Зміст

1. Бази Гребнера і теорема Гільберта про базу

Алгебрична геометрія вийшла із розгляду систем алгебричних рівнянь, тобто систем вигляду

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0,\\
f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0,\\
&\dots\\
f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

де $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ($\mathbb{F}$ — деяке поле).

Виникає питання: чи зміниться щось, якщо дозволити розглядати нескінченні системи? Відповідь: ні, не змінится.

Перш за все зазначимо, що розв'язки системи (1.1) є також розв'язками будь-якої системи

$$
\begin{aligned}
g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0,\\
g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0,\\
&\dots\\
g_l(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0,
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

де g_i належать *ідеалу* $\langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$, який *породжений множиною* $\{ F_1, F_2, \dots, F_m \}$ у кільці многочленів $\mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, тобто, мають вигляд $g_i = \sum_{j=1}^{m} h_{ij} f_j$, де $h_{ij} \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Більш того, якщо $\langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle = \langle g_1, g_2, \dots, g_l \rangle$, то розв'язки систем (1.1) і (1.2) збігаються. Тому, насправді, ці розв'язки залежать лише від ідеалу $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$. Але має місце *теорема Гільберта про базу*:

Теорема 1.1. *Кожен ідеал I в кільці $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ має скінченну множину твірних B.*

Це означає, що довільний елемент з ідеалу I можна подати у вигляді $\sum_{i=1}^{k} h_i f_i$, де $f_i \in B$, а h_i — довілні многочлени.

Отже, довільну систему рівнянь можна замінити рівносильною їй скінченною.

Ми доведемо навіть більш сильне твердження, яке дає «хорошу» базу, яка дозволяє вирішувати багато задач, пов'язаних з ідеалами та системами рівнянь.

Для цього дамо такі означення.

Означення 1.2. (1) Ми позначатимемо $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ($\mathbb{N}$ — множина невід'ємних цілих чисел). Ми пишемо $\alpha \le_{\text{nat}} \beta$, якщо $\alpha_i \le \beta_i$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$, і $x^\alpha \le_{\text{nat}} x^\beta$, якщо $\alpha \le_{\text{nat}} \beta$.

(2) Для кожної підмножини $A \subseteq N^n$ позначимо через $\min_{\text{nat}} A$ множину її *мінімальних елементів*, тобто таких елементів $\alpha \in A$, що в A немає елементів $\beta \ne \alpha$ таких, що $\beta \le_{\text{nat}} \alpha$.

Аналогічним позначенням ми користуємося і для довільної множини мономів.

(3) Відношення (лінійного) порядку $\leq$ на множині мономів $\mathfrak{M} = \{ x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n \}$ назвемо *глобальним порядком*, якщо виконані умови:

(a) якщо $x^\alpha \leq x^\beta$, то $x^{\alpha+\gamma} \leq x^{\beta+\gamma}$ для всіх $\gamma \in \mathbb{N}^n$;

(b) якщо $\alpha \leq_{\mathrm{nat}} \beta$, то $x^\alpha \leq x^\beta$.

(4) *Провідним мономом* $\operatorname{Lm} f$ многочлена $f \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ відносно глобального порядку $\leq$ назвемо такий моном x^α, який є найбільшим (відносно цього порядку) серед усіх мономів, які входять в f з ненульовими коефіцієнтами. Якщо $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ — коефіцієнт при $\operatorname{Lm} f$, *провідним членом* цього многочлена зветься $\operatorname{Lt} f = c \operatorname{Lm} f$.

(5) Для кожної множини $M \subseteq \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ позначимо $\operatorname{Lm} M = \{ \operatorname{Lm} f \mid f \in M \}$.
(Якщо треба явно вказати порядок, пишемо $\operatorname{Lm}_l ef$ та $\operatorname{Lm}_\leq M$).

Означення 1.3. (1) *Базою Ґребнера ідеалу* $I \subseteq \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ (відносно глобального порядку $\leq$) зветься така підмножина $G \subseteq I$, що для кожного полінома $f \in I$ знайдеться поліном $g \in I$ такий, що $\operatorname{Lm} g \leq_{\mathrm{nat}} \operatorname{Lm} f$.

(2) База Ґребнера G ідеалу I зветься *зведеною*, якщо з того, що $\operatorname{Lm} g \leq_{\mathrm{nat}} \operatorname{Lm} h$, де $g, h \in G$, випливає, що $g = h$.

(3) База Ґребнера G ідеалу I зветься *цілком зведеною*, якщо жоден поліном $h \in G$ не містить мономів w таких, що $\operatorname{Lm} g \leq_{\mathrm{nat}} w$ для деякого $g \in G$, і, крім того, коефіцієнт біля провідного монома у кожному поліномі $g \in G$ дорівнює 1.

Звичайно, база Ґребнера (навіть зведена) визначена неоднозначно.

Встановимо основні властивості цих понять.

Лема 1.4 (Лема Діксона)**.** *Для довільної підмножини* $A \subseteq \mathbb{N}^n$ *множина* $\min_{\mathrm{nat}} A$ *скінченна.*

Доведення. Скористаємося індукцією за n. База індукції $n = 1$ очевидна. Припустимо, що твердження вірне для n і розглянемо підмножину $A \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$. Позначимо A_i множину всіх тих векторів $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, для яких вектор $(\alpha, i) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, i) \in A$, $B_i = \min_{\mathrm{nat}} A_i$ і $B^* = \min_{\mathrm{nat}}(\bigcap_{i=0}^\infty B_i)$. За припущенням індукції, множини B_i та B^* скінченні. Тому $B^* \subseteq \bigcap_{i=1}^m B_i$ для деякого m. Позначимо $B = \{ (\alpha, i) \mid 1 \leq i \leq m,\ \alpha \in B_i \}$. Це знову скінченна множина, тоум достатньо довести, що $\min_{\mathrm{nat}} A \subseteq B$.

Нехай $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}) \in A$, $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $i = \alpha_{n+1}$. Тоді $\alpha' \in A_i$, отже, існує $\beta' \in B_i$, для якого $\beta' \leq_{\mathrm{nat}} \alpha'$. Якщо $i \leq m$, то $\beta = (\beta', i) \in B$ і $\beta \leq_{\mathrm{nat}} \alpha$. Якщо ж $i > m$, існує $\beta'' \in B^*$ такий, що $\beta'' \leq_{\mathrm{nat}} \beta'$. Тоді $\beta'' \in B_j$ для деякого $j \leq m < i$, отже, $(\beta'', j) \leq_{\mathrm{nat}} \alpha$ і $(\beta'', j) \in B$. $\square$

Наслідок 1.5. *Кожен ідеал* $I \subseteq \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ *має скінченну зведену базу Гребнера.*

Доведення. Для кожного монома $w \in \min_{\text{nat}}(\operatorname{Lm} I)$ виберемо поліном $f_w \in I$, для якого $\operatorname{Lm} f_w = w$. Тоді $G = \{ f_w \mid w \in \operatorname{Lm} I \}$ і буде скінченною зведеною базою Гребнера ідеалу I. □

Вправа 1.6. Довіедіть, що кожен ідеал має цілком зведену базу Гребнера.

Наслідок 1.7. *Глобальний порядок є* повним, *тобто, кожна підмножина* M *множини мономів* $\mathfrak{M}$ *містить найменший елемент відносно цього порядку. Зокрема, не існує нескінченних спадних ланцюгів* $w_1 > w_2 > w_3 > \dots$.

Доведення. Найменшим елементом в M буде найменший серед (скінченної) множини $\min_{\text{nat}} M$. Якщо ж $w_1 > w_2 > w_3 > \dots$ — нескінченний спадний ланцюг, позначимо w найменший серед елементів w_i. Тоді $w = w_k$ для деякого k, отже, $w_k > w_{k+1}$ неможливо. □

Тепер терема Гільберта про нулі випливає з такого факту.

Твердження 1.8. *База Ґребнера* G *ідеалу* I *є його множиною твірних.*

Доведення. Нехай $f \in I$, $x^\alpha = \operatorname{Lm} f$. Знайдемо такий поліном $g_1 \in G$, для якого $\operatorname{Lm} g_1 = x^\beta \leq_{\text{nat}} x^\alpha$. Покладемо $h_1 = \operatorname{Lt} f / \operatorname{Lt} g$. Тоді $\operatorname{Lm}(f - h_1 g) < \operatorname{Lm} f$. Поліном $f_1 = f - c_1 x^{\gamma_1} g$ знову належить I, тому теж можна підібрати $g_2 \in G$ і $h_2 \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ такі, що $\operatorname{Lm}(f_1 - h_2 g_2) < \operatorname{Lm} f_1$. Оскільки нескінченних спадних ланцюгів немає, врешті-решт ми подамо f у вигляді $\sum_k h_k g_k$, де $g_k \in G$, $h_k - \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. □

Вправа 1.9. Доведіть, що зведена база Ґребнера ідеалу I є *мінімальною* множиною твірних в тому розумінні, що з неї не можна вилучити жоден поліном (після цього вона перестане бути множиною твірних I).

Зараз існують ефективні алгоритми для побудови баз Ґребнера. Вони містіться, наприклад, у системі SINGULAR [**GP**], яка добре себе зарекомендувала у багатьох застосуваннях. Більшість з них ґрунтується на *алгоритмі Бухбергера*. Ми дамо його «неформальний» опис; кожен бажаючий може легко перетворити його на цілком формальний.

Означення 1.10. Фіксуємо деякий глобальний порядок $\leq$.

(1) Для довільних многочленів f, g з $\operatorname{Lm} f = x^\alpha$, $\operatorname{Lm} g = x^\beta$, позначимо $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, де $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$, і $\operatorname{sp}(f, g) = (\operatorname{Lt} g / x^\gamma) f - (\operatorname{Lt} f / x^{\geq}) g$.

(2) Для довільної скінченної множини $S = \{ g_1, g_2, \dots, g_m \} \subseteq \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ і довільного полінома f позначимо через $(f|S)$ такий поліном, що $f - (f|S) = \sum_{i=1}^{m} h_i g_i$, причому виконані умови:
   (a) $(f|S)$ не містить мономів w, для яких $\operatorname{Lm} g \le w$ для якогось $g \in S$;
   (b) $\operatorname{Lm} h_i g_i \le \operatorname{Lm}(f - (f|S))$ для всіх $i = 1, 2, \dots m$.

Поліном $(f|S)$ зветься (зведеним) залишком полінома f відносно множини S.

Вправа 1.11. Доведіть, що:

(1) Зведений залишок $(f|S)$ завжди існує.
(2) Якщо G — база Гребнера ідеалу I, то $(f|S)$ визначений однозначно, причому $(f|S) = 0$ тоді й лише тоді, коли $f \in I$.

Алгоритм 1.12.
Вхід: деяка (скінченна) множина твірних S ідеалу I.
Вихід: база Ґребнера G цього ідеалу.

(1) Для кожної пари $\{f, g\}$), де $f, g \in S$, утворюємо $h(f, g) = (\operatorname{sp}(f, g)|S)$.
(2) Якщо $h(f, g) \neq 0$, додаємо $h(f, g)$ до S.
(3) Якщо до S було додано хоча б один многочлен повертаємося до кроку (1).
(Очевидно, надалі достатньо перевіряти лише ті пари, які містять принаймні один новий поліном).
(4) Якщо до S не було надано жодного многочлена, то $G = S$.

Ми не будемо доводити, що цей алгоритм дійсно дає базу Ґребнера. Таке доведення можна знайти, наприклад, у книгах [**GP**, **КЛО**]. Зауважимо, що так побудована база Ґребнера не є, взагалі кажучи, зведеною. Втім, одержати з неї зведену (навіть цілком зведену) базу зовсім просто.

2. Афінні многовиди

Ми фіксуємо деяке алгебрично замкнене поле $\mathbb{F}$ (наприклад, поле $\mathbb{C}$ комплексних чисел). Підмножина $X \subseteq \mathbb{F}^n$ зветься *афінним (алгебричним) многовидом*, якщо вона збігається зі множиною розв'язків деякої системи рівнянь вигляду (1.1). Як ми бачили, насправді X визначається ідеалом $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$. Ми пишемо $X = \mathcal{V}(f_1, f_2, \dots, f_m) = \mathcal{V}(I)$. Розгляд алгебрично замкнених полів пов'язаний з тим, що інакше найпростіші системи можуть взагалі не мати розв'язків (наприклад, «система» з одного рівняння $x^2+1 = 0$ над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел). Звичайно, над будь-яким полем можна написати системи, якы не мають розв'язків. Наприклад, такою є система

$$x^3 - 2y^2 = 0,$$
$$x^2 - y^3 = 0,$$
$$xy - 1 = 0.$$

Дійсно, в даному випадку ідеал I містить поліном $(x^3-2y^2)-x(x^2-y^3) = y^2(xy-2)$, а тому й поліноми $y^2 = y^2(xy-1) - y^2(xy-2)$ та $1 = x^2y^2 - (xy+1)(xy-1)$. Оскільки 1 ніде не обертається в нуль, $\mathcal{V}(I) = \emptyset$. Але з алгебричної замкненості поля випливає, що лише така «формальна несумісність» може бути причиною того, що система не має рівнянь. Це показує *теорема Гільберта про нулі*:

Теорема 2.1. *Якщо поле $\mathbb{F}$ алгебрично замкнене, а I — такий ідеал в $\mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, що $1 \notin I$, то $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$.*

Ми не будемо доводити цю теорему, оскільки це потребує істотних технічних розглядів. Читач може знайти доведення, наприклад, у книгах [**АМ**, **Др**].

Часто корисною є інша форма цієї теореми. *Коренем* $\sqrt{I}$ ідеала I зветься множина всіх таких многчленів f, що $f^d \in I$ для деякого d.

Вправа 2.2. Доведіть, що $\sqrt{I}$ також є ідеалом.

Теорема 2.3. *Якщо поліном g обертається в нуль в усіх точках з $\mathcal{V}(I)$, то $g \in \sqrt{I}$.*

(Оберене твердження очевидне).

Доведення. Нехай $I = \langle\, f_1, f_2, \ldots, f_m \,\rangle$. Розглянемо ідеал

$$I^* = \langle\, f_1, f_2, \ldots, f_m, x_{n+1}g - 1 \,\rangle$$

у кільці $\mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]$. З умови, накладеної на поліном g, випливає, що $\mathcal{V}(I^*) = \emptyset$, отже, $1 \in I^*$, тобто $1 = \sum_{i=1}^m h_i f_i + h(x_{n+1}g - 1)$, де h і h_i — поліноми з $\mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]$. Підставимо в цю рівність замість x_{n+1} дріб $1/g$. Одержимо рівність

$$\sum_{i=1}^m h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1/g) f_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$$

(нагадаємо, що x_{n+1} не входить ані до f_i, ані до g). Домножимо цю рівність на спільний знаменник (очевидно, він має вигляд g^d). Одержимо рівність поліномів $\sum_{i=1}^m \tilde{h}_i f_i = g^d$ для деяких $\tilde{h}_i \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Отже, $g^d \in I$. $\square$

Для кожної підмножини $X \subseteq \mathbb{F}^n$ позначимо

$$\mathcal{I}(X) = \{\, f \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \mid f(a) = 0 \text{ для всіх точок } a \in X \,\}.$$

Тоді теорему 2.3 можна записати формулою $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$.

Якщо $\mathbb{K}$ — підполе $\mathbb{F}$, то множину тих точок афінного многовиду X, координати яких належать $\mathbb{K}$, позначають $X(\mathbb{K})$. Якщо всі многчлени системи (1.1) належать до $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, кажуть, що многовид X *визначений над* $\mathbb{K}$.

Нескладно перевірити (зробіть це), що перетин довільної множини афінних многовидів у $\mathbb{K}^n$ знову є афінним многовидом, так само, як і об'єднання скінченної кількості таких многовидів. Тому на множині $\mathbb{F}^n$ можна визначити топологію, оголосивши її замкненими підмножинами саме афінні многовиди. Ця топологія зветься *топологією Зариського*, а множина $\mathbb{F}^n$, розглянута з цією топологією, зветься *афінним простором* над полем $\mathbb{F}$ і позначається $\mathbb{A}^n$, або $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}}$, якщо треба нагадати поле $\mathbb{F}$. Кожен афінний многовид X успадковує топологію Зариського з афінного простору. Зауважимо, що, якщо $\mathbb{F}$ — поле дійсних або комплексних чисел, на множині $\mathbb{A}^n(\mathbb{F})$ визначена ще «звичайна» топологія, породжена евклідовою метрикою. Всі афінні многовиди замкнені в евклідовій топології, але, звичайно, далеко не всі евклідово-замкнені множини є афінними многовидами. Наприклад, на афінній прямій $\mathbb{A}^1$ лише скінченні множини (і вся пряма) є замкненими в топології Зариського (чому?). Отже, топологія Зариського дуже слабка; зокрема, вона не є *гаусдорфовою*: у двох точок, як правило, не існує околів, які не перетинаються.

