УДК 517.524

**Х. Й. Кучмінська**
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

# ПРО ВЛАСТИВОСТІ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ

*We consider different types approximants of two-dimensional continued fractions and investigate their properties. For two-dimensional continued fractions with positive elements we establish equivalence of ordinary and figured convergence.*

*Розглядаємо різні типи наближень двовимірних неперервних дробів та досліджуємо їх властивості. Для двовимірних неперервних дробів із додатними елементами встановлюємо еквівалентність звичайної і фігурної збіжностей.*

**1. Вступ.** Розглядаючи задачу відповідності двовимірного узагальнення неперервного дробу до формального подвійного степеневого ряду, ми визначили двовимірний неперервний дріб через композиції дробово-лінійних відображень [1].

Дійсно, нехай $a_{i,j}, b_{i,j},$, $i, j \in \mathbb{N}$ — комплексні числа, $a_{i,j} \neq 0$, $x$, $y$, $z$, $u_{i,j}$ — комплексні змінні, і нехай

$$t_i(x, y, z) = a_{i-1,i-1}(b_{i-1,i-1} + a_{i,i-1}x + a_{i-1,i}y + z)^{-1}, \tag{1}$$

$$i = 1, 2, ...,$$

$$t_{i,j}(u_{i+1,j}) = \frac{1}{b_{i,j} + a_{i+1,j}u_{i+1,j}}, \quad i > j;$$

$$t_{i,j}(u_{i,j+1}) = \frac{1}{b_{i,j} + a_{i,j+1}u_{i,j+1}} \quad i < j, \tag{2}$$

— дробово-лінійні відображення. Розглядаються композиції таких відображень

$$\begin{aligned}&T_{k,i}(u_{k+1,i}) = t_{i+1,i}\circ t_{i+2,i}\circ ...\circ t_{k,i}(u_{k+1,i});\\&T_{i,k}(u_{i,k+1}) = t_{i,i+1}\circ t_{i,i+2}\circ ...\circ t_{i,k}(u_{i,k+1}),\\&k\geq 1, i=0,1,\ldots,k-2,\end{aligned}\qquad (3)$$

та послідовності $\{T_{k,i}(0)\}, \{T_{i,k}(0)\}$. Зокрема,

$$T_{1,0}(0) = T_{1,0} = t_{1,0}(0) = \frac{1}{b_{1,0}}; T_{0,1}(0) = T_{0,1} = t_{0,1}(0) = \frac{1}{b_{0,1}};$$

$$T_{2,0}(0) = T_{2,0} = t_{1,0}\circ t_{2,0}(0) = \cfrac{1}{b_{1,0}+\cfrac{a_{1,0}}{b_{2,0}}};$$

$$T_{0,2}(0) = T_{0,2} = t_{0,1}\circ t_{0,2}(0) = \cfrac{1}{b_{0,1}+\cfrac{a_{0,1}}{b_{0,2}}}.$$

Тоді *двовимірний неперервний дріб* визначається *як послідовність* $\{f_k\}$ ($f_k$ — елемент розширеної комплексної площини)

$$f_k{:=}t_1(T_{k-1,0}; T_{0,k-1};\ldots; t_{k-1}(T_{k-1,k-2}; T_{k-2,k-1}; t_k(0,0,0))\ldots). \quad (4)$$

Вважаємо, що $f_k$ має сенс, якщо при згортанні дробу не виникає невизначеність $0/0$. Оскільки нескінченний двовимірний неперервний дріб розуміємо як границю $f_k$ при $k\to\infty$, то ми повинні припустити, що, починаючи з деякого номера $k_0$, всі $f_k$ $(k\geq k_0)$ мають сенс. Тобто нескінченний двовимірний неперервний дріб (ДНД) можемо записати у вигляді

$$\cfrac{a_{0,0}}{b_{0,0}+\cfrac{a_{1,0}}{b_{1,0}+_{\ddots}}+\cfrac{a_{0,1}}{b_{0,1}+_{\ddots}}+\cfrac{a_{1,1}}{b_{1,1}+\cfrac{a_{2,1}}{b_{2,1}+_{\ddots}}+\cfrac{a_{1,2}}{b_{1,2}+_{\ddots}}+\ddots}}$$

або стисліше:

$$\mathop{D}_{i=0}^{\infty}\frac{a_{i,i}}{\Phi_i},\quad \Phi_i = b_{i,i}+\mathop{D}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}}+\mathop{D}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}. \qquad (5)$$

Не зменшуючи загальності, можемо подати ДНД і у вигляді:

$$\Phi_0 + \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i,i}}{\Phi_i}, \quad \Phi_i = b_{i,i} + \mathop{D}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{D}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}, \;\; i = 0, 1, \dots \; . \tag{6}$$

Далі, дамо основні означення.

