Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2010, Т.7, №1, 21-35

УДК 517.5

Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима, В. О. Гнатюк
(Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. Івана Огієнка)

МЕТОД АПРОКСИМАЦІЇ КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННОВИМІРНИМ ПІДПРОСТОРОМ З ОБМЕЖЕННЯМ, ЩО ЗАДАЄТЬСЯ СИСТЕМОЮ ОПУКЛИХ МНОЖИН

In the article the cutting plane methods is generalized on the case of problem of the best uniform approximation continuous compact-valued maps by finite dimensional space of continuous single-valued maps with additional restriction which are defined by system of closed convex sets.

В статті узагальнено метод січних площин розв'язування задачі опуклого програмування на випадок задачі найкращої рівномірної апроксимації компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором з додатковим обмеженням, що задається системою замкнених опуклих множин.

Вступ. У даній роботі для розв'язування задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення елементами скінченновимірного підпростору однозначних неперервних відображень, які задовольняють додатковому обмеженню, що задається системою замкнених опуклих множин, які змінюються неперервно, модифіковано метод січної площини розв'язування задачі опуклого програмування, запропонований у праці [1], доведено його збіжність. Побудований метод узагальнює також на випадок вищезгаданої задачі метод розв'язування задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення чебишовським підпростором з додатковим обмеженням, що задається системою замкнених куль, центри та радіуси яких змінюються неперервно, розглянутий у праці [2].

1. Постановка задачі. Нехай S — метричний компакт, X — лінійний над полем комплексних чисел нормований простір, $C(S, X)$ — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень g компакта S в X, неперервних на S, з нормою

$\|g\| = \max\limits_{s\in S} \|g(s)\|$, $K(X)$ — сукупність компактів простору X, $O(X)$ — сукупність опуклих замкнених множин простору X, $C(S, K(X))$ — множина багатозначних відображень a компакта S в X таких, що для кожного $s \in S$ $a(s) \in K(X)$ і вони неперервні на S відносно метрики Гаусдорфа, $C(S, O(X))$ — множина багатозначних відображень b компакту S в X таких, що для кожного $t \in S$ $b(t) \in O(X)$ і вони неперервні на S відносно метрики Гаусдорфа, $a \in C(S, K(X))$, V— лінійний підпростір простору $C(S, X)$, породжений лінійно незалежними відображеннями $g_i \in C(S, X)$, $i = \overline{1,n}$, $b \in C(S, O(X))$, $D = \{g :\ g \in C(S, X),\ \ g(t) \in b\ (t),\ \ t \in S\}$ — множина неперервних перетинів відображення b.

Будемо припускати, що $V \bigcap D \neq \emptyset$.

Задачею найкращої рівномірної апроксимації відображення $a \in C(S, K(X))$ скінченновимірним підпростором $V \subset C(S, X)$ з додатковим обмеженням, що задається системою замкнених опуклих множин $b(t)$, $t \in S$, які змінюються неперервно відносно метрики Гаусдорфа, будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*(V \cap D) = \inf_{g\in V\cap D} \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \|g(s) - y\|. \tag{1.1}$$

Згідно з теоремою 2.1 [3] існує елемент $g^* \in V \cap D$ такий, що $\alpha_a^*(V \cap D) = \max\limits_{s\in S} \max\limits_{y\in a(s)} \|g^*(s) - y\|$.

Цей елемент будемо називати екстремальним для величини (1.1).

Мета даної роботи — узагальнити метод січних площин розв'язування задачі опуклого програмування для задачі відшукання величини (1.1) та її екстремального елемента.

2. Допоміжні твердження. Позначимо через X^* простір, спряжений з X, через B^* — замкнену одиничну кулю простору X^*: $B^* = \{f :\ f \in X^*,\ \ \|f\| \leqslant 1\}$. Як відомо (див., наприклад, [4, с. 156]), для будь-якого елемента $z \in X$ існує елемент $f_z \in B^*$ такий, що $f_z(z) = \|z\|$. Звідси випливає, що для всіх $z \in X$

$$\|z\| = \max_{f\in B^*} Ref(z). \tag{2.1}$$

Твердження 2.1. *Нехай* g_i, $i = \overline{1,n}$, *лінійно незалежні елементи простору* $C(S, X)$. *Тоді існують точки* $s_j \in S$, *функціонали*

$f_j \in B^*$, $j = \overline{1, m_1}$, *такі, що*

$$\min_{\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in S_{R^n}} \max_{1\leqslant j\leqslant m_1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Ref_j\left(g_i\left(s_j\right)\right) = \bar{\mu} > 0,$$

де $S_{R^n} = \left\{\alpha : \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in R^n, \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1\right\}$ *- одинична сфера простору* R^n.