Вправа 2.4. Доведіть, що афінний простір у топології Зариського є *незвідним*, тобто, довільні дві непорожні відкриті множини в ньому перетинаються.

3. Проективні многовиди

Означення. Топологія Зариського. Зв'язок з афінними. Раціональні та регулярні відображення. Приклади (квадрика на проективні площині ізоморфна $\mathbb{P}^1$). Домінантні відображення $f : X \to Y$ ($\operatorname{Im} f$ є щільним у Y). Добуток домінантних раціональних відображень. Біраціональні відображення, приклади.

Кратно-проективні многовиди: ті, що задаються у прямому добутку $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ рівняннями $f_i(x_0, x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m)$, однорідними окремо за $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, окремо за $(y_0, y_1, \ldots, y_m)$. Афінне покриття $\mathbb{A}^n_i \times \mathbb{A}^m_j$ $(0 \le i \le n,\ 0 \le j \le m)$: там, де $x_i \ne 0,\ y_j \ne 0$.

Теорема 3.1 (Теорема Сегре)**.** *Відображення Сегре* $\sigma : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{nm+n+m}$ *таке, що*

$$\sigma(a_0 : a_1 : \ldots : a_n,\ b_0 : b_1 : \ldots : b_m) = (a_i b_j) \in \mathbb{P}^{nm+n+m},$$

де $\mathbb{P}^{nm+n+m}$ *ототожнений зі множиною класів пропорційності ненульових матриць розміру* $n \times m$*, є замкненим зануренням.*

([**Др**, Твердження 2.3.9])

Отже, кратно-проективні многовиди, зокрема, добутки многовидів, можна розглядати, як проективні, застосувавши занурення Сегре.

Ще приклад замкненого занурення — занурення Веронезе $v_{k,n}$: $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$, де $N = \binom{n+k}{k} - 1$ [**Др**, Вправа 2.3.11 (6)].

Основна властивість проективних многовидів ([**Др**, Теорема 2.4.12]):

Теорема 3.2. *Якщо многовид X є проективним, а Y — довільний, то проекція $p_Y : X \times Y \to Y$ є* замкненим відображенням.

Наслідок 3.3. (1) *Якщо X — проективний многовид, то образ будь-якого регулярного відображення $X \to Y$ є замкненим в Y.*
(2) *Якщо X — зв'язний проективний многовид, то будь-яка регулярна на X функція є постійною.*

4. Скінченні відображення

[**Др**, Розділ 3.1], [**Ш**, Гл. 1, § 5, п.3].

Означення 4.1. (1) Домінантне регулярне відображення $f : X \to Y$ афінних многовидів зветься *скінченним*, якщо кільце регулярних функцій $\mathbb{F}[X]$ є скінченнопородженим $\mathbb{F}[Y]$-модулем. (Зауважимо, що з домінантності випливає, що відображення кілець $f^* : \mathbb{F}[Y] \to \mathbb{F}[X]$ є зануренням).
(2) Регулярне відображення $f : X \to Y$ зветься *скінченним*, якщо існує таке афінне відкрите покриття $Y = \bigcup_{i=1}^m U_i$, що всі прообрази $f^{-1}(U_i)$ також афінні, а всі індуковані відображення $f^{-1}(U_i) \to U_i$ є скінченними.

Можна довести (хоча й непоросто, див. [**Др**, Теорема 3.1.2]), що тоді прообраз довільного афінного підмноговиду $V \subseteq Y$ є також афінним.

Приклад 4.2. Нехай підпростір $L \subset \mathbb{P}^n$ задано системою лінійно незалежних лінійних рівнянь $L_k(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ $(0 \le k \le m)$, а $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективний многовид, який не має спільних точок з L. Тоді *проекцією з підпростору* L зветься відображення $\pi : X \to \mathbb{P}^m$ таке, що $\pi(x) = (L_0(x) : L_1(x) : \dots : L_m(x))$ (очевидно, воно регулярне на X). Якщо $Y = \pi(X)$ (це замкнена підмножина в $\mathbb{P}^m$), то відображення $\pi : X \to Y$ є скінченним.

Доведення. Можна вважати (переобравши координати в $\mathbb{P}^n$), що $L_i = x_i$. Позначимо $U_i = Y \cap \mathbb{A}_i^m \subset \mathbb{P}^m$. Тоді $X_i = \pi^{-1}(U_i) = X \cap \mathbb{A}_i^n$ — афінний многовид і $\pi(X_i) = Y_i$. Треба перевірити, що відображення $\pi : X_i \to Y_i$ є скінченним. Нехай $i = 0$, $z_j = x_j/x_0$ — афінні координати на X_0. Тоді $z_1, z_2, \dots, z_m$ — афінні координати на Y_0. Розглянемо регулярне відображення $X \to \mathbb{P}^{m+1}$, яке переводить

$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ у $(x_0 : x_1 : \ldots : x_{m+1})$. Його образ Z замкнений, отже, $Z = PV(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ для деяких однорідних многочленів $f_1, f_2, \ldots, f_r$ з $\mathbb{F}[x_0, x_1, \ldots, x_{m+1}]$. Точка $(0 : 0 : \cdots : 0 : 1)$ не належить Z, отже, система рівнянь $f_1 = \cdots = f_r = x_0 = \cdots = x_m$ не має розв'язків у $\mathbb{P}^{m+1}$. За проективною версією теореми Гільберта про нулі, існує таке k, що $x_{m+1}^k \in \langle f_1, f_2, \ldots, f_r, x_0, x_1, \ldots, x_m \rangle$, тобто,

$$x_{m+1}^k = \sum_{i=1}^{r} g_i f_i + \sum_{j=0}^{m} h_j x_j$$

для деяких (однорідних) многочленів $g_1, g_2, \ldots, g_r, h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$, причому многочлени h_j мають степінь $k-1$. Оскільки многочлени f_i обертаються в нуль на X, многочлен $x_{m+1}^k - \sum_{j=0}^m h_j x_j$ також обертається в нуль на X. Тоді на X_0 має місце рівність

$$z_{m+1}^d - \sum_{j=0}^{m} \bar{h}_j z_j = 0,$$

де $\bar{h}_j = h_j(z_0, z_1, \ldots, z_{m+1})$, де $z_0 = 1$ і $\deg \bar{h}_j < d$. Ця рівність показує, що координата $z_{m+1} \in \mathbb{F}[X_0]$ є цілою над $\mathbb{F}[Y_0]$ (який породжений саме образами $z_1, z_2, \ldots, z_m$). Ясно, що те саме можна застосувати до всіх координат z_k при $k > m$. Отже, відображення $X_0 \to Y_0$ є скінченним. □

Теорема 4.3. *Для кожного проективного многовиду X існує скінченний (домінантний) морфізм $X \to \mathbb{P}^d$ для деякого d.*

Доведення. Доведення проведемо індукцією за розмірністю n, для якої $X \subset \mathbb{P}^n$. Виберемо точку $p \notin X$. Можна вважати, що $p = (1 : 0 : \cdots : 0)$. Вона задається рівняннями $x_1 = \cdots = x_n = 0$, тому проектування з неї задає скіченне відображення $f : X \to Y \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$. За індукцією, існує скінченне відображення $g : Y \to \mathbb{P}^d$. Тоді $gf : X \to \mathbb{P}^d$ також скінченне. □

Наслідок 4.4. *Для кожного афінного многовиду існує скінченний морфізм $X \to \mathbb{A}^d$ для деякого d.*

5. Розмірність

(Дивись [**Др**, Розділ 3.2], [**Ш**, Глава I, § 6]).

Число d з теореми 4.3 зветься *розмірністю* проективного многовиду X і позначається $\dim X$.

Теорема 5.1. *Якщо многовид X незвідний, то $\dim X = \operatorname{tr.deg}_{\Bbbk} \Bbbk(X)$ (*степінь трансцендентності *поля $\Bbbk(X)$ над полем $\Bbbk$, тобто, найбільша кількість алгебоично незалежних елементів, які можна вибрати в полі $\Bbbk$). Якщо многовид X звідний, а $X_1, X_2, \ldots, X_s$ — його незвідні компоненти, то $\dim X = \max(\dim X_1, \dim X_2, \ldots, \dim X_s)$.*

Такий самий результат має місце і для афінних многовидів, якщо розмірністю назвати число d з наслідку 4.4. Тепер ми можемо прийняти результат теореми 5.1 за означення розмірності загального многовиду.

Твердження 5.2. *Якщо Y — підмноговид в X, то $\dim Y \leq \dim X$. Якщо X незвідний, а $Y \neq X$, то $\dim Y < \dim X$.*

Доведення. Очевидно, довести достатньо останнє твердження, припускаючи, що й Y незвідний. Крім того, обидва многовиди можна вважати афінними. Нехай X — замкнена підмножина в $\mathbb{A}^n$, $d = \dim Y$. Сереж координат $x_1, x_2, \dots, x_n$ на mA^n можна вибрати d алгебрично незалежних на Y; можна вважати, що це $x_1, x_2, \dots, x_d$. Тоді вони алгебрично незалежні на X, отже, $\dim X \geq \dim Y$. Припустимо, що $\dim X = d$. Оскільки $Y \neq X$, існує регулярна функція $f \in \mathbb{k}[X]$, яка обертається в нуль на Y. Ця функція алгебрична над підполем $\mathbb{k}\left(x_1, x_2, \dots, x_d\right) \subseteq \mathbb{k}(X)$. Запишемо рівняння найменшого степеня, якому вона задовольняє:

$$a_0\left(x_1, x_2, \dots, x_d\right) f^k + a_1\left(x_1, x_2, \dots, x_d\right) f^{k-1} + \dots + a_k\left(x_1, x_2, \dots, x_d\right) = 0.$$

Очевидно, тут $a_k\left(x_1, x_2, \dots, x_d\right) \neq 0$, тому цей многочлен не обертається в нуль і на Y (бо $x_1, x_2, \dots, x_d$ алгебрично незалежні на Y). Але $f|_Y = 0$ — протиріччя. □

Теорема 5.3. (1) *Якщо афінний або проективний многовид X задаєтъся одним рівнянням у просторі $\mathbb{A}^n$ або $\mathbb{P}^n$, то всі його компоненти мають розмірність $n-1$.*

(2) *Навпаки, якщо X — афінний або проективний многовид у просторі $\mathbb{A}^n$ або $\mathbb{P}^n$, всі компоненти якого мають розмірність $n-1$, то він задаєтьсмя одним рівнянням $f = 0$, причому $\mathcal{I}(X) = \langle f \rangle$.*

Доведення. Ми доведемо теорему для афінного випадку, залишаючи проективний як вправу.

(1). Нехай $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$. Тоді $\dim X < n$. Розкладемо f на незвідні множники: $f = f_1^{k_1} \dots f_m^{k_m}$, де многочлени $f_1, f_2, \dots, f_m$ попарно неасоційовані. Тоді компонентами X є многовиди $X_i = V(f_i)$. Отже, можна з самого початку вважати, що f незвідний. Нехай змінна x_n входить до многчлена f. Тоді координати $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ є алгебрично незалежними на X. Дійсно, якщо $g\left(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\right) = 0$ на X, то, за теоремою про нулі, $f \mid g^r$ для деякого r, що неможливо, бо g не містить змінної x_n. Отже, $\dim X \geq n-1$, тобто, $\dim X = n-1$.

(2). Знов-таки, X можна вважати незвідним. Оскільки $X \neq \mathbb{A}^n$, існує ненульовий многочлен $f \in \mathcal{I}(X)$, який теж можна вважати незвідним (чому?). Тоді $X \subseteq V(f)$. Але X і $V(f)$ незвідні, $\dim X = \dim V(f) = n-1$, тому $X = V(f)$. Оскільки f незвідний, $\mathcal{I}(V(f)) = \langle f \rangle$. □

Теорема 5.4. *Нехай форма $f \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ степеня m не обертається в нуль на жодній компоненті проективного многовиду $X \subseteq \mathbb{P}^n$ розмірності d. Тоді*

(1) $\dim X \cap PV(f) = d - 1$.
(2) *Існують форми $f = f_0, f_1, \dots, f_d$ степеня m такі, що відображення $\phi : X \to \mathbb{P}^d$, $x \mapsto (f_0(x) : f_1(x) : \dots : f_d(x))$ є сюр'єктивним і скінченним.*

Доведення. Перш за все зауважимо, що завжди можна знайти форму заданого степеня m, яка не обертається в нуль на жодній компоненті X. Дійсно, виберемо по точці на кожній компоненті, виберемо гіперплощину H, яка не містить жодну з цих точок і розглянемо форму L^m, де $L = 0$ — рівняння гіперплощини H. Позначимо $X_1 = X \cap PV(f)$. Це многовид розмірності щонайбільше $d - 1$. Знайдемо форму f_1 степеня m, яка не обертається в нуль на жодній компоненті X_1 і позначимо $X_2 = X_1 \cap PV(f_1)$. Продовжуючи цей процес, одержимо послідовність форм f_k степеня m та многовидів $X_k = X_{k-1} \cap PV(f_k)$, де $\dim X_k \le d - k$. Тоді напевне $X_{d+1} = \emptyset$, отже, форми $f = f_0, f_1, \dots, f_d$ не мають на X спільних нулів. Розглянемо відображення $\phi : X \to \mathbb{P}^d$, задане формами $f_0, f_1, \dots, f_d$. Якщо $Y = \operatorname{Im} \phi$, то Y замкнене в $\mathbb{P}^d$, а відображення $\phi : X \to Y$ скінченне (задача 2.10). Отже, $\dim Y = d$, а тоді $Y = \mathbb{P}^d$ за твердженням 5.2. Крім того, якщо $\dim X_1 < d - 1$, то вже $X_d = \emptyset$, а тоді $(0 : 0 : \dots : 0 : 1) \notin \operatorname{Im} \phi$, що неможливо. Отже, $\dim X \cap PV(f) = d - 1$. □

Без обмежень на f можливо, що $\dim X \cap PV(f) = \dim X$ (якщо f обертається в нуль на компоненті максимальної розмірності), отже, можна лише твердити, що $\dim X \cap PV(f) \ge \dim X - 1$

Насправіді, дуже важливим є таке істотне уточнення теореми 5.4

Теорема 5.5. *Якщо $X \supseteq \mathbb{P}^n$ — незвідний проективний многовид, $d = \dim X$, $Y = X \cap PV(f)$ для деякого однорідного многочлена f такого, що $X \not\supseteq PV(f)$, то кожна компонента многовиду Y має розмірність $d-1$. Те саме вірно і для випадку незвыдного афінного многовиду $X \subseteq \mathbb{A}^n$ та многочлена f, який не обертається в нуль на X,за умови, що $Y \cap V(f) \neq 0$.*

Для доведення нам потрібна наступна лема.

Лема 5.6. *Нехай $B = \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_d] \subseteq A$ — скінченне розширення кілець, многочлени $g, h \in B$ співпервинні (не мають спільних дільників) і $g \mid (ha)^m$ для деякого $a \in A$. Тоді існує таке r, що $g \mid a^r$.*

Доведення. Замінивши h на h^m і a на a^m, можна вважати, що $g \mid ha$, тобто, $ha = gu$ для деякого $u \in A$. Оскільки розширення скінченне, u задовольняє рівняння $u^r + b_1 u^{r-1} + \dots + b_r = 0$, де $b_1, b_2, \dots, b_r \in B$.

З леми Ґаусса випливає, що тоді мінімальний многочлен елемента u над полем $\mathbb{F}(x_1, x_2, \dots, x_d)$ має всі коефіцієнти в кільці B, тому можна вважати, що це й є $u^r + b_1u^{r-1} + \dots + b_r$. Тоді мінімальний многочлен елемента $a = (g/h)u$ — це $a^r + (g/h)b_1a^{r-1} + (g/h)^2b_2a^{r-2} + \dots + (g/h)^rb_r$. Але те саме міркування показує, що всі коефіцієнти цього многочлена теж належать B, тобто, $h^i \mid g^ib_i$. Оскільки g і h співпервинні, звідси $h^i \mid b_i$, а тоді $g \mid a^r$. $\square$

Доведення теореми 5.5. Як у доведенні теореми 5.4, побудуємо скінченне відображення $\phi : X \to \mathbb{P}^d$, яке задається набором форм $(f_0, f_1, \dots, f_d)$, де $f_1 = f$. Позначимо $Y = \{\, x \in X \mid f_0(x) \neq 0 \,\} = \phi^{-1}(\mathbb{A}^d_0)$. Це афінна відкрита підмножина в X, причому набір функцій $(g_1, g_2, \dots, g_d)$, де $g_i = f_i/f_0$, задає скінченне відображення $Y \to \mathbb{A}^d$, або, що те саме, занурення $\phi^* : B = \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_d] \hookrightarrow A = \mathbb{F}[Y]$, яке переводить x_i у g_i. Оскільки компоненти $X \cap PV(f)$ є замиканнями компонент $Y \cap V(g)$, достатньо довести, що кожна компонента Z многовиду $Y_g = Y \cap V(g)$ має розмірність $d - 1$. Ми покажемо, що функції $g_2, g_3, \dots, g_d$ є алгебрично незалежними на многовиді Z.

