Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2010, Т.7, №1, 72-93

УДК 517.5

**І.В. Кальчук, У.З. Грабова**
(Волинський національний університет, Луцьк)

# НАБЛИЖЕННЯ $(\psi, \beta)$–ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ МАЛОЇ ГЛАДКОСТІ ТРИГАРМОНІЙНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА*

*The problem of Kolmogorov–Nikolskii are solved on the classes of $(\psi, \beta)$–differentiable periodical functions with small smoothness on approximation by threeharmonic integrals of Poisson in uniform metric.*

*Розв'язано задачу Колмогорова–Нікольського на класах $(\psi, \beta)$–диференційовних періодичних функцій малої гладкості при наближенні тригармонійними інтегралами Пуассона в рівномірній метриці.*

**1. Постановка задачі та деякі історичні відомості.** Нехай $C$ — простір $2\pi$-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається рівністю $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; $L_\infty$ — простір $2\pi$-періодичних вимірних істотно обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\limits_t |f(t)|$; $L$ — простір $2\pi$-періодичних сумовних на періоді функцій, в якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

Нехай $U(\rho; x) = U_n(\rho; f; x)$ є полігармонічною функцією порядку $n$ в одиничному крузі $|z| < 1$ $(z = \rho e^{ix})$, тобто є розв'язком рівняння

$$\Delta^n U(\rho; x) = 0, \tag{1}$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ — оператор Лапласа в полярних координатах і $\Delta^n := \Delta\left(\Delta^{n-1}\right)$.

Розв'язок рівняння (1) із заданими граничними умовами

$$U(\rho; x)\Big|_{\rho=1} = f(x);\ \frac{\partial^k}{\partial \rho^k} U(\rho; x)\Big|_{\rho=1} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{2}$$

*Виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект Ф25.1/043).

де $f(x)$ — сумовна $2\pi$-періодична функція, далі будемо позначати $P_n(\rho;f;x) = U_n(\rho;f;x)$, $n \in N$. Згідно з формулою (3.127.5) монографії М.П. Тімана [1] розв'язок крайової задачі (1)–(2) можна записати у вигляді

$$P_n(\rho;f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\rho;n)\left(a_i \cos ix + b_i \sin ix\right),\ 0 \le \rho < 1,$$

де $a_i$, $b_i$ — коефіцієнти Фур'є функції $f$,

$$\lambda_i\left(\rho;n\right) = \rho^i \sum_{k=0}^{n-1} \left(1-\rho^2\right)^k Q(k;i),$$

$$Q(k;i) = \frac{i(i+2)(i+4)\ldots(i+2k-2)}{k!2^k},\ i=0,1,\ldots,\ (Q(k;0)=1).$$

Поклавши $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, $\delta > 0$, величину $P_n(\rho;f;x)$ запишемо у вигляді

$$P_n(\delta;f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\delta;n)\left(a_i \cos ix + b_i \sin ix\right), \tag{3}$$

$$\lambda_i\left(\delta;n\right) = e^{-\frac{i}{\delta}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^k Q(k;i).$$

При $n = 1,2,3$ з формули (3) отримуємо величини

$$P_1(\delta;f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

$$P_2(\delta;f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{k}{2}(1-e^{-\frac{2}{\delta}})\right) e^{-\frac{k}{\delta}}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

$$P_3(\delta;f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(\delta)\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

де $\lambda_\delta(k) = \left(1+\frac{1}{4}(3-e^{-\frac{2}{\delta}})(1-e^{-\frac{2}{\delta}})k+\frac{1}{8}(1-e^{-\frac{2}{\delta}})^2k^2\right)e^{-\frac{k}{\delta}}$. Ці величини називають відповідно інтегралом Пуассона, бігармонійним інтегралом Пуассона та тригармонійним інтегралом Пуассона функції $f$.

О. І. Степанцем (див., наприклад, [2, 3]) введено класи періодичних функцій наступним чином.

Нехай $f(x) \in L$ і $S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ — ряд Фур'є функції $f$.

Нехай, далі, $\psi(k)$ — довільна фіксована функція натурального аргументу і $\beta$ — фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left( a_k \cos\left(kx + \frac{\pi\beta}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\pi\beta}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції $\varphi$, то цю функцію називають $(\psi, \beta)$-похідною функції $f(x)$ і позначають через $f_\beta^\psi(x)$. Множину усіх функцій $f(x)$, які задовольняють таку умову, позначають через $L_\beta^\psi$. Якщо $f \in L_\beta^\psi$, і крім того, $f_\beta^\psi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина функцій із $L$, то записують, що $f \in L_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Далі покладемо $L_\beta^\psi \cap C = C_\beta^\psi$ і $L_\beta^\psi \mathfrak{N} \cap C = C_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Якщо в якості $\mathfrak{N}$ виступають множини $S_\infty^0 = \{\varphi \in L_\infty : \|\varphi\|_\infty \le 1,\ \varphi \perp 1\}$ і $S_1^0 = \{\varphi \in L_1 : \|\varphi\|_1 \le 1,\ \varphi \perp 1\}$, то множину $L_\beta^\psi S_1^0$ позначають через $L_{\beta,1}^\psi$, а множину $C_\beta^\psi S_\infty^0$ — через $C_{\beta,\infty}^\psi$.

При $\psi(k) = k^{-r},\ r > 0$, класи $C_{\beta,\infty}^\psi$ співпадають з класами $W_{\beta,\infty}^r$, введеними Б. Надем [4], і $f_\beta^\psi(x) = f_\beta^{(r)}(x)$ — $(r, \beta)$-похідна в розумінні Вейля–Надя. У випадку $\beta = r, r \in N$, класи $W_{\beta,\infty}^r$ співпадають з класами Соболєва $W_\infty^r$, а у випадку $\beta = r + 1, r \in N$, — з класами спряжених функцій $\overline{W}_\infty^r$.

