Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2010, Т.7, №1, 221-234

УДК 517.5

В. І. Рукасов, С. О. Чайченко, Д. С. Волковницький
(Слов'янський держ. пед. ун-т)

НАБЛИЖЕННЯ $\bar{\psi}$–ІНТЕГРАЛІВ ЛОКАЛЬНО СУМОВНИХ НА ДІЙСНІЙ ОСІ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ОПЕРАТОРІВ ВАЛЛЕ ПУССЕНА В ІНТЕГРАЛЬНІЙ МЕТРИЦІ

In this paper we research the questions on approximation of functions defined on real axis and locally integrable on it by de la Vallee Poussin operators in integral metric.

В роботі досліджуються питання наближення в інтегральній метриці функцій, які визначені і локально інтегровні на дійсній осі, за допомогою операторів Валле Пуссена.

Нехай $\widehat{L}_1$ — множина вимірних на дійсній осі $\mathbb{R}$ функцій, які мають скінченну норму

$$\|\varphi\|_{\widehat{1}} = \sup_{a\in\mathbb{R}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t+a)|\ dt.$$

Через $\mathfrak{A}$ (див., наприклад, [1]) позначають множину всіх неперервних при $t \geq 0$ функцій $\psi(t)$, які задовольняють умови:

1. $\psi(v) \geq 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(v)$ зростає на відрізку [0;1];
2. $\psi(v)$ опукла вниз на $[1;\infty)$ і $\lim\limits_{v\to\infty} \psi(v) = 0$;
3. $\psi'(v) := \psi'(v+0)$ є функцією обмеженої варіації на $[0;\infty)$;

а через $\mathfrak{A}'$ — підмножину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{A}$, для яких $\int\limits_1^\infty \frac{\psi(v)}{v}\ dv < \infty$.

Нехай, далі, $\psi_j(v)$, $j = 1,2,$ — функції, задані і неперервні при $v \geq 0$, $\psi_{1+}(v)$ і $\psi_{2-}(v)$, $v \in (-\infty;\infty)$, — їх парне і непарне продовження відповідно, і для функції $\bar{\psi}(v) := \psi_{1+}(v)+i\psi_{2-}(v)$ майже в кожній точці $t \in \mathbb{R}$ існує перетворення Фур'є

$$\widehat{\bar{\psi}}(t) = \widehat{\psi}_{1+}(t) + i\widehat{\psi}_{2-}(t), \tag{1}$$

яке розуміємо в такому сенсі:

$$\widehat{\bar{\psi}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(v)e^{-ivt}dv.$$

Якщо $\psi_1 \in \mathfrak{A}$ і $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$, то (як випливає з твердження 10 роботи [2]) перетворення Фур'є (1) сумовне на всій дійсній осі.

Через $\widehat{L}^{\bar{\psi}}$ (див. роботу [1]) позначають множину функцій $f \in \widehat{L}_1$, які майже для всіх x можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\widehat{\bar{\psi}}(t)\, dt := A_0 + \varphi * \widehat{\bar{\psi}}\ (x), \tag{2}$$

де A_0 — деяка стала, $\varphi \in \widehat{L}_1$, інтеграл розуміємо як границю інтегралів по проміжках, що симетрично розширюються. Функцію $\varphi(\cdot)$ в рівності (2) називають $\bar{\psi}$-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $\varphi(\cdot) = f^{\bar{\psi}}(\cdot)$. Якщо $f \in \widehat{L}^{\bar{\psi}}$ і $\varphi \in \widehat{S}_1 = \{f \in \widehat{L}_1 : \|f\|_{\widehat{1}} \leq 1\}$, то вважаємо, що $f \in \widehat{L}^{\bar{\psi}}\widehat{S}_1 = \widehat{L}^{\bar{\psi}}_1$.

