Теорія зображень

Юрій Дрозд

https://www.imath.kiev.ua/∼drozd/Lectures.pdf

Київ 2020

Означення

1. *Зображенням групи G* над полем $\Bbbk$ зветься гомоморфізм $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, де $\mathrm{GL}(V)$ — група автоморфізмів (обертовних лінійних операторів) простору V.

Означення

1. *Зображенням групи G* над полем $\Bbbk$ зветься гомоморфізм $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, де $\mathrm{GL}(V)$ — група автоморфізмів (обертовних лінійних операторів) простору V.
2. Зображення ρ зветься скінченовимірним (нескінченовимірним), якщо таким є простір V.

Означення

1. *Зображенням групи G* над полем $\Bbbk$ зветься гомоморфізм $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, де $\mathrm{GL}(V)$ — група автоморфізмів (обертовних лінійних операторів) простору V.
2. Зображення ρ зветься скінченовимірним (нескінченовимірним), якщо таким є простір V.
3. *Гомоморфізмом* зображення ρ в зображення $\theta : G \to \mathrm{GL}(W)$ зветься лінійне відображення $f : V \to W$ таке, що $f\rho(g) = \theta(g)f$ для всіх елементів $g \in G$. Множину всіх гомоморфізмів з ρ в θ позначають через $\mathrm{Hom}_G(\rho, \theta)$. Очевидно, це є векторний простір над полем $\Bbbk$. Його розмірність позначимо $h(\rho, \theta)$. Зокрема, $\mathrm{Hom}_G(\rho, \rho)$ є $\Bbbk$-алгеброю.

Означення

1. *Зображенням групи G* над полем $\Bbbk$ зветься гомоморфізм $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, де $\mathrm{GL}(V)$ — група автоморфізмів (обертовних лінійних операторів) простору V.
2. Зображення ρ зветься скінченовимірним (нескінченовимірним), якщо таким є простір V.
3. *Гомоморфізмом* зображення ρ в зображення $\theta : G \to \mathrm{GL}(W)$ зветься лінійне відображення $f : V \to W$ таке, що $f\rho(g) = \theta(g)f$ для всіх елементів $g \in G$. Множину всіх гомоморфізмів з ρ в θ позначають через $\mathrm{Hom}_G(\rho, \theta)$. Очевидно, це є векторний простір над полем $\Bbbk$. Його розмірність позначимо $h(\rho, \theta)$. Зокрема, $\mathrm{Hom}_G(\rho, \rho)$ є $\Bbbk$-алгеброю.
4. Підпростір $U \subseteq V$ зветься *інваріантним* (відносно зображення ρ), якщо $\rho(g)u \in U$ для всіх векторів $u \in U$ і всіх елементів $g \in G$.

Означення

5. Зображення ρ зветься *незвідним*, якщо $V \neq 0$ і єдиними інваріантними підпросторами в просторі V є нульовий підпростір і весь простір V. У цьому випадку визначене *обмеження* ρ_U зображення ρ на підпростір U.

Означення

5. Зображення ρ зветься *незвідним*, якщо $V \neq 0$ і єдиними інваріантними підпросторами в просторі V є нульовий підпростір і весь простір V. У цьому випадку визначене *обмеження* ρ_U зображення ρ на підпростір U.
6. Якщо $U \subseteq V$ — інваріантний підпростір, визначене зображення $\rho/U : G \to \mathrm{GL}(V/U)$: $g(v+U) = gv + U$ для кожного класу суміжності

Означення

5. Зображення ρ зветься *незвідним*, якщо $V \neq 0$ і єдиними інваріантними підпросторами в просторі V є нульовий підпростір і весь простір V. У цьому випадку визначене *обмеження* ρ_U зображення ρ на підпростір U.
6. Якщо $U \subseteq V$ — інваріантний підпростір, визначене зображення $\rho/U : G \to \mathrm{GL}(V/U)$: $g(v+U) = gv + U$ для кожного класу суміжності
7. Зображення ρ зветься *розкладним*, якщо V містить два ненульові інваріантні підпростори V_1, V_2 такі, що $V = V_1 \oplus V_2$. У цьому випадку також кажуть, що $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$, де $\rho_i = \rho_{V_i}$. Якщо таких підпросторів не існує, а $V \neq 0$, зображення ρ зветься *нерозкладним*.

Означення

5. Зображення ρ зветься *незвідним*, якщо $V \neq 0$ і єдиними інваріантними підпросторами в просторі V є нульовий підпростір і весь простір V. У цьому випадку визначене *обмеження* ρ_U зображення ρ на підпростір U.
6. Якщо $U \subseteq V$ — інваріантний підпростір, визначене зображення $\rho/U : G \to \mathrm{GL}(V/U)$: $g(v+U) = gv + U$ для кожного класу суміжності
7. Зображення ρ зветься *розкладним*, якщо V містить два ненульові інваріантні підпростори V_1, V_2 такі, що $V = V_1 \oplus V_2$. У цьому випадку також кажуть, що $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$, де $\rho_i = \rho_{V_i}$. Якщо таких підпросторів не існує, а $V \neq 0$, зображення ρ зветься *нерозкладним*.
8. Зображення ρ зветься *цілком звідним*, якщо V містить такі інваріантні підпростори $V_1, V_2, \dots, V_m$, що $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$, а всі обмеження ρ_{V_i} є незвідними.

Приклад

1. *Одиничне зображення* ставить у відповідність кожному елементу $g \in G$ тотожне відображення $\mathbb{1}_V$. Очевидно, воно є нерозкладним тоді й лише тоді, коли $\dim V = 1$. Тоді, звичайно, воно є й незвідним.

Приклад

1. *Одиничне зображення* ставить у відповідність кожному елементу $g \in G$ тотожне відображення $\mathbb{1}_V$. Очевидно, воно є нерозкладним тоді й лише тоді, коли $\dim V = 1$. Тоді, звичайно, воно є й незвідним.
2. Нехай група G діє на множині X. З цією дією пов'язані два зображення групи G.
    1. Розглянемо векторний простір $\Bbbk X$, базою якого є елементи множини X. Інакше кажучи, елементи з $\Bbbk X$ — це формальні лінійні комбінації $\sum_{x \in X} \lambda_x x$, де $\lambda_x \in \Bbbk$ і всі коефіцієнти λ_x, крім скінченої кількості, рівні 0. Визначимо $\rho_X(g) \sum_{x \in X} \lambda_x x = \sum_{x \in X} \lambda_x gx$. Перевірте, що це дійсно зображення.

Приклад

1. *Одиничне зображення* ставить у відповідність кожному елементу $g \in G$ тотожне відображення $\mathbb{1}_V$. Очевидно, воно є нерозкладним тоді й лише тоді, коли $\dim V = 1$. Тоді, звичайно, воно є й незвідним.
2. Нехай група G діє на множині X. З цією дією пов'язані два зображення групи G.
   i. Розглянемо векторний простір $\Bbbk X$, базою якого є елементи множини X. Інакше кажучи, елементи з $\Bbbk X$ — це формальні лінійні комбінації $\sum_{x \in X} \lambda_x x$, де $\lambda_x \in \Bbbk$ і всі коефіцієнти λ_x, крім скінченої кількості, рівні 0. Визначимо $\rho_X(g) \sum_{x \in X} \lambda_x x = \sum_{x \in X} \lambda_x gx$. Перевірте, що це дійсно зображення.
   ii. Розглянемо тепер векторний простір $\Bbbk^X$ усіх функцій $X \to \Bbbk$. Визначимо оператор $\rho_X^*(g)$ правилом $(\rho_X^*(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$ для кожної функції $f : X \to \Bbbk$. Перевірте, що це також є зображенням.

Приклад

1. *Одиничне зображення* ставить у відповідність кожному елементу $g \in G$ тотожне відображення $\mathbb{1}_V$. Очевидно, воно є нерозкладним тоді й лише тоді, коли $\dim V = 1$. Тоді, звичайно, воно є й незвідним.
2. Нехай група G діє на множині X. З цією дією пов'язані два зображення групи G.
   1. Розглянемо векторний простір $\Bbbk X$, базою якого є елементи множини X. Інакше кажучи, елементи з $\Bbbk X$ — це формальні лінійні комбінації $\sum_{x\in X} \lambda_x x$, де $\lambda_x \in \Bbbk$ і всі коефіцієнти λ_x, крім скінченої кількості, рівні 0. Визначимо $\rho_X(g)\sum_{x\in X} \lambda_x x = \sum_{x\in X} \lambda_x gx$. Перевірте, що це дійсно зображення.
   2. Розглянемо тепер векторний простір $\Bbbk^X$ усіх функцій $X \to \Bbbk$. Визначимо оператор $\rho_X^*(g)$ правилом $(\rho_X^*(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$ для кожної функції $f : X \to \Bbbk$. Перевірте, що це також є зображенням.

Якщо $X = G$ з дією лівими зсувами, зображення ρ_G у просторі $\Bbbk G$ зветься *регулярним зображенням* групи G над полем $\Bbbk$, а зображення ρ_G^* у просторі $\Bbbk^G$ — *корегулярним зображенням*.

3. Нехай $\Bbbk^{(X)} \subseteq \Bbbk^X$ — підпростір функцій f зі скінченим носієм, тобто таких, що множина $\{ x \mid f(x) \neq 0 \}$ є скінченою. Очевидно, цей підпростір є інваріантним відносно зображення ρ_X^*.

3. Нехай $\Bbbk^{(X)} \subseteq \Bbbk^X$ — підпростір функцій f зі скінченим носієм, тобто таких, що множина $\{ x \mid f(x) \neq 0 \}$ є скінченою. Очевидно, цей підпростір є інваріантним відносно зображення ρ_X^*.

Вправа

1. Доведіть, що обмеження зображення ρ_X^* на підпростір $\Bbbk^{(X)}$ ізоморфне зображенню ρ_X.

3. Нехай $\Bbbk^{(X)} \subseteq \Bbbk^X$ — підпростір функцій f зі скінченим носієм, тобто таких, що множина $\{\, x \mid f(x) \neq 0 \,\}$ є скінченою. Очевидно, цей підпростір є інваріантним відносно зображення ρ_X^*.

Вправа

1. Доведіть, що обмеження зображення ρ_X^* на підпростір $\Bbbk^{(X)}$ ізоморфне зображенню ρ_X.
   Зокрема, якщо множина X є скінченою, то зображення ρ_X і ρ_X^* ізоморфні. Чи буде так і коли ця множина нескінчена?

3. Нехай $\Bbbk^{(X)} \subseteq \Bbbk^X$ — підпростір функцій f зі скінченим носієм, тобто таких, що множина $\{\, x \mid f(x) \neq 0 \,\}$ є скінченою. Очевидно, цей підпростір є інваріантним відносно зображення ρ_X^*.

Вправа

1. Доведіть, що обмеження зображення ρ_X^* на підпростір $\Bbbk^{(X)}$ ізоморфне зображенню ρ_X.
   Зокрема, якщо множина X є скінченою, то зображення ρ_X і ρ_X^* ізоморфні. Чи буде так і коли ця множина нескінчена?
2. Якщо група G діє на множинах X і Y, відображення $f : X \to Y$ зветься *G-еквіваріантним*, якщо $f(gx) = gf(x)$ для всіх $g \in G$, $x \in X$. У цьому випадку побудуйте гомоморфізми зображень $\rho_X \to \rho_Y$ і $\rho_Y^* \to \rho_X^*$.

