_2(x,y);$$

$$u(x,y) = -\frac{2+c}{c}\,U_2(x,y) - \frac{2(1+c)}{c}\,U_3(x,y),\ v = U_4(x,y);$$

$$u(x,y) = -\frac{2}{c}\,U_2(x,y) - \frac{2+c}{c}\,U_3(x,y),\ v(x,y) = U_1(x,y)$$

*are solutions the Lamé equilibrium system in displacements*

$$\begin{cases} \Delta u + c\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \\ \Delta v + c\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

*where* $\theta := \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$, $c := (\lambda+\mu)\mu^{-1}$.

General result:

$$\{(m,k)\} = \{(1,4),(2,3)\};\ n \in \{1,\ldots,4\}, n \neq m, n \neq k \Rightarrow$$

$$\exists \alpha_n, \alpha_k :\ \{u,v\} = \{U_n, \alpha_n U_n + \alpha_k U_k\}.$$

Note, that this statement (Г, (2015)) is a generalization of a result (V. Kovalov, I. Mel'nichenko, (1988)) to a general bounded domain $D_\zeta$. Another results of (V. Kovalov, I. Mel'nichenko, (1988)) are also generalized to this case.

## 3. Напівпроста 2-dim алгебра

Алгебра $\mathbb{B}_0 = \{c_1 e + c_2\omega : c_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2\}$, $\omega^2 = e$, містить базис $(e_1, e_2)$, такий, що

$$e_1^4 + 2pe_1^2e_2^2 + e_2^4 = 0$$

для кожного фіксованого $p > 1$ (І. П. Мельниченко, В. Ф. Ковальов (1991)).

1) Здійснено описання множини $\{(e_1, e_2)\}$ у явном вигляді (С. В. Грищук (2018)).

2) Побудовано $\mathbb{B}_0$-значні “аналітичні” функції $\Phi$, такі, що їх дійснозначні компоненти задовольняють рівняння для знаходження функції напружень $u$ у випадку плоских ортотропних деформацій

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2p\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) u(x, y) = 0 \, \forall (x, y) \in D. \tag{11}$$

   (І. П. Мельниченко , В. Ф. Ковальов (1991);
   С. В. Грищук (2018)).

3) Нехай $u(x, u)$ — розв’язок рівняння (11) в однозв’язній області $D$, тоді $\exists\Phi(\zeta) = u(x, y)e_1 + \dots$
   (С. В. Грищук (2018)).

4) Рівняння Ляме:

$$\left(a_{1k}\frac{\partial}{\partial x} + a_{2k}\frac{\partial}{\partial y}\right) u_k(x, y) + b_m \frac{\partial^2 u_m(x, y)}{\partial x \partial y} = 0 \text{ в } D,$$

$$\{(k, m)\} = \{(1, 2), (2, 1)\},\ u_1 := u, u_2 := v.$$

   Розв’язки виду: $u_k := \sum_{k=1}^{4} \alpha_{1,k} U_k(x, y)$
   (І. П. Мельниченко, В. Ф. Ковальов (1991);
   С. В. Грищук (2018)).

# Дякую за Увагу!!!