УДК 517.5

Ю. І. Харкевич, Т. В. Жигалло (Волинський нац. ун–т, Луцьк)

НАБЛИЖЕННЯ (ψ, β)-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА В ІНТЕГРАЛЬНІЙ МЕТРИЦІ*

Asymptotic equalities are obtained for upper bounds of deviations of the Poisson's integrals on the class of functions $L^{\psi}_{\beta,1}$ in metric of the space L_1.

Отримано асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень інтегралів Пуассона на класі функцій $L^{\psi}_{\beta,1}$ в метриці простору L_1.

1. Постановка задачі та деякі історичні відомості. Нехай L_1 — простір 2π-періодичних сумовних функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_{L_1} = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$. Нехай, далі, послідовність дійсних чисел $\psi = \psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, і фіксоване дійсне число β є такими, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi\,(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\pi\beta}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\pi\beta}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то наслідуючи О.І. Степанця (див., наприклад, [1—3]), цю функцію називають (ψ, β)-похідною функції $f(\cdot)$, позначають через $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$ і при цьому кажуть, що функція f належить множині L^{ψ}_{β}. Якщо ж $f \in L^{\psi}_{\beta}$ і $\left\|f^{\psi}_{\beta}(x)\right\|_1 \le 1$, то кажуть, що f належить класу $L^{\psi}_{\beta,1}$.

Наслідуючи О.І. Степанця (див., наприклад, [3, с. 155]), через $\mathfrak{M}$ будемо позначати множину всіх опуклих донизу послідовностей $\psi(k)$, для яких $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(k) = 0$. Коли послідовність $\psi(k)$ задовольняє умови $\psi \in \mathfrak{M}$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} < \infty$, то, згідно з теоремою 1.7.3 роботи [2, с. 28], ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)$, $\beta \in \mathbb{R}$, буде рядом Фур'є функції

*Виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (грант 25.1/043).

© **Ю. І. Харкевич, Т. В. Жигалло, 2010**

$\Psi_\beta(t)$. Тоді будь-яку функцію $f \in L^{\psi}_{\beta,1}$ майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ можна подати у вигляді

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}\,(x+t)\,\Psi_\beta(t)dt,$$

причому $f^{\psi}_{\beta} \in L_0$, де $L_0 = \big\{f \in L_1 : \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0\big\}$.

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що послідовності $\psi(k)$ із множини $\mathfrak{M}$ є звуженнями на множині натуральних чисел деяких додатних неперервних опуклих донизу функцій $\psi(t)$ неперервного аргумента $t \geq 1$, що прямують до нуля на нескінченності. Множину таких функцій теж будемо позначати через $\mathfrak{M}$. Отже, надалі,

$$\mathfrak{M} = \big\{\psi(t) : \psi(t) > 0, \psi(t_1) - 2\psi\left((t_1+t_2)/2\right) + \psi(t_2) \geq 0$$
$$\forall t_1, t_2 \in [1,\infty), \lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0\big\}.$$

Множину функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $\int\limits_1^{\infty} \frac{\psi(t)}{t}dt < \infty$, позначимо через $\mathfrak{M}'$. Із множини $\mathfrak{M}$ виділимо підмножину $\mathfrak{M}_0$ (див., наприклад, [3, с. 160])

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \frac{t}{\eta(t) - t} \leq K \ \forall t \geq 1\right\},$$

де $\eta(t) = \eta(\psi,t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$, ψ^{-1} — функція, обернена до функції ψ, а K — константа, яка може залежати від ψ; $\mathfrak{M}_0' = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}'$.

Нехай $f \in L_1$. Величину

$$P_\delta(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \ \delta > 0, \qquad (1)$$

де a_0, a_k, b_k — коефіцієнти Фур'є функції f, називають інтегралом Пуассона (див., наприклад, [4, с. 161]).

Основною метою роботи є вивчення асимптотичної поведінки величини

$$\mathcal{E}\big(L^{\psi}_{\beta,1}; P_\delta\big)_1 = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,1}} \left\|f(\cdot) - P_\delta(f;\cdot)\right\|_1, \delta \to \infty. \qquad (2)$$

Якщо в явному вигляді знайдено функцію $\varphi(\delta)$ таку, що при $\delta\to\infty$
$$\mathcal{E}\left(L^{\psi}_{\beta,1}; P_\delta\right)_1 = \varphi\left(\delta\right) + o\left(\varphi\left(\delta\right)\right),$$
то услід за О. І. Степанцем [3, с. 198] будемо казати, що розв'язана задача Колмогорова–Нікольського для інтеграла Пуассона $P_\delta(f;\cdot)$ на класі $L^{\psi}_{\beta,1}$ в метриці простору L_1.

