КОГОМОЛОГІЇ ПУЧКІВ В АЛГЕБРИЧНІЙ ГЕОМЕТРІЇ

ЮРІЙ ДРОЗД

Зміст

1. Когомології пучків

Нагадаємо загальну схему побудови похідних функторів у застосуванні до категорії пучків.

Нехай X — топологічний простір, $\mathcal{O}$ — пучок кілець на X, $\mathcal{O}$-Mod — категорія пучків $\mathcal{O}$-модулів на X. Пучок модулів $\mathcal{I}$ зветься *ін'єктивним* , якщо для кожного мономорфізму пучків $\mathcal{O}$-модулів $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ і кожного гомоморфізму $\beta : \mathcal{F} \to \mathcal{I}$ існує такий гомоморфізм $\gamma : \mathcal{G} \to \mathcal{I}$, що $\alpha = \gamma\beta$. Іншими словами, кожен гомоморфізм з підпучка до $\mathcal{I}$ продовжується (найчастіше, неоднозначно!) до гомоморфізму всього пучка.

Наведемо важливий приклад ін'єктивних пучків.

Означення 1.1. Нехай для кожної точки $x \in X$ задано $\mathcal{O}_x$-модуль M_x. *Дискретний пучок* $\mathcal{M} = \mathrm{Dis}(M_x)$ визначається за правилом:

$\mathcal{M}(U) = \prod_{x\in U} M_x$ для кожної відкритої підмножини $U \subseteq X$. Відображення обмеження $\mathcal{M}(U) \to \mathcal{M}(V)$, де $V \subseteq U$ — це природне відображення $\prod_{x\in U} M_x \to \prod_{x\in V} M_x$ (тотожне на всіх компонентах).

Очевидно, якщо $\mathcal{M} = \mathrm{Dis}(M_x)$, то $\mathcal{M}_x = M_x$ для всіх точок $x \in X$. Зокрема, для кожного пучка $\mathcal{F}$ визначена його *дискретизація* $\mathrm{Dis}\,\mathcal{F} = \mathrm{Dis}(\mathcal{F}_x)$.

Твердження 1.2. (1) *Для кожного пучка $\mathcal{O}$-модулів $\mathcal{F}$ має місце природний ізоморфізм*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathrm{Dis}(M_x)) \simeq \prod_{x\in X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{F}_x, M_x).$$

(2) *Набір тотожніх відображень $\mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x$ визначає мономорфізм $\varepsilon_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathrm{Dis}\,\mathcal{F}$.*

(3) *Якщо пучок $\mathcal{M}$ дискретний, то*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{M}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Dis}\,\mathcal{F}, \mathcal{M}).$$

Точніше, кожен гомоморфізм $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{M}$ однозначно визначає такий гомоморфізм $\widetilde{\alpha} : \mathrm{Dis}\,\mathcal{F} \to \mathcal{M}$, що $\alpha = \widetilde{\alpha}\varepsilon_{\mathcal{F}}$.

(4) *Дискретний пучок $\mathrm{Dis}(M_x)$ є ін'єктивним тоді й лише тоді, коли всі модулі M_x ін'єктивні.*

(5) *Кожен пучок може бути зануреним в ін'єктивний.*

Доведення. (1). Кожному морфізму $\mathcal{F} \to \mathcal{M} = \mathrm{Dis}(M_x)$ співставимо набір індукованих ним відображень $\mathcal{F}_x \to \mathcal{M}_x = M_x$. Навпаки, кожному набору відображень $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to M_x$ співставимо морфізм $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{M}$, для якого гомоморфізм $\alpha(U)$ переводить переріз $f \in \mathcal{F}(U)$ в набір $(al_x(f_x)) \in \prod_{x\in U} M_x$, де f_x, як завжди, позначає образ перерізу f у стеблі $\mathcal{F}_x$. Очевидно, побудовані відображення є взаємно оберненими.

(2) одразу випливає з того, що коли $f \in \mathcal{F}(U)$ — такий переріз, що $f_x = 0$ для всіх $x \in U$, то $f = 0$.

(3) очевидне, оскільки $\mathcal{F}_x = (\mathrm{Dis}\,\mathcal{F})_x$.

(4). З (3) випливає, що умову продовження морфізмів достатньо перевіряти для дискретних пучків. Але тоді вонва зводиться до продовження гомоморфізмів кожної компоненти, а це й означає ін'єктивність модулів M_x.

(5). Зануримо кожен модуль $\mathcal{F}_x$ в ін'єктивний модуль M_x. Після цього достатньо взяти композицію занурень $\mathcal{F} \to \mathrm{Dis}\,\mathcal{F} \to \mathrm{Dis}(M_x)$. □

Наслідок 1.3. *Для кожного пучка $\mathcal{O}$-модулів $\mathcal{F}$ існує* ін'єктивна резольвента, *тобто точна послідовність*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{I}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{I}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{I}_2 \xrightarrow{d_2} \dots, \tag{1.1}$$

в якій всі пучки $\mathcal{I}_i$ ін'єктивні.

Доведення. Нехай ε — якесь занурення $\mathcal{F}$ в ін'єктивний пучок $\mathcal{I}_0$, $\mathcal{F}_0 = \mathcal{I}_0/\mathcal{F}$, ε_0 — занурення $\mathcal{F}_0$ в ін'єктивний пучок $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{I}_1/\mathcal{F}_0$, ε_1 — занурення $\mathcal{F}_1$ в ін'єктивний пучок $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{F}_2 = \mathcal{I}_2/\mathcal{F}_1$ і т.д. Тоді за d_i достатньо взяти композицію ε_i з природною сюр'єкцією $\mathcal{I}_i$ на факторпучок $\mathcal{F}_i$. □

Із загальної теорії гомологічної алгебри випливає, що кожен морфізм пучків $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ продовжується до морфізму ін'єктивних резольвент, тобто, до комутативної діаграми

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{I}_0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_1 & \longrightarrow & \mathcal{I}_2 & \longrightarrow & \dots \\ & & {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_0}\big\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_2}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{I}'_0 & \longrightarrow & \mathcal{I}'_1 & \longrightarrow & \mathcal{I}'_2 & \longrightarrow & \dots, \end{array} \tag{1.2}$$

рядки якої є ін'єктивними резольвентами, відповідно, пучків $\mathcal{F}$ та $\mathcal{F}'$.

Нехай $F : \mathcal{O}\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathscr{C}$ — адитивний функтор, де $\mathscr{C}$ — абелева категорія (для нас достатньо випадків, коли $\mathscr{C}$ — категорія модулів або пучків модулів). Нагадаємо, що *праві похідні* R^iF цього функтора визначаються в такий спосіб.

- Для кожного пучка $\mathcal{F}$ фіксуємо ін'єктивну резольвенту (1.1).
- Для кожного морфізму пучків фіксуємо його продовження на ін'єктивні резольвенти (1.2).
- Застосовуємо функтор F до ін'єктивної резольвенти (1.1), розглядаємо одержаний комплекс
$$0 \to F\mathcal{I}_0 \xrightarrow{Fd_0} F\mathcal{I}_1 \xrightarrow{Fd_1} F\mathcal{I}_2 \xrightarrow{Fd_2} \dots,$$
і рахуємо його когомології, покладаючи
$$R^iF(\mathcal{F}) = \operatorname{Ker}(Fd_i)/\operatorname{Im}(Fd_{i-1}) \tag{1.3}$$
(при цьому $d_{-1} = 0$).
- Застосовуємо функтор F до продовження морфізму α на ін'єктивні резольвенти (1.2) і приймаємо за $R^iF(\alpha)$ морфізм $R^iF(\mathcal{F}) \to R^iF(\mathcal{F}')$, індукований морфізмом $F\alpha_i$.

Відомо, що ані значення $R^iF(\mathcal{F})$ не залежить від вибору резольвенти (1.1), ані морфізм $R^iF(\alpha)$ не залежить від вибору продовження (1.2). Крім того, мають місце такі властивості похідних функторів, доведення яких містяться в усіх стандартних курсах гомологічної алгебри.

Твердження 1.4. (1) *$R^iF(\mathcal{I}) = 0$, якщо $\mathcal{I}$ ін'єктивний.*

(2) *Якщо функтор F точний зліва, то $R^0F \simeq F$.*

(3) *Якщо функтор F точний, то $R^iF = 0$ при $i > 0$. Навпаки, якщо $R^1F = 0$, то функтор F точний.*

(4) *Для кожної точної послідовності*

$$0 \to \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}_3 \to 0 \tag{E}$$

існують канонічно визначені морфізми $\delta_i(E) : R^iF(\mathcal{F}_3) \to R^{i+1}F(\mathcal{F}_1)$ («пов'язуючі морфізми») *такі, що має місце точна послідовність*

$$
\begin{aligned}
&0 \to R^0F(\mathcal{F}_1) \xrightarrow{R^0F(\alpha)} R^0F(\mathcal{F}_2) \xrightarrow{R^0F(\beta)} R^0F(\mathcal{F}_3) \xrightarrow{\delta_0(E)} \\
&\to R^1F(\mathcal{F}_1) \xrightarrow{R^1F(\alpha)} R^1F(\mathcal{F}_2) \xrightarrow{R^1F(\beta)} R^1F(\mathcal{F}_3) \xrightarrow{\delta_1(E)} \\
&\to R^2F(\mathcal{F}_1) \xrightarrow{R^2F(\alpha)} R^2F(\mathcal{F}_2) \xrightarrow{R^2F(\beta)} R^2F(\mathcal{F}_3) \xrightarrow{\delta_2(E)} \dots
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

(«довга точна послідовність когомологій»).

(5) *Пов'язуючі морфізми функторіальні в тому розумінні, що коли*

$$
\begin{tikzcd}
(E) & 0 \arrow[r] & \mathcal{F}_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\phi_1"'] & \mathcal{F}_2 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\phi_2"'] & \mathcal{F}_3 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_3"'] & 0 \\
(E') & 0 \arrow[r] & \mathcal{F}'_1 \arrow[r, "\alpha'"] & \mathcal{F}'_2 \arrow[r, "\beta'"] & \mathcal{F}'_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

— комутативна діаграма з точними рядками, то комутативні також всі діаграми

$$
\begin{tikzcd}
R^iF(\mathcal{F}_3) \arrow[r, "\delta_i(E)"] \arrow[d, "R^iF(\phi_3)"'] & R^{i+1}F(\mathcal{F}_1) \arrow[d, "R^{i+1}F(\phi_1)"] \\
R^iF(\mathcal{F}'_3) \arrow[r, "\delta_i(E')"'] & R^{i+1}F(\mathcal{F}'_1)
\end{tikzcd}
$$

Означення 1.5. *Функтори когомологій* пучків $\mathcal{O}$-модулів визначаються як похідні від функтора перерізів:

$$H^i(X, \mathcal{F}) = R^i\Gamma(X, \mathcal{F}).$$

Групи $H^i(X, \mathcal{F})$ звуться *когомологіями пучка* $\mathcal{F}$. Нагадаємо, що функтор перерізів є точним зліва, отже, $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$. Якщо простір X фіксований, інколи замість $H^i(X, \mathcal{F})$ пишуть $H^i(\mathcal{F})$.

Насправді, можна розширити клас резольвент, придатних для обчислення когомологій.

Означення 1.6. Пучок $\mathcal{F}$ зветься *в'ялим* (*flabby, flasque*), якщо всі відображення обмеження $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ є сюр'єкціями (тоді, очевидно, і всі відображення обмеження $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, де $V \subseteq U$ є сюр'єкціями).

Твердження 1.7. *Нехай* $0 \to \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}_3 \to 0$ *— точна послідовність пучків, в якій пучок* $\mathcal{F}_1$ *є в'ялим. Тоді:*

(1) *Послідовність* $0 \to \mathcal{F}_1(X) \xrightarrow{\alpha(X)} \mathcal{F}_2(X) \xrightarrow{\beta(X)} \mathcal{F}_3(X) \to 0$ *також є точною.*

(2) *Якщо пучок* $\mathcal{F}_2$ *є в'ялим, таким є й пучок* $\mathcal{F}_3$ *і навпаки.*

Доведення. (1). Нехай $f \in \mathcal{F}_3(X)$. Розглянемо множину пар (U, g), де $U \subseteq X$ — відкрита підмножина, а $g \in \mathcal{F}_2(U)$ такий переріз, що $\beta(U)g = f|_U$. Ця множина природно впорядкована, причому легко перевірити, що кожен ланцюг в ній має верхню межу (зробіть це самостійно). За лемою Цорна в цій множині є максимальний елемент (U, f).[1] Припустимо, що $U \neq X$, $x \in X \setminus U$. Оскільки β — епіморфізм, індуковне відобрадження стебел $\mathcal{F}_{2x} \to \mathcal{F}_{3x}$ сюр'єктивне, отже, існує елемент $h_x \in \mathcal{F}_{2x}$, який відображається в образ $f_x \in \mathcal{F}_{2x}$ перерізу f. За означенням стебел, існує такий відкритий окіл $V \ni x$ і такий переріз $h \in\in \mathcal{F}_2(V)$, що $\beta(V)h = f|_V$. Якщо $\bar{g}$ і $\bar{h}$ позначають обмеження, відповідно, g і h на $U \cap V$, то їхні образи в $\mathcal{F}_3(U \cap V)$ збігаються: обидва рівні $f|_{U\cap V}$. Тому $\bar{g} - \bar{h} = \alpha(\bar{h}')$ для якогось перерізу $\bar{h}' \in \mathcal{F}_1(U \cap V)$. Оскільки $\mathcal{F}_1$ в'ялий, існує такий переріз $h' \in \mathcal{F}_1(V)$, що $\bar{h}'$ є його обмеженням. Але тоді $g|_{U\cap V} = h''|_{U\cap V}$, де $h'' = h + \alpha(h')$, причому $\beta(h'') = f|_V$. За означенням пучка, тоді існує такий переріз $f' \in \mathcal{F}_2(U \cup V)$, що $f'|_U = f$, а $f'|_V = h''$, звідки $\beta(f') = f|_{U\cup V}$. Це протирічить максимальності U, отже, завершує доведення.

(2). Для кожної відкритої підмножини $U \subseteq X$ гомоморфізми обмеження індукують комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_1(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_2(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_3(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_1(U) \arrow[r] & \mathcal{F}_2(U) \arrow[r] & \mathcal{F}_3(U) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

причому її рядки є точними згідно вже доведеній властивості (1), а перше вертикальне відображення є сюр'єктивним. Тоді легко перевірити, що друге й третє вертикальні відображення є сюр'єктивними одночасно (зробіть це самостійно).[2] □

Твердження 1.8. (1) *Кожен дискретний пучок є в'ялим.*

(2) *Кожен ін'єктивний пучок є в'ялим.*

(3) *Для кожного пучка $\mathcal{F}$ існує в'яла резольвента, тобто точна послідовність*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\phi_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\phi_2} \dots, \tag{1.5}$$

в якій всі пучки $\mathcal{F}_i$ є в'ялими.

(4) *Якщо пучок $\mathcal{F}$ є в'ялим, то $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ при $i > 0$.*

(5) *Якщо* (1.5) *— в'яла резольвента пучка $\mathcal{F}$, то $H^i(X, \mathcal{F}) \simeq \operatorname{Ker}\Gamma(\phi_i)/\operatorname{Im}\Gamma(\phi_{i-1}$ (де, знов-таки, $\phi_{-1} = 0$).*

---

[1]Якщо простір X нетерів (наприклад, це алгебричний многовид), застосування леми Цорна є зайвим, оскільки кожен строго зростаючий ланцюг відкритих підмножин є скінченним.

[2]Можна скористатися відомою «лемою про змію» або довести це безпосередньо.

Доведення. (1) випливає з означення дискретного пучка.

(2). Зануримо ін'єктивний пучок $\mathcal{I}$ у дискретний $\mathcal{D}$ (див. Твердження 1.2(2)). Тоді $\mathcal{I}$ виділяється з $\mathcal{D}$ прямим доданком: $\mathcal{D} \simeq \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ для деякого $\mathcal{J}$. Але очевидно, що прямий доданок в'ялого пучка знову є в'ялим.

(3) випливає з (2) і Твердження 1.2(5), або може бути одержане з (2) на зразок доведення Наслідку 1.3.

(4). Зануримо пучок $\mathcal{F}$ в ін'єктивний пучок $\mathcal{I}$. Одержимо точну послідовність

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I} \to \mathcal{G} \to 0.$$

Запишемо для неї довгу точну послідовність когомологій:

$$\begin{aligned} &0 \to \Gamma(\mathcal{F}) \to \Gamma(\mathcal{I}) \to \Gamma(\mathcal{G}) \to H^1(\mathcal{F}) \to 0 \to \\ &\quad \to H^1(\mathcal{G}) \to H^2(\mathcal{F}) \to 0 \to H^2(\mathcal{G}) \to H^3(\mathcal{F}) \to 0 \to \dots \end{aligned}$$

(ми врахували, що $H^i(\mathcal{I}) = 0$ при $i > 0$). Але, за Твердженням 1.7, відображення $\Gamma(\mathcal{I}) \to \Gamma(\mathcal{G})$ є сюр'єктивним, тому $H^1(\mathcal{F}) = 0$. Крім того, $H^i(\mathcal{F}) \simeq H^{i-1}(\mathcal{G})$, а пучок $\mathcal{G}$ також є в'ялим (за властивістю (2) та Твердженням 1.7). Отже, рівності $H^i(\mathcal{F}) = 0$ тепер легко виводяться індукцією.

(5).[3] Позначимо $\mathcal{G} = \operatorname{Coker} \phi$. Тоді є точні послідовності

$$\begin{aligned} &0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \to 0, \\ &0 \to \mathcal{G} \xrightarrow{\phi'} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\phi_2} \dots , \end{aligned}$$

причому $\phi_0 = \phi'\psi$. Застосовуючи функтори Γ та H^1, одержимо точні послідовності

$$\begin{aligned} &0 \to \Gamma(\mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(\phi)} \Gamma(\mathcal{F}_0) \xrightarrow{\Gamma(\psi)} \Gamma(\mathcal{G}) \to H^1(\mathcal{F}) \to 0 \to \\ &\quad \to H^1(\mathcal{G}) \to H^2(\mathcal{F}) \to 0 \to H^2(\mathcal{G}) \to H^3(\mathcal{F}) \to 0 \to \dots , \\ &0 \to \Gamma(\mathcal{G}) \xrightarrow{\Gamma(\phi')} \Gamma(\mathcal{F}_1) \xrightarrow{\Gamma(\phi_1)} \Gamma(\mathcal{F}_2) \end{aligned}$$

(ми врахували, що $H^i(\mathcal{F}_0) = 0$ при $i > 0$). З першої з них одержуємо, що $H^1(\mathcal{F}) \simeq \Gamma(\mathcal{G}) / \operatorname{Im} \Gamma(\psi)$. Але, оскільки $\Gamma(\phi')$ — мономорфізм і $\operatorname{Im} \Gamma(\phi') = \operatorname{Ker} \Gamma(\psi)$, маємо, що

$$H^1(\mathcal{F}) \simeq \operatorname{Im} \Gamma(\phi') / \operatorname{Im} \Gamma(\phi'\psi) = \operatorname{Ker} \Gamma(\phi_1) / \operatorname{Im} \Gamma(\phi_0).$$

Крім того, ми бачимо, що $H^i(\mathcal{F}) \simeq H^{i-1}(\mathcal{G})$, а послідовність

$$0 \to \mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{F}_3 \xrightarrow{\phi_3} \dots$$

є в'ялою резольвентою пучка $\mathcal{G}$. Тепер твердження (5) для $i > 1$ одержується очевидною індукцією. □

[3]Насправді, це твердження, так само, як і наведене його доведення, є частковим випадком загального результату гомологічної алгебри про «*стираючі функтори*».

Нагадаємо, що для кожної множини M визначений *постійний пучок* M_X, перерізи якого на підмножині U — це неперервні відображення $f : U \to M$, де M розглядається з дискретною топологією, тобто такі відображення, що $f^{-1}(M')$ — замкнена підмножина для кожної підмножини $M' \subseteq M$. Зауважимо, що коли підмножина U *зв'язна*, звідси випливає, що f — постійне відображення: $f(x) = c$ для всіх точок $x \in U$ та фіксованого елемента $c \in M$. Зауважимо, що це завжди має місце, якщо простір X *незвідний* (тоді такою є й кожна його відкрита підмножина).

Зокрема, визначений постійний пучок кілець $\mathbb{Z}_X$. Очевидно, кожен пучок абелевих груп можна розглядати як пучок $\mathbb{Z}_X$-модулів.

Наслідок 1.9. *Для кожного пучка кілець $\mathcal{O}$ на просторі X функтори когомологій для $\mathcal{O}$-модулів є обмеженнями на категорію $\mathcal{O}$-модулів функторів когомологій для пучків абелевих груп (тобто, $\mathbb{Z}_X$-модулів).*

Доведення. Дійсно, кожен в'ялий пучок $\mathcal{O}$-модулів є також в'ялим пучком абелевих груп, тому потрібний результат одразу випливає з Твердження 1.8. □

2. Когомології афінних многовидів

Цей розділ присвячений доведенню наступного результату, який фактично є базовим при обчисленні когомологій когерентних пучків на алгебричних многовидах.

Теорема 2.1. *Якщо X — афінний многовид, а $\mathcal{F}$ — квазікогерентний пучок $\mathcal{O}_X$-модулів, то $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ для всіх $i > 0$.*

Встановимо спочатку деякі властивості ін'єктивних модулів над нетеровим кільцем $\mathbf{A}$. Для кожного $\mathbf{A}$-модуля M і кожного ідеалу $\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{A}$ позначимо

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \left\{ m \in M \mid \mathfrak{a}^k m = 0 \text{ для деякого } k \right\}.$$

Лема 2.2. *Якщо $\mathbf{A}$-модуль M ін'єктитвний, то й модуль $J = \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ також ін'єктивний.*

Доведення. Нагадаємо, що модуль J є ін'єктивним тоді й лише тоді, коли для кожного ідеалу $\mathfrak{b} \subseteq \mathbf{A}$ кожен гомоморфізм $\alpha : \mathfrak{b} \to J$ продовжується до гомоморфізму $\mathbf{A} \to J$. Оскільки кожен елемент з J анулюється деяким степенем ідеалу $\mathfrak{a}$, а ідеал $\mathfrak{b}$ скінченнопороджений, знайдеться таке натуральне k, що $\mathfrak{a}^k \alpha(\mathfrak{b}) = 0$. За теоремою Артіна–Ріса [**Др**, Теорема 4.2.1], існує таке $n \geqslant k$, що $\mathfrak{a}^k \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^n$. Тоді $\alpha(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^n) = 0$, отже, α пропускається через фактормодуль $\mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^n) \simeq (\mathfrak{b} + \mathfrak{a}^n)/\mathfrak{a}^n \subseteq \mathbf{A}/\mathfrak{a}^n$. Композиція одержаного гомоморфізму $\bar{\alpha} : \mathbf{A}/\mathfrak{a}^n \to J$ з зануренням $J \to I$ продовжується до гомоморфізму $\beta : \mathbf{A}/gA^n \to I$ (оскільки I ін'єктивний). Очевидно, $\operatorname{Im} \beta$ анулюється $\mathfrak{a}^n$, тому $\operatorname{Im} \beta \subseteq J$. Отже, β можна розглядати як продовження на $\mathbf{A}/\mathfrak{a}^n$ гомоморфізму $\bar{\alpha}$. Тоді композиція β з природним епіморфізмом $\mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathfrak{a}^n$ є продовженням α до гомоморфізма $\mathbf{A} \to J$, тобто, J є ін'єктивним. $\square$

Лема 2.3. *Якщо модуль I ін'єктивний, то для кожного елемента $a \in A$ природне відображення $I \to I[a^{-1}]$ $(c \mapsto c/1)$ сюр'єктивне.*

Доведення. Позначимо $\mathfrak{a}_k = \operatorname{Ann}_{\mathbf{A}} a^k$. Тоді $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \dots$, тому знайдеться такий номер n, що $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+1} = \mathfrak{a}_{n+2} = \dots$. Зауважимо, що $a^k\mathbf{A} \simeq \mathbf{A}/\mathfrak{a}_k$. Довільний елемент з $I[a^{-1}]$ має вигляд b/a^k для деякого $b \in I$ та деякого k. Визначимо гомоморфізм $\alpha : a^{n+k}\mathbf{A} \to I$, поклавши $\alpha(a^{n+k}) = a^n b$. Це можливо, бо $\mathfrak{a}_{n+k}a^n b = \mathfrak{a}_n a^n b = 0$. Оскільки I ін'єктивний, α продовжується до гомоморфізму $\alpha' : \mathbf{A} \to I$. Нехай $c = \alpha'(1)$, тоді $a^n b = \alpha'(a^{n+k}) = a^{n+k}c$, звідки $b/a^k = c/1$ в модулі $I[a^{-1}]$, що й треба було довести. $\square$

Нам буде потрібно ще поняття *носія перерізу* та *групи перерізів з даним носієм.*

Означення 2.4. Нехай $\mathcal{F}$ — пучок абелевих груп на просторі X, $f \in \Gamma(X, \mathcal{F})$, f_x, де $x \in X$ позначає образ f у стеблі $\mathcal{F}_x$, $Z \subseteq X$ — замкнена підмножина.

(1) *Носієм перерізу* f зветься підмножина
$$\operatorname{Supp} f = \{\, x \in X \mid f_x \neq 0 \,\}.$$
(2) *Носієм пучка* зветься підмножина
$$\operatorname{Supp} \mathcal{F} = \{\, x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0 \,\} = \bigcap_{f \in \Gamma(X,\mathcal{F})} \operatorname{Supp} f.$$
(3) Множину $\{\, f \in \Gamma(X, \mathcal{F}) \mid \operatorname{Supp} f \subseteq Z \,\}$ позначають $\Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ і звуть *групою перерізів пучка* $\mathcal{F}$ *з носієм* Z.
(4) Підпучок $\mathcal{H}^0_Z(X, \mathcal{F}) : U \to \Gamma_{Z \cap U}(U, \mathcal{F})$ пучка $\mathcal{F}$ зветься *підпучком перерізів з носієм* Z.

Очевидно, $\Gamma_Z(X, \mathcal{F}) = \mathcal{H}^0_Z(X, \mathcal{F})(X)$.

Вправа 2.5. Перевірте, що $\mathcal{H}^0_Z = \mathcal{H}^0_Z(X, \mathcal{F})$ дійсно є підпучком $\mathcal{F}$, тобто якщо всі обмеження $f|_{V_i}$, де $U = \bigcup_i V_i$ — відкрите покриття U, належать $\mathcal{H}^0_Z(V_i)$, то $f \in \mathcal{H}^0_Z(U)$.

Твердження 2.6. *Нехай X — афінний алгебричний многовид, $\mathbf{A} = \Bbbk[X]$, M — деякий $\mathbf{A}$-модуль і $\widetilde{M}$ — відповідний квазікогерентний пучок $\mathcal{O}_X$-модулів.*

(1) *Якщо $m \in \Gamma(X, \widetilde{M}) = M$, то* $\operatorname{Supp} m = V(\operatorname{Ann} m)$.
(2) $\operatorname{Supp} \widetilde{M} = V(\operatorname{Ann} M)$.
(3) *Якщо $Z = V(\mathfrak{a})$ і $N = \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$, то $\mathcal{H}^0_Z(U, \widetilde{M}) = \Gamma(U, \widetilde{N})$, зокрема, $\Gamma_Z(X, \widetilde{M}) = N$.*

Доведення. (1). Нехай $x \in X$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$ — відповідний максимальний ідеал в $\mathbf{A}$. Тоді $\widetilde{M}_x = M_{\mathfrak{m}}$, а m_x ототожнюється з елементом $m/1 \in M\mathfrak{m}$. Тому $m_x = 0$ означає, що існує такий елемент $a \in \mathbf{A} \setminus \mathfrak{m}$, що $am = 0$, тобто $\operatorname{Ann} m \not\subseteq \mathfrak{m}$, або $x \notin V(\operatorname{Ann} m)$.

(2) одразу виплмває з- (1).

(3). Достатньо перевірити цю рівність для головної відкритої підмножини $U = D(f)$. Тоді $\Gamma(U, \widetilde{M}) = M[f^{-1}]$. Переріз $s = m/f^k$ належить $\mathcal{H}^0_Z(U, \widetilde{M})$ тоді й лише тоді, коли $V(\operatorname{Ann} m) \subseteq V(\mathfrak{a})$. За теоремою Гільберта про нулі, це рівносильно тому, що $\sqrt{\operatorname{Ann} m} \supseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, тобто $\mathfrak{a}^n \subseteq \operatorname{Ann} m$ для деякого n. Останнє якраз і означає, що $m \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ і $s \in N[f-1] = \Gamma(U, \widetilde{N})$. □

Вправа 2.7. Виведіть з попереднього твердження, що для довільного квазікогерентного пучка $\mathcal{F}$ на алгебричному многовиді X підмножина $\operatorname{Supp} \mathcal{F}$ є замкненою.

Наступна лема є ключовою у доведенні Теореми 2.1.

Лема 2.8. *У припущеннях Твердження 2.6, якщо модуль M ін'єктивний, пучок $\widetilde{M}$ є в'ялим.*

Доведення. Ми використаємо нетерову індукцію за множиною $Y = \operatorname{Supp} \widetilde{M} = V(\operatorname{Ann} M)$. Якщо Y складається з однієї точки y, легко бачити, що $\Gamma(U, \widetilde{M}) = M$, якщо $y \in U$, і 0, якщо $y \notin U$ (перевірте це). Отже, пучок $\widetilde{M}$ напевне є в'ялим. Припустимо тепер, що твердження вірне для всіх ін'єктивних модулів N таких, що $\operatorname{Supp} \widetilde{N} \subset Y$. Нехай $U \subset X$ — відкрита підмножина. Нам треба довести, що обмеження $\rho : \Gamma(X, \widetilde{M}) \to \Gamma(U, \widetilde{M})$ є сюр'єктивним. Якщо $U \cap Y = 0$, то $\Gamma(U, \widetilde{M}) = 0$ і доводити нема чого. Інакше в U міститься головна відкрита підмножина $V = D(f)$, для якої $V \cap Y \neq \emptyset$. Позначимо $Z = Y \setminus V$. Це власна замкнена підмножина в Y, яка виділяється в Y одним рівнянням $f = 0$. Позначимо $\mathfrak{a} = f\mathbf{A}$, $N = \Gamma_Z(X, \widetilde{M})$. Тоді, за Твердженням 2.6(3), $N = \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$, а $\operatorname{Supp} \widetilde{N} \subseteq Z$. Нехай $s \in \Gamma(U, \widetilde{M})$, $\bar{s} = s|_V$. Оскільки $\Gamma(V, \widetilde{M}) = M[f^{-1}]$, з Леми 2.3 випливає, що $\bar{s}$ є образом деякого перерізу $m \in \Gamma(X, \widetilde{M}) = M$. Розглянемо переріз $s' = s - \rho(m) \in \Gamma(U, \mathcal{F})$. $s'_x = 0$ для кожної точки $x \in V$, отже $\operatorname{Supp} s' \subseteq Z$, тобто, за Твердженням 2.6(3), s' насправді є перерізом пучка $\widetilde{N}$. Але, за Лемою 2.2, N також є ін'єктивним модулем. Оскільки його носій менший за Y, відображення $\Gamma(X, \widetilde{N}) \to \Gamma(U, \widetilde{N})$ сюр'єктивне за індуктивним припущенням, тобто $s' = \rho(m')$, а тоді $s = \rho(m + m')$. □

Доведення Теореми 2.1. Довільний квазікогерентний пучок $\mathcal{O}_X$-модулів ізоморфний $\widetilde{M}$ для деякого $\mathbf{A}$-модуля M. Розглянемо деяку ін'єктивну резольвенту цього модуля:

$$0 \to M \to I_0 \to I_1 \to I_2 \to \dots \tag{2.1}$$

й застосуємо до неї функтор $\widetilde{\ }$. Одержимо точну послідовність

$$0 \to \widetilde{M} \to \widetilde{I}_0 \to \widetilde{I}_1 \to \widetilde{I}_2 \to \dots \tag{2.2}$$

Згідно з Лемою 2.8, ця послідовність є в'ялою резольвентою пучка $\widetilde{M}$, отже, за Твердженням 1.8(5), нею можна скористатися для обчислення когомологій цього пучка. Але, якщо взяти глобальні перерізи пучків з послідовності (2.2), ми одержимо послідовність (2.1), яка є точною. Отже, $H^i(X, \widetilde{M}) = 0$ при $i > 0$. $\square$

3. Когомології Чеха

У цьому розділі ми розглядемо найбільш вживаний спосіб обчислення когомологій когерентних пучків, який базується на так званих *когомологіях Чеха.*

Означення 3.1. Нехай $\mathcal{F}$ — пучок абелевих груп на топологічному просторі X, $\mathfrak{U} : X = \bigcup_{i\in\mathfrak{I}} U_i$ — відкрите покриття цього простору. Ми фіксуємо деякий лінійний порядок $<$ на множині індексів $\mathfrak{I}$ й позначаємо $U_{i_0 i_1 \dots i_n} = \bigcap_{k=0}^n U_{i_k}$, де $i_0 < i_1 < \dots < i_n$ — елементи з $\mathfrak{I}$.

(1) Позначимо $C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 i_1 \dots i_n} \mathcal{F}(U_{i_0 i_1 \dots i_n})$, де добуток береться по всіх $(n+1)$-елементних підмножинах $\{\, i_0, i_1, \dots, i_n \,\} \subseteq \mathfrak{I}$, де $i_0 < i_1 < \dots < i_n$. Для елемента $c \in C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ позначимо $c(i_0 i_1 \dots i_n)$ його компоненту з групи $\mathcal{F}(U_{i_0 i_1 \dots i_n})$.