Послідовності $\psi(k)$, що входять в означення $(\psi, \beta)$-похідних, взагалі кажучи, можуть бути довільними. Але, як показав О.І. Степанець [3], в багатьох випадках можна обмежитись без істотних втрат загальності лише додатними опуклими донизу послідовностями $\psi(k)$, які задовольняють умову $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(k) = 0$.

Будемо вважати, що послідовність $\psi(k)$ є звуженням на множину натуральних чисел функцій неперервного аргументу $t \ge 1$ з множини

$$\mathfrak{M} = \big\{\psi(t) : \psi(t) > 0, \quad \psi(t_1) - 2\psi((t_1 + t_2)/2) + \psi(t_2) \ge 0$$

$$\forall t_1, t_2 \in [1,\infty), \lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0\big\}.$$

Як показано в [3], будь-яка сумовна (неперервна) функція $f$ обов'язково має $(\psi,\beta)$-похідну, яка теж є сумовною (неперервною) і при цьому $\psi \in \mathfrak{M}$.

Із множини $\mathfrak{M}$ виділяють підмножини

$$\mathfrak{M}' = \big\{\psi \in \mathfrak{M} : \int\limits_1^\infty \frac{\psi(t)}{t} dt < \infty\big\},$$

$$\mathfrak{M}_0 = \big\{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu\,(\psi; t) \leq K \;\forall t \geq 1\big\},$$

де $\eta(t) = \eta\,(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$, $\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t)-t}$, а $K$ — деяка стала, яка, можливо, залежить від $\psi$.

Дана робота присвячена вивченню асимптотичної поведінки при $\delta \to \infty$ величин

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P_3(\delta))_C = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \|f(x) - P_3(\delta; f; x)\|_C. \qquad (4)$$

Якщо в явному вигляді знайдено функцію $\varphi(\delta) = \varphi(\mathfrak{N}; \delta)$ таку, що при $\delta \to \infty$ $\mathcal{E}\,(\mathfrak{N}; P_3(\delta))_C = \varphi\,(\delta) + o\,(\varphi\,(\delta))$ , то, слідуючи О.І. Степанцю [3, с. 198], будемо казати, що розв'язана задача Колмогорова–Нікольського для класу $\mathfrak{N}$ та тригармонійного інтеграла Пуассона в рівномірній метриці.

Апроксимативні властивості методу наближення інтегралами Пуассона на класах $W^r_\infty$ і $\overline{W}^r_\infty, r \in N$, $W^r_{\beta,\infty}$, $r > 0$, $\beta \in R$, та $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ досліджувались в роботах І. П. Натансона [5], О. П. Тімана [6], Б. Надя [7], Е. Л. Штарка [8], В. О. Баскакова [9, 10], Л. І. Баусова [11], К. М. Жигалла і Ю. І. Харкевича [12, 13], Т. В. Жигалло і Ю. І. Харкевича [14, 15] та ін.

Апроксимативні властивості бігармонійних інтегралів Пуассона досліджувались на класах $W^r_\infty$, $r \in N$, $\overline{W}^r_\infty$, $r \in N \setminus \{1\}$, та $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ в роботах С. Канієва [16], P. Pych [17], Т. І. Аманова і Л. П. Фалалєєва [18], Ю. І. Харкевича і К. М. Жигалла [19, 20] та ін.

Оцінки відхилень довільними полігармонійними інтегралами Пуассона $P_n\,(\delta; f; x)$ в метриці простору $S^p$, $1 \leq p < \infty$, встановлені М.П. Тіманом в монографії [1, с. 248–260].

Що ж стосується питання про апроксимативні властивості тригармонійних інтегралів Пуассона на класах $(\psi,\beta)$-диференційовних функцій з точки зору задачі Колмогорова–Нікольського, то воно до цього часу залишалось відкритим. Тому постало питання про відшукання асимптотичних рівностей для величин (4).

**2. Асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень тригармонійних інтегралів Пуассона від функцій з класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$.** Для тригармонійного інтеграла Пуассона покладемо

$$\tau(u)=\begin{cases} \left(1-\left(1+\gamma u+\theta u^2\right)e^{-u}\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 0\le u\le \frac{1}{\delta},\\ \left(1-\left(1+\gamma u+\theta u^2\right)e^{-u}\right)\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, & u\ge \frac{1}{\delta}, \end{cases} \tag{5}$$

де $\gamma=\frac{1}{4}(3-e^{-\frac{2}{\delta}})(1-e^{-\frac{2}{\delta}})\delta$, $\quad\theta=\frac{1}{8}(1-e^{-\frac{2}{\delta}})^2\delta^2$, а $\psi(u)$ — функція, визначена і неперервна при всіх $u\ge 1$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що функція $\psi(u)$ така, що має неперервну другу похідну на $[1,\infty)$ (цей факт доведено в роботі [21, с. 64–67]).

Домовимося далі через $K$, $K_i$ позначати сталі, взагалі кажучи, в різних співвідношеннях різні.

Доведення основних результатів роботи базується на такій лемі, що є аналогом леми 1 із роботи [22].

**Лема.** *Якщо для функції $\tau(u)$, що задана за допомогою співвідношення* (5), *її перетворення*

$$\widehat{\tau}_\beta(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du \tag{6}$$

*є сумовним на всій числовій осі, то справедлива рівність*

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty};P_3(\delta))_C=\psi(\delta)A(\tau)+O\Bigg(\psi(\delta)\int\limits_{|t|\ge\frac{\delta\pi}{2}}|\widehat{\tau}_\beta(t)|\,dt\Bigg), \tag{7}$$

*де величина $A(\tau)$ визначається рівністю*

$$A(\tau)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt. \tag{8}$$

Переконатись в справедливості леми можна, повторюючи всі кроки доведення леми 1 із роботи [22].

