СЕРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ТОМ 38, № 2, 1974

УДК 519.49

Ю. А. ДРОЗД, А. Г. ЗАВАДСКИЙ, В. В. КИРИЧЕНКО

МАТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ И ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Для произвольной линейной матричной задачи строится порядок, представления которого классифицируются матрицами данной задачи. Показывается, как в эту схему включаются задачи о представлениях частично упорядоченных множеств.

Техника «матричных задач» и, в частности, представления частично упорядоченных множеств (ч. у. м.) ([1]) в последнее время стали широко применяться в теории представлений. Однако оставался открытым вопрос о реализации этих задач. В частности, было неясно, можно ли каждому ч. у. м. S сопоставить какое-то кольцо, представления которого находились бы в естественном соответствии с представлениями S. В настоящей заметке мы покажем, что это можно сделать на уровне целочисленных представлений, точнее, представлений над дискретно нормированными кольцами. Более того, аналогичную конструкцию можно осуществить и для более широкого класса задач — линейных матричных задач над полем K.

Пусть A — конечномерная K-алгебра, V — конечномерный правый A-модуль. Построим категорию $C(V)$, объектами которой являются A-подмодули в $U\otimes_K V$, где U — конечномерное векторное пространство, а морфизм объекта $X\subset U\otimes_K V$ в объект $Y\subset W\otimes_K V$ — это такое линейное отображение $\varphi : U\to W$, что $(\varphi\otimes 1)(X)\subset Y$. Линейная матричная задача — это задача классификации объектов $C(V)$ с точностью до изоморфизма.

Очевидно, модуль V можно считать точным. Тогда A отождествляется с подалгеброй в $E=\mathrm{End}_K V$. Пусть D — дискретно нормированное кольцо с полем вычетов K (например, $K[[T]]$, или, если K — поле из p элементов, кольцо целых p-адических чисел), π — простой элемент D. Рассмотрим D-решетку L (т. е. свободный D-модуль) ранга $n=\dim V$. Если $\Gamma=\mathrm{End}_D L$, то $\Gamma/\pi\Gamma\simeq E$, а $L/\pi L\simeq V$ как E-модуль. Обозначим через Λ прообраз подалгебры $A\subset E$ в кольце Γ и рассмотрим категорию $R(\Lambda)$ представлений Λ (над D), т. е. Λ-модулей, являющихся D-решетками. Всякий такой модуль M естественно погружается в Γ-модуль $M\Gamma$, являющийся представлением Γ. Но всякий Γ-модуль имеет вид $F\otimes_D L$, где F — некоторая D-решетка, а всякий Γ-гомоморфизм $F\otimes_D L\to G\otimes_D L$ имеет вид $f\otimes 1$, где $f : F\to G$ — гомоморфизм D-модулей, причем f — изоморфизм тогда и только тогда, когда $\bar{f}: U \to W$ — изоморфизм, где $U = F/\pi F$, $W = G/\pi G$ [см. (2)].

Поскольку $\Lambda \supset \pi\Gamma$, $M \supset \pi M\Gamma$. Обозначим $\bar{M} = M/\pi M\Gamma$. Это A-подмодуль в $\overline{M\Gamma} = M\Gamma/\pi M\Gamma$. Пусть $g: M \to N$ — гомоморфизм Λ-представлений. Он продолжается до Γ-гомоморфизма $g\Gamma: M\Gamma \to N\Gamma$, причем если $M\Gamma = F \otimes_D L$, $N\Gamma = G \otimes_D L$, а $g\Gamma = f \otimes 1$, где $f: F \to G$, то g, $g\Gamma$ и f являются изоморфизмами одновременно. Кроме того, если $U = F/\pi F$, $W = G/\pi G$ и $\bar{f}: U \to W$ — гомоморфизм, индуцированный f, то $\overline{M\Gamma} = U \otimes_K V$, $\overline{N\Gamma} = W \otimes_K V$ и $(\bar{f} \otimes 1)(\bar{M}) \subset \bar{N}$.