(2) Визначимо відображення $d_n : C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ правилом:

$$d_n(c)(i_0 i_1 \dots i_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k c(i_0 i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_{n+1})|_{U_{i_0 i_1 \cdots i_{n+1}}}.$$

Нескладно перевірити (зробіть це), що $d_n d_{n-1} = 0$ для кожного $n \geqslant 0$, якщо вважати, що $C^{-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ і $d_{-1} = 0$. Отже, послідовність груп

$$0 \to C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d_0} C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d_1} C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d_2} \dots$$

є *комплексом.* Він зветься *комплексом Чеха* пучка $\mathcal{F}$ відносно покриття $\mathfrak{U}$.

(3) Групи когомологій комплекса Чеха $\check{H}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \ker d_n / \operatorname{Im} d_{n-1}$ звуться *когомологіями Чеха* пучка $\mathcal{F}$ відносно покриття $\mathfrak{U}$.

Зауважимо, що коли покриття $\mathfrak{U}$ скінченне і складається з m множин, то $\check{H}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ при $n \geqslant m$.

Вправа 3.2. (1) Нехай $X = S^1 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\}$, $U_1 = X \setminus \{1\}$, $U_2 = X \setminus \{-1\}$. Обчисліть когомології Чеха цього покриття із значеннями в постійному пучку $\mathbb{Z}_X$. (Вони збігаються зі «звичайними» цілочисельними когомологіями X як топологічного простору.)

(2) Нехай $X = \mathbb{P}^1$, $\mathcal{O}(d)$ — «підкручений» структурний пучок, тобто такий, обмеження якого на афінні частини $\mathbb{A}^1_i$ $(i = 0, 1)$ збігаються зі структурним пучком на афінній прямій, але «склеювання» перерізів з $\mathcal{O}(\mathbb{A}^1_0) \simeq \Bbbk[t]$ та $\mathcal{O}(\mathbb{A}^1_1) \simeq \Bbbk[t^{-1}]$ ототожнює $f(t)$ з $t^{-d}f(t)$. Обчисліть когомології Чеха пучка $\mathcal{O}(d)$ відносно покриття $\mathfrak{U} : \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1_0 \cup \mathbb{A}^1_1$.

Твердження 3.3. $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \simeq \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Доведення. Дійсно, $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \operatorname{Ker} d_0$, а елемент $(s_i) \in C(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, де $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ належить $\ker d_0$ тоді й лише тоді, коли $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$. Але, за аксіомами пучка, задати такий набір — те саме, що задати переріз $s \in \mathcal{F}(X)$. □

Наша мета — доведення наступного результату.

Теорема 3.4. *Нехай X — відокремлюваний алгебричний многовид, $\mathfrak{U} : X = \bigcup_{i=1}^r$ — його скінченне афінне покриття. Тоді для кожного квазікогерентного пучка $\mathcal{F}$ на многовиді X існує канонічний ізоморфізм*

$$\check{H}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \simeq H^n(X, \mathcal{F}).$$

Доведення ґрунтується на розгляді *резольвенти Чеха.*

Означення 3.5. Ми користуємося позначення з Означення 3.1.

(1) Для кожного набору індексів $i_0 < i_1 < \cdots < i_n$ з $\mathfrak{I}$ позначимо $\mathcal{F}_{i_0 i_1 \dots i_n} = \iota_*(\mathcal{F}|_{U_{i_0 i_1 \dots i_n}})$, де ι — занурення $U_{i_0 i_1 \dots i_n} \to X$. Іншими словами, $\mathcal{F}_{i_0 i_1 \dots i_n}(V) = \mathcal{F}(V \cap U_{i_0 i_1 \dots i_n})$ для кожної відкритою підмножини $V \subseteq X$.
(2) Позначимо $\mathcal{C}^n = \mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 i_1 \dots i_n} \mathcal{F}_{i_0 i_1 \dots i_n}$. Для перерізу $s \in \mathcal{C}^n(V)$ позначимо $s(i_0 i_1 \dots i_n)$ його компоненту з $\mathcal{F}_{i_0 i_1 \dots i_n}(V)$.
(3) Визначимо морфізм $\varepsilon = \varepsilon_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ правилом: $\varepsilon(s) = (s|_V \cap U_i)$ для кожного $s \in \mathcal{F}(V)$.
(4) Визначимо морфізми $d_n : \mathcal{C}^n \to \mathcal{C}^{n+1}$ правилом:

$$\mathsf{d}_n(s)(i_0 i_1 \dots i_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k s(i_0 i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_{n+1})|_{U_{i_0 i_1 \cdots i_{n+1}}}$$

для кожного $s \in \mathcal{C}^n(V)$.

Зауважимо, що $C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))$ за означенням.

Надалі нам буде зручно вживати позначення $s(i_0 i_1 \dots i_n)$ для довільного набору індексів. Ми вважатимемо, що $s(i_0 i_1 \dots i_n) = 0$, якщо серед цих індексів є однакові. Якщо всі вони різні, існує єдина перестановка σ множини $\{ i_1, i_2, \dots, i_n \}$ така, що $\sigma(i_0) < \sigma(i_1) < \cdots < \sigma(i_n)$. Тоді вважатимемо, що $s(i_0 i_1 \dots i_n) = \operatorname{sgn} \sigma s(j_0 j_1 \dots j_n)$, де $j_k = \sigma(i_k)$.

Твердження 3.6. *Послідовність*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{C}^0 \xrightarrow{\mathsf{d}_0} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{\mathsf{d}_1} \mathcal{C}^2 xarr \mathsf{d}_2 \dots \tag{3.1}$$

є точною.

Доведення. Те, що ε — занурення, а $\operatorname{Ker} \mathsf{d}_0 = \operatorname{Im} \varepsilon$, випливає з аксіом пучка. Щоб довести точність в членах $\mathcal{C}^n$ при $n > 0$, побудуємо відображення $h_n : \mathcal{C}^n_x \to \mathcal{C}^{n-1}_x$ для кожної точки $x \in X$. Саме, нехай елемент $s_x \in \mathcal{C}^n_x$ походить з перерізу $s \in \mathcal{C}^n(V)$. Можна вважати, що $V \subseteq U_j$ для деякого j. За цієї умови покладемо

$$(hs)(i_0 i_1 \dots i_{n-1}) = s(j i_0 i_1 \dots i_{n-1})$$

(зауважимо, що $V \cap U_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}} = V \cap U_{j i_0 i_1 \dots i_{n-1}}$) і $h_n(s_x) = (hs)_x$. Очевидно, це не залежить від вибору s. Більш того, нескладно перевірити, що $(\mathsf{d}_{n-1} h_n + h_{n+1} \mathsf{d}_n)(s_x) = 0$ для довільного $s_x \in \mathcal{C}^n_x$ і довільного $n > 0$. Тому якщо $\mathsf{d}_n(s_x) = 0$, то $s_x = -\mathsf{d}_{n-1} h_n(s_x) \in \operatorname{Im} \mathsf{d}_{n-1}$, що й треба було довести. □

Нехай

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{I}_0 \xrightarrow{\phi_0} \mathcal{I}_1 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{I}_2 \xrightarrow{\phi_2} \dots \;—$$

ін'єктивна резольвента пучка $\mathcal{F}$. Тоді, згідно з загальними властивостями ін'єктивних резольвент, існує морфізм точної послідовності (3.1) в цю резольвенту, тобто, комутативна діаграма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, equal] & \mathcal{C}^0 \arrow[r, "\mathsf{d}_0"] \arrow[d] & \mathcal{C}^1 \arrow[r, "\mathsf{d}_1"] \arrow[d] & \mathcal{C}^2 \arrow[r, "\mathsf{d}_2"] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\phi"] & \mathcal{I}_0 \arrow[r, "\phi_0"] & \mathcal{I}_1 \arrow[r, "\phi_1"] & \mathcal{I}_2 \arrow[r, "\phi_2"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Ця діаграма індукує гомоморфізми когомологій

$$\alpha_n = \alpha_n(\mathcal{F}) : \check{H}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{F}),$$

причому α_0 — це композиція ізоморфізмів $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{F})$.

Твердження 3.7. *Якщо пучок $\mathcal{F}$ в'ялий, то $\check{H}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ для всіх $n > 0$.*

Доведення. Легко бачити (перевірте це), що коли пучок $\mathcal{F}$ в'ялий, то й усі пучки $\mathcal{F}_{i_0 i_1 \dots i_n}$, а тому й пучки $\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ також є в'ялими. Тоді, застосувавши до точної послідовності (3.1) функтор перерізів, одержимо знову точну послідовність

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varepsilon} C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d_0} C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d_1} C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d_2} \dots$$

Отже, $\ker d_n = \operatorname{Im} d_{n-1}$, тобто, $\check{H}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ при $n > 0$. □

Твердження 3.8. *Будь-який квазікогерентний пучок $\mathcal{F}$ на алгебричному многовиді X можна занурити у в'ялий квазікогерентний пучок.*

Доведення. Нехай $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ — афінне покриття X, $\mathbf{A}_i = \Bbbk[U_i]$. Для кожного i існує такий $\mathbf{A}_i$-модуль M_i, що $\mathcal{F}|_{U_i} \sim \widetilde{M_i}$. Зануримо M_i в ін'єктивний $\mathbf{A}_i$-модуль I_i. Воно індукує занурення $\widetilde{M_i} \to \widetilde{I_i}$, причому останній пучок є в'ялим (Лема 2.8). Тоді, очевидно, й пучок $\mathcal{I}_i = \iota_*(\widetilde{I_i})$, де ι — вкладення $U_i \to X$, є в'ялим, а пучок $\mathcal{F}_i = \iota_*(\mathcal{F}|_{U_i})$ занурюється в $\mathcal{I}_i$. Разом з зануренням $\varepsilon : \mathcal{F} \to \bigoplus_i \mathcal{F}_i$ це дає занурення $\mathcal{F}$ у в'ялий квазікогерентний пучок $\bigoplus_i \mathcal{I}_i$. □

Доведення Теореми 3.4. Ми доведемо, що за припущень теореми відображення $\alpha_n : \check{H}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{F})$ є ізоморфізмами. Розглянемо точну послідовність

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0, \tag{3.2}$$

де $\mathcal{G}$ — в'ялий квазікогерентний пучок. Оскільки X відокремлюваний, всі перетини $U_{i_0 i_1 \dots i_n}$ є афінними, а тому всі послідовності

$$0 \to \mathcal{F}(U_{i_0 i_1 \dots i_n}) \to \mathcal{G}(U_{i_0 i_1 \dots i_n}) \to \mathcal{H}(U_{i_0 i_1 \dots i_n}) \to 0$$

є точними. Тому точною є й послідовність комплексів Чеха

$$0 \to C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \to C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \to 0.$$

Оскільки $\check{H}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) = 0$ при $n > 0$ (Твердження 3.7), а $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \simeq H^0(X, \mathcal{F})$, індукована точна послідовність когомологій зводиться до точної послідовності

$$0 \to H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \to H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \to \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to 0$$

та ізоморфізмів

$$\check{H}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \to \check{H}^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

для всіх $n \geqslant 1$. Оскільки також $H^n(X, \mathcal{G}) = 0$ при $n > 0$ (Твердження 1.8(4)), а α_0 — завжди ізоморфізм, відображення $\alpha_1(\mathcal{F})$ також є ізоморфізмом. Оскільки пучок $\mathcal{H}$ також квазікогерентний, доведення завершується очевидною індукцією за n. □

Вправа 3.9. Нехай $X \subseteq \mathbb{P}^n$ — проективний многовид розмірності d. Доведіть, що $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ для довільного квазікогерентного пучка $\mathcal{F}$ і $i > d$.

Натяк: Скористайтеся тим, що існують $d+1$ однорідний многочлен $f_0, f_1, \dots, f_d \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$, для яких $X = \bigcup_{i=0}^d (X \cap D(f_i))$ (див. [**Др**, Вправа 3.5.12 (3)]), і тим, що $X \cap D(f_i)$ — афінний многовид (див. [**Др**, Вправа 2.3.11 (7)]).

Вправа 3.10. Морфізм алгебричних многовидів $f : X \to Y$ зветься *афінним*, якщо для будь-якої афінної відкритої підмножини $U \subseteq Y$ підмножина $f^{-1}(U) \subseteq X$ також афінна. Наприклад, таким є скінченний морфізм або замкнене занурення. Доведіть, що в цьому випадку $H^n(X, \mathcal{F}) \simeq H^n(Y, f_*(\mathcal{F}))$ для довільного квазікогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X.

Вправа 3.11. Нехай $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Доведіть, що простір когомологій $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ ізоморфний підпростору в полі $\Bbbk(x,y)$, породженому всіма одночленами $x^i y^j$, де $i < 0$, $j < 0$. (Звідси, зокрема, випливає, що простір X не є афінним.)

Натяк: Виберіть афінне покриття $X = D(x) \cup D(y)$.

4. Когомології проективного простору

У цьому розділі ми обчислимо когомології проективного простору $\mathbb{P}^n$ з коефіцієнтами у «скручених структурних пучках» $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$. Ми позначимо $S = \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ — однорідне координатне кільце простору $\mathbb{P}^n$, яке ми розглядаємо як *ґрадуйоване кільце*, ґрадуювання якого задано степенем. Нагадаємо, що простір $\mathbb{P}^n$ має стандартне афінне покриття $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$, де U_i — множина точок, у яких i-а однорідна координата $x_i \neq 0$. Множина U_i ототожнюється з афінним простором $\mathbb{A}^n$: афінні координати на ній — це відношення x_j/x_i ($0 \leqslant j \leqslant n$, $j \neq i$). Іншими словами, $\mathcal{O}(U_i)$ ототожнюється з дробами степеня 0 з кільця часток $S_i = S[x_i^{-1}]$. Так само, перерізи струтурного пучка на перетині $U_{i_0 i_1 \dots i_k} = \bigcap_{j=0}^k U_{i_j}$ ототожнюються з однорідними дробами степеня 0 з кільця часток $S_{i_0 i_1 \dots i_k} = S[(x_{i_0} x_{i_1} \dots x_{i_k})^{-1}]$, тобто однорідними дробами, в знаменниках яких стоїть добуток степенів елементів $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$. Кожен ґрадуйований модуль M на алгеброю S породжує квазікогерентний пучок $\widetilde{M}$ на просторі $\mathbb{P}^n$, перерізи якого над U_i — це однорідні елементи степеня 0 модуля часток $M[x_i^{-1}]$. Відповідно, перерізи $\widetilde{M}$ над $U_{i_0 i_1 \dots i_k}$ — це однорідні елементи степеня 0 модуля часток $M[(x_{i_0} x_{i_1} \dots x_{i_k})^{-1}]$.

У категорії пучків $\mathcal{O}$-модулів визначена *підкрутка* $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(d)$. Перерізи пучка $\mathcal{F}(d)$ на кожній множині U_i такі самі, як і пучка $\mathcal{F}$, але якщо $\phi_{ij} = (\rho_j^i)^{-1} \rho_i^j|_{U_i j}$, де ρ_j^i позначає обмеження $\mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{F}(U_{ij})$, тобто ізоморфізми склеювання на перетині $U_i \cap U_j$ для пучка $\mathcal{F}$, то відповідні ізоморфізми склеювання для пучка $\mathcal{F}(d)$ — це $(x_j/x_i)^d \phi_{ij}$. Ця операція тісно пов'язана зі *зсувом* ґрадуйованих модулів $M \mapsto M(d)$, де $M(d)$ — той самий модуль, але з ґрадуюванням $M(d)_m = M_{m+d}$. Відомо, що $\widetilde{M(d)} \simeq \widetilde{M}(d)$ для кожного ґрадуйованого S-модуля M. Зокрема, це стосується підкручених модулів $\mathcal{O}(d)$, які ототожнюються з $\widetilde{S(d)}$. Перерізи пучка $\mathcal{O}(d)$ на множині $U_{i_0 i_1 \dots i_k}$ ототожнюються з $(S_{i_0 i_1 \dots i_k})_d$ — однорідними дробами степеня d, у знаменниках яких стоїть добуток степенів елементів $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$.

Позначимо $\mathcal{F}^{\oplus} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(m)$. Якщо $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, існує природний гомоморфізм $M \to \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}^{\oplus})$: він переводить однорідний елемент

$a \in M_m$ у переріз пучка $\mathcal{F}(m)$, який на кожній множині U_i рівний дробу $a/x_i^m \in M[x_i^{-1}]$. Якщо $M = S$, цей гомоморфізм є *ізоморфізмом* $S \to \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}^{\oplus})$. Пучок $kF^{\oplus}$ можна перетворити на пучок ґрадуйованих S-модулів. Саме, якщо $f \in \mathcal{F}(m)(U_i) \simeq \mathcal{F}(U_i)$, а $a \in S_r$, визначимо добуток $a \cdot f$ як елемент $(a/x_i^r)f \in \mathcal{F}(U_i) \simeq \mathcal{F}(m+r)(U_i)$. Легко переконатися (зробіть це), що таке означення узгоджене зі склеюваннями вдіповідних пучків на перетинах $U_i \cap U_j$. Звідси очевидно випливає, що комплекс Чеха пучка $\mathcal{F}^{\oplus}$ також є комплексом ґрадуйованих S-модулів, а тому його когомології $\check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}^{\oplus}) \simeq H^k(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}^{+})$ теж є ґрадуйованими S-модулями.

Для ґрадуйованого $\Bbbk$-простору $V = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} V_m$ визначений *дуальний ґрадуйований простір* $V^{(*)}$, де $V_m^{(*)} = (V_{-m})^*$. Якщо M — ґрадуйований S-модуль, таким стає й $M^{(*)}$, якщо добуток елемента $a \in S_r$ на елемент $u \in M_m^{(*)}$ визначити, як такий елемент $au \in M_{m+r}^{(*)} = (M_{-m-r})^*$, що $(au)(v) = u(av)$ для кожного $v \in M_{-m-r}$.

В цих термінах основний результат про когомології $H^k(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m)$ формулюється в такий спосіб.

Теорема 4.1.

$$H^k(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}^{\oplus}) \simeq \begin{cases} S & \text{якщо } k = 0, \\ S(-n-1)^{(*)} & \text{якщо } k = n, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Інакже кажучи,

$$H^k(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m)) \simeq \begin{cases} S_m, & \text{якщо } k = 0,\ m \geqslant 0, \\ (S_{-n-1-m})^*, & \text{якщо } k = n,\ m < -n, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Зауважимо, що цей результат дає такі значення для розмірностей $h_{km} = \dim_{\Bbbk} H^k(\mathbb{P}^n, \mathcal{J}(m))$:

$$h_{km} = \begin{cases} \binom{n+m}{n} & \text{якщо } k = 0, \\ \binom{-1-m}{n} & \text{якщо } k = n, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Доведення. Ми знаємо, що $H^0(X, \mathcal{F}) \simeq \Gamma(X, \mathcal{F})$ і що $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m)) \simeq S_m$. Це є твердженням теореми при $k = 0$. Розглянемо комплекс Чеха пучка $\mathcal{O}^{+}$. Його k-ий член має вигляд $C^k = \bigoplus_{i_0 < i_1 < \dots < i_k} S_{i_0 i_1 \dots i_k}$. Зокрема, $C^n = S_{01\dots n}$,а $C^{n-1} = \bigoplus_j S_{01\dots\check{j}\dots n}$, де $\check{i}$ означає, що індекс i треба вилучити. Зауважимо, що базу S_n утворюють всі одночлени $x_0^{l_0} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$, де $l_i \in \mathbb{Z}$, а базу $S_{01\dots\check{j}\dots n}$ — такі з цих одночленів, у яких $l_j \geqslant 0$. Отже, базу $\operatorname{Im} d_{n-1}$ утворюють одночлени, в яких хоча б один показник степеня невід'ємний, а базу $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}^{\oplus}) = C^n / \operatorname{Im} d_{n-1}$

утворюють класи таких одночленів, у яких всі показники від'ємні. Ми будемо ототожнювати ці класи з відповідними одночленами. При цьому одночлен $x_0^{l_0}x_1^{l_1}\dots x_n^{l_n}$ належить до $H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}(m))$, де $m=\sum_{i=0}^n l_i$. При $m>-n-1$ таких одночленів (з усіма від'ємними степенями) взагалі нема, а при $m-=-n-1$ такий одночлен один: $\xi=x_0^{-1}x_1^{-1}\dots x_n^{-1}$. Отже, $H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}(-n-1))\simeq\Bbbk$ (одночлен ξ ототожнюється з 1).

Множення одночленів індукує, білінійне відображення

$$H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}(r))\times H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}(m))\to H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}(r+m)).$$

При $r=-n-1-m$ воно перетворюється на білінійну форму

$$\beta_m: H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}(m))\times H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}(-n-1))\to H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}(-n-1))\simeq\Bbbk.$$

Ця форма є невиродженою і справа, і зліва, оскільки єдиним одночленом, добуток якого з одночленом $x_0^{l_0}x_1^{l_1}\dots x_n^{l_n}$ є ненульовим, у цьому випадку є $x_0^{-1-l_0}x_1^{-1-l_1}\dots x_n^{-1-l_n}$. Отже, простір $H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}(m))$ ототожнюється з дуальним простором до $H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}(-n-1-m))$, що доводить твердження теореми при $k=n$.

Залишається встановити, що $H^k(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}(m))=0$ при всіх m, якщо $0<k<n$). Це твердження ми доведемо індукцією за n. База індукції, $n=1$ тривіальна (твердження стає порожнім). Припустимо, що твердження справедливе для когомологій простору $\mathbb{P}^{n-1}$. Розглядемо точну послідовність ґрадуйованих S-модулів

$$0\to S(-1)\xrightarrow{x_0\cdot}S\xrightarrow{\pi}S'\to 0,$$

де $x_0\cdot$ позначає множення на x_0, а $S'=S/x_0S\simeq\Bbbk[x_1,x_2,\dots,x_n]$. Кільце S ми розглядатимемо, як однoріде координатне кільце простору $\mathbb{P}^{n-1}$, який ототожнюється з гіперплощиною $x_0=0$ у просторі $\mathbb{P}^n$. Перехід до пучків дає точну послідовність

$$0\to\mathcal{O}^{+}(-1)\xrightarrow{x_0\cdot}\mathcal{O}^{\oplus}\xrightarrow{\pi}\mathcal{O}'\to 0,$$

де $\mathcal{O}'=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1})}$. Відповідна довга точна послідовність когомологій дає такі точні послідовності для кожної однорідної компоненти:

(i) $$0\to H^0(\mathcal{O}(m-1))\xrightarrow{x_0\cdot}H^0(\mathcal{O}(m))\xrightarrow{\pi}H^0(\mathcal{O}'(m))\to$$
$$\to H^1(\mathcal{O}(m-1))\xrightarrow{x_0\cdot}H^1(\mathcal{O}(m-1))\to 0;$$

(ii) $$0\to H^k(\mathcal{O}(m-1))\to H^k(\mathcal{O}(m))\to 0 \text{ при } 1<k<n-1;$$

(iii) $$0\to H^{n-1}(\mathcal{O}(m-1))\xrightarrow{x_0\cdot}H^{n-1}(\mathcal{O}(m))\to H^{n-1}(\mathcal{O}'(m))\xrightarrow{\delta}$$
$$\xrightarrow{\delta}H^n(\mathcal{O}(m-1))\to H^n(\mathcal{O}(m)).$$

(Ми скористалися тим, що, за припущенням індукції, $H^k(\mathcal{O}'(m))=0$, якщо $0<k<n-1$, і тим, що $H^k(\mathcal{O}'(m))=0$ при $k>n-1$). з послідовностей (ii) випливає, що при $1<k<n-1$ множення на x_0 індукує ізоморфізм когомологій. Але з формул для h_{0m} та h_{nm} і властивостей біноміальних коефіцієнтів («трикутник Паскаля»)

випливає, що $\dim H^0(\mathcal{O}(m)) = \dim H^0(\mathcal{O}(m-1)) + \dim H^0(\mathcal{O}'(m))$ і $\dim H^n(\mathcal{O}(m)) = \dim H^n(\mathcal{O}(m-1)) + \dim H^{n-1}(\mathcal{O}'(m))$ (перевірте це!). Тому відображення π у послідовності (i) є сюр'єктивним, а відображення δ у послідовності (iii) є сюр'єктивним. Звідси випливає, що й при $k=1$ та $k=n-1$ множення на x_0 теж індукує ізоморфізм когомологій.

З іншого боку, позначимо $\mathcal{O}_0^{\oplus}$ обмеження пучка $\mathcal{O}^{\oplus}$ на відкриту підмножину U_0. Комплекс Чеха цього пучка на просторі U_0 збігається з $C^\bullet[x_0^{-1}]$, де $C^\bullet$ — комплекс Чеха пучка $\mathcal{O}^{\oplus}$. Отже, $H^k(\mathcal{O}_0^{\oplus}) \simeq H^k(\mathcal{O}^{\oplus})[x_0^{-1}]$. Але $U_0 \simeq \mathbb{A}^n$, тому, за Теоремою 2.1, $H^k(\mathcal{O}_0^{\oplus}) = 0$ при $k>0$. Це означає, що для кожного елемента $h \in H^k(\mathcal{O}_0^{\oplus})$ знайдеться такий показник q, що $x_0^q h = 0$. Оскільки при $0<k<n$ множення на x_0 є ізоморфізмом когомологій, звідси й випливає, що $H^k(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}^{\oplus}) = 0$ при $0<k<n$. $\square$

Як наслідок з Теореми 4.1, ми виведемо теореми Серра про когомології проективних многовидів.

Теорема 4.2 (Теорема Серра). *Нехай $\mathcal{F}$ — когерентний пучок на проективному многовиді X.*

А: $\dim_{\Bbbk} H^k(X,\mathcal{F}) < \infty$ *для всіх k.*

Б: *Існує такий номер m_0, що $H^k(X,\mathcal{F}(m)) = 0$ для всіх $k>0$ і всіх $m \geqslant m_0$.*

Доведення. Нехай $j : X \to \mathbb{P}^n$ — замкнене занурення. Тоді $j_*\mathcal{F}$ — когерентний пучок над $\mathbb{P}^n$ і $H^k(X,\mathcal{F}) \simeq H^k(\mathbb{P}^n, j_*\mathcal{F})$ (Вправа 3.10). Тому можна вважати, що $X = \mathbb{P}^n$. Тоді твердження теореми вірні для пучків $\mathcal{O}(m)$, а також для всіх квазікогерентних пучків при $k > n$. Тому можна їх доводити «оберненою індукцію», припустивши, що вони вірні для $H^{k+1}(\mathcal{G})$, де $\mathcal{G}$ — довільний когерентний пучок. Ми знаємо, що для деякого l існує епіморфізм $r\mathcal{O}(l) \to \mathcal{F}$. Нехай $\mathcal{G}$ — його ядро. Точна послідовність $0 \to \mathcal{G} \to r\mathcal{O}(l) \to \mathcal{F} \to 0$ та її зсуви дають точні послідовності когомологій

$$\cdots \to H^k(X,\mathcal{G}(m)) \to H^k(X, r\mathcal{O}(m+l)) \to \\ \to H^k(X,\mathcal{F}(m)) \to H^{k+1}(X,\mathcal{G}(m)) \to \dots$$

За припущенням, простір $H^{k+1}(X,\mathcal{G})$ скінченновимірний і таким є також простір $H^k(X,\mathcal{O}(l))$. Тому й простір $H^k(X,\mathcal{F})$ скінченновимірний. Знов-таки, за припущенням, знайдеться таке значення m_0, що $H^{k+1}(X,\mathcal{G}(m)) = 0$ для всіх $m \geqslant m_0$. Збільшуючи, якщо треба, це значення, можна вважати, що й $H^k(X,\mathcal{O}(m+l)) = 0$ при $m \geqslant m_0$, а тоді й $H^k(X,\mathcal{F}(m)) = 0$. $\square$

Вправа 4.3. Нехай $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \cdots \to \mathcal{F}_k$ — точні послідовність когерентних пучків на проективному многовиді X. Доведіть, що існує такий номер m_0, що для всіх $m \geqslant m_0$ індуковна послідовність

$$\Gamma(X,\mathcal{F}_1(m)) \to \Gamma(X,\mathcal{F}_2(m)) \to \cdots \to \Gamma(X,\mathcal{F}_k(m))$$

також є точною.

Враховуючи скінченновимірність когомологій, для когерентних пучків на проективних многовидах вводять такі важливі інваріанти.

Означення 4.4. Нехай $\mathcal{F}$ — когерентний пучок на проективному многовиді X розмірності n. Позначають $h^i(\mathcal{F}) = \dim_{\Bbbk} H^i(X, \mathcal{F})$. Число $\chi(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^n h^i(\mathcal{F})$, зветься *характеристикою Ойлера пучка* $\mathcal{F}$. Характеристику Ойлера $\chi(\mathcal{O}_X)$ структурного пучка звуть також *характеристикою Ойлера многовиду* X.

Вправа 4.5. Доведіть, що коли $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ — точна послідовність когерентних пучків на прективному многовиді, то $\chi(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{F}) + \chi(\mathcal{H})$.

Натяк: Скористайтеся тим, що для точної послідовності скінченновимірних векторних просторів

$$0 \to V_0 \to V_1 \to \cdots \to V_m \to 0$$

має місце співвідношення $\sum_{i=0}^m \dim_{\Bbbk} V_i = 0$.

5. Когерентні пучки та ґрадуйовані модулі

У цьому розділі, як і в попередньому, ми позначаємо $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$, $S = \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Надалі для квазікогерентного пучка $\mathcal{O}$-модулів $\mathcal{F}$ позначимо $\Gamma_*(\mathcal{F}) = \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}^{\oplus}) = \bigoplus_{m \operatorname{Im} \mathbb{Z}} \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m))$. Це ґрадуйований S-модуль. Нехай M — ґрадуйований S-модуль, $\widetilde{M}$ — відповідний пучок модулів на $\mathbb{P}^n$. Визначений гомоморфізм ґрадуйованих модулів $\alpha = \alpha_M : M \to \Gamma_*(M)$, який переводить елемент $a \in M_m$ у переріз з $\Gamma(\mathbb{P}^n, \widetilde{M}(m))$, обмеження якого на кожну відкриту множину $U_i = \mathbb{A}^n_i$ рівне $a/1$. Навпаки, для кожного квазікогерентного пучка $\mathcal{F}$ визначений морфізм $\beta = \beta_{\mathcal{F}} : \widetilde{\mathcal{F}} = \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})} \to \mathcal{F}$. Саме, нехай s — переріз $\widetilde{\mathcal{F}}$ на множині U_i. Тоді $s = f/x_i^m$, де $f \in \Gamma(\mathcal{F}(m))$ для деякого m. Переріз f — це набір перерізів $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ такий, що $f_i = (x_j/x_i)^m f_j$ на перетині U_{ij} для всіх пар індекiв i, j. Тоді морфізм β переводить s у f_i. Припустимо, що $f/x_i^m = g/x_j^k$ на U_{ij}, де $g = \{\, g_i \,\} \in \Gamma(\mathcal{F}(k))$, тобто $x_j^k \cdot f = x_i^m \cdot g$. Обчислюючи значення i-их компонент на цьому перетині, одержимо $(x_j/x_i)^k f_i = g_i$ (множення на x_i тотожне на i-ій компоненті), або $f_i = (x_i/x_j)^m g_i = g_j$. Отже, таке визначення β узгоджене з обмеженнями, тобто задає морфізм пучків. Позначимо $\mathscr{C}$ клас таких ґрадуйованих S-модулів M, що для кожного елемента $a \in M$ знайдеться таке r, що $S_+^r a = 0$, де S_+ — ідеал многочленів без вільного члена (єдиний однорідний максимальний ідеал в S). Якщо модуль M скінченнопороджений, тоді й $S_+^r M = 0$ для деякого r. Звідси випливає, що знайдеться такий номер m_0, що $M_m = 0$ для всіх $m \geqslant m_0$ і $\dim_{\Bbbk} M < \infty$. Зауважимо, що $\alpha(a) = 0$ тоді й лише тоді, коли для кожного i знайдеться таке

r_i, що $x_i^{r_i}a = 0$. Очевидно, це рівносильне тому, що $S_+^r a = 0$ для деякого a. Отже, завжди $\operatorname{Ker}\alpha \in \mathscr{C}$.

Гомоморфізм ґрадуйованих S-модулів $\phi : M \to N$ зветься *$\mathscr{C}$-мономорфізмом* (відповідно, *$\mathscr{C}$-епіморфізмом*), якщо $\operatorname{Ker}\phi \in \mathscr{C}$ (відповідно, $\operatorname{Coker}\phi \in \mathscr{C}$). Якщо ϕ є одночасно $\mathscr{C}$-мономорфізмом і $\mathscr{C}$-епіморфізмом, він зветься *$\mathscr{C}$-ізоморфізмом.*

Теорема 5.1. (1) *Для кожного скінченнопороджденного ґрадуйованого S-модуля M гомоморфізм α_M є $\mathscr{C}$-ізоморфізмом.*

(2) *Для кожного когерентного пучка $\mathcal{O}$-модулів $\mathcal{F}$ гомоморфізм $\beta_{\mathcal{F}}$ є ізоморфізмом.*

Зауваження. Насправді, ця теорема є вірною для *всіх* ґрадуйованих модулів та квазікогерентних пучків.

Доведення цієї теореми, знов-таки, ґрунтується на кількох проміжних результатах.