Доведення. Оскільки S_{R^n} є обмеженою замкненою множиною простору R^n, $g_i, i = \overline{1, n}$, лінійно незалежні елементи простору $C(S, X)$, то існує точка $\alpha^0 = \left(\alpha_1^0, ..., \alpha_n^0\right) \in S_{R^n}$, для якої $\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^0 g_i\right\| = \min\limits_{\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in S_{R^n}} \left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i g_i\right\| = \mu > 0.$

Відображення $(s, f) \in S \times B^* \to Ref\left(g_i\left(s\right)\right), i = \overline{1, n}$, є неперервними в кожній точці $(s, f) \in S \times B^*$, якщо на $S \times B^*$ розглядати добуток топології компакта S та слабкої* топології кулі B^*, тому для $\varepsilon' = \frac{\mu}{2\sqrt{n}}$ і для кожної точки $(s, f) \in S \times B^*$ існує її окіл $V\left(s\right) \times O\left(f\right)$, де $V\left(s\right)$— відкритий окіл точки s компакта S, $O\left(f\right)$— відкритий окіл f у слабкій* топології B^* $\left(O\left(f\right) \subset B^*\right)$, такий, що

$$\left|Ref'\left(g_i\left(s'\right)\right) - Ref\left(g_i\left(s\right)\right)\right| < \varepsilon', i = 1, ..., n.$$

Оскільки $\left\{V\left(s\right) \times O\left(f\right) : (s, f) \in S \times B^*\right\}$ є відкритим покриттям компакта $S \times B^*$, то існуються $(s_j, f_j) \in S \times B^*, j = \overline{1, m_1}$, що $S \times B^* = \bigcup\limits_{j=1}^{m_1} \left(V\left(s_j\right) \times O\left(f_j\right)\right)$. Тоді для кожної пари $(s, f) \in S \times B^*$ існує індекс $j_{(s,f)} \in \{1, ..., m_1\}$ такий, що $(s, f) \in V\left(s_{j_{(s,f)}}\right) \times O\left(f_{j_{(s,f)}}\right)$. Тому

$$\left|Ref\left(g_i\left(s\right)\right) - Ref_{j_{(s,f)}}\left(g_i\left(s_{j_{(s,f)}}\right)\right)\right| < \varepsilon', i = 1, ..., n.$$

З урахуванням цього для кожного $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in S_{R^n}$, $(s, f) \in S \times B^*$ одержимо, що

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Ref\left(g_i\left(s\right)\right) - \max_{1\leqslant j\leqslant m_1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Ref_j\left(g_i\left(s_j\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Ref\left(g_i\left(s\right)\right) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Ref_{j_{(s,f)}}\left(g_i\left(s_{j_{(s,f)}}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(Ref\left(g_i\left(s\right)\right) - Ref_{j_{(s,f)}}\left(g_i\left(s_{j_{(s,f)}}\right)\right)\right)^2} <$$

$$< \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\varepsilon'\right)^2} = \sqrt{\left(\varepsilon'\right)^2 n} = \varepsilon' \sqrt{n}.$$

Звідки для всіх $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in S_{R^n}$

$$\max_{1\leqslant j\leqslant m_1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Ref_j\left(g_i\left(s_j\right)\right) \geqslant \max_{(s,f)\in S\times B^*} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Ref\left(g_i\left(s\right)\right)\right) -$$

$$-\varepsilon' \sqrt{n} = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i \right\| - \varepsilon' \sqrt{n} \geqslant \mu - \varepsilon' \sqrt{n} = \frac{\mu}{2} = \mu_1 > 0$$

Звідси та неперервності відображення

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in R^n \to \max_{1\leqslant j\leqslant m_1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Ref_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)$$

по $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ на R^n одержимо, що

$$\min_{\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in S_{R^n}} \max_{1\leqslant j\leqslant m_1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Ref_j\left(g_i\left(s_j\right)\right) = \bar{\mu} \geqslant \mu_1 > 0.$$

Твердження доведено.