Скінченний двовимірний неперервний дріб

$$f_n := \frac{A_n}{B_n} = \mathop{D}_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i,i}}{\Phi_i^{(n-1-i)}}, \quad n = 1, 2, ..., \tag{7}$$

$$\Phi_i^{(m)} := b_{i,i} + \mathop{D}_{j=1}^{m} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{D}_{j=1}^{m} \frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}, \quad \Phi_i^{(0)} = b_{i,i}, \tag{8}$$

де $a_{i,i}, b_{i,i}, a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{C}$, називається $n$-м наближенням або $n$-м підхідним дробом ДНД (5), $A_n, B_n$ — чисельником і знаменником $n$-го наближення $f_n$, або $n$-м підхідним чисельником і $n$-м підхідним знаменником, відповідно.

Для ДНД (6) $n$-те наближення набере вигляду

$$f_n := \Phi_0^{(n)} + \mathop{D}_{i=1}^{n} \frac{a_{i,i}}{\Phi_i^{(n-i)}}, \quad n = 1, 2, ..., \tag{9}$$

де $\Phi_i^{(m)}, \quad m = 0, 1, ..., i = 0, 1...$, знаходимо за формулами (8).

Неперервні дроби

$$\mathop{D}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}}, \;\; \mathop{D}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}, \quad \mathop{D}_{j=i+1}^{\infty} \frac{a_{j,j}}{\Phi_j}, \;\; i = 0, 1, ...,$$

називаються $i$-ми гілками дробу (5) або його $i$-ми піддробами. Можемо утворювати різні типи наближень ДНД (5) в залежності від кількості поверхів (довжини) його $i$-х піддробів.

Скінченні звичайні неперервні дроби

$$\begin{aligned} & Q_{i+k,i}^{(0)} := b_{i+k,i}, \quad Q_{i+k,i}^{(m+1)} := b_{i+k,i} + \frac{a_{i+k+1,i}}{Q_{i+k+1,i}^{(m)}}, \\ & i, m = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots, \\ & Q_{i,i+k}^{(0)} := b_{i,i+k}, \quad Q_{i,i+k}^{(m+1)} =: b_{i,i+k} + \frac{a_{i,i+k+1}}{Q_{i,i+k+1}^{(m)}}, \\ & i, m = 0, 1, \dots, \; k = 1, 2, \dots \; , \end{aligned} \tag{10}$$

називаються одновимірними залишками скінченного ДНД (8), а двовимірний неперервний дріб

$$Q_i^{(m+1)} := b_{i,i} + \frac{a_{i+1,i}}{Q_{i+1,i}^{(m)}} + \frac{a_{i,i+1}}{Q_{i,i+1}^{(m)}} + \frac{a_{i+1,i+1}}{Q_{i+1}^{(m)}}, \tag{11}$$

$$Q_i^{(0)} := b_{i,i}\ , \quad i, m = 0, 1, \ldots,$$

називається загальним $i$-м залишком ДНД (7). Скінченний двовимірний неперевний дріб, $i$-ві піддроби якого мають різну довжину, називається фігурним наближенням ДНД (5).

Вперше двовимірні неперервні дроби, що виникли із задачі відповідності узагальненого неперервного дробу до формального подвійного степеневого ряду, розглядалися з наближеннями вигляду [2–4]:

$$\tilde{f}_n := \Phi_0^{(n)} + \mathop{D}_{i=1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{a_{i,i}}{\Phi_i^{(n-2i)}}, \tag{12}$$

де $\Phi_i^{(n-2i)}$ визначаються формулами (8), $[k]$ — ціла частина додатного числа $k$. Цей дріб, як і ДНД

$$\mathop{D}_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \frac{a_{i,i}}{\Phi_i^{(n-1-2i)}}, \tag{13}$$

є одним із фігурних $n$-их наближень ДНД (6) (ДНД (5)), позначається через $\tilde{f}_n$ і називається його *$C$-наближенням.*

2. **Основні дослідження.** Розглянемо ще один спосіб утворення наближень ДНД (5). Позначимо ці наближення через $\hat{f}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ .

Нехай $\hat{f}_1 := \dfrac{a_{0,0}}{b_{0,0}}$, $\hat{f}_2 := \dfrac{a_{0,0}}{b_{0,0} + \dfrac{a_{1,0}}{b_{1,0}}}$, $\hat{f}_3 =: \dfrac{a_{0,0}}{b_{0,0} + \dfrac{a_{1,0}}{b_{1,0}} + \dfrac{a_{0,1}}{b_{0,1}}}$,

$\hat{f}_4 =: \dfrac{a_{0,0}}{b_{0,0} + \dfrac{a_{1,0}}{b_{1,0}} + \dfrac{a_{0,1}}{b_{0,1}} + \dfrac{a_{1,1}}{b_{1,1}}}, \ldots$ .