Лема 5.2. *Нехай $\phi : M \to N$ — гомоморфізм ґрадуйованих S-модулів. Індукований морфізм пучків $\widetilde{\phi} : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ є мономорфізмомо (відповідно, епіморфізмом чи ізоморфізмом) тоді й лише тоді, коли ϕ є $\mathscr{C}$-мономорфізмом (відповідно, $\mathscr{C}$-епіморофізмом чи $\mathscr{C}$-ізоморфізмом).*

Доведення. Мономорфність чи епіморфність морфізму квазікогерентних пучків на працтивному просторі треба перевіряти на кожній множині U_i. Оскільки $\widetilde{M}(U_i) = M[x_i^{-1}]$, гомоморфізм $\phi(U_i)$ є мономорфізмом тоді й лише тоді, коли для довільного дробу a/x_i^m, де $a \in M_m$, з того, що $x_i^r\phi(a) = \phi(x_i^r a) = 0$ випливає, що $x^k a = 0$ для деякого k. Це, очевидно, рівносильне тому, що $\operatorname{Ker}\phi \in \mathscr{C}$.

Епіморфність $\phi(U_i)$ означає, що для кожного $b \in N_m$ існує такий дріб a/x^k, де $a \in M_k$, що $b/x_i^m = \phi(a)/x_i^k$, тобто, $x_i^{r+k}b = x_i^{r+m}\phi(a) = \phi(x_i^{r+m}a)$ для деякого r, отже, $x_i^{r+k}b \in \operatorname{Im}\phi$. Оскільки це виконується для всіх i, фактормодуль $\operatorname{Coker}\phi = N/im\phi$ належить класу $\mathscr{C}$. □

Лема 5.3. *Для кожного когерентного пучка $\mathcal{F}$ на $\mathbb{P}^n$ існує ґрадуйований S-модуль M такий, що $\mathcal{F} \simeq M$.*

Доведення. Відомо, що існує епіморфізм $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$, де $\mathcal{G} = r\mathcal{O}(m)$ для деякого m. Його ядро $\mathcal{F}'$ — теж когерентний пучок, тому існує епіморфізм $\mathcal{G}' \to \mathcal{F}'$, де $\mathcal{G}' = r'\mathcal{O}(m')$. Разом це дає точну послідовність

$$\mathcal{G}' \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{F} \to 0.$$

Але $\mathcal{O}(m) = \widetilde{S}(m)$ і кожен гомоморфізм $\widetilde{S}(m') \to \widetilde{S}(m)$ походить з деякого гомоморфізму $S(m') \to S(m)$. Позначимо $G = rS(m)$, $G' = r'S(m')$. Тоді морфізм ψ походить з деякого гомоморфізму $\eta : G' \to$

G. Якщо $M = \operatorname{Coker}\eta$, це дає комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccccccc}
\widetilde{G'} & \longrightarrow & \widetilde{G} & \longrightarrow & \widetilde{M} & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \| & & & & \\
\mathcal{G}' & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

яка індукує ізоморфізм $\widetilde{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$. $\square$

Доведення Теореми 5.1. (1) Це твердження вірне для модулів $S(m)$, оскільки $\widetilde{S}(m) = \mathcal{O}(m)$, а $\Gamma(\mathcal{O}_m) \simeq S_m$. Тому воно вірне й для прямих сум таких модулів. Очевидно також, що $\operatorname{Ker}\alpha \in \mathscr{C}$. Виберемо множину $a_1, a_2, \dots, a_k$ однорідних твірних модуля M і нехай $a_l \in M_{m_l}$. Тоді існує епіморфізм ґрадуйованих модулів $\bigoplus_{l=1}^k S(-m_l) \to M$, при якому одиничний елемент з $S(-m_l)$ переходить у a_l. Його ядро знову є скінченнопородженим ґрадуйованим модулем, тому вона теж накривається прямою сумою зсунутих регулярних модулів. Це дає точну послідовність $L' \to L \to M \to 0$, в якій L і L' — прямі суми модулів вигляду $S(m)$. Вона індукує точну послідовність пучків $\widetilde{L}' \to \widetilde{L} \to \widetilde{M} \to 0$. Згідно з Вправою 4.3, існує таке m_0, що для всіх $m \geqslant m_0$ послідовність $\Gamma(\widetilde{L}'(m) \to \Gamma(\widetilde{L}(m)) \to \Gamma(\widetilde{M}(m))$ теж є точною. Це дає комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccccccc}
L'_m & \longrightarrow & L_m & \longrightarrow & M_m & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Gamma(L'(m)) & \longrightarrow & \Gamma(L(m)) & \longrightarrow & \Gamma(M(m)) & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

в якій вертикальні відображення — це компоненти гомоморфізми α. Перші два з них — ізоморфізми, тому й останній є ізоморфізмом. Звідси випливає, що $(\Gamma_*(M)/\operatorname{Im}\alpha)_m = 0$ при $m \geqslant m_0$, а тоді цей фактормодуль належить $\mathscr{C}$, тобто, α_M є $\mathscr{C}$-епіморфізмом.

(2) За Лемою 5.3, можна вважати, що $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ для деякого скінченнопородженого ґрадуйованого модуля M. Тоді визначений $\mathscr{C}$-ізоморфізм $\alpha : M \to \Gamma_*(\mathcal{F})$, який, за Лемою5.2, індукує ізоморфізм $\widetilde{\alpha} : \widetilde{M} = \mathcal{F} \to \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})}$. Легко бачити, що його композиція з морфізмом $\beta : \Gamma_*(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}$ є тотожнім відображенням. Тому β також є ізоморфізмом. $\square$

6. Когомології, Ext_X та $\mathcal{E}xt_X$

Нехай kO_X — пучок кілець на топологічному просторі (найчастіше надалі це буде пучок регулярних функцій на алгебричному многовиді). Ми розглядаємо пучки $\mathcal{O}_X$-модулів і пишемоHom_X замість $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}$. У цьому розділі ми розглядемо зв'язки між когомологіями та функторами Ext^i_X, які визначаються, як праві похідні функтора

Hom_X. Іншими словами, $\mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{F},\mathcal{G})$ — це когомології комплекса

$$0 \to \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F},\mathcal{I}_0) \to \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F},\mathcal{I}_1) \to \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F},\mathcal{I}_2) \to \dots,$$

одержаного застосуванням функтора $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F},\ \_)$ до ін'єктивної резольвенти $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{I}_0 \to \mathcal{I}_1 \to \mathcal{I}_2 \to \dots$ пучка $\mathcal{G}$. Нам будуть потрібні ще «пучкові» варіанти цих функторів. Саме, визначимо функтор $\mathcal{H}om_X(\mathcal{F},\mathcal{G})$, як пучок, значення якого на відкритій множині U дорівнює $\mathrm{Hom}_U(\mathcal{F}|_U,\mathcal{G}|_U)$ (переконайтеся, що виконані всі аксіоми пучка). Зокрема, $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \Gamma(X,\mathcal{H}om_X(\mathcal{F},\mathcal{G}))$. Визначимо функтори $\mathcal{E}xt^i_X$ як праві похідні функтора $\mathcal{H}om_X$. Отже, пучки $\mathcal{E}xt^i_X(\mathcal{F},\mathcal{G})$ визначаються за ін'єктивною резольвентою пучка $\mathcal{G}$ як когомології комплексу пучків

$$0 \to \mathcal{H}om_X(\mathcal{F},\mathcal{I}_0) \to \mathcal{H}om_X(\mathcal{F},\mathcal{I}_1) \to \mathcal{H}om_X(\mathcal{F},\mathcal{I}_2) \to \dots$$

Зауваження 6.1. Взагалі кажучи, значення пучка $\mathcal{E}xt^i_X(\mathcal{F},\mathcal{G})$ на множині U *не збігається* з $\mathrm{Ext}^i_U(\mathcal{F}|_U,\mathcal{G}|U)$, бо відповідність $U \mapsto \mathrm{Ext}_U(\mathcal{F}|_U,\mathcal{G}|_U)$ визначає лише *передпучок*. Зокрема, $\mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{F},\mathcal{G}) \neq \Gamma(X,\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F},\mathcal{G}))$. Загальні співвідношення між функторами $\mathcal{E}xt$, Ext та когомологіями виражаються деякою *спектральною послідовністю* й ми не будемо їх розглядати. Читач може ознайомитись з відповідним матеріалом, наприклад, по книгам **[Год]** або **[Гр]**. Ми обмежимось лише деякими окремими випадками, які відіграють особливу роль.

Твердження 6.2. $\mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{O}_X,\mathcal{F}) \simeq H^i(X,\mathcal{F})$, *а* $\mathcal{E}xt^i_X(\mathcal{L},\mathcal{F}) = 0$ *при* $i > 0$.

Доведення. Зауважимо, що $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X,\mathcal{F}) \simeq \Gamma(X,\mathcal{F})$, оскільки морфізм $\phi : \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ повністю визначається образом $f \in \mathcal{F}(X)$ перерізу $1 \in \mathcal{O}(X)$. Дійсно, якщо $s \in \mathcal{O}_X(U)$, то $\phi(s) = \phi(s \cdot \rho^X_U(1)) = s\phi(\rho^X_U(1)) = s\rho^X_U(f)$. Тому й похідні функтори від $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X,\ \_)$ та $\Gamma(X,\ \_)$ теж збігаються. Звідси також випливає, що $\mathcal{H}om_X(\mathcal{O}_X,\mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}$. Отже, функтор $\mathcal{H}om_X(\mathcal{O}_X,\ \_)$ точний і його похідні $\mathcal{E}xt^i_X(\mathcal{O}_X,\ \_)$ нульові при $i > 0$. □

Для подальшого нам будуть потрібні деякі загальні відомості з гомологічної алгебри.

Означення 6.3. (1) *δ-функтором* зветься набір функторів $\mathbf{F} = \{\, F^i \mid i \in \mathbb{Z} \,\}$ такий, що для кожної точної послідовності $0 \to A \to B \to C \to 0$ і для кожного i визначені морфізми $\delta_i : F^i(C) \to F^{i+1}(A)$ такі, що індукована послідовність

$$F^i(A) \to F^i(B) \to F^i(C) \xrightarrow{\delta_i}$$
$$F^{i+1}(A) \to F^{i+1}(B) \to F^{i+1}(C)$$

є точною, причому для кожної комутативної діаграми

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

з точними строками всі квадрати

$$\begin{array}{ccc} F^i(C) & \xrightarrow{\delta_i} & F^{i+1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^i(C') & \xrightarrow{\delta_i} & F^{i+1}(A') \end{array}$$

також комутативні.

(2) δ-функтор $\mathbf{F} = \{F^n\}$ зветься *стираючим справа* (*зліва*), якщо для кожного об'єкта A та кожного $i > 0$ існує такий мономорфізм $\alpha : A \to A'$ (відповідно, такий епіморфізм $\alpha : A' \to A$), що $F^i(\alpha) = 0$.

Ми матимемо справу також з *контраваріантними* δ-функторами, або, що те саме, з (коваріантними) δ-функторами з дуальної категорії. При цьому треба пам'ятати, що мономорфізм $A \to A'$ в дуальній категорії — це епіморфізм $A' \to A$ в даній категорії, а епіморфізм $A' \to A$ в дуальній категорії — це мономорфізм $A \to A'$ в даній категорії.

Очевидним прикладом стираючого справа (зліва) δ-функтора є набір правих похідних функторів $\mathbf{R}F = \{R^iF\}$ довільного функтора F, якщо вважати, що $R^iF = 0$ при $i < 0$. Зокрема, такими є набори $H^i(X, \_)$ $\operatorname{Ext}^i_X(\mathcal{F}, \_)$. Виявляється, що й набір контраваріантних функторів $\operatorname{Ext}^i_X(\_, \mathcal{F})$ теж є δ-функтором.

Твердження 6.4. *Набори* $\operatorname{Ext}^i_X(\_, \mathcal{F})$ *та* $\mathcal{E}xt^i_X(\_, \mathcal{F})$ *є контраваріантними δ-функторами.*

Доведення. Фіксуємо ін'єктивну резольвенту $\mathcal{I}_\bullet$ пучка $\mathcal{F}$. За означенням, $\operatorname{Ext}^i_X(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ — це когомології комплекса $\operatorname{Hom}_X(\mathcal{A}, \mathcal{I}_\bullet)$. Якщо $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{D} \to \mathcal{C} \to 0$ — точна послідовність, то для кожного номера i послідовність

$$0 \to \operatorname{Hom}_X(\mathcal{C}, \mathcal{I}_i) \to \operatorname{Hom}_X(\mathcal{B}, \mathcal{I}_i) \to \operatorname{Hom}_X(\mathcal{A}, \mathcal{I}_i) \to 0$$

також є точною (за означенням ін'єктивності). Отже, й послідовність комплексів

$$0 \to \operatorname{Hom}_X(\mathcal{C}, \mathcal{I}_\bullet) \to \operatorname{Hom}_X(\mathcal{B}, \mathcal{I}_\bullet) \to \operatorname{Hom}_X(\mathcal{A}, \mathcal{I}_\bullet) \to 0$$

є точною. Вона індукує довгу точну послідовність когомологій

$$\begin{aligned}0 \to \operatorname{Ext}^0_X(\mathcal{C},\mathcal{F}) \to \operatorname{Ext}^0_X(\mathcal{B},\mathcal{F}) \to \operatorname{Ext}^0_X(\mathcal{A},\mathcal{F}) \to \\ \to \operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{C},\mathcal{F}) \to \operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{B},\mathcal{F}) \to \operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{A},\mathcal{F}) \to \\ \to \operatorname{Ext}^2_X(\mathcal{C},\mathcal{F}) \to \operatorname{Ext}^2_X(\mathcal{B},\mathcal{F}) \to \operatorname{Ext}^2_X(\mathcal{A},\mathcal{F}) \to \dots ,\end{aligned}$$

тобто, $\operatorname{Ext}^i_X(\_,\mathcal{F})$ дійсно є δ-функтором. Так само доводиться й твердження про функтори $\mathcal{E}xt^i_X(\_,\mathcal{F})$. $\square$

Ми будемо користуватись таким загальним результатом про стираючі d-функтори.

Теорема 6.5. *Якщо* $\mathbf{F} = \{F^i\}$ *та* $\mathbf{G} = \{G^i\}$ *— δ-функтори, причому* $\mathbf{F}$ *є стираючим справа (відповідно, зліва), то для будь-якого морфізму функторів* $\phi_0 : F^0 \to G^0$ *і кожного* $i \geqslant 0$ *(відповідно,* $i \leqslant 0$*) існують єдині морфізми функторів* $\phi_i : F^i \simeq G^i$ *такі, що для кожної точної послідовності* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *і кожного* $i \geqslant 0$ *діаграма*

$$\begin{array}{ccc} F^i(C) & \xrightarrow{de_n} & F^{i+1}(A) \\ {\scriptstyle \phi_i(C)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{i+1}(A)} \\ G^i(C) & \xrightarrow{\delta_n} & G^{i+1}(A) \end{array}$$

комутативна.

Доведення. Для кожного об'єкта A виберемо мономорфізм $A \overset{\alpha}{\to} A'$, для якого $F^1(\alpha) = 0$. Нехай $A'' = A'/A$. Точна послідовність $0 \to A \overset{\alpha}{\to} A' \to A'' \to 0$ разом з морфізмом $\phi_0 : F^0 \to G^0$ дає комутативну діаграму з точними рядками

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & F^0(A) & \longrightarrow & F^0(A') & \longrightarrow & F^0(A'') & \xrightarrow{\delta_0} & F^1(A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & G^0(A) & \longrightarrow & G^0(A') & \longrightarrow & G^0(A'') & \xrightarrow{\delta} & G^1(A) & & \end{array}$$

(ми врахували, що $F^1(\alpha) = 0$). Ця діаграма індукує єдиний морфізм $\phi_1(A) : F^1(A) \to G^1(A)$, який доповнює її до комутативної. З того, що цей морфізм єдиний, одразу випливає, що він не залежить від вибору занурення $A \to A'$ (чому?). Кожен морфізм $f : A \to B$ можна включити в комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & {\scriptstyle \beta}\downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B', \end{array}$$

в якій α і β — мономорфізми, а $F^1(\alpha) = F^1(\beta) = 0$. Наприклад, можна обрати якісь мономорфізми $\alpha_1 : A \to A_1$ та $\beta : B \to B'$, для яких $F^1(\alpha_1) = F^1(\beta) = 0$, а потім покласти

$$A' = A_1 \oplus B', \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta f \end{pmatrix}, \quad f' = (0\ 1).$$

Звідси легко випливає, що ϕ_1 дійсно є морфізмом функторів (перевірте це!). Аналогічно перевіряється, що ϕ_1 комутує з δ_0. Тепер так само за ϕ_1 будується ϕ_2 і так далі. □

Наслідок 6.6. *Якщо* $\mathbf{F}$ *і* $\mathbf{G}$ *— стираючі справа d-функтори і* $F^0 \simeq G^0$*, то* $F^i \simeq G^i$ *для всіх* $i \geqslant 0$.

Доведення. Вправа для читача. □

Вправа 6.7. Сформулюйте й доведіть аналогічний результат для стираючих зліва d-функторів.

Основним прикладом тут є набір *лівих похідних* L_iF деякого функтора F, які будуються в категоріях, де кожен об'єкт є фактороб'єктом проєктивного (наприклад, в категоріях модулів). При цьому функтор L_iF треба вважати компонентою d-функтора з номером $-i$.

Ми скористаємося Теоремою 6.5 для встановленя зв'язків між функторами Ext та когомологіями для одного спеціального класу пучків.

Означення 6.8. Пучок $\mathcal{L}$ зветься *локально вільним*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує окіл U такий, що $\mathcal{L}|_U \simeq r\mathcal{O}_U$ для деякого r. Тоді, очевидно, $\mathcal{L}_x \simeq r\mathcal{O}_{X,x}$. Число r зветься *рангом в точці* x локально вільного пучка $\mathcal{L}$. Легко бачити (перевірте це!), що, коли простір X зв'язний, ранг локально вільного пучка є однаковим в усіх точках, отже, можна говорити про *ранг локально вільного пучка.*

Твердження 6.9. *Припустимо, що пучок* $\mathcal{L}$ *є локально вільним. Тоді функтор* $\mathcal{H}om_X(\mathcal{L}, \_)$ *точний, а* $\mathcal{E}xt^i_X(\mathcal{L}, \_) = 0$ *при* $i > 0$.

Доведення. Оскільки точність послідовності пучків досить перевіряти локально, перше твердження безпосередньо випливає з Твердження 6.2. Тоді друге твердження — наслідок того, що похідні R^iF точного функтора є нульовими при $i > 0$. □

Твердження 6.10. *Нехай*

$$\cdots \to \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0 \tag{6.1}$$

— точна послідовність пучків, в якій всі $\mathcal{L}_i$ *є локально вільними. Тоді* $\mathcal{E}xt^i_X(\mathcal{F}, \mathcal{L}) \simeq h^i(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{G})$*, де останні пучки визначаються як когомології індуковного комплекса* $\mathcal{H}om_X(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{G})$*, тобто комплекса*

$$0 \to \mathcal{H}om_X(\mathcal{L}_0, \mathcal{G}) \to \mathcal{H}om_X(\mathcal{L}_1, \mathcal{G}) \to \mathcal{H}om_X(\mathcal{L}_2, \mathcal{G}) \to \dots$$

Точна послідовність (6.1) *зветься* локально вільною резольвентою *пучка* $\mathcal{F}$.

Доведення. Набір функторів $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F},\_)$ є стираючим справа δ-функтором. З іншого боку, оскільки кожен з функторів $\mathcal{H}om_X(\mathcal{L}_i,\_)$ є точним, когомології $h^i(\mathcal{L}_\bullet,\mathcal{G})$ є також δ-функтором. Якщо пучок $\mathcal{G}$ ін'єктивний, комплекс $\mathcal{H}om_X(\mathcal{L}_\bullet,\mathcal{G})$ є точним, тому $h^i(\mathcal{L}_\bullet,\mathcal{G})=0$. Отже, й функтор $h^i(\mathcal{L}_\bullet,\_)$ є стираючим справа. Оскільки $h^0(\mathcal{L}_\bullet,\mathcal{G})\simeq \mathcal{H}om_X(\mathcal{F},\mathcal{G})\simeq Ext^0_X(\mathcal{F},\mathcal{G})$, залишається застосувати Твердження 6.6. □

Нам буде потрібно ще поняття *тензорного добутку* пучків.

Означення 6.11. *Тензорним добутком $\mathcal{F}\otimes_X\mathcal{G}$* пучків $\mathcal{O}_X$-модулів $\mathcal{F}$ і $\mathcal{G}$ зветься пучок, породжений передпучком $U\mapsto \mathcal{F}(U)\otimes_{\mathcal{O}_X(U)}\mathcal{G}$.

Нагадаємо, що *пучок $\tilde{\mathcal{F}}$, породжений передпучком $\mathcal{F}: U\to\mathcal{F}(U)$* будується в такий спосіб. Визначаються *стебла* $\mathcal{F}_x=\varinjlim_{x\in U}\mathcal{F}(U)$, а потім $\tilde{\mathcal{F}}(U)$ визначається як фактормножина $F(U)/\sim$, де $F(U)$ — підмножина в $\prod_{x\in U}\mathcal{F}_x$, яка складається з усіх таких наборів (f_x), що для кожної точки $x\in U$ існує такий окіл $V\subseteq U$ точки x і такий елемент $f'\in\mathcal{F}(V)$, що $f_y=\rho^V_y(f')$ для всіх точок $y\in V$, а відношення еквівалентності визначається так: $(f_x)\sim(g_x)$, якщо для кожної точки $x\in U$ існує такий окіл $V\subseteq U$, що $f_y=g_y$ для всіх $y\in V$.

Якщо X афінний многовид, $\mathbf{A}=\Bbbk[X]$, $\widetilde{M}$ та $\widetilde{N}$ — квазікогерентні пучки, породжені $\mathbf{A}$-модулями M та N, то легко перевірити, що $\widetilde{M}\otimes_X\widetilde{N}=\widetilde{M\otimes_{\mathbf{A}}N}$ — квазікогерентний пучок, породжений модулем $M\otimes_{\mathbf{A}}N$. Це дозволяє обчислювати тензорні добутки квазікогерентних пучків на алгебричних многовидах локально, на кожній множині з деякого відкритого афінного покритя.

Твердження 6.12. *Якщо $\mathcal{L}$ — локально вільний пучок, то функтори $\mathcal{H}om_X(\mathcal{L},\_)$ та $\mathcal{L}\otimes_X\_$ точні, а $\mathcal{L}\otimes_X\mathcal{F}\simeq\mathcal{H}om_X(\mathcal{L}^\vee,\mathcal{F})$, де $\mathcal{L}^\vee=\mathcal{H}om_X(\mathcal{L},\mathcal{O}_X)$ також є локально вільним пучком. Зокрема, $\mathcal{L}^{\vee\vee}\simeq\mathcal{L}$. Більш того, для довільних пучків $\mathcal{F}$ та $\mathcal{G}$*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}om_X(\mathcal{F}\otimes_X\mathcal{L},\mathcal{G})&\simeq\mathcal{H}om_X(\mathcal{F},\mathcal{H}om_X(\mathcal{L},\mathcal{G}))\\&\simeq\mathcal{H}om_X(\mathcal{F},\mathcal{L}^\vee\otimes_X\mathcal{G})\end{aligned}\tag{6.2}$$

і

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}\otimes_X\mathcal{L},\mathcal{G})&\simeq\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F},\mathcal{H}om_X(\mathcal{L},\mathcal{G}))\\&\simeq\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F},\mathcal{L}^\vee\otimes_X\mathcal{G}).\end{aligned}\tag{6.3}$$

Зокрема, $\mathcal{H}om_X(\mathcal{L},\mathcal{G})\simeq\mathcal{L}^\vee\otimes_X\mathcal{G}$, а $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{L},\mathcal{G})\simeq\Gamma(X,\mathcal{L}^\vee\otimes\mathcal{G})$.

Пучок $\mathcal{L}^\vee$ зветься *дуальним* до пучка $\mathcal{L}$.

Доведення. Ці твердження достатньо перевірити локально. Тому можна вважати, що $\mathcal{L}=r\mathcal{O}_X$, а тоді також $\mathcal{L}^\vee\simeq r\mathcal{O}_X$, $\mathcal{H}om_X(\mathcal{L},\mathcal{F})$

$\simeq r\mathcal{F}$, а також $\mathcal{L} \otimes_X \mathcal{F} \simeq r\mathcal{F} \simeq \mathcal{H}om_X(\mathcal{L}^\vee, \mathcal{F})$. Так само перевіряється й формула (6.2). Формула (6.3) одержується з попередньої взятям глобальних перерізів. $\square$

Зауваження. Перша еквівалентність у формулах (6.2) та (6.3) залишається вірною для довільних пучків. Це — так звані *формули спряженості* для функторів $\otimes$ та Hom. Ми не будемо нею користуватись. Доведення її також можна знайти в книзі [**Год**].

Наслідок 6.13. *Якщо пучок $\mathcal{L}$ локально вільний, а пучок $\mathcal{I}$ ін'єктивний, то пучок $\mathcal{H}om_X(\mathcal{L}, \mathcal{I})$ також ін'єктивний.*

Доведення. Треба перевірити, що функтор $\mathrm{Hom}_X(\_, \mathcal{H}om_X(\mathcal{L}, \mathcal{I}))$ є точним. Але він ізоморфний функтору $\mathrm{Hom}_X(\_ \otimes_X \mathcal{L}, \mathcal{I})$. Оскільки обидва функтори $\_ \otimes_X \mathcal{L}$ і $\mathrm{Hom}(\_, \mathcal{I})$ точні, їхня композиція також точна. $\square$

Твердження 6.14. *Якщо пучок $\mathcal{L}$ є локально вільним, то*

$$\mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{L}, \mathcal{F}) \simeq H^i(X, \mathcal{H}om_X(\mathcal{L}, \mathcal{F})).$$

Доведення. Обидва набори функторів утворюють δ-функтори, причому $\mathrm{Ext}^0_X(\mathcal{L}, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_X(\mathcal{L}, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{H}om_X(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. Якщо пучок $\mathcal{F}$ ін'єктивний, то таким є й $\mathcal{H}om_X(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, а тому $\mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{L}, \mathcal{F}) = H^i(X, \mathcal{H}om_X(\mathcal{L}, \mathcal{F}) = 0$ при $i > 0$. Отже, обидва ці δ-функтори стираючі справа і твердження випливає з Теореми 6.5. $\square$

Ми можемо тепер встановити теорему двоїстості для проективного простору.

Теорема 6.15. *Позначимо $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$. Тоді для довільного когерентного пучка $\mathcal{F}$ на просторі $\mathbb{P}^n$ і довільного i*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}) \simeq H^{n-i}(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})^*$$

(*дуальний простір до $H^{n-i}(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$*).

Доведення. Якщо $i = 0$, то $\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega})$. Кожен морфізм $\mathcal{F} \to \boldsymbol{\omega}$ індукує гомоморфізм $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) \to H^n(\mathbb{P}^n, \boldsymbol{\omega}) \simeq \Bbbk$. Це дає гомоморфізм $\phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}) \to H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})^*$. Якщо $\mathcal{F} = \mathcal{O}(m)$, то $\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}) \simeq H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-n-1-m))$ і ϕ є ізоморфізмом за Теоремою 4.1. Для довільного когерентного пучка $\mathcal{F}$ існує точна послідовність $\mathcal{L}' \to \mathcal{L} \to \mathcal{F} \to 0$, де $\mathcal{L} = r\mathcal{O}(m)$ і $\mathcal{L}' = r'\mathcal{O}(m')$ для деяких m, m', r, r'. Вона індукує комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{L}, \boldsymbol{\omega}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{L}', \boldsymbol{\omega}) \\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
0 & \longrightarrow & H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})^* & \longrightarrow & H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{L})^* & \longrightarrow & H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}')^*,
\end{array}$$

в якій вертикальні стрілки — це гомоморфізми ϕ для відповідних пучків. Другий і третій з них є ізоморфізмами. Тому й перший є ізоморфізмом, що доводить твердження для $i = 0$.

З іншого боку, обидві частини є контраваріантними δ-функторами на категорії когерентних пучків. Крім того, якщо $\mathcal{F} = \mathcal{O}(-m)$, то $H^{n-i}(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) = 0$ при $i > 0$ і $m > 0$, а

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}) \simeq H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{H}om_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega})) \simeq H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m-n-1)) = 0$$

при $i > 0$ і $m > 0$. Але відомо, що для кожного когерентного пучка $\mathcal{F}$ і достатньо великого m існує епіморфізм $r\mathcal{O}(-m) \to \mathcal{F}$. Тому обидва δ-функтори є стираючими й необхідне твердження випливає з Теореми 6.5. $\square$

Наслідок 6.16. *Якщо $\mathcal{L}$ — локально вільний пучок на $\mathbb{P}^n$, то*

$$H^{n-i}(X, \mathcal{L}) \simeq H^i(X, \mathcal{L}^\vee \otimes_X \boldsymbol{\omega})^*.$$

Ще одну важливу властивість пучка $\boldsymbol{\omega}$ буде використано в наступному розділі. Спочатку встановимо, що для когерентних пучків на проективному многовиді зв'язок між Ext і $\mathcal{E}xt$ може бути «виправлений» підкруткою.

Твердження 6.17. *Для довільних когерентних пучків $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ на проективному многовиді X і довільного i існує таке число m_0, що для всіх $m \geqslant m_0$*

$$\mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}(m)) \simeq \Gamma(X, \mathcal{E}xt^i_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}(m))).$$

Доведення. Для $i = 0$ це вірно за означенням для довільних пучків $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ і всіх m. Якщо $\mathcal{F} = \mathcal{O}(l)$, то, за Твердженнями 6.9 та 6.14, права частина завжди нульова, а ліва частина збігається з $\Gamma(X, \mathcal{G}(m-l))$ і є нульовою для достатньо великих m за Теоремою 4.2(Б). Для довільного когерентного пучка $\mathcal{F}$ розглянемо точну послідовність $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{L} \to \mathcal{F} \to 0$, в якій $\mathcal{L} \simeq r\mathcal{O}(l)$ для деякого l. Вона індукує точну послідовність

$$\begin{aligned} &0 \to \mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}(m)) \to \mathcal{H}om_X(\mathcal{L}, \mathcal{G}(m)) \to \\ &\quad \to \mathcal{H}om_X(\mathcal{F}', \mathcal{G}(m)) \to \mathcal{E}xt^1_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}(m)) \to 0 \end{aligned} \tag{6.4}$$

та ізоморфізми $\mathcal{E}xt^i_X(\mathcal{F}', \mathcal{G}(m)) \simeq \mathcal{E}xt^{i+1}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}(m))$ для $i > 0$. Крім того, для достатньо великих m ми одержимо також точну послідовність

$$\begin{aligned} &0 \to \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}(m)) \to \mathrm{Hom}_X(\mathcal{L}, \mathcal{G}(m)) \to \\ &\quad \to \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}', \mathcal{G}(m)) \to \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}(m)) \to 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

та ізоморфізми $\mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{F}', \mathcal{G}(m)) \simeq \mathrm{Ext}^{i+1}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}(m))$ для $i > 0$. За Вправою 4.3, для достатньо великих m перерізи точної послідовності (6.4) утворюють точну послідовність

$$\begin{aligned} &0 \to \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}(m)) \to \mathrm{Hom}_X(\mathcal{L}, \mathcal{G}(m)) \to \\ &\quad \to \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}', \mathcal{G}(m)) \to \Gamma(\mathcal{E}xt^1_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}(m))) \to 0. \end{aligned}$$

Порівнюючи її з точною послідовністю (6.5), одержимо

$$\mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{F},\mathcal{G}(m)) \simeq \Gamma(X, \mathcal{E}xt^1_X(\mathcal{F},\mathcal{G}(m))).$$

Оскільки пучок $\mathcal{F}'$ також когерентний, доведення завершується очевидною індукією за i. $\square$

Наслідок 6.18. *Нехай $X \subseteq \mathbb{P}^n$ — замкнений підмноговид корозмірності r. Тоді*

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{O}_X, \boldsymbol{\omega}) = 0 \quad \text{для всіх } i < r.$$

Доведення. Пучок $\mathcal{E} = \mathcal{E}xt^i_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{O}_X, \boldsymbol{\omega})$, як легко бачити, є когерентним на $\mathbb{P}^n$, тому для достатньо великих m пучок $\mathcal{E}(m)$ породжується глобальними перерізами. Але, згідно з Твердженням 6.17 і Теоремою 6.15,

$$\Gamma(\mathcal{E}(m)) \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{O}_X, \boldsymbol{\omega}(m)) \simeq \\ \simeq H^{n-i}(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_X(-m))^* = H^{n-i}(X, \mathcal{O}_X(-m))^*.$$

Якщо $i < r$, то $n - i > n - r = \dim X$, отже, $H^{n-i}(\mathcal{O}_X(-m)) = 0$ за Вправою 3.9 $\square$

7. Двоїстість Серра

Мета цього розділу — узагальнити Теорему двоїстості 6.15 на широке коло проективних многовидів. Основним засобом для цього є поняття *дуалізуючого пучка.* Зауважимо, перш за все, що, оскільки когомології $H^i(X,\mathcal{F})$ є функторами, для довільних пучків $\mathcal{F},\mathcal{G}$ визначене білінійне відображення («множення») $\mu : \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F},\mathcal{G}) \times H^i(X,\mathcal{F}) \to H^i(X,\mathcal{G})$.