Твердження 2.2. *Нехай* $g \in C\left(S, X\right)$, $b \in C\left(S, O\left(X\right)\right)$,

$$\psi_b^g\left(t\right) = \inf_{y\in b(t)} \left\|g\left(t\right) - y\right\|, t \in S.$$

Функція $t \in S \to \psi_b^g\left(t\right)$ *є неперервною на* S.

Твердження 2.3. *Нехай B - опукла замкнута множина простору X і x - довільна точка цього простору. Має місце співвідношення двоїстості*

$$\inf_{y \in B} \|x - y\| = \max_{\varphi \in B^*} \left(Re\varphi\left(x\right) - \sup_{y \in B} Re\varphi\left(y\right) \right).$$

Твердження 2.4. *Для $b \in C\left(S, O\left(X\right)\right)$ має місце рівність*

$$D = \left\{ g : g \in C\left(S, X\right), \max_{t \in S} \inf_{y \in b(t)} \|g\left(t\right) - y\| = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ g : g \in C\left(S, X\right), \max_{t \in S} \max_{\varphi \in B^*} \left(Re\varphi\left(g\left(t\right)\right) - \sup_{y \in b(t)} Re\varphi\left(y\right) \right) = 0 \right\}.$$

Позначимо через

$$M = \{(\alpha; \theta) = (\alpha_1, ..., \alpha_n; \theta) : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{Re} f\left(g_i\left(s\right)\right) - \theta \leq \mathrm{Re} f\left(y\right),$$

$$s \in S, y \in a\left(s\right), f \in B^*;$$

$$\left. \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{Re}\varphi\left(g_i\left(t\right)\right) \leq \sup_{y \in b(t)} \mathrm{Re}\varphi\left(y\right), t \in S, \varphi \in B^* \right\}.$$

Поряд із задачею відшукання величини (1.1) будемо розглядати таку задачу:

$$\inf_{(\alpha;\theta) \in M} \theta. \tag{2.2}$$

Твердження 2.5. *1. Задача (2.2) має оптимальний розв'язок. Справедлива рівність*

$$\theta^* = \alpha_a^*\left(V \cap D\right),$$

де θ^* - оптимальне значення цільової функції задачі (2.2).

2. Для того щоб елемент $g^* = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i$ був екстремальним елементом для величини (1.1), необхідно і достатньо, щоб вектор $(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*; \theta^*)$ був оптимальним розв'язком задачі (2.2).

3. Описання модифікованого методу січних площин. На попередньому кроці методу вибираємо точки $s_j \in S$, функціонали $f_j \in B^*$, $j=\overline{1,m_1}$, такі, що

$$\min_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in S_{R^n}} \max_{1\le j\le m_1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{Re} f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right) = \overline{\mu} > 0, \qquad (3.1)$$

де , як і вище, S_{R^n} - одинична сфера простору R^n.

Відповідно до твердження 2.1 вищеназвані точки та функціонали існують. Крім того, на цьому кроці довільним чином вибираємо точки $y_j \in a\left(s_j\right)$, $j=\overline{1,m_1}$.

На l -му кроці($l \geqslant 1$) розв'язуємо наступну задачу лінійного програмування:

$$\inf \theta \qquad (3.2)$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{Re} f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right) - \theta \le \mathrm{Re} f_j\left(y_j\right), j=\overline{1,m_l}, \qquad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{Re} \varphi_k\left(g_i\left(t_k\right)\right) \le \sup_{y\in b(t_k)} \mathrm{Re} \varphi_k\left(y\right), k=\overline{1,p_l}, \qquad (3.4)$$

де $m_l \ge m_1,\ p_l \ge 0,\ m_l+p_l=m_1+l-1$; $s_j \in S$, $y_j \in a\left(s_j\right)$, $f_j \in B^*$, $j=\overline{1,m_l}$; $t_k \in S$, $\varphi_k \in B^*$, $k=\overline{1,p_l}$.