Теорема («Лема Шура»)

Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *і* $\theta : G \to \mathrm{GL}(W)$ *— зображення групи* G*, причому* ρ *є незвідним.*

1. *Будь-який гомоморфізм* $f : \rho \to \theta$ *є або нульовим, або ін'єктивним (мономорфізмом).*

Теорема («Лема Шура»)

Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *і* $\theta : G \to \mathrm{GL}(W)$ *— зображення групи* G*, причому* ρ *є незвідним.*

1. *Будь-який гомоморфізм* $f : \rho \to \theta$ *є або нульовим, або ін'єктивним (мономорфізмом).*
2. *Будь-який гомоморфізм* $f : \theta \to \rho$ *є або нульовим, або сюр'єктивним (епіморфізмом).*

Теорема («Лема Шура»)

Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *і* $\theta : G \to \mathrm{GL}(W)$ *— зображення групи* G*, причому* ρ *є незвідним.*

1. *Будь-який гомоморфізм* $f : \rho \to \theta$ *є або нульовим, або ін'єктивним (мономорфізмом).*
2. *Будь-який гомоморфізм* $f : \theta \to \rho$ *є або нульовим, або сюр'єктивним (епіморфізмом).*
3. *Якщо зображення* θ *також є незвідним, то будь-який гомоморфізм* $f : \rho \to \theta$ *є або нульовим, або ізоморфізмом. Зокрема, кільце ендоморфізмів незвідного зображення є тілом.*

Теорема («Лема Шура»)

Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *і* $\theta : G \to \mathrm{GL}(W)$ *— зображення групи* G*, причому* ρ *є незвідним.*

1. *Будь-який гомоморфізм* $f : \rho \to \theta$ *є або нульовим, або ін'єктивним (мономорфізмом).*
2. *Будь-який гомоморфізм* $f : \theta \to \rho$ *є або нульовим, або сюр'єктивним (епіморфізмом).*
3. *Якщо зображення* θ *також є незвідним, то будь-який гомоморфізм* $f : \rho \to \theta$ *є або нульовим, або ізоморфізмом. Зокрема, кільце ендоморфізмів незвідного зображення є тілом.*
4. *Якщо поле* $\Bbbk$ *є алгебрично замкненим, а* ρ *є скінченовимірним незвідним зображенням, то кожен ендоморфізм зображення* ρ *є скалярним (тобто рівним* $\lambda \mathbb{1}_V$*, де* $\mathbb{1}_V$ *— тотожне відображення простору* V*).*

Доведення.

(1) Нехай $f \neq 0$. Легко переконатися (зробіть це), що $\operatorname{Ker} f$ є інваріантним підпростором у V. Оскільки $\operatorname{Ker} f \neq V$, то $\operatorname{Ker} f = 0$, тобто f — мономорфізм.

Доведення.

(1) Нехай $f \neq 0$. Легко переконатися (зробіть це), що $\mathrm{Ker}\, f$ є інваріантним підпростором у V. Оскільки $\mathrm{Ker}\, f \neq V$, то $\mathrm{Ker}\, f = 0$, тобто f — мономорфізм.

(2) доводиться так само з огляду на те, що $\operatorname{Im} f$ також є інваріантним.

Доведення.

(1) Нехай $f \neq 0$. Легко переконатися (зробіть це), що $\mathrm{Ker}\, f$ є інваріантним підпростором у V. Оскільки $\mathrm{Ker}\, f \neq V$, то $\mathrm{Ker}\, f = 0$, тобто f — мономорфізм.

(2) доводиться так само з огляду на те, що $\mathrm{Im}\, f$ також є інваріантним.

(3) випливає з (1) і (2).

Доведення.

(1) Нехай $f \neq 0$. Легко переконатися (зробіть це), що $\mathrm{Ker}\, f$ є інваріантним підпростором у V. Оскільки $\mathrm{Ker}\, f \neq V$, то $\mathrm{Ker}\, f = 0$, тобто f — мономорфізм.
(2) доводиться так само з огляду на те, що $\mathrm{Im}\, f$ також є інваріантним.
(3) випливає з (1) і (2).
(4) Оскільки поле $\Bbbk$ алгебрично замкнене, а простір V скінченовимірний, оператор f має власне число λ. Тоді оператор $f - \lambda \mathbb{1}_V$ має ненульове ядро, отже, необертовний. Але цей оператор також є ендоморфізмом зображення ρ. Тому $f - \lambda \mathbb{1}_V = 0$ і $f = \lambda \mathbb{1}_V$. □

Наслідок

Незвідне скінченовимірне зображення комутативної групи над алгебрично замкненим полем є одновимірним.

Наслідок

Незвідне скінченовимірне зображення комутативної групи над алгебрично замкненим полем є одновимірним.

Доведення.

Якщо група G комутативна, то $\rho(h)\rho(g) = \rho(g)\rho(h)$ для всіх $g, h \in G$.

Наслідок

Незвідне скінченовимірне зображення комутативної групи над алгебрично замкненим полем є одновимірним.

Доведення.

Якщо група G комутативна, то $\rho(h)\rho(g) = \rho(g)\rho(h)$ для всіх $g, h \in G$. Тому $\rho(h)$ є ендоморфізмом зображення ρ. Якщо ρ незвідне й скінченовимірне, то всі оператори $\rho(h)$ є скалярними.

Наслідок

Незвідне скінченовимірне зображення комутативної групи над алгебрично замкненим полем є одновимірним.

Доведення.

Якщо група G комутативна, то $\rho(h)\rho(g) = \rho(g)\rho(h)$ для всіх $g, h \in G$. Тому $\rho(h)$ є ендоморфізмом зображення ρ. Якщо ρ незвідне й скінченовимірне, то всі оператори $\rho(h)$ є скалярними.
Але тоді будь-який підпростір є інваріантним. Отже, V не має підпросторів, крім 0 та V. Тому $\dim V = 1$. $\square$

Вправа

Нехай $\Bbbk$ — незлічене алгебрично замкнене поле (наприклад, поле $\mathbb{C}$ комплексних чисел), $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ — незвідне зліченовимірне зображення, f — ендоморфізм ρ. Доведіть, що f — скалярне відображення.

Вправа

Нехай $\Bbbk$ — незлічене алгебрично замкнене поле (наприклад, поле $\mathbb{C}$ комплексних чисел), $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ — незвідне зліченовимірне зображення, f — ендоморфізм ρ. Доведіть, що f — скалярне відображення.

Вказівка: (1) Перевірте, що, якщо два ендоморфізми, α і β, приймають однакове значення на якомусь ненульовому векторі, то вони рівні.

Вправа

Нехай $\Bbbk$ — незлічене алгебрично замкнене поле (наприклад, поле $\mathbb{C}$ комплексних чисел), $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ — незвідне зліченовимірне зображення, f — ендоморфізм ρ. Доведіть, що f — скалярне відображення.

Вказівка: (1) Перевірте, що, якщо два ендоморфізми, α і β, приймають однакове значення на якомусь ненульовому векторі, то вони рівні.
(2) Якщо f не скалярний, то $F(f)$ обертовний для довільного многочлена $F(x) \in \Bbbk[x]$. Тому визначений $F(f)^{-1}$, а тоді й $R(f)$ для довільної раціональної функції $R(x) \in \Bbbk(x)$.

Вправа

Нехай $\Bbbk$ — незлічене алгебрично замкнене поле (наприклад, поле $\mathbb{C}$ комплексних чисел), $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ — незвідне зліченовимірне зображення, f — ендоморфізм ρ. Доведіть, що f — скалярне відображення.

Вказівка: (1) Перевірте, що, якщо два ендоморфізми, α і β, приймають однакове значення на якомусь ненульовому векторі, то вони рівні.
(2) Якщо f не скалярний, то $F(f)$ обертовний для довільного многочлена $F(x) \in \Bbbk[x]$. Тому визначений $F(f)^{-1}$, а тоді й $R(f)$ для довільної раціональної функції $R(x) \in \Bbbk(x)$.
(3) Поле $\Bbbk(x)$ — незліченої розмірності над $\Bbbk$. (Теорема про елементарні дроби).

Вправа

Нехай $\Bbbk$ — незлічене алгебрично замкнене поле (наприклад, поле $\mathbb{C}$ комплексних чисел), $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ — незвідне зліченовимірне зображення, f — ендоморфізм ρ. Доведіть, що f — скалярне відображення.

Вказівка: (1) Перевірте, що, якщо два ендоморфізми, α і β, приймають однакове значення на якомусь ненульовому векторі, то вони рівні.
(2) Якщо f не скалярний, то $F(f)$ обертовний для довільного многочлена $F(x) \in \Bbbk[x]$. Тому визначений $F(f)^{-1}$, а тоді й $R(f)$ для довільної раціональної функції $R(x) \in \Bbbk(x)$.
(3) Поле $\Bbbk(x)$ — незліченої розмірності над $\Bbbk$. (Теорема про елементарні дроби).
(4) Разом з (1) це протирічить тому, що V зліченовимірне.

Теорема (Теорема Машке)

Нехай G — скінчена група порядку n, причому n не ділиться на характеристику поля $\Bbbk$ (наприклад, $\operatorname{char} \Bbbk = 0$). Тоді кожне нерозкладне зображення групи G над полем $\Bbbk$ є незвідним. Рівносильно, кожне зображення групи G є цілком звідним.

Теорема (Теорема Машке)

Нехай G — скінчена група порядку n, причому n не ділиться на характеристику поля $\Bbbk$ (наприклад, $\operatorname{char} \Bbbk = 0$). Тоді кожне нерозкладне зображення групи G над полем $\Bbbk$ є незвідним. Рівносильно, кожне зображення групи G є цілком звідним.

Доведення теореми Машке ґрунтується на наступній лемі, яку ми також використаємо й надалі.

Lemma (Лема про усереднення)

Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *і* $\theta : G \to \mathrm{GL}(W)$ *— два зображення скінченої групи* G, $\varphi : V \to W$ *— довільне лінійне відображення. Тоді відображення*

$$\tilde{\varphi} = \sum_{x \in G} \theta(x^{-1})\varphi\rho(x)$$

є гомоморфізмом $\rho \to \theta$.

Lemma (Лема про усереднення)

Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *і* $\theta : G \to \mathrm{GL}(W)$ *— два зображення скінченої групи* G, $\varphi : V \to W$ *— довільне лінійне відображення. Тоді відображення*

$$\tilde{\varphi} = \textstyle\sum_{x \in G} \theta(x^{-1})\varphi\rho(x)$$

є гомоморфізмом $\rho \to \theta$*.*
(Зауважимо, що характеристика поля в цій лемі неістотна.)

Доведення.

Дійсно, для довільного елемента $g \in G$

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}\rho(h)(v) &= \sum_{g \in G} \rho(g^{-1})\varphi\rho(g)\rho(h)(v) = \sum_{g \in G} \rho(g^{-1})\varphi\rho(gh)(v) = \\ &= \sum_{q \in G} \rho(hq^{-1})\varphi\rho(q)(v) = \sum_{q \in G} \rho(h)\rho(q^{-1})\varphi\rho(q)(v) = \\ &= \rho(h) \sum_{q \in G} \rho(q^{-1})\varphi\rho(q)(v) = \rho(h)\tilde{\varphi}(v).\end{aligned}$$

Доведення.

Перейдемо до доведення теореми Машке.

Доведення.

Перейдемо до доведення теореми Машке.
Припустимо, що зображення $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ є звідним, а $U \subset V$ — інваріантний підпростір, відмінний від 0 і від V.

Доведення.

Перейдемо до доведення теореми Машке.
Припустимо, що зображення $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ є звідним, а $U \subset V$ — інваріантний підпростір, відмінний від 0 і від V.
Існує доповнення U' підпростору U, тобто такий підпростір, що $V = U \oplus U'$.

Доведення.

Перейдемо до доведення теореми Машке.
Припустимо, що зображення $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ є звідним, а $U \subset V$ — інваріантний підпростір, відмінний від 0 і від V.
Існує доповнення U' підпростору U, тобто такий підпростір, що $V = U \oplus U'$.
Розглянемо оператор $\pi : V \to U$ *проектування* на U: саме, якщо $v = u + u'$, де $u \in U$, $u' \in U'$, то $\pi(v) = u$.

Доведення.