Означення 7.1. *Дуалізуючим пучком* на алгебричному многовиді X розмірності n зветься пара $(\boldsymbol{\omega}_X, \tau)$, де $\boldsymbol{\omega}_X$ — когерентний пучок на X, а τ —лінійне відображення $H^n(X, \boldsymbol{\omega}_X) \to \Bbbk$ таке, що для довільного когерентного пучка композиція

$$\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}_X) \times H^n(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\mu} H^n(X, \boldsymbol{\omega}_X) \xrightarrow{\tau} \Bbbk$$

є невиродженим з обох боків білінійним відображенням, тобто, індукує ізоморфізм

$$\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}_X) \xrightarrow{\sim} H^n(X,\mathcal{F})^*.$$

Досить часто сам пучок $\boldsymbol{\omega}_X$ звуть *дуалізуючим пучком*, випускаючи згадку про відображення τ. Відображення τ зветься *відображенням сліду* (відносно пучка $\boldsymbol{\omega}_X$).

Переконаємося, що дуалізуючий пучок, якщо він існує, визначений з точністю до ізоморфізму (що виправдовує позначення $\boldsymbol{\omega}_X$).

Твердження 7.2. *Якщо* $(\boldsymbol{\omega},\tau)$ *і* $(\boldsymbol{\omega}',\tau')$ *— два дуалізуючі пучки на многовиді* X*, існує єдиний ізоморфізм* $\phi:\boldsymbol{\omega}'\xrightarrow{\sim}\boldsymbol{\omega}$ *такий, що* $\tau'=\tau\cdot\phi_n$*, де* $\phi_n=H^n(\phi)$ *— індуковане відображення когомологій* $H^n(X,\boldsymbol{\omega}')\to H^n(Xom')$*.*

Доведення. Оскільки $(\boldsymbol{\omega},\tau)$ — дуалізуючий пучок, то $\mathrm{Hom}_X(\boldsymbol{\omega}',\boldsymbol{\omega})\simeq H^n(X,\boldsymbol{\omega}')^*$. Зокрема, існує єдине відображення $\phi:\boldsymbol{\omega}'\to\boldsymbol{\omega}$ таке, що $\tau'=\tau\phi_n$. Так само, оскільки $(\boldsymbol{\omega}',\tau')$ — дуалізуючий пучок, існує єдине відображення $\phi':\boldsymbol{\omega}\to\boldsymbol{\omega}'$ таке, що $\tau=\tau'\phi'_n$. Звідси $\tau=\tau\phi_n\phi'_n=\tau(\phi\phi')_n$. Але τ індукує ізоморфізм $\mathrm{Hom}_X(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})\to H^n(X,\boldsymbol{\omega})^*$, при якому тотожне відображення переходить саме в τ. Тому $\phi\phi'=\mathrm{Id}$. Так само доводиться, що $\phi'\phi=\mathrm{Id}$, тобто, ϕ' — обернене відображення до ϕ. □

Теорема 6.15 свідчить, що пучок $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$ є дуалізуючим для проективного простору $\mathbb{P}^n$. Виявляється, що дуалізуючий пучок існує для кожного проективного многовиду.

Теорема 7.3. *Нехай* $X\subseteq P=\mathbb{P}^N$ *— проективний многовид розмірності* n*,* $r=N-n$*. Тоді пучок* $\boldsymbol{\omega}_X=\mathcal{E}xt^r_P(\mathcal{O}_X,\boldsymbol{\omega}_P)$ *є дуалізуючим на* X*.*

Доведення. Треба побудувати відображення сліду $H^n(X,\boldsymbol{\omega}_X)\to\Bbbk$. Для цього ми скористаємося таким результатом.

Лема 7.4. *У позначеннях Теореми 7.3,*

$$\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F},\boldsymbol{\omega}_X)\simeq\mathrm{Ext}^r_P(\mathcal{F},\boldsymbol{\omega}_P)$$

для довільного пучка $\mathcal{O}_X$*-модулів* $\mathcal{F}$*.*

Доведення. Зауважимо, що для довільного многовиду Y, його замкненого підмноговиду Z, пучка $\mathcal{O}_Y$-модулів $\mathcal{F}$ та пучка $\mathcal{O}_Z$-модулів $\mathcal{G}$ має місце ізоморфізм

$$\mathrm{Hom}_Y(\mathcal{F},\mathcal{G})\simeq\mathrm{Hom}_Z(\mathcal{F},\mathcal{H}om_Y(\mathcal{O}_Z,\mathcal{G})),\tag{7.1}$$

який переводить морфізм $\alpha:\mathcal{F}\to\mathcal{H}om_Y(\mathcal{O}_Z,\mathcal{G})$ у морфізм $\alpha':\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ такий, що $\alpha'(s)=\alpha(s)(1_U)$ для кожного перерізу $s\in\mathcal{F}(U)$, де 1_U — одиничний елемент кільця $\mathcal{O}_X(U)$. Обернене відображення переводить морфізм $\beta:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ у морфізм $\beta':\mathcal{F}\to\mathcal{H}om_Y(\mathcal{O}_Z,\mathcal{G})$, який відображає переріз $s\in\mathcal{F}(U)$ у відображення $s':\mathcal{O}_Z(U)\to\mathcal{G}(U)$, для якого $s'(f)=f\beta(s)$.

Фіксуємо ін'єктивну резольвенту $\mathcal{I}_\bullet$ пучка $\boldsymbol{\omega}_P$:

$$0\to\boldsymbol{\omega}_P\xrightarrow{\iota}\mathcal{I}_0\xrightarrow{\phi_0}\mathcal{I}_1\xrightarrow{\phi_1}\mathcal{I}_2\xrightarrow{\phi_2}\dots$$

За означенням, $\mathrm{Ext}^i_P(\mathcal{F},\boldsymbol{\omega}_P)$ — це i-та когомологія $h^i(\mathrm{Hom}_P(\mathcal{F},\mathcal{I}_\bullet))$ комплекса

$$\mathrm{Hom}_P(\mathcal{F},\mathcal{I}_\bullet)\simeq\mathrm{Hom}_P(\mathcal{F},\mathcal{H}om_P(\mathcal{O}_X,\mathcal{I}_\bullet)).$$

Позначимо $\mathcal{J}_i = \mathrm{Hom}_P(\mathcal{O}_X, \mathcal{I}_i)$. Це пучки $\mathcal{O}_X$-модулів, і, як такі, вони ін'єктивні, оскільки, за формулою (7.1) $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{J}_i) \simeq \mathrm{Hom}_P(\mathcal{F}, \mathcal{I}_i)$, а останній функтор точний. Згідно з Наслідком 6.18, $\mathcal{E}xt^i_P(\mathcal{O}_X, \boldsymbol{\omega}_P) = 0$ при $i < r$, тобто, індукований комплекс

$$0 \to \mathcal{J}_0 \xrightarrow{\psi_0} \mathcal{J}_1 \xrightarrow{\psi_1} \dots \mathcal{J}_{r-1} \xrightarrow{\psi_{r-1}} \mathcal{J}_r \xrightarrow{\psi_r} \dots$$

є точним на місцях з номерами $0 \leqslant i < r$. Оскільки всі пучки $\mathcal{J}_i$ ін'єктивні, звідси випливає, що $\mathcal{J}_i = \mathrm{Im}\,\psi_{i-1} \oplus \mathrm{Im}\,\psi_i$ при $i < r$, а «зсунутий» комплекс $\mathcal{J}'_\bullet$, в якому $\mathcal{J}'_k = \mathcal{J}_{r+k}$ для всіх $k \geqslant 0$, є ін'єктивною резольвентою пучка $h^r(\mathcal{H}om_P(\mathcal{O}_X, \mathcal{I}_\bullet)) = \mathcal{E}xt_P(\mathcal{O}_X, \boldsymbol{\omega}_P) = \boldsymbol{\omega}_X$. Тому

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}_X) &\simeq h^0(\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{J}'_\bullet)) = h^r(\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{J}_\bullet)) \\ &\simeq h^r(\mathrm{Hom}_P(\mathcal{F}, \mathcal{I}_\bullet) = \mathrm{Ext}^r_P(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}_P). \end{aligned}$$

□

Завершимо доведення Теореми 7.3. Для кожного когерентного пучка $\mathcal{F}$ на многовиді X, згідно з Лемою 7.4 та Теоремою 6.15,

$$\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}_X) \simeq \mathrm{Ext}^r_P(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}_P) \simeq H^{N-r}(P, \mathcal{F})^* = H^n(X, \mathcal{F})^*.$$

Зокрема, при $\mathcal{F} = \boldsymbol{\omega}_X$, одержуємо ізоморфізм $\mathrm{Hom}_X(\boldsymbol{\omega}_X, \boldsymbol{\omega}_X) \simeq H^n(X, \boldsymbol{\omega}_X)^*$. Тому за відображення сліду τ можна взяти образ тотожного морфізму при цьому ізоморфізмі. □

Зауваження 7.5. З наведених міркувань випливає також, що $\mathrm{Ext}^i_P(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}_P) = 0$ при $i < r$ для довільного пучка $\mathcal{O}_X$-модулів $\mathcal{F}$.

Звичайно, ми хочемо скористатися побудованим дуалізуючим пучком для того, щоб розповсюдити на проективний многовид X розмірності n двоїстість з Теореми 6.15. Перш за все, зауважимо, що набори функтори $\{\, \mathrm{Ext}^i_X(\_, \boldsymbol{\omega}_X) \,\}$ та $\{\, H^{n-i}(X, \_)^* \,\}$ є контраваріантними δ-функторами (див. Твердження 6.4). Крім того, при $i > 0$,

$$\mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{O}_X(-m), \boldsymbol{\omega}_X) \simeq H^i(X, \boldsymbol{\omega}_X(m)) = 0$$

для достатньо великих m за Теоремою 4.2(Б). Оскільки, з іншого боку, кожен когерентний пучок є факторпучком пучка $k\mathcal{O}_X(-m)$ для деяких k і всіх достатньо великих m, перший з цих δ-функторів є стираючим. Але ми вже бачили, що $\mathrm{Ext}^0_X(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}_X) = \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}_X) \simeq H^n(X, \mathcal{F})^*$. Тому з Теореми 6.5 випливає, що існує єдиний морфізм δ-функторів $\{\, \theta_i \,\}$, де

$$\theta_i : \mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}_X) \to H^{n-i}(X, \mathcal{F})^* \tag{7.2}$$

для кожного когерентного пучка $\mathcal{F}$, який продовжує вказаний ізоморфізм. Знов-таки за Теоремою 6.5, це відображення буде ізоморфізмом тоді й лише тоді, коли δ-функтор $\{\, H^{n-i}(X, \mathcal{F})^* \,\}$ також є стираючим. Так буде не завжди, але ми впровадимо клас многовидів, для яких це дійсно так.

Означення 7.6. (1) Локальне кільце $\mathbf{A}$ розмірності Крулля d з полем лишків $\Bbbk$ зветься *Коен–Маколеєвим*, якщо $\operatorname{Ext}^i_{\mathbf{A}}(\Bbbk, \mathbf{A}) = 0$ для всіх $i < d$.

(2) Алгебричний многовид X зветься *Коен–Маколеєвим*, якщо такими є всі локальні кільця $\mathcal{O}_{X,x}$ $(x \in X)$.

(3) Алгебричний многовид X зветься *рівнорозмірним*, якщо всі його незвідні компоненти мають однакову розмірність, або, шр те саме, всі локальні кільця $\mathcal{O}_{X,x}$ мають однакову розмірність Крулля.

Наступний результат показує, що для рівнорозмірних Коен–Маколеєвих многовидів δ-функтор $\{ H^{n-i}(X, \_)^* \}$ є стираючим.

Твердження 7.7. *Нехай X — рівнорозмірний Коен–Маколеїв многовид розмірності n, $\mathcal{F}$ — локально вільний пучок на X. Існує таке m_0, що $H^i(X, \mathcal{F}(-m)) = 0$ для всіх $m \geqslant m_0$ і всіх $i < n$.*

Як було зауважено вище, з останнього твердження та Теореми 6.5 одразу випливає теорема двоїстості для рівнорозмірних Коен–Маколеєвих многовидів.

Теорема 7.8 (Двоїстість Серра)**.** *Якщо проективний многовид X є Коен–Маколеєвим і всі його незвідні компоненти мають розмірність n, то гомоморфізми $\theta_i : \operatorname{Ext}^i_X(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}_X) \to H^{n-i}(X, \mathcal{F})^*$ є ізоморфізмами для всіх когерентних пучків $\mathcal{F}$ і всіх $i \geqslant 0$.*

Зауваження 7.9. Можна довести й обернені результати, які показують, що наступні умови на проективний многовид X розмірності n є рівносильними:

(1) X — рівнорозмірний Коен–Маколеїв многовид.

(2) Гомоморфізми θ_i є ізоморфізмами для довільного когерентного пучка $\mathcal{F}$.

(3) Якщо $\mathcal{F}$ — локально вільний пучок на X, то $H^i(X, \mathcal{F}(-m)) = 0$ для всіх $i < n$ і всіх достатньо великих m.

Див. [**X**, Гл. III, Теорема 7.6].

Доведення Твердження 7.7. Нехай $X \subseteq P = \mathbb{P}^N$, $r = N - n$. Тоді $\boldsymbol{\omega}_X = \mathcal{E}xt^r_P(\mathcal{O}_X, \boldsymbol{\omega}_P)$. Для кожної точки $x \in X$ $\mathcal{F}_x$ є вільним модулем над Коен–Маколеєвим кільцем $\mathbf{B} = \mathcal{O}_{X,x}$. Тому $\operatorname{dep}_{\mathbf{B}} \mathcal{F}_x = \operatorname{K.dim} \mathbf{B} = n$. Але $\operatorname{dep}_{\mathbf{B}} \mathcal{F}_x = \operatorname{dep}_{\mathbf{A}} \mathcal{F}_x$, де $\mathbf{A} = \mathcal{O}_{P,x}$ (див. Наслідок B.9). Тому, за Теоремою B.19, $\operatorname{pr.dim}_{\mathbf{A}} \mathcal{F}_x = r$. Отже, $\operatorname{Ext}^i_{\mathbf{A}}(\mathcal{F}_x, \_) = 0$ при $i > r$. Оскільки це вірно для довільної точки, то й $\mathcal{E}xt^i_P(\mathcal{F}, \_) = 0$ при $i > r$.

За Теоремою 6.15,

$$H^i(X, \mathcal{F}(-m)) = H^i(P, \mathcal{F}(-m)) \simeq \operatorname{Ext}^{N-i}_P(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}_P(m))^*$$

Але $\operatorname{Ext}^{N-i}_P(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}_P(m)) \simeq \Gamma(P, \mathcal{E}xt^{N-i}_P(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}_P(m))$ для достатньо великих m (див. Твердження 6.17). Якщо $i < n$, то $N - i > r$ і $\mathcal{E}xt^{N-i}_P(\mathcal{F}, \boldsymbol{\omega}_P(m)) = 0$. Отже, й $H^i(X, \mathcal{F}(-m)) = 0$. $\square$

Наслідок 7.10. *Нехай X — Коен–Маколеєвий проективний многовид розмірності n, $\mathcal{L}$ — локально вільний пучок на X. Тоді*

$$H^{n-i}(X, \mathcal{F}) \simeq H^i(X, \mathcal{F}^\vee \otimes_X \boldsymbol{\omega}_X),$$
$$\chi(\mathcal{F}) = (-1)^n \chi(\mathcal{F}^\vee \otimes_X \boldsymbol{\omega}_X),$$

де χ позначає характеристику Ойлера пучка $\mathcal{F}$ (Означення 4.4).

8. Диференціальні форми

У цьому розділі ми дамо «внутрішнє» тлумачення дуалізуючих пучків у випадку неособливих многовидів. Вого пов'язане з диференціальними формами на многовидах. Почнемо з афінного випадку.

Означення 8.1. Нехай $\mathbf{R} \to \mathbf{A}$ — гомоморфізм кілець, M — деякий $\mathbf{A}$-модуль.

(1) $\mathbf{R}$-*диференціюванням* (або *деривацією*) з $\mathbf{A}$ до M зветься таке $\mathbf{R}$-лінійне відображення $\delta : \mathbf{A} \to M$, що для довільних елементів $a, b \in \mathbf{A}$ виконується *правило Ляйбніца*:
$$\delta(ab) = a\delta(b) + b\delta(a).$$
Множину всіх $\mathbf{R}$-диференціювань $\mathbf{A} \to M$ позначають $\mathrm{Der}_\mathbf{R}(\mathbf{A}, M)$.

(2) *Універсальним* $\mathbf{R}$-*диференціюванням* кільця $\mathbf{A}$ зветься таке $\mathbf{R}$-диференціювання $d : \mathbf{A} \to \boldsymbol{\Omega}$, що для довільного $\mathbf{R}$-диференціювання $\delta : \mathbf{A} \to M$ існує єдиний гомоморфізм $\mathbf{A}$-модулів $\phi : \boldsymbol{\Omega} \to M$ такий, що $\delta = \phi d$. В цьому випадку $\boldsymbol{\Omega}$ зветься *модулем* $\mathbf{R}$-*диференціалів* кільця $\mathbf{A}$ і позначається $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}$. .

Якщо $\mathbf{A}$ — алгебра над полем $\Bbbk$ (наприклад, афінна алгебра), ми казатимемо просто «диференціювання» замість «$\Bbbk$-диференціювання» і позначатимемо $\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{A} = \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}/\Bbbk}$.

З формули Ляйбніца одразу випливає, що $\delta(1) = 0$, отже, $\delta(r1) = 0$ для кожного $r \in \mathbf{R}$.

Вправа 8.2. Доведіть, що універсальне $\mathbf{R}$-диференціювання кільця $\mathbf{A}$ єдине з точністю до ізоморфізму. Зокрема, й модуль $\mathbf{R}$-диференціалів визначений з точністю до канонічного ізоморфізму. Це робить коректним позначення $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}$.

Порівняно легко довести, що універсальне диференціювання існує (спробуйте це зробити). Втім, ми дамо його явну побудову. Для цього розглянемо тензорний добуток $\mathbf{A}^e = \mathbf{A} \otimes_\mathbf{R} \mathbf{A}$ і гомоморфізм $\mathbf{A}$-бімодулів $\mu : \mathbf{A}^e \to \mathbf{A}$ (гомоморфізм множення): $\mu(a \otimes b) = ab$. Позначимо $J = J_{\mathbf{A}/\mathbf{R}} = \mathrm{Ker}\, \mu$, $\boldsymbol{\Omega} = J/J^2$ і da — клас суміжності в модулі $\boldsymbol{\Omega}$ елемента $a \otimes 1 - 1 \otimes a$.

Теорема 8.3. *Відображення d є універсальним $\mathbf{R}$-диференціюванням кільця $\mathbf{A}$, отже, $\boldsymbol{\Omega}$ є модулем $\mathbf{R}$-диференціалів кільця $\mathbf{A}$.*

Доведення. Позначимо $\tilde{d}a = a \otimes 1 - 1 \otimes a$. Зазначимо спочатку, що коли $\mu(\sum_i a_i b_i) = \sum_i a_i b_i = 0$, то $\sum_i a_i b_i = \sum_i (a_i \tilde{d}(b_i) + \tilde{d}(a_i) b_i)$. Отже, $\{\tilde{d}a \mid a \in \mathbf{A}\}$ є множиною твірних ідеалу J кільця $\mathbf{A}^e$. Легко переконатися також, що $\tilde{d}(ab) = a\tilde{d}(b) + \tilde{d}(a)b$. З іншого боку, $\mu(aw - wa) = 0$ для кожного елемента $a \in \mathbf{A}$ і кожного $w \in \mathbf{A}^e$, тобто, $aw - wa \in J$. Тому $\tilde{d}(a)b \equiv b\tilde{d}(a) \pmod{J^2}$, звідки $d(ab) = a(db) + b(da)$. Отже, d є диференціюванням.

Нехай $\delta : \mathbf{A} \to M$ є довільним $\mathbf{R}$-диференціюванням. На прямій сумі $\mathbf{B} = \mathbf{A} \oplus M$ визначимо структуру кільця, поклавши $(a, u)(b, v) = (ab, av + bu)$ (перевірте асоціативність цього множення). Визначимо гомоморфізм $f : \mathbf{A}^e \to \mathbf{B}$, поклавши $f(a \otimes b) = (ab, b\delta(a))$ (перевірте, що це дійсно гомоморфізм кілець). Тоді $f(\tilde{d}a) = (0, \delta(a))$, звідки $f(\tilde{d}(a)\tilde{d}(b)) = 0$. Отже, $J^2 \in \operatorname{Ker} f$ і f індукує гомоморфізм модулів $\phi : J/J^2 \to M$, для якого $\delta(a) = \phi(da)$.

Єдиність ϕ випливає з того, що елементи da породжують $\mathbf{A}$-модуль $\mathbf{\Omega}$. $\square$

Приклад 8.4. Очевидно, довільне $\Bbbk$-диференціювання алгебри многочленів $\mathbf{P} = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ однозначно визначається значеннями $\delta(x_i)$, бо з формули Ляйбніца випливає, що $\delta(f) = \sum_i \partial_i f \delta(x_i)$, причому значення $\delta(x_i)$ можна задавати довільно. Тому $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{P}/\Bbbk}$ — вільний $\mathbf{P}$-модуль з базою $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$.

Вправа 8.5.
(1) Доведіть, що кожен гомоморфізм кілець $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ індукує єдиний гомоморфізм $\mathbf{\Omega}_f : \mathbf{\Omega}_{\mathbf{A}/\mathbf{R}} \to \mathbf{\Omega}_{\mathbf{B}/\mathbf{R}}$ такий, що $\mathbf{\Omega}_f(da) = df(a)$ для всіх $a \in \mathbf{A}$.
(2) Довести, що коли $S \subset \mathbf{A}$ — мультиплікативна підмножина, то $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{A}[S^{-1}]/\mathbf{R}} \simeq \mathbf{\Omega}_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}[S^{-1}]$.
Натяк: Скористатися тим, що $\delta(ab^{-1}) = (b\delta(a) - a\delta(b))b^{-2}$ для довільного диференціювання δ і довільного обертовного елемента $b \in \mathbf{A}$.

Зокрема, якщо $\mathbf{A} = \Bbbk[X]$ алгебра регулярних функцій на афінному многовиді X, то, для довільних відкритих підмножин $V \subseteq U$ відображення обмеження $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ визначає гомоморфізм $\boldsymbol{\Omega}_V^U : \boldsymbol{\Omega}_X(U) \to \boldsymbol{\Omega}_X(V)$, де $\boldsymbol{\Omega}_X(U) = \mathbf{\Omega}_{\mathcal{O}_X(U)}$, причому $\boldsymbol{\Omega}_W^U = \boldsymbol{\Omega}_W^V \boldsymbol{\Omega}_V^U$ для кожної відкритої підмножини $W \subseteq V$. Більш того, $\boldsymbol{\Omega}_X(D(f)) \simeq \mathbf{\Omega}_{\mathbf{A}}[f^{-1}]$. Звідси випливає, що відповідність $U \mapsto \boldsymbol{\Omega}(U)$ задає квазікогерентний пучок $\boldsymbol{\Omega}_X$ на афінному многовиді X, який відповідає $\mathbf{A}$-модулю $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{A}}$. Більш того, якщо $U \subseteq X$ — афінна відкрита підмножина, то, очевидно, $\boldsymbol{\Omega}_U = (\boldsymbol{\Omega}_X)|_U$, оскільки обидва пучки квазікогегентні й мають ті самі глобальні перерізи. Тому для довільного алгебричного многовиду X можна визначити квазікогерентний *пучок диференціалів* $\boldsymbol{\Omega}_X$ такий, що $\boldsymbol{\Omega}_X(U) = \mathbf{\Omega}_{\mathcal{O}_X(U)}$ для кожної афінної відкритої підмножини $U \subseteq X$. Наприклад, якщо $X = \mathbb{A}^n$, то $\boldsymbol{\Omega}_X \simeq n\mathcal{O}_X$ (див. Приклад 8.4).

Насправді, пучок $\boldsymbol{\Omega}_X$ є навіть когерентним. Дійсно, якщо $\mathbf{A} = \Bbbk[a_1, a_2, \dots, a_n]$, то, очевидно, елементи $da_1, da_2, \dots, da_n$ породжують $\mathbf{A}$-модуль $\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{A}$. Ми доведемо, що для *неособливого* многовиду X цей пучок є навіть локально вільним рангу $\dim X$. Спочатку встановимо такий результат.

Лема 8.6. *Нехай $\mathbf{B} = \mathbf{A}/I$. Тоді точною є послідовність $\mathbf{B}$-модулів*

$$I/I^2 \xrightarrow{\beta} \mathbf{B} \otimes_\mathbf{A} \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}/\mathbf{R}} \xrightarrow{\pi} \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{B}/\mathbf{R}} \to 0, \tag{8.1}$$

в якій $\pi(b \otimes da) = bd\bar{a}$, де $\bar{a} = a + I$, а $\beta(a + I^2) = 1 \otimes da$.

(Перевірте, що відображення β і π визначені коректно і дійсно є $\mathbf{B}$-гомоморфізмами).

Доведення. Нагадаємо, що точність послідовності (8.1) рівносильна тому, що для кожного $\mathbf{B}$-модуля M точною є індукована послідовність

$$0 \to \mathrm{Hom}_\mathbf{B}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{B}/\mathbf{R}}, M) \to \mathrm{Hom}_\mathbf{B}(\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}/\mathbf{R}} \boldsymbol{\Omega}_\mathbf{A}, M) \to \mathrm{Hom}_\mathbf{B}(I/I^2, M).$$

В ній $\mathrm{Hom}_\mathbf{B}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{B}/\mathbf{R}}, M) \simeq \mathrm{Der}_\mathbf{R}(\mathbf{B}, M)$, а

$$\mathrm{Hom}_\mathbf{B}(\mathbf{B} \otimes_\mathbf{A} \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}, M) \simeq \mathrm{Hom}_\mathbf{A}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}, M) \simeq \mathrm{Der}_\mathbf{R}(\mathbf{A}, M).$$

Отже, її можна переписати так:

$$0 \to \mathrm{Der}_\mathbf{R}(\mathbf{B}, M) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Der}_\mathbf{R}(\mathbf{A}, M) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}_\mathbf{B}(I/I^2, M),$$

де $(\pi^*\bar{\delta})(a) = \bar{\delta}(\bar{a})$, а $(\beta^*\delta)(c + I^2) = \delta(a)$ для кожних $\bar{\delta} \in \mathrm{Der}(\mathbf{B}, M)$, $\delta \in \mathrm{Der}(\mathbf{A}, M)$, $a \in \mathbf{A}$ і $c \in I$. Тепер очевидно, що π^* — мономорфізм, а $\beta^*\delta = 0$ тоді й лише тоді, коли $\delta = \beta^*\bar{\delta}$, де $\bar{\delta}(\bar{a}) = \delta(a)$. $\square$

Наслідок 8.7. *Якщо $\mathbf{A}$ — локальна $\Bbbk$-алгебра з максимальним ідеалом $\mathfrak{m}$ і $\mathbf{A}/\mathfrak{m} \simeq \Bbbk$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ — такі елементи з $\mathfrak{m}$, що їхні класи утворюють $\Bbbk$-базу в $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, то класи елементів $da_1, da_2, \dots, da_n$ утворюють $\Bbbk$-базу в $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}/\Bbbk}/\mathfrak{m}\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}/\Bbbk}$.*

Отже, за лемою Накаями, елементи $da_1, da_2, \dots, da_n$ породжують $\mathbf{A}$-модуль $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}/\Bbbk}$.

Доведення. Зауважимо, що $\boldsymbol{\Omega}_{\Bbbk/\Bbbk} = 0$. Отже, відображення $\beta : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \Bbbk \otimes_\mathbf{A} \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}/\Bbbk} \simeq \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}/\Bbbk}/\mathfrak{m}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}/\Bbbk$ з точної послідовності (8.1) є сюр'єктивним. Тому класи $da_1, da_2, \dots, da_n$ породжують $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}/\Bbbk}/\mathfrak{m}\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{A}$. Кожен елемент $a \in \mathbf{A}$ однозначно записується у вигляді $\lambda + \sum_{i=1}^n \lambda^i a_i + b$, де $b \in \mathfrak{m}^2$. Розглянемо відображення $\delta_i : \mathbf{A} \to \Bbbk$ таке, що $\delta(a) = \lambda_i$. Легко бачити (перевірте це), що δ_i є диференціюванням, а індуковане ним відображення $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}/\Bbbk} \to \Bbbk$ переводить da_j в δ_{ij}. Звідси одразу випливає, що елементи $da_1, da_2, \dots, da_n$ лінійно незалежні. $\square$

Надалі всі кільця вважаються $\Bbbk$-алгебрами і замість $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}/\Bbbk}$ ми писатимемо $\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{A}$.

Теорема 8.8. *Нехай* $\mathbf{A}$ *— регулярна локальна* $\mathbb{k}$*-алгебра з максимальним ідеалом* $\mathfrak{m}$ *і* $\mathbf{A}/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{k}$*. Якщо класи елементів* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *утворюють* $\mathbb{k}$*-базу* $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$*, то елементи* $da_1, da_2, \ldots, da_n$ *утворюють базу* $\mathbf{A}$*-модуля* $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_{\mathbf{A}/\mathbb{k}}$*.*

Зауважимо, що за умов цієї теореми $n = \mathrm{K.dim}\,\mathbf{A}$.

Доведення. Кожен елемент a цього кільця однозначно подається у вигляді $a = f(a_1, a_2, \ldots, a_n) + r$, де $f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — многочлен степеня щонайбільше m, а $r \in \mathfrak{m}^{m+1}$ (див. [**Др**, Теорема 4.2.6]). Визначимо відображення $\delta : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathfrak{m}^m$, поклавши $\delta(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \pmod{\mathfrak{m}^m}$. Зокрема, $\delta(a_i) = \delta_{ij} a_j \pmod{\mathfrak{m}^m}$. Можна перевірити (зробіть це), що δ є диференціюванням. Отже, існує гомоморфізм $\phi : \mathbf{\Omega} \to \mathbf{A}/\mathfrak{m}^m$, для якого $\phi(da_i) = \delta_{ij} \pmod{\mathfrak{m}^m}$. Тоді з рівності $\sum_i c_i da_i = 0$, де $c_i \in \mathbf{A}$ випливає, що $c_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^m}$ для кожного m, звідки $c_j = 0$. $\square$

Твердження 8.9. *За умов Теореми 8.8, нехай* $I \subset \mathbf{A}$ *— такий ідеал, що факторалгебра* $\mathbf{B} = \mathbf{A}/I$ *теж є регулярною розмірності Крулля* m*. Тоді послідовність* (8.1) *є точною, а твірні* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *максимального ідеалу* $\mathfrak{m}$ *можна обрати так, що* $I = \langle\, a_{m+1}, \ldots, a_n \,\rangle$*.*

Очевидно, звідси випливає, що базою $\mathbf{B}$-модуля $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{B}}$ є образи елементів $da_1, da_2, \ldots, da_m$.

Доведення. Позначимо $\bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/I$. Відображення $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2$ є сюр'єктивним. Тому базу $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ простору $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ можна вибрати так, щоб образи елементів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ утворювали базу $\bar{\mathfrak{m}}$. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — прообрази в $\mathfrak{m}$ елементів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Тоді $\mathfrak{m} = \langle\, a_1, a_2, \ldots, a_n \,\rangle$, причому $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — регулярна послідовність (Приклад A.4). Позначимо $J = \langle\, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n \,\rangle$ і $\mathbf{B}' = \mathbf{A}/J$. Тоді $\mathbf{B}'$ — за теоремою Крулля про максимальний ідеал [**Др**, Теорема 3.2.11], $\mathrm{K.dim}\,\mathbf{B}' \leqslant m$. Але $\mathbf{B}$ є факторкільцем $\mathbf{B}'$ за ідеалом J/I. Тому $\mathrm{K.dim}\,\mathbf{B}' = m$, $\mathbf{B}'$ є регулярним (його максимальний ідеал породжений m елементами), отже, проекція $\mathbf{B}' \to \mathbf{B}$ є ізоморфізмом, тобто, $J = I$.

$\mathbf{B}$-модулі $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{B}}$ і $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{\Omega}_{\mathbf{A}}$ є вільними, з базами, відповідно, $d\bar{a}_1, d\bar{a}_2, \ldots, d\bar{a}_m$ і $1 \otimes da_1, 1 \otimes da_2, \ldots, 1 \otimes da_n$. Тому ядро K гомоморфізму π є теж вільним $\mathbf{B}$-модулем з базою $1 \otimes da_i$ $(m < i \leqslant n)$. Оскільки елементи a_i $(m < i \leqslant n)$ породжують I, а $\beta(a_i + I^2) = 1 \otimes da_i$, ці елементи утворюють базу I/I^2, а β є мономорфізмом. $\square$

Наслідок 8.10. *Якщо* X *— зв'язний неособливий многовид розмірності* n*, то*

(1) $\boldsymbol{\Omega}_X$ *— локально вільний пучок рангу* n*.*
(2) *Якщо* $Y \subset X$ *— регулярний замкнений підмноговид розмірності* m*, то*

(a) *кожна точка $y \in Y$ має афінний окіл U такий, що $Y \cap U = V(f_1, f_2, \dots, f_{n-m})$ для деяких елементів $f_i \in \Bbbk[U]$ $(1 \leqslant i \leqslant n-m)$, які утворюють регулярну послідовність в кільці* $\mathbf{A}$.

(b) *Якщо $\mathcal{I} = \operatorname{Ker}(\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y)$, то існує точна послідовність*

$$0 \to \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{O}_X \boldsymbol{\Omega}_X \to \boldsymbol{\Omega}_Y \to 0. \tag{8.2}$$

Нагадаємо, що m*-им зовнішнім степенем* $\mathbf{A}$-модуля M зветься фактормодуль $\wedge^m M$ тензорного добутку $M^{\otimes m} = M \otimes_{\mathbf{A}} M \otimes_{\mathbf{A}} \dots \otimes_{\mathbf{A}} M$ (m разів) по підмодулю, породженому всіма елементами вигляду $u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_m$, де $u_i = u_j$ для деяких $i \neq j$. Якщо позначити через $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m$ клас елемента $u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_m$ у фактормодулі $\wedge^m M$, це означає, що $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m$, якщо один з елементів є лінійною комбінацією інших. Звідси також випливає, що при перестановці двох компонент у такому «добутку» він змінює знак.