Позначимо через

$$M_l = \{(\alpha;\theta) = (\alpha_1,...,\alpha_n;\theta):$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{Re} f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right) - \theta \le \mathrm{Re} f_j\left(y_j\right), j=\overline{1,m_l},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{Re} \varphi_k\left(g_i\left(t_k\right)\right) \le \sup_{y\in b(t_k)} \mathrm{Re} \varphi_k\left(y\right), k=\overline{1,p_l}\}.$$

Оскільки має мсце співвідношення (3.1) , то цільова функція задачі (3.2)-(3.4) обмежена знизу на множині її допустимих розв'язків

M_l. Тому оптимальний розв'язок цієї задачі існує (див., наприклад, [5, с.110]). Будемо його позначати через $\left(\alpha^l;\theta^l\right)=\left(\alpha_1^l,...,\alpha_n^l;\theta^l\right)$.

Теорема 3.1. *1. Має місце співвідношення*

$$\theta^l \leq \alpha_a^*\left(V\cap D\right), l=1,2,.... \tag{3.5}$$

2. Якщо для деякого натурального l елемент $g^l=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^l g_i$ належить до множини D, то

$$\theta^l \leq \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^l\left(s\right)-y\right\|. \tag{3.6}$$

3. Якщо $g^l\in D$ і

$$\theta^l = \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^l\left(s\right)-y\right\|, \tag{3.7}$$

то g^l є екстремальним елементом для величини (1.1) і справедлива рівність

$$\theta^l=\alpha_a^*\left(V\cap D\right)=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^l\left(s\right)-y\right\|. \tag{3.8}$$

Доведення. Співвідношення (3.5) випливає з твердження 2.5 та включення $M_l\subset M:\theta^l=\min\limits_{(\alpha;\theta)\in M_l}\theta\leqslant\min\limits_{(\alpha;\theta)\in M}\theta=\alpha_a^*\left(V\cap D\right)$.

Якщо елемент $g^l = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^l g_i$ належить до множини D , то $g^l\in V\cap D$. Тому

$$\theta^l\leqslant\alpha_a^*\left(V\cap D\right)\leqslant\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^l\left(s\right)-y\right\|. \tag{3.9}$$

Отже, в цьому випадку, має місце (3.6). Якщо $g^l=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^l g_i\in D$ і має місце рівність (3.7) , то з (3.9) одержимо (3.8). Звідси випливає, зокрема, що g^l є екстремальним елементом для величини (1.1).

Теорему доведено.

Продовжимо опис методу. Для $l=1,2,...$ позначимо через

$$\varepsilon^l=\max\left\{\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^l\left(s\right)-y\right\|-\theta^l,\max_{t\in S}\inf_{y\in b(t)}\left\|g^l\left(t\right)-y\right\|\right\},$$

де, як і вище,$g^l = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^l g_i$. Зрозуміло, що $\varepsilon^l \geq 0$. Якщо для $l \in \{1, 2, ...\}$ $\varepsilon^l = 0$, то згідно з твердженням 2.4 та теоремою 3.1 g^l є екстремальним елементом для величини (1.1) і $\alpha_a^* (V \cap D) = \theta^l$. В цьому випадку процес відшукання величини (1.1) і її екстремального елемента завершено. Коли $\varepsilon^l > 0$, то можливі два випадки.

1-випадок. Нехай

$$\varepsilon^l = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\| g^l(s) - y \right\| - \theta^l = \max_{y \in a\left(s_{m_l+1}\right)} \left\| g^l\left(s_{m_l+1}\right) - y \right\| - \theta^l =$$

$$= \left\| g^l\left(s_{m_l+1}\right) - y_{m_l+1} \right\| - \theta^l = \mathrm{Re} f_{m_l+1}\left(g^l\left(s_{m_l+1}\right) - y_{m_l+1}\right) - \theta^l =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^l \mathrm{Re} f_{m_l+1}\left(g_i\left(s_{m_l+1}\right)\right) - \mathrm{Re} f_{m_l+1}\left(y_{m_l+1}\right) - \theta^l,$$

де $s_{m_l+1} \in S$, $y_{m_l+1} \in a\left(s_{m_l+1}\right)$, $f_{m_l+1} \in B^*$.