Дійсно, припустимо, що існує такий ненульовий многочлен $F \in \mathbb{F}[x_2, x_3, \dots, x_d]$, що $h|_Z = 0$, де $h = F(g_2, g_3, \dots, g_d)$. Згідно з теоремою 5.4, можна вважати, що $Y_g = Z \cap Z'$, де Z' власна замкнена підмножина в Y_g. Знайдемо функцію $a \in \mathbb{F}[Y_g]$, яка не є тотожним нулем на Z, але $a|_{Z'} = 0$. Тоді $ah|_{Y_g} = 0$, отже, за теоремою 2.3, існує таке m, що $g \mid (ah)^m$. Зауважимо, що $g = \phi^*(x_1)$, а $h = \phi^*F(x_2, x_3, \dots, x_d)$, а в кільці $B = \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_d]$ елементи x_1 та $F(x_2, x_3, \dots, x_d)$ співпервинні. За лемою 5.6, $g \mid a^r$ для деякого r, а тоді $a|_Z = 0$, що протирічить вибору a. $\square$

Наслідок 5.7. *Якщо $X \subseteq \mathbb{P}^n$ — проективний многовид розмірності d, то для довільних форм $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$, де $m \leq d$, $\dim X \cap PV(f_0, f_1, \dots, f_m) \geq d - m$, зокрема, цей перетин непорожній і довільні d форм мають спільний нуль на X. Наприклад, $\dim PV(f_1, f_2, \dots, f_m) \geq n - m$ і довільні n однорідних рівнянь $f_k = 0$ $(1 \leq k \leq n)$, де $f_k \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$, мають спільний ненульовий розв'язок. Більш того, кожна компонента многовиду $X \cap PV(f_0, f_1, \dots, f_m)$ має розмірність щонайменше $d - m$.*

Для афінних многовидів звідси випливає

Наслідок 5.8. *Нехай X — незвідний афінний многовид розмірності d.*

(1) *Якщо $f \in \mathbb{F}[X]$ — необоротна ненульова регулярна функція, то кожна компонента підмноговиду $V(f) \subset X$ має розмірність $d - 1$.*

(2) *Якщо* $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathbb{F}[X]$ *— такі регулярні функції, що* $V(f_1, f_2, \dots, f_m) \neq \emptyset$ *(тобто,* $1 \notin \langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$*), то кожна компонента підмноговиду* $V(f_1, f_2, \dots, f_m) \subseteq X$ *має розмірність щонайменше* $d - m$*.*

Ще один наслідок — теорема про розмірність перетину.

Наслідок 5.9. (1) *Нехай* $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n$ *— проективні многовиди розмірностей, відповідно,* d *і* m*. Тоді кожна компонента перетину* $X \cap Y$ *має розмірність щонайменше* $d + m - n$*. Зокрема, якщо* $d + m \leq n$*, цей перетин непорожній.*

(2) *Нехай* $X, Y \subseteq \mathbb{A}^n$ *— замкнені підмноговиди розмірностей, відповідно,* d *і* m*, причому* $X \cap Y \neq \emptyset$*. Тоді кожна компонента перетину* $X \cap Y$ *має розмірність щонайменше* $d + m - n$*.*

Доведення. (2). Позначимо $\Delta = \{(x, x)\}$ діагональ добутку $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$. Тоді, очевидно, $X \cap Y \simeq (X \times Y) \cap \Delta$. Але $\dim(X \times Y) = d + m$, а Δ задається n рівняннями $x_i = y_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

(1). Для кожного проективного многовиду $X = PV(f_1, f_2, \dots, f_m) \subseteq \mathbb{P}^n$ позначимо $\widetilde{X} = V(f_1, f_2, \dots, f_m) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$. Очевидно, $\dim \widetilde{X} = \dim X + 1$ і $\widetilde{X}$ завжди містить нульову точку. Тому розмірність компонент многовиду $\dim(\widetilde{X} \cap \widetilde{Y})$ щонайменше $(d+1) + (m+1) - (n+1) = (d+m-n)+1$. Оскільки $\widetilde{X \cap Y} = \widetilde{X} \cap \widetilde{Y}$, кожна компонента $X \cap Y$ має розмірність щонайменше $d + m - n$. Зауважимо, що при $d + m \geq n$, всі компоненти $\widetilde{X} \cap \widetilde{Y}$ мають додатні розмірності, тобто, не зводяться до нульової точки. □

Наслідок 5.10. $\dim X$ *дорівнює максимальній довжині* d *спадного ланцюга* $X = X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_{d-1} \supset X_d$ *незвідних замкнених підмноговидів.*

6. Розмірність шарів і теорема Шевалле

Ми дослідимо будову регулярних відображень $\phi : X \to Y$, зокрема, *шарів* $\phi^{-1}(y)$ та *образу* $\phi(X)$. Без обмеження загальності, відображення ϕ можна вважати *домінантним* (інакше просто треба замінити Y на $\overline{\phi(X)}$). Результатом цих досліджень стануть такі дві теореми.

Теорема 6.1. *Нехай* $\phi : X \to Y$ *— регулярне домінантне відображення незвідних многовидів,* $\dim X = n$, $\dim Y = m$*. Тоді*

(1) *Якщо шар* $\phi^{-1}(y)$ *непорожній, то він має розмірність щонайменше* $n - m$*.*

(2) *Існує відкрита непорожня підмножина* $U \subseteq Y$*, така, що* $\dim \phi^{-1}(y) = n - m$ *для всіх точок* $y \in U$ *(зокрема, всі ці шари непорожні).*

Зауважимо, що, оскільки відображення ϕ домінантне, $m \leq n$.

Теорема 6.2 (Теорема Шеваллє). *Образ регулярного відображення $\phi : X \to Y$ завжди є* конструктивною підмножиною *в Y, тобто, скінченним об'єднанням локально замкнених підмножин.*

Доведення. Очевидно, многовиди X і Y можна вважати афінними. Існує скінченне (а тому сюр'єктивне) відображення $\psi : Y \to \mathbb{A}^m$. Якщо $z = \psi(y)$, то $\psi^{-1}(z)$ — скіненна множина: $\psi^{-1}(z) = \{ y = y_1, y_2, \dots, y_k \}$, тому $(\psi\phi)^{-1}(z) = \bigcup_{i=1}^k \phi^{-1}(y_i)$. Останні підмножини є замкненими й не перетинаються. Отже, компоненти підмноговиду $\phi^{-1}(y)$ є також компонентами підмножини $(\psi\phi)^{-1}(z)$. Якщо відображення $\psi\phi : X \to \mathbb{A}^m$ задається функціями $(f_1, f_2, \dots, f_m)$, а $z = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, то шар $(\psi\phi)^{-1}(z)$ задається m рівняннями $f_i(x) = a_i$. За наслідком 5.8, якщо $\phi^{-1}(y) \neq \emptyset$, розмірності цих компонент щонайменше $n-m$. Це доводить твердження (1) теореми 6.1.

Позначимо $\mathbb{K} = \mathbb{F}(X)$, $\mathbb{L} = \mathbb{F}(Y)$, $A = \mathbb{F}[X]$, $B = \mathbb{F}[Y]$; тоді $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{L}$ і $\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{L}} \mathbb{K} = d = n - m$. Нехай $A = B[a_1, a_2, \dots, a_r]$ (як кільце). Серед елементів $a_1, a_2, \dots, a_r$ можна вибрати базу трансцендентності поля $\mathbb{K}$ над $\mathbb{L}$. Будемо вважати, що це $a_1, a_2, \dots, a_d$. Позначимо $A_0 = B[a_1, a_2, \dots, a_d]$, $\mathbb{K}_0 = \mathbb{L}\,(a_1, a_2, \dots, a_d)$. Тоді $\mathbb{K}$ — алгебричне розширення поля $\mathbb{K}_0$, тому кожен елемент a_i $(i > d)$ задовольняє рівняння вигляду $c_{i0}a_i^{k_i} + c_{i1}a^{k_i-1} + \dots + c_{ik_i} = 0$, де всі $a_{ij} \in \mathbb{A}_0$. Зауважимо, що A_0 є координатним кільцем афінного многовиду $X_0 = Y \times \mathbb{A}^d$. Позначимо $c = \prod_{i=d+1}^r c_{i0}$, $U_0 = D(c)$ (це відкрита афінна підмножина в X_0) і $U' = \phi^{-1}(U) = D(\phi^* c)$ (це відкрита афінна підмножина в X). Тоді $\mathbb{F}[U]$ є цілим розширенням $\mathbb{F}[U_0]$, отже, індуковане відображення $\phi_0 : U' \to U_0$ є скінченним, зокрема, сюр'єктивним. Тому $U_0 \subseteq \phi_0(X)$, а тому $U = pr_Y(U_0) \subseteq \phi(X)$ (це відкрита підмножина в Y, оскільки проекція є відкритим відображенням). Крім того, якщо $y \in U$, відображення $\phi^{-1}(y) \to y \times \mathbb{A}^d$ також є скінченним, тому $\dim \phi^{-1}(y) = d = n - m$, що доводить твердження (2) теореми 6.1.

Тепер теорема Шеваллє доводиться індукцією за $n = \dim X$. Дійсно, $f(X) \supseteq U$ (відкрита підмножина в Y). Позначимо $Y' = Y \setminus U$, $X' = \phi^{-1}(Y_1)$. Це власні замкнені підмноговиди, відповідно, в Y та в X. Тому, якщо $X_1, X_2, \dots, X_s$ — незвідні компоненти X', $\dim X_i < n$. За припущенням індукції, $\phi(X_i)$ — конструктивна підмножина в Y, а тоді й $\phi(X) = U \cap \phi(X')$ — конструктивна підмножина в Y. □

Наслідок 6.3. *Для кожного незвідного проективного многовиду X розмірності d існує скінченне бієктивне відображення $X \to Y$, де $Y \subseteq \mathbb{P}^{2d+1}$.*

Доведення. Нехай $X \subseteq \mathbb{P}^n$, де $n > 2d + 1$. У добутку $X \times X \times \mathbb{P}^n$ розглянемо підмноговид V, який складається з усіх трійок (a, b, c), в яких точки a, b, c належать одній проективній прямій. Очевидно,

V — замкнений підмноговид. Розглянемо його проекцію $\pi : V \to X \times X$. Якщо $a \neq b$, то прообраз пари (a,b) при проекції π — це трійки (a,b,c), в яких c належить прямій, що проходить через a і b, тому $\dim \pi^{-1}(a,b) = 1$. Оскільки такі пари утворюють відкриту підмножину в $X \times X$, з теореми 6.1 випливає, що $\dim V = 2d + 1 < n$. Тоді проекція X на $\mathbb{P}^n$ не сюр'єктивна. Виберемо точку p, яка не належить її образу. Проектування з цієї точки задає скінченне бієктивне відображення $X \to X' \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$. Ітеруючи цю конструкцію, ми й доведемо твердження. □

Теорема 6.4. *Нехай $f : X \to Y$ — регулярне сюр'єктивне відображення проективних многовидів, причому Y та всі шари $f^{-1}(y)$ незвідні, а $d = \dim f^{-1}(y)$ однакова для всіх $y \in Y$. Тоді многовид X незвідний.*

Наприклад, якщо X, Y незвідні, таким є й $X \times Y$ (розгляньте проекцію $X \times Y \to Y$).

Доведення. Нехай $X = \bigcup_i X_i$ — розклад X на незвідні компоненти, $Y_i = f(X_i)$. Тоді всі Y_i замкнені, $\bigcup_i Y_i = Y$, але Y незвідний, тому існують номери i, для яких $f(X_i) = Y$. Позначимо $M = \{\, j \mid Y_j \neq Y \,\}$ і $Y' = Y \setminus \bigcup_{j \in M} Y_j$. Це відкрита підмножина в Y, тому $X' = f^{-1}(Y')$ — відкрита підмножина в X. Покладемо $X'_j = X' \cap X_j$ $(j \in M)$. Це відкрита підмножина в X_j і $f(X'_j) = Y'$. Позначимо f_j обмеження f на X_j і $m_j = \min \dim \left\{ f_j^{-1}(y) \mid x \in Y' \right\}$. В Y' є відкрита підмножина U, на якій $\dim f_j^{-1}(y) = m_j$. Зауважимо, що для $y \in U$

$$f^{-1}(y) = \bigcup_{j \in M} f_j^{-1}(y) \quad \text{і} \quad \dim f^{-1}(y) = d.$$

Оскільки $f^{-1}(y)$ незвідний, існує номер $k \in M$, для якого $f_k^{-1}(y) = f^{-1}(y)$, звідки $m_k = d$. Тоді $\dim f_k^{-1}(y) = d$ для всіх точок $y \in Y$, а тому $f^{-1}(y) = f_k^{-1}(y)$. Звідси, очевидно, випливає, що $X'_k = X'$, а тому $X_k = X$. □

6.1. **Прямі на поверхнях.** Нехай $L \subset \mathbb{P}^n$ $(n > 2)$ — пряма, яка проходить через точки $a = (a_0 : a_1 : \ldots : a_n)$ та $b = (b_0 : b_1 : \ldots : b_n)$, де $a \neq b$. Позначимо $p_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$. Набір (p_{ij}) можна розглядати, як точку в $\mathbb{P}^N$, де $N = \binom{n+1}{2} - 1 = (n-1)(n+2)/2$ (достатньо розглянути лише ті p_{ij}, для яких $i < j$). Легко бачити, що точка c належить L тоді й лише тоді, коли існують такі числа λ, μ, що $c = \lambda a + \mu b$. Завжди можна вибрати лінійну функцію $l(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i$ таку, що $l(a) = -\mu$, $l(b) = \lambda$, тобто, $c = l(b)a - l(a)b$, звідки $c_i = \sum_{j=0}^n \alpha_j p_{ij}$. Отже, числа p_{ij} повністю визначають пряму L. Вони звуться *плюкеровими координатами* прямої L. Крім того, можна легко записати рівняння цієї прямої. Вони зводяться до того, що ранг матриці

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

дорівнює 2, тобто, $x_i p_{jk} - x_j p_{ik} + x_k p_{ij} = 0$ для кожної трійки $i < j < k$. Звідси, зокрема, випливає, що плюкерові координати прямої задовольняють рівняння

$$p_{ir}p_{jk} - p_{jr}p_{ik} - p_{kr}p_{ij} = 0 \tag{6.1}$$

для довільного r і довільної трійки $i < j < k$. Легко бачити, що при $r \in \{\, i, j, k \,\}$ ці рівняння тавтологічні, отже, залишаються лише ті з них, для яких $r \notin \{\, i, j, k \,\}$. Крім того, якщо в такому рівнянні переставити r та один з індексів i, j, k, одержане рівняння буде наслідком попереднього. Тому завжди можна вважати, що $r < i < j < k$. Наприклад, при $n = 3$, маємо єдине рівняння $p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$. Навпаки, якщо точка $p_{ij} \in \mathbb{P}^N$ задовольняє плюкерові рівняння (6.1), то p_{ij} є плюкеровими координатами деякої прямої (залишаємо читачу як вправу). Отже, множину Π_n прямих у просторі $\mathbb{P}^n$ можна розглядати, як проективний многовид у $\mathbb{P}^N$. Зокрема, Π_3 — це квадратична гіперповерхня у $\mathbb{P}^5$, отже, $\dim \Pi_3 = 4$.

