Завдання 1

Виконати до 16 березня

У цих вправах не користуватися відповідними твердженнями про комплекси з ін'єктивними компонентами!

1. Нехай P і A — обмежені справа комплекси, причому всі компоненти P^n проективні. Довести, що:

(1) Якщо A ациклічний, то довільний морфізм $\alpha : P \to A$ гомотопний нулю.

(2) Якщо $\alpha : A \to P$ — квазі-ізоморфізм, то α має гомотопічно правий обернений. Якщо і всі компоненти A проективні, то α — ізоморфізм у гомотопічній категорії.

2. Нехай $A \in \mathsf{Com}^- \mathscr{A}$. Доведіть, що:

(1) Існує квазі-ізоморфізм $P \to A$, де $P \in \mathsf{Com}^- \mathscr{A}$ і має проективні компоненти.

(2) Якщо $\alpha' : P' \to A$ — інший квазі-ізоморфізм з цими властивостями, то існує єдиний ізоморфізм $\varphi : P \to P'$ в гомотопічній категорії такий, що $\alpha = \alpha'\varphi$.

Завдання 2

Виконати до 30 березня

В усіх задачах вважається, що $\mathscr{A}$ — абелева категорія яка має достатньо проективних об'єктів.

1. (1) Нехай $\alpha : P \to A$ та $\beta : P' \to B$ — проективні резольвенти комплексів A і B в категорії $\mathsf{Com}^-\mathscr{A}$. Доведіть, що для довільного морфізму $\gamma : A \to B$ існує єдиний з точністю до гомотопії морфізм $\gamma' : P \to P'$, для якого $\gamma\alpha \sim \beta\gamma'$.

(2) Доведіть, що для кожного точного трикутника $A \xrightarrow{\xi} B \xrightarrow{\eta} C \xrightarrow{\zeta} A[1]$ в категорії $\mathscr{K}^-\mathscr{A}$ існує комутативна діаграма

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & P[1] \arrow[d] \\ A \arrow[r, "\xi"] & B \arrow[r, "\eta"] & C \arrow[r, "\zeta"] & A[1] \end{tikzcd}$$

в якій верхній рядок теж точний трикутник, а вертикальні морфізми визначають проективні резольвенти.

2. (1) Нехай $0 \to A \to B \to C \to 0$ — точна послідовність в категорії $\mathscr{A}$. Доведіть, що існує комутативна діаграма

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_A \arrow[r] \arrow[d] & P_B \arrow[r] \arrow[d] & P_C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

де перший рядок — точна послідовність комплексів, а вертикальні морфізми є проективними резольвентами відповідних об'єктів.

(2) Виведіть звідси, що точна послідовність $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ в категорії $\mathscr{A}$ визначає в гомотопічній категорії комутатвину діаграму

$$\begin{tikzcd} P_A \arrow[r] \arrow[d] & P_B \arrow[r] \arrow[d] & P_C \arrow[r] \arrow[d] & P_A[1] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C & \end{tikzcd}$$

в якій верхній рядок — точний трикутник, а вертикальні стрілки — квазі-ізоморфізми.

3. Доведіть **лему Шанюеля**:

Якщо $0 \to B \to P \to A \to 0$ *і* $0 \to B' \to P' \to A \to 0$ — *точні послідовності з проективними* P *і* P', *то* $P \oplus B' \simeq P' \oplus B$.

Вказівка: Продовживши тотожній морфізм 1_A до морфізму $P \to P'$, побудуйте точну послідовність $0 \to B \to P \oplus B' \to P' \to 0$.

Сформулюйте й доведіть аналогічне твердження про занурення A в ін'єктивні об'єкти.

Завдання 3

Виконати до 7 квітня

1. Нехай $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ — точна послідовність комплексів. Доведіть, що в гомотопічній категорії є комутативна діаграма

$$\begin{tikzcd} P_A \arrow[r] \arrow[d] & P_B \arrow[r] \arrow[d] & P_C \arrow[r] \arrow[d] & P_A[1] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C & \end{tikzcd}$$

в якій верхній рядок — точний трикутник, а вертикальні стрілки визначають проективні резольвеньт відповідних комплексів.