Основним результатом роботи є наступне твердження.

**Теорема.** *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}'$, функція $g(u) = u^3\psi(u)$ є опукла вгору або донизу на $[b,\infty)$, $b \geq 1$. Тоді при $\delta \to \infty$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P_3(\delta))_C = \psi(\delta)A(\tau) + O\left(\frac{1}{\delta^3} + \frac{1}{\delta^4}\int\limits_1^{\delta} u^2\psi(u)du\right), \qquad (9)$$

*де величина $A(\tau)$ означається за допомогою рівності* (8) *і для неї справедлива оцінка*

$$A(\tau) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{1}{6\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta} u^2\psi(u)du + \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du\right) +$$

$$+O\left(1 + \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta} u\psi(u)du\right). \qquad (10)$$

**Доведення.** Перевіримо виконання умов леми. Для цього покажемо сумовність на всій дійсній осі перетворення $\widehat{\tau}_{\beta}(t)$ вигляду (6), тобто збіжність інтеграла (8).

Згідно з теоремою 1 роботи Л. І. Баусова [11, с. 24] для збіжності інтеграла (8) необхідно і достатньо, щоб збігалися інтеграли

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u\,|d\tau'(u)|\,, \qquad \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1|\,|d\tau'(u)|\,, \qquad (11)$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^{\infty}\frac{|\tau(u)|}{u}du, \qquad \int\limits_0^{1}\frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du. \qquad (12)$$

Для оцінки першого інтеграла з (11) розіб'ємо проміжок $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ на дві частини: $\left[0,\frac{1}{\delta}\right]$ і $\left[\frac{1}{\delta},\frac{1}{2}\right]$ $(\delta > 2)$. Враховуючи, що $\tau''(u) \geq 0$ при $u \in \left[0,\frac{1}{\delta}\right]$, а також нерівності

$$e^{-u} \leq 1, \quad e^{-u} \leq 1 - u + \frac{u^2}{2}, \quad u \geq 0, \qquad (13)$$

отримуємо співвідношення

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} u\,|d\tau'(u)| = (u\tau'(u)-\tau(u))\Big|_0^{\frac{1}{\delta}} =$$

$$= \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\bigg(\frac{1}{\delta}\Big(1-\gamma+\frac{1}{\delta}\,(\gamma-2\theta)+\frac{\theta}{\delta^2}\Big)e^{-\frac{1}{\delta}}-1+e^{-\frac{1}{\delta}}+\frac{\gamma}{\delta}e^{-\frac{1}{\delta}}+\frac{\theta}{\delta^2}e^{-\frac{1}{\delta}}\bigg) \leq$$

$$\leq \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\bigg(\frac{1}{\delta^2}(\frac{1}{2}-\theta)+\frac{1}{\delta^3}(\frac{\gamma}{2}+\theta)\bigg).$$

Враховуючи оцінки $\frac{1}{2}-\theta \leq \frac{1}{\delta}$, $\quad \frac{\gamma}{2}+\theta \leq \frac{3}{2}$, одержуємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} u\,|d\tau'(u)| = O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right). \tag{14}$$

Нехай тепер $u \in \left[\frac{1}{\delta},\frac{1}{2}\right]$. Покладемо

$$\tau_1(u)=\bigg(1-(1+\gamma u+\theta u^2)e^{-u}-\frac{4}{3\delta^2}u-\frac{1}{\delta}u^2-\frac{1}{6}u^3\bigg)\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, \tag{15}$$

$$\tau_2(u)=\left(\frac{4}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2\right)\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, \tag{16}$$

$$\tau_3(u)=\frac{1}{6}u^3\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, \tag{17}$$

тоді $\tau(u)=\tau_1(u)+\tau_2(u)+\tau_3(u)$ і

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u\,|d\tau'(u)| \leq \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u\,|d\tau_1'(u)| + \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u\,|d\tau_2'(u)| + \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u\,|d\tau_3'(u)|\,. \tag{18}$$

Знайдемо оцінку першого інтеграла із правої частини нерівності (18). Для цього дослідимо спочатку наступну функцію

$$\widetilde{\mu}(u)=1-(1+\gamma u+\theta u^2)e^{-u}-\frac{4}{3\delta^2}u-\frac{1}{\delta}u^2-\frac{1}{6}u^3. \tag{19}$$

Оскільки

$$\widetilde{\mu}'(u)=e^{-u}-\gamma e^{-u}+\gamma ue^{-u}-2\theta ue^{-u}+\theta u^2e^{-u}-\frac{4}{3\delta^2}-\frac{2}{\delta}u-\frac{1}{2}u^2,$$

$$\widetilde{\mu}''(u)=-e^{-u}+2\gamma e^{-u}-\gamma ue^{-u}-2\theta e^{-u}+4\theta ue^{-u}-\theta u^2e^{-u}-\frac{2}{\delta}-u,$$

$$\widetilde{\mu}(0)=0,\ \widetilde{\mu}'(0)=1-\gamma-\frac{4}{3\delta^2}<0,\ \widetilde{\mu}''(0)=-1+2\gamma-2\theta-\frac{2}{\delta}<0,$$

то можна показати, що при $u\geq 0$

$$\widetilde{\mu}(u)\leq 0,\quad \widetilde{\mu}'(u)<0,\quad \widetilde{\mu}''(u)<0. \tag{20}$$

