

УДК 517.53

А. П. Голуб (Ін-т математики НАН України, Київ)

**ПРО АСИМПТОТИКУ АПРОКСИМАЦІЙ ПАДЕ
ФУНКЦІЙ ТИПУ МІТТАГ-ЛЕФФЛЕРА**

Отримано асимптотичне зображення для похибок апроксимацій Паде функцій типу Міттаг-Леффлера $E_\rho(z; \nu)$, $0 < \rho < 1$, $\nu > 0$.

Цілі функції типу Міттаг-Леффлера відіграють важливу роль в теорії інтегральних перетворень та інтегральних зображень функцій в комплексній площині (див. [1]). Вони визначаються степеневими рядами

$$E_\rho(z; \nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\frac{k}{\rho} + \nu)}, \quad (1)$$

де ρ та ν — деякі невід’ємні параметри.

Апроксиманти Паде функцій e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, та $\operatorname{ch} z$, що можуть бути зображені через функції типу Міттаг-Леффлера, що відповідають значенням параметрів $\rho = 1$, $\rho = \frac{1}{2}$, $\nu = 1$, $\nu = 2$, були досліджені В. К. Дзядиком в роботах [2,3]. В [4–6] автором та М. М. Чипом результати В. К. Дзядика були частково розповсюджені на функції типу Міттаг-Леффлера загального вигляду (для довільних ρ та ν). Зокрема, в цих роботах було встановлено, що апроксиманти Паде функції (1) порядку $[N - 1/N]$, $N \in \mathbb{N}$, тобто раціональні поліноми з чисельником степеня $\leq N - 1$ та знаменником степеня $\leq N$, що наближають вказану функцію в околі початку координат з порядком $O(z^{2N})$ (див., наприклад, [7,8]), можуть бути зображені у вигляді

$$[N - 1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)}, \quad (2)$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^N c_k^{(N)} z^{N-k}, \quad (3)$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{k=1}^N c_k^{(N)} z^{N-k} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{z^m}{\Gamma(\frac{m}{\rho} + \nu)}, \quad (4)$$

© А. П. Голуб, 2008

причому коефіцієнти $c_k^{(N)}$, $k = \overline{0, N}$, нетривіального узагальненого полінома

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^N c_k^{(N)} \frac{t^{\frac{k}{\rho} + \nu_1}}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho} + \nu_1 + 1\right)}, \quad (5)$$

з точністю до мультиплікативної константи визначаються з використанням, власне, умов його біортогональності вигляду

$$\int_0^1 X_N(t) \frac{(1-t)^{\frac{j}{\rho} + \nu_2}}{\Gamma\left(\frac{j}{\rho} + \nu_2 + 1\right)} dt = 0, \quad j = \overline{0, N-1}, \quad (6)$$

коли ν_1 та ν_2 — деякі більші ніж -1 числа, сума яких дорівнює $\nu - 2$. При цьому похибка апроксимації може бути зображена у вигляді

$$\begin{aligned} E_\rho(z; \nu) - [N - 1/N]_f(z) = \\ = \frac{z^n}{Q_N(z)} \int_0^1 X_N(t) E_\rho\left(z(1-t)^{\frac{1}{\rho}}; \nu_2 + 1\right) (1-t)^{\nu_2} dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Доведено також, що при $0 < \rho \leq 1$ вказані апроксиманти збігаються до наближуваної функції рівномірно на кожному компактній площині при $N \rightarrow \infty$.

В [9] вивчалися апроксиманти Паде функцій типу Міттаг-Леффлера для випадку $\rho = 1$, тобто для вироджених гіпергеометричних функцій ${}_1F_1(1; \nu + 1; z)$. В [10,11] досліджено поведінку рядків таблиці Паде (тобто апроксимант Паде порядків $[M, N]$, $N \rightarrow \infty$) функцій типу Міттаг-Леффлера та їх узагальнень.