У якості агрегатів наближення для функцій $f \in \widehat{L}^{\bar{\psi}}$ використовуються оператори спеціального вигляду:

$$V_{\sigma,c}(f;x) = A_0 + f^{\bar{\psi}} * \widehat{\lambda_{\sigma,c}\bar{\psi}}\ (x), \tag{3}$$

де при $\sigma > c \geq 1$

$$\lambda_{\sigma,c}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |t| \leq \frac{c}{\sigma}, \\ \frac{(1-|t|)}{\sigma-c}\sigma, & \frac{c}{\sigma} \leq |t| \leq 1, \\ 0, & 1 \leq |t|. \end{cases} \tag{4}$$

Поряд з $V_{\sigma,c}(f;x)$ застосовують також оператори $V^*_{\sigma,c}(f;x)$, які визначаються підсумовуючою функцією вигляду:

$$\lambda^*_{\sigma,c}(t) = \begin{cases} \lambda_{\sigma,c}(t), & |t| \in \left[0; \frac{c}{\sigma}\right] \bigcup [1;\infty), \\ 1 - \frac{\sigma(1-|t|)}{\sigma-c}\frac{\bar{\psi}(\sigma \mathrm{sign}(t))}{\bar{\psi}(\sigma t)}, & \frac{c}{\sigma} \leq |t| \leq 1. \end{cases} \tag{5}$$

Фундаментальні результати щодо наближення на класах функцій, локально інтегровних на дійсній осі, було одержано О.І. Степанцем [2 – 5]. Дослідженню цих питань присвячено також роботи [6 – 10], а систематичний виклад результатів у цьому напрямку здійснено у книгах [11, 12]. Вивченню апроксимативних властивостей операторів $V^*_{\sigma,c}(f;x)$ при $c = \sigma - 1$ на класах $\widehat{L}^{\bar{\psi}}$ присвячено роботи [1] і [13, 14]. Питання наближення в рівномірній метриці операторами $V_{\sigma,c}(f;x)$ розглянуто в роботах [15, 16].

Мета цієї роботи полягає у знаходженні асимптотичних при $\sigma \to \infty$ рівностей для величин

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\bar{\psi}}_1; V_{\sigma,c}) = \sup\left\{ \|f(\cdot) - V_{\sigma,c}(f;\cdot)\|_{\widehat{1}}, \quad f \in \widehat{L}^{\bar{\psi}}_1 \right\} \tag{6}$$

за умови, що $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$, де $\mathfrak{A}_0$ і $\mathfrak{A}'_0$ — множини, які означаються в такий спосіб [11, с. 193].

Кожній функції $\psi \in \mathfrak{A}$ поставимо у відповідність функцію $\eta(x) = \eta(\psi, x)$, пов'язану при $x \geq 1$ з $\psi(x)$ співвідношенням $\psi(\eta(x)) = \frac{1}{2}\psi(x)$. Покладемо $\mu(t) = \frac{t}{\eta(t)-t}$. Тоді

$$\mathfrak{A}_0 = \{\psi \in \mathfrak{A}: \quad 0 < \mu(\psi;t) \leq K < \infty\}, \quad \mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{A}'.$$

Нехай числа $c = c(\sigma) < \sigma$ вибрані таким чином, що границя $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \frac{\sigma-c}{\sigma}$ існує, дорівнює Θ і $0 \leq \Theta < 1$. Основний результат роботи міститься у такому твердженні.

Теорема. *Нехай $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$ і $0 \leq \Theta < 1$. Тоді при $\sigma \to \infty$*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\bar{\psi}}_1; V_{\sigma,c}) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi_2(t)}{t}\,dt + \frac{4}{\pi^2}|\bar{\psi}(\sigma)|\ln\frac{\sigma}{\sigma-c} + O(1)|\bar{\psi}(\sigma)|,$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно σ.

Нехай

$$\mathfrak{A}_C = \{\psi \in \mathfrak{A}: \quad 0 < K_1 \leq \mu(\psi;t) \leq K_2 < \infty, \quad t \geq 1\}.$$

В монографії [17, с. 214] показано, що для довільної функції $\psi \in \mathfrak{A}_C$

$$\int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t}\,dt = O(1)\psi(\sigma), \qquad \sigma \to \infty.$$

З врахуванням цього факту із теореми 1 випливає такий наслідок.

Наслідок. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}_C$ *і* $0 \le \Theta < 1$. *Тоді при* $\sigma \to \infty$

$$\mathcal{E}(\widehat{L}_1^{\bar\psi}; V_{\sigma,c}) = \frac{4}{\pi^2}|\bar\psi(\sigma)| \ln \frac{\sigma}{\sigma - c} + O(1)|\bar\psi(\sigma)|, \tag{7}$$

де $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно* σ.