Враховуючи (20), (13) та нерівності

$$e^{-u}\leq 1-u+\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}+\frac{u^4}{24},\quad e^{-u}\geq 1-u+\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6},$$

$$e^{-u}\geq 1-u,\quad u\geq 0,$$

одержуємо

$$|\widetilde{\mu}(u)|\leq u\Big(\gamma-1+\frac{4}{3\delta^2}\Big)+u^2\Big(\frac{1}{2}-\gamma+\theta+\frac{1}{\delta}\Big)+u^3\Big(\frac{\gamma}{2}-\theta\Big)+u^4\Big(\frac{1}{24}+\frac{\theta}{2}\Big),$$

$$|\widetilde{\mu}'(u)|\leq \Big(\gamma-1+\frac{4}{3\delta^2}\Big)+\frac{u}{2}\Big(\frac{1}{2}-\gamma+\theta+\frac{1}{\delta}\Big)+3u^2\Big(\frac{\gamma}{2}-\theta\Big)+u^3\Big(\frac{1}{6}+2\theta\Big),$$

$$|\widetilde{\mu}''(u)|\leq 2\Big(\frac{1}{2}-\gamma+\theta+\frac{1}{\delta}\Big)+6u\Big(\frac{\gamma}{2}-\theta\Big)+u^2\Big(\frac{1}{2}+6\theta\Big).$$

Далі, використовуючи також оцінки

$$\gamma-1+\frac{4}{3\delta^2}\leq\frac{3}{\delta^3},\quad \frac{1}{2}-\gamma+\theta+\frac{1}{\delta}\leq\frac{3}{\delta^2},\quad \frac{\gamma}{2}-\theta\leq\frac{2}{\delta},$$

$$\frac{1}{24}+\frac{\theta}{2}\leq 1,\quad \frac{1}{2}+6\theta\leq 3,\quad \frac{1}{6}+2\theta\leq 2,$$

будемо мати

$$|\widetilde{\mu}(u)|\leq\frac{3}{\delta^3}u+\frac{3}{\delta^2}u^2+\frac{2}{\delta}u^3+u^4, \tag{21}$$

$$|\widetilde{\mu}'(u)| \leq \frac{3}{\delta^3} + \frac{3}{2\delta^2}u + \frac{6}{\delta}u^2 + 2u^3, \tag{22}$$

$$|\widetilde{\mu}''(u)| \leq \frac{6}{\delta^2} + \frac{12}{\delta}u + 3u^2. \tag{23}$$

Згідно з рівностями (15), (19) при $u \geq \frac{1}{\delta}$

$$|d\tau_1'(u)| \leq \left(|\widetilde{\mu}(u)|\frac{\delta^2\psi''(\delta u)}{\psi(\delta)} + 2|\widetilde{\mu}'(u)|\frac{\delta|\psi'(\delta u)|}{\psi(\delta)} + |\widetilde{\mu}''(u)|\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}\right) du.$$

Тоді з урахуванням співвідношень (21)–(23), отримуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_1'(u)| \leq \frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{3}{\delta^3}u^2 + \frac{3}{\delta^2}u^3 + \frac{2}{\delta}u^4 + u^5\Big)\delta^2\psi''(\delta u)du +$$
$$+ \frac{2}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{3}{\delta^3}u + \frac{3}{2\delta^2}u^2 + \frac{6}{\delta}u^3 + 2u^4\Big)\delta|\psi'(\delta u)|du +$$
$$+ \frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{6}{\delta^2}u + \frac{12}{\delta}u^2 + 3u^3\Big)\psi(\delta u)du.$$

Проінтегруємо перший інтеграл в правій частині останньої нерівності частинами та застосуємо теореми 3.12.1 та 3.16.1 роботи [3], дістанемо

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_1'(u)| \leq K_1 + \frac{K_2}{\delta^4\psi(\delta)} + \frac{K_3}{\delta^4\psi(\delta)} \int\limits_1^{\delta} u^3\psi(u)du. \tag{24}$$

Для оцінки інтеграла із правої половини (24) розіб'ємо проміжок інтегрування $[1,\delta]$ на дві частини: $[1,b]$ і $[b,\delta]$, $\delta > b$.

Оскільки функція $g(u) = u^3\psi(u)$ є неперервною на $[1,b]$, а отже, обмеженою, то

$$\frac{1}{\delta^4\psi(\delta)} \int\limits_1^{b} u^3\psi(u)du \leq \frac{K}{\delta^4\psi(\delta)}. \tag{25}$$

Далі, функція $g(u) = u^3\psi(u)$ є опукла вгору або донизу при $u \geq b$, тому має місце оцінка

$$\frac{1}{\delta^4\psi(\delta)} \int\limits_b^\delta u^3\psi(u)du \leq K_1 + \frac{K_2}{\delta^3\psi(\delta)}. \tag{26}$$

З урахуванням (25) і (26), із (24) отримуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_1'(u)| = O\left(1 + \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right). \tag{27}$$

Оцінимо другий інтеграл з правої частини нерівності (18). Оскільки при $u \geq \frac{1}{\delta}$, згідно з рівністю (16),

$$\tau_2''(u) = \left(\frac{4}{\delta^2}u + \frac{1}{\delta}u^2\right)\frac{\delta^2\psi''(\delta u)}{\psi(\delta)} + 2\left(\frac{4}{\delta^2} + \frac{2}{\delta}u\right)\frac{\delta\psi'(\delta u)}{\psi(\delta)} + \frac{2}{\delta}\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)},$$

то

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_2'(u)| \leq \frac{\delta^2}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{\delta^2}u^2 + \frac{1}{\delta}u^3\right)\psi''(\delta u)du +$$

$$+\frac{2\delta}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{\delta^2}u + \frac{2}{\delta}u^2\right)|\psi'(\delta u)|du + \frac{2}{\delta\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u\psi(\delta u)du.$$

Далі, інтегруємо частинами перший інтеграл в правій частині останньої нерівності та застосовуємо теореми 3.12.1 та 3.16.1 із роботи [3], одержимо

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_2'(u)| \leq \frac{K_1}{\delta^2} + \frac{K_2}{\delta} + \frac{K_3}{\delta^3\psi(\delta)} + \frac{K_4}{\delta^3\psi(\delta)} \int\limits_1^\delta u\psi(u)du.$$

Отже, має місце оцінка

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_2'(u)| = O\bigg(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta} u\psi(u)du\bigg). \tag{28}$$

Оцінимо тепер третій інтеграл з правої частини нерівності (18). Для цього проміжок інтегрування $\left[\frac{1}{\delta}, \frac{1}{2}\right]$ розіб'ємо на дві частини: $\left[\frac{1}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right]$ та $\left[\frac{b}{\delta}, \frac{1}{2}\right]$, $\delta > 2b$.

