Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2010, Т.7, №1, 49-67

УДК 517.984.5

А. С. Горюнов, В. А. Михайлец
(Институт математики НАН Украины, Киев)

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДВУЧЛЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ*

We propose a regularization of the formal differential expression of order $m \geqslant 3$

$$l(y) = i^m y^{(m)}(t) + q(t)y(t),\ t \in (a, b),$$

applying quasi-derivatives. The distribution coefficient q *is supposed to have a primitive* $Q \in L([a,b];\mathbb{C})$*. For the symmetric case* ($Q = \overline{Q}$) *self-adjoint and maximal dissipative extensions of the minimal operator and its generalized resolvents are described. The resolvent approximation with resrect to the norm of the considered operators is also investigated.*

The case $m = 2$ *for* $Q \in L_2([a,b];\mathbb{C})$ *was investigated earlier.*

Предлагается регуляризация формального дифференциального выражения порядка $m \geqslant 3$

$$l(y) = i^m y^{(m)}(t) + q(t)y(t),\ t \in (a, b),$$

посредством квазипроизводных. Предполагается, что коэффициент-распределение q *имеет первообразную* $Q \in L([a,b];\mathbb{C})$*. В симметрическом случае* ($Q = \overline{Q}$) *описаны самосопряженные, максимальные диссипативные расширения минимального оператора и его обобщенные резольвенты. Изучена сходимость резольвент рассмотренных операторов по норме.*

Случай $m = 2$ *при* $Q \in L_2([a,b];\mathbb{C})$ *исследован ранее.*

1. Введение. Рассмотрим на конечном интервале $\mathcal{J} := (a, b)$ формальное дифференциальное выражение порядка m

$$l(y) = i^m y^{(m)}(t) + q(t)y(t), \quad t \in \mathcal{J}. \tag{1}$$

Если $m = 2$ и коэффициент $q \in L(\mathcal{J};\mathbb{R})$, то дифференциальное

*Исследование поддержано Государственным Фондом Фундаментальных Исследований Украины, грант № 28.1/017.

уравнение $l(y) = f$ является классическим уравнением Штурма–Лиувилля и изучено весьма полно. Современное изложение этой теории приведено во многих монографиях (см. [1] и приведенные там ссылки). Как выяснилось после работы [2], многие положения этой теории распространяются на существенно более общий случай

$$q = Q', \quad Q \in L_2\,(\mathcal{J};\mathbb{C})\,, \tag{2}$$

где производная понимается в смысле обобщенных функций. В частности, это относится к физически содержательному случаю, когда q является мерой Радона на $\overline{\mathcal{J}}$ либо имеет неинтегрируемые точечные особенности. Подобные операторы задолго до этого возникали в различных задачах математической физики и исследовались очень многими авторами, главным образом, при помощи средств теории операторов (см. [3] и ссылки там).

В связи с этим представляет интерес задача о регуляризации дифференциального выражения (1) с сингулярным коэффициентом $q \notin L\,(\mathcal{J};\mathbb{C})$ при произвольном значении $m > 2$. Ее решению посредством специально подобранных квазипроизводных и посвящена данная работа. При этом условие (2) нам удалось ослабить до нижеследующего:

$$q = Q', \quad Q \in L\,(\mathcal{J};\mathbb{C}) =: L_1. \tag{3}$$

Случай общего выражения Штурма–Лиувилля

$$l(y) = -(p(t)y')' + q(t)y, \quad t \in \mathcal{J}$$

с сингулярными коэффициентами

$$q = Q', \quad 1/p,\, Q/p,\, Q^2/p \in L_1$$

с аналогичных позиций исследован авторами ранее в работе [4].

Работа структурирована следующим образом.

В разделе 2 мы вводим регуляризацию формального дифференциального выражения (1) в предположении (3) и определяем соответствующие максимальный и минимальный операторы в гильбертовом пространстве $L_2\,(\mathcal{J};\mathbb{C}) =: L_2$.

В разделе 3 найдены достаточные условия равномерной резольвентной аппроксимации расширений построенного минимального оператора $L_{\min}$ семейством операторов того же класса.

В разделе 4 в предположении симметричности минимального оператора описываются все его самосопряженные и максимальные диссипативные расширения в терминах однородных граничных условий канонического вида. Эти расширения параметризуются соответственно унитарными операторами и сжатиями в $\mathbb{C}^m$. Такая параметризация является биективной и непрерывной.

В разделе 5 описываются все обобщенные резольвенты минимального оператора в полуплоскости $\mathrm{Im}\lambda < 0$.

2. Регуляризация сингулярного выражения. Рассмотрим формальное дифференциальное выражение (1) порядка $m \geq 3$ при условиях (3).

Введем последовательно квазипроизводные:

$$\begin{aligned}
&D^{[k]}y(t) := y^{(k)}(t), \quad k = \overline{0, m-2},\\
&D^{[m-1]}y(t) := y^{(m-1)}(t) + i^{-m}Q(t)y(t),\\
&D^{[m]}y(t) := (D^{[m-1]}y(t))' - i^{-m}Q(t)D^{[1]}y(t).
\end{aligned}$$

В условиях (3) они являются квазипроизводными по Шину–Зеттлу (см. [6], Sec. 1).