В цій роботі отримано асимптотичні рівності для похибок апроксимацій Паде функцій типу Міттаг-Леффлера $E_\rho(z; \nu)$ при $\nu > 0$, $0 < \rho < 1$ порядків $[N - 1/N]$, $N \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. Для похибок апроксимацій Паде функцій типу Міттаг-Леффлера $E_\rho(z; \nu)$, $0 < \rho < 1$, $\nu > 0$, порядків $[N - 1/N]$, $N \in \mathbb{N}$, мають місце асимптотичні рівності

$$E_\rho(z; \nu) - [N - 1/N]_f(z) =$$

$$= z^{2N} \frac{H_N}{H_{N-1}} \left(1 + O \left(\frac{|z|e^{|z|}}{N^{\frac{1-\rho}{\rho}}} \right) \right), \quad N \rightarrow \infty, \quad (8)$$

де H_N , $N = \overline{0, \infty}$, — визначники Ганкеля послідовності коефіцієнтів $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ ряду (1):

$$H_N = \det \|s_{k+j}\|_{k,j=0}^N = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_N \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_N & s_{N+1} & \dots & s_{2N} \end{vmatrix}, \quad N = \overline{0, \infty}. \quad (9)$$

Доведення. Спочатку встановимо асимптотичну рівність для знаменників апроксимант Паде

$$Q_N(z) = c_N^{(N)} \left(1 + O \left(\frac{|z|e^{|z|}}{N^{\frac{1-\rho}{\rho}}} \right) \right), \quad N \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Для цього нагадаємо, що, як встановлено в [4], узагальнений поліном $X_N(t)$ вигляду (5), для якого виконуються умови біортогональності (6), має точно N простих нулів на інтервалі $(0, 1)$ і отже, може бути зображений у вигляді:

$$X_N(t) = \frac{c_N^{(N)} t^{\nu_1}}{\Gamma\left(\frac{N}{\rho} + \nu_1 + 1\right)} \prod_{m=1}^N \left(t^{\frac{1}{\rho}} - t_{m,N}^{\frac{1}{\rho}} \right), \quad (11)$$

де $0 < t_{1,N} < t_{2,N} < \dots < t_{N,N} < 1$, а тому для коефіцієнтів $c_k^{(N)}$, $k = \overline{0, N}$, будуть мати місце оцінки

$$\left| c_k^{(N)} \right| \leq \left| c_N^{(N)} \right| \frac{\Gamma\left(\frac{k}{\rho} + \nu_1 + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{\rho} + \nu_1 + 1\right)} \binom{N}{k}.$$

Дійсно, з (5) та (11) маємо

$$\frac{c_k^{(N)}}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho} + \nu_1 + 1\right)} = \frac{c_N^{(N)}}{\Gamma\left(\frac{N}{\rho} + \nu_1 + 1\right)} (-1)^{N-k} \alpha_{N-k} (t_{1,N}^{\frac{1}{\rho}}, t_{2,N}^{\frac{1}{\rho}}, \dots, t_{N,N}^{\frac{1}{\rho}}),$$

де $\alpha_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)$ — елементарний симетричний многочлен k -го порядку від змінних $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$. Враховуючи, що $t_{1,N}, t_{2,N}, \dots, t_{N,N} \in (0, 1)$, маємо

$$\left| \alpha_{N-k}(t_{1,N}^{\frac{1}{\rho}}, t_{2,N}^{\frac{1}{\rho}}, \dots, t_{N,N}^{\frac{1}{\rho}}) \right| \leq \binom{N}{k},$$

а отже, є справедливою наведена оцінка для $|c_k^{(N)}|$.

З (3) випливає, що

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^N c_k^{(N)} z^{N-k} = c_N^{(N)} + \sum_{k=0}^{N-1} c_k^{(N)} z^{N-k}.$$

Останню суму можна оцінити в наступний спосіб:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^N c_{N-k}^{(N)} z^k \right| &\leq |c_N^{(N)}| \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma\left(\frac{N-k}{\rho} + \nu_1 + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{\rho} + \nu_1 + 1\right)} \frac{N!}{k!(N-k)!} |z|^k \leq \\ &\leq |c_N^{(N)}| \frac{N|z|\Gamma\left(\frac{N-1}{\rho} + \nu_1 + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{\rho} + \nu_1 + 1\right)} \times \\ &\times \left(1 + \sum_{k=2}^N \frac{\Gamma\left(\frac{N-k}{\rho} + \nu_1 + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{N-1}{\rho} + \nu_1 + 1\right)} \frac{(N-1)!}{k!(N-k)!} |z|^{k-1} \right) \leq \\ &\leq |c_N^{(N)}| \frac{N|z|\Gamma\left(\frac{N-1}{\rho} + \nu_1 + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{\rho} + \nu_1 + 1\right)} \left(1 + \sum_{k=2}^N \frac{|z|^{k-1}}{k!} \right) \leq \\ &\leq |c_N^{(N)}| \frac{N|z|\Gamma\left(\frac{N-1}{\rho} + \nu_1 + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{\rho} + \nu_1 + 1\right)} (1 + e^{|z|}). \end{aligned}$$