Згідно з (17) $\tau_3''(u) = u\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)} + u^2\frac{\delta\psi'(\delta u)}{\psi(\delta)} + \frac{u^3}{6}\frac{\delta^2\psi''(\delta u)}{\psi(\delta)}$, тоді

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u|d\tau_3'(u)| \leq \frac{\delta^2}{6\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u^4\psi''(\delta u)du + \frac{\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u^3|\psi'(\delta u)|du +$$

$$+\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u^2\psi(\delta u)du.$$

Інтегруючи частинами перший інтеграл в правій частині останньої нерівності та застосовуючи теореми 3.12.1 та 3.16.1 із роботи [3], отримуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u|d\tau_3'(u)| \leq \frac{K_1}{\delta^3\psi(\delta)} + \frac{K_2}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u^2\psi(\delta u)du \leq \frac{K_1}{\delta^3\psi(\delta)} +$$

$$+\frac{K_2\psi(1)}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u^2du = \frac{K_3}{\delta^3\psi(\delta)}.$$

Отже, має місце оцінка

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u|d\tau_3'(u)| = O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right). \tag{29}$$

З (17) та опуклості функції $g(u) = u^3\psi(u)$ випливає, що

$$\int\limits_{\frac{b}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_3'(u)| = \left|\int\limits_{\frac{b}{\delta}}^{\frac{1}{2}} ud\tau_3'(u)\right| = O\left(1 + \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right). \tag{30}$$

Із співвідношень (14), (18), (27)–(30), остаточно одержимо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u|d\tau'(u)| = O\biggl(1 + \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta} u\psi(u)du\biggr). \tag{31}$$

Оцінимо тепер другий інтеграл з (11). При $u \in [\frac{1}{\delta}, \infty)$

$$\psi(\delta)d\tau'(u) = \Bigl(e^{-u}((2\gamma - 2\theta - 1) + u(4\theta - \gamma) - \theta u^2)\psi(\delta u) +$$

$$+ 2e^{-u}((1-\gamma) + u(\gamma - 2\theta) + \theta u^2)\delta\,|\psi'(\delta u)| +$$

$$+ (1 - (1 + \gamma u + \theta u^2)e^{-u})\delta^2\psi''(\delta u)\Bigr)du. \tag{32}$$

Враховуючи (32) та властивості функції $\psi \in \mathfrak{M}$, одержуємо, що

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u - 1|\,|d\tau'(u)| \le \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u|d\tau'(u)| \le$$

$$\le \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} ue^{-u}((2\gamma - 2\theta - 1) + u(4\theta - \gamma) - \theta u^2)\psi(\delta u)du +$$

$$+ \frac{2}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} ue^{-u}((1-\gamma) + u(\gamma - 2\theta) + \theta u^2)\delta|\psi'(\delta u)|du +$$

$$+ \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u(1 - (1 + \gamma u + \theta u^2)e^{-u})\delta^2\psi''(\delta u)du. \tag{33}$$

Оскільки при $u \ge 0$ мають місце оцінки:

$$1 - (1 + \gamma u + \theta u^2)e^{-u} \le 1, \tag{34}$$

$$ue^{-u}((1-\gamma) + u(\gamma - 2\theta) + \theta u^2) \le 2,$$

$$(2\gamma - 2\theta - 1) + u(4\theta - \gamma) - \theta u^2 \le 8, \tag{35}$$

і $\psi(\delta u) \leq \psi(\delta/2)$ при $u \in [\frac{1}{2}, \infty)$, $\quad \delta \geq 2,\quad$ то з (33) отримуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1|\,|d\tau'(u)| \leq \frac{\delta^2}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u\psi''(\delta\psi u)du +$$

$$+\frac{4\delta}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |\psi'(\delta u)|du + \frac{8\psi(\delta/2)}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} ue^{-u}du. \tag{36}$$

Інтегруємо частинами перший інтеграл в правій частині нерівності (36) та застосовуємо теореми 3.12.1 та 3.16.1 із роботи [3], тоді одержуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1||d\tau'(u)| = O(1). \tag{37}$$

Для оцінки першого інтеграла з (12) розіб'ємо проміжок інтегрування $[0, \infty)$ на три частини: $[0, \frac{1}{\delta}]$, $[\frac{1}{\delta}, 1]$ та $[1, \infty)$. Враховуючи, що $\tau''(u) \geq 0$ на $[0, \frac{1}{\delta}]$, та використовуючи співвідношення (5) і нерівність

$$1 - e^{-u} - \gamma ue^{-u} - \theta u^2 e^{-u} \leq \frac{2}{\delta^2}u + \frac{2}{\delta}u^2 + u^3, \quad u \geq 0, \tag{38}$$

отримуємо

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{\delta}} \frac{|\tau(u)|}{u}du = \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)} \int\limits_{0}^{\frac{1}{\delta}} (1 - e^{-u} - \gamma ue^{-u} - \theta u^2 e^{-u})\frac{du}{u} \leq$$

$$\leq \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)} \int\limits_{0}^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{2}{\delta^2} + \frac{2}{\delta}u + u^2\right) du \leq \frac{K}{\delta^3\psi(\delta)}. \tag{39}$$