Тобто, кожне наступне наближення утворюється додаванням однієї ланки дробу. Неважко зауважити, що

$$\hat{f}_{s^2} = \mathop{D}_{i=0}^{s-1} \frac{a_{i,i}}{b_{i,i} + \mathop{D}\limits_{j=1}^{s-1-i} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{D}\limits_{j=1}^{s-1-i} \frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}}, \tag{14}$$

тоді

$$\hat{f}_{s^2+1} =$$

$$\frac{a_{0,0}}{b_{0,0} + \mathop{D}\limits_{j=1}^{s} \frac{a_{j,0}}{b_{j,0}} + \mathop{D}\limits_{j=1}^{s-1} \frac{a_{0,j}}{b_{0,j}} + \mathop{D}\limits_{i=1}^{s-1} \frac{a_{i,i}}{b_{i,i} + \mathop{D}\limits_{j=1}^{s-1-i} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{D}\limits_{j=1}^{s-1-i} \frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}}},$$

$$s = 1, 2, ....$$

Вважатимемо, що $\mathop{D}\limits_{i=m}^{n} \frac{a_{i,i}}{b_{i,i}} = 0$, $\mathop{D}\limits_{i=m}^{n} \frac{a_{i,j}}{b_{i,j}} = 0$, $\mathop{D}\limits_{i=m}^{n} \frac{a_{j,i}}{b_{j,i}} = 0$, якщо $n < m$.

Дійсно, для $n \in \{1, 2\}$ формула (14) справедлива. Припустимо, що вона справедлива для $n = k$ і доведемо її для $n = k + 1$. Формула (14) складається з $k^2$ частинних ланок $\frac{a_{i,j}}{b_{i,j}}$, $i = 0, 1, ..., k-1$; $j = 0, 1, ..., k-1$, а саме: $k$ ланок вигляду $\frac{a_{i,i}}{b_{i,i}}$, $i = 0, ...k-1$, і $2[(k-1) + (k-2) + ... + 1] = k(k-1)$ ланок зі змішаними індексами. Щоб отримати наступний поверх дробу (14), треба кожен піддріб збільшити на один поверх, тобто додати $2(k-1)$ ланку до попередніх $k^2$ частинних ланок та ще три ланки $\frac{a_{k,k}}{b_{k,k}}$, $\frac{a_{k-1,k}}{b_{k-1,k}}$, $\frac{a_{k,k-1}}{b_{k,k-1}}$, що в сумі дасть $2k+1$ доданків і, враховуючи кількість ланок ДНД (14), матимемо, що $\hat{f}_{(k+1)^2}$ складається рівно з $(k+1)^2$ частинних ланок, тобто $\hat{f}_{(k+1)^2} = \mathop{D}\limits_{i=0}^{k} \frac{a_{i,i}}{b_{i,i} + \mathop{D}\limits_{j=1}^{k-i} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{D}\limits_{j=1}^{k-i} \frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}}$, що й треба було довести.

Зауважимо, що

$$f_s = \hat{f}_{s^2},\ s \geq 1,\ \ \tilde{f}_s = \hat{f}_{s^2-2s+3},\ \ s \geq 2.$$

Запишемо довільне наближення $\hat{f}_k, k = 1, 2, \ldots$ .Неважко перевірити, оскільки $f_s = \hat{f}_{s^2}$ і $f_{s+1} = \hat{f}_{(s+1)^2}$, $f_{[\sqrt{k}]} \le \hat{f}_k \le f_{[\sqrt{k}]+1}$, що наближення $\hat{f}_k$ — це $([\sqrt{k}]+1)$-е звичайне наближення $f_{[\sqrt{k}]+1}$, в якому всі його $([\sqrt{k}]+1)$-ті ланки, що йдуть за $\dfrac{a_{[\sqrt{k}],r}}{b_{[\sqrt{k},r}}$ чи $\dfrac{a_{r,[\sqrt{k}]}}{b_{r,[\sqrt{k}]}}$, $0 \le r \le [\sqrt{k}]$, замінено на $\dfrac{0}{1}$, тобто

$$\hat{f}_k = \mathop{D}\limits_{i=0}^{[\sqrt{k}]-1} \frac{a_{i,i}}{\tilde{b}_{i,i} + \mathop{D}\limits_{j=1}^{[\sqrt{k}]-1-i} \dfrac{a_{i+j,i}}{\tilde{b}_{i+j,i}} + \mathop{D}\limits_{j=1}^{[\sqrt{k}]-1-i} \dfrac{a_{i,i+j}}{\tilde{b}_{i,i+j}}}, \tag{15}$$

де

$$\tilde{b}_{i+j,i} = \begin{cases} b_{i+j,i}, \quad j \le [\sqrt{k}] - 2, \\ b_{i+j,i} + \delta_{i+j+1,i}, \quad j = [\sqrt{k}] - 1, \end{cases}$$

$$\tilde{b}_{i,i+j} = \begin{cases} b_{i,i+j}, \quad j \le [\sqrt{k}] - 2, \\ b_{i,i+j} + \delta_{i,i+j+1}, \quad j = [\sqrt{k}] - 1, \end{cases}$$

$$\tilde{b}_{i,i} = \begin{cases} b_{i,i}, \quad i \le [\sqrt{k}] - 2, \\ b_{i,i} + \delta_{i+1,i} + \delta_{i,i+1}, \quad i = [\sqrt{k}] - 1, \end{cases}$$

$$\delta_{s,r} = \begin{cases} \dfrac{a_{s,r}}{b_{s,r}}, \quad k - s^2 = 2r + 1, \\ \frac{0}{1}, \quad k - s^2 > 2r + 1, \quad 0 \le r \le s, \end{cases}$$

$$\delta_{r,s} = \begin{cases} \dfrac{a_{r,s}}{b_{r,s}}, \quad k - s^2 = 2r + 2, \\ \frac{0}{1}, \quad k - s^2 > 2r + 2, \quad 0 \le r \le s - 1, \end{cases}$$

