ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
31 (1967), 783—798

УДК 519.49

Ю. А. ДРОЗД, А. В. РОЙТЕР

КОММУТАТИВНЫЕ КОЛЬЦА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ НЕРАЗЛОЖИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

В статье решается вопрос о конечности числа неизоморфных неразложимых целочисленных представлений для произвольного коммутативного Z-кольца.

С. Д. Берманом и П. М. Гудивоком (1) и независимо Джонсом (2) был решен вопрос о том, какие группы имеют конечное число неизоморфных неразложимых целочисленных представлений. Аналогичный вопрос естественно возникает и для целочисленных представлений колец. Дейд (3) дал некоторые необходимые условия для того, чтобы кольцо имело конечное число неразложимых представлений. П. М. Гудивок (4) решил соответствующий вопрос для представлений групповых колец над квадратичными кольцами, один из авторов (5) — для целочисленных представлений кубических колец. В работах (6) — (12) рассматриваются некоторые типы колец, у которых все неразложимые модули представлений изоморфны идеалам.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть Λ — коммутативное Z-кольцо, т. е. коммутативное кольцо с единицей, аддитивная группа которого является свободной абелевой группой конечного ранга. Без ограничения общности мы можем считать, что алгебра $\widetilde{\Lambda} = \Lambda \otimes_Z Q$ над полем рациональных чисел Q полупроста, так как в противном случае Λ имело бы бесконечное число неизоморфных неразложимых представлений. Пусть $\overline{\Lambda}$ — целое замыкание Λ в $\widetilde{\Lambda}$, $I = \overline{\Lambda} / \Lambda$, I' — пересечение максимальных подмодулей Λ-модуля I. Для того чтобы Λ имело конечное число неизоморфных неразложимых целочисленных представлений, необходимо и достаточно, чтобы I' был циклическим Λ-модулем, а I имел не более двух образующих.*

Доказательство теоремы проводится следующим образом. Прежде всего, пользуясь обычными в теории целочисленных представлений методами [см. (13)], легко свести задачу к p-адическим представлениям полных локальных колец. Необходимость доказывается методами, аналогичными методам Дейда (3). В доказательстве достаточности основную роль играет то обстоятельство, что кольцо множителей Λ' радикала $\mathfrak{P}$ локального кольца, удовлетворяющего условиям теоремы, является кольцом с циклическим индексом, представления которых хорошо изучены [см. (7)]. Поэтому для любого Λ-модуля A модуль $A' = A\mathfrak{P}$, являющийся пересечением максимальных подмодулей модуля A, распадается в прямую сумму идеалов над Λ'. С другой стороны, фактор-модуль A/A', очевидно, изоморфен прямой сумме нескольких экземпляров простого модуля $K = \Lambda / \mathfrak{P}$.

Таким образом, возникает типичная в теории целочисленных представлений ситуация изучения модуля, у которого фиксированные подмодуль и фактор-модуль распадаются в прямую сумму большого числа модулей небольшой размерности. Появляющиеся при этом технические трудности требуют громоздких вычислений. Однако задача сильно упрощается благодаря тому, что выкладки оказываются аналогичными выкладкам, проделанным при изучении кубических колец [см. ([5])]. Более того, как оказалось, все типы коммутативных Z-колец с конечным числом неразложимых представлений имеют своих представителей среди кубических колец.

В процессе доказательства теоремы 1 дается описание неразложимых представлений колец, удовлетворяющих условиям теоремы, в локальном случае.

§ 1. Сведение к локальному случаю

Пусть Z_p — кольцо целых p-адических чисел, $\Lambda_p = \Lambda \underset{Z}{\otimes} Z_p$. Почти дословно повторяя рассуждения ([2]) [см. также ([13])], можно доказать следующее

Предложение 1.1. *Z-кольцо Λ имеет конечное число неизоморфных неразложимых целочисленных представлений тогда и только тогда, когда кольцо Λ_p имеет конечное число неизоморфных неразложимых представлений над Z_p для всех простых p.*

Заметим, что для каждого p $\Lambda_p = \sum\limits_i \oplus^i \Lambda$, где Λ^i_p — полные локальные кольца. Поэтому вопрос о конечности числа неразложимых представлений для Λ сводится к аналогичному вопросу для полных локальных колец Λ^i_p. Очевидно, $I = \sum\limits_{i,p} \oplus I^i_p$, $I' = \sum\limits_{i,p} \oplus I'^i_p$, где $I = \overline{\Lambda} / \Lambda$, $I^i_p = \overline{\Lambda}^i_p / \Lambda^i_p$, $\overline{\Lambda}(\overline{\Lambda}^i_p)$ — целое замыкание $\Lambda(\Lambda^i_p)$ в его полном кольце частных, $I'(I'^i_p)$ — пересечение максимальных подмодулей модуля $I(I^i_p)$. Следуя ([9]), обозначим минимальное число образующих модуля X через $\mu(X)$. Нетрудно показать, что

$$\mu(I) = \max_{i,\, p} \mu(I_p), \quad \mu(I') = \max_{i,\, p} \mu(I'^i_p).$$

Поэтому при доказательстве основной теоремы 1 вместо целочисленных представлений Z-кольца можно рассматривать представления полного локального кольца над кольцом целых p-адических чисел.

Соответствующую теорему можно доказать в несколько большей общности.

Начиная с этого момента, будем обозначать через Λ полное локальное (коммутативное) нетерово кольцо с единицей размерности Крулля 1 без нильпотентных элементов и такое, что его целое замыкание $\overline{\Lambda}$ в полном кольце частных $\widetilde{\Lambda}$ есть конечнопорожденный Λ-модуль. Напомним [см.

([14])], что конечнопорожденный Λ-модуль A называется модулем без кручения (torsionless), если естественный гомоморфизм $A \to A^{**}$ (где $A^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \Lambda)$) есть мономорфизм.

Из предыдущих рассмотрений видно, что основная теорема 1 вытекает из нижеследующей теоремы 1′.

ТЕОРЕМА 1′. *Кольцо Λ имеет конечное число неизоморфных неразложимых модулей без кручения тогда и только тогда, когда $\mu(I) \leqslant 2$, $\mu(I') \leqslant 1$, где $I = \bar{\Lambda}/\Lambda$, I' — пересечение максимальных подмодулей модуля I.*

Заметим, что в глобальном случае теорема 1 не переносится на произвольные кольца размерности 1 ввиду отсутствия теоремы Жордана — Цассенхауза. Однако можно доказать следующее утверждение.

Коммутативное нетерово кольцо с единицей размерности Крулля 1 без нильпотентных элементов такое, что его целое замыкание в полном кольце частных есть конечнопорожденный модуль, имеет конечное число неразложимых родов модулей без кручения тогда и только тогда, когда $\mu(I) \leqslant 2$, $\mu(I') \leqslant 1$. Здесь I и I' имеют тот же смысл, что и выше, род — совокупность модулей, становящихся изоморфными при локализациях кольца по всем максимальным идеалам.

§ 2. Доказательство необходимости

Будем говорить, что Λ-модули без кручения B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют серию, если B_n — неразложимый модуль для любого n и $\mu(B_n) \to \infty$ при $n \to \infty$. В этом параграфе мы построим серии для колец, не удовлетворяющих условиям теоремы 1.

Пусть $\mathfrak{P}$ — максимальный идеал Λ, M — некоторое надкольцо: $\Lambda \subset M \subset \bar{\Lambda}$. Тогда $M / \mathfrak{P}M = \mathfrak{A}$ есть алгебра над полем $K = \Lambda / \mathfrak{P}$, причем $\dim \mathfrak{A} = \mu(M)$.

Предложение 2.1. *Если для всякого n в $\mathfrak{A}^{(n)}$ можно выбрать K-подпространство v_n, удовлетворяющее условиям:*

а) $v_n \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(n)}$;

б) *для всякого* $\varphi\colon \mathfrak{A}^{(n)} \to \mathfrak{A}^{(n)}$ *такого, что* $\varphi^2 = \varphi$ *и* $\varphi(v_n) \subset v_n$, *либо* $\varphi = 0$, *либо* $\varphi = 1$,

то полные прообразы v_n в $M^{(n)}$ относительно проекции $\pi\colon M^{(n)} \to M^{(n)}/M^{(n)}\mathfrak{P} = \mathfrak{A}^{(n)}$ образуют серию.