Далі, із формул (5), (19), (21) випливають співвідношення

$$\Bigg| \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{\tau(u)}{u}du - \frac{4}{3\delta^2\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1} \psi(\delta u)du - \frac{1}{\delta\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1} u\psi(\delta u)du -$$

$$-\frac{1}{6\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1}u^2\psi(\delta u)du\Bigg|\le\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1}\frac{|\widetilde{\mu}(u)|}{u}\psi(\delta u)du\le$$

$$\le\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1}\left(\frac{3}{\delta^3}+\frac{3}{\delta^2}u+\frac{2}{\delta}u^2+u^3\right)\psi(\delta u)du=O\left(1+\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right).$$

Звідси

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1}\frac{|\tau(u)|}{u}du=\frac{4}{3\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta}\psi(u)du+\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta}u\psi(u)du+$$

$$+\frac{1}{6\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta}u^2\psi(u)du+O\left(1+\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right). \tag{40}$$

Із співвідношення (5), враховуючи, що функція $\psi(u)$ є спадна при $u\ge 1$, отримуємо

$$\left|\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\tau(u)}{u}-\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du\right|\le\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{e^{-u}(1+\gamma u+\theta u^2)}{u}\psi(\delta u)du\le$$

$$\le\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\infty}\left(\frac{e^{-u}}{u}+\gamma e^{-u}+\theta u e^{-u}\right)\psi(\delta u)du\le K. \tag{41}$$

Із співвідношень (39)–(41), враховуючи, що

$$\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta}\psi(u)du\le\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta}u\psi(u)du\le\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta}u^2\psi(u)du$$

і $\lim\limits_{\delta\to\infty}\int\limits_{1}^{\delta}u\psi(u)du\ge K$, будемо мати

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{|\tau(u)|}{u}du=\frac{1}{6\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta}u^2\psi(u)du+\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du+$$

$$+O\left(1+\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta}u\psi(u)du\right). \qquad (42)$$

Оцінимо тепер другий інтеграл з (12). Аналогічно до формули (39) роботи [23], можна показати, що для функції $\tau(u)$, заданої за допомогою співвідношення (5), для всіх $\psi\in\mathfrak{M}_0$ має місце рівність

$$\int\limits_0^1\frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du=\int\limits_0^1\frac{|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|}{u}du+O(H(\tau)), \quad (43)$$

де $H(\tau)$ означається за допомогою рівності

$$H(\tau)=|\tau(0)|+|\tau(1)|+\int\limits_0^{\frac{1}{2}}u\,|d\tau'(u)|+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}|u-1|\,|d\tau'(u)|,$$

а $\lambda(u)=(1+\gamma u+\theta u^2)e^{-u}$. Використовуючи те, що

$$\int\limits_0^1|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|\frac{du}{u}=\int\limits_0^1|e^{-1+u}-e^{-1-u}+\gamma(1-u)e^{-1+u}-$$

$$-\gamma(1+u)e^{-1-u}+\theta(1-u)^2e^{-1+u}-\theta(1+u)^2e^{-1-u}|\frac{du}{u}=O(1),$$

а також співвідношення (31), (37), (43), матимемо:

$$\int\limits_0^1\frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du=O\left(1+\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta}u\psi(u)du\right). \qquad (44)$$

Таким чином, застосовуючи теорему 1 із роботи Л. І. Баусова [11, с. 24], приходимо до висновку, що перетворення $\widehat{\tau}_\beta(t)$ функції $\tau(u)$, заданої у вигляді (5), сумовне на всій числовій осі. І тому, згідно з лемою, справедлива рівність (7). Із нерівностей (2.14) і (2.15) роботи Л. І. Баусова [11, с. 24] з урахуванням формул (31), (37), (42) і (44) отримуємо співвідношення (10).

Оцінимо залишковий член в правій частині рівності (7), представивши перетворення $\widehat{\tau}_\beta(t)$ вигляду (6) в такий спосіб:

$$\widehat{\tau}_\beta(t)=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}+\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\right)\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du. \tag{45}$$

Двічі інтегруючи частинами обидва інтеграли з (45) та беручи до уваги, що $\tau(0)=0$ і $\lim\limits_{u\to\infty}\tau(u)=\lim\limits_{u\to\infty}\tau'(u)=0$, одержуємо

$$\widehat{\tau}_\beta(t)=-\frac{1}{\pi t^2}\Bigg((1-\gamma)\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\cos\frac{\beta\pi}{2}+$$

$$+\frac{\delta\psi'(1)}{\psi(\delta)}\Big(1-(1+\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\theta}{\delta^2})e^{-\frac{1}{\delta}}\Big)\cos\Big(\frac{t}{\delta}+\frac{\beta\pi}{2}\Big)+$$

$$+\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}\tau''(u)\cos\Big(ut+\frac{\beta\pi}{2}\Big)+\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\tau''(u)\cos\Big(ut+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Bigg).$$

З останнього співвідношення, з урахуванням (38) та нерівності $1-\gamma\leq\frac{2}{\delta^2}$, дістаємо

$$\left|\widehat{\tau}_\beta(t)\right|\leq\frac{K_1}{t^2\delta^2\psi(\delta)}+\frac{1}{\pi t^2}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}+\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1}+\int\limits_1^{\infty}\right)|\tau''(u)|du. \tag{46}$$

Знайдемо оцінки інтегралів з правої частини співвідношення (46). Враховуючи, що $\tau''(u)\geq 0$ при $u\in[0,\frac{1}{\delta}]$ та що має місце нерівність (38), отримуємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}|\tau''(u)|du=\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}e^{-\frac{1}{\delta}}\left((1-\gamma)+\frac{\gamma-2\theta}{\delta}+\frac{\theta}{\delta^2}\right)-\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}(1-\gamma)=$$

$$=O\left(\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\right). \tag{47}$$