Згідно з твердженням 1.1 [3], неперервністю відображення $F_z(y) = \|z - y\|$, $z \in X$, по y на X, рівністю (2.1) елементи s_{m_l+1}, y_{m_l+1}, f_{m_l+1} існують. Тоді до обмежень (3.3) задачі лінійного програмування (3.2)-(3.4) додаємо обмеження

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{Re} f_{m_l+1}\left(g_i\left(s_{m_l+1}\right)\right) - \theta \leq \mathrm{Re} f_{m_l+1}\left(y_{m_l+1}\right)$$

та розв'язуємо одержану в результаті цього нову задачу лінійного програмування. Позначимо через $\left(\alpha^{l+1}; \theta^{l+1}\right) = \left(\alpha_1^{l+1}, ..., \alpha_n^{l+1}; \theta^{l+1}\right)$ її оптимальний розв'язок.

2-випадок. Нехай

$$\varepsilon^l = \max_{t \in S} \inf_{y \in b(t)} \left\| g^l(t) - y \right\| = \inf_{y \in b\left(t_{p_l+1}\right)} \left\| g^l\left(t_{p_l+1}\right) - y \right\| =$$

$$= \max_{\varphi \in B^*} \left(\mathrm{Re}\varphi\left(g^l\left(t_{p_l+1}\right)\right) - \sup_{y \in b\left(t_{p_l+1}\right)} \mathrm{Re}\varphi(y) \right) =$$

$$= \mathrm{Re}\varphi_{p_l+1}\left(g^l\left(t_{p_l+1}\right)\right) - \sup_{y \in b\left(t_{p_l+1}\right)} \mathrm{Re}\varphi_{p_l+1}(y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^l \mathrm{Re}\varphi_{p_l+1}\left(g_i\left(t_{p_l+1}\right)\right) - \sup_{y \in b\left(t_{p_l+1}\right)} \mathrm{Re}\varphi_{p_l+1}\left(y\right),$$

де $t_{p_l+1} \in S$, $\varphi_{p_l+1} \in B^*$.

Згідно з твердженнями 2.2, 2.3 зазначені точка t_{p_l+1} та функціонал φ_{p_l+1} існують. Тоді до обмежень (3.4) задачі лінійного програмування (3.2)-(3.4) додаємо обмеження

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{Re}\varphi_{p_l+1}\left(g_i\left(t_{p_l+1}\right)\right) \leq \sup_{y \in b\left(t_{p_l+1}\right)} \mathrm{Re}\varphi_{p_l+1}\left(y\right),$$

знаходимо оптимальний розв'язок $\left(\alpha^{l+1}; \theta^{l+1}\right) = \left(\alpha_1^{l+1}, ..., \alpha_n^{l+1}; \theta^{l+1}\right)$ отриманої в результаті цього нової задачі лінійного програмування і т.д.

4. Збіжність методу.

Теорема 4.1 *1. Послідовність* $\left\{\theta^l\right\}_{l=1}^{\infty}$ *є неспадною , існує* $\lim\limits_{l\to\infty} \theta^l$.

2. Послідовність $\left\{\alpha^l\right\}_{l=1}^{\infty}$*, де* $\alpha^l = \left(\alpha_1^l, ..., \alpha_n^l\right)$, $l = 1, 2, ...$, *є обмеженою послідовністю простору* R^n *. Для будь-якої часткової границі* $\alpha^* = \left(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*\right)$ *послідовності* $\left\{\alpha^l\right\}_{l=1}^{\infty}$ *елемент* $g^* = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i$ *є екстремальним елементом для величини (1.1).*

3. Мають місце співвідношення

$$\lim_{l\to\infty} \theta^l = \alpha_a^*\left(V \cap D\right) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\|g^*\left(s\right) - y\right\|,$$

$$\lim_{l\to\infty} \max_{t \in S} \inf_{y \in b(t)} \left\|g^l\left(t\right) - y\right\| = 0.$$

Доведення. Оскільки $M_{l+1} \subset M_l$, то $\theta^l \leqslant \theta^{l+1}$, $l = 1, 2, ...$,і, отже, послідовність $\left\{\theta^l\right\}_{l=1}^{\infty}$ є неспадною. Згідно з (3.5) вона обмежена, тому існує $\lim\limits_{l\to\infty} \theta^l$ і

$$\lim_{l\to\infty} \theta^l \leq \alpha_a^*\left(V \cap D\right). \tag{4.1}$$

Переконаємось, що послідовність $\left\{\alpha^l\right\}_{l=1}^{\infty}$, є обмеженою послідовністю R^n . Припустимо супротивне. Тоді існує її підпослідовність