Перейдемо до доведення теореми Машке.
Припустимо, що зображення $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ є звідним, а $U \subset V$ — інваріантний підпростір, відмінний від 0 і від V.
Існує доповнення U' підпростору U, тобто такий підпростір, що $V = U \oplus U'$.
Розглянемо оператор $\pi : V \to U$ *проектування* на U: саме, якщо $v = u + u'$, де $u \in U$, $u' \in U'$, то $\pi(v) = u$.
Очевидно, $\pi^2 = \pi$ і $\pi(u) = u$ для $u \in U$.

Доведення.

Перейдемо до доведення теореми Машке.
Припустимо, що зображення $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ є звідним, а $U \subset V$ — інваріантний підпростір, відмінний від 0 і від V.
Існує доповнення U' підпростору U, тобто такий підпростір, що $V = U \oplus U'$.
Розглянемо оператор $\pi : V \to U$ *проектування* на U: саме, якщо $v = u + u'$, де $u \in U$, $u' \in U'$, то $\pi(v) = u$.
Очевидно, $\pi^2 = \pi$ і $\pi(u) = u$ для $u \in U$.
За лемою, оператор $\bar{\pi} = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} \rho(g^{-1})\pi\rho(g)$ є ендоморфізмом зображення ρ.

Доведення.

Перейдемо до доведення теореми Машке.
Припустимо, що зображення $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ є звідним, а $U \subset V$ — інваріантний підпростір, відмінний від 0 і від V.
Існує доповнення U' підпростору U, тобто такий підпростір, що $V = U \oplus U'$.
Розглянемо оператор $\pi : V \to U$ *проектування* на U: саме, якщо $v = u + u'$, де $u \in U$, $u' \in U'$, то $\pi(v) = u$.
Очевидно, $\pi^2 = \pi$ і $\pi(u) = u$ для $u \in U$.
За лемою, оператор $\bar{\pi} = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) \pi \rho(g)$ є ендоморфізмом зображення ρ.
Якщо $u \in U$, то $\rho(g)(u) \in U$, тому $\pi\rho(g)(u) = \rho(g)(u)$, звідки випливає, що $\bar{\pi}(u) = u$.

Доведення.

Перейдемо до доведення теореми Машке.
Припустимо, що зображення $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ є звідним, а $U \subset V$ — інваріантний підпростір, відмінний від 0 і від V.
Існує доповнення U' підпростору U, тобто такий підпростір, що $V = U \oplus U'$.
Розглянемо оператор $\pi : V \to U$ *проектування* на U: саме, якщо $v = u + u'$, де $u \in U$, $u' \in U'$, то $\pi(v) = u$.
Очевидно, $\pi^2 = \pi$ і $\pi(u) = u$ для $u \in U$.
За лемою, оператор $\bar{\pi} = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) \pi \rho(g)$ є ендоморфізмом зображення ρ.
Якщо $u \in U$, то $\rho(g)(u) \in U$, тому $\pi\rho(g)(u) = \rho(g)(u)$, звідки випливає, що $\bar{\pi}(u) = u$.
З тих самих міркувань завжди $\bar{\pi}(v) \in U$. Тому $\bar{\pi}^2 = \bar{\pi}$

Доведення.

Перейдемо до доведення теореми Машке.
Припустимо, що зображення $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ є звідним, а $U \subset V$ — інваріантний підпростір, відмінний від 0 і від V.
Існує доповнення U' підпростору U, тобто такий підпростір, що $V = U \oplus U'$.
Розглянемо оператор $\pi : V \to U$ *проектування* на U: саме, якщо $v = u + u'$, де $u \in U$, $u' \in U'$, то $\pi(v) = u$.
Очевидно, $\pi^2 = \pi$ і $\pi(u) = u$ для $u \in U$.
За лемою, оператор $\bar{\pi} = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) \pi \rho(g)$ є ендоморфізмом зображення ρ.
Якщо $u \in U$, то $\rho(g)(u) \in U$, тому $\pi\rho(g)(u) = \rho(g)(u)$, звідки випливає, що $\bar{\pi}(u) = u$.
З тих самих міркувань завжди $\bar{\pi}(v) \in U$. Тому $\bar{\pi}^2 = \bar{\pi}$
Позначимо $U'' = \mathrm{Ker}\, \bar{\pi}$. Це інваріантний підпростір і $U \cap U'' = 0$.

Доведення.

Перейдемо до доведення теореми Машке.
Припустимо, що зображення $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ є звідним, а $U \subset V$ — інваріантний підпростір, відмінний від 0 і від V.
Існує доповнення U' підпростору U, тобто такий підпростір, що $V = U \oplus U'$.
Розглянемо оператор $\pi : V \to U$ *проектування* на U: саме, якщо $v = u + u'$, де $u \in U$, $u' \in U'$, то $\pi(v) = u$.
Очевидно, $\pi^2 = \pi$ і $\pi(u) = u$ для $u \in U$.
За лемою, оператор $\bar{\pi} = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) \pi \rho(g)$ є ендоморфізмом зображення ρ.
Якщо $u \in U$, то $\rho(g)(u) \in U$, тому $\pi\rho(g)(u) = \rho(g)(u)$, звідки випливає, що $\bar{\pi}(u) = u$.
З тих самих міркувань завжди $\bar{\pi}(v) \in U$. Тому $\bar{\pi}^2 = \bar{\pi}$
Позначимо $U'' = \mathrm{Ker}\, \bar{\pi}$. Це інваріантний підпростір і $U \cap U'' = 0$.
З іншого боку, $v = \bar{\pi}(v) + (v - \bar{\pi}(v))$ і другий доданок лежить в U''.
Отже, $V = U \oplus U''$, тобто зображення ρ є розкладним. □

Наслідок

Нехай виконані умови теореми Машке.

1. *Кожне нерозкладне зображення групи* G *над полем* $\Bbbk$ *є скінченновимірним.*

Наслідок

Нехай виконані умови теореми Машке.

1. *Кожне нерозкладне зображення групи G над полем $\Bbbk$ є скінченовимірним.*
2. *Зображення ρ є незвідним (або, що те саме, нерозкладним) тоді й лише тоді, коли його кільце ендоморфізмів є тілом.*

Наслідок

Нехай виконані умови теореми Машке.

1. *Кожне нерозкладне зображення групи* G *над полем* $\mathbb{k}$ *є скінченовимірним.*
2. *Зображення* ρ *є незвідним (або, що те саме, нерозкладним) тоді й лише тоді, коли його кільце ендоморфізмів є тілом.*
3. *Якщо поле* $\mathbb{k}$ *алгебрично замкнене, то зображення* ρ *є незвідним (або, що те саме, нерозкладним) тоді й лише тоді, коли* $h(\rho, \rho) = 1$.

Наслідок

Нехай виконані умови теореми Машке.

1. *Кожне нерозкладне зображення групи G над полем $\Bbbk$ є скінченовимірним.*
2. *Зображення ρ є незвідним (або, що те саме, нерозкладним) тоді й лише тоді, коли його кільце ендоморфізмів є тілом.*
3. *Якщо поле $\Bbbk$ алгебрично замкнене, то зображення ρ є незвідним (або, що те саме, нерозкладним) тоді й лише тоді, коли $h(\rho, \rho) = 1$.*
4. *Кожне скінченовимірне зображення є цілком звідним.*

Доведення.

(1) Нехай v — довільний ненульовий вектор простору V. Розглянемо підпростір U, який складається з усіх лінійних комбінацій $\sum_{g\in G} \lambda_g \rho_g(v)$, де $\lambda_g \in \Bbbk$. Він є інваріантним і скінченовимірним. За теоремою Машке, якщо зображення ρ нерозкладне, $U = V$.

Доведення.

(1) Нехай v — довільний ненульовий вектор простору V. Розглянемо підпростір U, який складається з усіх лінійних комбінацій $\sum_{g\in G}\lambda_g\rho_g(v)$, де $\lambda_g\in\Bbbk$. Він є інваріантним і скінченовимірним. За теоремою Машке, якщо зображення ρ нерозкладне, $U=V$.

(2) Припустимо, що $V=V_1\oplus V_2$, де обидва підпростори V_1, V_2 ненульові й інваріантні. Якщо $v=v_1+v_2$, визначимо $\pi(v)=v_1$. Це ендоморфізм зображення ρ (перевірте це), причому він ненульовий і необертовний (оскільки $\mathrm{Ker}\,\pi=V_2$).

Доведення.

(1) Нехай v — довільний ненульовий вектор простору V. Розглянемо підпростір U, який складається з усіх лінійних комбінацій $\sum_{g\in G}\lambda_g\rho_g(v)$, де $\lambda_g\in\Bbbk$. Він є інваріантним і скінченовимірним. За теоремою Машке, якщо зображення ρ нерозкладне, $U=V$.

(2) Припустимо, що $V=V_1\oplus V_2$, де обидва підпростори V_1, V_2 ненульові й інваріантні. Якщо $v=v_1+v_2$, визначимо $\pi(v)=v_1$. Це ендоморфізм зображення ρ (перевірте це), причому він ненульовий і необертовний (оскільки $\mathrm{Ker}\,\pi=V_2$).

(3) випливає з (2), оскільки якщо $h(\rho,\rho)=1$, то $\mathrm{Hom}_G(\rho,\rho)=\Bbbk$.

Доведення.

(1) Нехай v — довільний ненульовий вектор простору V. Розглянемо підпростір U, який складається з усіх лінійних комбінацій $\sum_{g\in G}\lambda_g\rho_g(v)$, де $\lambda_g\in\Bbbk$. Він є інваріантним і скінченовимірним. За теоремою Машке, якщо зображення ρ нерозкладне, $U=V$.

(2) Припустимо, що $V=V_1\oplus V_2$, де обидва підпростори V_1, V_2 ненульові й інваріантні. Якщо $v=v_1+v_2$, визначимо $\pi(v)=v_1$. Це ендоморфізм зображення ρ (перевірте це), причому він ненульовий і необертовний (оскільки $\mathrm{Ker}\,\pi=V_2$).

(3) випливає з (2), оскільки якщо $h(\rho,\rho)=1$, то $\mathrm{Hom}_G(\rho,\rho)=\Bbbk$.

(4) є безпосереднім наслідком теореми Машке. □

Нехай виконані умови теореми Машке. Кожне скінченовимірне зображення ρ розкладається у пряму суму нерозкладних: $\rho = \bigoplus_{i=1}^{m} \rho_i$. Серед них, звичайно, можуть бути ізоморфні. *Кратністю* $\mu(\theta, \rho)$ незвідного зображення θ у зображенні ρ зветься кількість тих прямих доданків у цьому розкладі, які ізоморфні θ.

Нехай виконані умови теореми Машке. Кожне скінченовимірне зображення ρ розкладається у пряму суму нерозкладних: $\rho = \bigoplus_{i=1}^{m} \rho_i$. Серед них, звичайно, можуть бути ізоморфні. *Кратністю* $\mu(\theta, \rho)$ незвідного зображення θ у зображенні ρ зветься кількість тих прямих доданків у цьому розкладі, які ізоморфні θ.

Наслідок

Нехай виконані умови теореми Машке. Тоді

$$\mu(\theta, \rho) = \frac{h(\theta, \rho)}{h(\theta, \theta)} = \frac{h(\rho, \theta)}{h(\theta, \theta)}.$$

Зокрема, кратність $\mu(\theta, \rho)$ не залежить від розкладу зображення ρ у пряму суму нерозкладних.

Нехай виконані умови теореми Машке. Кожне скінченовимірне зображення ρ розкладається у пряму суму нерозкладних: $\rho = \bigoplus_{i=1}^{m} \rho_i$. Серед них, звичайно, можуть бути ізоморфні. *Кратністю* $\mu(\theta, \rho)$ незвідного зображення θ у зображенні ρ зветься кількість тих прямих доданків у цьому розкладі, які ізоморфні θ.

Наслідок

Нехай виконані умови теореми Машке. Тоді

$$\mu(\theta, \rho) = \frac{h(\theta, \rho)}{h(\theta, \theta)} = \frac{h(\rho, \theta)}{h(\theta, \theta)}.$$

Зокрема, кратність $\mu(\theta, \rho)$ не залежить від розкладу зображення ρ у пряму суму нерозкладних.