Доказательство. Положим $\pi^{-1}(v_n) = B_n$. Очевидно, $\mu(B_n) \to \infty$. Покажем неразложимость B_n. Если B_n разложим, то существует идемпотентный эндоморфизм $\psi\colon B_n \to B_n$ такой, что $\psi \neq 0$, $\psi \neq 1$. Так как $B_n M = M^{(n)}$, то ψ можно продолжить до M-гомоморфизма $\psi'\colon M^{(n)} \to M^{(n)}$, причем $\psi'(B_n) \subset B_n$, $\psi'^2 = \psi'$, $\psi' \neq 0$, $\psi' \neq 1$. Приводя по модулю $\mathfrak{P}$, получим $\mathfrak{A}$-эндоморфизм $\bar{\psi}\colon \mathfrak{A}^{(n)} \to \mathfrak{A}^{(n)}$ такой, что $\bar{\psi}(v_n) \subset v_n$ и $\bar{\psi}^2 = \bar{\psi}$. Но тогда либо $\bar{\psi} = 0$, либо $\bar{\psi} = 1$. Пусть $\bar{\psi} = 0$. Тогда $\mathrm{Im}\,\psi' \subset \mathfrak{P}M^{(n)}$ и так как $M^{(n)} = \mathrm{Im}\,\psi' + \mathrm{Ker}\,\psi'$, то $M^{(n)} = \mathrm{Ker}\,\psi'$ (по лемме Накаяма) и $\psi' = 0$. Аналогично, из $\bar{\psi} = 1$ следует $\psi' = 1$, что противоречит выбору ψ. Тем самым предложение 2.1 доказано.

Подпространства v_n, удовлетворяющие условиям а) и б), будем называть генератором серии. Обычно мы будем искать v_n в виде совокупности векторов вида

$$(x_1+y_1\alpha,\ x_2+y_2\alpha+y_1\beta,\ x_3+y_3\alpha+y_2\beta,\ldots,x_n+y_n\alpha+y_{n-1}\beta),$$

где α, β — фиксированные элементы из $\mathfrak{A}$, а x_i и y_i независимым образом пробегают все K. Базис v_n образуют вектора $e_i=(0,\ldots,1,\ldots 0)$ (1 на i-м месте) и $f_i=e_i\alpha+e_{i+1}\beta$ $(i=1,\ldots,n;\ e_{i+1}=0)$. То, что $v_n\ni e_i$, обеспечивает выполнение условия а) $\mathfrak{A}^{(n)}=v_n\mathfrak{A}$. Кроме того, отождествляя $\varphi\colon \mathfrak{A}^{(n)}\to\mathfrak{A}^{(n)}$, как обычно, с некоторой $n\times n$ матрицей (φ_{ij}), $\varphi_{ij}\in\mathfrak{A}$, мы видим, что если $\varphi(e_i)\in v_n$, то строки φ — вектора из v_n: $\varphi_{ij}=x_{ij}+y_{ij}\alpha+y_{ij-1}\beta$ $(y_{i0}=0)$. Условия $\varphi(f_i)\in v_n$ дают систему уравнений для x_{ij}, y_{ij} $(i,j=1,\ldots,n)$:

$$x_{ij}\alpha+y_{ij}\alpha^2+y_{ij-1}\beta\alpha+x_{i+1j}\beta+y_{i+1j}\alpha\beta+y_{i+1j-1}\beta^2=a_j^i+b_j^i\alpha+b_{j-1}^i\beta$$

(полагая $b_0^i=0$, $x_{n+1j}=y_{n+1j}=0$), где a_j^i, b_j^i — фиксированные элементы из K.

Предложение 2.2. *Если α и β удовлетворяют одному из условий:*

А) $1,\alpha,\alpha^2,\beta$ *линейно независимы над* K;

Б) $\alpha^2=0$; $1,\alpha,\beta,\beta\alpha$ *линейно независимы над* K;

В) $\alpha^2=\beta^2=\alpha\beta=0$; $1,\alpha,\beta$ *линейно независимы над* K,

то v_n образуют генератор серии.

А) Пусть $1,\alpha,\alpha^2,\beta$ линейно независимы и $\varphi\colon\mathfrak{A}^{(n)}\to\mathfrak{A}^{(n)}$ такое, что $\varphi(v_n)\subset v_n$. Тогда система уравнений, рассмотренная выше, даст при $i=n$:

$$\begin{gathered}x_{n1}\alpha+y_{n1}\alpha^2+a_1^n+b_1^n\alpha,\\ x_{n2}\alpha+y_{n2}\alpha^2+y_{n1}\beta\alpha=a_2^n+b_2^n\alpha+b_1^n\beta,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_{nn}\alpha+y_{nn}\alpha^2+y_{nn-1}\beta\alpha=a_n^n+b_n^n\alpha+b_{n-1}^n\beta.\end{gathered}\tag{1}$$

Отсюда $y_{n1}=y_{n2}=\ldots=y_{nn}=0$; $x_{nj}=b_j^n$, $x_{n1}=x_{nz}=\ldots=x_{nn-1}=0$ и последняя строка φ имеет вид $(0,0,\ldots,0,a)$, $a=x_{nn}\in K$. При $i=n-1$ получим аналогичные уравнения для $j=1,\ldots,n-1$ и уравнение

$$x_{n-1n}\alpha+y_{n-1n}\alpha^2+y_{n-1n-1}\beta\alpha+a\beta=a_n^{n-1}+b_n^{n-1}\alpha+b_{n-1}^{n-1}\beta.$$

Поэтому $\varphi_{n-1j}=0$ при $j<n-1$, $y_{n-1\,n-1}=0$ и $x_{n-1\,n-1}=b_{n-1}^{n-1}=a$.

Аналогично, $\varphi_{ii}=a$, $\varphi_{ij}=0$ при $i>j$, т. е.

$$\varphi=\begin{pmatrix}a & & *\\ & a\ddots & \\ 0 & & \ddots a\end{pmatrix}.$$

Если при этом $\varphi^2=\varphi$, то либо $\varphi=0$, либо $\varphi=1$, т. е. v_n удовлетворяет условию б) и образуют генератор серии.

Б) Пусть теперь $\alpha^2=0$, а $1,\alpha,\beta,\beta\alpha$ линейно независимы. Тогда из системы уравнений (1) мы получим: $x_{n1}=\ldots=x_{nn-1}=0$, $y_{n1}=\ldots$ $\ldots=y_{nn-1}=0$, т. е. $(\varphi_{n1},\ldots,\varphi_{nn})=(0,\ldots,0,a+b\alpha)$. Если $\varphi^2=\varphi$, то $(a+b\alpha)^2 = a^2 + 2b\alpha = a + b\alpha$, откуда $b = 0$, а $a = 0$ или $a = 1$. Аналогично доказательству А) показывается, что $\varphi_{ij} = \delta_{ij}a$, т. е. либо $\varphi = 0$, либо $\varphi = 1$.

В) Пусть, наконец, $\alpha^2 = \beta^2 = \alpha\beta = 0$, а $1, \alpha, \beta$ линейно независимы. Тогда можно показать, что $\varphi_{ij} \in K\alpha + K\beta$ при $i > j$; $\varphi_{ii} = a + \varphi'_{ii}$, $a \in K$, $\varphi'_{ii} \in K\alpha + K\beta$, т. е.

$$(\varphi_{ij}) = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a \end{pmatrix} + (\varphi'_{ij}),$$

где первая матрица с элементами из K, вторая — из $K\alpha + K\beta$. Если $\varphi^2 = \varphi$, то, учитывая, что $(\varphi\quad)^2 = 0$, мы получим снова $\varphi = 0$, либо $\varphi = 1$.

Итак, если в $\mathfrak{A}$ можно выбрать α, β, удовлетворяющие условиям А), Б) или В), то в $\mathfrak{A}^{(n)}$ найдется v_n, удовлетворяющее условиям а) и б).