Якщо $\mathcal{F}$ — квазікогерентний пучок $\mathcal{O}_X$-модулів на многовиді X, то його *зовнішній степінь* $\wedge^m \mathcal{F}$ визначається як квазікогерентний пучок такий, що для кожної відкритої афінної підмножини $U \subseteq X$ $(\wedge^m \mathcal{F})(U) = \wedge^m(\mathcal{F}(U))$, де останній розглядається як $\mathcal{O}_X(U)$-модуль. З попередньої вправи випливає, що коли $\mathcal{F}$ — локально вільний пучок рангу n, то $\wedge^m \mathcal{F}$ — локально вільний пучок рангу $\binom{m}{n}$. Зокрема, якщо $m = n$, це локально вільний пучок рангу 1 (такі пучки звуться *обертовними*). Пучок $\wedge^m \boldsymbol{\Omega}_X$ зветься *пучком диференціальних форм* степеня m на многовиді X, а його перерізи на множині U — *диференціальними формами* на U.

Вправа 8.11. (1) Перевірте, що коли $M = n\mathbf{A}$, то $\wedge^m M \simeq \binom{m}{n}\mathbf{A}$ (зокрема, 0 при $m > n$).

(2) Доведіть, що $\wedge^m M[S^{-1}] \simeq (\wedge^m M)[S^{-1}]$.

(3) Виведіть звідси, що коли $\mathcal{M}$ — локально вільний пучок $\mathcal{O}_X$-модулів рангу n, то $\wedge^m \mathcal{M}$ — локально вільний пучок рангу $\binom{m}{n}$.

(4) Нехай $0 \to M \to L \to N \to 0$ — точна послідовність вільних $\mathbf{A}$-модулів, де $\operatorname{rk} M = m$, $\operatorname{rk} N = n$. Доведіть, що відображення $\wedge^m M \otimes_{\mathbf{A}} \wedge^n N \to \wedge^{m+n} L$, яке переводить $(\wedge_{i=1}^m u_i) \otimes (\wedge_{j=1}^n v_j)$ у $(\wedge_{i=1}^m u_i) \otimes (\wedge_{j=1}^n \tilde{v}_j)$, де $\tilde{v}_j$ — прообраз у L елемента v_j, коректно визначене й є ізоморфізмом. Виведіть звідси аналогічний результат для локально пучків на многовидах.

Відзначимо одну важливу властивість обертовних пучків.

Твердження 8.12. *Якщо $\mathcal{L}$ — обертовний пучок $\mathcal{O}_X$-модулів на алгебричному многовиді X, то $\mathcal{L}^\vee \otimes_X \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X$.*

Доведення. Розглянемо морфізм $\phi : \mathcal{L}^\vee \otimes_X \mathcal{L} \to \mathcal{O}_X$, який переводить переріз $\alpha \otimes v$, де $\alpha \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{L}(U), \mathcal{O}_X(U))$, $v \in \mathcal{L}(U)$ в елемент $\alpha(v) \in \mathcal{O}_X(U)$. Легко бачити, що на стеблах гомоморфізми ϕ_x є ізоморфізмами. Але тоді й ϕ — ізоморфізм. $\square$

Зокрема, тензорне множення на обертовний пучок $\mathcal{L}$ є обертовною операцією: оберненоюдо неї є тензорне множення на пучок $\mathcal{L}^\vee$. Тому останній часто позначають також $\mathcal{L}^{-1}$.

Наслідок 8.13. *За умов Наслідку 8.10(2),*

$$\wedge^m \boldsymbol{\Omega}_Y \simeq \wedge^{n-m}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\vee \otimes_X \wedge^n \boldsymbol{\Omega}_X.$$

Доведення. Дійсно, згідно з цим Наслідком та Вправою 8.11(4),

$$\mathcal{O}_Y \otimes_X \wedge^n \boldsymbol{\Omega}_X \simeq \wedge^{n-m}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \otimes_Y \wedge^m \boldsymbol{\Omega}_Y.$$

Оскільки все це — обертовні пучки, з Твердження 8.12 випливає, що

$$\wedge^m \boldsymbol{\Omega}_Y \simeq \wedge^{n-m}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\vee \otimes_Y \mathcal{O}_Y \otimes_X \wedge^n \boldsymbol{\Omega}_X \ \ \simeq \wedge^{n-m}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\vee \otimes_X \wedge^n \boldsymbol{\Omega}_X.$$

$\square$

Теорема 8.14. *Якщо ω_X — дуалізуючий пучок на n-вимірному неособливому проективному многовиді X, то $\omega_X \simeq \wedge^n \boldsymbol{\Omega}_X$.*

Доведення. Нехай спочатку $X = \mathbb{P}^n$, $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ — однорідні координати на $\mathbb{P}^n$, а $U_i = \mathbb{A}^n_i = D(x_i)$ — стандартне афінне покриття $\mathbb{P}^n$. Тоді $\mathbf{A}_i = \Bbbk[U_i] = \Bbbk[t_1, t_2, \dots, t_n]$, де $t_k = x_k/x_i$. Оскільки $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{A}_i}$ — вільний $\mathbf{A}_i$-модуль з базою $\{dt_k\}$, $\wedge^n \mathbf{\Omega}_{\mathbf{A}_i}$ — вільний $\mathbf{A}_i$-модуль з одним твірним $\omega_i \wedge_k dt_k$. Так само, $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{A}_j}$ — вільний $\mathbf{A}_j$-модуль з базою $\{dt'_k\}$, де $t'_k = x_k/x_j = t_k/t_j$, зокрема, $t'_i = 1/t_j$, а $\wedge^m \mathbf{\Omega}_{\mathfrak{A}_j}$ — вільний $\mathbf{A}_j$-модуль з одним твірним $\wedge_k dt'_k$. На перетині $U_i \cap U_j$ $dt'_k = dt_k/t_j - (t_k/t_j^2)dt_j$. Звідси легко виводиться, що на цьому перетині $\omega_j = \omega_i/t_j^{n+1}$. Отже, $\wedge^n \boldsymbol{\Omega}_X \simeq \mathcal{O}_X(-n-1) \simeq \boldsymbol{\omega}_X$.

Нехай тепер $X \subset P = \mathbb{P}^N$ — неособливий підмноговид розмірності n, $r = N - n$. За наслідком 8.10, P покривається афінними відкритими підмножинами U такими, що коли $\mathbf{A} = \Bbbk[U]$, а $\mathbf{B} = \Bbbk[X \cap U]$, то $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\langle\, a_1, a_2, \dots, a_r \,\rangle$, де $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ — регулярна послідовність в $\mathbf{A}$. Тоді, за Теоремою A.5, комплекс Косуля $K_\bullet = K_\bullet(\mathbf{a})$ є вільною резольвентою $\mathbf{A}$-модуля $\mathbf{B}$. Отже,

$$\operatorname{Ext}^r_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}, \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}) \simeq \operatorname{Coker}\big(\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K_{r-1}, \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}) \xrightarrow{\partial} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K_r, \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}})\big),$$

де ∂ індуковане відображенням $K_r \to K_{r-1}$ в комплексі Косуля. Оскільки $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}$ — вільний $\mathbf{A}$-модуль з одним твірним w, $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K_r, \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}})$ є вільним $\mathbf{A}$-модулем з одним твірним h, де $h(e_{12\dots r}) = w$, а $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K_{r-1}, \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}})$ є вільним $\mathbf{A}$-модулем з базою $\{\, h_i \mid 1 \leqslant i \leqslant r \,\}$, де $h_i(e_{12\dots\check{j}\dots r}) = \delta_{ij} a_i h$. Отже, $\operatorname{Ext}^r_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}, \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}})$ — вільний $\mathbf{B}$-модуль, твірним якого є клас $\bar{h}$ гомоморфізму h. Зауважимо, що, якщо $a'_i = \sum_{i=1}^r c_{ij} a_j$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ — інший вибір твірних ідеалу I, а $K'_\bullet = K_\bullet(\mathbf{a}')$, то матриця $C(c_{ij})$ є обертовною за модулем ідеалу I, а гомоморфізми $\phi_k : K'_k \to K_k$, які переводять $e_{i_1 i_2 \dots i_k}$ в $\sum_{j_1 j_2 \dots j_k} C^{j_1 j_2 \dots j_k}_{i_1 i_2 \dots i_k}$, де $C^{j_1 j_2 \dots j_k}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ — мінор матриці C, утворений рядками $i_1, i_2, \dots, i_k$ і стовпчиками $j_1, j_2, \dots, j_k$, задають гомоморфізм комплексів $K'_\bullet \to K_\bullet$. Цей гомоморфізм індукує автоморфізм $\operatorname{Ext}^r_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}, \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}})$, при якому $\bar{h}$ переходить у $(\det C)\bar{h}'$. Це перетворення збігається з заміною базисного елемента в модулі $\wedge^r (I/I^2)^\vee$, яке індуковано заміною бази в модулі I/I^2. Отже, одержуємо ізоморфізм $\operatorname{Ext}^r_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}, \omega_A) \simeq \wedge^r (I/I^2)^\vee \otimes_{\mathbf{A}} \omega_{\mathbf{A}}$, який не залежить від вибору твірних. Тому ці ізоморфізми можна «склеїти» в ізоморфізм пучків $\boldsymbol{\omega}_X \simeq \wedge^r (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\vee \otimes_P \omega_P$. З іншого боку, точна послідовність (8.2), разом з Вправою 8.11, показує, що

$$\wedge^N (\mathcal{O}_X \otimes_P \boldsymbol{\Omega}_P) \simeq \wedge^r (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \otimes_X \wedge^n \boldsymbol{\Omega}_X,$$

або, оскільки $\wedge^r (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ — локально вільний пучок рангу 1,

$$\wedge^n \boldsymbol{\Omega}_X \simeq \wedge^r (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\vee \otimes_X \wedge^N \boldsymbol{\Omega}_P \simeq \boldsymbol{\omega}_X.$$

□

Вправа 8.15. Нехай $X \subseteq \mathbb{P}^n$ $(n \geqslant 2)$ — неособлива гіперповерхня, задана однорідним рівнянням $F(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ степеня d, $U_i = X \cap \mathbb{A}^n_i$ — стандартне афінне покриття X, $\mathbf{R}_i = \Bbbk[\mathbb{A}^n_i] = \Bbbk[lstotn]$, де $t_j = x_j/x_i$, і $\mathbf{A}_i = \Bbbk[U_i] = \mathbf{R}_i/\langle F_i \rangle$, де $F_i(t_0, t_1, \dots, t_n) = x_i^{-d} F(x_0, x_1, \dots, x_n)$, і $y_j = t|_{U_i}$. Позначимо $G_{ij} = \partial F_i/\partial t_j|_{U_i}$ і $U_{ij} = D(G_{ij}) \cap X$. Згідно з [**Др**, Вправа 4.1.7], $U_i = \bigcup_j U_{ij}$. Позначимо також $\omega_{ij} = (1/G_{ij}) dy_0 \wedge \dots \wedge d\check{y}_i \wedge \dots \wedge dy_n$. Очевидно, $\omega_{ij} \in \boldsymbol{\Omega}_{U_{ij}}$.

(1) Доведіть, що $\omega_{ij} = \pm \omega_{ik}$ на перетині $U_{ij} \cap U_{ik}$. Звідси, очевидно, випливає, що $\omega_{ij} \in \boldsymbol{\Omega}_{U_i}$ для кожного j.

Натяк: Скористайтеся тим, що $\sigma = \sum_j G_{ij} dy_j = 0$ на U_i, і обчисліть $\sigma \wedge (\wedge_{r \notin \{i,j,k\}} dy_r)$.

(2) Нехай $k \neq i$. Позначимо $t'_j = (x_j/x_k)$, зокрема, $t'_i = 1/t_k$, і $z_j = t'_j|_{U_k}$. Перевірте, що коли $j \notin \{i, k\}$, то на перетині $U_i \cap U_k$

$$dz_0 \wedge \dots \wedge d\check{z}_j \wedge \dots \wedge dz_n = \pm y_k^{-n} dy_0 \wedge \dots \wedge d\check{y}_j \wedge \dots \wedge dy_n,$$
$$G_{kj} = y_k^{1-d} G_{ij},$$
$$\omega_{kj} = \pm y_k^{d-n-1} \omega_{ij}.$$

(3) Виведіть звідси, що $\boldsymbol{\Omega}_X \simeq \mathcal{O}_X(d - n - 1)$.

Наприклад, якщо $X \subset \mathbb{P}^2$ — неособлива кубічна крива, то $\boldsymbol{\Omega}_X \simeq \mathcal{O}_X$. Зокрема, $X \not\simeq \mathbb{P}^1$.

Припустимо, що X — незвідний многовид розмірності n. Позначимо $\mathcal{K}$ постійний пучок такий, що $\mathcal{K}_x = \mathbb{K} = \Bbbk(X)$ для всіх $x \in X$. Цей пучок квазікогерентний. Покладемо $\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \otimes X \boldsymbol{\Omega}_X$. Це постійний пучок $\mathbb{K}$-векторних просторів з шаром $\mathbf{\Omega}_{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \otimes_{\mathcal{O}_x} \boldsymbol{\Omega}_{X,x}$. Перерізи цього пучка (або, що те саме, елементи з $\mathbf{\Omega}_{\mathbb{K}}$) звуться *раціональними диференціалами* на X. Перерізи пучка $\wedge^m \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{K}}$, або, що те саме, елементи простору $\wedge^m \mathbf{\Omega}_{\Bbbk}$, звуться *раціональними диференціальними формами* степеня m. Для неособливого многовиду $\dim_{\mathbb{K}} \mathbf{\Omega}_{\mathbb{K}} = n$. Оскільки неособливі точки утворюють відкриту непорожню підмножину, те саме вірне й для довільного незвідного многовиду. Зокрема, $\boldsymbol{\omega}_{\mathbb{K}} = \wedge^n \mathbf{\Omega}_{\mathbb{K}}$ — одновимірний простір над $\mathbb{K}$.

9. Дивізори

У цьому розділі ми вважаємо, що X — незвідний нормальний многовид (див. [**Др**, Розділ 3.4], особливо Означення 3.4.1 і 3.4.8 та Теореми 3.4.9 і 3.4.10).

Означення 9.1. *Дивізорами* (точніше, *дивізорами Вейля*) на X звуться елементи вільної абелевої групи $\operatorname{Div} X$, базою якої є множина $\mathbf{P}(X)$ незвідних замкнених підмноговидів $P \subset X$ корозмірності 1. Елементи з $\mathbf{P}(X)$ звуться *первинними дивізорами* на X, а група $\operatorname{Div} X$ — *групою дивізорів* многовиду X.

Інакше кажучи, дивізор — це формальна лінійна комбінація $D = \sum_{P \in \mathbf{P}(X)} k_P P$, де $k_P \in \mathbb{Z}$ і майже всі $k_P = 0$. Число k_P зветься *кратністю первинного дивізора* P *в дивізорі* D. Підмноговид $\operatorname{Supp} D = \bigcup_{k_P \neq 0} P$ зветься *носієм дивізора* D.

Позначимо $\mathbb{K} = \Bbbk(X)$ поле раціональних функцій на X, а через $\mathcal{K} = \mathcal{K}_X$ постійний пучок із стеблом $\mathbb{K}$. Якщо многовид X афінний, то $\mathcal{K} = \widetilde{\mathbb{K}}$, тому пучок $\mathcal{K}$ є квазікогеренетним. Він містить $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ як підпучок.

Означення 9.2. Для кожного підмноговиду $P \in \mathbf{P}(X)$ позначимо

$$\mathcal{O}_{X,P} = \{\, f \in \mathbb{K} \mid \operatorname{Dom}(f) \cap P \neq \emptyset \,\}$$

і

$$\mathfrak{m}_P = \{\, f \in \mathcal{O}_{X,P} \mid f(x) = 0 \text{ для всіх } x \in P \,\}.$$

Кільце $\mathcal{O}_{X,P}$ зветься *локальним кільцем підмноговиду* P.

Нагадаємо, що для кожного $P \in \mathbf{P}(X)$ існує відкрита афінна множина $U \subseteq X$ така, що $U \cap P \neq \emptyset$ і ідеал $I(P \cap U)$ в кільці $\Bbbk[U]$ є головним [**Др**, Наслідок 3.4.11 (1)].

Твердження 9.3. (1) *$\mathcal{O}_{X,P}$ — кільце дискретної оцінки (тобто, локальне кільце головних ідеалів) з максимальним ідеалом $\mathfrak{m}_P$.*

(2) *$\mathcal{O}_{X,P} = \Bbbk[U]_{\mathfrak{p}}$, де $U \subseteq X$ — така афінна відкрита підмножина, що $P \cap U \neq \emptyset$, а ідеал $\mathfrak{p} = I(P \cap U)$ є головним: $\mathfrak{p} = t\Bbbk[U]$.*

Твірний t_P ідеалу $\mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}_{X,P}$ зветься *локальним параметром* підмноговиду $P \in \mathbf{P}(X)$. (Він визначений з точністю до множника, обертовного в кільці $\mathcal{O}_{X,P}$).

Доведення. Очевидно, $\mathcal{O}_{X,P}$ — локальне кільце з максимальним ідеалом $\mathfrak{m}_P$ і $\Bbbk[U]_\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_{X,P}$. З іншого боку, якщо $\mathrm{Dom}(f) \cap P \neq \emptyset$, то й $\mathrm{Dom}(f) \cap U \cap P \neq \emptyset$ (бо P незвідний). Виберемо точку $x \in \mathrm{Dom}(f) \cap U \cap P$. Оскільки також $\mathbb{K} = \Bbbk(U)$, фугкцію f можна подати у вигляді g/h, де $g, h \in \Bbbk[U]$ і $h(x) \neq 0$. Тоді $g \notin \mathfrak{p}$, отже, $f \in \Bbbk[U]_\mathfrak{p}$. Оскільки $\mathfrak{p}$ — первинний ідеал висоти 1 в нормальному кільці $\Bbbk[U]$, локальне кільце $\Bbbk[U]_\mathfrak{p}$ є кільцем дискретної оцінки. □

Це твердження дає можливість визначити *дивізори раціональних функцій.*

Наслідок 9.4. (1) *Для кожного $P \in \mathbf{P}$ і кожної ненульової функції $f \in \mathbb{K}$ існує єдине ціле число $v = v_P(f)$ таке, що $f = t_P^v f_0$, де t_P — локальний параметр підмноговиду P, а $f_0 \in \mathcal{O}_{X,P}^\times$.*

Ми покладемо також $v_P(0) = \infty$.

(2) *Для довільних $f, g \in \Bbbk$ і довільного $P \in \mathbf{P}(X)$*
  (a) *$v_P(fg) = v_P(f) + v_P(g)$;*
  (b) *$v_P(f+g) \geqslant \max\{\, v_P(f), v_P(g) \,\}$, причому, якщо $v_P(f) \neq v_P(g)$, тут має місце рівність.*

(3) *$f \in \mathcal{O}_{X,P}$ тоді й лише тоді, коли $P \cap \mathrm{Dom}(f) \neq \emptyset$.*

(4) *Для довільної функції $f \in \mathbb{K}$ множина $\{\, P \in \mathbf{P}(X) \mid v_P(f) \neq 0 \,\}$ скінченна.*

Число $v_P(f)$ зветься *кратністю функції f* на підмноговиді P, а дивізор $(f) = \sum_P v_P(f)P$ зветься *дивізором функції f*. Дивізори функцій звуться також *головними дивізорами.*

Доведення. (1). Якщо $f \in \mathcal{O}_{X,P}$, покладемо $v = \max\{\, k \mid f \in \mathfrak{m}_P^k \,\}$. Якщо $f = g/h$, де $g, h \in \mathcal{O}_{X,P}$, покладемо $v = v_P(g) - v_P(h)$. Єдиність v очевидна (чому?).

(2) залишаємо читачу як нескладну вправу.

(3) має місце за означенням кільця $\mathcal{O}_{X,P}$.

(4). Згідно з (2) і (3), $v_P(f) \neq 0$ можливо лише для тих P, які є компонентами замкненого підмноговиду $X \setminus (\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(1/f))$, а таких компонент є лише скінчена кількість. □

З [**Др**, Наслідок 3.4.11] тепер випливає такий результат.

Наслідок 9.5. (1) *$(f) \geqslant 0$ тоді й лише тоді, коли $f \in \Bbbk[X]$, тобто, функція f регулярна на X.*

(2) *$(f) = 0$ тоді й лише тоді, коли $f \in \Bbbk[X]^\times$, тобто, функція f регулярна на X і $f(x) \neq 0$ для всіх $x \in X$.*

За Наслідком 9.4(2), головні дивізори утворюють підгрупу $\mathrm{Div}_\mathrm{г} X$ у групі дивізорів, причому, за Наслідком 9.5, $\mathrm{Div}_\mathrm{г} X \simeq \mathbb{K}^\times/\Bbbk[X]^\times$. Нагадаємо, що для повних (наприклад, проективних) многовидів $\Bbbk[X] = \Bbbk$, отже, $\mathrm{Div}_\mathrm{г} X \simeq \mathbb{K}^\times/\Bbbk^\times$. Факторгрупа $\mathrm{Cl}\, X = \mathrm{Div}\, X/\mathrm{Div}_\mathrm{г} X$ зветься *групою класів дивізорів* многовиду X. Два дивізори D і D'

звуться *еквівалентними*, якщо вони мають однакові образи в групі $\operatorname{Cl} X$, тобто, їхня різниця $D - D'$ є головним дивізором. У цьому разі пишуть $D \sim D'$.

Приклад 9.6. (1) Якщо $X = \mathbb{A}^n$, кожен незвідний підмноговид P задається одним рівнянням $f_P = 0$, де $f_P \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ — незвідний многочлен. Очевидно, $(f_P) = P$. Тому кожен дивізор $D = \sum_P k_P P$ є головним: $D = (f)$, де $f = \prod_P f_P^{k_P}$. Отже, $\operatorname{Cl} \mathbb{A}^n = 0$.

(2) Якщо $X = \mathbb{P}^n$, кожен незвідний многовид P задається одним рівнянням $f_P = 0$, де $f_P \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ — незвідний однорідний многочлен. Позначимо $\deg P = \deg f_P$ і $\deg \sum_P k_P P = \sum_P k_P \deg P$. Якщо $f = F/G \in \Bbbk(\mathbb{P}^n)$, де $\deg F = \deg G$, причому $F = \prod_i f_i^{k_i}$, $G = \prod_j g_j^{m_j}$, де f_i, g_j — незвідні, попарно різні однорідні многочлени, то $\sum_i \deg f_i = \sum_j \deg g_j$, а $(f) = \sum_i P_i - \sum_j Q_j$, де P_i заданий рівнянням $f_i = 0$, а Q_j — рівнянням $g_j = 0$. Зокрема, $\deg(f) = 0$. Навпаки, якщо $\deg D = 0$ і $D = \sum_P k_P P$, то $D = (f)$, де $f = \prod_P f_P^{k_P}$. Тому $\operatorname{Cl} \mathbb{P}^n \simeq \mathbb{Z}$; цей ізоморфізм індукований відображенням $D \mapsto \deg D$.

Вправа 9.7. Доведіть, що $\operatorname{Cl}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Узагальніть цей результат на випадок кількох добутків.

Означення 9.8. (1) Нехай $U \subseteq X$ — непорожня відкрита підмножина. Для кожного дивізора $D = \sum_P k_P P$ позначимо $D_U = \sum_{P \cap U \neq \emptyset} k_P (P \cap U)$. Оскільки $P \cap U \in \mathbf{P}(U)$, якщо $P \cap U \neq \emptyset$, то $D_U \in \operatorname{Div} U$.

(2) Дивізор $D = \sum_P k_P P \in \operatorname{Div} X$ зветься *локально головним*, або *дивізором Картьє*, якщо існує відкрите покриття $X = \bigcup_i U_i$ таке, що для кожного i дивізор D_{U_i} є головним.

Набір (U_i, f_i) в цьому випадку зветься *тривіалізацією дивізора* D.

Очевидно, локально головні дивізори утворюють підгрупу $\operatorname{Div}_C X$ у групі дивізорів $\subseteq \operatorname{Div} X$, яка містить підгрупу головних дивізорів. Факторгрупа $\operatorname{Pic} X = \operatorname{Div}_C X / \operatorname{Div}_{\text{г}} X$ зветься *групою Пікара* многовиду X. Вона є підгрупою в $\operatorname{Cl} X$.

Зауважимо, що, коли $P \cap U \neq \emptyset$, $\mathcal{O}_{U, P \cap U} = \mathcal{O}_{X,P}$. Отже, дивізор D_{U_i} є головним тоді й лише тоді, коли знайдеться така функція $f_i \in \mathbb{K}$, що $v_P(f_i) = k_P$ для кожного P такого, що $P \cap U \neq \emptyset$. Звідси, зокрема, випливає, що функція $f_i f_j^{-1}$ є регулярною й обертовною на $U_i \cap U_j$, тобто, надежить $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^\times)$. Отже, тривіалізація (U_i, f_i) визначає глобальний переріз факторпучка $\mathcal{D}_X = \mathcal{K}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times$. Якщо задано іншу тривіалізацію (V_j, g_j) дивізора D, то $f_i g_j^{-1} \in \Gamma(U_i \cap V_j, \mathcal{O}_X^\times)$, тому цей набір визначає той самий переріз пучка $\mathcal{D}_X$.

Навпаки, нехай $U \subseteq X$ непорожня відкрита множина. Якщо $P \in \mathbf{P}(U)$, $\bar{P}$ — замикання P в X, то $\bar{P} \in \operatorname{Div} X$. Отже, для кожного дивізора $D = \sum_{P \in \mathbf{P}(U)} k_P P \in \operatorname{Div} U$ визначений дивізор $\bar{D} = \sum_P k_P \bar{P} \in \operatorname{Div} X$. Розглянемо довільний переріз $s \in \Gamma(X, \mathcal{D}_X)$. Позначимо s_x його образ у $\mathcal{D}_x = \mathbb{K}^\times / \mathcal{O}_{X,x}^\times$. Виберемо прообраз f_x класу суміжності s_x в групі $\mathbb{K}^\times$. Тоді існує відкрита множина $U_x \ni x$, для всіх точок y якої клас суміжності f_x в $\mathcal{D}_y$ збігається з s_y. В такий спосіб ми одержимо відкрите покриття $X = \bigcup_i U_i$ і набір функцій $f_i \in \mathbb{K}$ такий, що s_x збігається з класом суміжності f_i для всіх $x \in U_i$. Кожна функція f_i визначає дивізор $(f_i) \in \operatorname{Div} U_i$, а тому й дивізор $D_i = \overline{(f_i)} \in \operatorname{Div} X$. При цьому, очевидно, $(D_i)_{U_i \cap U_j} = (D_j)_{U_i \cap U_j}$, тобто, якщо $D_i = \sum_P k_P P$, а $D_j = \sum_P m_P P$, то $k_P = m_P$ для всіх таких P, що $P \cap U_i \neq \emptyset$ і $P \cap U_j \neq \emptyset$. Отже, однозначно визначений дивізор (s) такий, що $(s)_{U_i} = (f_i)$ для всіх i.

Разом ці міркування доводять перший пункт наступної теореми.

Теорема 9.9. (1) $\operatorname{Div}_C X \simeq \Gamma(X, \mathcal{D}_X)$.

(2) $\operatorname{Pic} X \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$.

(3) *Якщо всі локальні кільця* $\mathcal{O}_{X,x}$ *факторіальні, то* $\operatorname{Div} X = \operatorname{Div}_C X$ *і* $\operatorname{Cl} X = \operatorname{Pic} X$.

Такі многовиди звуться *факторіальними.* Зокрема, кожен неособливий многовид є факторіальним [**Ш**, Гл. II, §3, Теорема 2].

Доведення. Як ми зауважили, (1) вже доведено.

(2). Розглянемо точну послідовність $0 \to \mathcal{O}_X^\times \to \mathcal{K}_X^\times \to \mathcal{D}_X \to 0$. Зауважимо, що, оскільки пучок $\mathcal{K}_X^\times$ постійний, а многовид X незвідний, цей пучок є в'ялим і $H^1(X, \mathcal{K}_X^\times) = 0$. Отже, точна послідовність когомологій дає точну послідовність

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times) \to \mathbb{K}^\times \to \Gamma(X, \mathcal{D}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \to 0.$$

Очевидно, образ $\mathbb{K}^\times$ в групі $\operatorname{Div}_C X = \Gamma(X, \mathcal{D}_X)$ — це підгрупа головних дивізорів, що й доводить твердження.

(3). Достатньо довести, що $\mathbf{P}(X) \subseteq \operatorname{Div}_C X$. Оскільки твердження локальне, многовид X можна вважати афінним. Позначимо $\mathbf{A} = \Bbbk[X]$. Нехай $P \in \mathbf{P}(X)$, $I = I(P) \subset \mathbf{A}$, $x \in X$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x \subset \mathbf{A}$ і $I_x = I\mathbf{A}_\mathfrak{m}$. Тоді I — первинний ідеал висоти 1, а тому таким є й I_x. Оскільки кільце $\mathbf{A}_\mathfrak{m} = \mathcal{O}_{X,x}$ є факторіальним, ідеал I_x головний: $I_x = t\mathbf{A}_\mathfrak{m}$. Можна вважати, що $t \in \mathbf{A}$. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_m$ — твірні ідеалу I, $a_i = tb_i/c_i$, де $b_i, c_i \in \mathbf{A}$, $c_i \notin \mathfrak{m}$, $c = \prod_i c_i$. Тоді $I\mathbf{A}[c^{-1}] = t\mathbf{A}[c^{-1}]$, отже, якщо $U = D(c)$, то $I(P \cap U) = t\Bbbk[U]$, тобто, $P \cap U \in \operatorname{Div}_\text{г} U$ і P є локально головним. $\square$

Група дивізорів *упорядкована*: вважають, що $D = \sum_P k_P P \geqslant D' = \sum_P k'_P P$, якщо $k_P \geqslant k'_P$ для всіх P. Якщо $D \geqslant 0$, дивізор

D зветься *ефективним*. Більш того, ця група *решіточно впорядкована*, тобто, для кожного скінченного набору $D_1, D_2, \dots, D_k$ існують точна верхня й точна нижня грані: якщо $D_i = \sum_P k_{iP} P$, то $\sup(D_1, D_2, \dots, D_k) = \sum_P m_P P$, де $m_P = \max\{ k_{iP} \mid 1 \leqslant i \leqslant k \}$, а $\inf(D_1, D_2, \dots, D_k) = \sum_P l_P P$, де $l_P = \min\{ k_{iP} \mid 1 \leqslant i \leqslant k \}$. Точна верхня грань частіше зветься *найменшим спільним кратним*, а точна нижня — *найбільшим спільним дільником* цих дивізорів і позначаються, відповідно, $\mathsf{нск}\,(D_1, D_2, \dots, D_k)$ і $\mathsf{нсд}\,(D_1, D_2, \dots, D_k)$.

З кожним дивізором $D \in \operatorname{Div} X$ пов'язаний підпучок $\mathcal{O}_X$-модулів $\mathcal{O}_X(D) \subset \mathcal{K}_X$, перерізи якого на відкритій підмножині U — це такі функції $f \in \mathbb{K}$, що $((f) + D)_U \geqslant 0$. Зокрема, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) = \{ f \in \mathbb{K} \mid (f) + D \geqslant 0 \}$. Цей підпростір позначають також $L(D)$. Якщо X — проективний многовид, простір $L(D)$ є скінченновимірним (Теорема 4.2.Б). Його розмірність позначається $l(D)$ і зветься *розмірністю дивізора D*.

Вправа 9.10. (1) Доведіть, що коли $D \in \operatorname{Div}_C X$, то $\mathcal{O}_X(D)$ — локально вільний пучок рангу 1.

(2) Нехай $\mathcal{L}$ — локально вільний пучок рангу 1. Доведіть, що $\mathcal{K}_X \otimes_X \mathcal{L} \simeq \mathcal{K}_X$, а відображення $\mathcal{L} \to \mathcal{K}_X \otimes_X \mathcal{L}$, яке переводить кожен локальний переріз s у $1 \otimes s$ є зануренням.

Натяк: Оскільки пучок $\mathcal{K}_X$ постійний, це твердженя достатньо перевірити локально, а для пучка $\mathcal{O}_X$ на афінному многовиді воно очевидне.ё

(3) Доведіть, що для кожного локально вільного пучка рангу 1 існує локально вільний дивізор D такий, що $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X(D)$.

Натяк: Згідно з (2), можна вважати, що $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}_X$. Якщо $U \subseteq X$ — відкрита афінна підмножина, на якій $\mathcal{L}|_U \simeq \mathcal{O}_U$, то $\mathcal{L}|_U = f_U \mathcal{O}_U$ для деякої функції $f_U \in \mathbf{K}^\times$. Перевірте, що на перетині $U \cap V$, де V — інша афінна відкрита підмножина, на якій $\mathcal{L} = f_V \mathcal{O}_V$, то $(f_U)_{U \cap V} = (f_V)_{U \cap V}$. Тому існує дивізор $D \in \operatorname{Div} X$, для якого $D_U = (f_U)_U$ для кожного U з указаними властивостями.

(4) Доведіть, що $\mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{O}_X(D')$, де $D, D' \in \operatorname{Div}_C X$, тоді й лише тоді, коли $D \sim D'$.