Твердження теореми і наслідку доповнюють результати роботи [16] у випадку наближення у метриці простору $\widehat{L}_1$, а також поширюють результати роботи [18] на випадок наближення на класах $\widehat{L}_1^{\bar\psi}$ функцій, локально інтегровних на дійсній осі.

Доведення теореми грунтується на лемі, яка дає зручний для подальшого дослідження вигляд інтегральних зображень відхилень

$$\rho_{\sigma,c}(f;x) = f(x) - V_{\sigma,c}(f;x). \tag{8}$$

Лема 1. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$, a *— деяке число з проміжку* $(0;\pi/2)$ *і* $0 \le \Theta < 1$. *Тоді для довільної функції* $f \in \widehat{L}_1^{\bar\psi}$ *майже в кожній точці* $x \in \mathbb{R}$ *виконується рівність*

$$\rho_{\sigma,c}(f;x) = \frac{-\psi_1(\sigma)}{\pi} \int\limits_{a \le |t| \le \frac{\pi\sigma}{\sigma - c}} f^{\bar\psi}\Big(x + \frac{t}{\sigma}\Big) \frac{\sin t}{t}\,dt +$$

$$+ \frac{\psi_2(\sigma)}{\pi} \int\limits_{a \le |t| \le \frac{\pi\sigma}{\sigma - c}} f^{\bar\psi}\Big(x + \frac{t}{\sigma}\Big) \frac{\cos t}{t}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \le a} f^{\bar\psi}\Big(x + \frac{t}{\sigma}\Big) \int\limits_{0}^{\infty} \psi_2(\sigma s) \sin st\,ds\,dt + O(1)|\bar\psi(\sigma)|,$$

де $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно* c *і* σ.

Доведення цієї леми проводиться за схемою доведення теореми 1 роботи [16]. Нехай

$$\rho^*_{\sigma,c}(f;x) := f(x) - V^*_{\sigma,c}(f;x).$$

Тоді на підставі співвідношення (8) і останньої формули можемо записати рівність

$$\rho_{\sigma,c}(f;x) = \rho^*_{\sigma,c}(f;x) + \Delta_{\sigma,c}(f;x), \tag{9}$$

у якій

$$\Delta_{\sigma,c}(f;x) := V^*_{\sigma,c}(f;x) - V_{\sigma,c}(f;x)$$

Оскільки зі співвідношень (3) – (5) випливає, що майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ справедливе зображення

$$\Delta_{\sigma,c}(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\bar{\psi}}(x+t)\widehat{d}_{\sigma,c}(t)\ dt,$$

де

$$\widehat{d}_{\sigma,c}(t) = \frac{1}{2(\sigma-c)\pi}\int\limits_{c}^{\sigma}(s-c)[(\bar{\psi}(s)-\bar{\psi}(\sigma))e^{-ist}+$$
$$+(\bar{\psi}(-s)-\bar{\psi}(-\sigma))e^{ist}]\ ds,$$

то, беручи до уваги співвідношення (див. роботу [16])

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{d}_{\sigma,c}(t)|\ dt = O(1)\sum_{i=1}^{2}[\psi_i(c)-\psi_i(\sigma)],$$

отримуємо

$$\Delta_{\sigma,c}(f;x) \le \|f^{\bar{\psi}}(\cdot)\|_{\widehat{1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{d}_{\sigma,c}(t)|\ dt \le K\sum_{i=1}^{2}[\psi_i((1-\Theta)\sigma)-\psi_i(\sigma)].$$

Звідси, враховуючи нерівність

$$\psi(\varepsilon\sigma) \le K\psi(\sigma), \quad \sigma \ge 1/\varepsilon,$$

яка виконується для довільної функції $\psi \in \mathfrak{A}_0$ і $0 < \varepsilon \leq 1$ (див. [17, с. 175]), одержуємо

$$\Delta_{\sigma,c}(f;x) = O(1)|\bar{\psi}(\sigma)|, \quad \sigma \to \infty. \tag{10}$$