Теперь мы можем доказать необходимость в теореме $1'$. Покажем, прежде всего, что если либо $\mu(I)$, либо $\mu(I')$ больше 2, то Λ имеет серию. Нетрудно проверить, что если Λ_1 — надкольцо Λ, то $\mu(\Lambda_1) = \mu(\Lambda_1/\Lambda) + 1$ и, следовательно,

$$\mu(I) = \mu(\overline{\Lambda}) - 1, \quad \mu(I') = \mu(\Lambda') - 1; \quad \Lambda' = \Lambda + \mathfrak{P}\overline{\Lambda}.$$

Поэтому если $\mu(I) \geqslant 3$ или $\mu(I') \geqslant 3$, то у Λ есть надкольцо M с $\mu(M) \geqslant 4$.

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A} = M/\mathfrak{P}M$. $\dim \mathfrak{A} \geqslant 4$. Если в $\mathfrak{A}$ найдется элемент α такой, что $1, \alpha, \alpha^2$ линейно независимы, то можно подобрать β такое, что и $1, \alpha, \alpha^2, \beta$ будут линейно независимы, т. е. α, β будут удовлетворять условию А), а значит, из предложения 2.2 следует, что Λ имеет серию.

Пусть для всякого $\alpha \in \mathfrak{A}$ $1, \alpha, \alpha^2$ линейно зависимы. Тогда, в частности, если $\alpha \in R$ (радикалу алгебры $\mathfrak{A}$), то $1, \alpha, \alpha^2$ линейно зависимы и потому $\alpha^2 = 0$. Кроме того, в фактор-алгебре $\mathfrak{A}/R$ также $1, \alpha, \alpha^2$ линейно зависимы для любого α. Если $\mathfrak{A}/R = \sum_{i=1}^{s} \oplus K_i$ (K_i — конечномерное расширение K), то $\dim K_i \leqslant 2$ и, кроме того, если $s \geqslant 2$, то все K_i совпадают с K. Если $s \geqslant 4$, то серию можно построить, пользуясь методом Дейда ([3]). Таким образом, можно считать $s \leqslant 3$ и, следовательно, $R \neq 0$.

Предположим, что $\dim R = 1$. Тогда $s = 3$. Пусть e_1, e_2, e_3 — ортогональные идемпотенты в $\mathfrak{A}$. Найдется i такое, что $e_i R \neq 0$. Но тогда $e_i R = R$ и $e_j R = 0$ при $j \neq i$. Положим $\alpha = e_j + r$ $(r \in R)$; $\alpha^2 = e_j$ и потому $1, \alpha, \alpha^2$ линейно независимы, что противоречит предположению.

Итак, $\dim R \geqslant 2$. Пусть α и β — линейно независимые элементы R. Если $\beta\alpha = 0$, то выполняется условие В) предложения 2.2 Пусть $\beta\alpha \neq 0$. Покажем, что тогда $1, \alpha, \beta, \beta\alpha$ линейно независимы. Действительно, иначе $\beta\alpha = x\alpha + y\beta$ $(x, y \in K)$, и домножая на α и на β, получим $x = 0$ и $y = 0$, т. е. $\beta\alpha = 0$. Итак, если $\beta\alpha \neq 0$, то выполняется условие Б) предложения 2.2. Во всех этих случаях Λ имеет серию.

Рассмотрим теперь случай $\mu(I) = \mu(I') = 2$, т. е. $\mu(\overline{\Lambda}) = \mu(\Lambda') = 3$, где $\Lambda' = \Lambda + \mathfrak{P}\overline{\Lambda}$. $\mathfrak{P}\overline{\Lambda}$ — максимальный подмодуль в Λ', причем $(\mathfrak{P}\overline{\Lambda})^2 \subset$

$\subset \mathfrak{P}\Lambda'$. Рассмотрим аглебру $\mathfrak{A} = \Lambda'/\mathfrak{P}\Lambda'$ и в ней максимальный идеал $R = \mathfrak{P}\overline{\Lambda} / \mathfrak{P}\Lambda'$. $R^2 = 0$, значит, R — радикал $\mathfrak{A}$. Кроме того, $\dim R = 2$. Но тогда (предложение 2.2, B)) Λ имеет серию.

Итак, мы построили серию для колец с $\mu(I) > 2$, $\mu(I') > 2$ и $\mu(I) = \mu(I') = 2$. Чтобы закончить доказательство необходимости, покажем, что если $\mu(I) < 2$, то и $\mu(I') < 2$. Это вытекает из следующего предложения, которое нам понадобится и в дальнейшем.

Предложение 2.3. *Если модуль I цикличен, то и всякий его подмодуль цикличен.*

$\mu(I) = 1$ означает, что $\mu(\overline{\Lambda}) = 2$. Поэтому $\widetilde{\Lambda}$ есть либо поле, либо прямая сумма двух полей. Покажем, что найдется $r \in \mathfrak{P}$ такое, что $\mathfrak{P}\overline{\Lambda} = r\overline{\Lambda}$. Действительно, $\mathfrak{P}$ — конечнопорожденный Λ-модуль: $\mathfrak{P} = r_1\Lambda + \ldots + r_t\Lambda$. Если $\widetilde{\Lambda}$ — поле, то $\overline{\Lambda}$ — полное кольцо с дискретной оценкой ν, и в качестве r можно взять то r_i, для которого $\nu(r_i)$ минимально. Пусть $\widetilde{\Lambda} = F_1 \oplus F_2$, $\overline{\Lambda} = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$, где Λ_i — полное кольцо с дискретной оценкой ν_i. Предположим, что $\nu_1(r_1)$ и $\nu_2(r_2)$ минимальны. Тогда если $\nu_1(r_1) = \nu_1(r_2)$ или $\nu_2(r_1) = \nu_2(r_2)$, то за r можно принять соответственно r_2 или r_1. Если же $\nu_1(r_2) > \nu_1(r_1)$, $\nu_2(r_1) > \nu_2(r_2)$, то за r можно принять $r_1 + r_2$.

Итак, $\mathfrak{P}\overline{\Lambda} = r\Lambda$ $(r \in \mathfrak{P})$. Пусть $\overline{\Lambda} = \Lambda + x\Lambda$. Тогда $\mathfrak{P}^i\overline{\Lambda} = r^i\overline{\Lambda} = r^i\Lambda + r^ix\Lambda$ и $\mathfrak{P}^i\Lambda + \Lambda = \Lambda + r^ix\Lambda$.

Таким образом, $(\mathfrak{P}^i\overline{\Lambda} + \Lambda) / \Lambda$ — циклический модуль и его единственный максимальный подмодуль есть $(\mathfrak{P}^{i+1}\overline{\Lambda} + \Lambda) / \Lambda$. Но тогда, учитывая, что $(\mathfrak{P}\Lambda + \Lambda) / \Lambda$ — единственный максимальный подмодуль модуля I, заключаем, что всякий подмодуль в I есть $(\mathfrak{P}^i\overline{\Lambda} + \Lambda) / \Lambda$. Предложение доказано.

§ 3. Сведение доказательства достаточности к приведению некоторых матриц

Будем в этом параграфе обозначать через M некоторое надкольцо кольца Λ, $\Lambda \subset M \subset \overline{\Lambda}$.

Кольцо M называется горенштейновым [см. ([10])], если $\mathrm{inj.\,dim}_M M < \infty$ *.

В ([10]) показано, что если M горенштейново, то всякий M-модуль без кручения имеет вид $P \oplus X$, где P — проективный M-модуль, X — модуль над некоторым кольцом M', $M \subset M' \subset \overline{M}$.

Кольцо M будем называть бассовым, если M и все его надкольца горенштейновы. В ([8]) доказано, что порядок M в поле является бассовым тогда и только тогда, когда $\overline{M} / M$ — циклический M-модуль. Докажем соответствующее утверждение в нужной нам ситуации.

Предложение 3.1. *Кольцо M бассово тогда и только тогда, когда $\overline{M} / M$ — циклический M-модуль.*

* В случае, когда M — Z_p-кольцо, это эквивалентно тому, что $M \approx M^*$ в терминологии ([15]).