або дріб (15) можна записати як

$$\hat{f}_k = \mathop{D}\limits_{i=0}^{[\sqrt{k}]-1} \frac{a_{i,i}}{b_{i,i} + \mathop{D}\limits_{j=1}^{[\sqrt{k-2i-1}]-i} \dfrac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{D}\limits_{j=1}^{[\sqrt{k-2i-2}]-i} \dfrac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}}, \tag{16}$$

де $[k]$ — ціла частина додатного числа $k$.

<u>*Приклад* 1.</u> Запишемо формальне розвинення функції $f(z_1,z_2)=\dfrac{4}{(1+\sqrt{1+4z_1})(1+\sqrt{1+4z_2})}$ у ДНД (5):

$$f(z_1,z_2)=\cfrac{1}{1+\cfrac{z_1}{1+\cfrac{z_1}{1+_{\ddots}}}+\cfrac{z_2}{1+\cfrac{z_2}{1+_{\ddots}}}+\cfrac{z_1z_2}{1+\cfrac{z_1}{1+\cfrac{z_1}{1+_{\ddots}}}+\cfrac{z_2}{1+\cfrac{z_2}{1+_{\ddots}}}+\vdots}}$$

і кілька її різних наближень, а саме:

$$\begin{aligned}
&f_1=\tilde{f}_1=\hat{f}_1=1,\\
&f_2=\frac{1}{1+\mathrm{z}_1+z_2+z_1z_2},\ \tilde{f}_2=\frac{1}{1+\mathrm{z}_1+z_2},\ \hat{f}_2=\frac{1}{1+z_1},\\
&f_3=\cfrac{1}{1+\cfrac{z_1}{1+\cfrac{z_1}{1}}+\cfrac{z_2}{1+\cfrac{z_2}{1}}+\cfrac{z_1z_2}{1+\cfrac{z_1}{1}+\cfrac{z_2}{1}+\cfrac{z_1z_2}{1}}},\\
&\tilde{f}_3=\cfrac{1}{1+\cfrac{z_1}{1+\cfrac{z_1}{1}}+\cfrac{z_2}{1+\cfrac{z_2}{1}}+\cfrac{z_1z_2}{1}}\\
&\hat{f}_3=\cfrac{1}{1+\cfrac{z_1}{1}+\cfrac{z_2}{1}}.
\end{aligned}$$

Двовимірні неперервні дроби, які мають однакові відповідні наближення, називаються *еквівалентними.*

Далі, запишемо формально ДНД

$$\underset{i=0}{\overset{\infty}{D}}\frac{a_{i,i}\rho_{i-1,i-1}\rho_{i,i}}{\Psi_i},\quad \Psi_i=b_{i,i}\rho_{i,i}+$$
$$+\underset{j=1}{\overset{\infty}{D}}\frac{a_{i+j,i}\rho_{i+j-1,i}\rho_{i+j,i}}{b_{i+j,i}\rho_{i+j,i}}+\underset{j=1}{\overset{\infty}{D}}\frac{a_{i,i+j}\rho_{i,i+j-1}\rho_{i,i+j}}{b_{i,i+j}\rho_{i,i+j}}, \qquad (17)$$

де $\rho_{-1,-1}=1,\ \ \rho_{i,j}\neq 0,\ \ i,j=0,1,...,$ — довільні комплексні числа.

Розглянемо довільний ДНД, еквівалентний до (5),

$$\underset{i=0}{\overset{\infty}{D}} \frac{a^*_{i,i}}{b^*_{i,i} + \underset{j=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{a^*_{i+j,i}}{b^*_{i+j,i}} + \underset{j=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{a^*_{i,i+j}}{b^*_{i,i+j}}} \tag{18}$$

та позначимо через $f^*_k, \hat{f}^*_k$ його $k$-ті наближення (7) і (16) відповідно. Із урахуванням означення еквівалентності звідси випливає, що повинна виконуватися рівність

$$f_k = f^*_k, \quad k = 1, 2, ... .$$

**Теорема 1.** *Для того, щоб довільне еквівалентне перетворення ДНД* (5) *можна було записати у вигляді* (17), *необхідно і достатньо, щоб всі фігурні наближення вигляду* (16) *для ДНД* (5) *та* (18) *збігалися*

$$\hat{f}_k = \hat{f}^*_k, \quad k = 1, 2, ... . \tag{19}$$

***Доведення***. Нехай довільний ДНД, еквівалентний до ДНД (5), зображується у вигляді (17). Тоді, послідовно скорочуючи $k$-те фігурне наближення $f^*_k$ (17) на відмінні від нуля $\rho_{i,i}$; $\rho_{i,j}; \rho_{j,i}$, $i, j = 0, 1, ...$, переконуємося у справедливості (19).
Нехай тепер справджується рівність (19), тоді доведемо існування відмінних від нуля чисел $\rho_{i,j}$ таких, що