За формулою Стірлінга (див. [12, с.83])

$$\frac{\Gamma\left(\frac{N-1}{\rho} + \nu_1 + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{\rho} + \nu_1 + 1\right)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-\frac{N-1}{\rho}-\nu_1-1} \left(\frac{N-1}{\rho} + \nu_1 + 1\right)^{\frac{N-1}{\rho}+\nu_1+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}}{e^{-\frac{N}{\rho}-\nu_1-1} \left(\frac{N}{\rho} + \nu_1 + 1\right)^{\frac{N}{\rho}+\nu_1+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right) = \\
&= \frac{e^{\frac{1}{\rho}}}{\left(1 + \frac{1}{N-1+(\nu_1+1)\rho}\right)^{\frac{N-1}{\rho}+\nu_1+\frac{1}{2}} \left(\frac{N}{\rho} + \nu_1 + 1\right)^{\frac{1}{\rho}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right) = \\
&= O\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{\rho}}}\right), \quad N \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

А тому асимптотична рівність (10) дійсно є справедливою.

Розглянемо тепер величину

$$\begin{aligned}
I_N &= \int_0^1 X_N(t) E_\rho \left(z(1-t)^{\frac{1}{\rho}}; \nu_2 + 1 \right) (1-t)^{\nu_2} dt = \\
&= \int_0^1 X_N(t) \sum_{j=N}^{\infty} z^j \frac{(1-t)^{\frac{j}{\rho}+\nu_2}}{\Gamma\left(\frac{j}{\rho} + \nu_2 + 1\right)} dt = \\
&= \frac{c_N^{(N)}}{H_{N-1}} \int_0^1 \left| \begin{array}{cccc} s_0 & s_1 & \dots & s_N \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N-1} & s_N & \dots & s_{2N-1} \\ x_0(t) & x_1(t) & \dots & x_N(t) \end{array} \right| \sum_{j=N}^{\infty} z^j y_j(t) dt,
\end{aligned}$$

де

$$x_k(t) = \frac{t^{\frac{k}{\rho}+\nu_1}}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho} + \nu_1 + 1\right)}, \quad k = \overline{0, \infty},$$

$$y_j(t) = \frac{(1-t)^{\frac{j}{\rho}+\nu_2}}{\Gamma\left(\frac{j}{\rho} + \nu_2 + 1\right)}, \quad j = \overline{0, \infty}.$$

Враховуючи узагальнене моментне зображення (див. [8, с.48])

$$s_{k+j} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k+j}{\rho} + \nu\right)} = \int_0^1 x_k(t)y_j(t)dt, \quad k, j = \overline{0, \infty},$$

отримуємо

$$\begin{aligned} I_N &= \frac{c_N^{(N)}}{H_{N-1}} \sum_{j=N}^{\infty} z^j \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_N \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N-1} & s_N & \dots & s_{2N-1} \\ s_j & s_{j+1} & \dots & s_{j+N} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{c_N^{(N)} z^N}{H_{N-1}} (H_N + \sum_{j=1}^{\infty} z^j H_{N,j}). \end{aligned} \quad (12)$$

Очевидно, $H_{N,1}$ є коефіцієнтом при $x_N(t)$ в узагальненому поліномі

$$X_{N+1}(t) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{N+1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{N+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_N & s_{N+1} & \dots & s_{2N+1} \\ x_0(t) & x_1(t) & \dots & x_{N+1}(t) \end{vmatrix},$$

а поліном $X_{N+1}(t)$ згідно з (11) можна записати у вигляді:

$$X_{N+1}(t) = \frac{c_{N+1}^{(N+1)} t^{\nu_1}}{\Gamma\left(\frac{N+1}{\rho} + \nu_1 + 1\right)} \prod_{m=1}^{N+1} \left(t^{\frac{1}{\rho}} - t_{m,N+1}^{\frac{1}{\rho}}\right),$$

де $0 < t_{1,N+1} < t_{2,N+1} < \dots < t_{N+1,N+1} < 1$, і отже,

$$\begin{aligned} H_{N,1} &= \left| c_N^{(N+1)} \right| \leq \left| c_{N+1}^{(N+1)} \right| \frac{\Gamma\left(\frac{N}{\rho} + \nu_1 + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{N+1}{\rho} + \nu_1 + 1\right)} (N+1) = \\ &= H_N \cdot O\left(\frac{1}{(N+1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}}\right), \quad N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