$\left\{\alpha^{l_v}\right\}_{v=1}^{\infty}$ така, що $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left\|\alpha^{l_v}\right\|=+\infty$. Без обмеження загальності будемо вважати, що уже $\lim\limits_{l\to\infty}\left\|\alpha^{l}\right\|=+\infty$. Оскільки $\left(\alpha_1^l,...,\alpha_n^l;\theta^l\right)$ є оптимальним розв'язком задачі (3.2)-(3.4), то

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^l \mathrm{Re} f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)-\mathrm{Re} f_j\left(y_j\right)\leq\theta^l, j=\overline{1,m_1}, l=1,2,....$$

Звідки

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i^l}{\|\alpha^l\|}\mathrm{Re} f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)-\frac{1}{\|\alpha^l\|}\mathrm{Re} f_j\left(y_j\right)\leq\frac{1}{\|\alpha^l\|}\theta^l,$$

$$j=\overline{1,m_1}, l=1,2,.... \tag{4.2}$$

Оскільки $\left(\frac{\alpha_1^l}{\|\alpha^l\|},...,\frac{\alpha_n^l}{\|\alpha^l\|}\right)\in S_{R^n}$, то з послідовності $\left\{\left(\frac{\alpha_1^l}{\|\alpha^l\|},...,\frac{\alpha_n^l}{\|\alpha^l\|}\right)\right\}_{l=1}^{\infty}$ можна вибрати збіжну підпослідовність. Нехай

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{\alpha_1^{l_v}}{\|\alpha^{l_v}\|},...,\frac{\alpha_n^{l_v}}{\|\alpha^{l_v}\|}\right)=\left(\alpha_1^{/},...,\alpha_n^{/}\right)\in S_{R^n}.$$

З урахуванням зазначеного вище, обмеженості послідовності $\left\{\theta^l\right\}_{l=1}^{\infty}$ (існує $\lim\limits_{l\to\infty}\theta^l$) з (4.2) одержимо, що

$$\max_{1\leq j\leq m_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{/}\mathrm{Re} f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)\right)\leq 0,$$

що суперечить (3.1). Отже, $\left\{\alpha^l\right\}_{l=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю просторуR^n . Нехай $\alpha^*=(\alpha_1^*,...,\alpha_n^*)$ її часткова границя. Переконаємось , що вектор $g^*=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^* g_i$ є екстремальним елементом для величини (1.1). Існує підпослідовність $\left\{\alpha^{l_\nu}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{\alpha^l\right\}_{l=1}^{\infty}$ така, що

$$\lim_{\nu\to\infty}\alpha^{l_\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\left(\alpha_1^{l_\nu},...,\alpha_n^{l_\nu}\right)=(\alpha_1^*,...,\alpha_n^*)=\alpha^*.$$

Припустимо, що існує підпослідовність $\left\{\alpha^{l_{\nu_\mu}}\right\}_{\mu=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{\alpha^{l_\nu}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ така, що

$$\varepsilon^{l_{\nu_r}} = \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{l_{\nu_\mu}} g_i\left(s\right)-y\right\| - \theta^{l_{\nu_\mu}}, \mu = 1, 2, ...$$

Без обмеження загальності будемо вважати, що уже

$$\varepsilon^{l_\nu} = \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{l_\nu} g_i\left(s\right)-y\right\| - \theta^{l_\nu} =$$

$$= \mathrm{Re} f_{m_{l_\nu}+1}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{l_\nu} g_i\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right) - y_{m_{l_\nu}+1}\right) - \theta^{l_\nu}, \nu = 1, 2, ... \quad (4.3)$$

Тоді на кроці $l_\nu + 1$ до обмежень задачі лінійного програмування типу (3.2)-(3.4) , яка розв'язана на кроці l_ν, додаємо обмеження

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \mathrm{Re} f_{m_{l_\nu}+1}\left(g_i\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right)\right) - \theta \le \mathrm{Re} f_{m_{l_\nu}+1}\left(y_{m_{l_\nu}+1}\right), \nu = 1, 2, ...$$