$$\begin{aligned} & a^*_{i,i} = a_{i,i}\rho_{i-1,i-1}\rho_{i,i}, \\ & a^*_{i+j,i} = a_{i+j,i}\rho_{i+j-1,i}\rho_{i+j,i}, \quad a^*_{i,i+j} = a_{i,i+j}\rho_{i,i+j-1}\rho_{i,i+j}; \\ & b^*_{i,i} = b_{i,i}\rho_{i,i}, \quad b^*_{i+j,i} = b_{i+j,i}\rho_{i+j,i}, \\ & b^*_{i,i+j} = b_{i,i+j}\rho_{i,i+j}, \ i, j = 0, 1, ..., \rho_{-1,-1} = 1. \end{aligned} \tag{20}$$

Дійсно, враховуючи рівність $\hat{f}_1 = \hat{f}^*_1$ доходимо висновку, що $\frac{a_{0,0}}{b_{0,0}} = \frac{a^*_{0,0}}{b^*_{0,0}}$ або $\frac{a^*_{0,0}}{a_{0,0}} = \frac{b^*_{0,0}}{b_{0,0}} = \rho_{0,0}$. Тому, якщо $a^*_{0,0} = 0$ і $b^*_{0,0} \neq 0$, то необхідно, щоб $a_{0,0} = 0$ і $b_{0,0} \neq 0$. Тоді $\rho_{0,0} = \frac{b^*_{0,0}}{b_{0,0}} \neq 0$.

Якщо тепер $a^*_{0,0} = 0$ і $b^*_{0,0} = 0$, то $\rho_{0,0}$ — довільне, відмінне від нуля число. Якщо ж $b^*_{0,0} = 0$, $a^*_{0,0} \neq 0$ , то $\rho_{0,0} = \dfrac{a^*_{0,0}}{a_{0,0}} \neq 0$. Тому $a^*_{0,0} = a_{0,0}\rho_{-1,-1}\rho_{0,0}$, $b^*_{0,0} = b_{0,0}\rho_{0,0}$; $\rho_{-1,-1} = 1$.

Далі, з рівності $\hat{f}_2 = \hat{f}^*_2$ випливає, що $a^*_{1,0} =$ $= a_{1,0}\rho_{1,0}\rho_{0,0}$, $b^*_{1,0} = b_{1,0}\rho_{1,0}$; $\rho_{1,0} \neq 0$.

Нехай тепер ці співвідношення справедливі для $k \leq n$ і доведемо їх справедливість при $k = n + 1$. Якщо $n = m^2$, то

$$\hat{f}_{m^2+1} = \mathop{D}_{i=0}^{m-1} \frac{a_{i,i}}{b_{i,i} + \mathop{D}\limits_{j=1}^{\left[\sqrt{m^2-2i}\right]-i} \dfrac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{D}\limits_{j=1}^{\left[\sqrt{m^2-1-2i}\right]-i} \dfrac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}}$$

і, виконуючи поступове скорочення зверху вниз на числа $\rho_{i,j}$, $i, j = 1, 2, ..., \sqrt{n}-1$, відмінні від нуля, і використовуючи рівності (19), одержуємо $\dfrac{a_{m,0}}{b_{m,0}} = \dfrac{a^*_{m.0}}{\rho_{m-1,0}b^*_{m,0}}$, звідки $\rho_{m,0} =$ $= \dfrac{b^*_{m,0}}{b_{m,0}} = \dfrac{a^*_{m,0}}{a_{m,0}\rho_{m-1,0}}$. Отже, $a^*_{m,0} = a_{m,0}\rho_{m-1,0}\rho_{m,0}$, $b^*_{m,0} =$ $= b_{m,0}\rho_{m,0}$.

Аналогічно, враховуючи $\hat{f}_{m^2+2} = \hat{f}^*_{m^2+2}$, отримуємо $a^*_{0,m} =$ $= a_{0,m}\rho_{0,m-1}\rho_{0,m}$, $b^*_{0,m} = b_{0,m}\rho_{0,m}$ і т.д., якщо $n = m^2 + p$, $p =$ $= 0, 1, ..., 2m + 1$.

Теорему доведено .

**Твердження 1.** *Нехай елементи ДНД* (5) *— додатні дійсні числа, числа $j, k$ — довільні натуральні числа, тоді для наближень $f_n$* (7) *виконується властивість "вилки":*

$$f_{2k} < f_{2k+2} < f_{2j+1} < f_{2j-1}. \tag{21}$$

***Доведення.*** Оскільки всі елементи дробу додатні, то $Q_j^{(s-1-j)} >$ $0$, $j = 0, 1, ..., s - 1$; $s = n, m$, тоді покладемо у формулі різниці між наближеннями [1] $(n > m)$

$$f_n - f_m =$$
$$= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i(\Phi_i^{(m-1-i)} - \Phi_i^{(n-1-i)})\prod_{j=0}^{i} a_{j,j}}{\prod_{j=0}^{i} Q_j^{(n-1-j)} Q_j^{(m-1-j)}} +$$
$$+\frac{(-1)^m \prod_{j=0}^{m} a_{j,j}}{\prod_{j=0}^{m-1} Q_j^{(n-1-j)} Q_j^{(m-1-j)}} \cdot \frac{1}{Q_m^{(n-1-m)}} \qquad (22)$$