Якщо $H \subseteq \mathbb{P}^3$ — поверхня у тривимірному проективному просторі, задана рівнянням $F(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$, а L — пряма з плюкеровими координатами p_{ij}, то $L \subset H$ тоді й лише тоді, коли $F(\sum_j x_j p_{0j}, \sum_j x_j p_{1j}, \sum_j x_j p_{2j}, \sum_j x_j p_{3j}) = 0$, що дає систему рівнянь для коефіцієнтів многочлена F. Ототожнюючи гіперповерхні степеня m від 3 змінних з їх рівняннями, тобто, точками $\mathbb{P}^\nu$, де $\nu = (m+1)(m+2)(m+3) - 1$, розглянемо в $\Pi_3 \times \mathbb{P}^\nu$ підмноговид Γ, який складається з пар (L, H), для яких $L \subseteq H$. Знайдемо $\dim \Gamma$. Нехай $\pi : \Gamma \to \Pi_3$ — проекція. Очевидно, $\pi(\Gamma) = \Pi_3$ (кожна пряма належить якійсь гіперповерхні). Обчислимо розмірність шару $\pi^{-1}(L)$. Очевидно, вона не залежить від прямої, тому можна вважати, що $L = PV(x_0, x_1)$. Тоді рівняння $F = 0$ задає гіперповерхню, яка містить L (тобто, належить $\pi^{-1}(L)$) тоді й лише тоді, коли $F = x_0 G_0 + x_1 G_1$, де G_0 і G_1 — степеня $m - 1$, причому $G_1 = G_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Легко підрахувати, що такі многочлени утворюють підпростір розмірності $\nu' = m(m+1)(m+5)/6 - 1$. Тому $\dim \Gamma = \nu' + 4$ Зауважимо, що $\nu - (\nu' + 4) = m - 3$. Отже, при $m > 3$ проекція $\phi : \Gamma \to \mathbb{P}^\nu$ не сюр'єктивна. Нехай $m = 3$. На поверхні $x_1 x_2 x_3 = x_0^3$ лежать лише 3 прямих: $x_0 = x_i = 0$ $(1 \le i \le 3)$ (перевірте це). Отже, в образі $\phi(\Gamma)$ є точки y з $\dim \phi^{-1}(y) = 0$. Тому $\dim \phi(\Gamma) = \dim(\Gamma) = \dim \mathbb{P}^\nu$, отже, $\phi(\Gamma) = \nu$. Ми встановили такий результат.

Теорема 6.5. (1) *Якщо $m > 3$, то поверхні степеня m у $\mathbb{P}^3$, на яких немає жодної прямої, утворюють відкриту щільну множину серед усіх поверхонь степеня m.*

(2) *На кожній кубічній поверхні в $\mathbb{P}^3$ лежить пряма. Кубічні поверхні, на яких лежить скінченна кількість прямих утворюють відкриту щільну підмножину серед усіх поверхонь степеня 3.*

7. Алгебричні групи та їх дії

Означення 7.1. (1) *Алгебричною групою* зветься алгебричний многовид G, на якому задано алгебричну операцію («множення»), яка перетрворює G на групу, причому відображення $G \times G \to G,\ (g,h) \mapsto gh$ та $G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$ є регулярними.

(2) *Дією* алгебричної групи G на алгебричному многовиді X зветься регулярне відображення $G \times X \to X,\ (g,x) \mapsto gx$ таке, що $g(hx) = x$ для всіх $g,h \in G$, $x \in X$ і $ex = x$ для всіх $x \in X$, де e — одиничний елемент групи G.

(3) Множина $Gx = \{\, gx \mid g \in G \,\}$ зветься *орбітою елемента $x \in X$*.

(4) Підгрупа $\operatorname{St} x = \{\, g \in G \mid gx = x \,\}$ зветься *стабілізатором елемента $x \in X$*.

Твердження 7.2. (1) *Стабілізатор елемента є замкненою підгрупою в G.*

(2) *Орбіта елемента $x \in X$ є локально замкненим підмноговидом в X розмірності* $\dim G - \dim \operatorname{St} x$.

(3) *Якщо G таX незвідні, то існує відкрита підмножина $U \subseteq X$ така, що $\dim Gx \geq \dim Gy$ для довільних точок $x \in U$, $y \in X$.*

Дивись [**Др**, Твердження 3.6.6–3.6.8].

Означення 7.3. *Абелевим многовидом* зветься алгебрична група, яка є незвідним проективним многовидом.

Теорема 7.4. (1) *Абелів многовид A є комутативною групою.*

(2) *Якщо A — абелев многовид, а G — алгебрична група, то довільне регулярне відображення $\phi : A \to G$ має вигляд $\phi(a) = \phi(e)\psi(a)$, де $\psi : A \to G$ — регулярний гомоморфізм.*

(3) *Якщо два абелеві многовиди ізоморфні як алгебричні многовиди, то вони ізоморфні і як алгебричні групи. Іншими словами, якщо на проективному многовиді існує структура алгебричної групи, то вона єдина.*

Доведенння базується на такій лемі.

Лема 7.5. *Нехай $f : X \times Y \to Z$ — регулярне відображення, многовиди X, Y незвідні, причому X проективний, і $f(X \times y_0)$ для деякої* *точки y_0 складається з однієї точки z_0. Тоді й для довільної точки $y \in Y$ образ $f(X \times y)$ теж складається з однієї точки z.*

Доведення. Позначимо через Γ графік відображення f:

$$\Gamma = \{ (x, y, f(x, y) \mid x \in X, y \in Y \},$$

а через $\widetilde{\Gamma}$ його проекцію на $Y \times Z$:

$$\widetilde{\Gamma} = \{ (y, z) \mid \text{існує } x \in X \text{ такий, що } z = f(x, y) \}.$$

Оскільки X проективний, $\widetilde{\Gamma}$ — замкнена незвідна підмножина в $Y \times Z$. Розглянемо проекцію $\pi : \widetilde{\Gamma} \to Y$. Очевидно, $\pi(\widetilde{\Gamma}) = Y$ і $\pi^{-1}(y_0) = \{(y_0, z_0)\}$. За теоремою про розмірність шарів, $\dim \widetilde{\Gamma} = \dim Y$. Фіксуємо якусь точку $x_0 \in X$. Тоді $\widetilde{\Gamma} \supseteq \widetilde{Y} \{ (y, f(x_0, y) \mid y \in Y \}$. Але остання множина — підмноговид, ізоморфіний Y. З рівності розмірностей випливає, що $\widetilde{\Gamma} = \widetilde{Y}$, зокрема, $f(x, y) = f(x_0, y)$ для кожної точки $y \in Y$ та кожної точки $x \in X$. $\square$

Доведення теореми 7.4. (1). Розглянемо регулярне відображення $f : A \times A \to A$, де $f(a, b) = a^{-1}ba$. Тоді $f(a, e) = \{e\}$, отже, $f(A \times b)$ складається з однієї точки для всіх $b \in A$. Це значить, що $a^{-1}ba = b$ для всіх a, b, тобто, група A комутативна.

(2). Позначимо $\psi(a) = \phi(e)^{-1}\phi(a)$ і розглянемо регулярне відображення $f : A \times A \to G$, де $f(a, b) = \psi(a)\psi(b)\psi(ab)^{-1}$. Тоді $\psi(e) = e$ і $f(a, e) = e = f(e, b)$ для всіх $a, b \in A$. Тому $f(A \times b) = \{e\}$, тобто, $\psi(a)\psi(b) = \psi(ab)$, отже, ψ — гомоморфізм.

(3) є безпосереднім наслідком (2). $\square$

8. Локальне кільце й дотичний простір

Означення 8.1. Нехай $X \in \mathbb{A}^n$ — замкнений підмноговид, $I = \mathcal{I}(X)$ — відповідний ідеал у $\mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $x \in X$. Для кожного многочлена $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ позначимо, як звичайно,

$$d_x F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) dx_i;$$

ми розглядаємо цей вираз як елемент векторного простору Ω_n з базою $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$.

(1) *Простором диференціалів*, або *кодотичним простором* $\Omega_x X$ до многовиду X у точці x зветься факторпростір $\Omega_n / d_x I$, де $dI = \{ d_x F \mid F \in \mathcal{I}(X) \}$ (це, очевидно, підпростір у Ω_n). Ми позначатимемо тими самими літерами dx_i класи суміжності dx_i у цьому факторпросторі і $d_x f$ клас суміжності елемента $d_x F$, де $f \in \mathbb{F}[X]$ — регулярна функція, визначена многочленом $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Очевидно, якщо змінити F на $F + G$, де $G \in \mathcal{I}(X)$, клас елементу $d_x f$ у факторпорсторі $\Omega_x X$ не зміниться, тому $d_x f$ коректно визначений і d_x можна розглядати як відображення $\mathbb{F}[X] \to \Omega_x X$.

(2) Якщо $\phi : X \to Y$ — регулярне відображення, де $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ — замкнений підмноговид, причому ϕ заданий набором регулярних функцій $(f_1, f_2, \dots, f_m)$, $x \in X,\ y = \phi(x)$, позначимо $d_x \phi$ відображення $\Omega_y Y \to \Omega_x X$, яке переводить dy_i у $d_x f_i$. Можна перевірити (зробіть це), що $d_x \phi$ переводить функцію $g \in \mathbb{F}[Y]$, задану многочленом $G(y_1, y_2, \dots, y_m)$, у

$$d_x(\phi^* g) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial G}{\partial y_j}(y) d_x f_j.$$

Легко бачити, що якщо $\psi : Y \to Z$ — інше регулярне відображення, то $d_x(\psi\phi) = (d_y\psi)(d_x\phi)$. Зокрема, якщо ϕ — ізоморфізм, то й $d_x\phi$ є ізоморфізмом для довільної точки x. Насправді, простір диференціалів залежить лише від локальної поведінки многовиду в околі точки.

Означення 8.2. Позначимо $\mathbf{F}_x$ множину пар (U, f), де U — окіл точки x, а f — регулярна функція на U. Введемо на $\mathbf{F}_x$ відношення еквівалентності $\sim$, вважаючи, що $(U, f) \sim (V, g)$ тоді й лише тоді, коли $f = g$ на якомусь околі $W \subseteq U \cap V$. Фактормножина $\mathbf{F}/\sim$ зветься *локальним кільцем* многовиду X у точці x і позначається $\mathcal{O}_{X,x}$, або, якщо многовид X фіксований, $\mathcal{O}_x$.

Очевидно, $\mathcal{O}_{X,x}$ дійсно стає кільцем, якщо означити суму (добуток) класів еквівалентності (U, f) та (V, g) як $(U \cap V, f + g)$ (відповідно, $(U \cap V, fg)$). Для кожного елемента $a \in \mathcal{O}_{X,x}$ однозначно визначене значення $a(x)$. Позначимо $\mathfrak{m}_x = \{ a \in \mathcal{O}_{X,x} \mid a(x) = 0 \}$. Очевидно, це ідеал в кільці $\mathcal{O}_{X,x}$.

Твердження 8.3. *Ідеал $\mathfrak{m}_x$ складається з усіх необоротних елементів кільця $\mathcal{O}_{X,x}$, а тому є единим максимальним ідеалом цього кільця. Отже, локальне кільце точки є* локальним. *Крім того, відображення $a \mapsto a(x)$ індукує ізоморфізм $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}$.*

Доведення очевидне. □

Твердження 8.4. *Якщо X — афінний многовид, $A = \mathbb{F}[X]$ і $\mathcal{I} = \mathcal{I}(x) = \{ f \in A \mid f(x) = 0 \}$, то $\Omega_x X \simeq \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \simeq \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.*

Доведення. Можна вважати, що $x = (0, 0, \dots, 0)$. Тоді $\mathcal{I} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$. Позначимо $\Omega = \Omega_x X$. Обмеження d_x на $\mathcal{I}$ є лінійним відображенням $d : \mathcal{I} \to \Omega$. Оскільки диференціали координат dx_i породжують Ω, це відображення сюр'єктивне. Якщо $f \in \mathcal{I}$ задана многчленом $F = \sum_i \alpha_i x_i + O(x^2)$, то $df = \sum_i \alpha_i dx_i$. Отже, якщо $df = 0$, то існує многочлен $G \in \mathcal{I}(X)$ такий, що $d_x G = \sum_i \alpha_i dx_i$, тобто, $G = \sum_i \alpha_i x_i + O(x^2)$. Тоді $F - G \in \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle^2$, а тому $f \in \mathcal{I}^2$. Отже, $\operatorname{Ker} d = \mathcal{I}^2$ і $\Omega \simeq \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$.

Нехай тепер $a \in \mathfrak{m}_x$. Існує головна відкрита множина $D(g)$ така, що a задається регулярною функцією на $D(g)$. Але $\mathbb{F}[D(g)] = A[g^{-1}]$ [**Др**, Вправа 1.6.6], тобто, $a = f/g^k$ для деякого k, де $f \in A$ (очевидно, навіть $f \in \mathcal{I}$). Покладемо $d_x a = d_x f/g^k$. Можна перевірити (зробіть це), що це визначеня не залежить від вибору околу $D(g)$ та подання a у вигляді дробу f/g^k. Одержуємо відображення $d_x : \mathfrak{m}_x \to \Omega$, яке, очевидно, є сюр'єктивним. Крім того, $d_x a = 0$ тоді й лише тоді, коли $d_x f = 0$, а тоді $f \in \mathcal{I}$, а $a \in \mathfrak{m}_x^2$. Отже, також $\Omega \simeq \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. □

Цей результат дозволяє *визначити* простір диференціалів $\Omega_x X$ для *довільного* многовиду X як $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Для кожної функції $a \in \mathcal{O}_{X,x}$ через $d_x a$ позначається образ у $\Omega_x X$ функції $a - a(x) \in \mathfrak{m}_x$.

Термін «кодотичний простір», яким ми користувалися вище для простору диференціалів, виправдовується наступними міркуваннями.

Означення 8.5. Нехай $X \subseteq \mathbb{A}^n$ — замкнений многовид, $\mathcal{I} = \mathcal{I}(X) \subseteq \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ — відповідний ідеал. Для довільної точки $x \in X$ і прямої $L = \{ x + \lambda a \mid a \in \mathbb{A}^n \setminus \{x\}, \lambda \in \mathbb{F} \}$ розглянемо ідеал $\mathcal{I}_L = \{ F(x + ta) \mid F \in \mathcal{I} \} \subseteq \mathbb{F}[t]$ і позначимо $p_x(t)$ його твірний (нагадаю, що $\mathbb{F}[t]$ — кільце головних ідеалів). Очевидно, $p_x(0) = 0$, тобто, $t \mid p_x(t)$.

(1) Пряма L зветься *дотичною до многовиду X у точці x*, якщо $t^2 \mid p_x(t)$.

(2) Об'єднання всіх прямих, дотичних до X у точці x, зветься *дотичним простором до многовиду X у точці x* і позначається T_xX.

Приклад 8.6. Нехай $H = V(F)$ — гіперповерхня в $\mathbb{A}^n$, де F — многочлен без кратних множників (тобто, $\mathcal{I}(H) = \langle\, F\,\rangle$). Тоді $\mathcal{I}_L = \langle\, F(x + ta)\,\rangle$, отже, L є дотичною в точці x тоді й лише тоді, коли $F(x + ta)$ ділиться на t^2. Але, оскільки $F(x) = 0$,

$$F(x + ta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)a_i t + O(t^2).$$

Отже, пряма L є дотичною в точці x тоді й лише тоді, коли виконується рівність $\sum_{i=1}^{n} a_i(\partial F/\partial x_i)(x) = 0$. Якщо хоча б одне зі значень $(\partial F/\partial x_i)(x) \neq 0$, це рівняння (відносно координат a_i) визначає гіперплощину в $\mathbb{A}^n$, яка й є дотичним простором T_xX. Якщо ж всі ці значення нульові, T_xX збігається з усім простором $\mathbb{A}^n$.

У загальному випадку ситуація досить схожа, а дотичний простір тісно пов'язаний із простором диференціалів. Позначимо $\Theta_n = \Omega_n^*$ дуальний простір до Ω_n. Вектор $\xi \in \Theta_n$ (тобто, лінійний функціонал на Ω_n) ототожнимо з його координатним вектором $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, де $\xi_i = \xi(dx_i)$. Для кожної точки $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ визначена (покоординатна) сума $a + \xi$. Зокрема, $a + \Theta_n = \mathbb{A}^n$ для довільної точки $a \in \mathbb{A}^n$

У наступній теоремі та її доведенні ми користуємося позначеннями з означення 8.5.

Теорема 8.7. *Дотичний простір T_xX збігається з афінним підпростором $x + \Theta_xX$, де*

$$\Theta_xX = \{\, \xi \in \Theta_n \mid \xi(d_xF) = 0 \text{ для всіх } F \in \mathcal{I}(X)\,\} \simeq (\Omega_xX)^*.$$

Підпростір Θ_xX також зветься *дотичним простором* до X у точці x. Ця двозначність не породжує особливих незручностей.

Доведення. Очевидно, точка $x + \xi$, де $\xi \neq 0$, належить до T_xX тоді й лише тоді, коли для кожного многочлена $F \in \mathcal{I}$ многочлен $F(x+t\xi)$ не містить лінійних членів. Як і у прикладі 8.6, це означає, що $\sum_{i=1}^{n} \xi_i(\partial F/\partial x_i)(x) = 0$. Але цей вираз збігається зі значенням $\xi(d_xF)$, що й доводить першу рівність. Оскільки Ω_xX є фактор-простором Ω_n за підпростором, породженим всіма d_xF, де $F \in \mathcal{I}$, звідси також випливає й друга рівність: кожен вектор $\xi \in \Theta_xX$ визначає лінійний функціонал на Ω_xX і кожен такий функціонал походить з деякого (однозначно визначеного) вектора $\xi \in \Theta_xX$. $\square$

Знов-таки, тепер можна *визначити дотичний простір* Θ_xX, як простір, дуальний до $\Omega_xX = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 :\ \Theta_xX = (\Omega_xX)^*$. Це означення вже годиться для довільних многовидів. Значення $\xi(d_xf)$, де $\xi \in \Theta_xX$, $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ зветься *похідною функції f за напрямком ξ*

у точці x і позначається $(\partial F/\partial\xi)(x)$. Розмірність дотичного простору $\Theta_x X$ (або, що те саме, простору диференціалів $\Omega_x X$) зветься *занурювальною розмірністю* многовиду X у точці x і позначається $\operatorname{edim}_x X$. Очевидно, якщо деякий окіл точки x можна реалізувати, як підмноговид у $\mathbb{P}^n$, обов'язково $n \geq \operatorname{edim}_x X$.