Нехай $u \in [\frac{1}{\delta}, 1]$. Міркуючи так само як і при оцінюванні першого інтеграла з (11) на проміжку $[\frac{1}{\delta}, \frac{1}{2}]$, можна показати, що справедлива оцінка

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1} |\tau''(u)|du = O\biggl(1 + \frac{1}{\delta^2\psi(\delta)} + \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta} u^2\psi(u)du\biggr). \tag{48}$$

Нехай тепер $u \in [1, \infty)$. Використовуємо співвідношення (32), тоді отримуємо

$$\int\limits_{1}^{\infty} |\tau''(u)|du \leq \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\infty} e^{-u}((2\gamma - 2\theta - 1) + u(4\theta - \gamma) - \theta u^2)\psi(\delta u)du +$$

$$+\frac{2\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\infty} e^{-u}((1-\gamma) + u(\gamma - 2\theta) + \theta u^2)|\psi'(\delta u)|du +$$

$$+\frac{\delta^2}{\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\infty}(1 - (1 + \gamma u + \theta u^2)e^{-u})\psi''(u)du.$$

Після цього, враховуючи нерівності (34), (35) і те, що при $u \geq 1$

$$e^{-u}((1-\gamma) + u(\gamma - 2\theta) + \theta u^2) \leq 2, \quad \psi(\delta u) \leq \psi(\delta),$$

можна переконатися, що

$$\int\limits_{1}^{\infty} |\tau''(u)|du \leq K. \tag{49}$$

Об'єднуємо формули (47)–(49) із (46), одержуємо

$$\bigl|\widehat{\tau}_\beta(t)\bigr| = O\biggl(\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)} + \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta} u^2\psi(u)du\biggr)\frac{1}{t^2}.$$

Звідси

$$\int\limits_{|t|\geq\frac{\delta\pi}{2}} |\widehat{\tau}_\beta(t)|dt = O\bigg(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)} + \frac{1}{\delta^4\psi(\delta)}\int\limits_1^\delta u^2\psi(u)du\bigg). \qquad (50)$$

Із співвідношень (50) та (7) випливає, що має місце рівність (9). Теорему доведено.

**Наслідок 1.** *Якщо виконуються умови теореми,* $\sin\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$ *і* $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t) = \infty$, *де* $\alpha(t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}$, *то при* $\delta \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(C^\psi_{\beta,\infty}; P_3(\delta)\right)_C = \frac{2}{\pi}\Big|\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big|\int\limits_\delta^\infty \frac{\psi(u)}{u}du + O\left(\psi(\delta)\right). \qquad (51)$$

**Доведення.** Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_0'$ і $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t) = \infty$, то для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $u_0 \geq 1$, що при $u > u_0$ $(u^\varepsilon\psi(u))' > 0$, тобто функція $u^\varepsilon\psi(u)$ зростає, починаючи з деякого числа $u_0$ і $\lim\limits_{u\to\infty}u^\varepsilon\psi(u) = \infty$. А тому, при достатньо великих $\delta$ і $0 < \varepsilon < 3$

$$\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^\delta u^2\psi(u)du = \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^\delta \frac{u^{\varepsilon+2}\psi(u)}{u^\varepsilon}du \leq$$

$$\leq \frac{\delta^\varepsilon\psi(\delta)}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^\delta u^{2-\varepsilon}du = O(1). \qquad (52)$$

Використовуючи правило Лопіталя і те, що $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t) = \infty$, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int\limits_x^\infty \frac{\psi(u)}{u}du}{\psi(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x|\psi'(x)|} = \infty. \qquad (53)$$

Тепер враховуємо, що

$$\frac{1}{\delta^3} + \frac{1}{\delta^4}\int\limits_1^\delta u^2\psi(u)du = o(\psi(\delta)), \qquad (54)$$

а також співвідношення (52) та (53), тоді із (9), (10) отримуємо (51).

Прикладом функцій, які задовольняють умови наслідку 1 є функції вигляду $\psi(u) = \frac{1}{\ln^\alpha(u+K)}$, де $\alpha > 1$, $K > 0$.

**Наслідок 2.** *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}_0$, $\sin\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$, *функція* $u^3\psi(u)$ *є опукла вгору або донизу на* $[b,\infty), b \geq 1$, *та існує* $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t)$, *де* $\alpha(t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}$, *і*

$$\lim_{u\to\infty} u^3\psi(u) = \infty, \tag{55}$$

$$\lim_{\delta\to\infty} \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)} \int\limits_1^\delta u^2\psi(u)du = \infty, \tag{56}$$

*тоді при* $\delta \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(C^\psi_{\beta,\infty}; P_3(\delta)\right)_C = \frac{1}{3\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{\delta^3}\int\limits_1^\delta u^2\psi(u)du + O\left(\psi(\delta)\right). \tag{57}$$

**Доведення.** Якщо функція $\psi$ задовольняє умови (55) і (56), то використовуючи правило Лопіталя, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int\limits_1^x u^2\psi(u)du}{x^3\psi(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\psi(x)}{3x^2\psi(x)+x^3\psi'(x)} = \frac{1}{3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\psi'(x)}{\psi(x)}} = \infty.$$

Звідси випливає

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\psi'(x)}{\psi(x)} = -3. \tag{58}$$

Враховуючи (53) та (58), одержуємо, що $\int\limits_\delta^\infty \frac{\psi(u)}{u}du = O(\psi(\delta))$.

Використовуючи останню оцінку та співвідношення (9), (10), (54)–(56), отримуємо (57).

Відмітимо, що умови наслідку 2 задовольняють, наприклад, функції вигляду $\psi(u) = \frac{1}{u^3}\ln^\alpha(u+K), K > 0, \alpha > 0$.