Якщо поле $\Bbbk$ алгебрично замкнене, $h(\theta, \theta) = 1$ і $\mu(\theta, \rho) = h(\theta, \rho) = h(\rho, \theta)$.

Доведення.

Нехай $V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i$, де всі підпростори V_i інваріантні, причому зображення $\rho_i = \rho_{V_i}$ незвідні.

Доведення.

Нехай $V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i$, де всі підпростори V_i інваріантні, причому зображення $\rho_i = \rho_{V_i}$ незвідні.
Кожен гомоморфізм $f : \theta \to \rho$ індукує гомоморфізми $f_i : \theta \to \rho_i$, а саме, якщо $f(w) = \sum_{i=1}^{m} v_i$, де $v_i \in V_i$, то $f_i(w) = v_i$ (перевірте, що це дійсно гомоморфізм).

Доведення.

Нехай $V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i$, де всі підпростори V_i інваріантні, причому зображення $\rho_i = \rho_{V_i}$ незвідні.
Кожен гомоморфізм $f : \theta \to \rho$ індукує гомоморфізми $f_i : \theta \to \rho_i$, а саме, якщо $f(w) = \sum_{i=1}^{m} v_i$, де $v_i \in V_i$, то $f_i(w) = v_i$ (перевірте, що це дійсно гомоморфізм).
Відображення f повністю визначається відображеннями f_i. Навпаки, якщо задано гомоморфізми $f_i : \theta \to \rho_i$, то відображення f таке, що $f(w) = \sum_{i=1}^{m} f_i(w)$ є гомоморфізмом $\theta \to \rho$ (перевірте це).

Доведення.

Нехай $V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i$, де всі підпростори V_i інваріантні, причому зображення $\rho_i = \rho_{V_i}$ незвідні.
Кожен гомоморфізм $f : \theta \to \rho$ індукує гомоморфізми $f_i : \theta \to \rho_i$, а саме, якщо $f(w) = \sum_{i=1}^{m} v_i$, де $v_i \in V_i$, то $f_i(w) = v_i$ (перевірте, що це дійсно гомоморфізм).
Відображення f повністю визначається відображеннями f_i. Навпаки, якщо задано гомоморфізми $f_i : \theta \to \rho_i$, то відображення f таке, що $f(w) = \sum_{i=1}^{m} f_i(w)$ є гомоморфізмом $\theta \to \rho$ (перевірте це).

Отже, $h(\theta, \rho) = \sum_{i=1}^{m} h(\theta, \rho_i)$. Оскільки $h(\theta, \rho_i) = 0$, якщо $\rho_i \not\simeq \theta$, і $h(\theta, \rho_i) = h(\theta, \theta)$, якщо $\rho_i \simeq \theta$, це доводить першу рівність.

Доведення.

Нехай $V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i$, де всі підпростори V_i інваріантні, причому зображення $\rho_i = \rho_{V_i}$ незвідні.
Кожен гомоморфізм $f : \theta \to \rho$ індукує гомоморфізми $f_i : \theta \to \rho_i$, а саме, якщо $f(w) = \sum_{i=1}^{m} v_i$, де $v_i \in V_i$, то $f_i(w) = v_i$ (перевірте, що це дійсно гомоморфізм).
Відображення f повністю визначається відображеннями f_i. Навпаки, якщо задано гомоморфізми $f_i : \theta \to \rho_i$, то відображення f таке, що $f(w) = \sum_{i=1}^{m} f_i(w)$ є гомоморфізмом $\theta \to \rho$ (перевірте це).

Отже, $h(\theta, \rho) = \sum_{i=1}^{m} h(\theta, \rho_i)$. Оскільки $h(\theta, \rho_i) = 0$, якщо $\rho_i \not\simeq \theta$, і $h(\theta, \rho_i) = h(\theta, \theta)$, якщо $\rho_i \simeq \theta$, це доводить першу рівність.

Аналогічне доведення другої рівності залишається як вправа. □

Вправа

За умов теореми Машке, доведіть, що для довільних скінченовимірних зображень

$$h(\rho, \rho') = \sum_{\theta} \mu(\theta, \rho)\mu(\theta, \rho')h(\theta, \theta),$$

де сума береться за всіма незвідними зображеннями.

Вправа

За умов теореми Машке, доведіть, що для довільних скінченовимірних зображень

$$h(\rho, \rho') = \sum_{\theta} \mu(\theta, \rho)\mu(\theta, \rho')h(\theta, \theta),$$

де сума береться за всіма незвідними зображеннями. Зокрема,

$$h(\rho, \rho) = \sum_{\theta} \mu(\theta, \rho)^2 h(\theta, \theta).$$

Вправа

За умов теореми Машке, доведіть, що для довільних скінченовимірних зображень

$$h(\rho,\rho') = \sum_{\theta} \mu(\theta,\rho)\mu(\theta,\rho')h(\theta,\theta),$$

де сума береться за всіма незвідними зображеннями. Зокрема,

$$h(\rho,\rho) = \sum_{\theta} \mu(\theta,\rho)^2 h(\theta,\theta).$$

Якщо поле алгебрично замкнене, ці формули переписуються так:

$$h(\rho,\rho') = \sum_{\theta} \mu(\theta,\rho)\mu(\theta,\rho'),$$
$$h(\rho,\rho) = \sum_{\theta} \mu(\theta,\rho)^2.$$

Наступний корисний факт не залежить від характеристики поля.

Lemma

Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *— скінченовимірне зображення. Тоді* $h(\rho_G, \rho) = \dim V$, *де* ρ_G *— регулярне зображення групи* G (див. Приклад 5).

Доведення.

Для кожного вектора $v \in V$ визначимо лінійне відображення $\varphi_v : \Bbbk G \to V$ правилом $\varphi_v\left(\sum_{x\in G} \lambda_x x\right) = \sum_{x\in G} \lambda_x \rho(x) v$.

Доведення.

Для кожного вектора $v \in V$ визначимо лінійне відображення $\varphi_v : \Bbbk G \to V$ правилом $\varphi_v\big(\sum_{x\in G}\lambda_x x\big) = \sum_{x\in G}\lambda_x\rho(x)v$.
Легко перевірити, що φ_v є гомоморфізмом $\rho_G \to \rho$ (зробіть це).

Доведення.

Для кожного вектора $v \in V$ визначимо лінійне відображення $\varphi_v : \Bbbk G \to V$ правилом $\varphi_v\left(\sum_{x\in G} \lambda_x x\right) = \sum_{x\in G} \lambda_x \rho(x)v$. Легко перевірити, що φ_v є гомоморфізмом $\rho_G \to \rho$ (зробіть це).

Нехай тепер $\psi : \Bbbk G \to V$ — довільний гомоморфізм $\rho_G \to \rho$, $v = \psi(1)$ (ми ототожнюємо кожен елемент $x \in G$ з лінійною комбінацією, в якій коефіцієнт при x дорівнює 1, а всі інші коефіцієнти рівні 0). Тоді

$$\psi\Big(\sum_{x\in G} \lambda_x x\Big) = \sum_{x\in G} \lambda_x \psi(x) = \sum_{x\in G} \lambda_x \psi(\rho_G(x)1) =$$
$$= \sum_{x\in G} \lambda_x \rho(x)\psi(1) = \sum_{x\in G} \lambda_x \rho(x) v = \varphi_v\Big(\sum_{x\in G} \lambda_x x\Big).$$

Отже, φ_v — це всі гомоморфізми $\rho_G \to \rho$ і $h(\rho_G, \rho) = \dim V$. □

Наслідок

Нехай $\hat{G}$ *— множина всіх попарно неізоморфних незвідних зображень групи* G*. Якщо виконані умови теореми Машке, то*

$$\sum_{\theta \in \hat{G}} \frac{(\dim \theta)^2}{h(\theta, \theta)} = \#(G)$$

Наслідок

Нехай $\hat{G}$ — множина всіх попарно неізоморфних незвідних зображень групи G. Якщо виконані умови теореми Машке, то

$$\sum_{\theta\in\hat{G}} \frac{(\dim\theta)^2}{h(\theta,\theta)} = \#(G)$$

Зокрема, якщо поле $\Bbbk$ є алгебрично замкненим, то

$$\sum_{\theta\in\hat{G}} (\dim\theta)^2 = \#(G).$$

Доведення.

За Лемою 1.2, Вправою 18 і Наслідком 16,

$$\#(G) = \dim \rho_G = h(\rho_G, \rho_G) =$$
$$= \sum_{\theta \in \hat{G}} \mu(\theta, \rho_G)^2 h(\theta, \theta) = \sum_{\theta \in \hat{G}} \frac{h(\rho_G, \theta)^2}{h(\theta, \theta)^2} h(\theta, \theta) =$$
$$= \sum_{\theta \in \hat{G}} \frac{(\dim \theta)^2}{h(\theta, \theta)}.$$

□

Якщо взяти до уваги ще Наслідок 9, одержимо наступний результат.

Наслідок

Якщо виконані умови теореми Машке, група G є комутативною, а поле $\Bbbk$ алгебрично замкненим, то $\#(\hat{G}) = \#(G)$.

Якщо взяти до уваги ще Наслідок 9, одержимо наступний результат.

Наслідок

Якщо виконані умови теореми Машке, група G є комутативною, а поле $\Bbbk$ алгебрично замкненим, то $\#(\hat{G}) = \#(G)$.

Надалі,до кінця цього пункту, ми вважаємо, що група G є скінченою, комутативною, а поле $\Bbbk$ є алгебрично замкненим і його характеристика не ділить порядок n групи G. У цих припущеннях ми побудуємо *теорію двоїстості* для скінченних комутативних груп, аналогічну теорії двоїстості для скінченновимірних векторних просторів.

При цих припущеннях незвідні зображення є одновимірними, тобто є гомоморфізмами $\chi : G \to \Bbbk^\times$. Їх звуть *характерами* групи G.

При цих припущеннях незвідні зображення є одновимірними, тобто є гомоморфізмами $\chi : G \to \Bbbk^\times$. Їх звуть *характерами* групи G. Характери можна перемножати поточково: $(\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$. Легко бачити, що відносно цієї операції множина характерів $\hat{G}$ теж є комутативною групою.

При цих припущеннях незвідні зображення є одновимірними, тобто є гомоморфізмами $\chi : G \to \Bbbk^\times$. Їх звуть *характерами* групи G.
Характери можна перемножати поточково: $(\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$.
Легко бачити, що відносно цієї операції множина характерів $\hat{G}$ теж є комутативною групою.

Тому визначена й її група характерів $\hat{\hat{G}}$. Існує природний гомоморфізм $\gamma : G \to \hat{\hat{G}}$, визначений правилом: $\gamma(g)(\chi) = \chi(g)$.
(Це те, що у функціональному аналізі звуть «перетворенням Гельфанда»).

При цих припущеннях незвідні зображення є одновимірними, тобто є гомоморфізмами $\chi : G \to \Bbbk^\times$. Їх звуть *характерами* групи G.
Характери можна перемножати поточково: $(\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$.
Легко бачити, що відносно цієї операції множина характерів $\hat{G}$ теж є комутативною групою.

Тому визначена й її група характерів $\hat{\hat{G}}$. Існує природний гомоморфізм $\gamma : G \to \hat{\hat{G}}$, визначений правилом: $\gamma(g)(\chi) = \chi(g)$.
(Це те, що у функціональному аналізі звуть «перетворенням Гельфанда»).

Theorem (Теорема двоїстості)

Гомоморфізм γ є ізоморфізмом.

Доведення.

Оскільки, за Наслідком 23, $\#(\hat{\hat{G}}) = \#(G)$, достатньо довести, що $\operatorname{Ker}\gamma = \{1\}$: тоді відображення γ є ін'єктивним, а тому й біективним.