2. Доведіть, що функтор F є точним справа (зліва) тоді й лише тоді, коли $F \simeq R^0F$ (відповідно, $F \simeq L^0F$).

3. Доведіть, що для будь-якого морфізму функторів $f : F \to \widetilde{F}$, де $\widetilde{F}$ є точним справа, існує єдиний морфізм $\widetilde{\varphi} : R^0F \to \widetilde{F}$ такий, що $\varphi = \widetilde{\varphi}\rho$, де ρ — природний морфізм $F \to R^0F$.

Сформулюйте й доведіть аналогічне твердження про точні зліва функтори.

4. Нехай $\mathscr{A}$ — категорія абелевих груп, $F = \mathscr{A}_A = \mathrm{Hom}(\_\,, A)$, де A — фіксована група. Обчислити R^iFC, де C — циклічна група порядку n.

5. Нехай $\mathscr{A}$ — категорія абелевих груп, $T = C \otimes \_$, де C — циклічна група порядку n. Обчислити L^iTA.

Завдання 4

Виконати до 20 квітня

1. Доведіть, що повні похідні функтора $\otimes_{\boldsymbol{R}} : \boldsymbol{R}^{\mathrm{op}}\text{-Mod} \times \boldsymbol{R}\text{-Mod} \to \mathsf{Ab}$ квазі-ізоморфні обом частковим похідним цього функтора.

Ці похідні функтори позначаються через $\mathrm{Tor}^{\boldsymbol{R}}(A, B)$, а їхні когомології $H^{-n}(\mathrm{Tor}^{\boldsymbol{R}}(A, B))$ — через $\mathrm{Tor}^{\boldsymbol{R}}_n$. Зауважимо, що, оскільки тензорний добуток є точним справа, $\mathrm{Tor}^{\boldsymbol{R}}_0(A, B) = A \otimes_{\boldsymbol{R}} B$.

2. $\boldsymbol{R}$-модуль A зветься *плоским*, якщо функтор $\_ \otimes_{\boldsymbol{R}} A$ є точним.

Нехай дано точну послідовність

$$0 \to A' \xrightarrow{\gamma} P_{n-1} \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0,$$

в якій модулі $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ є плоскими. Доведіть, що

$$\mathrm{Tor}^{i+n}(B, A) \simeq \begin{cases} \mathrm{Tor}^i(B, A') & \text{якщо } i > 0, \\ \mathrm{Ker}(1_B \otimes \gamma) & \text{якщо } i = 0. \end{cases}$$

3. Нехай A — $\boldsymbol{S}$-$\boldsymbol{R}$-бімодуль, який є проективним як $\boldsymbol{S}$-модуль і плоским як правий $\boldsymbol{R}$-модуль. Доведіть, що:

(1) Якщо $\boldsymbol{R}$-модуль B проективний, то й $\boldsymbol{S}$-модуль $A \otimes_{\boldsymbol{R}} B$ також проективний.

(2) Якщо $\boldsymbol{S}$-модуль C ін'єктивний, то й $\boldsymbol{R}$-модуль $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{S}}(A, C)$ також ін'єктивний.

(3) $\mathrm{Ext}^n_{\boldsymbol{S}}(A \otimes_{\boldsymbol{R}} B, C) \simeq \mathrm{Ext}^n_{\boldsymbol{R}}(B, \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{S}}(A, C))$ для довільних $\boldsymbol{R}$-модуля B і $\boldsymbol{S}$-модуля C.

4. Доведіть, що:

(1) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$ для довільної абелевої групи A.

(2) Послідовність абелевих груп $A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_m$ є точною тоді й лише тоді, коли точною є індукована послідовність

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

(3) Лівий (правий) $\boldsymbol{R}$-модуль A є плоским тоді й лише тоді, коли правий (лівий) $\boldsymbol{R}$-модуль $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ є ін'єктивним.