(5) Перевірте, що $\mathcal{O}_X(D) \otimes_X \mathcal{O}_X(D') \simeq \mathcal{O}_X(D + D')$. Зокрема, $\mathcal{O}_X(D) \otimes_X \mathcal{O}_X(D') \simeq \mathcal{O}_X$.

(6) Доведіть, що $\mathcal{H}om_X(\mathcal{O}_X(D), \mathcal{O}_X(D')) \simeq \mathcal{O}_X(D' - D)$; зокрема, $\mathcal{O}_X(D)^\vee \simeq \mathcal{O}_X(-D)$.

Отже, класи ізоморфізму локально вільних пучків рангу 1 утворюють групу відносно операції тензорного добутку, і ця група ізоморфна групі Пікара $\operatorname{Pic} X$. Беручи до уваги цю властивість, локально вільні пучки рангу 1 звуть *обертовними пучками*.

Якщо X — неособливий многовид, можна також визначити *дивізор раціональної диференціальної форми* $w \in \boldsymbol{\omega}_{\mathbb{K}} = \wedge^n \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{K}}$, де

$n = \dim X$, а $\mathbb{K} = \Bbbk(X)$. Дійсно, $\boldsymbol{\omega}_X$ — локально вільний пучок рангу 1. Тому існує покриття $X = \bigcup_i U_i$, де U_i — афінні відкриті підмножини, а $\boldsymbol{\omega}_X(U)$ є вільним $\Bbbk[U_i]$-модулем з одним базисним елементом ω_i. Зокрема, $w = f_i\omega_i$ для деякої функції $f_i \in \mathbb{K}$. На перетині $U_i \cap U_j$ $\omega_j = g_{ij}\omega_i$, де $g_{ij} \in \Bbbk[U_i \cap U_j]^\times$, звідки $f_i = g_{ij}f_j$. Отже, набір функцій $\{f_i\}$ визначає дивізор, який зветься *дивізором диференціальної форми* w і позначається (w). Він не залежить від вибору покриття та базисних елементів ω_i (поясніть, чому). Крім того, якщо $w' \in \boldsymbol{\omega}_{\mathbb{K}}$ — інша диференціальна форма, то $w' = fw$ для деякої раціональної функції f, звідки $(w') = (f) + (w)$. Отже, всі дивізори диференціальних форм утворюють один клас дивізорів. Він зветься *канонічним класом* і позначається K_X або K, якщо X фіксований. Очевидно, відповідний обертовний пучок — це дуалізуючий пучок $\boldsymbol{\Omega}_X$.

10. Дивізори й раціональні відображення

У цьому розділі ми залишаємо всі припущення й позначення попереднього. Зокрема, X — незвідний нормальний многовид і $\mathbb{K} = \mathbb{K}(X)$. Ми встановимо зв'язок між дивізорами та раціональними відображеннями $X \to \mathbb{P}^n$. Кожне таке відображення задається набором раціональних функцій $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ з $\mathbb{K}$, які не всі рівні 0, і ми писатимемо $\phi = (f_0 : f_1 : \cdots : f_n)$. Зауважимо, що будь який набір такого вигляду визначає раціональне відображення; воно визначене принаймні на множині $\big(\bigcap_i \mathrm{Dom}(f_i)\big) \setminus \big(\bigcup_i \mathrm{Dom}(f_i^{-1})\big)$, де об'єднання й перетин беруться по тих індексах i, для яких $f_i \neq 0$. Два набори задають те саме відображення тоді й лише тоді, коли вони відрізняються на множник $g \in \mathbb{K}^\times$. Відображення ϕ визначене в точці x, якщо існує ненульова функція $g \in \mathbf{K}$ така, що $x \in \mathrm{Dom}(gf_i)$ для всіх i й існує такий номер i, що $(gf_i)(x) \neq 0$. Якщо хоча б одна з функцій f_i є нульовою, то ϕ можна розглядати як відорбраження $X \to \mathbb{P}^{n-1}$. Тому надалі ми вважатимемо, що всі функції f_i ненульові.

Позначимо $D = -\,\mathsf{нсд}((f_0), (f_1), \dots, (f_n))$ і $D_i = (f_i) + D$. Тоді всі $f_i \in L(D)$ і $D_i \geqslant 0$. Крім того, дивізори $D_0, D_1, \dots, D_n$ не мають спільних компонент, тобто, $\mathsf{нсд}\,(D_0, D_1, \dots, D_n) = 0$. Заміна набору $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ на набір $(gf_0, gf_1, \dots, gf_n)$, який визначає те саме відображення, переводить дивізор D в еквівалентний дивізор $D - (g)$ і не впливає на дивізори D_i.

Твердження 10.1. *Якщо многовид X є факторіальним, то, у наведених вище позначеннях, $\mathrm{Dom}\,\phi = X \setminus Z$, де $Z = \bigcap_{i=0}^n \mathrm{Supp}\, D_i$. Зокрема, відображення ϕ є регулярним тоді й лише тоді, коли $\bigcap_{i=0}^n \mathrm{Supp}\, D_i = \emptyset$.*

Доведення. Це твердження, очевидно, є локальним. Як у доведенні Теореми 9.9 (3), для кожної точки $x \in X$ можна вибрати афінний окіл U такий, що для кожного первинного дивізора P, який входить до якогось з дивізорів (f_i) з ненульовим коефіцієнтом, $I(P \cap U) = t_P\mathbf{A}$ для деякого t_P, де $\mathbf{A} = Mk[U]$. Позначимо $v_{iP} = v_P(f_i)$, $m_P = \min\{\, v_{iP} \mid 0 \leqslant i \leqslant n \,\}$. Тоді $D = -\sum_P m_P P$, а $D_i = \sum_P (v_{iP} - m_P)P$. За Наслідком 9.5, $f_i = a_i \prod_P t_P^{v_{iP}}$, де $v_{iP} = v_P(f_i)$, а a_i — обертовний елемент з $\mathbf{A}$. Нехай $g \in \mathbb{K}^\times$ — деяка функція, $g = a\prod_P t_P^{k_P}$, де $a \in \mathbf{A}^\times$. Оскільки $gf_i = aa_i \prod_P t_P^{v_{iP}+k_P}$, функція gf_i визначена в точці x тоді й лише тоді, коли $v_{iP} + k_P \geqslant 0$ для кожного P такого, що $x \in P$. При цьому $(gf_i)(x) \neq 0$ тоді й лише тоді, коли $v_{iP}+k_P = 0$ для кожного P такого, що $x \in P$. Отже, $x \in \mathrm{Dom}(\phi)$ тоді й лише тоді, коли існують такі цілі числа k_P що

(i) $k_P + v_{iP} \geqslant 0$ для всіх номерів i і всіх $P \ni x$;
(ii) $k_P + v_{jP} \geqslant 0$ для деякого номера j і всіх $P \ni x$.

Тоді, очевидно, $v_{jP} = m_P$, отже, $k_P = -m_P$ і $v_{jP} - m_P = 0$ для всіх $P \ni x$. Це й значить, що $x \notin \operatorname{Supp} D_j$. $\square$

Зауважимо ще, що, оскільки $\text{нсд}\,(D_0, D_1, \dots, D_n) = 0$, перетин $Z = \bigcap_{i=0}^n \operatorname{Supp} D_i$ не містить жодного первинного дивізора. Тому $\operatorname{codim} Z \geqslant 2$.

Наслідок 10.2. *Якщо $\phi : X \to Y$ раціональне відображення факторіального (наприклад, неособливого) многовиду X у проективний многовид Y, $Z = X \setminus \mathrm{Dom}(\phi)$, то $\operatorname{codim} Z \geqslant 2$.*

Якщо $f_i' = \sum_{j=0}^n \lambda_{ij} f_j$, де $(\lambda_{ij}) \in GL(n+1, \Bbbk)$ — обертовна матриця, то, очевидно, раціональні відображення, задані наборами $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ і $(f_0', f_1', \dots, f_n')$ визначені в точці x одночасно. З Наслідку 9.4 (2) випливає, що $D = -\text{нсд}((f_0), (f_1), \dots, (f_n)) \geqslant D' = -\text{нсд}((f_0'), (f_1'), \dots, (f_n'))$. Оскільки функції f_i також є лінійними комбінаціями функцій f_j', так само $D' \geqslant D$, тобто, $D = D'$. Отже, з точністю до заміни координат у $\mathbb{P}^n$, раціональні відображення $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ визначається $(n+1)$-вимірним підпростором $M \subseteq L(D)$ таким, що $\text{нсд}\,\{\, (f) \mid f \in M \,\} = D$. При цьому відображення ϕ є регулярним тоді й лише тоді, коли $\bigcap_{f \in M} \operatorname{Supp}((f) + D) = \emptyset$. (Очевидно, в обох випадках достатньо брати функції f з деякої бази простору M). Зауважимо, що, коли дивізори D і D' еквівалентні: $D' = D + (g)$, то $L(D') = gL(D)$. Тому раціональні відображення, які відповідають підпросторам у $L(D')$ та в $L(D)$ збігаються.

Припустимо, що простір $L(D)$ скінченновимірний (наприклад, X — проективний многовид). Тоді кожну базу $f_0, f_1, \dots, f_n$ підпростору $M \subseteq L(D)$ можна доповнити до бази $f_0, f_1, \dots, f_N$ усього простору $L(D)$. Тоді відображення $\phi : X \to \mathbb{P}^n$, задане набором $(f_0, f_1, \dots, f_n)$, є композицією відображення $\Phi : X \to \mathbb{P}^N$, заданого набором $f_0, f_1, \dots, f_N$ і проекції $\mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^n$. Якщо відображення ϕ регулярне, таким є й відображення Φ.

Приклад 10.3. Нехай $X = \mathbb{P}^n$. З точністю до еквівалентності, дивізор $D \in \operatorname{Div} \mathbb{P}^n$ визначається своїм степенем (див. Приклад 9.6 (2)). Дивізор P степеня d еквівалентний дивізору dH, де $H = V(x_0)$ — гіперплощина. З того ж Прикладу 9.6 (2) випливає, що $L(dH) = 0$ при $d < 0$ і складається з функцій $f = F/x_0^d$, де F — однорідний многочлен степеня d, при $d \geqslant 0$. Якщо $d = 0$, це лише константи, і відповідне раціональне відображення — стале відображення в точку. Якщо $d > 0$, базу $L(dH)$ утворюють функції $w_{k_0k_1\dots k_n}/x_0^d$, де $w_{k_0k_1\dots k_n} = x_0^{k_0}x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}$ і $\sum_{i=0}^n k_n = d$. Відповідне відображення $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$, де $N = \binom{d+n}{n} - 1$, — це *відображення Веронезе* (або *d-кратне занурення*): $(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (w_{k_0k_1\dots k_n})$, яке задає замкнене занурення $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ (див. [**Др**, Вправа 2.3.11 (б)], або [**Ш**, Гл. III, § 4, Пример 2], або [**Х**, Гл. I, Упражнение 2.12]). Отже, довільне раціональне відображення $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$, яке не є постійним, є композицією відображення Веронезе й проекції на підпростір.

Вправа 10.4. Користуючись результатами Вправи 9.7, знайдіть всі раціональні відображення $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^r$. Переконайтеся, що результат можна сформулювати в такий спосіб:

Будь-яке раціональне відображення $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^r$ є композицією:

$$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \xrightarrow{\rho_1 \times \rho_2} \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^M \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}^R \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^r,$$

де $\rho_1 : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ і $\rho_2 : \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^M$ — відображення Веронезе (постійне відображення в точку, якщо $N = 0$ чи $M = 0$), $\sigma : \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^M \to \mathbb{P}^R$, де $R = (N+1)(M+1) - 1$, — занурення Сегре[4]*, а $\pi : \mathbb{P}^R \to \mathbb{P}^r$ — проекція на підпростір.*

Означення 10.5. (1) Локально вільний дивізор $D \in \operatorname{Div} X$ зветься *дуже рясним*[5], якщо деяка (а тоді будь-яка) база простору $L(D)$ визначає замкнене занурення $X \to \mathbb{P}^n$. Дивізор D зветься *рясним*, якщо для деякого $m > 0$ дивізор mD є дуже рясним.

(2) Обертовний пучок (тобто, локально вільний пучок рангу 1) зветься *рясним* або *дуже рясним*, якщо таким є відповідний локально вільний дивізор (див. Вправу 9.10). Зокрема, пучок $\mathcal{L}$ є рясним тоді й лише тоді, коли для деякого $m > 0$ пучок $\mathcal{L}^m$ є дуже рясним.

Очевидно, рясні дивізори й обертовні пучки на многовиді X існують тоді й лише тоді, коли цей многовид є проективним. Напркслад, дивізор $D \in \operatorname{Div} \mathbb{P}^n$ є рясним тоді й лише тоді, коли $\deg D > 0$; у цьому випадку він є навіть дуже рясним. Еквівалентні дивізори є рясними або дуже рясними одночасно.

[4]див. [**Др**, Твердження 2.3.9], або [**Ш**, Гл. I, § 5, п. 1], або [**Х**, Гл. I, Упражнение 2.14]).

[5]англійською «very ample», російською «очень обильный».

Вправа 10.6. (1) Доведіть, що коли дивізор D є рясним (дуже рясним), то таким є й довільний дивізор $D' \geqslant D$.

(2) Доведіть, що коли $l(D') > 0$, а дивізор D є рясним (дуже рясним), то таким є й дивізор $D + D'$.

(3) Які дивізори на $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ є рясними (дуже рясними)?

Наступна вправа показує, як визначити *прообраз дивізора* при регулярному відображенні.

Вправа 10.7. Нехай $\phi : Y \to X$ — регулярне відображення незвідних нормальних многовидів, $D \in \operatorname{Div}_C Y$ — такий локально головний дивізор, що $\operatorname{Im} \phi \not\subseteq \operatorname{Supp} D$.

(1) Покажіть, що коли $U \subseteq X$ — відкрита підмножина, то $\operatorname{Im} \phi \cap U \not\subseteq \operatorname{Supp} D_U$.

Натяк: Скористайтеся тим, що підмножина $\operatorname{Im} \phi$ також незвідна.

(2) Виберемо тривіалізацію (U_i, f_i) дивізора D і позначимо $I_\phi = \{\, i \mid \operatorname{Im} \phi \cap U_i \neq \emptyset \,\}$. Покажіть, що для $i \in I_\phi$ композиція $\phi^*(f_i) = f_i \phi$ є ненульовою раціональню функцією на Y і набір $(\phi^{-1}(U_i), \phi^*(f_i))$, де i пробігає I_ϕ визначає локально головний дивізор $\phi^*(D)$ на Y.

(3) Доведіть, що $\phi^*(D)$ не залежить від вибору тривіалізації (U_i, f_i). Цей дивізор зветься *прообразом дивізора* D при відображенні ϕ.

(4) Доведіть, що коли $D \sim D'$ і також $\operatorname{Im} \phi \not\subseteq \operatorname{Supp} D'$, то $\phi^*(D) \sim \phi^*(D')$.

Виявляється, обмеження попередньої вправи не є надто обтяжливими. Насправді, переходячи до еквівалентного дивізора, ми завжди можемо їх позбутися.

Теорема 10.8. *Для кожного дивізора D на факторіальному многовиді X і довільних точок $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ існує еквівалентний дивізор $D' \sim D$ такий, що $x_i \notin \operatorname{Supp} D'$ для всіх i $(1 \leqslant i \leqslant m)$.*

Доведення. Очевидно, достатньо довести цю теорему для кожного *первинного дивізора* P. Спочатку припустимо, що X — афінний многовид і позначимо $\mathbf{A} = \Bbbk[X]$. Застосовуючи індукцію за m, можна вважати, що $x_1, x_2, \dots, x_{m-1} \notin P$. Позначимо $Z = P \cup \{\, x_1, x_2, \dots, x_{m-1} \,\}$, $Z_i = Z \setminus \{x_i\}$ $(1 \leqslant i < m)$. Нехай t — локальне рівняння дивізора P в околі точки x_m. Можна вважати, що $t \in \mathbf{A}$. Оскільки $x_i \notin Z_i$ $(1 \leqslant i < m)$, існує функція $g_i \in \mathbf{A}$ така, що $g_i|_{Z_i} = 0$ і $g_i(x_i) \neq 0$. Покладемо $f = t - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i g_i^2$, де $\lambda_i \neq t(x_i)/g_i(x_i)^2$. Тоді $f(x_i) \neq 0$ для $1 \leqslant i < m$. Оскільки $g_i|_P = 0$, f також є локальним рівнянням дивізора P в околі точки x_m, отже, $P - (f) = D'$, де $x_m \notin \operatorname{Supp} D'$ і кратність P в дивізорі D' дорівнює 0. Оскільки $f(x_i) \neq 0$, також $x_i \notin \operatorname{Supp}(f_i)$, зокрема, $x_i \notin \operatorname{Supp} D'$ при $lei < m$. Тому дивізор $D' \sim P$ і є шуканим.

Якщо многовид X є квазіпроективним, знайдеться відкрита афінна підмножина $U \subseteq X$,яка містить всі точки $x_1, x_2, \dots, x_m$ (поясніть, чому). Оскільки твердження теореми є локальним, можна замінити X на U і скористатися вже доведеним результатом.

У загальному випадку доведення використовує більше відомостей з комутативної алгебри. Оскільки нас цікавитимуть, перш за все, квазіпроективні (навіть проективні) многовиди, ми не будемо його наводити. □

Як наслідок, ми можемо побудувати, для кожного регулярного відображення факторіальних многовидів $\phi : Y \to X$, індуковане відображення груп Пікара $\phi^* : \operatorname{Pic} X \to \operatorname{Pic} Y$. Дійсно, для кожного дивізора $D \in \operatorname{Div} X$ знайдемо еквівалентний йому дивізор D' такий, що $\operatorname{Im} \phi \nsubseteq \operatorname{Supp} D$. Тоді визначений прообраз $\phi^*(D') \in \operatorname{Div} Y$ (див. Вправу 10.7), причому заміна D' іншим еквівалентним дивізором веде до заміни $\phi^*(D')$ теж еквівалентним дивізором. Отже, ця конструкція дає коректно визначене відображення $\phi^* : \operatorname{Pic} X \to \operatorname{Pic} Y$.

11. Теорема Рімана–Роха на кривих

У цьому розділі ми вважаємо, що X — неособлива (незвідна) проективна крива. Тоді дивізор на X є лінійною комбінацією точок: $D = \sum_{p \in X} k_p p$. *Степенем* цього дивізора зветься число $\deg D = \sum_p k_p$. Позначимо $h^i(D) = h^i(\mathcal{O}_X(D))$ та $\chi(D) = \chi(\mathcal{O}_X(D)) = h^0(D) - h^1(D)$ (Означення 4.4). За двоїстістю Серра (Наслідок 7.10), $h^i(D) = h^{n-i}(K - D)$, а $\chi(D) = -\chi(K - D)$. У позначеннях Розділу 9, $h^0(D) = l(D)$, тому $h^1(D) = l(K - D)$.

Означення 11.1. Число $g(X) = h^1(\mathcal{O}_X) = h^0(\boldsymbol{\omega}_X)$ зветься *родом* кривої X.

Оскільки $h^0(\mathcal{O}_X) = 1$, то $\chi(X) = 1 - g$.

Підрахуємо рід плоскої кривої.

Твердження 11.2. *Нехай $X \subset \mathbb{P}^2$ — крива, задана однорідним рівнянням F степеня d. Тоді $\chi(X) = 1 - (d-1)(d-2)/2$. Зокрема, якщо X неособлива, то $g(X) = (d-1)(d-2)/2$.*

Доведення. Множеня на F задає точну послідовність градуйованих модулів на алгеброю $\mathbf{A} = \Bbbk[x_0, x_1, x_2]$

$$0 \to \mathbf{A}(-d) \to \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\langle F \rangle \to 0,$$

або, що те саме, точну послідовність когерентних пучків

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \to \mathcal{O}_X \to 0.$$

Звідси, за Вправою 4.5 та Теоремою 4.1,

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) - \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d)) = 1 - (d-1)(d-2)/2.$$

Отже, якщо X неособлива, $g(X) = (d-1)(d-2)/2$. □

Зауваження 11.3. Для довільної проективної кривої число $p_a(X) = h^1(\mathcal{O}_X)$ зветься *арифметичним родом* кривої X. Отже, для плоскої кривої степеня d, $p_a(X) = (d-1)(d-2)/2$. Рід *нормалізації* кривої X (див. [**Др**, Розділ 3.7]) зветься *геометричним родом* кривої X і позначається $g(X)$.

Вправа 11.4. Для кожної точки x проективної кривої X позначимо $\delta_x = \dim_{\Bbbk}(\widetilde{\mathcal{O}}_{X,x}/\mathcal{O}_{X,x})$, де $\widetilde{\mathcal{O}}_{X,x}$ — нормалізація кільця $\mathcal{O}_{X,x}$. Покладемо $\delta(X) = \sum_{x\in X}\delta_x$ (ця сума скінченна, оскільки майже всі точки кривої неособливі). Доведіть, що

$$g(X) = p_a(X) - \delta(X).$$

Натяк: Якщо $\nu : \widetilde{X} \to X$ — нормалізація кривої X, то $\widetilde{\mathcal{O}}_{X,x} \simeq \sum_{\nu(y)=x}\mathcal{O}_{\widetilde{X},y}$. Розгляньте $\widetilde{\mathcal{O}}_X$ як когерентний пучок на X, який містить $\mathcal{O}_X$ як підпучок, і позначте $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{O}}_X/\mathcal{O}_X$. Тоді $h^i(X, \widetilde{\mathcal{O}}_X) = h^i(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}})$, а $h^0(\mathcal{F}) = \delta(X)$. Тепер скористайтеся Вправою 4.5.

Основним результатом теорії проективних кривих є так звана Теорема Рімана–Роха.

Теорема 11.5. *Для довільного дивізора D на неособливій проективній кривій роду g*

$$\text{(РР)} \qquad \chi(D) = l(D) - l(K-D) = \deg D + 1 - g.$$

Доведення. Якщо $D = 0$, тобто, $\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}(X)$, це випливає з означення роду і того, що $h^0(\mathcal{O}_X) = 1$. Доведемо, що для дивізорів $D = \sum_p k_p p$ та $D + q$, де q — довільна точка X, формула (РР) виконується одночасно. Оскільки кожен дивізор можна одержати з нульового додаючи й віднімаючи точки, звідси випливає Теорема Рімана–Роха.

Оскільки $\deg(D+q) = \deg D + 1$, треба перевірити, що й $\chi(D+q) = \chi(D)+1$. Для цього зауважимо, що $\mathcal{O}_X(D) \subseteq \mathcal{O}_X(D+p)$. Позначимо $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(D+p)/\mathcal{O}_X(D)$. Тоді $\mathcal{F}_p = 0$ для кожної точки $p \neq q$, а $\mathcal{F}_q \simeq \Bbbk$. У останньому випадку базисним елементом є клас функції $t_q^{k_q+1}$, де t_q — локальний параметр в точці q (перевірте це). Звідси випливає, що $h^0(\mathcal{F}) = 1$ і $h^1(\mathcal{F}) = 0$, тобто, $\chi(\mathcal{F}) = 1$. Залишилося послатися на Вправу 4.5. □

Наслідок 11.6.
1. *Якщо $D \sim D'$, то $\deg D = \deg D'$, зокрема, $\deg(f) = 0$ для довільної раціональної функції f.*
2. $\deg K = 2g - 2$.
3. *Якщо $l(D) > 0$, то $\deg D \geqslant 0$. Якщо $\deg D = 0$, а $l(D) > 0$, то дивізор D є головним.*
4. *Якщо $\deg D > 2g-2$, то $l(D) = \deg D + 1 - g$. Зокрема, якщо $g > 0$, то $l(D) > 0$.*

Доведення. (1) випливає з того, що еквівалентним дивізорам відповідають ізоморфні пучки.

(2) випливає з того, що $\chi(K) = -\chi(0) = g - 1$.

(3). Якщо $f \in L(D)$ — ненульова функція, то $(f) + D \geqslant 0$, тобто, $D \geqslant -(f)$ і $\deg D \geqslant -\deg(f) = 0$. Якщо $\deg D = 0 = \deg(f)$, то з нерівності $D \geqslant -(f)$ випливає, що $D = -(f) = (f^{-1})$.

(4). За даної умови $\deg(K - D) < 0$, отже, $l(K - D) = 0$. □

З Теореми Рімана–Роха можна одержати зручну достатню ознаку того, що дивізор є дуже рясним. Спочатку встановимо один загальний факт з комутативної алгебри.

Лема 11.7. *Нехай* $\mathbf{A}$ *та* $\mathbf{B}$ *— локальні нетерові області однієї Круллевої розмірності,* $\mathfrak{m}$ *та* $\mathfrak{n}$*, відповідно, їхні максимальні ідеали,* $\phi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *— деякий гомоморфізм. Припустимо, що* $\mathbf{B}$ *є скінченнопородженим* $\mathbf{A}$*-модулем,* $\phi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$*, причому* ϕ *індукує ізоморфізм* $\mathbf{A}/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}/gN$ *та епіморфізм* $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$*. Тоді* ϕ *— ізоморфізм.*

Доведення. Позначимо $I = \phi(\mathfrak{m})$. Це $\mathbf{A}$-підмодуль в $\mathfrak{n}$, причому $I + \mathfrak{n}^2 = \mathfrak{n}$. Звідси $\mathbf{B}I + \mathfrak{n}^2 = \mathfrak{n}$, і, за лемою Накаями, $\mathbf{B}I = \mathfrak{n}$. Отже, $I\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^2$, $I + I\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$ і, знову за лемою Накаями, $I = \mathfrak{n}$, тобто, ϕ — епіморфізм і $\mathbf{B} \simeq \mathbf{A}/\operatorname{Ker}\phi$. Але якщо $\operatorname{Ker}\phi \neq 0$, то, оскільки $\mathbf{A}$ — область, $\mathrm{K.dim}\,\mathbf{B} < \mathrm{K.dim}\,\mathbf{A}$, що протирічить умові. Отже, $\operatorname{Ker}\phi = 0$ і ϕ — ізоморфізм. □

Геометричний зміст цієї леми показує такий результат.

Наслідок 11.8. *Нехай* $\phi : X \to Y$ *— скінченний морфізм незвідних многовидів. Припустимо, що* ϕ *є бієкцією і для кожної точки* $x \in X$ *індукує сюр'єкцію* $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$*, де* $y = \phi(x)$*. Тоді* ϕ *є ізоморфізмом.*

Доведення. Оскільки ϕ бієкція, то, за теоремою про розмірність шарів [**Др**, Теорема 3.6.1], $\dim X = \dim Y$. За означенням морфізмів многовидів, достатньо перевірити, що ϕ індукує ізоморфізми $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ для кожної точки x, де $y = \phi(x)$. Але, оскільки поля лишків у геометричнії ситуації автоматично збігаються, необхідне твердження випливає з щойно доведеної леми. □

Наслідок 11.9. *Нехай* $\phi : X \to Y$ *— такий морфізм незвідних проективних кривих, що крива* X *неособлива,* ϕ *бієктивний і для кожної точки* $x \in X$ *гомоморфізм* ϕ^* *індукує сюр'єкцію* $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$*, де* $y = \phi(x)$*. Тоді* ϕ *— ізоморфізм.*

Доведення. Оскільки крива X нормальна, $\phi = \nu\psi$, де $\nu : Y' \to Y$ — нормалізація кривої Y в полі $\Bbbk(X)$, яка є скінченним відображенням, а $\psi : X \to Y'$ — деякий морфізм [**Др**, Розділ 3.7]. Очевидно, ψ — інєктивне відображення. Оскільки X повний [**Др**, 2.4.12] ψ сюрєктивне, тобтр бієктивне. Якщо $z = \nu(y)$, то $\dim_{\Bbbk} \mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2 = 1$, а індуковане відображення $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \to \mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2$ ненульове, отже, сюр'єктивне. Отже, за Наслідком 11.8, ν — ізоморфізм, тобто, Y теж неособлива і бiраціонально ізоморфна X. Але тоді $X \simeq Y$ [**Др**, 3.4.13 (2)]. $\square$

Теорема 11.10. *Нехай дивізор D є таким, що $l(D) > 0$, причому $l(D-p) = l(D) - 1$ і $l(D-p-q) = l(D) - 2$ для довільних точок $p, q \in X$. Тоді D є дуже рясним.*

Доведення. Виберемо базу $f_0, f_1, \dots, f_n$ простору $L(D)$. Зауважимо, що $\mathsf{нсд}((f_0), (f_1), \dots, (f_n)) = -D$. Справді, інакше цей найбільший спільний дільник був би принаймні $-D + p$ для якоїсь точки p. Але тоді $L(D) \subseteq L(D-p)$, що протирічить умові. Отже, $\phi = (f_0 : f_1 : \dots : f_n)$ є раціональним, а тому й регулярним відображенням $X \to \mathbb{P}^n$. Доведемо, що $\phi(p) \neq \phi(q)$, якщо $p \neq q$. Оскільки це співвідношення не зміниться, якщо замінити всі функції f_i на gf_i, дивізор D можна замінити на будь-який еквівалентний. За Теоремо 10.8, можна вважати, що ані p, ані q не належать $\operatorname{Supp} D$. Тоді, для кожної функції $f \in L(D)$ з $f(p) = 0$ випливає $f(q) = 0$. Тому $L(D-p) = L(D-p-q)$, що протирічить умові.

Позначимо $Y = f(X)$. Це замкнений підмноговид у $\mathbb{P}^n$ і ϕ є біекцією X на Y. Залишилось перевірити, що для кожної точки $p \in X$ відображення $\phi^* : \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \to \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$, де $y = \phi(p)$ є сюр'єктивним. Якщо це не так, то, оскільки $\dim_{\Bbbk} \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 = 1$, воно нульове, тобто $\phi^*(\mathfrak{m}_y) \subseteq \mathfrak{m}_p^2$. Але це означає, що для будь-якої функції $f \in L(D)$ з того, що $f(p) = 0$ випливає, що $f \in \mathfrak{m}_p^2$, тобто, $v_p(f) \geqslant 2$. Тому $L(D-p) = L(D-2p)$, що знову протирічить умові. $\square$

Наслідок 11.11. (1) *Якщо $\deg D \geqslant 2g+1$, то дивізор D є дуже рясним.*

(2) *Дивізор D є рясним тоді й лише тоді, коли* $\deg D > 0$.

(3) *Якщо $g(X) = 0$, то $X \simeq \mathbb{P}^1$.*

(4) *Якщо $l(p_0) = 21$ для деякої точки $p_0 \in X$, то $X \simeq \mathbb{P}^1$.*

Доведення. За умови (1) до дивізорів $D, D-p, D-p-q$ можна застосувати Наслідок 11.6 (4). Тоді виконуються й умови Теореми 11.10.

(2) одразу випливає з (1).

(3) також випливає з (1), якщо покласти $D = p$ для деякої точки $p \in X$.

(4). У цьому разі $l(p_0 - p) = 1$, а $l(p_0 - p - q) = 0$ для довільних p, q, отже, довільна база $L(D)$ задає замкнене занурення, а тому ізоморфізм $X \to \mathbb{P}^1$. $\square$

Вправа 11.12. Доведіть, що умови Теореми 11.10 є й *необхідними* для того, щоб дивізор D був дуже рясним.

12. Еліптичні криві

Означення 12.1. *Еліптичною кривою* зветься неособлива проективна крива роду 1.

Згідно з Твердженням 11.2, такими є всі неособливі плоскі кубічні криві (тобто, криві степеня 3). Виявляється, що ними й вичерпуються всі еліптичні криві.

Теорема 12.2. *Неособлива проективна крива X має рід 1 тоді й лише тоді, коли вона ізоморфна неособливій плоскій кубічній кривій. Більш того, якщо $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$, рівняння останньої завжди можна вибрати у вигляді*

$$x_0 x_2^2 = x_1(x_1 - x_0)(x_1 - \lambda x_0), \tag{12.1}$$

де $\lambda \in \Bbbk \setminus \{0, 1\}$.

Зауважимо, що тоді афінна підмножина $X \cap \mathbb{A}_0^2$ виділяється в $\mathbb{A}_0^2$ рівнянням

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda), \tag{12.2}$$

де $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$.

Доведення. Наслідок 11.2 показує, що неособлива плоска кубічна крива дійсно має рід 1. Навпаки, нехай $g(X) = 1$. Застосуємо Наслідок 11.11 (1) до дивізора $3p$, де p — довільна точка. За Наслідком 11.6 (4), $l(kp) = k$, якщо $k > 0$. Зокрема, $l(3p) = 3$, отже, база простору $L(3p)$ задає замкнене занурення $X \to \mathbb{A}^2$, тобто, ізоморфізм $X \to Y = \operatorname{Im} \phi$. Зауважимо, що $l(2p) = 2$, а $l(p) = 1$,тому базу $L(3p)$ можна обрати у вигляді $\{1, f, g\}$, де $f \in L(2p)$. Тоді функції $1, f, f^2, f^3, g, g^2, fg$ належать $L(6p)$. Оскільки $l(6p) = 6$, вони лінійно залежні:

$$\alpha_0 + \alpha_1 f + \alpha_2 f^2 + \alpha_3 f^3 + \beta_1 g + \beta_2 g^2 + \beta_3 gf = 0.$$

Зауважимо, що функції f і g визначені в усіх точках кривої X, крім p. Звідси випливає, що $\phi(X_0)$, де $X_0 = X \setminus \{p\}$ є замкненою підмножиною в афінній кубічній кривій Y_0, яка визначена на $\mathbb{A}_0^2$ рівнянням

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 xy = 0.$$

Тому $\phi(X_0)$ є незвідною компонентою $Y' \subseteq Y_0$, а $Y = Y'$, замиканню Y' у $\mathbb{P}^2$. Якщо $Y' \neq Y_0$, Y має степінь щонайбільше 2, а тоді $g(X) = g(Y) = 0$. Отже, $\phi(X_0) = Y$. Якщо $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$, очевидна заміна змінних робить нульовими коефіціенти при xy та y. Тоді рівняння перепишеться у вигляді $y^2 = G(x)$, де G — кубічний многочлен. Оскільки крива X неособлива, $G(x)$ не має кратних коренів. Лінійною заміною змінної x можна зробити два з цих коренів рівними 0 та 1, тобто вважати, що Y_0 задається рівнянням (12.2). Залишається зауважити, що тоді $Y = \bar{Y}_0$ задається рівнянням (12.1). $\square$

При вивченні дивізорів на еліптичних кривих вирішальне значення має такий результат.