Розглянемо тепер величину

$$\rho^*_{\sigma,c}(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\bar{\psi}}(x+t)\int\limits_{|v|\geq\frac{c}{\sigma}} \lambda^*_{\sigma,c}(v)\bar{\psi}(v)e^{-ivt}\,dv\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\bar{\psi}}(x+t)\int\limits_{\frac{c}{\sigma}\leq|v|\leq 1} \frac{(1-|v|)\sigma}{\sigma-c}\frac{\bar{\psi}(\sigma \mathrm{sign}(v))}{\bar{\psi}(\sigma v)}\bar{\psi}(v)e^{-ivt}\,dv\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\bar{\psi}}(x+t)\int\limits_{|v|\geq 1}\bar{\psi}(v)e^{-ivt}\,dv\,dt$$

зі співвідношення (9). Нехай $c = \sigma - h$ і $a \in (0;\pi/2)$. Інтегруючи частинами і виконуючи елементарні перетворення, знаходимо, що для довільної функції $f \in \widehat{L}_1^{\bar{\psi}}$ майже в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\rho^*_{\sigma,\sigma-h}(f;x) = -\frac{\psi_1(\sigma)}{\pi}\int\limits_{a\leq|t|\leq\frac{\pi\sigma}{h}} f^{\bar{\psi}}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{2\sigma\sin\frac{(2\sigma-h)t}{2\sigma}\sin\frac{ht}{2\sigma}}{ht^2}\,dt+$$

$$+\frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\int\limits_{a\leq|t|\leq\frac{\pi\sigma}{h}} f^{\bar{\psi}}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{2\sigma\cos\frac{(2\sigma-h)t}{2\sigma}\sin\frac{ht}{2\sigma}}{ht^2}\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leq a} f^{\bar{\psi}}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\int\limits_{1}^{\infty}\psi_2(\sigma s)\sin st\,ds\,dt+$$

$$+b^{\psi_1}_{\sigma,h}(f;x) + b^{\psi_2}_{\sigma,h}(f;x), \tag{11}$$

де

$$b_{\sigma,h}^{\psi_1}(f;x) = -\frac{\psi_1(\sigma)}{\pi} \int\limits_{|t|\leq a} f^{\bar{\psi}}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{2\sigma \sin\frac{(2\sigma-h)t}{2\sigma}\sin\frac{ht}{2\sigma}}{ht^2}dt-$$

$$-\frac{\psi_1(\sigma)}{\pi} \int\limits_{|t|\geq \frac{\pi\sigma}{h}} f^{\bar{\psi}}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{2\sigma \sin\frac{(2\sigma-h)t}{2\sigma}\sin\frac{ht}{2\sigma}}{ht^2}dt-$$

$$-\frac{\sigma}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f^{\bar{\psi}}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)}{t}\int\limits_{1}^{\infty}\psi_1'(\sigma s)\sin st\ ds\ dt \qquad (12)$$

і

$$b_{\sigma,h}^{\psi_2}(f;x) = \frac{\psi_2(\sigma)}{\pi} \int\limits_{|t|\leq a} f^{\bar{\psi}}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{2\sigma \cos\frac{(2\sigma-h)t}{2\sigma}\sin\frac{ht}{2\sigma}}{ht^2}\ dt+$$

$$+\frac{\psi_2(\sigma)}{\pi} \int\limits_{|t|\geq \frac{\pi\sigma}{h}} f^{\bar{\psi}}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{2\sigma \cos\frac{(2\sigma-h)t}{2\sigma}\sin\frac{ht}{2\sigma}}{ht^2}\ dt-$$

$$-\frac{\psi_2(\sigma)}{\pi} \int\limits_{|t|\leq a} f^{\bar{\psi}}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{\cos t}{t}\ dt+$$

$$+\frac{\sigma}{\pi}\int\limits_{|t|\geq a} \frac{f^{\bar{\psi}}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)}{t}\int\limits_{1}^{\infty}\psi_2'(\sigma s)\cos st\ ds\ dt. \qquad (13)$$