Тому

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{l_\nu+1} \mathrm{Re} f_{m_{l_\nu}+1}\left(g_i\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right)\right) - \theta^{l_\nu+1} \le \mathrm{Re} f_{m_{l_\nu}+1}\left(y_{m_{l_\nu}+1}\right),$$

$$\nu = 1, 2, ... \quad (4.4)$$

Маємо далі з урахуванням (4.3) , (4.4) , що

$$\left|\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{l_\nu} g_i\left(s\right)-y\right\| -\right.$$

$$\left.-\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{l_\nu+1} \mathrm{Re} f_{m_{l_\nu}+1}\left(g_i\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right)\right) - \mathrm{Re} f_{m_{l_\nu}+1}\left(y_{m_{l_\nu}+1}\right)\right)\right| =$$

$$= \left|\mathrm{Re} f_{m_{l_\nu}+1}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{l_\nu} g_i\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right) - y_{m_{l_\nu}+1}\right) -\right.$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{l_\nu+1}\mathrm{Re}f_{m_{l_\nu}+1}\left(g_i\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right)\right)-\mathrm{Re}f_{m_{l_\nu}+1}\left(y_{m_{l_\nu}+1}\right)\right)\Bigg|=$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i^{l_\nu}-\alpha_i^{l_\nu+1}\right)\mathrm{Re}f_{m_{l_\nu}+1}\left(g_i\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right)\right)\right|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_i^{l_\nu}-\alpha_i^{l_\nu+1}\right|\|g_i\|,\nu=1,2,....$$

Оскільки $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\alpha_1^{l_\nu},...,\alpha_n^{l_\nu}\right)=\left(\alpha_1^*,...,\alpha_n^*\right)$, то звідси, неперервності функції $(\alpha_1,...,\alpha_n)\in R^n\to\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a(s)}\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i g_i(s)-y\right\|$ по $(\alpha_1,...,\alpha_n)\in R^n$ (див. твердження 2.1 [3]) та нерівності (4.1) випливає, що

$$\lim_{\nu\to\infty}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{l_\nu}g_i(s)-y\right\|=$$

$$=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{*}g_i(s)-y\right\|=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\|g^*(s)-y\|=$$

$$=\lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{l_\nu+1}\mathrm{Re}f_{m_{l_\nu}+1}\left(g_i\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right)\right)-\mathrm{Re}f_{m_{l_\nu}+1}\left(y_{m_{l_\nu}+1}\right)\right)\le$$

$$\le\lim_{\nu\to\infty}\theta^{l_\nu+1}=\lim_{\nu\to\infty}\theta^{l}\le\alpha_a^*(V\cap D). \tag{4.5}$$

З (4.3) , (4.5) одержуємо

$$0\le\lim_{\nu\to\infty}\varepsilon^{l_\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{l_\nu}g_i(s)-y\right\|-\lim_{\nu\to\infty}\theta^{l_\nu}=$$

$$=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{*}g_i(s)-y\right\|-\lim_{\nu\to\infty}\theta^{l}\le 0,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\varepsilon^{l_\nu}=0. \tag{4.6}$$

Маємо, що

$$\max_{t\in S}\inf_{y\in b(t)}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{l_\nu}g_i(t)-y\right\|=\max_{t\in S}\inf_{y\in b(t)}\left\|g^{l_\nu}(t)-y\right\|\le\varepsilon^{l_\nu},$$

$$\nu=1,2,....$$

Внаслідок цього , рівності (4.6) та неперервності функції $(\alpha_1,...,\alpha_n)\in R^n\to\max\limits_{t\in S}\inf\limits_{y\in b(t)}\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i g_i(t)-y\right\|$ по $(\alpha_1,...,\alpha_n)\in R^n$ робимо висновок, що

$$\lim_{\nu\to\infty}\max_{t\in S}\inf_{y\in b(t)}\left\|g^{l_\nu}(t)-y\right\|=\max_{t\in S}\inf_{y\in b(t)}\|g^*(t)-y\|=0. \qquad (4.7)$$

Згідно з твердженням 2.4 $g^*\in V\cap D$. Тоді з (4.5) одержимо, що

$$\alpha_a^*(V\cap D)\le\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\|g^*(s)-y\|\le\lim_{\nu\to\infty}\theta^l\le\alpha_a^*(V\cap D),$$

$$\lim_{l\to\infty}\theta^l=\alpha_a^*(V\cap D)=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\|g^*(s)-y\|.$$

Звідси випливає, що g^* є екстремальним елементом для величини (1.1).