Лема 12.3. *Нехай X — еліптична крива, $p_0 \in X$ — деяка фіксована точка. Для довільного дивізора D існує єдина точка $p = p(D)$ така, що $D \sim p - kp_0$, де $k = \deg D - 1$.*

Доведення. Зауважимо, перш за все, що $l(p-q) = 0$ для довільних точок $p \neq q$. Дійсно, якщо $f \in L(p-q)$ — ненульова функція, то $(f) \geqslant q - p$. Оскільки $\deg(f) = \deg(q-p)$, звідси $(f) = q - p$, отже, $f \neq \mathrm{const}$. Тоді $1, f$ — лінійно незалежні функції з $L(p)$, що неможливо, оскільки $l(p) = 1$ за Наслідком 11.6 (4). Тому $p - p_0 \not\sim q - p_0$, якщо $p \neq q$, що доводить твердження про єдиність точки p.

Покажемо, що для довільних точок $p_1, p_2 \in X$ існує точка p така, що $p_1 + p_2 \sim p + p_0$. Для цього зауважимо, що, згідно з Наслідком 11.6 (4), $l(p_1 + p_2 - p_0) = 1$, отже, існує функція f така, що $(f) \geqslant p_0 - p_1 - p_2$. Оскільки $v_{p_0}(f) \geqslant 1$, $f \neq \mathrm{const}$. Позначимо $C = (f) - p_0 + p_1 + p_2$. Тоді $C \geqslant 0$ і $\deg C = 1$, отже, $C = p$ для деякої точки p. Звідси $(f) = p_0 + p - p_1 - p_2$ і $p_1 + p_2 + (f) = p + p_0$. Очевидна індукція показує, що для кожного дивізора $D \geqslant 0$ існує точка p така, що $D \sim p + kp_0$, де $k = \deg D - 1$. Але довільний дивізор D можна записати як $D^+ - D^-$, де обидва дивізори D^+ та D^- невід'ємні. Тоді $D^+ \sim p_1 + k_1 p_0$ і $D^- = p_2 + k_2 p_0$, отже, $D \sim p_1 - p_2 + (k_1 - k_2)p_0$. Але, замінивши p_0 на p_2, ми бачимо, що існує точка p, для якої $p_1 + p_0 \sim p + p_2$, або $p_1 - p_2 \sim p - p_0$, звідки $D \sim p + kp_0$. □

Оскільки степені еквівалентних дивізорів однакові, степінь визначає гомоморфізм $\deg : \mathrm{Pic}\, X \to \mathbb{Z}$. Позначимо Pic^0 його ядро. Щойно доведена лема встановлю взаємно однозначна відповідність між цією групою та множиною точок кривої X, при якому кожному класу дивізорів нульового степеня відповідає єдина точка pтака, що дивізор $p - p_0$ належить цьому класу. Ця взаємно однозначна відповідність індукує групову операцію $\oplus$ на множині точок X: $p_1 \oplus p_2 = p$ означає, що $p_1 + p_2 \sim p + p_0$. Нулем цієї групи є точка p_0. Додавання в цій групі задає відображення $\mu : X \times X \to X$. Зауважимо, що ця структура залежить від вибору точки p_0. Заміна p_0 на p_0' переводить операцію $\oplus$ в $\oplus'$, де $p_1 \oplus' p_2 = p_1 \oplus p_2 \ominus p_0'$, що веде жо ізоморфної групи (перевірте це).

Операція додавання, визначена нами, задає відображення $\mu : X \times X \to X,\ (p,q) \mapsto p \oplus q$, а також відображення $\sigma : X \to X,\ p \mapsto \ominus p$. Виявляється, що ці відображення задають на X структуру *алгебричної групи* в розумінні [**Др**, Означення 3.6.4], або [**Ш**, Глава I, § 4], або [**Х**, Глава I, Вправа 3.21].

Теорема 12.4. *Відображення μ і σ, визначені вище, є регулярними.*

Доведення. Вважатимемо, що $X \subset \mathbb{P}^2$ задано рівнянням (12.1), а $p_0 = (0 : 0 : 1)$. Розглянемо довіліну лінійну форму $\lambda(x_0, x_1, x_2)$ і позначимо $f_\lambda = \lambda/x_0$. Це раціональна функція на X. Система рівнянь

$$\begin{aligned}
&x_0x_2^2 = x_1(x_1 - x_0)(x_1 - \lambda x_0),\\
&\lambda(x_0, x_1, x_2) = 0
\end{aligned}$$

зводиться до однорідного рівняння степеня 3 з двома невідомими, яке має 3 розв'язки з точністю до пропорційності (з урахуванням кратності), тобто визначає 3 точки $p_1, p_2, p_3 \in X$, знов-таки, з урахуванням кратностей.

Вправа 12.5. Доведіть, що $(f_\lambda) = p_1 + p_2 + p_3 - 3p_0$, тобто, $p_1 + p_2 + p_3 \sim 3p_0$.

Зокрема, якщо $p_1 = (\alpha : \beta : \gamma) \neq p_0$, то $\alpha \neq 0$ і, для $\lambda = \beta x_0 - \alpha x_1$, $(f_\lambda) = p_1 + p_2 - 2p_0$, де $p_2 = (\alpha : \beta : -\gamma)$. Звідси $p_2 = \ominus p_1$, отже, відображення σ регулярне. У загальному випадку, нехай $p = \ominus p_3$, тобто, така точка, що $p \oplus p_3 \sim 2p_0$. Тоді $p_1 + p_2 \sim p + p_0$, тобто, $p_1 \oplus p_2 = p$. Але легко перевірити, що при заданих точках p_1, p_2 коефіцієнти лінійної форми λ такої, що $\lambda(p_1) = \lambda(p_2) = 0$, є регулярними функціями від координат точок p_1, p_2. Тому й координати точки p_3, для якої $p_1 + p_2 + p_3 \sim -3p_0$, де λ — така лінійна форма, що також є регулярними функціями від координат точок p_1 і p_2 (підрахуйте ці функції). Оскільки $p_1 \oplus p_2 = \ominus p_3$, це завершує доведення. □

Вправа 12.6. (1) Перевірте, що дробово-лінійні перетворення $x \mapsto 1/x,\ x \mapsto 1 - x$ породжують групу перетворень G проективної прямої, яка зберігає множину точок $\{0, 1, \infty\}$. Ця група ізоморфна групі перестановок $\mathbf{S}_3$.

(2) Доведіть, що кубічні криві, задані рівняннями вигляду (12.1) з різними значеннями параметру λ ізоморфні тоді й лише тоді, коли ці значення параметру належать одній орбіті групи G.

(3) Виведіть звідси, що єдиним інваріантом, який визначає клас ізоморфізму еліптичних кривих, заданих рівняннями вигляду (12.1), є «*j-інваріант*»

$$j = 2^8 \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}.$$

13. Теорема Гурвіца

Нехай $\phi : X \to Y$ — морфізм неособливих проективних кривих. Тоді $\operatorname{Im}\phi$ — замкнена незвідна підмножина в Y, тому або $\operatorname{Im}\phi = Y$, або $\operatorname{Im}\phi$ складається з однієї точки. В останньому випадку казатимемо, що ϕ — тривіальний морфізм. У першому випадку ϕ індукує занурення полів раціональних функцій $\Bbbk(Y) \to \Bbbk(X)$. Оскільки обидва поля є скінченнопородженими над $\Bbbk$, степеня трансцендентності 1, друге є скінченним алгебричним розширенням першого. Степінь $(\Bbbk(X) : \Bbbk(Y))$ цього розширення зветься *степенем морфізму* ϕ й позначається $\deg\phi$. Морфізм ϕ зветься *сепарабельним*, якщо таким є розширення $\Bbbk(X)$ поля $\Bbbk(Y)$. Наприклад, якщо $\operatorname{char}\Bbbk = 0$, кожен такий мофрізм є сеперабельним. Зауважимо, що мають місце такі факти.

Твердження 13.1. *Нетривіальний морфізм $\phi : X \to Y$ неособливих проективних кривих є* скінченним морфізмом [**Др**, Означення 3.1.1].

Доведення. Як і при доведенні Наслідку 11.9, $\phi = \nu\psi$, де $\nu : X' \to Y$ — нормалізація кривої Y у полі $\Bbbk(X)$, а $\psi : X \to X'$ — деякий морфізм. Але тоді ϕ індукує ізоморфізм полів $\Bbbk(X') \xrightarrow{\sim} \Bbbk(X)$, тобто, є біраціональним морфізмом. Оскільки X та X' — нормальні криві, ψ — ізоморфізм. Оскільки ν — скінченне відображення, таким є й ϕ. □

Означення 13.2. Нехай $\phi : X \to Y$ — скінченний морфізм нормальних кривих, $x \in X,\ y = \phi(x)$, t — локальний параметр у точці y. Число $e_x(\phi) = v_x(\phi^*(t))$ зветься *показником розгалуження відображення ϕ в точці x*. Кажуть, що відображення ϕ *розгалужене* (*нерозгалужене*) в точці x, якщо $e_x(\phi) > 1$ (відповідно, якщо $e_x(\phi) = 1$). Якщо в усіх точках $x \in X$ відображення ϕ є нерозгалуженим, кажуть, що ϕ — *нерозгалужене накриття* кривої Y. У цьому випадку часто й сама крива X зветься нерозгалуженим накриттям Y. Надалі ми побачимо, що нерозгалужене накриття завжди є сепарабельним.

Теорема 13.3. *Нехай $\phi : X \to Y$ — скінчений морфізм нормальних кривих, $n = \deg\phi$, $y \in Y$, $\phi^{-1}(y) = \{\, x_1, x_2, \dots, x_m \,\}$, $e_i = e_{x_i}(\phi)$. Тоді $\sum_{i=1}^m e_i = n$. Зокрема, $m \leqslant n$. Якщо морфізм ϕ є сепарабельним, він може бути розгалуженим лише у скінченній кількості точок.*

Доведення. Виберемо афінний окіл U точки y. Його прообраз $V = \phi^{-1}(U)$ є також афінним [**Др**, Теорема 3.1.2] і містить всі точки $x_1, x_2, \dots, x_m$. Позначимо $\mathbf{A} = \Bbbk[U]$, $\mathbf{B} = \Bbbk[V]$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_y \subset \mathbf{B}$, $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_{x_i} \subset \mathbf{A}$. Морфізм ϕ індукує занурення $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, і ми ототожнимо $\mathbf{A}$ з його образом у $\mathbf{B}$. Можна вважати, що $t \in \mathbf{B}$. Більш того, вилучивши зайві точки, можна вважати, що $t\mathbf{A} = \mathfrak{m}$. Ідеали $\mathfrak{m}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ — це всі максимальні ідеали кільця $\mathbf{B}$, які містять $\mathfrak{m}$, або, що те саме, які не перетинають $\mathbf{B} \setminus \mathfrak{m}$. Тому $\mathfrak{m}_i\mathbf{B}_{\mathfrak{m}}$ — всі максимальні ідеали кільця $\mathbf{B}_\mathfrak{m}$. Зауважимо, що $\mathbf{A}_\mathfrak{m}$ — кільце дискретної оцінки, зокрема, кільце головних ідеалів, а $\mathbf{B}_\mathfrak{m}$ — скінченнопороджений $\mathfrak{a}_\mathfrak{m}$-модуль без скруту, отже, це вільний $\mathbf{A}_\mathfrak{m}$-модуль. Його ранг, очевидно, дорівнює розмірності поля $\Bbbk(X)$ над $\Bbbk(Y)$, тобто, n. Тому $\mathbf{B}_\mathfrak{m}/t\mathbf{B}_\mathfrak{m}$ — векторний простір розмірності n над полем $\Bbbk = \mathbf{A}_\mathfrak{m}/t\mathbf{A}_\mathfrak{m}$. Для кожного i виберемо елемент $u_i \in \mathfrak{m}_i \setminus \mathfrak{m}_i^2$. За «китайською теоремою про лишки» (див. наприклад, [**АЧ**, Теорема I.6.4]), існує елемент $t_i \in \mathbf{B}$ такий, що $t_i \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}_j}$, якщо $j \neq i$, і $t_i \equiv u_i \pmod{\mathfrak{m}_i^2}$. Тоді, очевидно, $t_i\mathbf{B}_\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i\mathbf{B}_\mathfrak{m}$. Тому t_i є локальним параметром в точці x_i. Крім того, $\mathbf{B}_\mathfrak{m}$ є кільцем головних ідеалів згідно з [**Др**, Вправа 3.3.25 (2)], а $t_1, t_2, \dots, t_m$ — всі його нерозкладні елементи. Зокрема, $t = c\prod_{i=1}^m t_i^{k_i}$, де c — обертовний елемент кільця $\mathbf{B}_\mathfrak{m}$. Звідси, очевидно, випливає, що $k_i = e_i$. З іншого боку, знов-таки, за китайською теоермою про лишки, $\mathbf{B}_\mathfrak{m}/t\mathbf{B}_\mathfrak{m} \simeq \prod_{i=1}^m \mathbf{B}_\mathfrak{m}/t_i^{e_i}\mathbf{B}_\mathfrak{m}$. Але $\dim_\Bbbk(\mathbf{B}_\mathfrak{m}/t_i^{e_i}\mathbf{B}_\mathfrak{m}) = e_i$, звідки й випливає необхідна рівність.

Припустимо тепер, що розширення $\Bbbk(X) \supseteq \Bbbk(Y)$ сепарабельне. Тоді існує функція $\theta \in \Bbbk(X)$ така, що $\Bbbk(X) = \Bbbk(Y)(\theta)$, причому мінімальний многочлен F елемента θ над полем $\Bbbk(Y)$ сепарабельний, тобто, $\mathsf{нсд}(F, F') = 1$ й існують многочлени G, H над полем $\Bbbk(Y)$, для яких $GF + HF' = 1$. Виберемо афінну відкриту підмножину $U \subseteq Y$, на якій визначені всі коефіцієнти многочленів F, G, H та функція θ. Нехай $y \in U$, а $\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{\theta}$ — редукції многчленів F, G, H та функції θ за модулем $\mathfrak{m}_y$. Знову позначимо $\mathbf{A} = \Bbbk[U]$, $V = \phi^{-1}(U)$ і $\mathbf{B} = \Bbbk[V]$. Зменшуючи, якщо треба, множину U, можна вважати, що $\mathbf{B} = \mathbf{A}[\theta]$. Тоді $\mathbf{B}/\mathfrak{m}_y\mathbf{B} \simeq \Bbbk[\bar{\theta}]$, причому $\bar{\theta}$ — корінь многочлена $\bar{F}$, який є співпервинним зі своєю похідною, оскільки $\bar{G}\bar{F}+\bar{H}\bar{F}' = 1$. Звідси випливає, що $\mathbf{B}/\mathfrak{m}_y\mathbf{B} \simeq \Bbbk^n$, отже, ідеал $t\mathbf{B}$ не міститься в жодному квадраті максимального ідеалу кільця $\mathbf{B}$. Тоді $e_i = 1$ для всіх i. Отже, в будь-якій точці непорожньої відкритої множини V відображення ϕ нерозгалужене. Залишилося зауважити, що множина $X \setminus V$ скінченна. $\square$

Надалі ми вважатимемо, що $\phi : X \to Y$ — сепарабельний морфізм степеня n проективних неособливих кривих. Для кожної відкритої афінної підмножини $U \subseteq Y$ та її прообразу $V = \phi^{-1}(U)$ відображення $\phi^*(U)$ є зануренням алгебр $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, де $\mathbf{A} = \Bbbk[U]$, $\mathbf{B} = \Bbbk[V]$. Воно індукує гомоморфізм $\mathbf{A}$-модулів $\mathbf{\Omega_A} \to \mathbf{\Omega_B}$. Оскільки це локально вільні модулі рангу 1, одержимо також гомоморфізм просторів раціональних диференціалів $\phi^* : \mathbf{\Omega}_{\Bbbk(Y)} \to \mathbf{\Omega}_{\Bbbk(X)}$. Нехай $\omega \in \mathbf{\Omega}_{\Bbbk(Y)}$, $\tilde{\omega} = \phi^*(\omega)$. Знайдемо зв'язок між дивізорами (ω) та $(\tilde{\omega})$. Для кожної точки $y \in Y$ і локального параметру t_y у цій точці $\omega = at_y^{k_y}dt_y$, де $a \in \mathcal{O}_{Y,y}^\times$, і $(\omega) = \sum_y k_y y$. З іншого боку, якщо $\phi(x) = y$, то $t^y = bt_x^{e_x}$, де $e_x = e_x(\phi)$, а $b \in \mathcal{O}_{X,x}^\times$. Звідси

$$dt_y = t_x^{e_x}db + e_x b t_x^{e_x-1}dt_x = ct_x^{r_x}dt_x, \text{ де } c \in \mathcal{O}_{X,x}^\times,$$

де $r_x \geqslant e_x - 1$, причому, якщо $\operatorname{char} \Bbbk \nmid e_x$, то $r_x = e_x - 1$. Наприклад, $r_x = e_x - 1$, якщо $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, а також $r_x = 0$, якщо $e_x = 1$. Тому визначений дивізор $R_\phi = \sum_x r_x x$, який зветься *дивізором розгалуження* морфізму ϕ. Його носій — це множина точок розгалуження морфізму ϕ. Зокрема, $R_\phi = 0$ тоді й лише тоді, коли морфізм ϕ є нерозгалуженим. Отже,

$$(\tilde{\omega}) = \sum_{y\in Y} \sum_{\phi(x)=y} (k_y e_x + e_x - 1)x = \sum_{y\in Y} k_y \sum_{\phi(x)=y} e_x x + \sum_{x\in X} r_x x.$$

Оскільки $\sum_{\phi(x)=y} e_x = \deg \phi$ для кожної точки $y \in Y$, звідси одержуємо, що

$$\deg(\tilde{\omega}) = n \deg(\omega) + \deg R_\phi.$$

Оскільки $\deg(\omega) = 2g(Y) - 2$, а $\deg(\tilde{\omega}) = 2g(X) - 2$, маємо такий результат.

Теорема 13.4 (Теорема Гурвіца)**.** *Нехай $\phi : X \to Y$ — сепарабельний морфізм степеня n неособливих проективних кривих. Тоді*

$$g(X) - 1 = n(g(Y) - 1) + \frac{1}{2} \deg R_\phi.$$

Зокрема, степінь дивізора розгалуження завжди парний.

Наслідок 13.5. *Якщо $\phi : X \to Y$ — сеперабельний морфізм неособливих проективних кривих, то $g(X) \geqslant g(Y)$.*

Вправа 13.6. Знайдіть всі випадки, в яких можлива рівність $g(X) = g(Y)$.

Наслідок 13.7.
Якщо $\phi : X \to Y$ — нерозгалужене накриття неособливої проективної кривої, $n = \deg \phi$, то $g(X) = n(g(Y) - 1) + 1$.

Наслідок 13.8 (Теорема про монодромію)**.** *Проективна пряма не має нерозгалужених накриттів.*

Наслідок 13.9 (Теорема Люрота)**.** *Нехай $\mathbf{L}$ — підполе в полі $\Bbbk(t)$, яке не збігається з $\Bbbk$. Тоді $\mathbf{L} \simeq \Bbbk(t)$.*

Доведення. Дійсно, в цьому випадку $\operatorname{tr.deg} \mathbf{L} = 1$ і $\Bbbk(t)$ — скінченне розширення $\mathbf{L}$. Ми розберемо випадок, коли розширення $\mathbf{L} \supseteq \Bbbk$ є сепарабельним. Несеперабельний випадок буде розглянуто нижче. Виберемо неособливу проективну криву Y, для якої $\Bbbk(Y) \simeq \mathbf{L}$. Занурення $\mathbf{L} \to \Bbbk(t)$ індукує раціональне, а тому й регулярне сеперабельне відображення $\mathbb{P}^1 \to Y$. Звідси $g(Y) = 0$, тобто, $Y \simeq \mathbb{P}^1$ (Наслідок 11.11 (3)) і $\mathbf{L} \simeq \Bbbk(t)$. □

Починаючи з цього місця ми вважаємо, $\operatorname{char} \Bbbk = p > 0$.

Вправа 13.10. (1) Відображення $\mathrm{Fr} : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ таке, що

$$\mathrm{Fr}\,(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1^p, a_2^p, \dots, a_n^p)\,,$$

зветься *морфізмом Фробеніуса.* Доведіть, що цей морфізм є скінченним (отже, замкненим). Позначимо $X^{(p)} = \mathrm{Fr}(X)$ для кожної підмножини $X \subseteq \mathbb{A}^n$.

(2) Перевірте, що, якщо $X \subseteq \mathbb{A}^n$ та $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ — локально замкнені підмножини, а $\phi : X \to Y$ — морфізм многовидів, він індукує морфізм $\phi^{(p)} : X^{(p)} \to Y^{(p)}$, причому $(\psi\phi)^{(p)} = \psi^{(p)}\phi^{(p)}$.

(3) Користуючись цим та технікою «склеювання» (див. [**Др**, Твердження 3.7.4 та Лема 2.2.12]), визначіть для кожного многовиду X многовид $X^{(p)}$ разом з морфізмом $\mathrm{Fr}_X : X \to X^{(p)}$, який на афінних відкритих підмножинах збігається з морфізмом Фробеніуса, а для кожного морфізму $f : X \to Y$ — морфізм $f^{(p)} : X^{(p)} \to Y^{(p)}$ так, що $\mathrm{Fr}_Y\, f = f^{(p)}\,\mathrm{Fr}_X$.

(4) Доведіть, що $(\mathrm{Fr}_X)_*\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_{X^{(p)}}$ як пучки кілець (*не як пучки* $\mathbb{k}$-*алгебр*!).

Натяк: Якщо $X = \mathbb{A}^n$, то відображення Fr_X^* переводить многочлен $F\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у многочлен $F\,(x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)$, а відображення $F \mapsto F^p$ є ізоморфізмом кілець (не $\mathbb{k}$-алгебр) $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}[x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p]$.

З точки зору теорії категорій (див., наприклад [**Гр**]), ми побудували *функтор* ${}^{(p)} : X \mapsto X^{(p)}$ на категорії многовидів і *морфізм функторів* (або *природне перетворення*) $\mathrm{Fr} : \mathrm{Id} \to {}^{(p)}$. Морфізм Fr_X також зветься *морфізмом Фробеніуса* для многовиду X.

Ми позначатимемо через ${}^{(p^k)}$ k-ту ітерацію функтора ${}^{(p)}$, тобто, $X^{(p^{k+1})} = (X^{(p^k)})^{(p)}$. Зауважимо, що тоді визначений морфізм $\mathrm{Fr}^k : X \to X^{(p^k)}$.

Вправа 13.11. (1) Доведіть, що для довільного поля $\mathbb{K}$ характеристики p множина $\mathbb{K}^p = \{\, a^p \mid a \in \mathbb{K}\,\}$ є підполем, ізоморфіним $\mathbb{K}$. Нагадаємо, що, якщо $\mathbb{K} = \mathbb{K}^p$, поле $\mathbb{K}$ зветься *досконалим.*

(2) Якщо $\mathbb{K} = \mathbb{k}\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — поле раціональних функцій від n змінних над досконалим (наприклад, алгебрично замкненим) полем $\mathbb{k}$, то $(\mathbb{K} : \mathbb{K}^p) = p^n$.

(3) Доведіть, що останній результат залишається вірним і для довільного розширення $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{k}$ досконалого поля, якщо $n = \mathrm{tr.deg}\,\mathbb{K}$.

Вправа 13.12. (1) Нехай $f : X \to Y$ — морфізм неособливих проективних алгебричних кривих, причому індуковане розширення полів $\mathbb{k}(Y) \subseteq \mathbb{k}(X)$ є чисто несепарабельним. Доведіть, що коли $\deg f = n$, то $Y \simeq X^{(p^n)}$ і при цьому ототожненні f перетворюється в ітерований морфізм Фробеніуса Fr^n.

(2) Виведіть звідси, що $g(X) = g(Y)$.
(3) Завершіть доведення теореми Люрота для випадку несепарабельних розширень.
(4) Доведіть, що $e_x(\mathrm{Fr}_X) = p$ для кожної точки $x \in X$. Виведіть звідси, що несепарабельне розширення є розгалузеним в кожній точці.

14. Гіпереліптичні криві

Досі ми не бачили ніяких прикладів неособливих кривих довільного роду. У цьому розділі ми побудуємо такі приклади. Ними є, зокрема, так звані *гіпереліптичні криві.* Ми вважаємо, що $\mathrm{char}\,\Bbbk \neq 2$.

Означення 14.1. *Гіпереліптичною кривою* X зветься неособлива проективна крива X, для якої існує морфізм $f : X \to \mathbb{P}^1$ степеня 2.

Оскільки відповідність $X \mapsto \Bbbk(X)$ між скінченними розширеннями поля $\Bbbk(x) = \Bbbk(\mathbb{P}^1)$ та неособливими проективними кривими є взаємно однозначною, можна сказати, що гіпереліптична крива — це неособлива проективна модель квадратичного розширення поля раціональних функцій від однієї змінної. Ці розширення також звуться *гіпереліптичними полями.*

Теорема 14.2. *Рід гіпереліптичної кривої X дорівнює $k/2 - 1$, де k — число точок розгалуження морфізму $f : X \to \mathbb{P}^1$ степеня 2. Крім того, точка $p \in X$ є розгалуженою тоді й лише тоді, коли $f^{-1}(f(p)) = \{p\}$.*

Доведення. Якщо $x \in \mathbb{P}^1$, $f^{-1}(x) = \{\, p_1, p_2, \dots, p_m \,\}$ і $e_i = e_{p_i}(f)$, то $\sum_i e_i = \deg f = 2$ (Теорема 13.3), отже, або $m = 2$ і точки p_1, p_2 нерозгалужені, або $m = 1$ і $e_1 = 2$. В останньому випадку $r_1 = 1$ (бо $\mathrm{char}\,\Bbbk \nmid e_1$), отже, $R_f = \sum p$, де p пробігає розгілужені точки. Звідси $\deg R_f = k$, отже, за Теоремою Гурвіца,

$$g(X) = 1 + 2(0-1) + \frac{k}{2} = \frac{k}{2} - 1.$$

□

Теорема 14.3. *Кожна гіпереліптична крива X ізоморфна нормалізації кривої $\overline{X}_0$, де $X_0 \subset \mathbb{A}^2$ — афінна крива, задана рівнянням $y^2 = F(x)$, де $F(x) \in \Bbbk[x]$ — многочлен без кратних коренів, а $\overline{X}_0$ — її замикання в проективні площині $\mathbb{P}^2$, в яку $\mathbb{A}^2$ вкладена як $D(x_0)$, причому $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$. Якщо $n = \deg F$, то $g(X) = \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$.*

Доведення. Оскільки $\mathrm{char}\,\Bbbk \neq 2$, квадратичне розширення $\Bbbk(X)$ поля $\Bbbk(x)$ має вигляд $\Bbbk(x, y)$, де $y^2 = F(x)$. При цьому завжди можна вважати, що $F(x)$ — многочлен без кратних коренів (поясніть, чому). Тоді $\Bbbk(X_0) \simeq \Bbbk(x, y)$, отже, $\overline{X}_0$ біраціонально ізоморфне X, а тоді X ізоморфна нормалізації кривої $\overline{X}_0$.

Легко перевірити, що X_0 — неособлива крива, тому вона збігається зі своєю нормалізацією, отже, вкладається в X як відкрита підмножина. Обмеження морфізму $f : X \to \mathbb{P}^1$ на X_0 є відображенням $X_0 \to \mathbb{A}^1_0$, яке переводить точку $p = (a, b)$ в точку a. Тому $f^{-1}(f(p)) = \{p\}$ тоді й лише тоді, коли $F(a) = 0$. Отже, на X_0 є n розгалужених точок. Зауважимо, що $X_0 = f^{-1}(\mathbb{A}^1_0)$, а $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{A}^1_0$ містить одну точку $\infty = (0 : 1)$. Як ми бачили раніше, $f^{-1}(\infty)$ складається або з двох нерозгалужених точок, або з однієї розгалуженої точки. Оскільки кількість k нерозгалужених точок в нашому випадку парна,

$$k = \begin{cases} n, & \text{якщо } n \text{ парне,} \\ n+1, & \text{якщо } n \text{ непарне.} \end{cases}$$

Разом з попередньою теоремою це й дає потрібний результат. □

Рівняння $y^2 = F(x)$ з цієї теореми звуть (допускаючи вільність у вислові) «рівнянням гіпереліптичної кривої» X.

Твердження 14.4. *Якщо у рівняні $y^2 = F(x)$ гіпереліптичної кривої $\deg F(x) = 2n$, то ця крива ізоморфна гіпереліптичній кривій з рівнянням $y^2 = G(x)$, де $\deg G(x) = 2n - 1$.*

Згідно з Теоремою 14.3, рід такої кривої дорівнює $n - 1$.

Доведення. Можна вважати, що 0 є коренем $F(x)$, тобто, $F(x) = xf(x)$ для деякого многочлена $f(x)$ степеня $2n - 1$. Покладемо $\xi = x^{-1}$, $\eta = y/x^n$. Легко бачити, що така заміна визначає біраціональне відображення даної кривої на гіпереліптичну криву з рівнянням $\eta^2 = G(\xi)$, де $G(x) = x^{2n-1}f(1/x)$ — многочлен степеня $2n-1$. Але біраціонально еквівалентні неособливі проективні криві ізоморфні. □

Зауважимо, що при $n \leqslant 2$ гіпереліптична крива раціональна, а при $n = 3$ або 4 вона є еліптичною кривою.

Вправа 14.5. (1) Доведіть, що якщо $\deg F(x) > 3$, крива $Y = \overline{X}_0$ має одну особливу («нескінченно віддалену») точку $s = (0 : 0 : 1)$.
(2) Обчисліть локальне кільце $\mathcal{O}_{Y,o}$ та його нормалізацію.

Теорема 14.6. *Якщо неособлива проективна крива X роду $g \geqslant 2$ не є гіпереліптичною, то її канонічний дивізор K є дуже рясним, тобто, визначає замкнене занурення $X \to \mathbb{P}^{g-1}$.* (Нагадаємо, що $l(K) = g$).

Доведення. Оскільки $X \not\simeq \mathbb{P}^1$, $l(p) = 1$ для довільної точки $p \in X$ (див. Наслідок 11.11 (4)). За Теоремою Рімана–Роха, застосованою до дивізора $K - p$, маємо $l(K-p) = l(p) + 2g - 3 + 1 - g = g - 1 = l(K) - 1$. Якщо також $l(p+q) = 1$ для довільних точок p, q, то так само $l(K - p - q) = l(K) - 2$, отже, K є дуже рясним за Теоремою 11.10. Припустимо, що $l(p+q) = 2$ для деяких точок p, q (можливо, $p = q$). Виберемо непостійну функцію $f \in L(p+q)$. Вона задає скінченне відображення $X \to \mathbb{P}^1$ і $(f) = -p-q+D$, де $D \geqslant 0$. Нехай $x = x_1/x_0$, тоді $\Bbbk(\mathbb{P}^1) = \Bbbk(x)$, а $x^{-1} = x_0/x_1$ — локальний параметр в точці $\infty = (0:1)$. Очевидно, f — образ функції x у полі $\Bbbk(X)$. Якщо $p \neq q$, то $v_p(x) = v_q(x) = -1$, $f^{-1}(\infty) = \{p, q\}$ і ці точки нерозгалужені. Якщо $p = q$, то $v_p(x) = -2$, $f^{-1}(\infty) = p$ і показник розгалуження в точці p дорівнює 2. В обох випадках $\deg f = 2$ за Теоремою 13.3. □

Вправа 14.7. Користуючись Вправою 11.12, доведіть, що канонічний дивізор гіпереліптичної кривої не є дуже рясним.

Наслідок 14.8. *Нехай X — неособлива проективна крива.*

(1) *Якщо $g(X) = 2$, крива X є гіпереліптичною.*
(2) *Якщо $g(X) = 3$, то крива X є або гіпереліптичною, або плоскою кривою степеня 4.*

Доведення. (1). Якби X не була гіпереліптичною, канонічний дивізор визначав би замкнене занурення $X \to \mathbb{P}^1$, яке було б ізоморфізмом, що неможливо.

(2) безпосередньо випливає з Теореми 14.6 та формули для роду плоскої кривої (Твердження 11.2). □

Означення А.1. Нехай $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ — послідовність елементів кільця $\mathbf{A}$. Її *комплексом Кóсуля* зветься комплекс $K_\bullet(\mathbf{a})$:

$$0 \to K_n(\mathbf{a}) \xrightarrow{d_n} K_{n-1}(\mathbf{a}) \xrightarrow{d_{n-1}} \dots K_1(\mathbf{a}) \xrightarrow{d_1} K_0(\mathbf{a}) \to 0,$$

де $K_k(\mathbf{a})$ — вільний $\mathbf{A}$-модуль з базою

$$\{\, e_{i_1 i_2 \dots i_k} \mid 1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n \,\},$$

а диференціал визначений формулою

$$d_k(e_{i_1 i_2 \dots i_k}) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} a_{i_k} e_{i_1 \dots \check{i_j} \dots i_k}.$$

Зокрема, $K_0(\mathbf{a})$ — вільний модуль рангу 1 з базовим елементом $e = e_\emptyset$, а $d_1(e_i) = a_i e$.