Доведення.

Оскільки, за Наслідком 23, $\#(\hat{\hat{G}}) = \#(G)$, достатньо довести, що $\operatorname{Ker}\gamma = \{1\}$: тоді відображення γ є ін'єктивним, а тому й бієктивним. Але

$$\operatorname{Ker}\gamma = \left\{ g \mid \chi(g) = 1 \text{ для всіх } \chi \in \hat{G} \right\}.$$

Отже, характери групи G збігаються з характерами групи $G/\operatorname{Ker}\gamma$, тому $\#(G) = \#(\hat{G}) = \#(\widehat{G/\operatorname{Ker}\gamma}) = \#(G/\operatorname{Ker}\gamma)$, звідки $\#(\operatorname{Ker}\gamma) = 1$. □

Зробимо ще одне важливе зауваження.

Твердження

Якщо виконані умови теореми Машке, а всі незвідні зображення групи G є одновимірними, то група G комутативна.

Зробимо ще одне важливе зауваження.

Твердження

Якщо виконані умови теореми Машке, а всі незвідні зображення групи G є одновимірними, то група G комутативна.

Доведення.

Перш за все, зауважимо, що регулярне зображення групи G є *точним*, тобто $\rho_G(g) = \mathbb{1}$ тоді й лише тоді, коли $g = 1$.

Зробимо ще одне важливе зауваження.

Твердження

Якщо виконані умови теореми Машке, а всі незвідні зображення групи G є одновимірними, то група G комутативна.

Доведення.

Перш за все, зауважимо, що регулярне зображення групи G є *точним*, тобто $\rho_G(g) = \mathbb{1}$ тоді й лише тоді, коли $g = 1$.
Дійсно, якщо $g \neq 1$, то $\rho_G(g)1 = g \neq 1$, отже $\rho_G(g) \neq \mathbb{1}$.

Зробимо ще одне важливе зауваження.

Твердження

Якщо виконані умови теореми Машке, а всі незвідні зображення групи G є одновимірними, то група G комутативна.

Доведення.

Перш за все, зауважимо, що регулярне зображення групи G є *точним*, тобто $\rho_G(g) = \mathbb{1}$ тоді й лише тоді, коли $g = 1$.
Дійсно, якщо $g \neq 1$, то $\rho_G(g)1 = g \neq 1$, отже $\rho_G(g) \neq \mathbb{1}$.
Припустимо, що всі незвідні зображення є одновимірними. За теоремою Машке, регулярне зображення є прямою сумою незвідних, тобто одновимірних. Тому в деякій базі воно задається діагональними матрицями.

Зробимо ще одне важливе зауваження.

Твердження

Якщо виконані умови теореми Машке, а всі незвідні зображення групи G є одновимірними, то група G комутативна.

Доведення.

Перш за все, зауважимо, що регулярне зображення групи G є *точним*, тобто $\rho_G(g) = \mathbb{1}$ тоді й лише тоді, коли $g = 1$.
Дійсно, якщо $g \neq 1$, то $\rho_G(g)1 = g \neq 1$, отже $\rho_G(g) \neq \mathbb{1}$.
Припустимо, що всі незвідні зображення є одновимірними. За теоремою Машке, регулярне зображення є прямою сумою незвідних, тобто одновимірних. Тому в деякій базі воно задається діагональними матрицями.
Оскільки довільні діагональні матриці перестановні між собою, $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h) = \rho(h)\rho(g) = \rho(hg)$, звідки $gh = hg$ для довільних $g, h \in G$. □

В усіх прикладах, які йдуть нижче, ми розглядаємо зображення над полем комплексних чисел.

В усіх прикладах, які йдуть нижче, ми розглядаємо зображення над полем комплексних чисел.

Приклад

Нехай G — циклічна група порядку n: $G = \langle\, a \mid a^n = 1 \,\rangle$. Її незвідне зображення ρ є одновимірним, тобто $\rho(a) = \alpha \in \Bbbk$. При цьому $a^n = 1$, тобто $a = \exp(\frac{2\pi k}{n})$, де $0 \leqslant k < n$. Це й є всі незвідні (або, що те саме, нерозкладні) зображення.

В усіх прикладах, які йдуть нижче, ми розглядаємо зображення над полем комплексних чисел.

Приклад

Нехай G — циклічна група порядку n: $G = \langle\, a \mid a^n = 1 \,\rangle$. Її незвідне зображення ρ є одновимірним, тобто $\rho(a) = \alpha \in \Bbbk$. При цьому $a^n = 1$, тобто $a = \exp(\frac{2\pi k}{n})$, де $0 \leqslant k < n$. Це й є всі незвідні (або, що те саме, нерозкладні) зображення.

Вправа

Виведіть з цього прикладу, що $\hat{G} \simeq G$ для довільної комутативної скінченної групи G.

В усіх прикладах, які йдуть нижче, ми розглядаємо зображення над полем комплексних чисел.

Приклад

Нехай G — циклічна група порядку n: $G = \langle\, a \mid a^n = 1 \,\rangle$. Її незвідне зображення ρ є одновимірним, тобто $\rho(a) = \alpha \in \Bbbk$. При цьому $a^n = 1$, тобто $a = \exp(\frac{2\pi k}{n})$, де $0 \leqslant k < n$. Це й є всі незвідні (або, що те саме, нерозкладні) зображення.

Вправа

Виведіть з цього прикладу, що $\hat{G} \simeq G$ для довільної комутативної скінченної групи G.

Вказівка: Кожна скінченна комутативна група є прямим добутком циклічних.

Вправа

Нехай G — група діедра порядку $2n$:
$G = \langle\, \sigma, \tau \mid \sigma^n = 1, \tau^2 = 1, \sigma\tau = \tau\sigma^{-1} \,\rangle$. Перевірте, що

Вправа

Нехай G — група діедра порядку $2n$:
$G = \langle\, \sigma, \tau \mid \sigma^n = 1, \tau^2 = 1, \sigma\tau = \tau\sigma^{-1} \,\rangle$. Перевірте, що

1. Якщо n парне, група G має 4 одновимірних зображення, а якщо n непарне — 2 одновимірних зображення.

Вправа

Нехай G — група діедра порядку $2n$:
$G = \langle\, \sigma, \tau \mid \sigma^n = 1, \tau^2 = 1, \sigma\tau = \tau\sigma^{-1} \,\rangle$. Перевірте, що

1. Якщо n парне, група G має 4 одновимірних зображення, а якщо n непарне — 2 одновимірних зображення.
2. Відповідність
$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & -\sin\frac{2\pi k}{n} \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}, \quad \tau \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
задає зображення ρ_k групи G.

Вправа

Нехай G — група діедра порядку $2n$:
$G = \langle\, \sigma, \tau \mid \sigma^n = 1, \tau^2 = 1, \sigma\tau = \tau\sigma^{-1} \,\rangle$. Перевірте, що

1. Якщо n парне, група G має 4 одновимірних зображення, а якщо n непарне — 2 одновимірних зображення.
2. Відповідність
$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & -\sin\frac{2\pi k}{n} \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}, \quad \tau \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
задає зображення ρ_k групи G.
3. При $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$, зображення ρ_k є нерозкладними й неізоморфними.

Вправа

Нехай G — група діедра порядку $2n$:
$G = \langle\, \sigma, \tau \mid \sigma^n = 1, \tau^2 = 1, \sigma\tau = \tau\sigma^{-1} \,\rangle$. Перевірте, що

1. Якщо n парне, група G має 4 одновимірних зображення, а якщо n непарне — 2 одновимірних зображення.
2. Відповідність
$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & -\sin\frac{2\pi k}{n} \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}, \quad \tau \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
задає зображення ρ_k групи G.
3. При $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$, зображення ρ_k є нерозкладними й неізоморфними. *Вказівка:* Обчисліть сліди $\operatorname{tr}\rho_k(\sigma)$ та $\operatorname{tr}\rho_k(\tau)$ і скористайтеся тим, що сліди подібних операторів рівні.

Вправа

Нехай G — група діедра порядку $2n$:
$G = \langle\, \sigma, \tau \mid \sigma^n = 1, \tau^2 = 1, \sigma\tau = \tau\sigma^{-1} \,\rangle$. Перевірте, що

1. Якщо n парне, група G має 4 одновимірних зображення, а якщо n непарне — 2 одновимірних зображення.
2. Відповідність
$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & -\sin\frac{2\pi k}{n} \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}, \quad \tau \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
задає зображення ρ_k групи G.
3. При $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$, зображення ρ_k є нерозкладними й неізоморфними. *Вказівка:* Обчисліть сліди $\operatorname{tr} \rho_k(\sigma)$ та $\operatorname{tr} \rho_k(\tau)$ і скористайтеся тим, що сліди подібних операторів рівні.
4. Користуючись Наслідком 21, доведіть, що всі незвідні зображення групи діедра — або одновимірні, або ρ_k $(1 \leqslant k < \frac{n}{2})$.

Наступна теорема показує, що умови теореми Машке є дійсно необхідними.

Theorem

Нехай характеристики p поля $\Bbbk$ ділить порядок n групи G. Тоді регулярне зображення ρ_G не є цілком звідним.

Наступна теорема показує, що умови теореми Машке є дійсно необхідними.

Theorem

Нехай характеристики p поля $\Bbbk$ ділить порядок n групи G. Тоді регулярне зображення ρ_G не є цілком звідним.

Доведення.

Нехай ρ — якесь зображення групи G, $S_\rho = \sum_{x \in G} \rho(x)$.

Наступна теорема показує, що умови теореми Машке є дійсно необхідними.

Theorem

Нехай характеристики p поля $\Bbbk$ ділить порядок n групи G. Тоді регулярне зображення ρ_G не є цілком звідним.

Доведення.

Нехай ρ — якесь зображення групи G, $S_\rho = \sum_{x \in G} \rho(x)$. Очевидно, $\rho(g)S_\rho = S_\rho \rho(g)$ для довільного $g \in G$, тобто S_ρ — ендоморфізм зображення ρ.

Наступна теорема показує, що умови теореми Машке є дійсно необхідними.

Theorem

Нехай характеристики p поля $\Bbbk$ ділить порядок n групи G. Тоді регулярне зображення ρ_G не є цілком звідним.

Доведення.

Нехай ρ — якесь зображення групи G, $S_\rho = \sum_{x \in G} \rho(x)$.
Очевидно, $\rho(g)S_\rho = S_\rho \rho(g)$ для довільного $g \in G$, тобто S_ρ — ендоморфізм зображення ρ.
Звідси ж $(S_\rho)^2 = \sum_{g \in G} gS_\rho = nS_\rho = 0$, оскільки $p \mid n$.

Наступна теорема показує, що умови теореми Машке є дійсно необхідними.

Theorem

Нехай характеристики p поля $\Bbbk$ ділить порядок n групи G. Тоді регулярне зображення ρ_G не є цілком звідним.

Доведення.

Нехай ρ — якесь зображення групи G, $S_\rho = \sum_{x \in G} \rho(x)$.
Очевидно, $\rho(g) S_\rho = S_\rho \rho(g)$ для довільного $g \in G$, тобто S_ρ — ендоморфізм зображення ρ.
Звідси ж $(S_\rho)^2 = \sum_{g \in G} g S_\rho = n S_\rho = 0$, оскільки $p \mid n$.
Якщо зображення незвідне, з леми Шура випливає, що $S_\rho = 0$. Те саме, звичайно, буде і для кожного цілком звідного зображення.

Наступна теорема показує, що умови теореми Машке є дійсно необхідними.

Theorem

Нехай характеристики p поля $\Bbbk$ ділить порядок n групи G. Тоді регулярне зображення ρ_G не є цілком звідним.

Доведення.