Необходимость следует из ([10]). Докажем достаточность. Если $\mathfrak{M}$ — максимальный идеал в M и $M \neq \overline{M}$, то $\mathfrak{M}^{-1}$ — надкольцо M, $\mathfrak{M}^{-1} / M$ — подмодуль модуля $\overline{M} / M$. Из предложения 2.3 следует, что $\mathfrak{M}^{-1} / M$ — циклический и потому $\mathfrak{M}^{-1} / M \approx M / \mathfrak{M}$. Следовательно, M горенштейново [см. ([10])]. Так как для всякого надкольца $M' \supset M$ $\overline{M} / M'$ — также циклический модуль, то M' горенштейново и M бассово.

Предложение 3.2. *Если $\mu(I) = 2$, I' — циклический Λ-модуль, то всякий подмодуль I' также цикличен.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 2.3.

Заметим, что при доказательстве достаточности в теореме 1′ можно считать Λ негоренштейновым, так как если Λ горенштейново, то всякий неразложимый Λ-модуль без кручения либо изоморфен Λ, либо есть модуль над некоторым надкольцом кольца Λ, которое также удовлетворяет условиям теоремы.

Важную роль для нас будет играть следующее

Предложение 3.3. *Если негоренштейново кольцо Λ удовлетворяет условиям теоремы* 1′, *то $\mathfrak{P}^{-1} = \{x\colon\ x\mathfrak{P} \subset \Lambda\}$ есть бассово кольцо.*

При $\mu(I) \leqslant 1$ из предложения 3.1 следует, что Λ бассово. Поэтому можно считать $\mu(I) = 2$, $\mu(I') \leqslant 1$. $\mathfrak{P}^{-1}$ — надкольцо Λ. Если $\mathfrak{P}^{-1} \not\subset$ $\not\subset \mathfrak{P}\overline{\Lambda} + \Lambda$, то $\mathfrak{P}\overline{\Lambda} + \mathfrak{P}^{-1}$ — максимальный подмодуль $\overline{\Lambda}$. Но тогда $\overline{\Lambda} / \mathfrak{P}^{-1}$ — циклический $\mathfrak{P}^{-1}$-модуль и $\mathfrak{P}^{-1}$ бассово. Если же $\mathfrak{P}^{-1} \subset \mathfrak{P}\overline{\Lambda} + \Lambda$, то $\mathfrak{P}^{-1} / \Lambda \subset$ $\subset (\mathfrak{P}\overline{\Lambda} + \Lambda) / \Lambda = I'$ и, по предложению 3.2, $\mathfrak{P}^{-1} / \Lambda$ цикличен. Следовательно, $\mathfrak{P}^{-1} / \Lambda \approx \Lambda / \mathfrak{P}$ и Λ горенштейново [см. ([10])].

Начиная с этого места, мы будем считать, что Λ — негоренштейново кольцо, удовлетворяющее условиям теоремы 1′.

Пусть A — некоторый Λ-модуль без кручения. Обозначим $A' = A\mathfrak{P}$. A' является модулем над кольцом $\mathfrak{P}^{-1}$, которое, согласно предложению 3.3, бассово. Поэтому $A' = \sum_i \oplus P_i$, где P_i — неразложимый проективный модуль над некоторым надкольцом M_i кольца $\mathfrak{P}^{-1}$, т. е. P_i — прямое слагаемое M_i. С другой стороны, модуль $A'' = A / A'$ есть, очевидно, $K^{(m)}$, где $K = \Lambda / \mathfrak{P}$. Заметим еще, что A' является вполне характеристическим подмодулем модуля A, т. е. A' переходит в себя при всех эндоморфизмах модуля A. Поэтому для дальнейшего изучения Λ-модулей без кручения нам надо рассмотреть следующую ситуацию.

Пусть дана точная последовательность

$$0 \to A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \to 0, \tag{1}$$

где $A'' = B^{(m)}$, B — фиксированный модуль, $A' = \sum_{i=1}^{s} \oplus A_i^{(n_i)}$; $A_1, \ldots, A_s$ — также фиксированный набор модулей, причем A' — вполне характеристический подмодуль в A. Точная последовательность (1) определяется некоторым элементом группы

$$\operatorname{Ext}^1_\Lambda (B^{(m)}, A') = \sum_{i=1}^{s} \oplus \operatorname{Ext}_\Lambda (B^{(m)}, A_i^{(n_i)}).$$

$\operatorname{Ext}^1_\Lambda(B^{(m)}, A_i^{(n_i)})$ естественно рассматривать как совокупность матриц размерности $n_i \times m$ с коэффициентами из $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(B, A_i)$. Значит, A определяется набором s матриц $X_1, \ldots, X_s$ (X_i — с коэффициентами из $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(B, A_i)$). $\operatorname{Ext}(B, A_i)$ можно рассматривать как модуль над кольцом $H(A_i) = \operatorname{Hom}_\Lambda(A_i, A_i)$ и как модуль над кольцом $H(B) = \operatorname{Hom}_\Lambda(B, B)$. Рассмотрим матрицу

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_s \end{pmatrix}$$

Следующие преобразования матрицы X назовем элементарными:

1) умножение некоторой строки матрицы X_i (столбца матрицы X) на обратимый элемент $H(A_i)$ $(H(B))$;

2) прибавление к строке (столбцу) матрицы $X_i(X)$ другой строки (столбца) той же матрицы, умноженной на элемент из $H(A_i)$ $(H(B))$;

3) прибавление к строке матрицы X_i строки матрицы X_j $(i \neq j)$, умноженной на элемент из $H_{ij} = \operatorname{Hom}_\Lambda(A_i, A_j)$ (элементы H_{ij} естественным образом рассматриваются как гомоморфизмы из $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(B, A_i)$ в $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(B, A_j)$).

Нетрудно видеть, что если кольца

$$\overline{H}(A_i) = H(A_i)/\operatorname{ann} \operatorname{Ext}^1_\Lambda(B, A_i), \quad \overline{H}(B) = H(B)/\bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{ann} \operatorname{Ext}^1_\Lambda(B, A_i)$$

удовлетворяют теореме об элементарных делителях, то модуль A разложим тогда и только тогда, когда матрица X разложима с помощью последовательности элементарных преобразований.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству достаточности условий теоремы 1'. Поскольку $\mu(\overline{\Lambda}) = \mu(I) + 1 = 3$, то $\widetilde{\Lambda}$ есть либо поле, либо прямая сумма двух или трех полей.

Предположим сначала, что Λ — поле. Из предложения 3.2 следует, что $\mu(\mathfrak{P}^{-1}) \leqslant 3$. Но если $\mu(\mathfrak{P}^{-1}) < 3$, то $\mathfrak{P}^{-1}/\Lambda \approx \Lambda/\mathfrak{P}$ и Λ горенштейново. Поэтому $\mu(\mathfrak{P}^{-1}) = 3$. Обозначим $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}^{-1}/\mathfrak{P}$, $\mathfrak{A}$ — трехмерная неразложимая алгебра над $K = \Lambda/\mathfrak{P}$.

Предложение 3.4. *Пусть Λ — негоренштейново кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{P}$, удовлетворяющее условиям теоремы 1', причем $\widetilde{\Lambda}$ — поле. Тогда возможен один из трех случаев*:

1. $\mathfrak{P}^{-1} = \overline{\Lambda}$, $\mathfrak{A}$ — *поле.*

2. $\mathfrak{P}^{-1} = \overline{\Lambda}$, $\mathfrak{A} = K[r]$, $r^3 = 0$.

3. $\mathfrak{P}^{-1}$ — *максимальное подкольцо* Λ, $\mathfrak{A} = K[r]$, $r^3 = 0$.