(4) Лівий (правий) $\boldsymbol{R}$-модуль A є плоским тоді й лише тоді, коли $\mathrm{Tor}^{\boldsymbol{R}}_1(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}, A) = 0$ для довільного лівого ідеалу $\boldsymbol{I}$ (відповідно, $\mathrm{Tor}^{\boldsymbol{R}}_1(A, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}) = 0$ для довільного правого ідеалу $\boldsymbol{I}$).

5. *Слабкою розмірністю* $\mathrm{w.dim}\,\boldsymbol{R}$ кільця $\boldsymbol{R}$ зветься найменше число n таке, що $\mathrm{Tor}^{\boldsymbol{R}}_{n+1} = 0$, або ∞, якщо такого числа не існує. Доведіть, що

$$\mathrm{w.dim}\,\boldsymbol{R} = \min\left\{ n \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{Tor}^{\boldsymbol{R}}_{n+1}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{J}) = 0 \ \text{ для всіх} \\ \text{правих ідеалів } \boldsymbol{I} \text{ й усіх лівих ідеалів } \boldsymbol{J} \end{array} \right\}$$

або ∞, якщо такого числа не існує.

Завдання 5

Виконати до 27 квітня

1. Нехай $\varepsilon : 0 \to B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\alpha} A$ — розширення A з ядром C, $\gamma : B \to B'$, $C' = \operatorname{Coker}\left\{ \begin{pmatrix} \beta \\ -\gamma \end{pmatrix} : B \to C \oplus B' \right\}$, $\alpha'([c, b']) = \alpha(c)$, $\beta'(b') = [0, b']$ і $\gamma'(c) = [c, 0]$, де $[c, b']$ позначає образ пари (c, b') у C' (тобто $[c, b'] = [c_1, b'_1]$ тоді й лише тоді, коли існує елемент $b \in B$ такий, що $c_1 = c + \beta(b)$, $b'_1 = b' - \gamma(b)$). Доведіть, що:

(1) Діаграма

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma'"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\beta'"'] & C' \arrow[r, "\alpha'"'] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

комутативна, а її рядки точні.

Другий рядок цієї діаграми позначимо $\gamma\varepsilon$; це елемент з $E(A, B')$.

(2) Якщо діаграма

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma''"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\beta''"'] & C'' \arrow[r, "\alpha''"'] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

з точними рядками комутативна, то її перший рядок визначає розширення, еквівалентне $\gamma\varepsilon$.

(3) Якщо $\varepsilon_1 \approx \varepsilon$, то $\gamma\varepsilon_1 \approx \gamma\varepsilon$.

(4) $(\gamma_1\gamma)\varepsilon \approx \gamma_1(\gamma\varepsilon)$ для кожного морфізму $\gamma_1 : B' \to B''$.

2. Нехай відображення $\omega' : E(A, B) \to \operatorname{Ext}^1(A, B)$ ставить у відповідність розширенню $\varepsilon : 0 \to B \to C \to A \to 0$ образ 1_B при гомоморфізмі $\operatorname{Hom}(B, B) \to \operatorname{Ext}^1(A, B)$, який виникає з цієї точної послідовності, якщо розглядати Hom як функтор за першим аргументом, фіксуючи B на другому місці. Доведіть, що це відображення бієктивне.

Завдання 6

Виконати до 18 травня

1. Нехай $0 \to A \to B \to C \to 0$ — точна послідовність модулів. Довести, що

(1) $\mathrm{pr.dim}\, A \leqslant \max\{\, \mathrm{pr.dim}\, B,\ \mathrm{pr.dim}\, C - 1 \,\}$.
(2) $\mathrm{pr.dim}\, B \leqslant \max\{\, \mathrm{pr.dim}\, A,\ \mathrm{pr.dim}\, C \,\}$.
(3) $\mathrm{pr.dim}\, C \leqslant \max\{\, \mathrm{pr.dim}\, A + 1,\ \mathrm{pr.dim}\, B \,\}$.