Нехай ρ — якесь зображення групи G, $S_\rho = \sum_{x\in G} \rho(x)$.
Очевидно, $\rho(g)S_\rho = S_\rho\rho(g)$ для довільного $g \in G$, тобто S_ρ — ендоморфізм зображення ρ.
Звідси ж $(S_\rho)^2 = \sum_{g\in G} gS_\rho = nS_\rho = 0$, оскільки $p \mid n$.
Якщо зображення незвідне, з леми Шура випливає, що $S_\rho = 0$. Те саме, звичайно, буде і для кожного цілком звідного зображення.
Але $S_{\rho_G}1 = \sum_{x\in G} x \neq 0$, отже ρ_G не є цілком звідним. □

Надалі ми вважаємо, що поле $\Bbbk$ — алгебрично замкнене, а група G скінченна, причому її порядок n не ділиться на характеристику поля $\Bbbk$.

Надалі ми вважаємо, що поле $\Bbbk$ — алгебрично замкнене, а група G скінченна, причому її порядок n не ділиться на характеристику поля $\Bbbk$.

Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ — скінченновимірне зображення групи G. Виберемо базу $v_1, v_2, \dots, v_d$ у просторі V. Тоді кожен оператор $\rho(g)$ задається матрицею $(\rho_{ij}(g))$ розміру $d \times d$. Функції $\rho_{ij}(g)$ звуться *матричними елеметнами* зображення ρ в базі $v_1, v_2, \dots, v_d$ (часто згадку про базу опускають). Ці функції мають важливі властивості, які звуться *співвідношеннями ортогональності*.

Надалі ми вважаємо, що поле $\Bbbk$ — алгебрично замкнене, а група G скінченна, причому її порядок n не ділиться на характеристику поля $\Bbbk$.

Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ — скінченновимірне зображення групи G. Виберемо базу $v_1, v_2, \dots, v_d$ у просторі V. Тоді кожен оператор $\rho(g)$ задається матрицею $(\rho_{ij}(g))$ розміру $d \times d$. Функції $\rho_{ij}(g)$ звуться *матричними елеметнами* зображення ρ в базі $v_1, v_2, \dots, v_d$ (часто згадку про базу опускають). Ці функції мають важливі властивості, які звуться *співвідношеннями ортогональності*.

Означення

У просторі $\Bbbk^G$ всіх функцій на групі G зі значеннями в полі $\Bbbk$ визначимо білінійну форму $(\xi, \eta)_G$ формулою

$$(\xi, \eta)_G = \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{x \in G} \xi(x^{-1})\eta(x).$$

Ця форма є симетричною (перевірте).

Theorem

Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *і* $\theta : G \to \mathrm{GL}(W)$ *— незвідні зображення групи* G*,* ρ_{ij} *і* θ_{ij} *— їхні матричні елементи в якихось базах просторів* V *і* W*.*

Theorem

Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *і* $\theta : G \to \mathrm{GL}(W)$ *— незвідні зображення групи* G, ρ_{ij} *і* θ_{ij} *— їхні матричні елементи в якихось базах просторів* V *і* W. *Тоді* $(\rho_{ij}, \theta_{kl})_G = 0$, *якщо* $\rho \not\simeq \theta$, *а*

Theorem

Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *і* $\theta : G \to \mathrm{GL}(W)$ *— незвідні зображення групи* G, ρ_{ij} *і* θ_{ij} *— їхні матричні елементи в якихось базах просторів* V *і* W. *Тоді* $(\rho_{ij}, \theta_{kl})_G = 0$, *якщо* $\rho \not\simeq \theta$, *а*

$$(\rho_{ij}, \rho_{kl})_G = \begin{cases} \frac{1}{d}, & \text{якщо } i = l, j = k, \\ 0 & \text{інакше}, \end{cases}$$

де $d = \dim \rho$.

Доведення.

Розглянемо лінійне відображення $\varphi : W \to V$, яке в тих самих базах задається матрицею e_{jk}, в якій на місці jk стоїть 1, а на всіх інших — 0.

Доведення.

Розглянемо лінійне відображення $\varphi : W \to V$, яке в тих самих базах задається матрицею e_{jk}, в якій на місці jk стоїть 1, а на всіх інших — 0. За Лемою 1.1, оператор $\tilde{\varphi} = \sum_{x \in G} \rho(x^{-1})\varphi\theta(x)$ є гомоморфізмом $\theta \to \rho$.

Доведення.

Розглянемо лінійне відображення $\varphi : W \to V$, яке в тих самих базах задається матрицею e_{jk}, в якій на місці jk стоїть 1, а на всіх інших — 0. За Лемою 1.1, оператор $\tilde{\varphi} = \sum_{x \in G} \rho(x^{-1}) \varphi \theta(x)$ є гомоморфізмом $\theta \to \rho$. За Лемою Шура, $\tilde{\varphi} = 0$, якщо $\theta \not\simeq \rho$ і $\tilde{\varphi} = \lambda \mathbb{1}$ для деякого $\lambda \in \Bbbk$, якщо $\theta = \rho$.

Доведення.

Розглянемо лінійне відображення $\varphi : W \to V$, яке в тих самих базах задається матрицею e_{jk}, в якій на місці jk стоїть 1, а на всіх інших — 0. За Лемою 1.1, оператор $\tilde{\varphi} = \sum_{x \in G} \rho(x^{-1})\varphi\theta(x)$ є гомоморфізмом $\theta \to \rho$. За Лемою Шура, $\tilde{\varphi} = 0$, якщо $\theta \not\simeq \rho$ і $\tilde{\varphi} = \lambda \mathbb{1}$ для деякого $\lambda \in \Bbbk$, якщо $\theta = \rho$. Значення λ можна обчислити, знайшовши слід $\operatorname{tr} \tilde{\varphi} = d\lambda$.

Доведення.

Розглянемо лінійне відображення $\varphi : W \to V$, яке в тих самих базах задається матрицею e_{jk}, в якій на місці jk стоїть 1, а на всіх інших — 0. За Лемою 1.1, оператор $\tilde{\varphi} = \sum_{x \in G} \rho(x^{-1})\varphi\theta(x)$ є гомоморфізмом $\theta \to \rho$. За Лемою Шура, $\tilde{\varphi} = 0$, якщо $\theta \not\simeq \rho$ і $\tilde{\varphi} = \lambda \mathbb{1}$ для деякого $\lambda \in \Bbbk$, якщо $\theta = \rho$.
Значення λ можна обчислити, знайшовши слід $\operatorname{tr} \tilde{\varphi} = d\lambda$.
Саме, $\operatorname{tr}(\rho(x)^{-1}\varphi\rho(x)) = \operatorname{tr} \varphi$ для кожного $x \in G$, отже

Доведення.

Розглянемо лінійне відображення $\varphi : W \to V$, яке в тих самих базах задається матрицею e_{jk}, в якій на місці jk стоїть 1, а на всіх інших — 0. За Лемою 1.1, оператор $\tilde{\varphi} = \sum_{x\in G} \rho(x^{-1})\varphi\theta(x)$ є гомоморфізмом $\theta \to \rho$. За Лемою Шура, $\tilde{\varphi} = 0$, якщо $\theta \not\simeq \rho$ і $\tilde{\varphi} = \lambda \mathbb{1}$ для деякого $\lambda \in \Bbbk$, якщо $\theta = \rho$. Значення λ можна обчислити, знайшовши слід $\operatorname{tr}\tilde{\varphi} = d\lambda$.
Саме, $\operatorname{tr}(\rho(x)^{-1}\varphi\rho(x)) = \operatorname{tr}\varphi$ для кожного $x \in G$, отже

$$\operatorname{tr}\tilde{\varphi} = n \operatorname{tr}\varphi = \begin{cases} n, & \text{якщо } j = k, \\ 0, & \text{якщо } j \neq k. \end{cases}$$

Доведення.

Розглянемо лінійне відображення $\varphi : W \to V$, яке в тих самих базах задається матрицею e_{jk}, в якій на місці jk стоїть 1, а на всіх інших — 0. За Лемою 1.1, оператор $\tilde{\varphi} = \sum_{x \in G} \rho(x^{-1})\varphi\theta(x)$ є гомоморфізмом $\theta \to \rho$. За Лемою Шура, $\tilde{\varphi} = 0$, якщо $\theta \not\simeq \rho$ і $\tilde{\varphi} = \lambda \mathbb{1}$ для деякого $\lambda \in \Bbbk$, якщо $\theta = \rho$. Значення λ можна обчислити, знайшовши слід $\operatorname{tr} \tilde{\varphi} = d\lambda$.
Саме, $\operatorname{tr}(\rho(x)^{-1}\varphi\rho(x)) = \operatorname{tr} \varphi$ для кожного $x \in G$, отже

$$\operatorname{tr} \tilde{\varphi} = n \operatorname{tr} \varphi = \begin{cases} n, & \text{якщо } j = k, \\ 0, & \text{якщо } j \neq k. \end{cases}$$

Обчислимо коефіцієнт на місці il у матриці оператора $\tilde{\varphi}$.

Доведення.

Розглянемо лінійне відображення $\varphi : W \to V$, яке в тих самих базах задається матрицею e_{jk}, в якій на місці jk стоїть 1, а на всіх інших — 0. За Лемою 1.1, оператор $\tilde{\varphi} = \sum_{x \in G} \rho(x^{-1})\varphi\theta(x)$ є гомоморфізмом $\theta \to \rho$. За Лемою Шура, $\tilde{\varphi} = 0$, якщо $\theta \not\simeq \rho$ і $\tilde{\varphi} = \lambda \mathbb{1}$ для деякого $\lambda \in \mathbb{k}$, якщо $\theta = \rho$. Значення λ можна обчислити, знайшовши слід $\operatorname{tr} \tilde{\varphi} = d\lambda$.
Саме, $\operatorname{tr}(\rho(x)^{-1}\varphi\rho(x)) = \operatorname{tr} \varphi$ для кожного $x \in G$, отже

$$\operatorname{tr} \tilde{\varphi} = n \operatorname{tr} \varphi = \begin{cases} n, & \text{якщо } j = k, \\ 0, & \text{якщо } j \neq k. \end{cases}$$

Обчислимо коефіцієнт на місці il у матриці оператора $\tilde{\varphi}$. У добутку $\varphi\theta(x)$ усі рядки, крім j-го нульові, а j-ий дорівнює k-му рядку матриці $\theta(x)$.

Доведення.

Розглянемо лінійне відображення $\varphi : W \to V$, яке в тих самих базах задається матрицею e_{jk}, в якій на місці jk стоїть 1, а на всіх інших — 0. За Лемою 1.1, оператор $\tilde{\varphi} = \sum_{x \in G} \rho(x^{-1})\varphi\theta(x)$ є гомоморфізмом $\theta \to \rho$. За Лемою Шура, $\tilde{\varphi} = 0$, якщо $\theta \not\simeq \rho$ і $\tilde{\varphi} = \lambda \mathbb{1}$ для деякого $\lambda \in \Bbbk$, якщо $\theta = \rho$. Значення λ можна обчислити, знайшовши слід $\operatorname{tr} \tilde{\varphi} = d\lambda$.
Саме, $\operatorname{tr}(\rho(x)^{-1}\varphi\rho(x)) = \operatorname{tr} \varphi$ для кожного $x \in G$, отже

$$\operatorname{tr} \tilde{\varphi} = n \operatorname{tr} \varphi = \begin{cases} n, & \text{якщо } j = k, \\ 0, & \text{якщо } j \neq k. \end{cases}$$

Обчислимо коефіцієнт на місці il у матриці оператора $\tilde{\varphi}$. У добутку $\varphi\theta(x)$ усі рядки, крім j-го нульові, а j-ий дорівнює k-му рядку матриці $\theta(x)$. Тому в матриці φ на місці il стоїть $\sum_x \rho_{ij}(x^{-1})\theta_{kl}(x) = n(\rho_{ij}, \theta_{kl})$.

Доведення.