В процесі доведення теореми 1 роботи [16] було знайдено оцінки зверху для величин $\max\limits_{x\in\mathbb{R}}|b_{\sigma,h}^{\psi_1}(f;x)|$ і $\max\limits_{x\in\mathbb{R}}|b_{\sigma,h}^{\psi_2}(f;x)|$. Повторюючи міркування, які використовувалися при доведенні цих оцінок, та застосовуючи у відповідних місцях замість нерівностей

$$\max_{x\in\mathbb{R}}\Big|\int \varphi(x+t)K(t)\ dt\Big| \leq \max_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|\int |K(t)|\ dt,$$

нерівності вигляду

$$\Big\| \int \varphi(\cdot + t) K(t)\, dt \Big\|_{\widehat{1}} \le \|\varphi(\cdot)\|_{\widehat{1}} \int |K(t)|\, dt,$$

отримуємо

$$\|b^{\psi_1}_{\sigma,h}(f;\cdot)\|_{\widehat{1}} + \|b^{\psi_2}_{\sigma,h}(f;\cdot)\|_{\widehat{1}} \le K|\bar{\psi}(\sigma)|. \tag{14}$$

Нехай тепер

$$I^{\beta}_{\sigma,h}(f;x) := \int\limits_{a \le |t| \le \frac{\pi\sigma}{h}} f^{\bar{\psi}}\Big(x + \frac{t}{\sigma}\Big) \frac{-2\sigma \sin\Big(\frac{(2\sigma-h)t}{2\sigma} - \frac{\beta\pi}{2}\Big) \sin\frac{ht}{2\sigma}}{ht^2}\, dt.$$

Виконуючи елементарні перетворення, одержуємо

$$I^{\beta}_{\sigma,h}(f;x) = -\int\limits_{a \le |t| \le \frac{\pi\sigma}{h}} f^{\bar{\psi}}\Big(x + \frac{t}{\sigma}\Big) \frac{\sin(t - \frac{\beta\pi}{2})}{t}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{a \le |t| \le \frac{\pi\sigma}{h}} f^{\bar{\psi}}\Big(x + \frac{t}{\sigma}\Big) \Big[\frac{\frac{ht}{\sigma} - \sin\frac{ht}{\sigma}}{\frac{ht^2}{\sigma}} \sin(t - \frac{\beta\pi}{2}) +$$

$$+ \frac{1 - \cos\frac{ht}{\sigma}}{\frac{ht^2}{\sigma}} \cos(t - \frac{\beta\pi}{2}) \Big]\, dt,$$

звідки з урахуванням неперервності і монотонності на проміжку $(0;\pi]$ функцій $\tau_1(x) = \frac{\sin x - x}{x^2}$ *і* $\tau_2(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ знаходимо, що для довільної функції $f \in \widehat{L}^{\bar{\psi}}_1$ майже в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ виконується співвідношення

$$I^{\beta}_{\sigma,h}(f;x) = -\int\limits_{a \le |t| \le \frac{\pi\sigma}{h}} f^{\bar{\psi}}\Big(x + \frac{t}{\sigma}\Big) \frac{\sin(t - \frac{\beta\pi}{2})}{t}\, dt + O(1), \tag{15}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по σ, h і β.

Застосуємо співвідношення (15) для спрощення формули (11). Покладаючи у (15) спочатку $\beta = 0$, а потім $\beta = 1$, на підставі рівності

(11), з урахуванням (14), отримуємо

$$\rho^*_{\sigma,\sigma-h}(f;x) = \frac{-\psi_1(\sigma)}{\pi} \int\limits_{a\le|t|\le\frac{\pi\sigma}{h}} f^{\bar\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{\sin t}{t}\,dt+$$

$$+\frac{\psi_2(\sigma)}{\pi} \int\limits_{a\le|t|\le\frac{\pi\sigma}{h}} f^{\bar\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{\cos t}{t}\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a} f^{\bar\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\int\limits_1^\infty \psi_2(\sigma s)\sin st\,ds\,dt + O(1)|\bar\psi(\sigma)|. \qquad (16)$$

Поєднуючи тепер (9), (10) і (16), переконуємося у справедливості твердження леми. Лема доведена.