Зауважимо, що в рівномірній метриці задача Колмогорова–Нікольського на класах Соболєва W^1 для функцій $P_\delta(f;\cdot)$ розв'язана В. П. Натансоном [5]. Точні значення верхніх меж відхилень інтегралів Пуассона від функцій з класу W^r, $r\in\mathbb{N}$, отримано в роботі О. П. Тімана [6]. Розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського на класі неперервних функцій W^r_β, $r>0$, $\beta\in R$, знайдено в роботі Л. І. Баусова [7]. Апроксимативні властивості методу наближення інтегралами Пуассона на інших класах диференційовних функцій досліджувались також в роботах К. М. Жигалла і Ю. І. Харкевича [8, 9].

2. Асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень інтегралів Пуассона від функцій з класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ в інтегральній метриці. Нехай $\psi(u)$ — функція, визначена та неперервна при $u\geq 1$ і така, що в точках $u=k$ співпадає зі значеннями послідовності $\psi(k)$. Нехай, далі, функція $\tau(\cdot)$ визначається співвідношеннями
$$\tau(u)=\tau_\delta(u;\psi)=\begin{cases}(1-e^{-u})\,\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 0\leq u\leq\frac{1}{\delta},\\ (1-e^{-u})\,\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, & u\geq\frac{1}{\delta},\end{cases}\tag{3}$$
а її перетворення Фур'є $\hat{\tau}(\cdot)$ вигляду
$$\hat{\tau}(t)=\hat{\tau}_\delta(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\tag{4}$$
є сумовним на всій числовій осі, тобто є збіжним такий інтеграл:
$$A(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\hat{\tau}_\delta(t)|\,dt, \delta\to\infty.\tag{5}$$

Розглянемо функцію

$$F^{\psi}_{\beta,\delta}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x+\frac{t}{\delta}\right)\hat{\tau}_{\delta}(t)dt,\ \ \delta>0,\ \ x\in\mathbb{R},$$

де інтеграл слід розуміти як границю інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються. Ця функція є періодичною та сумовною. Повторюючи міркування, наведені в роботі [3, с. 184], неважко переконатися в тому, що коефіцієнти Фур'є функції $F^{\psi}_{\beta,\delta}(x)$ можна представити в такий спосіб:

$$a_k(F^{\psi}_{\beta,\delta}(x))=\frac{1}{\psi(k)}\tau\left(\frac{k}{\delta}\right)a_k(f),\quad b_k(F^{\psi}_{\beta,\delta}(x))=\frac{1}{\psi(k)}\tau\left(\frac{k}{\delta}\right)b_k(f)$$

(тут $a_k(f)$ та $b_k(f)$ — коефіцієнти Фур'є функції $f\in L^{\psi}_{\beta,1}$). Тоді

$$S\left[F^{\psi}_{\beta,\delta}(x)\right]=S\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x+\frac{t}{\delta}\right)\hat{\tau}_{\delta}(t)dt\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\tau\left(\frac{k}{\delta}\right)\mathrm{A}_k(f;x), \tag{6}$$

де

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{A}_k(f;x)\equiv\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right).$$

Звідси на підставі (6) для $\forall f\in L^{\psi}_{\beta,1}$ отримуємо

$$S\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x+\frac{t}{\delta}\right)\hat{\tau}_{\delta}(t)dt\right]=\frac{1}{\psi(\delta)}S\left[f(x)-P_{\delta}(f;x)\right], \tag{7}$$

де $P_{\delta}(f;\cdot)$ — це інтеграл Пуассона вигляду (1). Із (7) випливає, що для $\forall f\in L^{\psi}_{\beta,1}$ майже в кожній точці $x\in\mathbb{R}$ має місце рівність

$$f(x)-P_{\delta}(f;x)=\psi(\delta)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x+\frac{t}{\delta}\right)\hat{\tau}_{\delta}(t)dt,\delta>0. \tag{8}$$

При цьому для справедливості рівності (8) зовсім не важливо, яким чином означено функцію $\psi(u)$ в точках $u \neq k$, а важливо тільки те, щоб функція $\tau(\cdot)$, яка визначається рівністю (3), була неперервною і щоб її перетворення $\hat{\tau}_\delta(t)$ було сумовним на всій числовій осі.

Використовуючи інтегральне представлення (8), дослідимо асимптотичну поведінку величини (2). Має місце твердження.