Поэтому формальное выражение (1) можно корректно определить как квазидифференциальное выражение Шина–Зеттла

$$l[y] := i^m D^{[m]}.$$

Определение 1. *Решение задачи Коши для резольвентного уравнения*

$$l[y] - \lambda y = f \in L_2, \qquad (D^{[k]}y)(c) = \alpha_k, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{4}$$

где $c \in \overline{\mathcal{J}}$ *и* $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{0, m-1}$, *определяется как первая компонента решения задачи Коши для соответствующей системы дифференциальных уравнений первого порядка*

$$w'(t) = A_\lambda(t)w(t) + \varphi(t), \qquad w(c) = (\alpha_0, \alpha_1, ...\alpha_{m-1}) \tag{5}$$

где вектор-функция $w(t) := (D^{[0]}y(t), D^{[1]}y(t), ..., D^{[m-1]}y(t))$, *квад-*

ратная матрица-функция

$$A_\lambda(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -i^{-m}Q(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ i^{-m}\lambda & i^{-m}Q(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in L_1^{m\times m}, \qquad (6)$$

а вектор-функция $\varphi(t) := (0, 0, ..., 0, i^{-m}f(t)) \in L_1^m$.

Лемма 1. *Задача Коши* (4) *при условии* (3) *имеет решение на* $\overline{\mathcal{J}}$. *Оно единственно.*

Доказательство. Задача (5) при $A_\lambda(\cdot) \in L_1^{m\times m}$ имеет и притом единственное решение при каждом $c \in \overline{\mathcal{J}}$ и $(\alpha_0, \alpha_2, ...\alpha_{m-1}) \in \mathbb{C}^m$ в силу теоремы 1.2.1 монографии [1]. Поэтому утверждение леммы следует из определения 1 и указанной теоремы.

Введенное квазидифференциальное выражение $l[y]$ порождает в гильбертовом пространстве L_2 (см. [6, 7]) *максимальный* квазидифференциальный оператор

$$L_{\max} : y \to l[y],$$

$$\mathrm{Dom}(L_{\max}) = \left\{ y \,\middle|\, D^{[k]}y \in AC(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C}), k = \overline{0, m-1},\ D^{[m]}y \in L_2 \right\}.$$

Минимальный квазидифференциальный оператор определяется как сужение оператора $L_{\max}$ на линейное многообразие

$$\mathrm{Dom}(L_{\min}) := \left\{ y \in \mathrm{Dom}(L_{\max}) \,\middle|\, D^{[k]}y(a) = D^{[k]}y(b) = 0,\ k = \overline{0, m-1} \right\}.$$

Лемма 2. *Если в равенствах* (1) *и* (3) *заменить выбранную первообразную* Q *произвольной*

$$\widetilde{Q} := Q + c, \quad c \in \mathbb{C},$$

то операторы $L_{\max}$, $L_{\min}$ *не изменятся.*

Доказательство. Покажем, что оператор $L_{\max} = L_{\max}(Q)$, совпадает с оператором $\widetilde{L}_{\max} = L_{\max}(\widetilde{Q})$. Обозначим через

$\widetilde{D}^{[0]}y, \widetilde{D}^{[1]}y, ..., \widetilde{D}^{[m]}y$ квазипроизводные, соответствующие отличной от Q первообразной $\widetilde{Q}$.

Пусть $y \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$. Прямым подсчетом находим, что

$$\begin{aligned}
&\widetilde{D}^{[0]}y = D^{[0]}y \in AC(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\widetilde{D}^{[m-2]}y = D^{[m-2]}y \in AC(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C}),\\
&\widetilde{D}^{[m-1]}y = D^{[m-1]}y + i^{-m}c\widetilde{D}^{[0]}y \in AC(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C}),\\
&\widetilde{D}^{[m]}y = D^{[m]}y \in L_2.
\end{aligned}$$

Это означает, что

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Dom}(L_{\max}) \subset \mathrm{Dom}(\widetilde{L}_{\max}) =\\
&\qquad = \left\{ y \,\middle|\, \widetilde{D}^{[k]}y \in AC(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{C}), k = \overline{0, m-1}, \widetilde{D}^{[m]}y \in L_2 \right\}.
\end{aligned}$$

Аналогично показывается, что $\mathrm{Dom}(L_{\max}) \supset \mathrm{Dom}(\widetilde{L}_{\max})$.
Наконец,

$$\widetilde{L}_{\max}y = i^m \widetilde{D}^{[m]}y = i^m D^{[m]}y = L_{\max}y, \quad y \in \mathrm{Dom}(L_{\max}).$$

Покажем теперь, что $\widetilde{L}_{\min} = L_{\min}$.
Пусть $y \in \mathrm{Dom}(L_{\min})$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\widetilde{D}^{[0]}y(a) = D^{[0]}y(a) = 0,\\
&\widetilde{D}^{[0]}y(b) = D^{[0]}y(b) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\widetilde{D}^{[m-2]}y(a) = D^{[m-2]}y(a) = 0,\\
&\widetilde{D}^{[m-2]}y(b) = D^{[m-2]}y(b) = 0,\\
&\widetilde{D}^{[m-1]}y(a) = D^{[m-1]}y(a) + i^{-m}c\widetilde{D}^{[0]}y(a) = 0 + 0 = 0,\\
&\widetilde{D}^{[m-1]}y(b) = D^{[m-1]}y(b) + i^{-m}c\widetilde{D}^{[0]}y(b) = 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Это означает, что $\mathrm{Dom}(L_{\min}) \subset \mathrm{Dom}(\widetilde{L}_{\min})$. Аналогично устанавливается, что $\mathrm{Dom}(L_{\min}) \supset \mathrm{Dom}(\widetilde{L}_{\min})$.