Покажем, прежде всего, что в $\mathfrak{A}$ есть в точности один минимальный идеал. Действительно, поскольку $\mathfrak{P}^{-1}$ бассово, оно имеет один минимальный надмодуль [см. ([9])], а поскольку $\mathfrak{P}^{-1} \approx \mathfrak{P}$, в $\mathfrak{A}$ имеется только один минимальный идеал. Существует два типа таких трехмерных коммутативных неразложимых алгебр над K: поле и алгебра с базисом 1, r, r^2 $(r^3 = 0)$. Если $\mathfrak{A}$ — поле, то $\mathfrak{P}$ — единственный максимальный идеал $\mathfrak{P}^{-1}$. Но $\mathfrak{P} \approx \mathfrak{P}^{-1}$ и, следовательно, всякий $\mathfrak{P}^{-1}$-идеал главный, т. е. $\mathfrak{P}^{-1}$ — максимальное кольцо: $\mathfrak{P}^{-1} = \overline{\Lambda}$. Пусть $\mathfrak{A} = K[r]$, $r^3 = 0$. Тогда максимальный идеал $\mathfrak{Q}$ в $\mathfrak{P}^{-1}$ есть прообраз $r\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{Q} \approx \mathfrak{P}^{-1}$, то $\mathfrak{P}^{-1} = \overline{\Lambda}$, в противном случае $\mathfrak{Q}^{-1}$ — минимальное надкольцо $\mathfrak{P}^{-1}$, причем $\mathfrak{Q}^{-1}/\mathfrak{P}^{-1} \approx \approx \mathfrak{P}^{-1}/\mathfrak{Q} \approx K$. Но $\mathfrak{Q} \supset B \supset \mathfrak{P} \approx \mathfrak{P}^{-1}$, где B — прообраз $r^2\mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{Q}^{-1}$ — единственный минимальный надмодуль $\mathfrak{P}^{-1}$, то $B \approx \mathfrak{Q}^{-1}$. Итак, $\mathfrak{Q}^{-1} \approx \mathfrak{Q}$ содержит максимальный подмодуль, изоморфный $\mathfrak{Q}^{-1}$ и потому $\mathfrak{Q}^{-1} = \overline{\Lambda}$.

Нетрудно вычислить, что Ext $(K, \mathfrak{P}^{-1}) = \mathfrak{A}$ (во всех трех случаях). В случаях 1 и 2 описание модулей без кручения сводится, таким образом, к приведению матрицы с элементами из $\mathfrak{A}$, причем над строками можно производить элементарные преобразования с коэффициентами из $\mathfrak{A}$, над столбцами — с коэффициентами из K.

Заметим еще, что матрица X, полученная рассмотренным выше способом из Λ-модуля A, удовлетворяет, как нетрудно проверить, следующему условию: (∗) $v\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(s)}$, где v — K-подпространство в $\mathfrak{A}^{(s)}$, порожденное столбцами матрицы X, s — число строк в X.

В случае 3 $A' = A\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^{-1(s)} \oplus \overline{\Lambda}^{(t)}$. Нетрудно вычислить, что

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(K, \overline{\Lambda}) \approx \mathrm{Ext}^1_\Lambda(K, \mathfrak{P}^{-1}) \approx K[r], \quad r^3 = 0.$$

Обозначим $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(K, \mathfrak{P}^{-1}) = \mathfrak{A}$, $1, r, r^2$ — его базис над K; $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(K, \overline{\Lambda}) = \mathfrak{A}'$, $1', r', r'^2$ — его базис над K. $\mathfrak{A}'$ можно рассматривать как $\mathfrak{A}$-модуль, а именно: $1'r = r'^2$, $r'r = r'^2 r = 0$. Вложение $\mathfrak{P}^{-1} \to \overline{\Lambda}$ индуцирует гомоморфизм φ: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ ($1\varphi = 1'$, $r\varphi = r'^2$, $r^2\varphi = 0$). Вложение $\overline{\Lambda} \to \mathfrak{P}^{-1}$ индуцирует гомоморфизм ψ: $\mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ ($1'\psi = r$, $r'\psi = 0$, $r'^2\psi = r^2$). Задача описания Λ-модулей без кручения эквивалентна задаче приведения пары матриц X_1, X_2, причем над столбцами этих матриц можно делать одновременно элементарные преобразования над K, над строками X_1 — преобразования над $\mathfrak{A}$, над строками X_2 — преобразования над $\mathfrak{A}'$. Кроме того, можно совершать преобразования, индуцированные гомоморфизмами φ и ψ, т. е. к строке матрицы X_2 прибавлять строку матрицы X_1, умноженную на φ, а к строке матрицы X_1 — строку матрицы X_2, умноженную на ψ.

Существенно заметить, что хотя по любой паре матриц X_1, X_2 указанного вида можно построить расширение A модуля $K^{(m)}$ с ядром $A' = \mathfrak{P}^{-1(s)} \oplus \overline{\Lambda}^{(t)}$, однако $A\mathfrak{P}$ может не равняться A'. Можно проследить, что $A\mathfrak{P} = A'$ тогда и только тогда, когда матрицы X_1, X_2 удовлетворяют следующим условиям:

(∗∗) $v\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(s)}$, $v'\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'^{(t)}$, где $v(v')$ — пространство, порожденное столбцами матрицы $X_1(X_2)$.

Пусть теперь $\widetilde{\Lambda}$ — прямая сумма двух полей $\widetilde{\Lambda}_1$ и $\widetilde{\Lambda}_2$. $\overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}_1 \oplus \overline{\Lambda}_2$ ($\overline{\Lambda}_i = \overline{\Lambda} \cap \widetilde{\Lambda}_i$). Условимся считать, что $\mu(\overline{\Lambda}_1) \geqslant \mu(\overline{\Lambda}_2)$. $\mu(\overline{\Lambda}) = \mu(\overline{\Lambda}_1) + \mu(\overline{\Lambda}_2) = 3$, поэтому $\mu(\overline{\Lambda}_1) = 2$, $\mu(\overline{\Lambda}_2) = 1$. Следовательно, $\Lambda_1 = \Lambda/\Lambda \cap \widetilde{\Lambda}_2$ — бассово кольцо, $\Lambda_2 = \Lambda/\Lambda \cap \widetilde{\Lambda}_1 = \overline{\Lambda}_2$.

Для всякого Λ-модуля A имеется точная последовательность:

$$0 \to A_1 \to A \to A_2 \to 0,$$

где A_1 — Λ_1-модуль и $A_1 = \sum_i \oplus L_i^{(s_i)}$ (L_i — надкольца Λ_1), A_2 — Λ_2-модуль и $A_2 = \Lambda_2^{(m)}$.

Рассмотрим $J = \Lambda \cap \tilde{\Lambda}_1$. Очевидно, $J \subset R$, где R — радикал Λ_1. $\mathfrak{P}^{-1}$ — бассово кольцо, поэтому либо его проекции на $\tilde{\Lambda}_1$ и $\tilde{\Lambda}_2$ максимальны, либо $\mathfrak{P}^{-1} = M_1 \oplus M_2$. В последнем случае $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}M_1 \oplus \mathfrak{P}M_2$ и $R = \mathfrak{P}M_1 \subset J$.

4. Пусть $J = \Lambda \cap \tilde{\Lambda}_1$ совпадает с радикалом R кольца Λ_1. Надкольца кольца Λ_1 линейно упорядочены (см. доказательство предложения 2.3): $\Lambda_1 = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n = \bar{\Lambda}_1$. Нетрудно вычислить, что $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_2, L_0) = K$; при $0 < i < n$

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_2, L_i) = K[r], \quad r^2 = 0; \quad \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_2, L_n) = \mathfrak{A}_n,$$

где $\mathfrak{A}_n$ — либо квадратичное расширение поля K, либо также $K[r]$, $r^2 = 0$. Обозначим $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_2, L_i) = \mathfrak{A}_i$; 1_i, r_i — его базис над K $(i \neq 0)$; r_0 — образующий $\mathfrak{A}_0$ над K. Гомоморфизмы $\Lambda_i \to \Lambda_j$ индуцируют отображения $\varphi_{ij}: \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_j$, причем при $i < j$ $\varphi_{ij}(1_i) = 1_j$, $\varphi_{ij}(r_i) = 0$; при $i > j$ $\varphi_{ij}(1_i) = 0$, $\varphi_{ij}(r_i) = r_j$.

Итак, описание Λ-модулей сводится в этом случае к приведению матрицы

$$X = \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix},$$

где X_i — матрица над $\mathfrak{A}_i$, причем над столбцами матрицы X можно производить элементарные преобразования с коэффициентами из K, над строками X_i — с коэффициентами из $\mathfrak{A}_i$ и к строке матрицы X_j можно прибавлять строку матрицы X_i $(i \neq j)$, умноженную на φ_{ij}.