Теорема. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_0^{'}$, функція $g(u) = u\psi(u)$ — опукла догори або донизу на $[b, \infty)$, $b \geq 1$. Тоді при $\delta \to \infty$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}\left(L^{\psi}_{\beta,1}; P_\delta\right)_1 = \psi(\delta)A(\tau) + O\left(\frac{1}{\delta}\right), \tag{9}$$

де величина $A(\tau)$ означена за допомогою рівності (5) і для неї справедлива оцінка

$$A(\tau) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\int\limits_1^\delta \psi(u)du + \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_\delta^\infty \frac{\psi(u)}{u}du\right) +$$
$$+O\left(1 + \frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right). \tag{10}$$

Доведення. Покажемо збіжність інтеграла $A(\tau)$ вигляду (5). Для цього, застосовуючи теорему 1 роботи Л. І. Баусова [7], знайдемо оцінки таких інтегралів:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u|d\tau'(u)|, \ \int\limits_{\frac{1}{2}}^\infty |u-1||d\tau'(u)|, \tag{11}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^\infty \frac{|\tau(u)|}{u}du, \ \int\limits_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u}du. \tag{12}$$

Оцінимо перший інтеграл з (11) на кожному з проміжків: $[0; 1/\delta]$ та $[1/\delta; 1/2]$ (при $\delta > 2b$). Оскільки $\tau''(u) < 0$ на $\left[0, \frac{1}{\delta}\right]$, то, враховуючи нерівність

$$1 - e^{-u} < u, u \geq 0, \tag{13}$$

при $\delta \to \infty$ отримуємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} u|d\tau'(u)| = \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\left(1 - \frac{1}{\delta}e^{-\frac{1}{\delta}} - e^{-\frac{1}{\delta}}\right) = O\left(\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\right). \tag{14}$$

Покладемо $\tau(u) = \tau_1(u) + \tau_2(u)$, $u \in [1/\delta; 1/2]$, де

$$\tau_1(u) = \left(1 - e^{-u} - u\right)\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, \tag{15}$$

$$\tau_2(u) = u\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}. \tag{16}$$

Тоді при $\delta > 2$

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau'(u)| \le \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_1'(u)| + \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_2'(u)|. \tag{17}$$

З метою оцінки першого інтеграла з правої частини нерівності (17) дослідимо спочатку таку функцію:

$$\overline{\mu}(u) = 1 - e^{-u} - u. \tag{18}$$

Оскільки $\overline{\mu}'(u) = e^{-u} - 1$, $\overline{\mu}''(u) = -e^{-u}$, $\overline{\mu}(0) = 0$, $\overline{\mu}'(0) = 0$ при $u \ge 0$, то

$$\overline{\mu}(u) \le 0, \overline{\mu}'(u) \le 0, \overline{\mu}''(u) < 0. \tag{19}$$

Враховуючи (19), (13) і те, що $e^{-u} \le 1 - u + \frac{u^2}{2}$, $u \ge 0$, одержимо

$$|\overline{\mu}(u)| = u - 1 + e^{-u} \le \frac{u^2}{2},\ |\overline{\mu}'(u)| = 1 - e^{-u} \le u,\ |\overline{\mu}''(u)| = e^{-u} \le 1. \tag{20}$$

Із (15) та (18) при $u \ge 1/\delta$ випливає оцінка

$$|d\tau_1'(u)| \le \left(|\overline{\mu}(u)|\frac{\delta^2\psi''(\delta u)}{\psi(\delta)} + \right.$$

$$+2\,|\overline{\mu}'(u)|\,\frac{\delta|\psi'(\delta u)|}{\psi(\delta)}+|\overline{\mu}''(u)|\,\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}\Bigg)\,du. \tag{21}$$

Тоді, враховуючи (20), можемо записати

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_1'(u)| \le \tfrac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} \tfrac{u^3}{2}\delta^2\psi''(\delta u)du+$$

$$+\tfrac{2}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^2\delta\,|\psi'(\delta u)|\,du+\tfrac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u\psi(\delta u)du.$$

Проінтегрувавши перший інтеграл правої частини останньої нерівності частинами, отримуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_1'(u)| \le \tfrac{1}{\psi(\delta)}\ \tfrac{u^3}{2}\delta\psi'(\delta u)\Big|_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}}+\tfrac{7}{2\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^2\delta\,|\psi'(\delta u)|\,du+$$

$$+\tfrac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u\psi(\delta u)du.$$

Далі, використовуємо такі твердження.

Твердження 1 [3, с. 161]. *Функція* $\psi\in\mathfrak{M}$ *належить до* $\mathfrak{M}_0$ *тоді і тільки тоді, коли величина*

$$\alpha(t)=\frac{\psi(t)}{t\,|\psi'(t)|},\ \ \psi'(t)=\psi'(t+0), \tag{22}$$

задовольняє умову $\alpha(t)\ge K>0\ \forall t\ge 1$.