9. Прості й особливі точки

Теорема–Означення 9.1. (1) *Для незвідного многовиду* X *позначимо* $m = \min\{\dim\Theta_x X \mid x \in X\}$. *Тоді*

(a) $\{x \in X \mid \dim\Theta_x X = m\}$ — *відкрита підмножина в* X.

(b) $m = \dim X$.

(2) *Якщо многовид* X *є звідним,* $X_1, X_2, \ldots, X_s$ — *його незвідні компоненти,* $x \in X$, *позначимо* $X_x = \bigcup_{X_i \ni x} X_i$. *Тоді* $\dim\Theta_x X \geq \dim X_x$.

Позначимо$X_{reg} = \{x \in X \mid \dim\Theta_x X = \dim X_x\}$. Точки підмножини X_{reg} звуться *простими*, або *неособливими*, а точки доповнення $X_{sing} = X \setminus X_{reg}$ — *особливими* точками многовиду X.

Многовид X зветься *неособливим*, або *гла́дким*, якщо всі його точки неособливі, і *особливим*, якщо на ньому є принаймні одна особлива точка.

Далі ми доведемо, що рівність $\dim\Theta_x X = \dim X_x$ можлива тільки тоді, коли через точку x проходить лише одна компонента. Тому неособливі точки X збігаються неособливими точками відкритого підмноговиду $X \setminus X'$, де $X' = \bigcup i \neq j(X_i \cap X_j)$, а тому X_{reg} завжди є відкритою підмножиною в X, а X_{sing} — замкненою. Крім того, якщо многовид неособливий, то його *незвідні* компоненти збігаються з *зв'язними* компонентами.

Доведення. (1a). Нехай $X \subseteq \mathbb{A}^n$ — незвідний замкнений підмноговид. Розглянемо у добутку $X \times \mathbb{A}^n$ множину $T = \{(x, a) \mid a \in T_x X\}$. З розглядів попереднього розділу випливає, що T — замкнена підмножина (поясніть це). Проекція $\pi : T \to X$ сюр'єктивна, а шар $\pi^{-1}(x)$ — це дотичний підпростір $T_x X$. За теоремою про розмірність шарів, мінімум розмірностей $\dim T_x X$ досягається на відкритій підмножині $U \subseteq X$. Оскільки, як ми бачили, ця розмірність визначається локально, те ж саме вірно для довільного незвідного многовиду X.

(1b). Якщо X — гіперповерхня в $\mathbb{A}^n$, твердження (1b) випливає з прикладу 8.6. Оскільки воно теж локальне, його достатньо перевірити для довільного многовиду, який є біраціонально еквівалентним до X. Але має місце такий результат [**Др**, Твердження 2.5.4], з якого й випливає твердження (1b) для всіх незвідних многовидів:

Твердження 9.2. *Кожен незвідний многовид біраціонально еквівалентний гіперповерхні у афінному (або в проективному) просторі.*

(2). Можна вважати, що X афінний і всі компоненти проходять через точку x. З означення простору диференціалів одразу випливає, що для довільного замкненого підмноговиду $Y \subseteq X$, який містить x, має місце нерівність $\dim \Omega_x Y \le \dim \Omega_x X$. Отже, $\dim \Omega_x X \ge \dim \Omega_x X_i$ для кожної компоненти X_i. Якщо X_i — компонента найбільшої розмірності (рівної $\dim_x X$), ми й одержуємо потрібне твердження. $\square$

Для афінних і проективних многовидів можна дати явні критерії неособливості точки.

Теорема 9.3 (Якобієв критерій). (1) *Нехай $X \subseteq \mathbb{A}^n$ — замкнений підмноговид, $\mathcal{I}(X) = \langle F_1, F_2, \dots, F_m \rangle$. Позначимо через J_X матрицю розміру $m \times n$ з компонентами $\partial F_i / \partial x_j$ і через $J_X(x)$ значення цієї матриці в точці $x \in X$. Точка x є неособливою тоді й лише тоді, коли $\operatorname{rk} J_X(x) = n - \dim X_x$.*

(2) *Нехай $X \subseteq \mathbb{P}^n$ — замкнений підмноговид, $\mathcal{I}(X) = \langle F_1, F_2, \dots, F_m \rangle$. Позначимо через J_X матрицю розміру $m \times (n+1)$ з компонентами $\partial F_i / \partial x_j$ і через $J_X(x)$ значення цієї матриці в точці $x \in X$. Точка x є неособливою тоді й лише тоді, коли $\operatorname{rk} J_X(x) = n - \dim X_x$.*

Доведення. (1) випливає з означення $\Omega_x X$ для афінних многовидів (означення 8.1).

(2) залишаємо читачеві, як вправу. При цьому доцільно розглянути афінний окіл $U = X \cap \mathbb{A}^n_i$, який містить точку x, скористатися Якобієвим критерієм для афінних многовидів та тим, що $mF = \sum_{i=0}^n x_i (\partial F / \partial x_i)$ для довільного однорідного многочлена степеня m. $\square$

Надалі ми вважаємо, що x — неособлива точка многовиду X, $n = \dim X_x = \dim \Omega_x X = \dim \Theta_x X$. Без обмеження загальності, можна вважати, що всі компоненти многовиду X містять x. Набір функцій $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathfrak{m}_x$ зветься *набором локальних параметрів* у точці x, якщо їх диференціали $d_x t_1, d_x t_2, \dots, d_x t_n$ лінійно незалежні, тобто, утворюють базу $\Omega_x X$.

Теорема 9.4. *Нехай $t_1, t_2, \dots, t_n$ — набір локальних параметрів у точці x, U — афінний окіл точки X, у якому всі функції t_n визначені, $V_{i_1 i_2 \dots i_k} = V(t_1, t_2, \dots, t_k) \subset U$ і $\Theta_{i_1 i_2 \dots i_k} = \Theta_x V_{i_1 i_2 \dots i_k}$. Тоді:*

(1) $\dim V_{i_1 i_2 \dots i_k} = \dim \Theta_{i_1 i_2 \dots i_k} = n - k$, *тобто, x — неособлива точка многовиду $V_{i_1 i_2 \dots i_k}$.*

(2) $\Theta_{i_1 i_2 \dots i_k} = \bigcap_{l=1}^k \Theta_{i_l} =$
$= \{ \xi \in \Theta_x X \mid \xi(d_x t_i) = 0 \text{ при } i \in \{ i_1, i_2, \dots, i_k \} \}$.

(3) $\{ t_j \mid j \notin \{ i_1, i_2, \dots, i_k \} \}$ — *набір локальних параметрів многовиду $V_{i_1 i_2 \dots i_k}$ у точці x.*

Доведення. Нехай спочатку $k = 1$. Тоді $\dim V_i \geq n - 1$ за наслідком 5.8. З іншого боку, якщо $\xi \in \Theta_i$, то $\xi(d_x t_i) = 0$. Оскільки $d_x t_i \neq 0$, $\dim \Theta_i \leq n - 1$. Отже, $\dim V_i = \dim \Theta_i = n - 1$, x — неособлива точка многовиду V_i, $\Theta_i = \{\, \xi \in \Theta_x X \mid \xi(d_x t_i) = 0 \,\}$. Крім того, оскільки $\dim \Omega_x V_i = n - 1$, а образ $d_x t_i$ у просторі $\Omega_x V_i$ нульовий, диференціали $d_x t_j$ $(j \neq i)$ утворюють базу $\Omega_x V_i$, отже елементи t_j $(j \neq i)$ є набором локальних параметрів многовиду V_i у точці x.

Загальний випадок тепер легко одержати індукцією за k. □

Нижче ми побачимо, що має місце і результат, обернений до цієї теореми (знов-таки, «локально»).

10. Розклад Тейлора

Нехай $x \in X$. Виберемо базу $d_x t_1, d_x t_2, \dots, d_x t_m$ простору диференціалів $\Omega_x X$, де $t_i \in \mathfrak{m}_x$. Тоді можна «розкладати функції у степеневі ряди» в околі точки x.

Теорема 10.1. (1) *Для кожної функції $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ і кожного натурального k існує такий многочлен $f_k(x_1, x_2, \dots, x_m)$, що* $\deg f_k \leq k$ *і* $f \equiv f_k\,(t_1, t_2, \dots, t_n) \pmod{\mathfrak{m}_x^{k+1}}$.

(2) *Якщо точка x неособлива, многочлен f_k визначений однозначно.*

Доведення. (1). Перш за все, зауважимо, що елементи $t_1, t_2, \dots, t_n$ породжують ідеал $\mathfrak{m}_x$. Дійсно, за вибором t_i, $\mathfrak{m}_x = \langle\, t_1, t_2, \dots, t_n \,\rangle + \mathfrak{m}^2$. Виберемо такі $u_1, u_2, \dots, u_s$, що $\mathfrak{m}_x = \langle\, t_1, t_2, \dots, t_n, u_1, u_2, \dots, u_s \,\rangle$. Кожен елемент з $\mathfrak{m}^2$ є лінійною комбінацією $t_1, t_2, \dots, t_n, u_1, u_2, \dots, u_s$ з коефіцієнтами з $\mathfrak{m}_x$, а тому кожен елемент з $\mathfrak{m}_x$ має вигляд $\sum_{i=1}^n a_i t_i + \sum_{j=1}^s b_j u_j$, де $b_j \in \mathfrak{m}_x$. Наприклад, $u_s = \sum_{i=1}^n a_i t_i + \sum_{j=1}^s b_j u_j$, звідки $(1 - b_s) u_s = \sum_{i=1}^n a_i t_i + \sum_{j=1}^{s-1} b_j u_j$. Оскільки $b_s \in \mathfrak{m}_x$, $1 - b_s \notin \mathfrak{m}_x$, а тому оборотний. Звідси $u_s \in \langle\, t_1, t_2, \dots, t_n, u_1, u_2, \dots, u_{s-1} \,\rangle$, тобто, u_s — зайвий у множині твірних і його можна викинути. Але те саме стосується й усіх інших елементів u_j : їх теж можна вилучити із множини твірних, отже, $\mathfrak{m}_x = \langle\, t_1, t_2, \dots, t_n \,\rangle$. Тоді, очевидно, мономи $t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_k}$ породжують ідеал $\mathfrak{m}^k$.

Тепер доведемо твердження (1) індукцією за k. Якщо $k = 0$, воно очевидне: $f_0 = f(x)$. Припустимо, що $k > 0$ і для степеня $k - 1$ ми вже підібрали многочлен f_{k-1}. Оскільки $f - f_{k-1}\,(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathfrak{m}_x^k$, існують елементи $a_{i_1 i_2 \dots i_k} \in \mathcal{O}_x$, для яких

$$f - f_{k-1}\,(t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_{i_1 i_2 \dots i_k} a_{i_1 i_2 \dots i_k} t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_k}.$$

Позначимо $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} = a_{i_1 i_2 \dots i_k}(x)$. Тоді $a_{i_1 i_2 \dots i_k} \equiv \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} \pmod{\mathfrak{m}_x}$, отже, $f \equiv f_k\,(t_1, t_2, \dots, t_n) \pmod{\mathfrak{m}_x^{k+1}}$, де

$$f_k = f_{k-1} + \sum_{i_1 i_2 \dots i_k} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}.$$

(2). Очевидно, достатньо довести, що неможливо, щоб для ненульового однорідного многочлена f степеня k було $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathfrak{m}_x^{k+1}$. Виберемо значення $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, для яких $f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \neq 0$. Після лінійної заміни змінних можна вважати, що $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (1, 0, \ldots, 0)$. Тоді $f = cx_1^k + f_1$, де $c \neq 0$, а в усі члени f_1 входить одна із змінних $x_2, \ldots, x_n$. З іншого боку, якщо $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathfrak{m}^k$, існують елементи $a_{i_1 i_2 \ldots i_k} \in \mathcal{O}_x$, для яких

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_k} a_{i_1 i_2 \ldots i_k} t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_k},$$

де $a_{i_1 i_2 \ldots i_k} \in \mathfrak{m}_x$. Виділимо у правій частині член t_1^k: $ct_1^k + f_1 = at_1^k + f_2$, де в кожен член f_2 входить один з елементів $t_2, \ldots, t_n$, а $a \in \mathfrak{m}_x$. Тоді $c - a \notin \mathfrak{m}_x$, тобто, оборотний, отже, $t_1^k \in \langle t_2, \ldots, t_n \rangle$. Але тоді многовид V_1 з теореми 9.4 містить $V_{23\ldots n}$, отже, й $\Theta_1 \supseteq \Theta_{23\ldots n}$. Тоді $\Theta_{12\ldots n} = \Theta_1 \cap \Theta_{23\ldots n} = \Theta_{23\ldots n}$, а це неможливо, бо, за тією ж теоремою 9.4, $\dim \Theta_{23\ldots n} = 1$, а $\dim \Theta_{12\ldots n} = 0$. □

Наслідок 10.2. *Якщо $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — набір локальних параметрів у неособливій точці x многовиду X, то для довільної функції $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ існує єдиний формальний степеневий ряд*

$$\hat{f} = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

де F_m — однорідний многочлен степеня m, що для кожного k

$$f \equiv \sum_{m=0}^{n} F_m(t_1, t_2, \ldots, t_n) \pmod{\mathfrak{m}_x^{k+1}}.$$

При цьому $\widehat{fg} = \hat{f}\hat{g}$ і $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$.

Ряд $\hat{f}$ зветься *рядом Тейлора* функції f. Отже, відображення $f \mapsto \hat{f}$ задає занурення кільця $\mathcal{O}_{X,x}$ у кільце формальних степеневих рядів $\mathbb{F}[[x_1, x_2, \ldots, x_n]]$. Оскільки в кільці формальних степеневих рядів, очевидно, немає дільників нуля, одержуємо ще такий наслідок.

Наслідок 10.3. *У локальному кільці неособливої точки немає дільників нуля. Рівносильно, неособлива точка надежить єдиній незвідній компоненті многовиду. Зокрема, якщо многовид неособливий, то його незвідні компоненти збігаютьса зі зв'язними компонентами.*

Якщо точка x особлива, многочлен f_k з теореми 10.1 (1) напевне не є єдиним (ми не будемо цього доводити). Втім, можна зробити таке. Позначимо через R_x множину тих формальних степеневих рядів $F = \sum_{m=0}^{\infty} F_m$, для яких $\sum_{m=0}^{k} F_k(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathfrak{m}_x^{k+1}$ для всіх k. Очевидно, це ідеал у кільці $\mathbb{F}[[x_1, x_2, \ldots, x_n]]$. Позначимо $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$

(або $\hat{\mathcal{O}}_x$, якщо X фіксований) факторкільце $\mathbb{F}[[x_1, x_2, \dots, x_n]]/R_x$. Це кільце зветься *поповненим локальним кільцем* точки x многовиду X. Можна перевірити, що воно не залежить від вибору елементів $t_1, t_2, \dots, t_n$, диференціали яких утворюють базу $\Omega_x X$. Кільце $\mathcal{O}_{X,x}$ занурюється в $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$: функції f треба співставити клас суміжності $\hat{f}$ такого ряду $F = \sum_{m=0}^{\infty} F_m$, що

$$f \equiv \sum_{m=0}^{n} F_m\,(t_1, t_2, \dots, t_n) \pmod{\mathfrak{m}_x^{k+1}}$$

для всіх натуральних k. Якщо $X \subseteq \mathbb{A}^n$ — замкнений підмноговид і $\mathcal{I}(X) = \langle\, P_1, P_2, \dots, P_r \,\rangle$, то неважко переконатися, що $\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \simeq \mathbb{F}[[x_1, x_2, \dots, x_n]]/\langle\, P_1, P_2, \dots, P_r \,\rangle$.