Розглянемо лінійне відображення $\varphi : W \to V$, яке в тих самих базах задається матрицею e_{jk}, в якій на місці jk стоїть 1, а на всіх інших — 0. За Лемою 1.1, оператор $\tilde{\varphi} = \sum_{x \in G} \rho(x^{-1})\varphi\theta(x)$ є гомоморфізмом $\theta \to \rho$. За Лемою Шура, $\tilde{\varphi} = 0$, якщо $\theta \not\simeq \rho$ і $\tilde{\varphi} = \lambda \mathbb{1}$ для деякого $\lambda \in \Bbbk$, якщо $\theta = \rho$.
Значення λ можна обчислити, знайшовши слід $\operatorname{tr} \tilde{\varphi} = d\lambda$.
Саме, $\operatorname{tr}(\rho(x)^{-1}\varphi\rho(x)) = \operatorname{tr} \varphi$ для кожного $x \in G$, отже

$$\operatorname{tr} \tilde{\varphi} = n \operatorname{tr} \varphi = \begin{cases} n, & \text{якщо } j = k, \\ 0, & \text{якщо } j \neq k. \end{cases}$$

Обчислимо коефіцієнт на місці il у матриці оператора $\tilde{\varphi}$. У добутку $\varphi\theta(x)$ усі рядки, крім j-го нульові, а j-ий дорівнює k-му рядку матриці $\theta(x)$. Тому в матриці φ на місці il стоїть $\sum_x \rho_{ij}(x^{-1})\theta_{kl}(x) = n(\rho_{ij}, \theta_{kl})$. Але цей коефіцієнт дорівнює 0, якщо $\theta \not\simeq \rho$ або якщо $\theta = \rho$, але $i \neq l$ (недіагональне місце).

Доведення.

Розглянемо лінійне відображення $\varphi : W \to V$, яке в тих самих базах задається матрицею e_{jk}, в якій на місці jk стоїть 1, а на всіх інших — 0. За Лемою 1.1, оператор $\tilde{\varphi} = \sum_{x \in G} \rho(x^{-1})\varphi\theta(x)$ є гомоморфізмом $\theta \to \rho$. За Лемою Шура, $\tilde{\varphi} = 0$, якщо $\theta \not\simeq \rho$ і $\tilde{\varphi} = \lambda \mathbb{1}$ для деякого $\lambda \in \Bbbk$, якщо $\theta = \rho$. Значення λ можна обчислити, знайшовши слід $\operatorname{tr} \tilde{\varphi} = d\lambda$.
Саме, $\operatorname{tr}(\rho(x)^{-1}\varphi\rho(x)) = \operatorname{tr}\varphi$ для кожного $x \in G$, отже

$$\operatorname{tr}\tilde{\varphi} = n \operatorname{tr}\varphi = \begin{cases} n, & \text{якщо } j = k, \\ 0, & \text{якщо } j \neq k. \end{cases}$$

Обчислимо коефіцієнт на місці il у матриці оператора $\tilde{\varphi}$. У добутку $\varphi\theta(x)$ усі рядки, крім j-го нульові, а j-ий дорівнює k-му рядку матриці $\theta(x)$. Тому в матриці φ на місці il стоїть $\sum_x \rho_{ij}(x^{-1})\theta_{kl}(x) = n(\rho_{ij}, \theta_{kl})$. Але цей коефіцієнт дорівнює 0, якщо $\theta \not\simeq \rho$ або якщо $\theta = \rho$, але $i \neq l$ (недіагональне місце). Якщо ж $\theta = \rho$ і $i = l$ (діагональне місце), то, оскільки всі діагональні елементи у $\tilde{\varphi}$ однакові, цей елемент дорівнює $\lambda = \frac{1}{d} \operatorname{tr}\tilde{\varphi}$. Це й доводить необхідну формулу. □

Значну роль у теорії зображень та її застосуваннях разом з матричними елементами (а подекуди й більшу) відіграють також *характери* зображень.

Значну роль у теорії зображень та її застосуваннях разом з матричними елементами (а подекуди й більшу) відіграють також *характери* зображень.

Означення

Характером зображення ρ зветься функція $\chi_\rho(x) = \operatorname{tr}\rho(x) = \sum_{i=1}^{d} \rho_{ii}(x)$, де $d = \dim \rho$. Зауважимо, що ця функція не залежить від вибору бази, оскільки сліди подібних матриць рівні. Характери незвідних зображень звуться *незвідними характерами* групи G.

Значну роль у теорії зображень та її застосуваннях разом з матричними елементами (а подекуди й більшу) відіграють також *характери* зображень.

Означення

Характером зображення ρ зветься функція $\chi_\rho(x) = \operatorname{tr}\rho(x) = \sum_{i=1}^{d} \rho_{ii}(x)$, де $d = \dim \rho$. Зауважимо, що ця функція не залежить від вибору бази, оскільки сліди подібних матриць рівні. Характери незвідних зображень звуться *незвідними характерами* групи G.

Для характерів також мають місце *формули ортогональності*.

Theorem

Нехай ρ і θ — незвідні зображення групи G. Тоді

$$(\chi_\rho, \chi_\theta) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \rho \simeq \theta, \\ 0, & \text{якщо } \rho \not\simeq \theta. \end{cases}$$

Theorem

Нехай ρ і θ — незвідні зображення групи G. Тоді

$$(\chi_\rho, \chi_\theta) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \rho \simeq \theta, \\ 0, & \text{якщо } \rho \not\simeq \theta. \end{cases}$$

Доведення.

За означенням, $(\chi_\rho, \chi_\theta) = \sum_{i,j} (\rho_{ii}, \theta_{jj})$.

Theorem

Нехай ρ і θ — незвідні зображення групи G. Тоді

$$(\chi_\rho, \chi_\theta) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \rho \simeq \theta, \\ 0, & \text{якщо } \rho \not\simeq \theta. \end{cases}$$

Доведення.

За означенням, $(\chi_\rho, \chi_\theta) = \sum_{i,j} (\rho_{ii}, \theta_{jj})$.
Згідно з Теоремою 1.5, це дає 0, якщо $\theta \not\simeq \rho$.

Theorem

Нехай ρ і θ — незвідні зображення групи G. Тоді

$$(\chi_\rho, \chi_\theta) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \rho \simeq \theta, \\ 0, & \text{якщо } \rho \not\simeq \theta. \end{cases}$$

Доведення.

За означенням, $(\chi_\rho, \chi_\theta) = \sum_{i,j} (\rho_{ii}, \theta_{jj})$.
Згідно з Теоремою 1.5, це дає 0, якщо $\theta \not\simeq \rho$.
Якщо ж $\theta = \rho$ і $\dim \rho = d$, з цієї суми залишається лише d доданків, які відповідають членам з $i = j$.

Theorem

Нехай ρ і θ — незвідні зображення групи G. Тоді

$$(\chi_\rho, \chi_\theta) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \rho \simeq \theta, \\ 0, & \text{якщо } \rho \not\simeq \theta. \end{cases}$$

Доведення.

За означенням, $(\chi_\rho, \chi_\theta) = \sum_{i,j} (\rho_{ii}, \theta_{jj})$.
Згідно з Теоремою 1.5, це дає 0, якщо $\theta \not\simeq \rho$.
Якщо ж $\theta = \rho$ і $\dim \rho = d$, з цієї суми залишається лише d доданків, які відповідають членам з $i = j$.
Кожен з них дорівнює $\frac{1}{d}$, отже в результаті маємо 1. □

Означення

Функція φ на групі G зветься *центральною*, якщо $\varphi(gx) = \varphi(xg)$ для довільних елементів $g, x \in G$.

Означення

Функція φ на групі G зветься *центральною*, якщо $\varphi(gx) = \varphi(xg)$ для довільних елементів $g, x \in G$.
Рівносильна умова: $\varphi(g^{-1}xg) = \varphi(x)$ для довільних елементів $g, x \in G$ (перевірте це).

Означення

Функція φ на групі G зветься *центральною*, якщо $\varphi(gx) = \varphi(xg)$ для довільних елементів $g, x \in G$.
Рівносильна умова: $\varphi(g^{-1}xg) = \varphi(x)$ для довільних елементів $g, x \in G$ (перевірте це).

Очевидно, характери є центральними функціями (чому?).

Означення

Функція φ на групі G зветься *центральною*, якщо $\varphi(gx) = \varphi(xg)$ для довільних елементів $g, x \in G$.
Рівносильна умова: $\varphi(g^{-1}xg) = \varphi(x)$ для довільних елементів $g, x \in G$ (перевірте це).

Очевидно, характери є центральними функціями (чому?). Важливу властивість центральних функцій показує наступна лема.

Lemma

Нехай φ — центральна функція на групі G, ρ — зображення цієї групи. Тоді оператор $\Phi = \sum_{x \in G} \varphi(x)\rho(x^{-1})$ є ендоморфізмом зображення ρ.

Означення

Функція φ на групі G зветься *центральною*, якщо $\varphi(gx) = \varphi(xg)$ для довільних елементів $g, x \in G$.
Рівносильна умова: $\varphi(g^{-1}xg) = \varphi(x)$ для довільних елементів $g, x \in G$ (перевірте це).

Очевидно, характери є центральними функціями (чому?). Важливу властивість центральних функцій показує наступна лема.

Lemma

Нехай φ — центральна функція на групі G, ρ — зображення цієї групи. Тоді оператор $\Phi = \sum_{x\in G} \varphi(x)\rho(x^{-1})$ є ендоморфізмом зображення ρ. Зокрема, якщо ρ — незвідне зображення розмірності d, то $\Phi = \lambda \mathbb{1}$, де $\lambda = \frac{n}{d}(\chi_\rho, \varphi)$.

Доведення.

Для довільного елемента $g \in G$

$$\begin{aligned}
\Phi\rho(g) &= \sum_{x\in G} \varphi(x)\rho(x^{-1})\rho(g) = \sum_{x\in G} \varphi(x)\rho(x^{-1}g) = \\
&= \sum_{y\in G} \varphi(gy)\rho(y^{-1}) = \sum_{y\in G} \varphi(yg)\rho(y^{-1}) = \\
&= \sum_{z\in G} \varphi(z)\rho(gz^{-1}) = \sum_{z\in G} \varphi(z)\rho(g)\rho(z^{-1}) = \\
&= \rho(g)\sum_{z\in G} \varphi(z)\rho(z^{-1}) = \rho(g)\Phi.
\end{aligned}$$

Доведення.

Для довільного елемента $g \in G$

$$\begin{aligned}\Phi\rho(g) &= \sum_{x\in G}\varphi(x)\rho(x^{-1})\rho(g) = \sum_{x\in G}\varphi(x)\rho(x^{-1}g) = \\ &= \sum_{y\in G}\varphi(gy)\rho(y^{-1}) = \sum_{y\in G}\varphi(yg)\rho(y^{-1}) = \\ &= \sum_{z\in G}\varphi(z)\rho(gz^{-1}) = \sum_{z\in G}\varphi(z)\rho(g)\rho(z^{-1}) = \\ &= \rho(g)\sum_{z\in G}\varphi(z)\rho(z^{-1}) = \rho(g)\Phi.\end{aligned}$$

Отже Φ — ендоморфізм зображення ρ. Якщо ρ незвідне, то, за Лемою Шура $\Phi = \lambda\mathbb{1}$ для деякого $\lambda \in \Bbbk$. Тоді

$$d\lambda = \operatorname{tr}\Phi = \sum_{x\in G}\varphi(x)\operatorname{tr}\rho(x^{-1}) = n(\chi_\rho, \varphi).$$

Наступний результат демонструє значення матричних елементів та характерів незвідних зображень.

Наступний результат демонструє значення матричних елементів та характерів незвідних зображень.

Theorem

Нехай $\rho^1, \rho^2, \ldots, \rho^m$ *— повний набір попарно неізоморфних незвідних зображень групи* G*,* $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m$ *— характери цих зображень.*

Наступний результат демонструє значення матричних елементів та характерів незвідних зображень.