$n = 2k+2, m = 2k$ або $n = 2j+1, m = 2j-1$, і переконуємося у тому, що парні наближення монотонно зростають, а непарні наближення монотонно спадають. Якщо в (22) покласти $n =$ $= 2j+1, m = 2k$ або $n = 2k, m = 2j+1$ в залежності від того чи $2j+1 > 2k$, чи $2j+1 < 2k$, то отримуємо, що $f_{2j+1} > f_{2k}$ для довільних натуральних $j, k$.

Зауваження 1. Цієї властивості не мають ДНД з наближеннями (12), (13).

Приклад 2. Розглянемо ДНД (5) з елементами, що дорівнюють одиниці

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}} + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}} + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}} + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}$$

і обчислимо його наближення. Можемо записати послідовність його парних наближень $\{(1/2)^2, (3/5)^2, (8/13)^2, (21/34)^2, ...\}$ і непарних наближень $\{1, (2/3)^2, (5/8)^2, (13/21)^2, ...\}$.

Методом повної математичної індукції встановимо формулу для $n$-го наближення цього ДНД

$$f_n = \frac{A_n}{B_n} = \frac{1}{(\sqrt{f_{n-1}}+1)^2} = \left(\frac{F_{n-1}}{F_n}\right)^2, \;\; f_0 = 0,$$

де послідовність $\{F_n\}$ — це послідовність чисел Фібоначчі.

Дійсно, при $n \in \{1,2\}$ формула справджується, припустимо, що вона виконується для $n = k$, і доведемо, що вона виконується для $n = k+1$. Запишемо $(k+1)$-ше наближення:

$$f_{k+1} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots + 1}} + f_k},$$

і враховуючи те, що значення звичайного дробу з одиничками з $k$ поверхами дорівнює $\sqrt{f_k}$, відразу отримуємо

$$f_{k+1} = \frac{1}{1 + \sqrt{f_k} + f_k} = \frac{1}{(\sqrt{f_k} + 1)^2}.$$

З властивості „вилки" дістанемо такі нерівності:

$$(1/2)^2 < (3/5)^2 < (8/13)^2 < ... < f_{2n} < ...,$$
$$1 > (2/3)^2 > (5/8)^2 > ... > f_{2n-1} > ..., f_{2n-1} > f_{2n}.$$

Оскільки послідовність $\{f_{2n}\}$ монотонно зростаюча і обмежена зверху, а послідовність $\{f_{2n-1}\}$ — монотонно спадна і обмежена знизу, то можемо записати

$f_{2k} \leq \lim_{k\to\infty} f_{2k} \leq \lim_{k\to\infty} f_{2k-1} \leq f_{2k-1}$. Проте, це не означає, що $\lim_{k\to\infty} f_{2k} = \lim_{k\to\infty} f_{2k-1}$.

Неважко підрахувати, що значення цього ДНД дорівнює $(3-\sqrt{5})/2$.

Як і для гіллястих ланцюгових дробів [5], введемо поняття умовної та безумовної збіжності.

*ДНД* (5) *називається безумовно збіжним, якщо збіжний дріб* (5) *і всі його $i$-ві піддроби*
$\mathop{D}\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}}$, $\mathop{D}\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}$, $\mathop{D}\limits_{j=i+1}^{\infty} \dfrac{a_{j,j}}{\Phi_j}$, $i = 0, 1, ...,$ *також збіжні. Якщо ДНД* (5) *є збіжним, але деякі його піддроби — розбіжні, то ДНД* (5) *називається умовно збіжним.*

З Твердження 1 випливає таке твердження.

**Твердження 2.** *Для того, щоб ДНД (5) з дійсними додатними елементами збігався, необхідно і достатньо, щоб* $\lim\limits_{n\to\infty}(f_{2n+1}-f_{2n})=0.$

**Теорема 2.** *Для ДНД (6) з дійсними додатними елементами безумовна збіжність еквівалентна звичайній збіжності.*

***Доведення.*** Необхідно довести, що зі збіжності ДНД (6) випливає збіжність усіх його піддробів. Розглянемо ДНД

$$\overset{\infty}{\underset{j=1}{D}}\frac{a_{1+j,1}}{b_{1+j,1}}+\overset{\infty}{\underset{j=1}{D}}\frac{a_{1,1+j}}{b_{1,1+j}}+\overset{\infty}{\underset{j=2}{D}}\frac{a_{j,j}}{\Phi_j}, \tag{23}$$

позначимо його $n$-те наближення через $f_1^{(n)}$. З властивості вилки для ДНД (23) випливає, що існують скінченні границі

$$\lim_{n\to\infty} f_1^{(2n+1)}=F_1, \quad \lim_{n\to\infty} f_1^{(2n)}=F_2$$

і виконуються нерівності

$$F_2\le F_1. \tag{24}$$

Оскільки ДНД (6) збіжний, то

$$\Phi_0+\frac{a_{1,1}}{b_{1,1}+F_1}=\Phi_0+\frac{a_{1,1}}{b_{1,1}+F_2},$$

а тому, враховуючи (24), маємо $F_1=F_2$, що еквівалентно збіжності ДНД (6). Аналогічно доводимо збіжність ДНД (6) для довільного натурального $i$.