Виконаємо подальше спрощення величини $\rho^*_{\sigma,c}(f;x)$. Користуючись рівністю

$$-a\sin\alpha + b\cos\alpha = -\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha-\gamma), \qquad \gamma = \operatorname{arctg}\frac{b}{a},$$

можемо записати

$$-\frac{\psi_1(\sigma)}{\pi}\int\limits_{a\le|t|\le\frac{\pi\sigma}{h}} f^{\bar\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{\sin t}{t}\,dt + \frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\int\limits_{a\le|t|\le\frac{\pi\sigma}{h}} f^{\bar\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{\cos t}{t}\,dt =$$

$$= -\frac{|\bar\psi(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{\frac{a}{\sigma}\le|t|\le\frac{\pi}{h}} f^{\bar\psi}(x+t)\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{t}\,dt, \quad \gamma_\sigma = \operatorname{arctg}\frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}. \qquad (17)$$

Нехай

$$x_k = \frac{k\pi+\gamma_\sigma}{\sigma}, \quad t_k = x_k - \frac{\pi}{2\sigma}, \quad k\in\mathbb{Z}, \quad \gamma_\sigma,\sigma\in\mathbb{R}.$$

Позначимо через k_0 те значення k, для якого t_{k_0} є точка, найближча до точки $\frac{a+\pi}{\sigma}$ справа, в ній $\sin(\sigma t-\gamma_\sigma) = 1$, а через k_1 — найбільше зі значень k таких, що $t_k < \frac{\pi}{h}$. Далі, через k_2 позначимо таке число, щоб точка t_{k_2} була найближчою до точки $-\frac{a+\pi}{\sigma}$ зліва серед тих, в яких $\sin(\sigma t - \gamma_\sigma) = -1$, а через k_3 — найменше з тих значень, що задовольняють умову $t_k > -\frac{\pi}{h}$, і покладемо

$$l_{\sigma,h}(t) = x_k, \quad t \in [t_k; t_{k+1}], \quad k = k_0, ..., k_1 - 1,$$

$$k = k_3, k_3 + 1, ..., k_2 - 1, \quad i_{3,1} = [t_{k_3}; t_{k_2}] \cup [t_{k_0}; t_{k_1}].$$

Тоді, як показано в роботі [16], виконується співвідношення

$$\int\limits_{\frac{a}{\sigma} \le |t| \le \frac{\pi}{h}} f^{\bar{\psi}}(x+t) \frac{\sin(\sigma t - \gamma_\sigma)}{t} \, dt = \int\limits_{i_{3,1}} f^{\bar{\psi}}(x+t) \frac{\sin(\sigma t - \gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)} \, dt + O(1), \quad (18)$$

де $O(1)$ — величина, обмежена відносно h і σ.

Поєднуючи лему 1 з рівностями (17) і (18), отримуємо таке твердження.

Лема 2. *Нехай $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$, $0 \le \Theta < 1$. Тоді для довільної функції $f \in \widehat{L}_1^{\bar{\psi}}$ майже в кожній точці $x \in \mathbb{R}$*

$$\rho_{\sigma,\sigma-h}(f; x) = -\frac{|\bar{\psi}(\sigma)|}{\pi} \int\limits_{i_{3,1}} f^{\bar{\psi}}(x+t) \frac{\sin(\sigma t - \gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)} \, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \le \frac{a}{\sigma}} f^{\bar{\psi}}(x+t) \int\limits_{\sigma}^{\infty} \psi_2(s) \sin st \, ds \, dt + O(1)|\bar{\psi}(\sigma)|, \quad (19)$$

де $a \in (0; \pi)$, $\gamma_\sigma = \operatorname{arctg} \frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}$, $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по h і σ.

Для знаходження асимптотичних рівностей для величини (6) нам знадобиться таке твердження.

Лема 3. *Нехай $K(t)$ — функція, сумовна на $[-\pi; \pi]$ і ζ — довільне число з відрізку $[-\pi; \pi]$. Тоді*

$$\mathcal{E}(K) \overset{\text{df}}{=} \sup_{y \in \widehat{S}_1} \left\| \int\limits_{-\pi}^{\pi} y(t-x) K(t) \, dt \right\|_{\widehat{1}} \ge$$

$$\geq \frac{1}{2} \max_{|\zeta| \leq \pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |K^*(x) - K^*(x+\zeta)| \; dx, \tag{20}$$

де $K^*(\cdot)$ — 2π-періодичне продовження функції $K(\cdot)$.