Поскольку $\widetilde{L}_{\min}y = \widetilde{L}_{\max}y = L_{\max}y = L_{\min}y$ на функциях $y \in \mathrm{Dom}(L_{\min})$, то лемма доказана.

Рассмотрим наряду с (1) формально сопряженное дифференциальное выражение

$$l^{+}(y) = i^m y^{(m)}(t) + \overline{q}(t)y(t),$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Обозначим через $L^{+}_{\max}$ и $L^{+}_{\min}$ порождаемые им максимальный и минимальный операторы в пространстве L_2. Тогда из результатов монографии [6] для общих квазидифференциальных выражений Шина–Зеттла и приведенного нами выше следует

Теорема 1. *Операторы $L_{\min}, L^{+}_{\min}, L_{\max}, L^{+}_{\max}$ являются плотно заданными и замкнутыми в пространстве L_2,*

$$L^{*}_{\min} = L^{+}_{\max}, \quad L^{*}_{\max} = L^{+}_{\min}.$$

Если функция q вещественнозначна, то оператор $L_{\min} = L^{+}_{\min}$ является симметрическим с индексом дефекта (m, m) и

$$L^{*}_{\min} = L_{\max}, \quad L^{*}_{\max} = L_{\min}.$$

3. Аппроксимация резольвенты. Рассмотрим семейство квазидифференциальных выражений вида (1) $l_\varepsilon[y]$ с коэффициентами $q_\varepsilon = Q'_\varepsilon \in L_1$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Соответствующие им квазипроизводные будем обозначать через $D^{[0]}_\varepsilon y, D^{[1]}_\varepsilon y, ..., D^{[m]}_\varepsilon y$.

В гильбертовом пространстве L_2 с нормой $\|\cdot\|_2$ такие выражения при каждом ε порождают операторы $L^{\varepsilon}_{\min}$, $L^{\varepsilon}_{\max}$. Пусть матрицы $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, а векторы

$$\mathcal{Y}_\varepsilon(a) := \{D^{[0]}_\varepsilon y(a), D^{[1]}_\varepsilon y(a), \ldots, D^{[m-1]}_\varepsilon y(a)\} \in \mathbb{C}^m,$$

$$\mathcal{Y}_\varepsilon(b) := \{D^{[0]}_\varepsilon y(b), D^{[1]}_\varepsilon y(b), \ldots, D^{[m-1]}_\varepsilon y(b)\} \in \mathbb{C}^m.$$

Зададим для каждого фиксированного значения ε операторы

$$L_\varepsilon y = l_\varepsilon[y],$$

$$\mathrm{Dom}(L_\varepsilon) = \{\, y \in \mathrm{Dom}\,(L^{\varepsilon}_{\max}) |\, \alpha(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(a) + \beta(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(b) = 0\}\,.$$

Очевидно, что

$$L^{\varepsilon}_{\min} \subset L_{\varepsilon} \subset L^{\varepsilon}_{\max}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Будем обозначать через $\rho(L)$ резольвентное множество оператора L. Напомним, что операторы L_ε сходятся при $\varepsilon \to 0+$ к оператору L_0 в смысле равномерной резольвентной сходимости, $L_\varepsilon \xrightarrow{R} L_0$, если существует $\mu \in \mathbb{C}$ такое, что $\mu \in \rho(L_0)$, $\mu \in \rho(L_\varepsilon)$ для достаточно малых ε и

$$\|(L_\varepsilon - \mu)^{-1} - (L_0 - \mu)^{-1}\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Это определение не зависит от выбора $\mu \in \rho(L_0)$ [8].

Введем обозначение $c^{\vee}(t) := \int\limits_a^t c(s)ds$.

Основным результатом этого раздела является

Теорема 2. *Пусть $\rho(L_0)$ непусто и при $\varepsilon \to 0+$ выполняются условия:*

1) $\|(Q_\varepsilon - Q_0)^{\vee}\|_C \to 0$;

2) $\alpha(\varepsilon) \longrightarrow \alpha(0), \quad \beta(\varepsilon) \longrightarrow \beta(0)$.

Тогда $L_\varepsilon \xrightarrow{R} L_0$.

Замечание 1. Условие $\|Q_\varepsilon - Q_0\|_1 \to 0$, $\varepsilon \to 0+$, очевидно, достаточно для выполнения условия 1).

Доказательство теоремы 2 основывается на одном вспомогательном результате.

Следуя работам [9, 10], введем

Определение 2. *Обозначим через $\mathcal{M}^n(\mathcal{J}) =: \mathcal{M}^n$, $n \in \mathbb{N}$ класс всех параметризованных числом ε матриц-функций*

$$R(\cdot; \varepsilon) : [0, \varepsilon_0] \to L_1^{n \times n},$$

для которых решение задачи Коши

$$Z'(t; \varepsilon) = R(t; \varepsilon) Z(t; \varepsilon), \quad Z(a; \varepsilon) = I_n$$

удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \|Z(\cdot; \varepsilon) - I_n\|_C = 0,$$

где $\|\cdot\|_C$ – sup-*норма.*

В работе [10] установлена следующая общая теорема.