Твердження 2 [3, с. 175]. *Для того, щоб функція* $\psi\in\mathfrak{M}$ *належала до* $\mathfrak{M}_0$, *необхідно і достатньо, щоб для довільного фіксованого числа* $c>1$ *існувала стала* K *така, щоб при всіх* $t\ge 1$ *виконувалась нерівність*

$$\frac{\psi(t)}{\psi(ct)}\le K.$$

І тоді для функції ψ з класу $\mathfrak{M}_0$ будемо мати, що

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_1'(u)| \le K_1+\frac{K_2}{\delta^2\psi(\delta)}+\frac{K_3}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u\psi(\delta u)du. \tag{23}$$

Розглянемо інтеграл із правої частини нерівності (23) на проміжках $\left[\frac{1}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right]$ та $\left[\frac{b}{\delta}, \frac{1}{2}\right]$, $\delta > 2b$. Оскільки функція $g(u)$ обмежена на $[1, b]$, то

$$\frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u\psi(\delta u)du = \frac{1}{\delta^2\psi(\delta)} \int\limits_{1}^{b} g(u)du \leq \frac{K}{\delta^2\psi(\delta)}. \tag{24}$$

Далі, через те, що $g(u)$ є опуклою вгору або донизу при $u \geq b$ і $g(u) \neq 0$, то при $u \in [b, \delta]$ можливі лише два випадки: або $u\psi(u) \leq b\psi(b)$, або $u\psi(u) \leq \delta\psi(\delta)$. Отже, при $\delta \to \infty$

$$\frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{b}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u\psi(\delta u)du \leq \frac{1}{\delta^2\psi(\delta)} \int\limits_{b}^{\delta} g(u)du = O\left(1 + \frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right). \tag{25}$$

Враховуємо (23)–(25), після чого можемо записати, що

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_1'(u)| = O\left(1 + \frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right), \delta \to \infty. \tag{26}$$

Оцінимо другий інтеграл з правої частини нерівності (17) на проміжку $\left[\frac{1}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right]$, $\delta > 2b$. Із (16) випливає, що $\tau_2''(u) = 2\delta\frac{\psi'(\delta u)}{\psi(\delta)} + {}$ $+\delta^2\frac{u\psi''(\delta u)}{\psi(\delta)}$. Звідси для функції $\psi(u) \in \mathfrak{M}$, $u \geq 1$, одержуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u|d\tau_2'(u)| \leq \frac{\delta^2}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u^2\psi''(\delta u)du + \frac{2\delta}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u\left|\psi'(\delta u)\right|du.$$

І оскільки $\psi(\delta u) \leq \psi(1)$ при $u \in \left[\frac{1}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right]$, $\delta > 2b$, то, враховуючи твердження 1, для функції $\psi \in \mathfrak{M}_0$ отримуємо

$$\frac{\delta}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u\left|\psi'(\delta u)\right|du \leq \frac{K}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} \psi(\delta u)du \leq \frac{K\psi(1)(b-1)}{\delta\psi(\delta)}.$$

Далі, інтегруючи частинами, знаходимо, що

$$\frac{\delta^2}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u^2\psi''(\delta u)du \le \frac{K_1}{\delta\psi(\delta)},$$

а тому

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u|d\tau_2'(u)| \le \frac{K_2}{\delta\psi(\delta)}. \tag{27}$$

Оцінимо другий інтеграл із правої частини нерівності (17) на проміжку $\left[\frac{b}{\delta},\frac{1}{2}\right]$, $\delta>2b$. Для опуклої на $[b;\infty)$ функції $g(u)$

$$\int\limits_{\frac{b}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_2'(u)| = \left|\int\limits_{\frac{b}{\delta}}^{\frac{1}{2}} ud\tau_2'(u)\right| = \left|(u\tau_2'(u)-\tau_2(u))|_{\frac{b}{\delta}}^{\frac{1}{2}}\right| = O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right). \tag{28}$$

Із співвідношень (14), (17), (26), (27) та (28) випливає, що

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u|d\tau'(u)| = O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right), \delta\to\infty. \tag{29}$$

Оцінимо другий інтеграл з (11). При $u\in[1/\delta;\infty)$, згідно з (3), маємо, що

$$\psi(\delta)d\tau'(u) = \left\{\left(1-e^{-u}\right)\delta^2\psi''(\delta u) + 2\delta e^{-u}\psi'(\delta u) - e^{-u}\psi(\delta u)\right\}du. \tag{30}$$

Зважаючи на (30) та на властивості функції $\psi\in\mathfrak{M}$, одержуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}|u-1||d\tau'(u)| \le \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}u|d\tau'(u)| \le \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}u\left(1-e^{-u}\right)\delta^2\psi''(\delta u)du+$$

$$+\frac{2\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}ue^{-u}\left|\psi'(\delta u)\right|du + \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}ue^{-u}\psi(\delta u)du. \tag{31}$$

Оскільки $1 - e^{-u} \le 1$ при $u \ge 0$, $ue^{-u} \le K$ і $\psi(\delta u) \le \psi(\delta/2)$ при $u \in [1/2; \infty)$, $\delta \ge 2$, то з (31) випливає, що