Доведення. Якщо $y(\cdot)$ є 2π-періодичною функцією, то твердження леми 3 співпадає з наслідком 8.2 монографії [17, с. 255].

Нехай $y \in \widehat{S}_1$ і $\zeta \in [-\pi; \pi]$, $\zeta \neq 0$. Припустимо спочатку, що функція $K(t)$ є неперервною на відрізку $[-\pi; \pi]$ і такою, що $K(-\pi) = K(\pi)$. Тоді, повторюючи міркування, які використовувалися під час доведення леми 8.2 [17, с. 254], отримуємо

$$\mathcal{E}(K) \geq \frac{1}{2} \max_{|\zeta| \leq \pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |K^*(x) - K^*(x+\zeta)| \; dx.$$

Нехай тепер $K(t)$ — довільна сумовна на $[-\pi; \pi]$ функція. Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$ і знайдемо неперервну функцію $K_\varepsilon(t)$, для якої $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |K(t) - K_\varepsilon(t)| \; dt \leq \varepsilon$ (існування функції $K_\varepsilon(t)$ випливає з відомої властивості щільності неперервних функцій у просторі інтегровних функцій). При цьому, не обмежуючи загальності, можемо вважати, що $K_\varepsilon(\pi) = K_\varepsilon(-\pi)$. Тоді

$$\mathcal{E}(K) = \sup_{y \in \widehat{S}_1} \Big\| \int\limits_{-\pi}^{\pi} [K(t) + K_\varepsilon(t) - K_\varepsilon(t)] y(t-x) \; dt \Big\|_{\widehat{1}} \geq$$

$$\geq \sup_{y \in \widehat{S}_1} \Big\| \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_\varepsilon(t) y(t-x) \; dt \Big\|_{\widehat{1}} - \varepsilon.$$

Враховуючи тепер справедливість твердження леми для неперервних функцій, одержуємо

$$\mathcal{E}(K) \geq \frac{1}{2} \max_{|\zeta| \leq \pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |K_\varepsilon^*(x) - K_\varepsilon^*(x+\zeta)| dx - \varepsilon \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\max_{|\zeta|\leq\pi}\Big[\int_{-\pi}^{\pi}|K^*(x)-K^*(x+\zeta)|\,dx-\int_{-\pi}^{\pi}[K^*_\varepsilon(x)-K^*(x)+$$

$$+K^*_\varepsilon(x+\zeta)-K^*(x+\zeta)]\,dx\Big]-\varepsilon\geq\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|K^*(x)-K^*(x+\zeta)|\,dx-\frac{3\varepsilon}{2}.$$

Лема доведена.

Як відомо, класи функцій $\widehat{L}_1^{\bar\psi}$ є інваріантними відносно зсуву аргументу. Враховуючи цю обставину, на підставі співвідношення (19) отримуємо

$$\mathcal{E}(\widehat{L}_1^{\bar\psi};V_{\sigma,\sigma-h})\leq\frac{1}{\pi}\int_{|t|\leq\frac{a}{\sigma}}\Big|\int_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\,ds\Big|\,dt+$$

$$+\frac{|\bar\psi(\sigma)|}{\pi}\int_{i_{3,1}}\Big|\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}\Big|\,dt+O(1)|\bar\psi(\sigma)|. \tag{21}$$

Нехай $K_\sigma(t)$ — функція, яка на проміжку $[-\pi;\pi]$ визначається формулою

$$K_\sigma(t)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\,ds, & t\in[-\frac{a}{\sigma};\frac{a}{\sigma}],\\ \frac{|\bar\psi(\sigma)|}{\pi}\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}, & t\in(t_{k_3};t_{k_2})\cup(t_{k_0};t_{k_1}),\\ 0, & t\in[-\pi;\pi]\backslash\{[-\frac{a}{\sigma};\frac{a}{\sigma}]\bigcup(t_{k_3};t_{k_2})\bigcup(t_{k_0};t_{k_1})\}.\end{cases}$$