**Наслідок 3.** *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}_0$, $\sin\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$, *функція* $u^3\psi(u)$ *є опукла донизу на* $[b,\infty), b \geq 1$, *і*

$$\lim_{u\to\infty} u^3\psi(u) = K < \infty, \tag{59}$$

$$\lim_{\delta\to\infty} \int\limits_1^{\delta} u^2\psi(u)du = \infty, \tag{60}$$

*тоді при $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P_3(\delta)\right)_C = \frac{1}{3\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{\delta^3}\int\limits_1^{\delta} u^2\psi(u)du + O\left(\frac{1}{\delta^3}\right). \tag{61}$$

**Доведення.** Оскільки функція $u^3\psi(u)$ опукла донизу на проміжку $[b, \infty)$, $b \geq 1$, та задовольняє умову (59), то можемо зробити висновок, що вона монотонно спадає при $u \geq b$. Отже, при $\delta > b$ будемо мати

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{\psi(u)}{u}du = \int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{u^3\psi(u)}{u^4}du \leq \delta^3\psi(\delta)\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{1}{u^4}du = O(\psi(\delta)),$$

$$\psi(\delta) = O\Big(\frac{1}{\delta^3}\Big).$$

Використовуючи останні оцінки та співвідношення (9), (10), (59) та (60) отримуємо (61).

Прикладом функцій $\psi$, для яких має місце наслідок 3, є функції вигляду $\psi(u) = \frac{1}{u^3}\operatorname{arctg}^{-1} u$, $\psi(u) = \frac{1}{u^3}(K + e^{-u})$, $\psi(u) = \frac{1}{u^3\ln^{\alpha}(u+K)}$, $K > 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Зокрема, коли $\psi(u) = \frac{1}{u^3}$, то із (61) одержуємо асимптотичну рівність

$$\mathcal{E}\left(W^3_{\beta,\infty}; P_3(\delta)\right)_C = \frac{1}{3\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{\ln\delta}{\delta^3} + O\left(\frac{1}{\delta^3}\right),\ \delta\to\infty.$$

Звідси при $\beta = 3$

$$\mathcal{E}\left(W^3_{\infty}; P_3(\delta)\right)_C = \frac{1}{3\pi}\frac{\ln\delta}{\delta^3} + O\left(\frac{1}{\delta^3}\right),\ \delta\to\infty.$$

Слід відмітити, що при виконанні умов наслідків 1–3 рівності (51), (57) та (61) дають розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для тригармонійних інтегралів Пуассона на класах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ в рівномірній метриці, коли функції $\psi$ мають незначну швидкість спадання до нуля.


1. *Тиман М.Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. — Київ: Наукова думка, 2009. — 376 с.
2. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.
3. *Степанец А.И.* Методы теории приближения. — Киев: Ин-т математики НАН Украны, 2002. — Ч.I. — 427 с.
4. *Nagy B.* Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I // Berichte Acad. d. Wiss. — Leipzig, 1938. — **90**. — S. 103–134.
5. *Натансон И.П.* О порядке приближения непрерывной $2\pi$-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона // Докл. АН СССР. — 1950. — **72**, № 1 — С. 11–14.
6. *Тиман А.Ф.* Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона // Докл. АН СССР. — 1950. — **74**, № 1 — С. 17–20.
7. *Sz.–Nagy B.* Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son intégrale de Poisson // Acta Math. Acad. Sci Hungar. — 1950. — **1**. — P. 183–188.
8. *Штарк Э.Л.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip1 от их сингулярного интеграла Абеля–Пуассона // Мат. заметки. — 1973. — **13**, № 1. — С. 21–28.
9. *Баскаков В. А.* О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля–Пуассона // Мат. заметки. — 1975. — **17**, № 2. — С. 169–180.
10. *Баскаков В. А.* Асимптотические оценки приближения сопряжённых функций сопряжёнными интегралами Абеля–Пуассона // Применение функционального анализа в теории приближений. — Калинин: 1975. Вып. 5. — С. 14–20.
11. *Баусов Л.И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I //Изв. вузов. — 1965. — **46**, № 3. —С. 15–31.
12. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 1. — С. 43–52.
13. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення спряжених диференційовних функцій їх інтегралами Абеля–Пуассона // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 1. — С. 73–82.
14. *Жигалло Т.В., Харкевич Ю.І.* Наближення $(\psi, \beta)$-диференційовних функцій інтегралами Пуассона у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 11. — С. 1612–1629.

15. *Жигалло Т.В., Харкевич Ю.І.* Наближення функцій з класу $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ інтегралами Пуассона у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 12. — С. 1497–1515.

16. *Каниев С.* Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. — 1963. — **153**, № 5. — С. 995–998.

17. *Pych P.* On a biharmonic function in unit dise // Ann. pol. math. — 1968. — **20**, № 3. — P. 203–213.

18. *Аманов Т.И, Фалалеев Л.П.* Приближение дифференцируемых функций операторами типа Абеля–Пуассона // 5-е Советско–Чехословацкое совещание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики (Алма–Ата, 1976): Тр. совещания. — Новосибирск, 1979. — С. 13–16.

19. *Жигалло К.М., Харкевич Ю.І.* Наближення диференційовних періодичних функцій їх бігармонійними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 9. — С. 1213–1219.

20. *Жигалло К.М., Харкевич Ю.І.* Наближення спряжених диференційовних функцій бігармонічними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 3. — С. 333–345.

21. *Кальчук І. В.* Наближення диференційовних функцій лінійними методами підсумовування їх рядів та інтегралів Фур'є: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Луцьк, 2007. — 131 с.

22. *Рукасов В.И.* Приближение периодических функций линейными средними их рядов Фурье. — Киев, 1983. — 55 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.62).

23. *Харкевич Ю. І., Кальчук І. В.* Наближення $(\psi, \beta)$-диференційовних функцій інтегралами Вейєрштрасса // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 7. — С. 953–978.