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1||d\tau'(u)| \le \frac{\delta^2}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u\psi''(\delta u)du +$$

$$+\frac{2K\delta}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |\psi'(\delta u)|\, du + \frac{\psi(\frac{\delta}{2})}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} ue^{-u} du. \tag{32}$$

Далі враховуємо твердження 2, і тоді для неперервної функції $\psi(\delta u) \in \mathfrak{M}_0$, $u \ge 1/2$, $\delta \ge 2$, знайдемо

$$\frac{\delta}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |\psi'(\delta u)|\, du = -\frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} d\psi(\delta u) \le K. \tag{33}$$

Тепер знайдемо оцінку першого інтеграла з правої частини нерівності (32). Взявши до уваги (33), твердження 1, 2 і те, що

$$\lim_{u\to\infty} u\psi'(u) = 0 \quad \forall \psi \in \mathfrak{M}, \tag{34}$$

отримуємо

$$\frac{\delta^2}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u\psi''(\delta u)du = \frac{\delta}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} ud\psi'(\delta u) = \frac{\delta}{\psi(\delta)} \lim_{u\to\infty} u\psi'(\delta u) +$$

$$+\frac{\frac{\delta}{2}|\psi'(\frac{\delta}{2})|}{\psi(\delta)} + \frac{\delta}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |\psi'(\delta u)|\, du \le K_1. \tag{35}$$

Поєднуючи співвідношення (32), (33) та (35), переконуємося, що

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1||d\tau'(u)| = O(1). \tag{36}$$

Далі оцінимо перший інтеграл із (12) на кожному з проміжків: $[0;1/\delta]$, $[1/\delta;1]$ та $[1,\infty)$. На підставі (3) та (13) отримуємо

$$\int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{\tau(u)}{u} du = \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)} \int_0^{\frac{1}{\delta}} \left(1 - e^{-u}\right) \frac{du}{u} \le \frac{\psi(1)}{\delta\psi(\delta)}. \tag{37}$$

Із співвідношень (3), (18), (20) та з оцінок (24), (25) маємо

$$\Bigg| \int_{\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{\tau(u)}{u} du - \frac{1}{\psi(\delta)} \int_{\frac{1}{\delta}}^{1} \psi(\delta u) du \Bigg| \le \frac{1}{\psi(\delta)} \int_{\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{|\overline{\mu}(u)|}{u} \psi(\delta u) du \le$$

$$\le \frac{1}{2\psi(\delta)} \left(\int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} + \int_{\frac{b}{\delta}}^{1} \right) u\psi(\delta u) du = O\left(1 + \frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right).$$

Звідси

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{\tau(u)}{u} du = \frac{1}{\delta\psi(\delta)} \int_1^{\delta} \psi(u) du + O\left(1 + \frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right), \quad \delta \to \infty. \tag{38}$$

Оскільки функція $\psi(u)$ при $u \ge 1$ є спадною, то можемо зробити висновок, що

$$\left| \int_1^{\infty} \frac{\tau(u)}{u} du - \frac{1}{\psi(\delta)} \int_{\delta}^{\infty} \frac{\psi(u)}{u} du \right| = \frac{1}{\psi(\delta)} \int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} \psi(\delta u) du \le K. \tag{39}$$

Із співвідношень (37)–(39) випливає, що

$$\int_0^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u} du = \frac{1}{\delta\psi(\delta)} \int_1^{\delta} \psi(u) du + \frac{1}{\psi(\delta)} \int_{\delta}^{\infty} \frac{\psi(u)}{u} du + O\left(1 + \frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right). \tag{40}$$

Тепер оцінимо другий інтеграл із (12). Із співвідношення (3) встановимо вигляд функцій $\tau(1-u)$ і $\tau(1+u)$

$$\tau(1-u) = \begin{cases} \left(1-e^{-(1-u)}\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 1-\frac{1}{\delta} \le u \le 1, \\ \left(1-e^{-(1-u)}\right)\frac{\psi(\delta(1-u))}{\psi(\delta)}, & u \le 1-\frac{1}{\delta}, \end{cases} \tag{41}$$

$$\tau(1+u) = \begin{cases} \left(1-e^{-(1+u)}\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & -1 \le u \le \frac{1}{\delta}-1, \\ \left(1-e^{-(1+u)}\right)\frac{\psi(\delta(1+u))}{\psi(\delta)}, & u \ge \frac{1}{\delta}-1. \end{cases} \tag{42}$$

Подамо другий інтеграл із (12) у вигляді суми двох інтегралів:

$$\int\limits_0^1 \frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du = \int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du+$$

$$+\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^1 \frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du. \tag{43}$$

Оцінимо перший доданок правої частини (43). Маємо

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du \le \int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \frac{\left|e^{-(1-u)}-e^{-(1+u)}\right|}{u}du+$$

$$+\int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \frac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)+e^{-(1-u)}-e^{-(1+u)}\right|}{u}du. \tag{44}$$