Теорема 3. *Пусть для краевой задачи*

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad t \in \mathcal{J}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \tag{7}$$

$$U_\varepsilon y(\cdot;\varepsilon) = 0, \tag{8}$$

где матрицы-функции $A(\cdot,\varepsilon) \in L_1^{n\times n}$, *вектор-функции* $f(\cdot,\varepsilon) \in L_1^n$, *а линейные непрерывные операторы*

$$U_\varepsilon : C(\overline{\mathcal{J}};\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}^n,\ n \in \mathbb{N},$$

выполнены условия:

1) *однородная предельная краевая задача* (7), (8) с $\varepsilon = 0$ *и* $f(\cdot;0) \equiv 0$ *имеет только тривиальное решение;*
2) $A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0) \in \mathcal{M}^n$;
3) $\|U_\varepsilon - U_0\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0+$.

Тогда для достаточно малых ε *существуют матрицы Грина* $G(t,s;\varepsilon)$ *задач* (7), (8) *и на квадрате* $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$

$$\|G(\cdot,\cdot;\varepsilon) - G(\cdot,\cdot;0)\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to 0+, \tag{9}$$

где $\|\cdot\|_\infty$ – *норма в пространстве* L_∞.

Замечание 2. Условие 3) теоремы 3 нельзя заменить более слабым условием сильной сходимости операторов $U_\varepsilon \xrightarrow{s} U_0$ [10]. Однако, как нетрудно убедиться, для двухточечных краевых операторов

$$U_\varepsilon y := B_1(\varepsilon)y(a) + B_2(\varepsilon)y(b), \quad B_k(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad k \in \{1,2\},$$

как условие сильной, так и условие равномерной сходимости равносильны тому, что

$$\|B_k(\varepsilon) - B_k(0)\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0+, \quad k \in \{1,2\}.$$

Приведенное определение класса $\mathcal{M}^n$ не является конструктивным. Имеются различные достаточные условия принадлежности матричной функции $R(\cdot;\varepsilon)$ классу $\mathcal{M}^n$. В частности, из результатов работы А. Ю. Левина [11] следует

Лемма 3. *Пусть* $R(\cdot;\varepsilon):[0,\varepsilon_0]\to L_1^{n\times n}$. *Если при* $\varepsilon\to 0+$ *выполнено одно из четырех (неэквивалентных между собой) условий:*

$$
\begin{aligned}
&(\alpha)\quad \|R(\cdot;\varepsilon)\|_1 = O(1),\\
&(\beta)\quad \|R^\vee(\cdot;\varepsilon)R(\cdot;\varepsilon)\|_C \to 0,\\
&(\gamma)\quad \|R(\cdot;\varepsilon)R^\vee(\cdot;\varepsilon)\|_C \to 0,\\
&(\Delta)\quad \|R^\vee(\cdot;\varepsilon)R(\cdot;\varepsilon) - R(\cdot;\varepsilon)R^\vee(\cdot;\varepsilon)\|_C \to 0,
\end{aligned}
$$

то условие $\|R^\vee(\cdot;\varepsilon)\|_C \to 0$, $\varepsilon \to 0+$ *равносильно включению* $R(\cdot;\varepsilon)\in\mathcal{M}^n$.

Следующее утверждение позволит нам редуцировать теорему 2 к теореме 3.

Лемма 4. *Функция* $y(t)$ *является решением краевой задачи*

$$l_\varepsilon[y](t) = f(t;\varepsilon)\in L_2, \quad \varepsilon\in[0,\varepsilon_0], \tag{10}$$

$$\alpha(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(a) + \beta(\varepsilon)\mathcal{Y}_\varepsilon(b) = 0 \tag{11}$$

тогда и только тогда, когда вектор-функция

$$w(t) = (D_\varepsilon^{[0]}y(t), D_\varepsilon^{[1]}y(t), ..., D_\varepsilon^{[m-1]}y(t))$$

является решением краевой задачи

$$w'(t) = A(t;\varepsilon)w(t) + \varphi(t;\varepsilon), \tag{12}$$

$$\alpha(\varepsilon)w(a) + \beta(\varepsilon)w(b) = 0, \tag{13}$$

где квадратная матрица-функция

$$A(\cdot;\varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ -i^{-m}Q(\cdot;\varepsilon) & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & i^{-m}Q(\cdot;\varepsilon) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in L_1^{m\times m}, \tag{14}$$

а $\varphi(\cdot;\varepsilon) := (0,0,...,0,i^{-m}f(\cdot;\varepsilon)) \in L_1^m$.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} (D_\varepsilon^{[0]}y(t))' = D_\varepsilon^{[1]}y(t) \\ (D_\varepsilon^{[1]}y(t))' = D_\varepsilon^{[2]}y(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (D_\varepsilon^{[m-3]}y(t))' = D_\varepsilon^{[m-2]}y(t) \\ (D_\varepsilon^{[m-2]}y(t))' = -i^{-m}Q_\varepsilon(t)D_\varepsilon^{[0]}y(t) + D_\varepsilon^{[m-1]}y(t) \\ (D_\varepsilon^{[m-1]}y(t))' = i^{-m}Q_\varepsilon(t)D_\varepsilon^{[1]}y(t) + i^{-m}f(t;\varepsilon) \end{cases}$$

Если $y(\cdot)$ – решение уравнения (10), то из определения квазипроизводных следует, что $y(\cdot)$ есть решение этой системы. С другой стороны, положив $w(t) = (D_\varepsilon^{[0]}y(t), D_\varepsilon^{[1]}y(t), ..., D_\varepsilon^{[m-1]}y(t))$ и $\varphi(t;\varepsilon) = (0,0,...,0,i^{-m}f(t;\varepsilon))$, данную систему можно записать в виде уравнения (12).