При цьому, якщо числа, з яких обирається максимум, нерівні, то відповідна розмірність дорівнює цьому максимуму. (Наприклад, якщо $\mathrm{pr.dim}\, A \neq \mathrm{pr.dim}\, C$, то $\mathrm{pr.dim}\, B = \max\{\, \mathrm{pr.dim}\, A,\ \mathrm{pr.dim}\, C \,\}$).

Сформулювати й довести аналогічні твердження для ін'єктивної розмірності.

Кажуть, що елемент a кільця $\boldsymbol{R}$ є *дільником нуля* в $\boldsymbol{R}$-модулі M, якщо в M є ненульовий елемент v, для якого $av = 0$.

2. Нехай $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — послідовність елементів центру кільця $\boldsymbol{R}$, а M — якийсь $\boldsymbol{R}$-модуль. Позначимо $K(\mathbf{x}, M) = K(\mathbf{x}, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M$ і $H_m(\mathbf{x}, M)$ — гомології цього комплексу. Будемо казати, що послідовність $\mathbf{x}$ є *M-регулярною*, якщо x_1 не є дільником нуля в M і для кожного $1 \leqslant k < n$ елемент x_{k+1} не є дільником нуля в модулі $M/\langle\, x_1, x_2, \ldots, x_k \,\rangle M$. Доведіть, що

(1) Якщо послідовність $\mathbf{x}$ є M-регулярною то $H_m(\mathbf{x}, M) = 0$ для всіх $m > 0$.
(2) Якщо $\boldsymbol{R}$ локальне й нетерове зліва, модуль M скінченнопороджений, всі x_i необоротні, а $H_1(\mathbf{x}, M) = 0$, то послідовність $\mathbf{x}$ є M-регулярною.

Локальне нетерове зліва кільце $\boldsymbol{R}$ зветься *регулярним розмірності* n, якщо його максимальний ідеал породжується $\boldsymbol{R}$-регулярною послідовністю $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. (Тоді $\mathrm{gl.dim}\, \boldsymbol{R} = n$).

3. Нехай $\boldsymbol{R}$ — нетерове зліва локальне кільце, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R}[[x]]$. Якщо в ряді $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ a_d — перший ненульовий коефіцієнт, кажуть, що $a_d = pc(f)$ — *головний член*, а $d = ord(f)$ — *показник* ряду f. Через $part_r(f)$ позначимо суму перших r членів ряду: $part_r(f) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i x^i$.

(1) Доведіть, що ряд з $\boldsymbol{S}$ оборотний тоді й лише тоді, коли його вільний член оборотний. Отже, кільце $\boldsymbol{S}$ локальне.
(2) Нехай I — лівий ідеал $\boldsymbol{S}$, $pc(I) = \{\, pc(f) \mid f \in I \,\}$, а $part_r(I) = \{\, part_r(f) \mid f \in I \,\}$. Перевірте, що $pc(I)$ — лівий ідеал кільця $\boldsymbol{R}$, а $part_r(I)$ — $\boldsymbol{R}$-підмодуль у $\boldsymbol{R}$-модулі многочленів степеня, меншого за r.
(3) Нехай $pc(I) = \langle\, a_1, a_2, \ldots, a_m \,\rangle$, $f_j \in I$ — такі ряди, що $a_j = pc(f_j)$, $r = \max\{\, ord(f_j) \,\}$, $part_r(I) = \langle\, p_1, p_2, \ldots, p_k \,\rangle$ і $g_j \in I$ — такі ряди, що $p_j = part_r(g_j)$. Доведіть, що $I = \langle\, f_1, f_2, \ldots, f_m, g_1, g_2, \ldots, g_k \,\rangle$. Отже, кільце $\boldsymbol{S}$ також нетерове зліва.
(4) Доведіть, що якщо кільце $\boldsymbol{R}$ регулярне розмірності n, то $\boldsymbol{S}$ регулярне розмірності $n + 1$.