Неважко переконатися, що для першого інтеграла з правої частини нерівності (44) справедлива оцінка

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \left|e^{-1+u}-e^{-1-u}\right|\frac{du}{u} = O(1). \tag{45}$$

Із (41) та (42) при $u \in \left[0, 1-\frac{1}{\delta}\right]$ знаходимо

$$e^{-(1-u)} = 1 - \frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1-u))}\tau(1-u),$$

$$e^{-(1+u)} = 1 - \frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1+u))}\tau(1+u).$$

Тоді

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \frac{\left|\tau(1-u) - \tau(1+u) + e^{-(1-u)} - e^{-(1+u)}\right|}{u} du \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} |\tau(1-u)| \left|1 - \frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1-u))}\right| \frac{du}{u} +$$

$$+ \int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} |\tau(1+u)| \left|1 - \frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1+u))}\right| \frac{du}{u}. \qquad (46)$$

Далі скористаємося таким означенням та застосуємо допоміжне твердження.

Означення ([7, с. 18]). *Нехай функція $\tau(u)$, $u \in [0,\infty)$, абсолютно неперервна і $\tau(\infty) = 0$. Кажуть, що функція $\tau(\cdot) \in \mathcal{E}_1$, якщо похідну $\tau'(\cdot)$ в тих точках, де вона не існує, можна доозначити так, щоб існували інтеграли* $\int\limits_0^{1/2} u|d\tau'(u)|$, $\int\limits_{1/2}^{\infty} |u-1||d\tau'(u)|$.

Твердження 3 ([7, с. 19]). *Якщо $\tau(u) \in \mathcal{E}_1$, то*

$$|\tau(u)| \leq H(\tau),$$

де величина $H(\tau)$ визначається рівністю

$$H(\tau) = |\tau(0)| + |\tau(1)| + \int\limits_0^{1/2} u\,|d\tau'(u)| + \int\limits_{1/2}^{\infty} |u-1|\,|d\tau'(u)|. \qquad (47)$$

Оскільки функція $\tau(\cdot)$ вигляду (3) належить множині $\mathcal{E}_1$, то згідно з твердженням 3 будемо мати

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} |\tau(1-u)| \left| 1 - \frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1-u))} \right| \frac{du}{u} + \int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} |\tau(1+u)| \left| 1 - \frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1+u))} \right| \frac{du}{u} =$$

$$= H(\tau) O \Bigg(\int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \frac{|\psi(\delta(1-u)) - \psi(\delta)|}{u\psi(\delta(1-u))} du + \int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \frac{|\psi(\delta(1+u)) - \psi(\delta)|}{u\psi(\delta(1+u))} du \Bigg). \quad (48)$$

Неважко переконатися, що для функції $\psi \in \mathfrak{M}_0$ при $\delta \to \infty$

$$I_{1,\delta} := \int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \frac{|\psi(\delta(1-u)) - \psi(\delta)|}{u\psi(\delta(1-u))} du = O(1), \quad (49)$$

$$I_{2,\delta} := \int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \frac{|\psi(\delta(1+u)) - \psi(\delta)|}{u\psi(\delta(1+u))} du = O(1), \quad (50)$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по δ.
Поєднавши (46) із (48)–(50), при $\delta \to \infty$ отримуємо

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \frac{\left|\tau(1-u) - \tau(1+u) + e^{-(1-u)} - e^{-(1+u)}\right|}{u} du = H(\tau) O(1).$$

Для величини $H(\tau)$ вигляду (47), якщо врахувати (3), (29) та (36), можемо записати оцінку

$$H(\tau) = O\left(1 + \frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right), \ \delta \to \infty. \quad (51)$$

Отже, при $\delta \to \infty$

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \frac{\left|\tau(1-u) - \tau(1+u) + e^{-(1-u)} - e^{-(1+u)}\right|}{u} du = O\left(1 + \frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right). \quad (52)$$

Співставляючи (44), (45) та (52), знаходимо

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du = O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right). \tag{53}$$

Для другого доданку з правої частини рівності (43) маємо

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du = \int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{\left|e^{-(1-u)}-e^{-(1+u)}\right|}{u}du +$$

$$+O\left(\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)+e^{-(1-u)}-e^{-(1+u)}\right|}{u}du\right). \tag{54}$$

Із формул (41) і (42) при $u\in\left[1-\frac{1}{\delta};1\right]$ випливають рівності

$$e^{-(1-u)}=1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(1)}\tau(1-u), \quad e^{-(1+u)}=1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1+u))}\tau(1+u),$$