Учитывая, что $\mathcal{Y}_\varepsilon(a) = w(a)$, $\mathcal{Y}_\varepsilon(b) = w(b)$, легко видеть, что краевые условия (11) эквивалентны краевым условиям (13).

В силу леммы 4 из предположения

($\mathcal{E}$) *Однородная краевая задача*

$$D_0^{[m]}y(t) = 0, \quad \alpha(0)\mathcal{Y}_0(a) + \beta(0)\mathcal{Y}_0(b) = 0$$

имеет только тривиальное решение

следует, что однородная краевая задача

$$w'(t) = A(t;\varepsilon)w(t), \quad \alpha(\varepsilon)w(a) + \beta(\varepsilon)w(b) = 0$$

также имеет только тривиальное решение.

Лемма 5. *Пусть для задачи* (12), (13) *при достаточно малых* ε *существует матрица Грина*

$$G(t,s,\varepsilon) = (g_{ij}(t,s))_{i,j=1}^m \in L_\infty^{m\times m}$$

Тогда существует функция Грина $\Gamma(t,s;\varepsilon)$ *полуоднородной краевой задачи* (10), (11) *и*

$$\Gamma(t,s;\varepsilon) = i^{-m}g_{1m}(t,s;\varepsilon) \qquad \text{п. в.}$$

Доказательство. Согласно определению матрицы Грина, единственное решение задачи (12), (13) записывается в виде

$$w_\varepsilon(t) = \int\limits_a^b G(t,s;\varepsilon)\varphi(s;\varepsilon)ds, \quad t \in \overline{\mathcal{J}}.$$

В силу леммы 4 последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{cases} D_\varepsilon^{[0]} y_\varepsilon(t) = \int\limits_a^b g_{1m}(t,s;\varepsilon) i^{-m} f(s;\varepsilon)ds \\ D_\varepsilon^{[1]} y_\varepsilon(t) = \int\limits_a^b g_{2m}(t,s;\varepsilon) i^{-m} f(s;\varepsilon)ds, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ D_\varepsilon^{[m]} y_\varepsilon(t) = \int\limits_a^b g_{mm}(t,s;\varepsilon) i^{-m} f(s;\varepsilon)ds, \end{cases}$$

где $y_\varepsilon(\cdot)$ – единственное решение задачи (10), (11). Отсюда следует утверждение леммы 5.

Доказательство теоремы 2. В силу условия 1) теоремы 2 можно, не уменьшая общности, считать, что $0 \in \rho(L_0)$.

Покажем, что $\sup\limits_{\|f\|_2=1} \|L_\varepsilon^{-1} f - L_0^{-1} f\| \to 0$, $\varepsilon \to 0+$.

Уравнение $L_\varepsilon^{-1} f = y_\varepsilon$ эквивалентно тому, что $L_\varepsilon y_\varepsilon = f$, т. е. y_ε является решением задачи (10), (11). При этом из включения $0 \in \rho(L_0)$ следует, что выполняется предположение $(\mathcal{E})$.

Обозначим $r(\cdot;\varepsilon) := i^{-m} Q(\cdot;\varepsilon) - i^{-m} Q(\cdot;0)$. Тогда

$$A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -r(\cdot;\varepsilon) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r(\cdot;\varepsilon) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0))^\vee = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -r^\vee(\cdot;\varepsilon) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r^\vee(\cdot;\varepsilon) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где матрица-функция $A(\cdot;\varepsilon)$ задана формулой (14).

Легко видеть, что

$$(A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0))\,(A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0))^{\vee}= \\ =(A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0))^{\vee}\,(A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0))\,.$$

Поэтому матричная функция $A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)$ при $m\geq 3$ удовлетворяет условию (Δ) леммы 3.

Очевидно, что условие $\|\,(A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0))^{\vee}\,\|_C\to 0$, $\varepsilon\to 0+$ эквивалентно условию 1) теоремы 2. Поэтому из леммы 3 вытекает, что выполнены условия теоремы 3 для задачи (12), (13).

Это значит, что существуют матрицы Грина $G(t,s;\varepsilon)$ задач (12), (13), и выполняется предельное соотношение (9). Учитывая лемму 5, это влечет предельное равенство

$$\|\Gamma(\cdot,\cdot;\varepsilon)-\Gamma(\cdot,\cdot;0)\|_\infty\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,.$$

Тогда

$$\|L_\varepsilon^{-1}-L_0^{-1}\|=\sup_{\|f\|_2=1}\|\textstyle\int_a^b[\Gamma(t,s;\varepsilon)-\Gamma(t,s;0)]f(s)ds\|_2\leq \\ \leq(b-a)^{1/2}\sup_{\|f\|_2=1}\|\textstyle\int_a^b|\Gamma(t,s;\varepsilon)-\Gamma(t,s;0)||f(s)|ds\|_C\leq \\ \leq(b-a)\|\Gamma(\cdot,\cdot;\varepsilon)-\Gamma(\cdot,\cdot;0)\|_\infty\to 0,\quad \varepsilon\to 0+,$$

что влечет утверждение теоремы 2.