Заметим, что A-подмодуль $X \subset U \otimes_K V$ имеет вид $\bar{M}$ тогда и только тогда, когда $XE = U \otimes_K V$. Однако для любого $X \subset U \otimes_K V$ XE есть прямое слагаемое в $U \otimes_K V$, т. е. $U = U_1 \oplus U_2$, причем $X \subset U_1 \otimes_K V$ и $XE = U_1 \otimes_K V$. Следовательно, объект $X \subset U \otimes_K V$ категории $C(V)$ есть прямая сумма объектов $X \subset U_1 \otimes_K V$ и $0 \subset U_2 \otimes_K V$. Второе же слагаемое изоморфно O^k, где O — объект $C(V)$, определяемый нулевым подмодулем в V, а $k = \dim U_2$. Из этих рассуждений вытекает

ТЕОРЕМА. *Пусть M и N — представления Λ, $g: M \to N$ — гомоморфизм, $M\Gamma = F \otimes_D L$, $N\Gamma = G \otimes_D L$, $U = F/\pi F$, $W = G/\pi G$, $g\Gamma = f \otimes 1$, где $f: F \to G$ и $\bar{f}: U \to W$ — индуцированное f отображение. Полагая $\Phi(M) = \bar{M} \subset U \otimes_K V$ и $\Phi(g) = \bar{f}$, мы получаем функтор $\Phi: R(\Lambda) \to C(V)$. При этом $\Phi(M) \simeq \Phi(N)$ тогда и только тогда, когда $M \simeq N$. Всякий объект $C(V)$ изоморфен $\Phi(M) \oplus O^k$ для некоторого $M \in R(\Lambda)$.*

Итак, классификация представлений Λ равносильна данной линейной матричной задаче.

В заключение покажем, как в эту схему включить представления ч. у. м. S, т. е. гомоморфизмы S в структуру подпространств конечномерного пространства U. Для этого построим алгебру $A = A(S)$ с базисом $\{a_{ij} \mid i, j \in S;\ i \leqslant j\}$ и таблицей умножения $a_{ij}a_{kl} = \delta_{jk}a_{il}$ и A-модуль $V = V(S)$ с базисом $\{v_i \mid i \in S\}$ и действием операторов: $v_i a_{jk} = \delta_{ij} v_k$. Если X — A-подмодуль в $U \otimes_K V$, то, сопоставляя $i \in S$ подпространство $X_i = \{u \in U \mid u \otimes v_i \in X\}$, мы получим представление S в U. Наоборот, если $i \to X_i$ — представление S в U, то $X = \sum_i X_i \otimes v_i$ — подмодуль в $U \otimes_K V$. Если $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, то A можно отождествить с подалгеброй в $M_n(K)$ с базисом $\{e_{ij} \mid i, j \in S;\ i \leqslant j\}$ (e_{ij} — матричные единицы). Тогда соответствующее кольцо $\Lambda = \Lambda(S)$ — это подкольцо в $M_n(D)$ с D-базисом $\{d_{ij}e_{ij} \mid i, j \in S\}$, где $d_{ij} = 1$ при $i \leqslant j$ и $d_{ij} = \pi$ в противном случае. Представления $\Lambda(S)$ над D классифицируются в точности представлениями ч. у. м. S.

Замечания. 1) Подобным же образом можно свести к матричной задаче (уже не обязательно линейной) классификацию представлений любого D-порядка Λ такого, что $\Gamma \supset \Lambda \supset \pi\Gamma$ для какого-то максимального порядка Γ. Если же $\Lambda \not\supset \pi\Gamma$, то получается задача уже не над K, а над факторкольцами $D/\pi^k D$.

2) Заменяя подмодуль $X \subset U \otimes_K V$ его проективным накрытием P, точнее, гомоморфизмом $P \to U \otimes_K V$, мы получим интерпретацию линейной

матричной задачи в терминах V-матриц ([3]). При этом для ч. у. м. получается фактически исходная матричная трактовка работы ([1]).

Авторы выражают благодарность А. В. Ройтеру за интересное обсуждение, приведшее к написанию этой статьи.

Поступило
26.VI.1973

Литература

1 Назарова Л. А., Ройтер А. В., Представления частично упорядоченных множеств, Записки научн. сем. ЛОМИ, 28 (1972), 5—31.

2 Roggenkamp K. W., Huber-Dyson V., Lattices over orders I, Lecture Notes in Math., 115, Springer, 1970.

3 Дрозд Ю. А., Матричные задачи и категории матриц, Записки научн. сем. ЛОМИ, 28 (1972), 144—153.