зважаючи на які із врахуванням твердження 3, знаходимо

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)+e^{-(1-u)}-e^{-(1+u)}\right|}{u}du =$$

$$=\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1}\left|\tau(1-u)\left(1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(1)}\right)-\tau(1+u)\left(1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1+u))}\right)\right|\frac{du}{u}=$$

$$=H(\tau)O\left(\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1}\frac{|\psi(1)-\psi(\delta)|}{u\psi(1)}du+\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1}\frac{|\psi(\delta(1+u))-\psi(\delta)|}{u\psi(\delta(1+u))}du\right). \tag{55}$$

Далі отримуємо

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1}\frac{|\psi(1)-\psi(\delta)|}{u\psi(1)}du=\left(1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(1)}\right)\ln\frac{1}{1-\frac{1}{\delta}}=O(1). \tag{56}$$

Повторюючи міркування, наведені при встановленні оцінки (50), можна показати, що при $\delta \to \infty$

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{|\psi(\delta(1+u)) - \psi(\delta)|}{u\psi(\delta(1+u))} du = O(1). \tag{57}$$

Далі об'єднуємо співвідношення (55)—(57) із (54) та враховуємо (51) і той факт, що

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{\left|e^{-(1-u)} - e^{-(1+u)}\right|}{u} du = O(1),$$

що дозволяє записати таку оцінку:

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u} du = O\left(1 + \frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right), \ \delta \to \infty. \tag{58}$$

Із рівності (43) на підставі оцінок (53), (58) маємо

$$\int\limits_{0}^{1} |\tau(1-u) - \tau(1+u)| \, \frac{du}{u} = O\left(1 + \frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right), \ \delta \to \infty. \tag{59}$$

Отже, враховуючи теорему 1 із роботи [7], приходимо до висновку, що інтеграл $A(\tau)$, який має вигляд (5), збіжний. Крім того, із нерівностей (2.14) і (2.15) цієї ж роботи з урахуванням формул (29), (36), (40) і (59) отримуємо (10).

Далі, так само, як і у роботі [10], для інтеграла Пуассона $P_\delta(f;\cdot)$, заданого за допомогою (1), можна показати справедливість рівності

$$\mathcal{E}\left(L^{\psi}_{\beta,1}; P_\delta\right)_1 = \psi(\delta)A(\tau) + O\Bigg(\psi(\delta) \int\limits_{|t|\geq\frac{\delta\pi}{2}} |\hat{\tau}_\delta(t)| \, dt\Bigg). \tag{60}$$

Отже, залишилося оцінити залишковий доданок із правої частини рівності (60). Представимо перетворення $\hat{\tau}_\delta(t)$, що визначається співвідношенням (4), у вигляді

$$\hat{\tau}(t) = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} + \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\right)\tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du. \tag{61}$$

Двічі інтегруючи частинами обидва інтеграли з (61) та беручи до уваги, що $\tau(0) = 0$ і $\lim\limits_{u\to\infty}\tau(u) = \lim\limits_{u\to\infty}\tau'(u) = 0$, одержуємо

$$\int\limits_0^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du = -\frac{1}{t^2}\tau'(0)\cos\frac{\beta\pi}{2} -$$

$$-\frac{1}{t^2}\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}\tau''(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du - \frac{1}{t^2}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\tau''(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du.$$

Звідси

$$\left|\int\limits_0^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du\right| \le \frac{K_1}{t^2\psi(\delta)} + \frac{1}{t^2}\left(\int\limits_0^{1/\delta} + \int\limits_{1/\delta}^{1} + \int\limits_1^{\infty}\right)|\tau''(u)|\,du. \tag{62}$$

Враховуючи, що $\tau''(u) < 0$, $u \in [0; \frac{1}{\delta}]$, та нерівність (13), отримуємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}|\tau''(u)|du = -\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}\tau''(u)du = \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\left(e^{-1/\delta} - 1\right) = O\left(\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right). \tag{63}$$

Використавши (3), (15) та (16), оцінимо другий інтеграл з правої частини співвідношення (62). Отже,

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1}|\tau''(u)|du \le \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1}|\tau_1''(u)|du + \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1}|\tau_2''(u)|du. \tag{64}$$

Тоді, взявши до уваги нерівності (20) та (21), аналогічно, як і при оцінці інтегралів з правої частини (17), можемо знайти, що

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{1} |\tau''(u)|du = O\left(\frac{1}{\psi(\delta)}\right), \ \delta \to \infty. \tag{65}$$

Далі скористаємося співвідношенням (30) для оцінки інтеграла з правої частини (62) на проміжку $[1, \infty)$

$$\int_{1}^{\infty} |\tau''(u)|du \le \frac{\delta^2}{\psi(\delta)} \int_{1}^{\infty} \left(1 - e^{-u}\right) \psi''(\delta u)du +$$
$$+ \frac{2\delta}{\psi(\delta)} \int_{1}^{\infty} e^{-u} \left|\psi'(\delta u)\right| du + \frac{1}{\psi(\delta)} \int_{1}^{\infty} e^{-u} \psi(\delta u)du.$$