Theorem

Нехай $\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^m$ *— повний набір попарно неізоморфних незвідних зображень групи* G, $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m$ *— характери цих зображень.*

1. *Матричні елементи* ρ^k_{ij} $(1 \leqslant k \leqslant m,\ 1 \leqslant i, j \leqslant \dim \rho^k)$ *зображень* ρ^k *у якихось базах утворюють базу простору функцій* $\Bbbk^G$.

Наступний результат демонструє значення матричних елементів та характерів незвідних зображень.

Theorem

Нехай $\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^m$ — повний набір попарно неізоморфних незвідних зображень групи G, $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m$ — характери цих зображень.

1. *Матричні елементи ρ^k_{ij} $(1 \leqslant k \leqslant m,\ 1 \leqslant i, j \leqslant \dim \rho^k)$ зображень ρ^k у якихось базах утворюють базу простору функцій $\Bbbk^G$.*
2. *Харакери χ_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ уворюють базу підпростору центральних функцій з $\Bbbk^G$.*

Доведення.

(1) З Теореми 1.5 випливає, що функції ρ_{ij}^k лінійно незалежні.

Доведення.

(1) З Теореми 1.5 випливає, що функції ρ_{ij}^k лінійно незалежні.

Дійсно, припустимо, що $\sum_{i,j,k} \lambda_{ijk} \rho_{ij}^k = 0$. Тоді

Доведення.

(1) З Теореми 1.5 випливає, що функції ρ_{ij}^k лінійно незалежні.

Дійсно, припустимо, що $\sum_{i,j,k} \lambda_{ijk} \rho_{ij}^k = 0$. Тоді

$$0 = (\rho_{pq}^s, \sum_{i,j,k} \lambda_{ijk} \rho_{ij}^k) = \sum_{i,j,k} \lambda_{ijk} (\rho_{pq}^s, \rho_{ij}^k) = \frac{\lambda_{sqp}}{d_s},$$

Доведення.

(1) З Теореми 1.5 випливає, що функції ρ_{ij}^k лінійно незалежні.

Дійсно, припустимо, що $\sum_{i,j,k} \lambda_{ijk}\rho_{ij}^k = 0$. Тоді

$$0 = (\rho_{pq}^s, \sum_{i,j,k} \lambda_{ijk}\rho_{ij}^k) = \sum_{i,j,k} \lambda_{ijk}(\rho_{pq}^s, \rho_{ij}^k) = \frac{\lambda_{sqp}}{d_s},$$

тобто всі коефіцієнти λ_{sqp} нульові.

Доведення.

(1) З Теореми 1.5 випливає, що функції ρ_{ij}^k лінійно незалежні.

Дійсно, припустимо, що $\sum_{i,j,k} \lambda_{ijk}\rho_{ij}^k = 0$. Тоді

$$0 = (\rho_{pq}^s, \sum_{i,j,k} \lambda_{ijk}\rho_{ij}^k) = \sum_{i,j,k} \lambda_{ijk}(\rho_{pq}^s, \rho_{ij}^k) = \frac{\lambda_{sqp}}{d_s},$$

тобто всі коефіцієнти λ_{sqp} нульові.
З іншого боку, загальна кількість функцій ρ_{ij}^k дорівнює $\sum_{k=1}^m (\dim \rho^k)^2$,

Доведення.

(1) З Теореми 1.5 випливає, що функції ρ_{ij}^k лінійно незалежні.

Дійсно, припустимо, що $\sum_{i,j,k} \lambda_{ijk}\rho_{ij}^k = 0$. Тоді

$$0 = (\rho_{pq}^s, \sum_{i,j,k} \lambda_{ijk}\rho_{ij}^k) = \sum_{i,j,k} \lambda_{ijk}(\rho_{pq}^s, \rho_{ij}^k) = \frac{\lambda_{sqp}}{d_s},$$

тобто всі коефіцієнти λ_{sqp} нульові.
З іншого боку, загальна кількість функцій ρ_{ij}^k дорівнює $\sum_{k=1}^m (\dim \rho^k)^2$, що, за Наслідком 21, дорівнює n, тобто $\dim \Bbbk^G$. Отже, ці функції утворюють базу простору $\Bbbk^G$. □

Доведення.

(2) З Теореми 1.6 так само випливає, що характери $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m$ лінійно незалежні (перевірте).

Доведення.

(2) З Теореми 1.6 так само випливає, що характери $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m$ лінійно незалежні (перевірте).
Якщо вони не утворюють бази, знайдеться ненульова центральна функція φ така, що $(\varphi, \chi_k) = 0$ для всіх k (чому?).

Доведення.

(2) З Теореми 1.6 так само випливає, що характери $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m$ лінійно незалежні (перевірте).
Якщо вони не утворюють бази, знайдеться ненульова центральна функція φ така, що $(\varphi, \chi_k) = 0$ для всіх k (чому?).

За Лемою 35, $\sum_{x \in G} \varphi(x) \rho^k(x^{-1}) = 0$ для всіх k.

Доведення.

(2) З Теореми 1.6 так само випливає, що характери $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m$ лінійно незалежні (перевірте).
Якщо вони не утворюють бази, знайдеться ненульова центральна функція φ така, що $(\varphi, \chi_k) = 0$ для всіх k (чому?).

За Лемою 35, $\sum_{x \in G} \varphi(x)\rho^k(x^{-1}) = 0$ для всіх k.

Оскільки довільне зображення розкладаєься в пряму суму незвідних, $\sum_{x \in G} \varphi(x)\rho(x^{-1}) = 0$ для кожного зображення ρ, зокрема, для регулярного зображення.

Доведення.

(2) З Теореми 1.6 так само випливає, що характери $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m$ лінійно незалежні (перевірте).
Якщо вони не утворюють бази, знайдеться ненульова центральна функція φ така, що $(\varphi, \chi_k) = 0$ для всіх k (чому?).

За Лемою 35, $\sum_{x\in G} \varphi(x)\rho^k(x^{-1}) = 0$ для всіх k.

Оскільки довільне зображення розкладаєсь в пряму суму незвідних, $\sum_{x\in G} \varphi(x)\rho(x^{-1}) = 0$ для кожного зображення ρ, зокрема, для регулярного зображення.
Але

$$\sum_{x\in G} \varphi(x)\rho_G(x^{-1})1 = \sum_{x\in G} \varphi(x)x^{-1} \neq 0.$$

Одержане протиріччя завершує доведення теореми. $\square$

Вправа

1. Доведіть «формули Фур'є» для функції f на групі:
   1. $f = \sum_{i,j,k} d_k(f, \rho^k_{ji})\rho^k_{ij}$.

Вправа

1. Доведіть «формули Фур'є» для функції f на групі:
   1. $f = \sum_{i,j,k} d_k(f, \rho^k_{ji})\rho^k_{ij}$.
   2. Якщо f ценральна, то $f = \sum_{k=1}^m (f, \chi_k)\chi_k$.

Вправа

1. Доведіть «формули Фур'є» для функції f на групі:
   1. $f = \sum_{i,j,k} d_k(f, \rho^k_{ji})\rho^k_{ij}$.
   2. Якщо f ценральна, то $f = \sum_{k=1}^m (f, \chi_k)\chi_k$.
2. Доведіть, що якщо $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, то зображення повністю визначається своїм характером, тобто $\rho \simeq \theta$ тоді й лише тоді, коли $\chi_\rho = \chi_\theta$.

Вправа

1. Доведіть «формули Фур'є» для функції f на групі:
   1. $f = \sum_{i,j,k} d_k(f, \rho_{ji}^k)\rho_{ij}^k$.
   2. Якщо f ценральна, то $f = \sum_{k=1}^m (f, \chi_k)\chi_k$.
2. Доведіть, що якщо $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, то зображення повністю визначається своїм характером, тобто $\rho \simeq \theta$ тоді й лише тоді, коли $\chi_\rho = \chi_\theta$.

   Чи вірно це, якщо $\operatorname{char} \Bbbk \neq 0$?

Наслідок

Кількість неізоморфних незвідних зображень дорівнює кількості класів спряженості елементів групи G.

Наслідок

Кількість неізоморфних незвідних зображень дорівнює кількості класів спряженості елементів групи G.

Доведення.

За означенням, функція є центральною тоді й лише тоді, коли вона приймає однакові значення на спряжених елементах. Отже, розмірність простору центральних функцій дорівнює кількості класів спряженості. З іншого боку, за Теоремою 1.8, ця розмірність дорівнює кількості неізоморфних незвідних зображень. $\square$

Означення

Нехай $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$ — всі неізоморфні незвідні зображення групи G, $\chi_i = \chi_{\rho_i}$, $C_1, C_2, \ldots, C_s$ — класи спряженості елементів цієї групи, $h_k = \#(C_k)$, $x_k \in C_k$ — деякі елементи, вибрані з цих класів. Позначимо $\chi_{ik} = \chi_i(x_k)$. Матриця $\mathrm{X}_G = (\chi_{ik})$ (розміру $s \times s$) зветься *таблицею характерів групи G*. Ми також позначимо $\chi^*_{ik} = \chi_i(x_k^{-1})$.

Означення

Нехай $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$ — всі неізоморфні незвідні зображення групи G, $\chi_i = \chi_{\rho_i}$, $C_1, C_2, \dots, C_s$ — класи спряженості елементів цієї групи, $h_k = \#(C_k)$, $x_k \in C_k$ — деякі елементи, вибрані з цих класів. Позначимо $\chi_{ik} = \chi_i(x_k)$. Матриця $\mathrm{X}_G = (\chi_{ik})$ (розміру $s \times s$) зветься *таблицею характерів групи G*. Ми також позначимо $\chi^*_{ik} = \chi_i(x_k^{-1})$.

Вправа

Доведіть, що якщо $\Bbbk = \mathbb{C}$, то $\chi^*_{ik} = \overline{\chi_{ik}}$.

Означення

Нехай $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$ — всі неізоморфні незвідні зображення групи G, $\chi_i = \chi_{\rho_i}$, $C_1, C_2, \dots, C_s$ — класи спряженості елементів цієї групи, $h_k = \#(C_k)$, $x_k \in C_k$ — деякі елементи, вибрані з цих класів. Позначимо $\chi_{ik} = \chi_i(x_k)$. Матриця $\mathrm{X}_G = (\chi_{ik})$ (розміру $s \times s$) зветься *таблицею характерів групи G*. Ми також позначимо $\chi^*_{ik} = \chi_i(x_k^{-1})$.

Вправа

Доведіть, що якщо $\Bbbk = \mathbb{C}$, то $\chi^*_{ik} = \overline{\chi_{ik}}$.

Вказівка: Скористайтеся тим, що кожна матриця $\rho(x)$ подібна до діагональної (чому?).

Оскільки значення характеру постійне на елементах з одного класу спряженості, то співвідношення ортогональності для характерів можна переписати в такий спосіб:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{s} h_k \chi_{ik}\chi_{jk}^{*} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases} \tag{1}$$

З цих формул випливає, що оберненою матрицею до X_G є матриця $\widetilde{\mathrm{X}}_G$, в якій коефіцієнт на місці kj дорівнює $\dfrac{h_k}{n}\chi_{jk}^{*}$. Записавши рівність $\widetilde{\mathrm{X}}_G\mathrm{X}_G = I$, де I — одинична матриця, ми одержимо так зване «*друге співвідношення ортогональності для характерів*».

Theorem

$$\frac{h_k}{n}\sum_{i=1}^{s} \chi_{ik}^{*}\chi_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{якщо } k = j, \\ 0, & \textit{якщо } k \neq j. \end{cases}$$

- Винберг Э.Б. Линейные представления групп. Наука, 1985.
- Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. Конечномерные алгебры. Вища школа, 1980.
- Желобенко Д.П. Компактные группы Ли и их представления. МЦНМО, 2007.
- Кириллов А.А. Элементы теории представлений. Наука, 1978.
- Наймарк М.А. Теория представлений групп. Физматлит, 2010.
- Рудин У. Функциональный анализ. Мир, 1975.
- Ж.-П. Серр. Линейные представления конечных групп. Мир, 1970.