Приклад 10.4. Нехай $X = V(y^2 - x^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}^2$, $x = (0, 0)$ і $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$. Тоді $R_x = \langle\, y^2 - x^2 - x^3 \,\rangle$. Але у кільці формальних рядів має місце формула Н'ютона: $1 + x = Q^2$, де

$$Q = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots + (-1)^{m-1}\frac{(2m-3)!!}{m!}x^m + \dots$$

Отже, якщо позначити $z = xQ$, то

$$y^2 - x^2 - x^3 = y^2 - (xQ)^2 = (y - xQ)(y + xQ) = (y - z)(y + z).$$

Легко бачити, що відображення $x \mapsto z$, $y \mapsto y$ індукує автоморфізм кільця $\mathbb{F}[[x, y]]$. Тому $\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \simeq \mathbb{F}[[y, z]]/\langle\, yz \,\rangle$. Це кільце можна також ототожнити з підкільцем у $\mathbb{F}[[y]] \times \mathbb{F}[[z]]$, яке складається з тих пар (f, g), для яких $f(0) = g(0)$ (поясніть, чому). Зауважимо, що таке саме поповнене локальне кільце ми одержимо, якщо покласти $X = V(xy)$, $x = (0, 0)$ (порівняйте із зображеннями відповідних кривих). У такому випадку кажуть, що ці два многовиди *формально еквівалентні* в околі відповідних точок. Напрклад, в околі неособливих точки всі многовиди даної розмірності формально еквівалентні.

Ще один важливий інваріант особливої точки — її *дотичний конус*. Оскільки цей інваріант теж локальний, визначимо його для точки x афінного многовиду $X \subset \mathbb{A}^n$. Без обмеження загальності, будемо вважати, що $x = (0, 0, \dots, 0)$. Нехай $I = \mathcal{I}(X)$. Для кожного многочлена $F \in I$ позначимо через $\widetilde{F}$ суму всіх його ненульових членів найменшого степеня. Дотичний конус $C_x X$ — це підмноговид у $\Theta_x X$, заданий рівняннями $\widetilde{F} = 0$, де F пробігає I. Очевидно, якщо $I = \langle\, F_1, F_2, \dots, F_m \,\rangle$, то $C_x X$ задається рівняннями $\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2, \dots, \widetilde{F}_m$. Наприклад, дотичний конус до кривої $y^2 = x^2 + x^3$ в точці $(0, 0)$ задається рівнянням $y^2 = x^2$, тобто, складається з двох прямих $y = \pm x$. Для кривої $y^2 = x^3$ дотичний конус — пряма $y = 0$. Можна довести, що дотичний конус не залежить від занурення $X \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ і є локальним інваріантом особливої точки.

11. Гіперповерхні в околі неособливої точки

Важливою властивістю локальних кілуць неособливих точок є їхня факторіальність. Наступна теорема доведена в [**Ш**, Глава II, § 2, Теорема 2].

Теорема 11.1. *Локальне кільце $\mathcal{O}_x$ неособливої точки є факторіальним, тобто кожен елемент цього кільця розкладається в добуток незвідних елементів, причому ці незвідні множники визначені однозначно з точністю до порядку й асоційованості.*[1]

Оскільки для кривих нам буде потрібна більш точна інформація, ми доведемо такий результат.

Теорема 11.2. *Якщо x — неособлива точка кривої X, t — локальний параметр у цій точці, то кожен ненульовий елемент $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ однозначно записується у вигляді $f = ut^m$, де $u(x) \neq 0$ (тобто, u — оборотний елемент локального кільця).*

Ми позначимо $m = v_x(f)$ і зватимемо $v_x(f)$ *порядком функції f у точці x.*

Доведення. Зауважимо, що ідеал $\mathfrak{m}_x$ головний: $\mathfrak{m}_x = t\mathcal{O}_x$, отже, $\mathfrak{m}^m = t^m\mathcal{O}_x$. Розкладемо f у ряд Тейлора: $f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i t^i$ і позначимо $m = \min i\lambda_i \neq 0$. Тоді $f \equiv \lambda_m t^m \pmod{\mathfrak{m}^{m+1}}$, звідки $f = \lambda_m t^m + at^{m+1}$ для деякого $a \in \mathcal{O}_x$ і можна покласти $u = \lambda_m + ta$ (цей елемент не міститься в $\mathfrak{m}_x$, тому оборотний). Однозначність очевидна (поясніть). □

Якщо крива X незвідна, то й кожну раціональну функцію f можна подати у вигляді ut^m, де $m \in \mathbb{Z}$, а u — оборотний елемент кільця $\mathcal{O}_x$ (достатньо записати $f = a/b$, де a і b регулярні в околі x, і подати в такому вигляді a та b). Ми також писатимемо $m = v_x(f)$ і зватимемо це число *порядком функції f* у точці x. Якщо $m > 0$, кажуть, що функція f має *нуль порядку m*, а якщо $m < 0$ — що вона має *полюс порядку $-m$* у точці x.

Занурення $\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow \mathbb{F}[[t]]$ для неособливої точки x незвідної кривої X можна продовжити до занурення $\mathbb{F}(X) \hookrightarrow \mathbb{F}((t))$, де $\mathbb{F}((t))$ — поле *рядів Лорана*, тобто, формальних рядів вигляду $\sum_{i>>-\infty}^{\infty} \lambda_i t^i$, де запис $i >> -\infty$ означає, що цей ряд може містити члени з від'ємними показниками, але лише у скінченній кількості. При цьому, якщо $f = ut^m$, як вище, то образом $\tau(f)$ функції у полі $\mathbb{F}((t))$ є ряд $t^m\tau(u)$, де $\tau(u)$ — образ u в кільці $\mathbb{F}[[t]]$.

З теореми 11.1 одержимо такі важливі результати.

Теорема 11.3. *Нехай X — незвідний многовид розмірності n, $x \in X$ — неособлива точка, а $Y \subset X$ — незвідний підмноговид*

[1] Нагадаємо, що два елементи a, b кільця A звуться *асоційованими*, якщо $b = ua$, де u — оборотний елемент цього кільця.

розмірності $n-1$, який містить точку x. Тоді існує афінний окіл U точки x і регулярна функція f на цьому околі такі, що $\mathcal{I}(Y \cap U) = \langle f \rangle$.

Функція f зветься *локальним рівнянням* підмноговиду Y в околі точки x.

Доведення. Можна вважати, що многовид X афінний. Нехай $I = \mathcal{I}(Y) \subset \mathbb{F}[X]$, $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$. Розглянемо ідеал $\widetilde{I} = I\mathcal{O}_{X,x}$ кільця $\mathcal{O}_{X,x}$. Цей ідеал, очевидно, первинний, бо таким є I. Виберемо незвідний елемент $f \in \widetilde{I}$, $f = \sum_{i=1}^{m} g_m f_m$ і розглянемо афінний окіл U точки x, в якому всі функції g_i, а тому й функція f, регулярні. Нехай $Z = V(f) \subset U$, $Y = Y \cap U$. Тоді $\dim Z = n-1$, $Y' \subseteq$, отже, Y' — компонента Z і $Z = Y' \cup Y''$, де Y'' — власний замкнений підмноговид Z. Припустимо, що $Y' \neq Z$, тобто, $Y'' \neq \emptyset$. Тоді існують функції $g, h \in \mathbb{F}[U]$ такі, що $g|_{Y'} = 0$, $h|_{Y''} = 0$, але $g|_{Y''} \neq 0$, $h|_{Y'} \neq 0$. Оскільки $gh|_Z = 0$, існує натуральне число r, для якого $f \mid (gh)^r$ у кільці $\mathbb{F}[U]$, а тому й у кільці $\mathcal{O}_x$. Оскільки останнє кільце факторіальне, а елемент f у ньому незвідний, звідси $f \mid g$ або $f \mid h$. Зменшивши окіл U, можна вважати, що $f \mid g$ або $f \mid h$ в кільці $\mathbb{F}[U]$. Але тоді $g|_Z = 0$ або $h|_Z = 0$, що неможливо. Отже, $Z = Y'$. Звідси випливає, що для кожної функції f_i існує таке r, що $f \mid f_i^r$ у кільці $\mathbb{F}[U]$. Знов-таки. звідси $f \mid f_i$ у кільці $\mathcal{O}_x$, а тоді, зменшивши U, можна вважати, що $f \mid f_i$ в U. Тоді $\mathcal{I}(Y') = \langle f \rangle$ у кільці $\mathbb{F}[U]$, що й завершує доведення. $\square$

Наслідок 11.4. *Нехай X незвідний неособливий многовид розмірності n, $\phi : X \to \mathbb{P}^N$ — раціональне відображення,* $\operatorname{Ind}\phi = X \setminus \operatorname{Dom}\phi$ *(це замкнений підмноговид у X). Тоді* $\dim \operatorname{Ind}\phi \leq n-2$.

Доведення. Нехай $Y \subset X$ — незвідний підмноговид розмірності $n-1$. Треба довести, що $Y \not\subseteq \operatorname{Ind}\phi$. Можна вважати, що X афінний, а ϕ заданий набором раціональних функцій $(f_0, f_1, \dots, f_N)$ з $\mathbb{F}(X)$. Домноживши на спільний знаменник, можна вважати, що всі ці функції належать $\mathbb{F}[X]$. З теореми 11.3 випливає, що без обмеження загальності можна вважати, що $\mathcal{I}(Y) = \langle g \rangle$ для деякої $g \in \mathbb{F}[X]$. Якщо $\operatorname{Ind}\phi \supseteq Y$, то $f_i|_Y = 0$, а тоді $g \mid f_i$. Виберемо найбільший показник m_i такий, що $g^{m_i} \mid f_i$ і позначимо $m = \min\{\, m_i \mid 0 \leq i \leq N \,\}$, $f_i' = f_i/g^m$. Тоді ϕ можна задати й набором $f_0', f_1', \dots, f_N'$. Але принаймні одна з цих функцій не ділиться на g, а тому не є тотожним нулем на Y, тобто, ϕ визначена в деяких точках цього підмноговиду й $Y \not\subseteq \operatorname{Ind}\phi$. $\square$

Наслідок 11.5. *Якщо ϕ — раціональне відображення неособливої кривої у проективний простір, то воно регулярне.*

Наслідок 11.6. *Якщо дві проективні неособливі криві раціонально еквівалентні, вони ізоморфні. Отже, для кожного скінченного розширення $\mathbb{K}$ поля $\mathbb{F}(x)$ раціональних дробів від однієї змінної* *існує єдина (з точністю до ізоморфізму) неособлива проективна крива X, для якої $\mathbb{F}(X) \simeq \mathbb{K}$.*

Крім того, ми можемо тепер довести і результат, обернений до теореми 9.4.

Теорема 11.7. *Нехай $x \in X$ — неособлива точка незвідного многовиду X розмірності n, $Y \subset X$ — незвідний підмноговид корозмірності k, причому точка x належить Y і є неособливою на Y. Тоді існує окіл U точки x та набір локальних параметрів $t_1, t_2, \dots, t_n$ у цій точці x такі, що ці локальні параметри регулярні на U і $\mathcal{I}(Y \cap U) = \langle\, t_1, t_2, \dots, t_k \,\rangle$ (як ідеал у $\mathbb{F}[U]$).*[2] *Більш того, за $t_1, t_2, \dots, t_k$ можна прийняти довільні функції, які визначені в деякому афінному околі X' точки x, лежать в ідеалі $\mathcal{I}(Y \cap X')$, а їх диференціали $d_x t_1, d_x t_2, \dots, d_x t_k$ лінійно незалежні в $\Omega_x X$.*

Доведення. Можна вважати, що $X = X'$ — незвідний афінний многовид, а Y — його незвідний підмноговид, причому всі функції $t_1, t_2, \dots, t_k$ регулярні на X. Тоді $\Omega_x Y = \Omega_x X / \langle\, d_x f \mid f \in \mathcal{I}(Y) \,\rangle$. Скористаємося індукцією за k. Нехай $k = 1$. За теоремою 11.3, Знайдеться афінний окіл U точки x, в якому $\mathcal{I}(Y \cap U) = \langle\, f \,\rangle$ для деякої функції $f \in \mathbb{F}[U]$, тобто, $\Omega_x Y = \Omega_x X / \langle\, d_x \,\rangle$. Оскільки $\dim \Omega_x Y = n - 1$, $d_x f \neq 0$. Якщо $t \in \mathbb{F}[U]$ — довільна функція з $\mathcal{I}(U \cap Y)$, для якої $d_x t \neq 0$, то $t = uf$ для деякої функції g, причому $d_x t = g(x) d_x f$ (оскільки $f(x) = 0$). Звідси $g(x) \neq 0$, отже, зменшивши U, можна вважати, що g — оборотний елемент в $\mathbb{F}[U]$, а тому $\mathcal{I}(U \cap Y) = \langle\, t \,\rangle$.

Нехай $k > 1$ і теорема вірна для корозмірності $k - 1$. Позначимо $X_1 = V(t_1)$. За теоремою 9.4, точка x неособлива на X_1. Тому існує афінний окіл U_1 точки x такий, що $X_1 \cap U_1$ незвідний, причому $\mathcal{I}(X_1 \cap U_1) = \langle\, t_1 \,\rangle$. Можна вважати, що $U_1 = X$, тобто, вже $\mathcal{I}(X_1) = \langle\, t_1 \,\rangle$. Тоді Y — підмноговид корозмірності $k-1$ у многовиді X_1, причому $\Omega_x X_1 = \Omega_x X / \langle\, d_x t_1 \,\rangle$, отже, диференціали $d_x t_2, \dots, d_x t_k$ лінійно незалежні в $\Omega_x X_1$. Застосувавши до X_1 і Y припущення індукції, ми завершимо доведення теореми. □

12. Занурення неособливих многовидів

Мета цього розділу — доведення такої теореми.

Теорема 12.1. *Якщо X — неособливий проективний многовид розмірності d, то він ізоморфний підмноговиду в $\mathbb{P}^{2d+1}$.*

Зокрема, кожна проективна неособлива крива ізоморфна кривій у $\mathbb{P}^3$. Далі ми побачимо, що існують неособливі проективні криві, які не ізоморфні жодній плоскій кривій.

Доведення цієї теореми ґрунтується на наступному критерії.

[2] У такому разі кажуть, що Y є *повним перетином* у X в околі точки x.

Лема 12.2. *Скінченне регулярне відображення $f : X \to Y$ є ізоморфізмом тоді й лише тоді, коли воно бієктивне і дял кожної точки $x \in X$ воно індукує ізоморфізм дотичних просторів $\Theta_x X \xrightarrow{\sim} \Theta_{f(x)} Y$ (або, що рівносильно, ізоморфізм просторів диференціалів $\Omega_{f(x)} Y \xrightarrow{\sim} \Omega_x X$).*

Зауважимо, що коли X неособливий, достатньо, щоб f індукувало *сюр'єкцію* дотичних просторів: адже $\dim Y = \dim X$, отже, $\dim \Theta_{f(x)} Y \geq \dim \Theta_x X$. Рівносильно, достатньо, щоб f індукував занурення просторів диференціалів.

Доведення. Необхідність цих умов тривіальна. Покажемо їх достатність. Зауважимо, що твердження є локальним, отже, можна вважати X та Y афінними. Позначимо $A = \mathbb{F}[X]$, $B = \mathbb{F}[Y]$ і ототожнимо B з його образом при відображенні f^*. Тоді A є скінченним розширенням B. Нехай $y = f(x)$. Тоді $\mathfrak{m}_y = \mathfrak{m}_x \cap B$ і $\mathfrak{m}_x$ — єдиний максимальний ідеал кільця A з цією властивістю (бо $f(x') \neq y$ при $x' \neq x$). За умовою, індуковане відображення $Om_y Y = \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \to \Omega_x X = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ є ізоморфізмом. Виберемо $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathfrak{m}_y$ так, щоб $d_y t_1, d_y t_2, \dots, d_y t_n$ було базою $\Omega_y Y$. Тоді, як ми доводили раніше, елементи $t_1, t_2, \dots, t_n$ породжують ідеал $\mathfrak{m}_y$ локального кільця $\mathcal{O}_{Y,y}$. Але образи цих диференціалів є також базою $\Omega_x X$, тому ті ж самі функції $t_1, t_2, \dots, t_n$ породжують і максимальний ідеал $\mathfrak{m}_x$ кільця $\mathcal{O}_x$. Звідси $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{X,x}$. З того, що A є скінченнопородженим B-модулем, легко випливає, що $\mathcal{O}_{X,x}$ є скінченнопородженим $\mathcal{O}_{Y,y}$-модулем. Але $\mathcal{O}_x = \mathbb{F} + \mathfrak{m}_x = \mathbb{F} + \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{X,x}$. Звідси виводиться, що $\mathcal{O}_x = \mathbb{F}\mathcal{O}_{Y,y} = \mathcal{O}_{Y,y}$. Виберемо тепер множину твірних $a_1, a_2, \dots, a_m$ A як B-модуля. Їх можна розглядати, як елементи локального кільця $\mathcal{O}_{X,x}$ і там вони є образами елементів $b_1, b_2, \dots, b_m$ з $\mathcal{O}_{Y,y}$. Виберемо афінний окіл $Y' = D(g)$ точки Y, в якому всі функції $b_1, b_2, \dots, b_m$ регулярні, і позначимо $X' = f^{-1}(Y')$; це афінний окіл точки x. Позначимо також $A' = \mathbb{F}[X'] = A[g^{-1}]$ і $B' = \mathbb{F}[B] = B[g^{-1}]$. Тоді елементи $a_1, a_2, \dots, a_m$ також породжують A' як B'-модуль. Але всі вони є образами елементів $b_1, b_2, \dots, b_m$ з B'. Отже $f^*(B') = A'$ і обмеження f на X' є ізоморфізмом $X' \xrightarrow{\sim} Y'$, тобто, обернене відображення $f^{-1} : Y' \to X'$ є регулярним. Оскільки це вірно в околі кожної точки $x \in X$, відображення f^{-1} є регулярни всюди, тобто, f є ізоморфізмом. □

Ми будемо також користатися деякою модифікацію поняття дотичного простору для проективних многовидів. Якщо $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективний многовид $x \in X$, розглянемо афінну частину $X_i = X \cap \mathbb{A}^n_i$, яка містить x. Тоді визначений дотичний простір $T_x X_i \subseteq \mathbb{A}^n_i$. Позначимо $\overline{T}_x X$ замикання $T_x X_i$ у $= \mathbb{P}^n$. Це — проективний підпростір і легко бачити, що він не залежить від вибору афінної частини, яка містить точку x. Допускаючи двозначність, зватимемо $\overline{T}_x X$ також *дотичним простором* до X у точці X.