4. Расширения симметрического минимального оператора. Всюду далее будем предполагать, что функции q и Q вещественнозначны. Это условие влечет формальную самосопряженность выражения $l[y]$ (см. [6]) и, согласно теореме 1, симметричность оператора $L_{\min}$. Поэтому содержателен вопрос об описании (при помощи однородных краевых условий) некоторых классов (самосопряженных, максимальных диссипативных) расширений в гильбертовом пространстве L_2 симметрического оператора $L_{\min}$. Для ответа на него мы будем использовать понятие пространства граничных значений.

Определение 3. *Пусть L — замкнутый симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с равными (конечными или бесконечными) дефектными числами. Тройка (H,Γ_1,Γ_2), где H — вспомогательное гильбертово пространство, а Γ_1, Γ_2 – линейные* *отображения* $\mathrm{Dom}(L^*)$ *в* H, *называется пространством граничных значений (сокращенно ПГЗ) симметрического оператора* L, *если:*

1) *для любых* $f, g \in \mathrm{Dom}\,(L^*)$

$(L^* f, g)_{\mathcal{H}} - (f, L^* g)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_H - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_H\,,$

2) *для любых векторов* $f_1, f_2 \in H$ *существует вектор* $f \in \mathrm{Dom}\,(L^*)$ *такой, что* $\Gamma_1 f = f_1$, $\Gamma_2 f = f_2$.

Из определения ПГЗ следует, что $f \in \mathrm{Dom}\,(L)$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_1 f = \Gamma_2 f = 0$. ПГЗ существует для любого симметрического оператора с равными ненулевыми дефектными числами (см. [12] и приведенные там ссылки). Оно всегда не единственно.

Следующий результат является ключевым для дальнейшего.

Основная лемма. *Пусть* Γ_1, Γ_2 *– линейные отображения из* $\mathrm{Dom}(L_{\max})$ *в* $\mathbb{C}^m$ *такие, что:*

при $m = 2n, n \geq 2$,

$$\Gamma_1 y := i^{2n} \begin{pmatrix} -D^{[2n-1]}y(a), \\ ..., \\ (-1)^n D^{[n]}y(a), \\ D^{[2n-1]}y(b), \\ ..., \\ (-1)^{n-1} D^{[n]}y(b) \end{pmatrix}, \Gamma_2 y := \begin{pmatrix} D^{[0]}y(a), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(a), \\ D^{[0]}y(b), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(b) \end{pmatrix}$$

а при $m = 2n+1, n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma_1 y := i^{2n+1} \begin{pmatrix} -D^{[2n]}y(a), \\ ..., \\ (-1)^n D^{[n+1]}y(a), \\ D^{[2n]}y(b), \\ ...., \\ (-1)^{n-1} D^{[n+1]}y(b), \\ \alpha D^{[n]}y(b) + \beta D^{[n]}y(a) \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_2 y := \begin{pmatrix} D^{[0]}y(a), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(a), \\ D^{[0]}y(b), \\ ..., \\ D^{[n-1]}y(b), \\ \gamma D^{[n]}y(b) + \delta D^{[n]}y(a) \end{pmatrix},$$

где числа $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = \frac{(-1)^n}{2} + i, \delta = \frac{(-1)^{n+1}}{2} + i.$

Тогда тройка $(\mathbb{C}^m, \Gamma_1, \Gamma_2)$ *является пространством граничных значений оператора* $L_{\min}$.

Замечание 3. Приведенные значения коэффициентов можно заменить произвольными наборами чисел, которые удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} \alpha\overline{\gamma} + \overline{\alpha}\gamma = (-1)^n, \\ \beta\overline{\delta} + \overline{\beta}\delta = (-1)^{n+1}, \\ \alpha\overline{\delta} + \overline{\beta}\gamma = 0, \\ \beta\overline{\gamma} + \overline{\alpha}\delta = 0, \\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \end{cases} \tag{15}$$

Обозначим через L_K сужение оператора $L_{\max}$ на множество функций $y(t) \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$, удовлетворяющих однородному краевому условию канонического вида

$$(K - I)\,\Gamma_1 y + i\,(K + I)\,\Gamma_2 y = 0, \tag{16}$$

где K — ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^m$.

В сочетании с результатами [12] Основная лемма влечет следующее описание самосопряженных расширений $L_{\min}$:

Теорема 4. *Каждое* L_K, *где* K *– унитарный оператор в пространстве* $\mathbb{C}^m$, *является самосопряженным расширением оператора* $L_{\min}$. *Обратно, для каждого самосопряженного расширения* $\widetilde{L}$ *оператора* $L_{\min}$ *найдется унитарный оператор* K *такой, что* $\widetilde{L} = L_K$. *Соответствие между унитарными операторами* $\{K\}$ *и расширениями* $\{\widetilde{L}\}$ *биективно.*

Замечание 4. Из теоремы 2 и теоремы 4 вытекает, что отображение $K \to L_K$ является не только биективным, но и непрерывным.

Более точно, если унитарные операторы K_n сходятся по норме к оператору K, то

$$\left\|(L_K-\lambda)^{-1}-(L_{K_n}-\lambda)^{-1}\right\| \to 0,\ n\to\infty,\ \mathrm{Im}\lambda\neq 0.$$

При этом, поскольку множество унитарных операторов в конечномерном пространстве $\mathbb{C}^m$ компактно в метрике нормы оператора, то верно и обратное утверждение, то есть отображение

$$K\to (L_K-\lambda)^{-1},\ \mathrm{Im}\lambda\neq 0$$

является при каждом фиксированном $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ гомеоморфизмом.