5. Предположим теперь, что $J \neq R$. Тогда проекции $\mathfrak{P}^{-1}$ на $\tilde{\Lambda}_1$ и $\tilde{\Lambda}_2$ совпадают с $\bar{\Lambda}_1$ и $\bar{\Lambda}_2$. Следовательно, $\bar{\Lambda}_1 = R^{-1}$ — минимальное надкольцо Λ_1, $R = \tau\bar{\Lambda}_1$. $J = \Lambda \cap \bar{\Lambda}_1 = \mathfrak{P} \cap \bar{\Lambda}_1$ есть $\mathfrak{P}^{-1}$-модуль и потому $\bar{\Lambda}_1$-модуль, т. е. $J = \mu\bar{\Lambda}_1$. Пусть π — простой элемент $\bar{\Lambda}_1$. Если $\tau = \pi$, то $\mu = \tau^d$. При $d = 1$ получаем $J = R$, поэтому $d \geqslant 2$. Но при $d \geqslant 2$ R/J — не циклический модуль. Кроме того, $\bar{\Lambda}_1 / J = \bar{\Lambda}_1 / \bar{\Lambda} \cap \Lambda_1 = \Lambda + \bar{\Lambda}_1 / \Lambda = \bar{\Lambda} / \Lambda = I$ и потому (так как $R\bar{\Lambda}_1 = R$) $R/J = I'$. Значит, случай $\tau = \pi$ невозможен. Остается случай $\tau = \pi^2$, $\mu = \pi^3$ (иначе опять R/J нецикличен). В этом случае легко проверить, что

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_2, \bar{\Lambda}_1) = \bar{\Lambda}_1/\pi^3\bar{\Lambda}_1 = \mathfrak{A}_1,$$

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_2, \Lambda_1) = \bar{\Lambda}_1/\pi\Lambda_1 = \mathfrak{A}_0.$$

Рассматривая $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$ как Λ_2-модули, легко видеть, что простой элемент ω кольца Λ_2 действует на $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$ так:

$$1_1\omega = \pi_1^2, \quad \pi_1\omega = \pi_1^2\omega = 0;$$
$$1_0\omega = r, \quad r\omega = 0$$

(здесь $1_1, \pi_1, \pi_1^2$ — образы $1, \pi, \pi^2$ в $\mathfrak{A}_1$, 1_0, r — образы 1 и π^2 в $\mathfrak{A}_0$). Гомоморфизмы $\Lambda_1 \to \overline{\Lambda}_1$ и $\overline{\Lambda}_1 \to \Lambda_1$ индуцируют отображения

$$\varphi_{01}:\mathfrak{A}_0 \to \mathfrak{A}_1, \quad \varphi_{01}(1_0) = \pi_1^2, \quad \varphi_{01}(r) = 0;$$

$$\varphi_{10}:\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_0, \quad \varphi_{10}(1_1) = 1_0, \quad \varphi_{10}(\pi_1) = 0, \quad \varphi_{10}(\pi_1^2) = r.$$

Таким образом, в этом случае описание Λ-модулей сводится к приведению пары матриц X_0, X_1 (X_i — с коэффициентами из $\mathfrak{A}_i$), причем над столбцами можно одновременно совершать элементарные преобразования с коэффициентами из Λ_2, над строками X_i — с коэффициентами из $\mathfrak{A}_i$, и к строкам матрицы X_j можно прибавлять строки матрицы X_i $(i \neq j)$, умноженные на φ_{ij}.

6. Пусть, наконец, $\widetilde{\Lambda}$ есть прямая сумма трех полей $\widetilde{\Lambda}_1$, $\widetilde{\Lambda}_2$, $\widetilde{\Lambda}_3$. Если Λ_i — проекция Λ на $\widetilde{\Lambda}_i$, то условие $\mu(\overline{\Lambda}) = 3$ дает $\Lambda_i = \overline{\Lambda}_i$. Таким образом, Λ_i — полные дискретно нормированные кольца. Пусть π_i — простой элемент Λ_i. Тогда $\Lambda_i / \pi_i\Lambda_i = \Lambda / \mathfrak{P} = K$ для любого i.

Кольцо $\mathfrak{P}^{-1}$ бассово и потому разложимо. Пусть $\mathfrak{P}^{-1} = \Lambda_1 \oplus \Lambda'$. Положим $\Lambda_0 = \Lambda / \Lambda \cap \widetilde{\Lambda}_3$. Λ_0 — бассово кольцо, так как $\mu(\overline{\Lambda}_0) = 2$. Если R — его радикал, то R^{-1} есть минимальное надкольцо Λ_0 и так как $\Lambda_1 R \subset R$, оно есть $\Lambda_1 \oplus \Lambda_2$. Если A — Λ-модуль без кручения, то существует точная последовательность

$$0 \to A_0 \to A \to A_3 \to 0,$$

где A_3 — Λ_3-модуль и $A_3 = \Lambda_3^{(m_\bullet)}$; A_0 — Λ_0-модуль и

$$A_0 = \Lambda_1^{(s_1)} \oplus \Lambda_2^{(s_2)} \oplus \Lambda_0^{(s_0)} \cdot J = \Lambda \cap (\widetilde{\Lambda}_1 \oplus \widetilde{\Lambda}_2) \subset R.$$

С другой стороны, R — $\Lambda_1 \oplus \Lambda_2$-модуль и потому $J = R \cap (\widetilde{\Lambda}_1 \oplus \widetilde{\Lambda}_2)$ — $\Lambda_1 \oplus \Lambda_2$-модуль. Но тогда $J = \alpha(\Lambda_1 \oplus \Lambda_2)$, $\alpha = (\pi_1^c, \pi_2^d, 0)$. Так как $R\Lambda_1 \subset R$, то $c = 1$. Легко вычислить:

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^1(\Lambda_3, \Lambda_1) = \mathfrak{A}_1 = \Lambda_1/\pi_1\Lambda_1 = K;$$

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^1(\Lambda_3, \Lambda_2) = \mathfrak{A}_2 = \Lambda_2/\pi_2^d\Lambda_2 = \Lambda_3/\pi_3^d\Lambda_3;$$

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^1(\Lambda_3, \Lambda_0) = \mathfrak{A}_0 = \Lambda_0/\alpha\Lambda_0 = \Lambda_3/\pi_3^d\Lambda_3.$$

Обозначим образующие этих модулей через ξ_1, ξ_2, ξ_0. Гомоморфизмы $\Lambda_i \to \Lambda_j$ дают отображения $\varphi_{ij} : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_j$, причем

$$\varphi_{02}(\xi_0) = \pi_3\xi_2, \quad \varphi_{01}(\xi_0) = 0, \quad \varphi_{20}(\xi_2) = \xi_0, \quad \varphi_{10}(\xi_1) = \pi_3^{d-1}\xi_0.$$

Итак, задача сводится к приведению матрицы

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_0 \end{pmatrix},$$

где X_i — матрица с коэффициентами из $\mathfrak{A}_i$, причем над столбцами можно производить элементарные преобразования с коэффициентами из Λ_3, над строками матрицы X_i — с коэффициентами из $\mathfrak{A}_i$ и к строкам матрицы X_j можно прибавлять строки матрицы $X_i (i \neq j)$, умноженные на φ_{ij}.

§ 4. Приведение матриц

Для того чтобы закончить доказательство достаточности условий теоремы 1, нужно показать, что в случаях 1—6 существует только конечное число матриц, неразложимых и неэквивалентных между собой относительно соответствующих элементарных преобразований.

Будем параллельно рассматривать случаи 1 и 2. Из условия $(*)$ следует, что матрицу X можно привести к виду (EX'), где E — единичная матрица размерности $s \times s$, X' — матрица вида: $X' = \alpha X_1 + \alpha^2 X_2$, где X_1, X_2 — матрицы над K (K-матрицы), 1, α, α^2 — базис $\mathfrak{A}$ над K.