Лема 12.3. *Припустимо, що точка p не належить $\overline{T}_x X$ і пряма, що сполучаю p й x, має з X єдину спільну точку x. Позначимо через Y образ X при проектуванні з точки p на $\mathbb{P}^{n-1}$, а через $\pi : X \to Y$ — індуковане цим проектуванням відображення. Тоді π індукує ізоморфізм $\Theta_x X \xrightarrow{\sim} \Theta_y Y$, де $y = \pi(x)$.*

Доведення. Достатньо довести, що індуковане відображення $\pi^* : \Omega_y Y \to \Omega_x X$ є ізоморфізмом. Застосувавши відповідну лінійну заміну координат у $\mathbb{P}^n$, можна вважати, що $x = (1 : 0 : \cdots : 0)$, а $p = (0 : \cdots : 0 : 1)$. Тоді на афінній частині $X \cap \mathbb{A}_0^n$ відображення π переводить точку з координатами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, а пряма, що проходить через p та x перетворюється на «вертикальну пряму» $L : x_2 = \cdots = x_n = 0$. Якщо $L \cap X = \{x\}$ і L не є дотичною до X у точці x, то серед рівнянь з $\mathcal{I}(X)$ є таке F, що $F = x_n + F'$, де $F' \in \langle\, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \,\rangle$. Відображення π^* переводить dy_i у dx_i $(1 \le i \le n-1)$. Оскільки $d_x F = dx_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i dx_i$ для деяких α_i, диференціали $dx_1, dx_2, \dots, dx_{n-1}$ породжують $\Omega_x X$, тому π^* сюр'єктивне. Максимальний ідеал $\mathfrak{m}$, який відповідає точці x у кільці $\mathbb{F}[X]$ — це $\langle\, x_1, x_2, \dots, x_n \,\rangle / I$, де $I = \mathcal{I}(X) \subset \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Тому

$$\begin{aligned}\Omega_x X &\simeq \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \simeq \langle\, x_1, x_2, \dots, x_n \,\rangle / \langle\, x_1, x_2, \dots, x_n \,\rangle^2 + I = \\ &= \langle\, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \,\rangle + I / \langle\, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \,\rangle^2 + I \simeq \\ &\simeq \langle\, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \,\rangle / \langle\, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \,\rangle^2 + \langle\, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \,\rangle \cap I,\end{aligned}$$

оскільки $x_n = F - F'$, звідки випливає, що

$$\langle\, x_1, x_2, \dots, x_n \,\rangle = \langle\, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \,\rangle + I.$$

Але якщо $G = \sum_{i=1}^{n-1} x_i g_i$ належить I, то, замінюючи в кожному g_i змінну x_n на $F - F'$, одержимо, що $G \in \langle\, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \,\rangle \cap \langle\, F \,\rangle + \langle\, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \,\rangle^2$, отже,

$$\begin{aligned}\Omega_x X &\simeq \langle\, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \,\rangle / \langle\, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \,\rangle^2 + \langle\, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \,\rangle \cap \langle\, F \,\rangle \\ &\simeq \langle\, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \,\rangle / \langle\, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \,\rangle^2 + \langle\, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \,\rangle \cap \langle\, x_n \,\rangle \\ &= \langle\, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \,\rangle / \langle\, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \,\rangle^2 + \langle\, x_n x_1, x_n x_2, \dots, x_n x_{n-1} \,\rangle\end{aligned}$$

Нехай тепер $g \in \mathbb{F}[Y]$ — функція, задана многочленом $G\,(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, причому $\phi^*(d_y g) = 0$, тобто,

$$G \in \langle\, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \,\rangle^2 + \langle\, x_n x_1, x_n x_2, \dots, x_n x_{n-1} \,\rangle.$$

Тоді G подається у вигляді $G = \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij}\,(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\, x_i x_j + x_n q\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де $h_{ij} \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$. Звідси, очевидно, $q = 0$, а тоді $d_y g = 0$. Отже, $\operatorname{Ker} \pi^* = 0$ і π^* є ізоморфізмом. $\square$

Доведення теореми 12.1. Нехай $X \subseteq \mathbb{P}^n$, де $n > 2d+1$. При доведенні наслідку 6.3 ми бачили, що підмножина M_1 точок $p \in \mathbb{P}^n$ таких, що існує пряма, яка проходить через точку p і перетинає X принаймні у двох точках, є підмноговидом розмірності щонайбільше $2d+1$. Розглянемо у $X \times \mathbb{P}^n$ підмножину $V = \{\, (x,p) \mid p \in T_xX \,\}$. Знов-таки, неважко перевірити (зробіть це), що ця підмножина замкнена. Проекція $\pi : V \to X$ сюр'єктивна, а $\pi^{-1}(x) \simeq T_xX$ — многовид розмірності d. Отже, $\dim V = 2d$, а тому проекція M_2 многовиду V у $\mathbb{P}^n$ має розмірність щонайбільше $2d$. Звідси випливає, що $M_1 \cup M_2 \neq \mathbb{P}^n$, тобто, існує точка p така, що кожна пряма, яка проходить через p, перетинає X щонайбільше в одній точці й не є дотичною до X. Нехай Y — образ многовиду X при проектуванні з точки p на $\mathbb{P}^{n-1}$. Одержимо відображення $f : X \to Y$, яке є скінченним і, згідно з лемою 12.3, задовольняє умовам леми 12.2. Отже, f — ізоморфізм. Цю процедуру можна повторювати, доки не одержимо ізоморфний підмноговид у $\mathbb{P}^{2d+1}$. □

13. Дивізори на кривих

Починаючи з цього розділу, якщо не буде оговорено інше, X позначатиме *неособливу (незвідну) проективну криву*, t_x — *локальний параметр у точці* $x \in X$. Якщо $x \in X$, $f \in \mathbb{F}(X)$ — ненульова раціональна функція, визначено *порядок* $v_x(f)$ *функції* f *у точці* x (див. теорему 11.2 і коментарі після неї): це таке ціле число, що $f = ut_x^{v_x(f)}$, де $u \in \mathcal{O}_x$ і $u(x) \neq 0$ (тобто, $u \in \mathcal{O}_x^\times$). Якщо $m > 0$, кажуть, що функція f має *нуль порядку* m, а якщо $m < 0$ — що вона має *полюс порядку* $-m$ у точці x. Очевидно, $v_x(f) \geq 0$ тоді й лише тоді, коли $x \in \operatorname{Dom} f$; зокрема, якщо $v_x(f) \geq 0$ для всіх x, функція f регулярна на X, тому f — стала (наслідок 3.3 (2)).

Твердження 13.1. *Множина* $\operatorname{supp} f = \{\, x \in X \mid v_x(f) \neq 0 \,\}$ *скінченна.*

Ця множина зветься *носієм функції* f.

Доведення. Підмножина $\operatorname{Dom} f$ відкрита й непорожня, тому $X \setminus \operatorname{Dom} f$ — власна замкнена підмножина, отже, вона скінченна, тобто, $v_x(f) \geq 0$ в усіх точках, крім скінченної кількості. Так само $v_x(f^{-1}) \geq 0$, або, що те саме, $v_x(f) \leq 0$, в усіх точках, крім скінченної кількості. □

Означення 13.2. *Групою дивізорів* $\operatorname{Div} X$ на кривій X зветься вільна абелева група, базою якої є множина точок цієї кривої.

Інакше кажучи, *дивізор* на X — це формальна лінійна комбінація $D = \sum_{x \in X} k_x x$, в якій майже всі коефіцієнти k_x — нулі. Ми позначатимемо $v_x(D) = k_x$ і зватимемо множину $\operatorname{supp} D = \{\, x \in X \mid v_x(D) \neq 0 \,\}$ *носієм* дивізора D. Кажуть, що дивізор D *ефективний* і пишуть $D \geq 0$, якщо всі $k_x \geq 0$. Число $\deg D = \sum_x v_x(D)$ зветься *степенем дивізора* D.

Дивізором функції $f \in \mathbb{F}(X)$ зветься дивізор $(f) = \sum_x v_x(f)x$. Дивізори функцій звуться *головними дивізорами*; підгрупа головних дивізорів позначається $P(X)$; факторгрупа $\operatorname{Pic} X = \operatorname{Div} X/P(X)$ зветься *групою класів дивізорів*, або *групою Пікара* кривої X. Якщо $D - D' \in P(X)$, дивізори D і D' звуться *еквівалентними*; у цьому разі пишуть $D \sim D'$.

Дивізори $(f)_0 = \sum_{v_x(f)>0} v_x x$ і $(f)_\infty = -\sum_{v_x(f)<0} v_x x$ звуться, відповідно, *дивізором нулів* і *дивізором полюсів* функції f. Очевидно, $(f) = (f)_0 - (f)_\infty$, причому обидва ці дивізори ефективні.

Надалі важливим є той факт, що кожен дивізор можна «зсунути» з наперед заданих точок, замінивши його на еквівалентний.

Теорема 13.3. *Для довільних точок $x_1, x_2, \dots, x_s$ і кожного дивізора D існує дивізор $D' \sim D$ такий, що $x_i \notin \operatorname{supp} D'$ $(1 \le i \le s)$.*

Доведення. Очевидно, достатньо довести цю теорему для випадку, коли $D = x$ для деякої точки x («простий дивізор»), причому можна вважати, що $x = x_s$. Виберемо афінну відкриту підмножину U, яка містить усі точки $x_1, x_2, \dots, x_s$ і позначимо $A = \mathbb{F}[U]$. Виберемо також локальний параметр t у точці x так, щоб він був регулярним на U. Це завжди можливо. Дійсно, нехай t' — довільний локальний параметр у точці x, $z_1, z_2, \dots, z_r$ — ті точки з U, в яких $v_{z_i}(t') = -m_i < 0$. Існують функції $a_i \in A$ такі, що $a_i(z_i) = 0,\ a_i(y) \ne 0$. Тоді можна покласти $t = t' \prod i = 1^r a_i^{m_i}$.

Виберемо тепер функції $g_1, g_2, \dots, g_{s-1} \in A$ такі, що для кожної з них

$$g_i(x_i) \ne 0, \text{ але } g_i(x_j) = 0 \text{ при } i \ne j, \text{ зокрема, } g_i(x) = 0.$$

Виберемо числа $\lambda_i \in \mathbb{F}$ так, щоб $\lambda_i \ne t(x_i)/g_i(x_i)^2$, і позначимо

$$f = t - \sum_{i=1}^{s-1} \lambda_i f_i^2.$$

Тоді $v_x(f) = 1$ і $v_{x_i}(f) = 0$, отже, $(f) = x - D'$, причому $x_i \notin \operatorname{supp} D'$ $(1 \le i \le s)$. Оскільки $D' = x - (f)$, це й доводить теорему. □

Нам буде найбільш корисним такий наслідок з доведеної теореми (який, очевидно, ріносильний цій теоремі).

Наслідок 13.4. *Для довільних точок $x_1, x_2, \dots, x_s$ кривої X і довільних цілих чисел $k_1, k_2, \dots, k_s$ існує така функція $f \in \mathbb{F}(X)$, що $v_{x_i}(f) = k_i$ $(1 \le x \le s)$.*

Зауважимо, що ми нічого не можемо сказати про значення $v_x(f)$ для інших точок.

Доведення. Очевидно, достатньо для кожної точки x_i вибрати такий локальний параметр t_i, що $v_{x_j}(t_i) = 0$ при $j \ne i$: тоді можна покласти $f = \prod_{i=1}^s t_i^{k_i}$. Нехай t — довільний локальний параметр у точці x_i. Тоді $(t) = x_i + D$. За теремою 13.3, існує така функція g, що $x_j \notin \operatorname{supp}(g) + D$ при $1 \le j \le s$. Тому $v_{x_i}(gt) = 1$ і $v_{x_j}(gt) = 0$, що й було потрібно. $\square$

Ми застосуємо останній наслідок до дослідження одного важливого кільця.

Наслідок 13.5. *Для фіксованого набору точок $Z = \{ x_1, x_2, \dots, x_s \}$ позначимо $\mathcal{O}_Z = \bigcap_{i=1}^s \mathcal{O}_{x_i}$ (отже, $\mathcal{O}_Z$ складається з тих функцій, які регулярні в усіх точках із Z). Тоді $\mathcal{O}_Z$ є кільцем головних ідеалів. Більш того, якщо для кожної точки x_i обрано такий локальний параметр t_i, що $v_{x_j}(t_i) = 0$ при $j \ne i$, то кожен ненульовий елемент $a \in \mathcal{O}_Z$ однозначно подається у вигляді $a = u \prod_{i=1}^s t_i^{k_i}$, де u — оборотний елемент з $\mathcal{O}_Z$.*

Доведення. Останнє твердження очевидне: треба покласти $k_i = v_{x_i}(a)$. Існування локальних параметрів t_i з заданими властивостями випливає з наслідку 13.4. Нехай тепер $I \subset \mathcal{O}_Z$ — довільний ненульовий ідеал, $m_i = \min \{ v_{x_i}(g) \mid g \in I \}$ і $a = \prod_{i=1}^s t_i^{k_i}$. Кожен елемент з I ділиться на a, тому $I \subseteq a\mathcal{O}_Z$. Позначимо $J = a^{-1}I$. Це ідеал в $\mathcal{O}_Z$, причому $\min \{ v_{x_i}(g) \mid g \in J \} = 0$, тобто в J є такі елементи $b_1, b_2, \dots, b_s$, що $b_i(x_i) \ne 0$. Покладемо

$$b = \sum_{i=1}^s b_i \prod_{j \ne i} t_j.$$

Це елемент з J і $b(x_i) \ne 0$ для всіх i. Отже, цей елемент оборотний в $\mathcal{O}_Z$, а тоді $J = \mathcal{O}_Z$ і $I = aJ = a\mathcal{O}_Z$. $\square$

Нам буде потрібен ще такий результат, який відіграє чималу роль у вивченні кривих, і не має аналогу для многовидів більших розмірностей.

Теорема 13.6. *Регулярне домінантне відображення $\phi : X \to Y$, де X — проективна неособлива, а Y — довільна крива, є скінченним.*

Доведення. Виберемо афінний окіл U довільної точки кривої Y і позначимо $B = \mathbb{F}[U]$. Нехай A — кліьце всіх тих елементів з $\mathbb{F}(X)$, які є цілими над B. Це кільце є скінченним розширенням B [**Др**, Лема 3.7.3], отже, існує афінна крива V і скінченне відображення $\psi : V \to U$. Більш того, якщо $\theta : W \to U$ — регулярне домінантне відображення, де W афінний, $\mathbb{F}(W) = \mathbb{F}(X)$ і $\mathbb{F}[W]$ цілозамкнене, то існує єдиний морфізм $\theta' : W \to V$ такий, що $\theta = \psi\theta'$. Це випливає з того, що $\mathbb{F}[W]$ має містити всі елементи поля $\mathbb{F}(X)$, які цілі над B, тобто, $\mathbb{F}[W] \supseteq A$.

Нехай тепер $U' = \phi^{-1}(U) = \bigcup_i U_i$, де U_i — афінні відкриті підмножини. Оскільки U_i неособливі, кільця $\mathbb{F}[U_i]$ цілозамкнені, тому обмеження $\phi|_{U_i}$ однозначно подається у вигляді $\psi\phi_i$, де $\theta_i : U_i \to V$.