Нехай $\{\tilde f_k\}$ — впорядкована послідовність фігурних наближень ДНД (5) або ДНД (6). Позначимо через $d_k$ і $D_k$ мінімальну та максимальну довжини гілок наближення $\tilde f_k$ відповідно. Припускаємо, що $d_k\to\infty$ при $k\to\infty$.

*Говоримо, що ДНД* (5) (або ДНД (6)) *фігурно збіжний, якщо всі фігурні наближення* $\tilde f_k$, $k=1,2,...,$ *мають сенс або тільки скінченне число* $\tilde f_k$ *не мають сенсу, мінімальна довжина* $d_k$ *гілок* $k$*-го наближення прямує до нескінченності при* $k\to\infty$*, існує і скінченна границя послідовності фігурних наближень* $\tilde f_k$ *при* $k\to\infty$.

Для двовимірних неперервних дробів з додатними дійсними елементами встановимо еквівалентність фігурної і звичайної збіжності.

**Теорема3.** *Якщо ДНД* (6) *з дійсними додатними елементами збіжний, то він збіжний до тієї ж границі фігурно.*

***Доведення***. Розглянемо скінченний ДНД

$$\hat{f}_{2k+1} = \hat{\Phi}_0^{(2k+1)} + \mathop{D}_{i=1}^{2k+1} \frac{a_{i,i}}{\hat{\Phi}_i^{(2k+1-i)}}, \tag{25}$$

де $\hat{\Phi}_i^{(2k+1-i)} = \hat{b}_{i,i} + \mathop{D}_{j=1}^{2k+1-i} \frac{a_{i+j,i}}{\hat{b}_{i+j,i}} + \mathop{D}_{j=1}^{2k+1-i} \frac{a_{i,i+j}}{\hat{b}_{i,i+j}}$, $\hat{\Phi}_{2k+1}^{(0)} =$ $= \hat{b}_{2k+1,2k+1}$, $\hat{b}_{i,i} = b_{i,i}$, $\hat{b}_{i,j} = b_{i,j}$, якщо $i \le 2k, j \le$ $\le 2k$; $\hat{b}_{2k+1,2k+1} \ge b_{2k+1,2k+1}$, $\hat{b}_{2k+1,i} \ge b_{2k+1,i}$, $\hat{b}_{i,2k+1} \ge$ $\ge b_{i,2k+1}$, $i = 1, 2, ..., 2k$.

Для дробу (25) введемо позначення його залишків

$$\hat{Q}_i^{(2k+1-i)} = \hat{\Phi}_i^{(2k+1-i)} + \frac{a_{i+1,i+1}}{\hat{Q}_{i+1}^{(2k-i)}}, \quad i = 0, 1, ..., 2k+1,$$

$$\hat{Q}_{2k+1}^{(0)} = \hat{\Phi}_{2k+1}^{(0)} = \hat{b}_{2k+1,2k+1},$$

$$\hat{Q}_{i+p,i}^{(2k+1-i)} = \hat{b}_{i+p,i} + \frac{a_{i+p+1,i}}{\hat{Q}_{i+p+1,i}^{(2k+1-i)}}, \quad \hat{Q}_{i,i+p}^{(2k+1-i)} = \hat{b}_{i,i+p} + \frac{a_{i,i+p+1}}{\hat{Q}_{i,i+p+1}^{(2k+1-i)}},$$

$$\hat{Q}_{2k+1,i}^{(2k+1-i)} = \hat{b}_{2k+1,i}; \quad \hat{Q}_{i,2k+1}^{(2k+1-i)} = \hat{b}_{i,2k+1}, \quad p = 0, ..., 2k+1-i.$$

Легко показати, що

$$\hat{Q}_{2i+1}^{(2k-2i)} \ge Q_{2i+1}^{(2k-2i)}, \quad i = 0, ..., k.$$

Дійсно, з формули

$$\hat{Q}_{2i+1}^{(2k-2i)} = \hat{\Phi}_{2i+1}^{(2k-2i)} + \cfrac{a_{2i+2,2i+2}}{\hat{\Phi}_{2i+2}^{(2k-2i-1)} + \cfrac{a_{2i+3,2i+3}}{\hat{Q}_{2i+3}^{(2k-2i-2)}}}$$

при $i=k$ випливають співвідношення: $\hat{Q}^{(0)}_{2k+1}=\hat{\Phi}^{(0)}_{2k+1}=$
$=\hat{b}_{2k+1,2k+1}\geq b_{2k+1,2k+1}=Q^{(0)}_{2k+1}$.