Вправа А.2. Перевірте, що $d_k d_{k+1} = 0$ для всіх номерів $0 \leqslant k < n$ тобто, $K_\bullet(\mathbf{a})$ дісно є *комплексом.*

Очевидно, $\operatorname{Im} d_0 = I$, де $I = \langle\, a_1, a_2, \dots, a_n \,\rangle$, отже, комплекс Косуля можна продовжити до послідовності

$$\text{(K)}\quad 0 \to K_n(\mathbf{a}) \xrightarrow{d_n} K_{n-1}(\mathbf{a}) \xrightarrow{d_{n-1}} \dots K_1(\mathbf{a}) \xrightarrow{d_1} K_0(\mathbf{a}) \to \mathbf{A}/I \to 0,$$

яка є точною в двох останніх членах. Ми вкажемо випадок, коли ця послідовність є точною.

Означення А.3. Послідовність $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ елементів кільця $\mathbf{A}$ зветься *регулярною*, якщо для кожного $1 \leqslant k \leqslant n$ елемент a_k не є дільником нуля в модулі $\mathbf{A}/\langle\, a_1, a_2, \dots, a_{k-1} \,\rangle$ (зокрема, a_1 не дільником нуля в $\mathbf{A}$).

Приклад А.4. Якщо $\mathbf{A}$ — регулярне локальне кільце розмірності Крулля n, $a_1, a_2, \dots, a_n$ — твірні його максимального ідеала, то послідовність $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ регулярна [**Др**, Теорема 4.2.6].

Теорема А.5. *Нехай* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *— регулярна послідовність у кільці* $\mathbf{A}$, $I = \langle\, a_1, a_2, \dots, a_n \,\rangle$. *Тоді послідовність* (K) *є точною, тобто, комплекс Косуля* $K_\bullet(\mathbf{a})$ *є вільною резольвентою модуля* $\mathbf{A}/I$.

Доведення. Будемо доводити це твердження індукцією за n. Якщо $n = 1$, очевидно, що послідовність $0 \to \mathbf{A} \xrightarrow{a_1} \mathbf{A} \to \mathbf{A}/a_1\mathbf{A} \to 0$ є точною. Припустимо, що $n > 1$ і твердження теореми вірне для регулярних послідовностей довжини $n-1$. Це значить, що послідовність

$$0 \to K_{n-1}(\mathbf{a}') \to \dots \to K_1(\mathbf{a}') \to I' \to 0,$$

де $\mathbf{a}' = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$, а $I' = \langle\, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \,\rangle$, є точною. Розглянемо комутативну діаграму з точними стовпчиками:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & K_{n-1}(\mathbf{a}') \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \cdots \arrow[r] & K_1(\mathbf{a}') \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & I' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_n(\mathbf{a}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & K_{n-1}(\mathbf{a}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & \cdots \arrow[r] & K_1(\mathbf{a}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & I \arrow[r] \arrow[d, "\beta_0"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_{n-1}(\mathbf{a}') \arrow[r] \arrow[d] & K_{n-2}(\mathbf{a}') \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & K_0(\mathbf{a}') \arrow[r] \arrow[d] & I/I' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

В ній гомоморфізми α — очевидні занурення, β_0 — природний епіморфізм, а β переводить твірний $e_{i_1 i_2 \dots i_k}$ в 0, якщо $i_k \neq n$, і в $e_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$, якщо $i_k = n$. Верхній рядок цієї діаграми точний. Зауважимо також, що $I/I' = (a_n\mathbf{A} + I')/I' \simeq a_n\mathbf{A}/(a_n\mathbf{A} \cap I') \simeq \mathbf{A}/I'$, оскільки a_n не є дільником нуля в $\mathbf{A}/I'$. Тому й нижній рядок також точний. Але тоді точним є й середній рядок. Це й свідчить про те, що комплекс Косуля $K_\bullet(\mathbf{a})$ є вільною резольвентою модуля $\mathbf{A}/I$. $\square$

Наслідок A.6. *Якщо* $\mathbf{A}$ *— регулярне локальне кільце розмірності Крулля* n, *то* $\mathrm{gl.dim}\,\mathbf{A} = n$, *тобто,* $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{A}}(M, N) = 0$ *для всіх* $\mathbf{A}$*-модулів* M, N *і всіх* $i > n$, *причому* n *— найменше ціле число з цією властивістю.*

Доведення. Нехай $\mathfrak{m} = \langle\, a_1, a_2, \dots, a_n \,\rangle$ — максимальний ідеал кільця $\mathbf{A}$, $\Bbbk = \mathbf{A}/\mathfrak{m}$. Оскільки комплекс Косуля є вільною резольвентою модуля $\Bbbk$, то $\mathrm{Tor}^{n+1}_{\mathbf{A}}(\Bbbk, M) = 0$ для всіх усіх модулів M. Отже, нерівність $\mathrm{gl.dim}\,\mathbf{A} \leqslant n$ випливає з наступної леми.

Лема A.7. *Нехай* $\mathbf{A}$ *— нетерове локальне кільце з максимальним ідеалом* $\mathfrak{m}$ *і полем лишків* $\Bbbk = \mathbf{A}/\mathfrak{m}$, M *— скінченнопороджений* $\mathbf{A}$*-модуль, для якого* $\mathrm{Tor}^{\mathbf{A}}_m(\Bbbk, M) = 0$. *Тоді* $\mathrm{pr.dim}_{\mathbf{A}}\, M < m$, *тобто,* $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{A}}(M, N) = 0$ *для всіх* $\mathbf{A}$*-модулів* N *при* $i \geqslant m$. *Отже,*

$$\mathrm{pr.dim}_{\mathbf{A}}\, M = \sup \left\{\, i \mid \mathrm{Tor}^{\mathbf{A}}_i(\Bbbk, M) \neq 0 \,\right\}.$$

Доведення Леми проведемо індукцією за m. Нехай $m = 1$. Фактормодуль $\bar{M} = M/\mathfrak{m}M$ є модулем над полем $\Bbbk$, отже, $\bar{M} \simeq r\Bbbk$. Виберемо в M такі елементи $u_1, u_2, \dots, u_r$, що їхні класи утворюють базу в $\bar{M}$ і визначимо гомоморфізм $\pi : r\mathbf{A} \to M$, який переводить вектор $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ в $\sum_{i=1}^r a_i u_i$. Тоді $\mathrm{Im}\,\pi + \mathfrak{m}M = M$, отже, $\mathrm{Im}\,\pi = M$ (за лемою Накаями, [**Др**, Наслідок 3.3.12]). Позначимо $L = \mathrm{Ker}\,\pi$ і застосуємо функтор $\Bbbk \otimes_{\mathbf{A}} \_$ до точної послідовності $0 \to L \to r\mathbf{A} \to M \to 0$. Оскільки $\Bbbk \otimes_{\mathbf{A}} M \simeq M/\mathfrak{m}M$, а $\mathrm{Tor}^{\mathbf{A}}_1(\Bbbk, M) = 0$, одержимо точну послідовність

$$0 \to L/\mathfrak{m}L \to r\Bbbk \xrightarrow{\bar{\pi}} \bar{M} \to 0.$$

За побудовою, $\bar{\pi}$ — ізоморфізм, звідки $L/\mathfrak{m}L = 0$ і $L = 0$ за лемою Накаями. Отже, π — ізоморфізм, M — вільний модуль і $\operatorname{pr.dim} M = 0$.

Припустимо, що $m > 1$ і твердження вірне для $m-1$. Розглянемо якусь точну послідовність $0 \to L \to F \to M \to 0$, де F — вільний модуль скінченного рангу. Тоді з точної послідовності для функторів Tor випливає, що $\operatorname{Tor}^{\mathbf{A}}_{m-1}(\Bbbk, L) \simeq \operatorname{Tor}^{\mathbf{A}}_{m}(\Bbbk, M) = 0$. За припущенням індукції, $\operatorname{Ext}^i_{\mathbf{A}}(L, N) = 0$ для всіх N і всіх $i > m-1$. Але з точної послідовності для функторів Ext маємо, що $\operatorname{Ext}^i_{\mathbf{A}}(M, N) \simeq \operatorname{Ext}^{i-1}_{\mathbf{A}}(L, N) = 0$ при $i > m$. □

Обернена нерівність $\operatorname{gl.dim} \mathbf{A} \geqslant n$ випливає з наступної вправи, якою ми будемо користуватися й надалі.

Вправа A.8. Нехакй $K_\bullet = K_\bullet(\mathbf{a})$, де $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ — регулярна послідовність у кільці $\mathbf{A}$, $M = \mathbf{A}/\langle\, a_1, a_2, \dots, a_n \,\rangle$.

(1) Доведіть, що в комплексі $K^\vee_\bullet = \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K_\bullet, \mathbf{A})$ модуль $K^\vee_k$ є вільним з базою $\{\, \xi_{i_1 i_2 \dots i_k} \mid 1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n \,\}$, а диференціал $\partial_k : K^\vee_k \to K^\vee_{k+1}$ визначається правилом

$$\partial_k(\xi_{i_1 i_2 \dots i_k}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_{i i_1 i_2 \dots i_k},$$

де ми вважаємо, що $\xi_{i i_1 i_2 \dots i_k} = 0$, якщо $i = i_j$ для деякого j, і $\xi_{i i_1 i_2 \dots i_k} = (-1)^j \xi_{i_1 \dots i_j i i_{j+1} \dots i_n}$, якщо $i_j < i < i_{j+1}$.

Ми позначимо $K^\vee_{n-\bullet}$ комплекс, в якому k-й член — це $K^\vee_{n-k}$, а відповідний диференціал — це ∂_{n-k}.

(2) Доведіть, що відображення баз $\xi_{i_1 i_2 \dots i_m} \mapsto e_{j_1 j_2 \dots j_k}$, де $m = n-k$, а

$$\{\, j_1, j_2, \dots, j_k \,\} = \{\, 1, 2, \dots, n \,\} \setminus \{\, i_1, i_2, \dots, i_m \,\},$$

індукує ізоморфізм комплекса $K^\vee_{n-\bullet}(\mathbf{a}) \to K_\bullet(\mathbf{a})$.

(3) Виведіть звідси, що

$$\operatorname{Ext}^i_{\mathbf{A}}(M, \mathbf{A}) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } i < n, \\ M & \text{якщо } i = n. \end{cases}$$

□

У наступному розділі нам буде потрібний ще таке твердження.

Наслідок A.9. *Якщо* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ *— регулярна послідовність елементів з максимального ідеалу* $\mathfrak{m}$ *локального кільця* $\mathbf{A}$, $\Bbbk = \mathbf{A}/\mathfrak{m}$, $M = \mathbf{A}/\langle\, a_1, a_2, \dots, a_m \,\rangle$, *то* $\operatorname{Tor}^{\mathbf{A}}_k(\Bbbk, M)$ *є векторним простором розмірності* $\binom{m}{k}$ *над полем* $\Bbbk$.

Доведення. Оскільки $K_\bullet = K_\bullet(\mathbf{a})$ — вільна резольвента модуля M, то $\operatorname{Tor}^{\mathbf{A}}_k(\Bbbk, M)$ збігається з k-ю гом ологією комплексу $\Bbbk \otimes_{\mathbf{A}} K_\bullet$. Але в цьому комплексі диференціал, очевидно, є нульовим, тому $\operatorname{Tor}^{\mathbf{A}}_k(\Bbbk, M) = \Bbbk \otimes_{\mathbf{A}} K_k$, а останній добуток є векторним простором з базою $\{\, 1 \otimes e_{i_1 i_2 \dots i_k} \mid 1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots i_k \leqslant m \,\}$, тобто, має розмірність $\binom{m}{k}$. $\square$

Нехай тепер $\mathbf{A}$ нетерове кільце, не обов'язково локальне.

Твердження A.10. *Якщо M — скінченнопороджений $\mathbf{A}$-модуль, $S \subseteq \mathbf{A}$ — мультиплікативна підмножина, то* $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{A}}(M,N)[S^{-1}] \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{A}[S^{-1}]}(M[S^{-1}], N[S^{-1}])$.

Доведення. При фіксованому N обидів частини є стираючими δ-функторами на категорії скінченнопороджених $\mathbf{A}$-модулів, оскільки при $i > 0$ вони анулюються вільними модулями. При $i = 0$ маємо ізоморфізм $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M,N)[S^{-1}] \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}[S^{-1}]}(M[S^{-1}], N[S^{-1}])$, який переводить f/s у гомоморфізм $u/t \mapsto f(u)/st$. Якщо $M = \mathbf{A}$, це відображення — ізоморфізм. Тому воно є ізоморфізмом і для всіх вільних модулів скінченного рангу. Застосувавши обидва функтори до точної послідовності $P' \to P \to M \to 0$, де P і P' — вільні модулі скінченного рангу, ми одержимо комутативну діаграму з точними рядками

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{H}(M) & \longrightarrow & \mathrm{H}(P) & \longrightarrow & \mathrm{H}(P') \\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{H}'(M) & \longrightarrow & \mathrm{H}'(P) & \longrightarrow & \mathrm{H}'(P'),
\end{array}$$

де $\mathrm{H}(M) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M,N)[S^{-1}]$, а $\mathrm{H}'(M) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}[S^{-1}]}(M[S^{-1}], N[S^{-1}])$. В ній останні два вертикальних відображення — ізоморфізми. Тоді й перше є ізоморфізмом, тобто

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M,N)[S^{-1}] \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}[S^{-1}]}(M[S^{-1}], N[S^{-1}]).$$

Залишилося послатися на Теорему 6.5. $\square$

Наслідок A.11. *Якщо $\mathbf{A}$ — нетерове кільце і $\mathrm{gl.dim}\, \mathbf{A}_{\mathfrak{m}} \leqslant n$ для всіх максимальних ідеалів $\mathfrak{m} \subset \mathbf{A}$, то й $\mathrm{gl.dim}\, \mathbf{A} \leqslant n$.*

Доведення. Дійсно, $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{A}}(M,N)_{\mathfrak{m}} \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{A}_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, N_{\mathfrak{m}}) = 0$ при $i > n$ для довільного скінченнопородженого M, для будь-якого N і всіх максимальних ідеалів $\mathfrak{m} \subset \mathbf{A}$. Тоді й $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{A}}(M,N) = 0$. $\square$

Наслідок A.12. *Якщо X — неособливий многовид розмірності n, то $\mathcal{E}xt^i_X(\mathcal{F},\mathcal{G}) = 0$ при $i > n$ для довільних квазікогерентних пучків $\mathcal{F}, \mathcal{G}$. Якщо, до того ж, многовид X афінний і $\mathbf{A} = \Bbbk[X]$, то $\mathrm{gl.dim}\, \mathbf{A} = n$.*

Доведення. Друге твердження випливає з Наслідків A.6 і A.11. Перше твердження випливає з другого, оскільки будь-який неособливий многовид покривається відкритими афінними неособливими підмноговидами. $\square$

Додаток B. Коен–Маколеєві кільця й модулі

У цьому розділі ми вважаємо, що $\mathbf{A}$ — нетерове локальне кільце з максимальним ідеалом $\mathfrak{m}$ і полем лишків $\Bbbk = \mathbf{A}/\mathfrak{m}$, M — скінченнопороджений $\mathbf{A}$-модуль.

Означення B.1. *Глибиною* $\mathbf{A}$*-модуля* M зветься число $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M = \min\left\{ i \mid \operatorname{Ext}^i_{\mathbf{A}}(\Bbbk, M) \neq 0 \right\}$.

Приклад B.2. Якщо $\mathbf{A}$ регулярне розмірності Крулля n, то вправа A.8(3) свідчить, що $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} \mathbf{A} = n$.

Взагалі кажучи, щоб це означення було коректним, треба знати, що хоча б якийсь з $\operatorname{Ext}^i_{\mathbf{A}}(\Bbbk, M)$ ненульовий. Ми доведемо це й дамо навіть оцінку для глибини.

Означення B.3. Позначимо $\operatorname{Ass} M$ (або $\operatorname{Ass}_{\mathbf{A}} M$, якщо треба вказати кільце $\mathbf{A}$) множину тих первинних ідеалів кільця $\mathbf{A}$, які є ануляторами елементів модуля M. Такі ідеали звуться *асоційованими з модулем* M.

Лема B.4.
(1) *Якщо* N *— підмодуль в* M*, то* $\operatorname{Ass} M \subseteq \operatorname{Ass} N \cup \operatorname{Ass} M/N$.
(2) *Якщо* I *— максимальний серед ануляторів елементів модуля* M*, то* $I \in \operatorname{Ass} M$.
(3) *Множина* $\operatorname{Ass} M$ *скінченна.*
(4) *Елемент* a *є дільником нуля на* M*, тобто анулює ненульовий елемент з* M*, тоді й лише тоді, коли* $a \in \bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass} M} \mathfrak{p}$.
(5) *Ідеал* $\mathfrak{m}$ *містить недільник нуля на* M *тоді й лише тоді, коли* $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass} M$.

Доведення. (1). Нехай $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$, $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_{\mathbf{A}} u$ для деякого $u \in M$. Тоді $M' = \mathbf{A}u \simeq \mathbf{A}/\mathfrak{p}$. Якщо $M' \cap N = 0$, то M' занурюється в M/N, отже, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M/N$. Якщо ж $M' \cap N$ містить ненульовий елемент v, то $\operatorname{Ann} v = \mathfrak{p}$ (чому?), отже, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} N$.

(2). Нехай $I = \operatorname{Ann}_{\mathbf{A}} u$, $ab \in I$, $b \notin I$. Тоді $I(bu) = 0$ і $a(bu) = 0$, отже, $\operatorname{Ann}_{\mathbf{A}}(bu) \supseteq I + a\mathbf{A}$. Оскільки I — максимальний серед ануляторів, то $a \in I$.

(3). Нагадаємо, що в модулі M існує ланцюг підмодулів $M_0 = 0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_{r-1} \subset M_r = M$, в якому для кожного номера $0 < i \leqslant r$ $M_i/M_{i-1} \simeq \mathbf{A}/\mathfrak{p}_i$, де $\mathfrak{p}_i$ — деякий первинний ідеал [**Др**, Лема 5.8]. Згідно (1), тоді $\operatorname{Ass} M \subseteq \{ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r \}$.

(4) одразу випливає з (2).

(5). Згідно з (4), $\mathfrak{m}$ містить недільник нуля на M тоді й лише тоді, коли $\mathfrak{m} \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass} M} \mathfrak{p}$. Оскільки множина $\operatorname{Ass} M$ скінченна, це рівносильно тому, що $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{p}$ (тобто, $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{p}$) для всіх $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ [**Др**, Лема 3.3.18]. □

Зауважимо, що $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M = 0$ тоді й лише тоді, коли M містить підмодуль, ізоморфний $\Bbbk$, тобто, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} M$. Отже, так буде тоді й лише тоді, коли кожен елемент з $\mathfrak{m}$ є дільником нуля на M.

Твердження B.5. *Нехай елемент $a \in \mathfrak{m}$ не є дільником нуля на M, $N = M/aM$. Тоді $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} N = \operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M - 1$.*

Доведення. У цьому випадку послідовність $0 \to M \xrightarrow{a} M \to N \to 0$ є точною й індукує довгу точну послідовність для функторів $\operatorname{Ext}^i_{\mathbf{A}}(\Bbbk, \_)$. Зауважимо, що, оскільки $a\Bbbk = 0$, множення на a індукує нульовий ендоморфізм функтора $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(\Bbbk, \_)$, а тому й нульовий ендоморфізм його похідних $\operatorname{Ext}^i_{\mathbf{A}}(\Bbbk, \_)$. Отже, у точній послідовності

$$\operatorname{Ext}^i(\Bbbk, M) \xrightarrow{a} \operatorname{Ext}^i(\Bbbk, M) \to \operatorname{Ext}^i_{\mathbf{A}}(\Bbbk, N) \to \\ \to \operatorname{Ext}^{i+1}_{\mathbf{A}}(\Bbbk, M) \xrightarrow{a} \operatorname{Ext}^{m+1}_{\mathbf{A}}(\Bbbk, M)$$

перше й останнє відображення нульові, тобто, маємо точну послідовність

$$0 \to \operatorname{Ext}^i(\Bbbk, M) \to \operatorname{Ext}^i_{\mathbf{A}}(\Bbbk, N) \to \operatorname{Ext}^{i+1}_{\mathbf{A}}(\Bbbk, M) \to 0.$$

Якщо $i = \operatorname{dep}_{\mathbf{A}} N$, звідси одержимо, що $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M \leqslant \operatorname{dep}_{\mathbf{A}} N + 1$. Якщо ж $i + 1 = \operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M$, одержимо, що $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} N \leqslant \operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M - 1$. Разом це й доводить твердження. □

Означення B.6. *M-послідовністю* зветься послідовність елементів $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ з максимального ідеалу $\mathfrak{m}$ така, що для кожного $0 \leqslant k < m$ елемент a_{k+1} не є дільником нуля на модулі $M_k = M/\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$ (зокрема, a_1 не є дільником нуля на M).

Зокрема, $\mathbf{A}$-послідовність — те саме, що регулярна послідовність, всі елементи якої належать максимальному ідеалу.

Наслідок B.7. *Якщо $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ є M-послідовністю, то $\operatorname{dep} M_k = \operatorname{dep} M - k$ для кожного $k \leqslant m$.*

Наслідок B.8. *Глибина модуля M дорівнює максимальній довжині M-послідовностей.*

Доведення. Якщо $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ — деяка M-послідовність, то, за Наслідком B.7, $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M_m = \operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M - m$. Отже, $m \leqslant \operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M$. Якщо $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M - m > 0$, існує елемент $b \in \mathfrak{m}$, який не є дільником нуля на M_m, а тоді $(a_1, a_2, \dots, a_m, b)$ є довшою M-послідовністю. □

Наслідок B.9. *Нехай $I = \operatorname{Ann}_{\mathbf{A}} M$, $\mathbf{B} = \mathbf{A}/I$. Тоді $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M = \operatorname{dep}_{\mathbf{B}} M$.*

Наслідок B.10. *Якщо $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M = m$, то будь-яку M-послідовність $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ можна доповнити до M-послідовності довжини m.*

Доведення. Оскільки $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M_k = m-k$, в $\mathbf{A}$ існує M_k-послідовність $(b_1, b_2, \ldots, b_{m-k})$. Тоді $(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_{m-k})$ є M-послідовністю. □

Вправа B.11. Доведіть, що, якщо $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ є M-послідовністю, а σ — довільна перестановка індексів, то $(a_{\sigma 1}, a_{\sigma 2}, \ldots, a_{\sigma m})$ також є M-послідовністю.

Натяк: Достатньо довести це для перестановки двох сусідніх індексів.

Вправа B.12. Нехай $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, де $\mathbf{B}$ — локальне нетерове кілце, яке є скінченним розширенням $\mathbf{A}$, M — скінченнопороджений $\mathbf{B}$-модуль. Доведіть, що $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M = \operatorname{dep}_{\mathbf{B}} M$.

Натяк: Очевидно, $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M \leqslant \operatorname{dep}_{\mathbf{B}} M$. Доведіть, що, коли елемент b з максимального ідеалу кільця $\mathbf{B}$ не є дільником нуля на M, то знайдеться елемент a з максимального ідеалу кільця $\mathbf{A}$, який також не є дільником нуля на M. (Для цього досить розглянути таке найменше r, що для деяких $a_1, a_2, \ldots, a_r$ $(a_i \in \mathbf{A})$ елемент $b^r + a_1 b^{r-1} + \cdots + a_r$ є дільником нуля на M). Тепер доведення завершується індукцією.

Твердження B.13. *Позначимо*

$$d(M) = \min \{ \operatorname{K.dim} \mathbf{A}/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M \} .$$

Тоді $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M \leqslant d(M)$.

Доведення. Застосуємо індукцію за числом $d = d(M)$. Якщо $d = 0$, то $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} M$, тобто в M є підмодуль, ізоморфіний $\mathbf{A}/\mathfrak{m} = \Bbbk$, і $\operatorname{Ext}^0_{\mathbf{A}}(\Bbbk, M) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(\Bbbk, M) \neq 0$. Отже, $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M = 0$.

Припустимо, що $d > 0$ і твердження вірне для всіх модулів N з $d(N) < d$. Оскільки в цьому випадку $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass} M$, існує елемент $a \in \mathfrak{m}$, який не є дільником нуля на M. Позначимо $N = M/aM$. Якщо $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_{\mathbf{A}} u$, де $u \in M$, то $\mathfrak{p} + a\mathbf{A} \supseteq \operatorname{Ann}_{\mathbf{A}}(u + aM)$, тому знайдеться ідеал $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Ass}_{\mathbf{A}} N$ такий, що $\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}$, а тому $\operatorname{K.dim} \mathbf{A}/\mathfrak{p}' < \operatorname{K.dim} \mathbf{A}/\mathfrak{p}$. Отже, $d(N) < d$. За припущенням індукції, також $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} N < d$. За Твердженням B.5 $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M = \operatorname{dep}_{\mathbf{A}} N + 1 \leqslant d$. □

Означення B.14. *Розмірністю Крулля модуля* M зветься число

$$\begin{aligned}\operatorname{K.dim} M &= \operatorname{K.dim}(\mathbf{A}/\operatorname{Ann}_{\mathbf{A}} I) \\ &= \max \{ \operatorname{K.dim} \mathbf{A}/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ — первиний ідеал і } \mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_{\mathbf{A}} M \} .\end{aligned}$$

Очевидно, в останній рівності достатньо розглядати *мінімальні* серед первинних ідеалів, які містять $\operatorname{Ann}_{\mathbf{A}} M$.

Очевидно, $\operatorname{K.dim} M \geqslant d(M) \geqslant \operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M$.

Означення B.15. $\mathbf{A}$-модуль M зветься *Коен–Маколеєвим*, якщо $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M = \operatorname{K.dim} M$. Якщо при цьому $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M = \operatorname{K.dim} \mathbf{A}$, M зветься *максимально Коен–Маколеєвим.* Зокрема, кільце $\mathbf{A}$ зветься

Коен–Маколеєвим, якщо $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} \mathbf{A} = \mathrm{K.dim}\, \mathbf{A}$, тобто, існує регулярна послідовність елементів з $\mathfrak{m}$, довжина якої дорівнює $\mathrm{K.dim}\, \mathbf{A}$.

Приклад В.16. Регулярне кільце є Коен–Маколеєвим.

Твердження В.17. *Якщо модуль M Коен–Маколеїв, то $\operatorname{Ass} M$ збігається з множиною $\min(I)$ мінімальних первинних ідеалів, які містять ідеал $I = \operatorname{Ann}_{\mathbf{A}} M$, і $\mathrm{K.dim}\, \mathbf{A}/\mathfrak{p} = \operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M$ для кожного $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$.*

Доведення. Позначимо $d = \operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M = d(M) = \mathrm{K.dim}\, M$. За означенням, $\mathrm{K.dim}\, \mathbf{A}/\mathfrak{p}' \leqslant d$ для кожного $\mathfrak{p}' \in \min(I)$, а за Твердженням В.13, $\mathrm{K.dim}\, \mathbf{A}/\mathfrak{p} \geqslant d$ для всіх $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$. Але всі ідеали з $\operatorname{Ass} M$ містять I, отже, для кожного $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ знайдеться $\mathfrak{p}' \in \min(I)$ такий, що $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}'$. Тоді $d \leqslant \mathrm{K.dim}\, \mathbf{A}/\mathfrak{p} \leqslant \mathrm{K.dim}\, \mathbf{A}/\mathfrak{p}' \leqslant d$. Тому $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ і $\mathrm{K.dim}\, \mathbf{A}/\mathfrak{p} = d$. □

Теорема В.18. *Нехай $\mathbf{A}$ — Коен–Маколеєве кільце розмірності Крулля n, $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ — регулярна послідовність елементів з максимального ідеалу $\mathfrak{m} \subset \mathbf{A}$, $I = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$, $\mathfrak{p} \subset \mathbf{A}$ — деякий первинний ідеал.*

(1) *$\mathbf{A}/I$ є Коен–Маколеєвим кільцем розмірності Крулля $n-m$.*
(2) $\operatorname{ht} \mathfrak{p} + \mathrm{K.dim}\, \mathbf{A}/\mathfrak{p} = n$.

Доведення. Нехай $a \in \mathfrak{m}$ не є дільником нуля. З Теореми Крулля про головний ідеал [**Др**, Теорема 3.2.11] випливає, що $\mathrm{K.dim}\, \mathbf{A}/a\mathbf{A} \leqslant n-1$. З іншого боку, за Твердженням В.5, $\operatorname{dep}_b A\mathbf{A}/a\mathbf{A} = n-1$. Оскільки $\operatorname{dep}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}/a\mathbf{A}) \leqslant \mathrm{K.dim}\, \mathbf{A}/a\mathbf{A}$, звідси $\mathrm{K.dim}\, \mathbf{A}/a\mathbf{A}$ і $\mathbf{A}/a\mathbf{A}$ — Коен–Маколеєве кільце. Твердження (1) одержується тепер очевидною індукцією за m.

(2) будемо доводити індукцією за n. Якщо $n = 0$, твердження тривіальне. Припустимо, що воно вірно для кілець розмірності Крулля $n-1$. Якщо $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 0$, тобто, $\mathfrak{p}$ — мінімальний первинний ідеал, це випливає з Твердження В.17. Якщо $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = h > 0$, за тим самим твердженням, $\mathfrak{p}$ містить недільник нуля a. Позначимо $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}/a\mathbf{A} \subset \mathbf{A}/a\mathbf{A}$. Це первинний ідеал у Коен–Маколеєвому кільці $\mathbf{A}/a\mathbf{A}$ розмірності Крулля $n-1$. За припущенням індукції, $\operatorname{ht} \bar{\mathfrak{p}} + \mathrm{K.dim}\, \mathbf{A}/\mathfrak{p} = n-1$. Але, знов-таки, за Теоремою Крулля про головний ідеал, $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \geqslant \operatorname{ht} \bar{\mathfrak{p}} + 1$. Оскільки завжди $\operatorname{ht} \mathfrak{p} + \mathrm{K.dim}\, \mathbf{A}/\mathfrak{p} \leqslant n$, звідси випливає необхідна рівність. □

Нам буде потрібне ще таке твердження.

Теорема В.19. *Якщо кільце $\mathbf{A}$ регулярне, то для будь-якого скінченнопородженого $\mathbf{A}$-модуля M*

$$\operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M + \operatorname{pr.dim}_{\mathbf{A}} M = \mathrm{K.dim}\, \mathbf{A}.$$

Доведення проведемо індукцією за $d = \operatorname{dep}_{\mathbf{A}} M$. Зауважимо, що, за Наслідком А.6, $d \leqslant n$, де $n = \mathrm{K.dim}\, \mathbf{A}$. Якщо $d = 0$, то існує занурення $\Bbbk \to M$. Оскільки $\mathrm{Tor}^{\mathbf{A}}_{n+1} = 0$, з точної послідовності для функторів Tor одержимо занурення $\mathrm{Tor}^{\mathbf{A}}_n(\Bbbk,\Bbbk) \to \mathrm{Tor}^{\mathbf{A}}_n(\Bbbk, M)$. Але $\mathrm{Tor}^{\mathbf{A}}_n(\Bbbk,\Bbbk) \simeq \Bbbk$ (див. Наслідок A.9). Отже, й $\mathrm{Tor}^{\mathbf{A}}_n(\Bbbk, M) \neq 0$ і $\mathrm{pr.dim}_{\mathbf{A}} M = n$.

Припустимо, що $d > 0$ і твердження вірне для модулів глибини меншої за d. Існує елемент $a \in \mathfrak{m}$, який не є дільником нуля на M. Тоді множення на a анулює функтори $\mathrm{Tor}^{\mathbf{A}}_i(\Bbbk, \_)$. Отже, точна послідовність $0 \to M \xrightarrow{a} M \to N \to 0$, де $N = M/aM$, індукує точні послідовності

$$0 \to \mathrm{Tor}^{\mathbf{A}}_i(\Bbbk, M) \to \mathrm{Tor}^{\mathbf{A}}_i(\Bbbk, N) \to \mathrm{Tor}^{\mathbf{A}}_{i-1}(\Bbbk, N) \to 0.$$

Звідси випливає, що $\mathrm{pr.dim}_{\mathbf{A}} N = \mathrm{pr.dim}_{\mathbf{A}} M + 1$. Оскільки, за Твердженням B.5, $\mathrm{dep}_{\mathbf{A}} N = \mathrm{dep}_{\mathbf{A}} M - 1$, а тому , за припущенням індукції, $\mathrm{dep}_{\mathbf{A}} N + \mathrm{pr.dim}_{\mathbf{A}} N = n$, одержуємо необхідну рівність і для модуля M. $\square$

Покажчик

Література

[Год] Р. Годеман. Алгебраическая топология и теория пучков. ИЛ. Москва, 1961.

[Гр] А. Гротендик. О некоторых вопросах гомологической алгебры. ИЛ. Москва, 1961.

[АЧ] Ю. Дрозд. Теорія алгебричних чисел. Вид. Київського Університету, 1998.

[Др] Ю. Дрозд. Вступ до алгебричної геометрії. ВНТЛ–Класика. Львів, 2004.

[Х] Р. Хартсхорн. Алгебраическая геометрия. Мир. Москва, 1981.

[Ш] И. Р. Шафаревич. Основы алгебраической геометрии. МЦМНО. Москва, 2007.