Напомним известное определение.

Определение 4. *Плотно заданный линейный оператор L в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называют диссипативным, если*

$$\mathrm{Im}\,(Lf,f)_{\mathcal{H}}\geq 0,\quad f\in \mathrm{Dom}(L)$$

и максимальным диссипативным, если, кроме того, у оператора L нет нетривиальных диссипативных расширений в пространстве $\mathcal{H}$.

В частности, каждый симметрический оператор – диссипативный, а самосопряженный – максимальный диссипативный. Поэтому для симметрического квазидифференциального оператора $L_{\min}$ можно поставить вопрос об описании всех его максимальных диссипативных расширений. Согласно теореме Р. Филлипса [12, 13] *каждое диссипативное расширение симметрического оператора является сужением его сопряженного.* Поэтому любое максимальное диссипативное расширение оператора $L_{\min}$ является сужением оператора $L_{\max}$.

Параметрическое описание всех максимальных диссипативных расширений симметрического квазидифференциального оператора $L_{\min}$ дает

Теорема 5. *Каждое L_K, где K – сжатие в пространстве $\mathbb{C}^m$, является максимально диссипативным расширением L_K оператора $L_{\min}$. Обратно, для каждого максимального диссипативного расширения $\widetilde{L}$ оператора $L_{\min}$ найдется сжатие K такое, что $\widetilde{L}=L_K$.*

Соответствие между сжатиями $\{K\}$ *и расширениями* $\{\widetilde{L}\}$ *биективно.*

Замечание 5. Отображение

$$K \to (L_K - \lambda)^{-1}\,,\; Im\lambda < 0$$

является при каждом фиксированном λ гомеоморфизмом (см. замечание 4).

Перейдем к доказательствам сформулированных результатов. Доказательству Основной леммы предпошлем две леммы, являющиеся частными случаями соответствующих утверждений для общих квазидифференциальных выражений (см. [6]).

Лемма 6. *Пусть* $y, z \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b \left(D^{[m]}y \cdot \overline{z} - y \cdot \overline{D^{[m]}z}\right) dx = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} D^{[m-k]}y \cdot \overline{D^{[k-1]}z}\,\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Лемма 7. *Для произвольных наборов комплексных чисел* $\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{m-1}\}$, $\{\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{m-1}\}$ *существует функция* $y \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$ *такая, что*

$$D^{[k]}y(a) = \alpha_k, \quad D^{[k]}y(b) = \beta_k, \quad k = 0, 1, ..., m-1.$$

Доказательство Основной леммы. Достаточно показать, что тройка $(\mathbb{C}^m, \Gamma_1, \Gamma_2)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) определения ПГЗ с $\mathcal{H} = L_2$. Согласно теореме 1, $L^*_{\min} = L_{\max}$. Согласно лемме 6

$$(L_{\max}y, z) - (y, L_{\max}z) = i^m \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} D^{[m-k]}y \cdot \overline{D^{[k-1]}z}\,\Big|_{x=a}^{x=b}\,.$$

Однако легко подсчитать, что в случае $m = 2n$

$$(\Gamma_1 y, \Gamma_2 z) = i^{2n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} D^{[2n-k]}y \cdot \overline{D^{[k-1]}z}\,\Big|_{x=a}^{x=b}\,,$$

и

$$(\Gamma_2 y, \Gamma_1 z) = i^{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} (-1)^{k} D^{[2n-k]}y \cdot \overline{D^{[k-1]}z}\,\Big|_{x=a}^{x=b}\,.$$

Это показывает, что выполняется условие 1). Выполнение условия 2) следует непосредственно из леммы 7.

В случае $m = 2n+1$ введем обозначения :

$$\Gamma_1 =: (\Gamma_{1a}, \Gamma_{1b}, \Gamma_{1ab}),$$

$$\Gamma_2 =: (\Gamma_{2a}, \Gamma_{2b}, \Gamma_{2ab}),$$

где

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1a} &= i^{2n+1}\left(-D^{[2n]}y(a), ..., (-1)^n D^{[n+1]}y(a)\right),\\
\Gamma_{1b} &= i^{2n+1}\left(D^{[2n]}y(b), ..., (-1)^{n+1} D^{[n+1]}y(a)\right),\\
\Gamma_{1ab} &= i^{2n+1}\left(\alpha D^{[n]}y(b) + \beta D^{[n]}y(a)\right),\\
\Gamma_{2a} &= \left(D^{[0]}y(a), ..., D^{[n-1]}y(a)\right),\\
\Gamma_{2b} &= \left(D^{[0]}y(b), ..., D^{[n-1]}y(b)\right),\\
\Gamma_{2ab} &= \gamma D^{[n]}y(b) + \delta D^{[n]}y(a).
\end{aligned}$$