Далі, позначаючи через $Y_N(t)$ біортогональний поліном

$$Y_N(t) = \sum_{j=0}^N c_j^{(N)} y_j(t) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_N \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N-1} & s_N & \dots & s_{2N-1} \\ y_0(t) & y_1(t) & \dots & y_N(t) \end{vmatrix},$$

будемо послідовно мати

$$\begin{aligned} H_{N,2} &= \int_0^1 X_N(t) y_{N+2}(t) dt = \\ &= \frac{1}{c_{N+2}^{(N+2)}} \int_0^1 X_N(t) \left(Y_{N+2}(t) - c_{N+1}^{(N+2)} y_{N+1}(t) - c_N^{(N+2)} y_N(t) \right) dt = \\ &= -\frac{1}{c_{N+2}^{(N+2)}} \int_0^1 X_N(t) \left(c_{N+1}^{(N+2)} y_{N+1}(t) + c_N^{(N+2)} y_N(t) \right) dt = \\ &= -\frac{1}{H_{N+1}} \left(c_{N+1}^{(N+2)} H_{N,1} + c_N^{(N+2)} H_N \right). \end{aligned}$$

Враховуючи попередні викладки, маємо

$$\left| c_{N+1}^{(N+2)} \right| \leq H_{N+1} \cdot O\left(\frac{1}{(N+2)^{\frac{1-\rho}{\rho}}}\right), \quad N \rightarrow \infty.$$

Аналогічно, з використанням формули Стірлінга

$$\begin{aligned} \left| c_N^{(N+2)} \right| &\leq \left| c_{N+2}^{(N+2)} \right| \frac{\Gamma\left(\frac{N}{\rho} + \nu_1 + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{N+2}{\rho} + \nu_1 + 1\right)} \cdot \frac{(N+2)(N+1)}{2} = \\ &= \frac{H_{N+1}}{2} \cdot O\left(\frac{1}{((N+2)(N+1))^{\frac{1-\rho}{\rho}}}\right), \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отже, отримаємо оцінку

$$\begin{aligned}
 H_{N,2} &\leq H_{N,1} \cdot O\left(\frac{1}{(N+2)^{\frac{1-\rho}{\rho}}}\right) + \\
 &+ \frac{1}{2} H_N \cdot O\left(\frac{1}{((N+2)(N+1))^{\frac{1-\rho}{\rho}}}\right) \leq \\
 &\leq H_N \cdot O\left(\frac{1}{((N+2)(N+1))^{\frac{1-\rho}{\rho}}}\right) + \\
 &+ \frac{1}{2} H_N \cdot O\left(\frac{1}{((N+2)(N+1))^{\frac{1-\rho}{\rho}}}\right) = \\
 &= \frac{3}{2} H_N \cdot O\left(\frac{1}{((N+2)(N+1))^{\frac{1-\rho}{\rho}}}\right).
 \end{aligned}$$

Діючи і надалі аналогічним чином, помічаємо, що рівномірно по j

$$H_{N,j} \leq \frac{\alpha_j}{j!} H_N \cdot O\left(\left(\frac{(N+j)!}{N!}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}\right), \quad N \rightarrow \infty, \quad (13)$$

де $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 13$ і т.д. Щоб знайти величини α_j , запишемо

$$\begin{aligned}
 H_{N,j} &= \int_0^1 X_N(t) y_{N+j}(t) dt = \\
 &= \frac{1}{c_{N+j}^{(N+j)}} \int_0^1 X_N(t) \left(Y_{N+j}(t) - \sum_{m=0}^{j-1} c_{N+m}^{(N+j)} y_{N+m}(t) \right) dt = \\
 &= -\frac{1}{c_{N+j}^{(N+j)}} \sum_{m=0}^{j-1} c_{N+m}^{(N+j)} H_{N,m}.
 \end{aligned}$$