З однозначності випливає, що відображення ϕ_i узгоджені на перетинах $U_i \cap U_j$, тому задають відображення $\theta : U' \to V$. Воно біраціональне, а крива V неособлива, отже, обернене раціональне відображення $V \to U' \subseteq X$ є регулярним, а θ є ізоморфізмом. Тому U' — афінна підмножина, обмеження $\phi|_U$ є скінченним. Оскільки це вірно для околу довільної точки, ϕ — скінченне відображення. $\square$

Означення 13.7. Нехай $\phi : X \to Y$ — регулярне (а тому скінченне) відображення неособливих проективних кривих, $\phi* : \mathbb{F}(Y) \to \mathbb{F}(X)$ — індуковане ним занурення. Ми ототожнюємо кожну функцію $g \in \mathbb{F}(Y)$ з її образом $\phi^* g \in \mathbb{F}(X)$.

(1) *Степенем* $\deg \phi$ відображення ϕ зветься степінь розширення $(\mathbb{F}(X) : \mathbb{F}(Y))$, тобто $\dim_{\mathbb{F}(Y)} \mathbb{F}(X)$.

(2) Для кожної точки $y \in Y$ позначимо $\phi^* y = \sum_{\phi(x)=y} v_x(t_y)$, де t_y — локальний параметр у точці y. Для кожного дивізора $D = \sum_y k_y y$ на Y позначимо $\phi^* D = \sum_y k_y \phi^* y$. Дивізор $\phi^* D$ зветься *прообразом дивізора* D при відображенні ϕ.

Наступна теорема відграє важливу роль у теорії кривих.

Теорема 13.8. *Нехай $\phi : X \to Y$ — регулярне відображення неособливих проективних кривих. Тоді $\deg \phi^* D = \deg \phi \cdot \deg D$ для кожного дивізора $D \in \operatorname{Div} Y$.*

Доведення. Достатньо довести, що $\deg \phi^* y = \deg \phi$. Нехай $\phi^{-1}(y) = Z = \{ x_1, x_2, \dots, x_s \}$, $t_i = t_{x_i}$, $k_i = v_x(t_y)$ і $t_y \mathcal{O}_Z = \prod_{i=1}^{s} t_i^{k_i} \mathcal{O}_Z$. За «китайською теоремою про лишки», $\mathcal{O}_Z / t_y \mathcal{O}_Z \simeq \prod_{i=1}^{s} \mathcal{O}_Z / t_i^{k_i} \mathcal{O}_Z$. Виберемо t_i так, щоб $v_{x_j}(t_i) = 0$ при $j \neq i$; це можливо за наслідком 13.5. З того ж наслідку легко випливає, що елементи $1, t_i, t_i^2, \dots, t_i^{k-1}$ утворюють базу простору $\mathcal{O}_Z / t_i^k \mathcal{O}_Z$. Отже,

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{O}_Z / t_y \mathcal{O}_Z = \sum_{i=1}^{s} k_i = \deg \phi^* y.$$

Тому твердження теореми є безпосереднім наслідком такого результату.

Лема 13.9. *У позначеннях, введених вище, $\mathcal{O}_Z$ є вільним $\mathcal{O}_y$-модулем рангу $d = \deg \phi$.*

Нагадаємо, що $\mathcal{O}_y$ — кільце головних ідеалів. Тому кожен скінченнопороджений модуль без скруту над цим кільцем є вільним. Оскільки $\mathcal{O}_Z \subset \mathbb{F}(X)$, це модуль без скруту. Якщо U — афінний окіл y, $V = \phi^{-1}(U)$, то V — афінний многовид, який містить всі точки $x_1, x_2, \dots, x_s$, причому $\mathbb{F}[V]$ — скінченнопороджений $\mathbb{F}[U]$-модуль. Легко бачити, що його твірні є також твірними $\mathcal{O}_Z$ над $\mathcal{O}_y$ (поясніть це). Нехай $a_1, a_2, \dots, a_r$ — база $\mathcal{O}_Z$ над $\mathcal{O}_y$. Ці елементи лінійно незалежні над полем $\mathbb{F}(Y)$. Крім того, $\mathbb{F}(X) = \mathbb{F}(Y)\mathcal{O}_Z$, тому $x_1, x_2, \dots, x_r$ — твірні $\mathbb{F}(X)$ як $\mathbb{F}(Y)$-простору. Отже, $r = d$. $\square$

Наслідок 13.10. $\deg(f) = 0$ *для довільної функції* $f \in \mathbb{F}(X)$. *Отже, степені еквівалентних дивізорів рівні.*

Доведення. Розглянемо f як раціональне, а тому й регулярне відображення $X \to \mathbb{P}^1$. Тоді $(f)_0 = f^*0$ і $(f)_\infty = f^*\infty$ (достатньо порівняти означення). Звідси

$$\deg(f) = \deg(f)_0 - \deg(f)_\infty = \deg f - \deg f = 0.$$

□

Позначимо $\operatorname{Div}_d X = \{\, D \in \operatorname{Div} X \mid \deg D = d \,\}$. З наслідку 13.10 випливає, що $P(X) \subseteq \operatorname{Div}_0 X$. Факторгрупа $\operatorname{Div}_0 / P(X)$ (група класів дивізорів степеня 0) позначається $\operatorname{Pic}_0 X$ і зветься *нульовою компонентою групи Пікара.* Ця назва пов'язана з тим, що Pic_0 завжди має структуру абелевого многовиду (див. означення 7.3). Нижче ми побачимо це на прикладі неособливих кубічних кривих.

Завершимо цей розділ таким результатом.

Теорема 13.11. *Для неособливої незвідної проективної кривої* X *наступні умови рівносильні:*

(1) $X \simeq \mathbb{P}^1$.
(2) $\operatorname{Pic}_0 X = 0$.
(3) *Для довільних точок* $x, y \in X$ *дивізор* $x - y$ *є головним.*
(4) *Існують точки* $x, y \in X$, $x \neq y$ *такі, що дивізор* $x - y$ *головний.*

Доведення. Очевидно, (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4). Якщо $x = (a_0 : a_1)$ і $y = (b_0 : b_1)$ — дві різні точки з $\mathbb{P}^1$, то $x - y = (f)$, де $f = (a_1x_0 - a_0x_1)/(b_1x_0 - b_0x_1)$, отже, (1) $\Rightarrow$ (3). Залишилося довести, що (4) $\Rightarrow$ (1).

Нехай $(f) = x - y$, де $x \neq y$. Розглянемо f як скінченне відображення $X \to \mathbb{P}^1$. Тоді $f^*0 = x$, отже, за теоремою 13.8, $\deg f = 1$. Це означає, що f — біраціональне відображення, а тому ізоморфізм за наслідком 11.6. □

14. Диференціали на кривих

Ми зберігаємо припущення й позначення попереднього розділу.

Означення 14.1. Нехай A — комутативна $\mathbb{F}$-алгебра, M — деякий A-модуль. *Диференціюванням алгебри* A *у модуль* M зветься $\mathbb{F}$-лінійне відображення $\delta : A \to M$, яке задовольняє *умові Ляйбніца*:

$$\delta(ab) = a\delta(b) + b\delta(a) \quad \text{для всіх } a, b \in A.$$

Елементи a, для яких $\delta a = 0$, звуться *константами відносно диференціювання* δ. Легко бачити, що $d1 = 0$, тому всі елементи поля $\mathbb{F}$ є константами.

Наприклад, відображення $\mathcal{O}_{X,x} \to \Omega_x X$, яке переводить f у $d_x f$ є диференціюванням.

З умови Лябніца випливає правило диференціювання дробів: якщо елемент $b \in A$ оборотний, то

$$\delta\Big(\frac{a}{b}\Big) = \frac{b\delta(a) - a\delta(b)}{b^2}$$

(доведіть це). Тому, якщо $\delta : A \to M$ — диференціювання, а $b \in A$ — такий елемент, що відображення $v \mapsto bv$ модуля M у себе бієктивне, диференціювання d однозначно продовжується до диференціювання $A[b^{-1}] \to M$. Зокрема, якщо A область, $\mathbb{K}$ — її поле часток, а M — векторний простір над $\mathbb{K}$, довільне дифренціювання $A \to M$ однозначно продовжується до диференціювання $\mathbb{K} \to M$.

Теорема 14.2. *Якщо X — незвідна крива, існує диференціювання $d : \mathbb{F}(X) \to \Omega(X)$, де $\Omega(X)$ — одновимірний векторний простір над $\mathbb{F}(X)$ таке, що для кожного диференціювання $\delta : \mathbb{F}(X) \to \mathscr{V}$, для якого $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}^\delta$, існує єдине лінійне відображення $\lambda : \Omega(X) \to \mathscr{V}$ таке, що $\delta = \lambda \cdot d$.*

Очевидно, простір $\Omega(X)$ і диференціювання d визначені однозначно (з точністю до ізоморфізму). Простір $\Omega(X)$ зветься *простором диференціалів* на кривій X, а його елементи звуться (раціональними) диференціалами на X.

Доведення. Якщо $X = \mathbb{P}^1$, $\mathbb{F}(X) = \mathbb{F}(t)$ — поле раціональних дробів від однієї змінної. Якщо $\delta : \mathbb{F}(X) \to \mathscr{V}$ — диференціювання (над $\mathbb{F}$), то, оскільки $\delta(t^m) = mt^{m-1}\delta(t)$, значення $\delta(t)$ повністю визначає диференціювання δ. Нехай $\Omega(t)$ — одновимірний простір над $\mathbb{F}(t)$ з базисним елементом dt, $d : \mathbb{F}(t) \to \Omega(t)$ визначене правилом $df = f'(t)dt$. Це — диференціювання. Якщо $\delta : \mathbb{F}(t) \to \mathscr{V}$ — якесь диференціювання, $v = \delta(t)$, то $\delta(f) = f'(t)v$, отже, за $\lambda : \Omega(t) \to \mathscr{V}$ можна взяти лінійне відображення, яке переводить dt у v.

У загальному випадку, поле $\mathbb{F}(X)$ містить підполе $\mathbb{F}(t)$ таке, що розширення $\mathbb{F}(X) \supseteq \mathbb{F}(t)$ є сепарабельним. Отже, $\mathbb{F}(X) = \mathbb{F}(t, z)$ для деякої функції z, причому існує многочлен $F(x, y)$ такий, що $F(t, z) = 0$, але $(\partial F/\partial y)(t, z) \neq 0$. Для довільного диференціювання $\delta : \mathbb{F}(X) \to \mathscr{V}$ тоді

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, z)\delta(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, z)\delta(z) = 0,$$

звідки

$$\delta(z) = -\frac{F'_x(t, z)}{F'_y(t, z)}\delta(t).$$

Якщо $\bar{\delta}$ — обмеження δ на $\mathbb{F}(t)$, існує єдине лінійне відображення $\bar{\lambda} : \Omega(t) \to \mathscr{V}$ таке, що $\delta(f) = \bar{\lambda}(df)$ для кожної функції $f \in \mathbb{F}(t)$, звідки

$$\delta(z) = -\frac{F'_x(t, z)}{F'_y(t, z)}\bar{\lambda}(dt).$$

Тому за $\Omega(X)$ можна взяти одновимірний простір над $\mathbb{F}(X)$ з базисним елементом dt, а диференціювання $d : \mathbb{F}(X) \to \Omega(X)$ визначити правилами

$$dg(t,z) = \frac{\partial g}{\partial x}(t,z)dt - \frac{\partial g}{\partial y}(t,z)\frac{F'_x(t,z)}{F'_y(t,z)}dt.$$

Оскільки кожне співвідношення між t і z є наслідком співвідношення $F(t,z) = 0$, це визначення коректне і задовольняє вимогам теореми (перевірте це). $\square$

Так само (навіть простіше) доводиться й таке твердження.

Твердження 14.3. *Якщо $\delta : \mathcal{O}_{X,x} \to M$ — диференціювання, а $\mathfrak{m}_x M = 0$, існує єдине лінійне відображення $\theta : \Omega_x X \to M$ таке, що $\delta = \theta \cdot d_x$.*

Доведення. Кожен елемент $a \in \mathcal{O}_x$ однозначно подається у вигляді $a = \alpha + \beta t_x + t_x^2 b$, де $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $b \in A$. Тоді $\delta(a) = \beta\delta(t_x)$, отже, можна покласти $\theta(d_x t) = \delta(t_x)$. $\square$

Означення 14.4. Для кожної відкритої підмножини $U \subseteq X$ позначимо через $\Omega[U]$ підмножину тих елементів $\omega \in \Omega(X)$, що для кожної точки $x \in U$ існує афінний окіл $V \subseteq U$ точки x і функції a_i, b_i, регулярні на V, що $\omega = \sum_i a_i db_i$. Елементи з $\Omega[U]$ звуться *диференціалами, регулярними на U*.

Зауважимо, що з формули Ляйбніца випливає, що якщо $A = \mathbb{F}[V] = \mathbb{F}[u_1, u_2, \dots, u_m]$, то множина $\{\, \sum_i a_i db_i \mid a_i, b_i \in A \,\}$ є скінченнопродженим A-модулем з твірними $du_1, du_2, \dots, du_m$.

Теорема 14.5. *Кожна точка $x \in X$ має такий афінний окіл U, що $\Omega[U] = \mathbb{F}[U]dt$, де t — локальний параметр у точці x.*

Доведення. Очевидно, можна вважати, що X — замкнена підмножина $\mathbb{A}^n$. Нехай $\mathcal{I}(X) = \langle\, F_1, F_2, \dots, F_m \,\rangle$. Оскільки X — неособлива крива, ранг Якобієвої матриці $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(y)\right)$ завжди дорівнює $n-1$. Тому, користуючись рівняннями

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(y)dx_j = 0 \quad (1 \le i \le m),$$

можна знайти афінний окіл V точки x у просторі $\mathbb{A}^n$ такий, що в підмножині $U = V \cap X$ всі диференціали dx_j $(1 \le j \le n)$ виражаються через один з них, який і позначимо dt. Тоді $d_y t \ne 0$ для кожної точки $y \in U$. Припустимо, що $\omega \in \Omega[U]$. У кожної точки $y \in U$ є афінний окіл U_y, в якому $\omega = g_y dt$, де $g_y \in \mathbb{F}[U_y]$. На перетині $U_y \cap U_z$ маємо рівність $(g_y - g_z)dt = 0$. Якщо $g_z(p) \ne g_y(p)$ для якоїсь точки p, звідси одержимо, що $d_p t = 0$. Це неможливо, отже, $g_z = g_y$ для довільних точок $y, z \in U$, тобто $\omega = gdt$, де

$g \in \mathbb{F}[U]$. Замінивши, якщо треба, t на $t - t(x)$, можна вважати, що t — локальний параметр у точці x. $\square$

Означення 14.6. Нехай $\omega \in \Omega(X)$ — деякий ненульовий раціональний диференціал на X, t_x — локальний параметр у точці x. Запишемо $\omega = g_x dt_x$ (згідно теоремі 14.5 це можливо) і позначимо $v_x(\omega) = v_x(g_x)$. Дивізор $(\omega) = \sum_x v_x(\omega)x$ зветься *дивізором диференціала* ω.

Оскільки локальний параметр у точці x визначений з точністю до множника u такого, що $u(x) \neq 0$, це означення коректне. Зауважимо, що $\omega \in \Omega[U]$ тоді й лише тоді, коли $v_x(\omega) \geq 0$ для всіх $x \in U$. Якщо ω' — інший ненульовий диференціал, то $\omega' = f\omega$ для деякої функції f, тому $(\omega') = (\omega) + (f)$. Отже, клас дивізора (ω) у групі Пікара вмзначений однозначно. Він зветься *канонічним класом* кривої X і позначається K_X, або K, якщо крива фіксована.

Число $g = \frac{1}{2}\deg K + 1$ зветься *родом* кривої X і позначається $g(X)$.

Приклад 14.7. Нехай $X = \mathbb{P}^1$, $t = x_1/x_0$. Якщо $p \in \mathbb{A}^1_0$, $t - t(p)$ — локальний параметр у точці p, тому $v_p(dt) = 0$. В афінній частині $\mathbb{A}^1_1$ координатою є $u = 1/t$, тому в ній $dt = -du/u^2$. Тому в точці $\infty = (0:1)$ маємо $v_\infty(dt) = -2$. Отже, $(dt) = -2\infty$ і $g(\mathbb{P}^1) = 0$.

(http://lib.homelinux.org/_djvu/_catalog/index_123.html)

Література

[АМ] М. Атья, И. Макдональдс. Введение в коммутативную алгебру. Москваю Мир, 1972.

[Др] Ю. Дрозд. Вступ до алгебричної геометрії. Львів. ВНТЛ–Класика, 2004.

[GP] G.-M. Greuel, G. Pfister. A SINGULAR introduction to commutative algebra. Springer, 2002.

[КЛО] Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О-Ши. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Москва. Мир, 2000.

[KLO] D. Cox, J. Little, D. O'Shea. Using algebraic geometry. Springer, 2005.

[Ш] И. Р. Шафаревич. Основы алгебраической геометрии. Москва. МЦНМО, 2007 (або попередні видання).