Тепер, враховуючи такі нерівності: $1 - e^{-u} \le u, \ e^{-u} \le 1$ при $u \ge 0$; $\psi(\delta u) \le \psi(\delta)$ при $u \ge 1$, а також твердження 1, 2 і співвідношення (34), неважко переконатися в тому, що

$$\int_{1}^{\infty} |\tau''(u)|du = O(1), \delta \to \infty. \tag{66}$$

Із оцінок (63), (65) та (66) випливає, що

$$\int_{0}^{\infty} |\tau''(u)|du = O\left(\frac{1}{\psi(\delta)}\right).$$

Звідси та з (62) отримуємо

$$\int_{|t| \ge \frac{\delta\pi}{2}} \left| \int_{0}^{\infty} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt = O\left(\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right), \ \delta \to \infty. \tag{67}$$

Нарешті, із співвідношень (60) та (67) випливає рівність (9). Теорему доведено.

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови теореми* $\sin\frac{\beta\pi}{2}\neq 0$ *і* $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t)=\infty$, *де величина* $\alpha(t)$ *означена рівністю* (22). *Тоді при* $\delta\to\infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(L^{\psi}_{\beta,1};P_\delta\right)_1=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du+O\left(\psi(\delta)\right). \qquad (68)$$

Прикладом функцій, які задовольняють умови наслідку 1 є, зокрема, функції вигляду $\psi(u)=\frac{1}{\ln^{\alpha}(u+K)}$, де $\alpha>1,\ K>0$.

Наслідок 2. *Нехай* $\psi\in\mathfrak{M}_0$, $\sin\frac{\beta\pi}{2}\neq 0$, *існує* $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t)$, *функція* $u\psi(u)$ *є опукла догори або донизу на* $[b,\infty)$, $b\geq 1$, $\lim\limits_{u\to\infty}u\psi(u)=\infty$, $\lim\limits_{\delta\to\infty}\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta}\psi(u)du=\infty$, *тоді при* $\delta\to\infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(L^{\psi}_{\beta,1};P_\delta\right)_1=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{\delta}\int\limits_{1}^{\delta}\psi(u)du+O\left(\psi(\delta)\right). \qquad (69)$$

Відмітимо, що функції, які мають, наприклад, вигляд $\psi(u)=\frac{1}{u}\ln^{\alpha}(u+K)$, $K>0$, $\alpha>0$, задовольняють умови наслідку 2.

Наслідок 3. *Нехай* $\psi\in\mathfrak{M}_0$, $\sin\frac{\beta\pi}{2}\neq 0$, *функція* $u\psi(u)$ *є опукла донизу на* $[b,\infty)$, $b\geq 1$, $\lim\limits_{u\to\infty}u\psi(u)=K<\infty$, $\lim\limits_{\delta\to\infty}\int\limits_1^{\delta}\psi(u)du=\infty$, *тоді при* $\delta\to\infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(L^{\psi}_{\beta,1};P_\delta\right)_1=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{\delta}\int\limits_{1}^{\delta}\psi(u)du+O\left(\frac{1}{\delta}\right). \qquad (70)$$

Прикладом функцій, для яких має місце наслідок 3, є функції вигляду $\psi(u)=\frac{1}{u}(K+e^{-u})$, $\psi(u)=\frac{1}{u}\ln^{\alpha}(u+K)$, де $K>0$, $-1\leq\alpha\leq 0$.

Зауважимо, що при виконанні умов наслідків 1–3 рівності (68)–(70) дають розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для інтегралів Пуассона на класах $L^{\psi}_{\beta,1}$ в інтегральній метриці.

1. *Степанец А.И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. — Киев, 1983. – 57 с. — (Препр. /АН УССР. Ин-т математики; 83.10).
2. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.
3. *Степанец А.И.* Методы теории приближения: В 2-х ч. — Киев: Ин-т математики НАН Украны, 2002. — Ч.І. — 427 с.
4. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. — М.: Мир, 1965. — Т. 1. — 615 с.
5. *Натансон В.П.* О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона // Докл. АН СССР. — 1950. — **72**, №1. — С. 11–14.
6. *Тиман А.Ф.* Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона // Докл. АН СССР. — 1950. —**74**, № 1. — С. 17–20.
7. *Баусов Л.И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I // Изв. вузов. Математика. — 1965. — **46**, № 3. — С. 15–31.
8. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 1. — С. 43–52.
9. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення спряжених диференційовних функцій їх інтегралами Абеля–Пуассона // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 1. — С. 73–82.
10. *Новикова А.К.* О приближении функций в пространствах C и L // Вопросы суммирования рядов Фурье. — Киев, 1985. — С. 14–51. — (Препр. /АН УССР. Ин-т математики; 85.61).