X' можно приводить элементарными преобразованиями нам K, не моняя вида E. Приведем X_1 к диагональному виду. Соответственно,

$$X_2 = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

где X_{11} — размерности $t \times t$ (t — число единиц в X_1). Если $X_{22} \neq 0$, то ее можно привести к диагональному виду и выделить из X прямое слагаемое $(1\alpha^2)$. Пусть $X_{22} = 0$, $X_{12} \neq 0$. Приведем X_{12} к диагональному виду. Тогда X' приведется к виду:

$$X' = \left(\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix}\alpha & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha\end{matrix} & 0 & \begin{matrix}\alpha_2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha^2\end{matrix} \\ \hline
Y_1\alpha^2 & \begin{matrix}\alpha & & *\\ & \ddots & \\ * & & \alpha\end{matrix} & 0 \\ \hline
Y_2\alpha^2 & Y_3\alpha^2 & 0
\end{array}\right)$$

Если $Y_2 \neq 0$, то выделяется прямое слагаемое $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$. Если $Y_2 = 0$, $Y_1 = 0$, то выделяется $(1\ \alpha\ \alpha^2)$. Пусть $Y_2 = 0$, $Y_1 \neq 0$. Если $\mathfrak{A}$ — поле, то выберем α удовлетворяющим уравнению $\alpha^3 = a\alpha + b$ (тогда $\alpha^{-1} = p\alpha^2 + q$); если $\mathfrak{A} = K(r)$, $r^3 = 0$, то за α примем r. Тогда в случае 1 выделяется прямое слагаемое $(1\ \alpha^2)$, в случае 2 — $(1\ \alpha\ \alpha^2)$.

Если $X_{12} = 0$, $X_{21} \neq 0$, то можно выделить прямым слагаемым $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha^2 \end{pmatrix}$ или $(1\ \alpha^2)$.

Итак, остается случай $X_{12} = X_{21} = X_{22} = 0$, т. е. если X — неразложимая, то $X' = \alpha E + \alpha^2 Y$ (Y — K-матрица). Не меняя вида матриц E и αE, мы можем привести Y к нормальной форме Фробениуса. Так как X и Y разлагаются одновременно, то можно считать, что Y — фробениусова клетка, т. е.

$$X' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 & x_1\alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 0 & \ldots & 0 & x_2\alpha^2 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha & \ldots & 0 & x_3x^2 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \alpha^2 & \alpha + x_n\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Элементарными преобразованиями можно привести матрицу X, учитывая, что $\alpha^3 \in K + K\alpha$, к виду:

$$X = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & \alpha & & & x_1\alpha^2 \\ & 1 & & 0 & & \alpha & 0 & x_2\alpha^2 \\ & & \ddots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 & & \alpha & x_{n-1}\alpha^2 \\ & & & 1 & & & \alpha^2 & y\alpha + x_n\alpha^2 \end{array}\right)$$

Если $y \neq 0$, то $x_1\alpha^2, \ldots, x_{n-2}\alpha^2$ можно убрать, пользуясь тем, что $\alpha^3 \in K + K\alpha$. Тогда $X \sim (1 \ \ \alpha)^{(n-2)} \oplus \overline{X}$.

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & z_1\alpha \\ 0 & 1 & \alpha^2 & \alpha + z_2\alpha \end{pmatrix}.$$

Элементарными преобразованиями (различными в случаях 1 и 2) матрицу $\overline{X}$ можно привести к виду $(1 \ \ \alpha) \oplus (1 \ \ \alpha)$.

Пусть теперь $y = 0$. Аналогичные рассмотрения показывают, что тогда X распадается в прямую сумму $(1 \ \ \alpha)$ и $(1 \ \ \alpha^2)$. Заметим также, что если $\mathfrak{A}$ — поле, то $(1 \ \ \alpha^2) \sim (1 \ \ \alpha)$, а

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha^2 & 0 \end{pmatrix} \sim (1 \ \ \alpha^2) \oplus (1 \ \ \alpha^2).$$

Итак, в случае 1 матрица X распадается на матрицы вида

$$(1), \quad (1 \ \ \alpha), \quad (1 \ \ \alpha \ \ \alpha^2), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, кольцо Λ имеет 4 неизоморфных неразложимых модуля без кручения.

В случае 2 матрица X распадается на матрицы вида:

$$(1), \quad (1 \ \ r), \quad (1 \ \ r^2), \quad (1 \ \ r \ \ r^2), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & r^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & r & r^2 \\ 0 & 1 & r^2 & 0 \end{pmatrix}$$

и Λ имеет 6 неразложимых модулей без кручения.

Рассмотрим теперь технически наиболее сложный случай 3. Пользуясь условиями (**), матрицу X можно привести к виду:

$$X = \begin{pmatrix} E & \overline{X}_1 \\ 0 & \overline{X}_2 \end{pmatrix}.$$

Приведем затем $\overline{X}_2$, как в случае 2, и учтем, что только матрицы $(1' \ \ r')$ и $(1' \ \ r' \ \ r'^2)$ из перечисленных выше, удовлетворяют условиям (**). Тогда $\overline{X}_2$ примет вид $(E' \ \ r'E' \ \ r'^2D)$, где D — диагональная матрица из 0 и $1'$.

Пользуясь элементарными преобразованиями (в том числе соответствующими гомоморфизму ψ), приведем X к виду:

$$X = \begin{pmatrix} E & 0 & X_{11} & X_{12} \\ 0 & E' & r'E' & r'^2D \end{pmatrix},$$

где X_{11} и X_{12} — матрицы с коэффициентами из $r\mathfrak{A}$. Более того, X_{11} можно привести к виду $r\overline{X}_{11}$, где $\overline{X}_{11}$ — K-матрица. Часть матрицы X_{12}, стоящую над нулевыми столбцами матрицы r'^2D, можно, пользуясь результатом случая 2, привести к блочному виду с 6-ю блоками по вертикали и 4-мя блоками по горизонтали, в которой блоки A_{11} и A_{22} — вида rE, A_{14}, A_{33}, A_{41}, A_{52} — вида r^2E, остальные блоки нулевые. Кроме того, против блоков A_{11} и A_{22} в матрице X_{11} и оставшейся части матрицы X_{12} можно сделать нули. Приведем оставшуюся часть матрицы X_{11} к виду:

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \\ B_{41} & B_{42} \end{pmatrix},$$

где B_{i1}, B_{i2} стоят против $A_{i+2\,i+2}$, а число столбцов B_{i1} равно числу ненулевых элементов матрицы D. Каждое B_{ij} в свою очередь состоит из 5 блоков по горизонтали и 3-х по вертикали, причем kl-й блок матрицы B_{ij} стоит над kl-м блоком матрицы B_{4j} и против kl-го блока матрицы B_{i1}. 1,4 — блок матрицы B_{11}; 2,4 — B_{12}; 1,3 — B_{21}; 2,3 — B_{22}; 1,2 — B_{31}; 2,2 — B_{32}; 1,1 — B_{41}; 2,1 — B_{42} имеют вид rE, остальные блоки нулевые. Если мы потребуем, чтобы число ненулевых элементов матриц X_{11} и D было минимальным, то оставшаяся часть матрицы X_{12} может состоять только из элементов вида xr^2 $(x \in K)$. Разбивая эту часть на блоки и приводя их аналогично приведению матрицы X_{11}, мы разложим X в прямую сумму матриц следующего вида:

$$(1),\quad (1\ r),\quad (1\ r^2),\quad (1\ r\ r^2),\quad (1'\ r'),\quad (1'\ r'\ r'^2);$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & r^2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & r & r^2 \\ 0 & 1 & r^2 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1' & r' \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & r & r^2 \\ 0 & 1' & r' & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & r & 0 \\ 0 & 1' & r' & r'^2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & r & 0 & r^2 \\ 0 & 1' & r' & r'^2 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & r^2 \\ 0 & 1' & r' & r'^2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & r^2 \\ 0 & 0 & 1' & r' & r'^2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & r & 0 & r^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1' & r' & r'^2 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & r & r^2 \\ 0 & 1' & 0 & r' & 0 & r'^2 \\ 0 & 0 & 1' & 0 & r' & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & r^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1' & 0 & r' & 0 & r'^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1' & 0 & r' & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & r^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & r^2 \\ 0 & 0 & 1' & 0 & r' & 0 & r'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1' & 0 & r' & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Следовательно, в этом случае кольцо Λ имеет 18 неизоморфных неразложимых модулей без кручения.