Через $K^*_\sigma(t)$ позначимо 2π-періодичне продовження функції $K_\sigma(t)$. Тоді, користуючись лемою 3 і враховуючи співвідношення (19), знаходимо

$$\mathcal{E}(\widehat{L}_1^{\bar\psi};V_{\sigma,\sigma-h})\geq\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|K^*_\sigma(x)-K^*_\sigma(x+\frac{\pi}{\sigma})|\,dx+O(1)|\bar\psi(\sigma)|. \tag{22}$$

Оскільки

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|K^*_\sigma(x)-K^*_\sigma(x+\frac{\pi}{\sigma})|\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}|K_\sigma(x)|\,dx=$$

$$= \frac{|\bar\psi(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{i_{3,1}}\Big|\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}\Big|\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le\frac{a}{\sigma}}\Big|\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\,ds\Big|\,dt,$$

то, беручи до уваги отримані в роботі [16] рівності

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le\frac{a}{\sigma}}\Big|\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\,ds\Big|\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{|\psi_2(t)|}{t}\,dt + O(1) \tag{23}$$

і

$$\int\limits_{i_{3,1}}\Big|\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}\Big|\,dt = \frac{4}{\pi}\ln\frac{\sigma}{h} + O(1), \tag{24}$$

на підставі нерівності (22) одержуємо

$$\mathcal{E}(\widehat{L}_1^{\bar\psi}; V_{\sigma,\sigma-h}) \ge \frac{2}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{|\psi_2(t)|}{t}\,dt + \frac{4}{\pi}\ln\frac{\sigma}{h} + O(1)|\bar\psi(\sigma)|. \tag{25}$$

Поєднуючи співвідношення (21), (23) – (25), переконуємося у справедливості твердження теореми. Теорему доведено.

1. *Stepanets A.I., Wang Kunyang, Zhang Xirong.* Approximation of locally integrable functions on the real line // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 11. — С. 1549 – 1561.

2. *Степанец А.И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. — 1988. — **40**, № 2. — С. 198 – 209.

3. *Степанец А.И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, № 1. — С. 102 – 112.

4. *Степанец А.И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II // Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, № 2. — С. 210 – 222.

5. *Степанец А.И.* Приближения в пространствах локально интегрируемых функций // Укр. мат. журн. — 1994. — **46**, № 5. — С. 597 – 625.

6. *Рукасов В.И.* Приближение операторами Валле Пуссена функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. — 1992. — **44**, № 5. — С. 682 – 691.

7. *Рукасов В.И.* Приближение непрерывных функций операторами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 3. — С. 414 – 424.
8. *Степанець О.І., Соколенко І.В.* Наближення інтегралів Пуассона функцій, заданих на дійсній осі // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 361 – 375.
9. *Рукасов В.І., Чайченко С.О.* Наближення операторами Валле Пуссена інтегралів Пуассона функцій, заданих на дійсній осі // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — Т. 2, № 2. — С. 228 – 237.
10. *Рукасов В.І., Чайченко С.О.* Аппроксимационные свойства операторов Валле Пуссена на классах $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta}$ // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2007. — Т. 4, № 1. — С. 284 – 301.
11. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 т. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т. 2. — 468 с.
12. *Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О.* Приближения суммами Валле Пуссена : Праці Ін-ту математики НАН України. — 2007. — Т. 68. — 386 с.
13. *Степанець О.І., Соколенко І.В.* Наближення операторами Фур'є $\bar{\psi}$-інтегралів неперервних функцій, заданих на дійсній осі // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 5. — С. 663 – 676.
14. *Степанець О.І., Соколенко І.В.* Наближення операторами Фур'є $\bar{\psi}$-інтегралів функцій, заданих на дійсній осі // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 7. — С. 960 – 965.
15. *Рукасов В.И., Силин Е.С.* Приближение непрерывных функций операторами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 2. — С. 230 – 239.
16. *Рукасов В.И., Силин Е.С.* Приближение непрерывных функций небольшой гладкости операторами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 3. — С. 394 – 400.
17. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 т. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т. 1. — 426 с.
18. *Рукасов В.И., Чайченко С.О.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Валле Пуссена (небольшая гладкость)// Теорія наближення функцій та суміжні питання : Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — Т. 35. — С. 134 – 150.