Нехай тепер при $i=s:\ \ \hat{Q}^{(2k-2s)}_{2s+1}\geq Q^{(2k-2s)}_{2s+1}$.

Тоді при $i=s-1$:

$$\hat{Q}^{(2k-2s+2)}_{2s-1}=\hat{\Phi}^{(2k-2s+2)}_{2s-1}+\frac{a_{2s,2s}}{\hat{\Phi}^{(2k-2s+1)}_{2s}+\dfrac{a_{2s+1,2s+1}}{\hat{Q}^{(2k-2s)}_{2s+1}}}\geq$$

$$\geq\hat{\Phi}^{(2k-2s+2)}_{2s-1}+\frac{a_{2s,2s}}{\hat{\Phi}^{(2k-2s+1)}_{2s}+\dfrac{a_{2s+1,2s+1}}{Q^{(2k-2s)}_{2s+1}}}.$$

Дослідимо одновимірні залишки. При $p=2k+1-i$:

$$\hat{Q}^{(2k+1-i)}_{2k+1,i}=\hat{b}_{2k+1,i}\geq b_{2k+1,i};\ \ \hat{Q}^{(2k+1-i)}_{i,2k+1}=\hat{b}_{i,2k+1}\geq b_{i,2k+1}.$$

Припустимо, що при $p=2k+s-i$ :

$$\hat{Q}^{(2k+1-i)}_{2k+s,i}\geq Q^{(2k+1-i)}_{2k+s,i}\ \text{і}\ \hat{Q}^{(2k+1-i)}_{i,k+1}\geq Q^{(2k+1-i)}_{i,k+1}.$$

Тоді при $p=2k+s-1-i$ маємо співвідношення:

$$\hat{Q}^{(2k+1-i)}_{2k+s-1,i}=b_{2k+s-1,i}+\frac{a_{2k+s,i}}{\hat{Q}^{(2k+1-i)}_{2k+s,i}}\leq Q^{(2k+1-i)}_{2k+s-1,i},$$

і при $p=2k+s-2-i$ одержуємо

$$\hat{Q}^{(2k+1-i)}_{2k+s-2,i}=b_{2k+s-2,i}+\frac{a_{2k+s-1,i}}{\hat{Q}^{(2k+1-i)}_{2k+s-1,i}}\geq Q^{(2k+1-i)}_{2k+s-2,i}.$$

Аналогічні оцінки отримуємо і для симетричних значень індексів.

Тому

$$\hat{Q}^{(2k-2s+1)}_{2s}=b_{2s,2s}+\frac{a_{2s+1,2s}}{Q^{(2k-2s+1)}_{2s+1,2s}}+\frac{a_{2s,2s+1}}{Q^{(2k-2s+1)}_{2s,2s+1}}+\frac{a_{2s+1,2s+1}}{Q^{(2k-2s)}_{2s+1}}\leq$$

$$\leq Q^{(2k-2s+1)}_{2s},$$

і звідси відразу маємо, що

$$\hat{Q}_{2s-1}^{(2k-2s+2)} \geq b_{2s-1,2s-1} + \frac{a_{2s,2s-1}}{Q_{2s,2s-1}^{(2k-2s+2)}} + \frac{a_{2s-1,2s}}{Q_{2s-1,2s}^{(2k-2s+2)}} +$$

$$+ \frac{a_{2s,2s}}{Q_{2s}^{(2k-2s+1)}} = Q_{2s-1}^{(2k-2s+2)},$$

де $Q_{2i+1}^{(2k-2i)}, Q_{2k+s,i}^{(2k+1-i)}, Q_{i,2k+s}^{(2k+1-i)}$ — залишки ДНД (6). Тому $\hat{f}_{2k+1} \leq f_{2k+1}$. З властивості вилки випливає, що $f_{2k} \leq \hat{f}_{2k+1}$.

Для довільного, як завгодно великого номера $p$ знайдеться такий номер $k$, який залежить від $p$ і такий, що для всіх $n \geq p$ виконується оцінка $f_{2k} < \tilde{f}_n \leq f_{2k+1}$. Число $k$ вибираємо з умови $2k+1 \leq \min(d_n : n \geq p) \leq 2k+2$. Оскільки $d_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то і $k \to \infty$ при $n \to \infty$.

**3. Висновки.** Вибираючи різні типи наближень двовимірних неперервних дробів, і враховуючи їх властивості, можемо досліджувати різні типи збіжності як числових, так і функціональних ДНД.


1. *Kuchmins'ka Kh.* Some properties of two-dimensional continued fractions // J. Comp. and Appl. Math. – 1999. – **105**. – P.347–353.
2. *Боднар Д. И., Кучминская Х. И.* О сходимости разложения функций двух переменных в соответствующую ветвящуюся цепную дробь // Мат. методы и физ.-мех.поля. – 1980. – **11**.– С. 3–6.
3. *Кучмінська Х. Й.* Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 7. – С. 614–618.
4. *Murphy J. A.,O'Donohoe M .R.* A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions // J.Comp. and Appl.Math. – 1978. – № 4. – P. 181–190.
5. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176с.