Рассмотрим случай 4. Прежде всего с помощью элементарных преобразований можно добиться того, чтобы в каждой строке и каждом столбце стояло не более одного элемента вида 1_i, причем если в каком-то столбце такой элемент есть, то остальные элементы этого столбца равны 0. Затем найдем наибольшее j, для которого в матрице X_j имеется элемент вида r_j. Если в этой матрице найдется r_j, в одной строке с которым нет 1_j, то легко показать, что это r_j выделяется прямым слагаемым. Если такого r_j не найдется, то из X можно выделить прямое слагаемое $(1_j r_j)$. Следовательно, матрица X распадается в прямую сумму матриц вида (1_i) $(i=1,\ldots,n)$ (r_i) $(i=0,\ldots,n)$, $(1_i r_i)$ $(i=1,\ldots,n)$. Напомним, что если $\mathfrak{A}_n$ — поле, то матрицы (1_n) и (r_n) эквивалентны.

Заметим, что, кроме точных модулей, являющихся расширениями Λ_1-модуля с помощью Λ_2-модуля, которым соответствуют рассмотренные выше матрицы, имеется еще $n+2$ неразложимых неточных модулей без кручения: L_i $(i=0,\ldots,n)$ и Λ_2. Таким образом, кольцо Λ имеет $4n+2$ неразложимых модуля, если $\mathfrak{A}_n$ — поле, и $4n+3$, если $\mathfrak{A}_n = K[r]$, $r^2=0$.

Рассмотрим случай 5. Представим X в виде $\overline{X}+\pi_1 X_2$, где $\overline{X}$ — матрица, не содержащая π_1, X_2 — K-матрица. $\overline{X}$ элементарными преобразованиями легко приводится к диагональному виду. Тогда матрица X имеет вид:

$$X=\begin{pmatrix} E_1+\pi_1X_{11} & \pi_1X_{12} & \pi_1X_{13} & \pi_1X_{14} & \pi_1X_{15}\\ \pi_1X_{21} & \pi_1^2E_1+\pi_1X_{22} & \pi_1X_{23} & \pi_1X_{24} & \pi_1X_{25}\\ \pi_1X_{31} & \pi_1X_{32} & \pi_1X_{33} & \pi_1X_{34} & \pi_1X_{35}\\ 0 & 0 & E_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & rE_0 & 0\end{pmatrix}$$

X_{ij} — K-матрицы. Будем считать, что число отличных от 0 и от π_1 элементов матрицы X минимальное среди всех эквивалентных X матриц такого вида. Тогда X_{14}, X_{24}, X_{34} — нулевые (иначе можно уменьшить число r), X_{12}, X_{22}, X_{32} — нулевые, так как иначе можно уменьшить число π_1^2. Нетрудно также сделать нулевыми матрицы X_{11}, X_{21}, X_{31}.

Если $X_{35}\neq 0$, то из X выделится (π_1). Если $X_{35}=0$, $X_{25}\neq 0$, то выделится $(\pi_1^2\ \pi_1)$. Если $X_{35}=0$, $X_{25}=0$, $X_{15}\neq 0$, то выделится $(1_1\ \pi_1)$. Будем теперь считать $X_{i5}=0$. Если $X_{33}\neq 0$, то выделится $\begin{pmatrix}\pi_1\\ 1_0\end{pmatrix}$. Если $X_{33}=0$, $X_{23}\neq 0$, то выделится $\begin{pmatrix}\pi_1^2 & \pi_1\\ 0 & 1_0\end{pmatrix}$. Наконец, если $X_{33}=0$, $X_{23}=0$, $X_{13}\neq$ $\neq 0$, то выделится $\begin{pmatrix}1_1 & \pi_1\\ 0 & 1_0\end{pmatrix}$.

Таким образом, кольцо Λ имеет 11 неразложимых точных модулей, соответствующих матрицам:

$$(1_1),\quad (\pi_1),\quad (\pi_1^2),\quad (1_0),\quad (r),\quad (1_1\ \pi_1),\quad (\pi_1\ \pi_1^2),$$
$$\begin{pmatrix}\pi_1\\ 1_0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1_1 & \pi_1\\ 0 & \pi_1^2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1_1 & \pi_1\\ 0 & 1_0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_1^2\\ 1_0 & 0\end{pmatrix}$$

и три неточных неразложимых модуля без кручения: Λ_1, $\overline{\Lambda_1}$, Λ_2. Всего получаем 14 неразложимых модулей.

Рассмотрим, наконец, случай 6. Здесь приведение матриц можно провести, дословно повторяя вычисления целочисленных представлений циклической группы порядка p^2 [см., например, ([16])]. Получается $4d$ неразложимых модулей, соответствующих матрицам

$$(\xi_1),\quad (\pi_3^a\xi_2)\quad (a=0,\ldots,d-1),\quad (\pi_3^b\xi_0)\quad (b=0,\ldots,d-1),$$

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \pi_3^a\xi_2\end{pmatrix}\quad (a=0,\ldots,d-1),\quad \begin{pmatrix}\xi_1\\ \pi_3^b\xi_0\end{pmatrix}\quad (b=0,\ldots,d-2),$$

а также 4 модуля Λ_i $(i=0, 1, 2, 3)$. Всего кольцо Λ имеет $4(d+1)$ неразложимых модулей без кручения.

Итак, теорема 1′, а вместе с ней и теорема 1 полностью доказаны.

После того, как настоящая работа была подготовлена к печати, авторам стало известно, что Якобинский в свой работе ([17]), которая должна быть опубликована в ближайшее время, получил необходимые и достаточные условия для того, чтобы коммутативное Z_p-кольцо имело конечное число неразложимых представлений над кольцом целых p-адических чисел. Условия Якобинского не могут быть сформулированы в глобальном случае. Однако, поскольку вопрос о конечности числа неразложимых представлений локализуется, из работы Якобинского можно извлечь некоторый алгоритм для распознавания того, имеет ли коммутативное Z-кольцо конечное или бесконечное число неразложимых целочисленных представлений.

Поступило
7.XII.1966

ЛИТЕРАТУРА

1 Берман С. Д. и Гудивок П. М., О целочисленных представлениях конечных групп, Докл. и сообщ. Ужгород. ун-та, № 5 (1962), 74—76.

2 Jones A., Groups with a finite number of indecomposable integral representations, Michigan Math. J., 10 (1963), 257—261.

3 Dade E. C., Some indecomposable group representations, Ann. Math., 77 (1963), 406—412.

4 Гудивок П. М., Представления конечных групп над квадратичными кольцами, Докл. АН СССР, 159 (1964), 1210—1213.

5 Дрозд Ю. А., О представлениях кубических Z-колец, Докл. АН СССР, 174, № 1 (1967), 16—18.

6 Боревич З. И., Фаддеев Д. К., Целочисленные представления квадратичных колец, Вестн. ЛГУ, 19 (1960), 52—64.

7 Боревич З. И., Фаддеев Д. К., Представления порядков с циклическим индексом, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 80 (1965), 51—65.

8 Боревич З. И., Фаддеев Д. К., Замечание о порядках с циклическим индексом, Докл. АН СССР, 164, № 4 (1965), 727—728.

9 Bass M., Torsion free and projective modules, Trans Amer. Math. Soc., 102 (1962), 319—327.

10 Bass H., On the ubiquity of Gorenstein rings., Math. Z., B. 82, H. 1 (1963), 8—28.

11 Ройтер А. В., Аналог одной теоремы Басса для модулей представлений некоммутативных порядков, Докл. АН СССР, 168 (1966), 1261—1264.

12 Назарова Л. А., Ройтер А. В., Уточнение одной теоремы Басса, Докл. АН СССР, 176, № 2 (1967).

13 Curtis C. W., Reiner J., Representation theory of finite groups and associative algebras, N. Y., Intersc. Publichers, 1962.

14 Bass H., Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, Trans. Amer. Math. Soc., 95 (1960), 466—488.

15 Фаддеев Д. К., Введение в мультипликативную теорию модулей целочисленных представлений, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 80 (1965), 145—182.

16 Heller A., Reiner I., Representations of cyclic groups in rings of intergers I, Ann. Math., 76 (1962), 73—92.

17 Jacobinski H., Sur les ordres commutatifs avec un nombre fini de réseaux indécompossables, Acta Mathematica, 118 (1967), 1—31.