Тогда легко проверить, что

$$(\Gamma_{1a}y, \Gamma_{2a}z) = i^{2n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}D^{[2n-k]}y(a)\cdot\overline{D^{[k-1]}z(a)},$$

$$(\Gamma_{2a}y, \Gamma_{1a}z) = i^{2n+1}\sum_{k=n+2}^{2n+1}(-1)^{k}D^{[2n-k]}y(a)\cdot\overline{D^{[k-1]}z(a)},$$

$$(\Gamma_{1b}y, \Gamma_{2b}z) = i^{2n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}D^{[2n-k]}y(b)\cdot\overline{D^{[k-1]}z(b)},$$

$$(\Gamma_{2b}y, \Gamma_{1b}z) = i^{2n+1}\sum_{k=n+2}^{2n+1}(-1)^{k}D^{[2n-k]}y(b)\cdot\overline{D^{[k-1]}z(b)},$$

$$\begin{aligned}
&(\Gamma_{1ab}y, \Gamma_{2ab}z) - (\Gamma_{2ab}y, \Gamma_{1ab}z) =\\
&\qquad = i^{2n+1}(-1)^n\left(D^{[n]}y(b)\cdot\overline{D^{[n]}z(b)} - D^{[n]}y(a)\cdot\overline{D^{[n]}z(a)}\right).
\end{aligned}$$

Из приведенных соотношений следует, что выполняется условие 1) определения 3. Выполнение условия 2) следует из леммы 7 и последнего из соотношений (15).

Доказательство теоремы 4 и теоремы 5. Утверждения теорем следуют из Основной леммы и теоремы 1.6 гл. 3 монографии [12] для ПГЗ абстрактного симметрического оператора.

5. Обобщенные резольвенты. Напомним известное

Определение 5. *Обобщенной резольвентой замкнутого симметрического оператора L называют операторную функцию R_λ комплексного параметра $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, допускающую представление вида*

$$R_\lambda f = P^+ \left(L^+ - \lambda I^+\right)^{-1} f, \quad f \in \mathcal{H},$$

где L^+ – какое-либо самосопряженное расширение оператора L с выходом, вообще говоря, в более широкое, чем $\mathcal{H}$, пространство $\mathcal{H}^+$, I^+ – единичный оператор в $\mathcal{H}^+$, P^+ – оператор ортогонального проектирования $\mathcal{H}^+$ на $\mathcal{H}$.

Операторная функция R_λ $(\mathrm{Im}\lambda \neq 0)$ является обобщенной резольвентой симметрического оператора L тогда и только тогда, когда

$$(R_\lambda f, g)_{\mathcal{H}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,(F_\mu f, g)}{\mu - \lambda}, \quad f, g \in \mathcal{H},$$

где F_μ – обобщенная спектральная функция оператора L. Это означает, что операторная функция F_μ, $\mu \in \mathbb{R}$, обладает следующими свойствами [14]:

1^0. При $\mu_2 > \mu_1$ разность $F_{\mu_2} - F_{\mu_1}$ является ограниченным неотрицательным оператором;

2^0. $F_{\mu+} = F_\mu$ при всех вещественных μ;

3^0. При любом $x \in \mathcal{H}$

$$\lim_{\mu\to-\infty} ||F_\mu x||_{\mathcal{H}} = 0, \quad \lim_{\mu\to+\infty} ||F_\mu x - x||_{\mathcal{H}} = 0.$$

Параметрическое *внутреннее* описание всех обобщенных резольвент оператора $L_{\min}$ дает

Теорема 6. *Имеется взаимно однозначное соответствие между обобщенными резольвентами оператора $L_{\min}$ и краевыми задачами*

$$l[y] = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda) - I)\,\Gamma_1 y + i\,(K(\lambda) + I)\,\Gamma_2 y = 0,$$

где λ *— комплексное число,* $\mathrm{Im}\lambda < 0$, $h(x) \in L_2$, *а параметр* $K(\lambda)$ *— регулярная в нижней полуплоскости операторная функция в пространстве* $\mathbb{C}^m$ *такая, что* $||K(\lambda)|| \leq 1$. *Оно задается равенством*

$$R_\lambda h = y,\ \mathrm{Im}\lambda < 0.$$

Доказательство. В силу Основной леммы утверждение теоремы вытекает из теоремы 1 работы [15].

1. *Zettl A.* Sturm–Liouville Theory. — Providence: American Mathematical Society, 2005. — 328 p.
2. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. — 1999. — **66**, № 6. — С. 897–912.
3. *Albeverio S., Gestezy F., Hoegh-Krohn R., Holden H.* Solvable models in quantum mechanics. — New York: Springer-Verlag, 1988. — 452 p.
4. *Goriunov A.S., Mikhailets V.A.* Regularization of singular Sturm–Liouville equations // Methods Funct. Anal. Topology. — 2010. — № 2. — С. 120–130.
5. *Шин Д.* О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Мат. сборник. — 1943. — **13(55)**, №1. — С. 39–70.
6. *Everitt W.N., Markus L.* Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-differential Operators. — Providence: American Mathematical Society, 1999. — 187 p.
7. *Zettl A.* Formally self-adjoint quasi-differential operators // Rocky Mountain J. Math. — 1975. — **5**, № 3. — P. 453–474.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972. — 740 с.
9. *Михайлец В.А., Рева Н.В.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доп. НАН України. — 2008. — № 9. — С. 23–27.
10. *Михайлец В.А., Рева Н.В.* Непрерывность по параметру решений общих краевых задач // Зб. праць Ін-ту математики. — 2008. — **5**, № 1. — С. 227–239.
11. *Левин А.Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ // Докл. АН СССР. — 1967. — **176**, № 4. — С. 774–777.
12. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. — К.: Наук. думка, 1984. — 284 с.
13. *Phillips R.S.* Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1959. — **90**. — P. 193–254.
14. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966. — 544 с.
15. *Брук В.М.* Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сборник. — 1976. —**100(142)**, № 2(6). — С. 210–216.