Нехай тепер для всіх ν, починаючи з деякого номера,

$$\varepsilon^{l_\nu}=\max_{t\in S}\inf_{y\in b(t)}\left\|g^{l_\nu}(t)-y\right\|=\max_{t\in S}\inf_{y\in b(t)}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{l_\nu}g_i(t)-y\right\|=$$

$$=\mathrm{Re}\varphi_{p_{l_\nu}+1}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{l_\nu}g_i\left(t_{p_{l_\nu}+1}\right)\right)-\sup_{y\in b\left(t_{p_{l_\nu}+1}\right)}\mathrm{Re}\varphi_{p_{l_\nu}+1}(y). \qquad (4.8)$$

Тоді на кроці $l_\nu+1$ до обмежень задачі лінійного програмування типу (3.2)–(3.4), яка розв'язана на кроці l_ν, додається обмеження

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathrm{Re}\varphi_{p_{l_\nu}+1}\left(g_i\left(t_{p_{l_\nu}+1}\right)\right)\le\sup_{y\in b\left(t_{p_{l_\nu}+1}\right)}\mathrm{Re}\varphi_{p_{l_\nu}+1}(y).$$

Зрозуміло, що

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_\nu+1} \mathrm{Re}\varphi_{p_{l_\nu}+1}\left(g_i\left(t_{p_{l_\nu}+1}\right)\right) \leq \sup_{y\in b\left(t_{p_{l_\nu}+1}\right)} \mathrm{Re}\varphi_{p_{l_\nu}+1}(y)\,. \tag{4.9}$$

З (4.8), (4.9) випливає, що

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i^{l_\nu+1}-\alpha_i^{l_\nu}\right)\mathrm{Re}\varphi_{p_{l_\nu}+1}\left(g_i\left(t_{p_{l_\nu}+1}\right)\right) \leq -\varepsilon^{l_\nu} \leq 0.$$

Тому

$$\lim_{\nu\to\infty} \varepsilon^{l_\nu} = 0. \tag{4.10}$$

Звідси та з (4.8) маємо, що

$$\max_{t\in S}\inf_{y\in b(t)}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^* g_i(t) - y\right\| = \max_{t\in S}\inf_{y\in b(t)}\|g^*(t)-y\| = 0.$$

Згідно з твердженням 2.4 $g^* \in V\cap D$. Оскільки

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^{l_\nu}(s)-y\right\| - \theta^{l_\nu} \leq \varepsilon^{l_\nu}$$

і має місце рівність (4.10), то

$$\alpha_a^*(V\cap D) \leq \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\|g^*(s)-y\| \leq \lim_{l\to\infty}\theta^l.$$

Вище було встановлено (див. (4.1)) , що $\lim\limits_{l\to\infty}\theta^l \leq \alpha_a^*(V\cap D)$. Тому і в розглядуваному випадку

$$\lim_{l\to\infty}\theta^l = \alpha_a^*(V\cap D) = \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\|g^*(s)-y\|\,.$$

Звідси випливає, що g^* є екстремальним елементом для величини (1.1). Крім того, внаслідок (4.8) та (4.10)

$$\lim_{\nu\to\infty}\max_{t\in S}\inf_{y\in b(t)}\left\|g^{l_\nu}(t)-y\right\| = 0. \tag{4.11}$$

З (4.7) та (4.11) випливає, що

$$\lim_{l\to\infty} \max_{t\in S} \inf_{y\in b(t)} \left\| g^{l}\left(t\right) - y \right\| = 0.$$

Теорему доведено.

1. *Kelly J.E.* The "Cutting plane"methods for solving convex programs // SIAM J. — 1960. — **8**, №4. — P. 703–712.

2. *Гнатюк В. О., Гнатюк Ю. В., Гудима У. В.* Модифікація методу січних площин на випадок апроксимації компактнозначного відображення чебишовським підпростором з додатковим обмеженням // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фіз.-мат. науки : зб. наук. праць / Кам'янець-Подільський нац. ун-т, Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України . —Кам'янець–Подільський : Кам'янець—Подільський нац. ун-т, 2008. — Вип. 1. — С. 51–60.

3. *Гудима У.В.* Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень // — Укр. мат. журн. — 2005.— **57**, №12. — С. 1601–1619.

4. *Иосида К.* Функциональный анализ.— М.: Мир, 1967. — 624 с.

5. *Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г.* Линейное программирование (теория и конечные методы).—М.: Физматгиз, 1963. — 774 с.