Припускаючи за індукцією, що нерівності (13) справедливі для всіх $m = \overline{0, j-1}$, звідси будемо мати

$$H_{N,j} \leq \frac{1}{c_{N+j}^{(N+j)}} \sum_{m=0}^{j-1} H_{N,m} \cdot \frac{H_{N+j-1}}{(j-m)!} \cdot O\left(\left(\frac{(N+j)!}{(N+m)!}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}\right) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{m=0}^{j-1} \frac{\alpha_m}{m!} \cdot \frac{H_N}{(j-m)!} \cdot O\left(\left(\frac{(N+m)!}{N!}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}\right) O\left(\left(\frac{(N+j)!}{(N+m)!}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}\right) = \\
&= H_N \cdot O\left(\left(\frac{(N+j)!}{N!}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}\right) \sum_{m=0}^{j-1} \frac{\alpha_m}{m!(j-m)!}.
\end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо рекурентне співвідношення для величин α_j , $j = \overline{0, \infty}$,

$$\frac{\alpha_j}{j!} = \sum_{m=0}^{j-1} \frac{\alpha_m}{m!(j-m)!}.$$

Розглянемо твірну функцію

$$A(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_j}{j!} w^j.$$

Для неї буде справедливим співвідношення

$$\begin{aligned}
A(w) &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} w^j \sum_{m=0}^{j-1} \frac{\alpha_m}{m!(j-m)!} = \\
&= 1 + \sum_{j=0}^{\infty} w^{j+1} \sum_{m=0}^j \frac{\alpha_m}{m!(j+1-m)!} = \\
&= 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m}{m!} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{w^{j+1}}{(j+1-m)!} = \\
&= 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m}{m!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^{j+m+1}}{(j+1)!} = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m w^m}{m!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^{j+1}}{(j+1)!} = \\
&= 1 + A(w) (e^w - 1).
\end{aligned}$$

Отже, твірна функція $A(w)$ буде дорівнювати

$$A(w) = \frac{1}{2 - e^w}, \quad (14)$$

а тому величини α_j , $j = \overline{0, \infty}$, можна знаходити за формулами

$$\alpha_j = \frac{d^j}{dw^j} \left\{ \frac{1}{2 - e^w} \right\} \Big|_{w=0}. \quad (15)$$

Використовуючи (13) з врахуванням (14), (15), будемо мати

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{\infty} z^j H_{N,j} \right| &\leq H_N \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{j!} |z|^j \cdot O\left(\left(\frac{(N+j)!}{N!}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}\right) \leq \\ &\leq H_N \cdot O\left(\frac{1}{(N+1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}}\right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{j!} |z|^j \cdot O\left(\left(\frac{(N+j)!}{(N+1)!}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}\right) \leq \\ &\leq H_N \cdot O\left(\frac{1}{(N+1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}}\right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{j!} |z|^j \cdot O\left(\frac{1}{(N+2)^{(j-1)\frac{1-\rho}{\rho}}}\right) \leq \\ &\leq |z| H_N \cdot O\left(\frac{1}{(N+1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}}\right) O\left(\frac{e^{|z|(N+2)^{\frac{\rho-1}{\rho}}} - 1}{2 - e^{|z|(N+2)^{\frac{\rho-1}{\rho}}}}\right) \leq \\ &\leq H_N \cdot O\left(\frac{|z|}{N^{\frac{1-\rho}{\rho}}}\right), \quad N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

звідки отримуємо з огляду на (12) необхідну асимптотику для величин I_N , а отже, враховуючи (7) і (10), і твердження теореми.

Зауважимо, що теорема 1 є узагальненням теореми 2.1 з [3]. Відзначимо також, що, як і у випадку розглянутих В. К. Дзядиком функцій e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ та $\operatorname{ch} z$, у випадку функцій типу Міттаг-Леффлера $E_\rho(z; \nu)$, $0 < \rho < 1$, $\nu > 0$, апроксиманти Паде порядків $[N - 1/N]$, $N \in \mathbb{N}$, здійснюють наближення, що по порядку співпадає з найкращим раціональним наближенням, а саме, має місце такий результат.

Теорема 2. В крузі $K_R = \{z : |z| \leq R\}$ довільного радіуса $R > 0$ для апроксимант Паде $[N - 1/N]_f(z)$, $N \in \mathbb{N}$, функції $f(z) = E_\rho(z; \nu)$, $0 < \rho < 1$, $\nu > 0$, та її найкращих раціональних апроксимант $[N - 1/N]_f^*(z)$, тобто раціональних поліномів вигляду

$$[N - 1/N]_f^*(z) = \frac{P_{N-1}^*(z)}{Q_N^*(z)},$$

для яких виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} & \|f - [N - 1/N]_f^*\|_{C_{K_R}} = \\ & = E_{N-1,N}(f) = \inf_{\substack{\deg P_{N-1} \leq N-1 \\ \deg Q_N \leq N}} \left\| f - \frac{P_{N-1}}{Q_N} \right\|_{C_{K_R}}, \end{aligned}$$

будуть справедливими нерівності:

$$\begin{aligned} & \|f - [N - 1/N]_f^*\|_{C_{K_R}} \leq \|f - [N - 1/N]_f\|_{C_{K_R}} \leq \\ & \leq \|f - [N - 1/N]_f^*\|_{C_{K_R}} \left(1 + O \left(\frac{Re^R}{N^{\frac{1-\rho}{\rho}}} \right) \right). \end{aligned}$$

Доведення. Перша з нерівностей випливає з означення найкращого наближення. Щоб встановити другу нерівність, використаємо лему 3.1 з [3]. Сформулюємо її.

Лема. *Якщо в однозв'язній обмеженій області G деяка аналітична в G і неперервна на $\bar{G}$ функція $\varphi(z)$ має в G принаймні $n + 1$ нуль, то при довільному цілому $m \geq 0$ має місце нерівність*

$$E_{n,m}(\varphi) \geq \min_{z \in \partial G} |\varphi|,$$

де

$$E_{n,m}(f) = \inf_{\substack{\deg P_n \leq n \\ \deg Q_m \leq m}} \left\| f - \frac{P_n}{Q_m} \right\|_{C_{\bar{G}}}.$$

Далі, розглянемо

$$\begin{aligned} & E_{N-1,N}(f) = \|f - [N - 1/N]_f^*\|_{C_{K_R}} = \\ & = \|(f - [N - 1/N]_f) - ([N - 1/N]_f^* - [N - 1/N]_f)\|_{C_{K_R}} \geq \\ & \geq \inf_{\substack{\deg P_{2N-1} \leq 2N-1 \\ \deg Q_{2N} \leq 2N}} \left\| (f - [N - 1/N]_f) - \frac{P_{2N-1}}{Q_{2N}} \right\|_{C_{K_R}}. \end{aligned}$$

До функції $f - [N - 1/N]_f$ можна застосувати твердження леми. Отже,

$$E_{N-1,N}(f) \geq \min_{z \in \Gamma_R} |f(z) - [N - 1/N]_f(z)| =$$

$$\begin{aligned}
 &= R^{2N} \left| \frac{H_N}{H_{N-1}} \right| \left(1 + O \left(\frac{R}{N^{\frac{1-\rho}{\rho}}} \right) \right) = \\
 &= \|f - [N - 1/N]_f\|_{C_{KR}} \left(1 + O \left(\frac{Re^R}{N^{\frac{1-\rho}{\rho}}} \right) \right),
 \end{aligned}$$

що і потрібно було довести.

Зауважимо, що теорема 2 узагальнює теорему 3.1 з [3].

1. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представление функций в комплексной плоскости. — М.: Наука, 1966. — 672 с.
2. Дзядык В.К., Филозоф Л.И. О скорости сходимости аппроксимаций Паде для некоторых элементарных функций// Мат.сборник. — 1978. — **107**, №3. — С. 347–363.
3. Дзядык В.К. Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, и $\operatorname{ch} z$ // Мат.сборник. — 1979. — **108**, №2. — С. 247–267.
4. Голуб А.П. Об аппроксимации Паде функции Миттаг-Леффлера// Теория приближения функций и ее приложения. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1984. — С. 52–59.
5. Чын М.Н. Наддиагональная аппроксимация Паде функции типа Миттаг-Леффлера $E_{1/2}(z; \alpha)$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$ // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1985. — С. 129–138.
6. Голуб А.П. Интегральные уравнения типа свертки и аппроксимации Паде// Исследования по теории аппроксимации функций. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1987. — С. 21–23.
7. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.Р. Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986. — 502 с.
8. Голуб А.П. Узагальнені моментні зображення та аппроксимції Паде. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — 222 с.
9. Старовойтов А.П., Старовойтова Н.А. Аппроксимации Паде функций Миттаг-Леффлера// Мат.сборник. — 2007. — **198**, №7. — С. 109–122.
10. Lubinsky D.S. Padé tables of entire functions of very slow and smooth growth// Constr.Approx. — 1985. — **1**, N4. — P. 349–358.
11. Lubinsky D.S. Padé tables of entire functions of very slow and smooth growth. 2// Constr.Approx. — 1988. — **4**, N3. — P. 321–339.
12. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган — М.: Наука, 1979. — 832 с.