Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2010, Т.7, №1, 128-144

УДК 517.984.48

В. М. Молибога (Інститут математики НАН України, Київ)

ПОВНОТА СИСТЕМИ КОРЕНЕВИХ ВЕКТОРІВ ДЕЯКИХ НЕСАМОСПРЯЖЕНИХ ОПЕРАТОРІВ*

In the paper we prove a completeness in the Hilbert space $L^2(0,1)$ *of the rootvector system of the singular perturbed, non-selfadjoint operators, generated on the interval by the two-terms differential expressions of the even order* $2m$ *with potentials, which are the periodic, complex-valued distributions of the order* m*, and subject to the anti-periodic boundary conditions.*

The case of the periodic boundary conditions was studied by the author in the paper [1].

В роботі доведено повноту в гільбертовому просторі $L^2(0,1)$ *системи кореневих векторів сингулярно збурених, несамоспряжених операторів, породжених на відрізку двочленними диференціальними виразами парного порядку* $2m$ *з потенціалами, що є періодичними, комплекснозначними узагальненими функціями порядку* m*, та антиперіодичними граничними умовами.*

Випадок періодичних граничних умов був розглянутий автором в роботі [1].

1. Вступ та основні результати. Починаючи з класичної роботи Кроніга та Пенні [2] в математичну фізику ввійшли оператори Шрьодінгера з потенціалами, що є періодичними узагальненими функціями. Подальший розвиток квантової механіки стимулював активний розвиток цього наукового напрямку (див. бібліографію моно-

* Дослідження підтримано Державним Фондом Фундаментальних Досліджень України, грант № 28.1/017.

графії [3], яка налічує понад 600 публікацій, а також недавні роботи [4, 5] та посилання там).

В роботі ми досліджуємо сингулярно збурені, несамоспряжені в комплексному гільбертовому просторі $L^2(0,1)$ оператори, які породжені на відрізку двочленними диференціальними виразами парного порядку $2m$ з потенціалами, що є періодичними, комплекснозначними узагальненими функціями порядку m, та антиперіодичними граничними умовами:

$$S_-(V)u \equiv S_-u := D_-^{2m}u + V(x)u, \quad m \in \mathbb{N},$$

- $D_-^{2m} := (-1)^m \dfrac{d^{2m}}{dx^{2m}}$, $\mathrm{Dom}(D_-^{2m}) = H_-^{2m}[0,1]$,
- $V(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{V}(k)e^{i\,k2\pi x} \in H_+^{-m}[0,1]$, тобто $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|)^{-2m}|\widehat{V}(k)|^2 < \infty$,
- $\mathrm{Dom}(S_-(V)) = \left\{u \in H_-^m[0,1] \,\middle|\, S_-(V)u \in L^2(0,1)\right\}.$

Тут через $H_+^{-m}[0,1]$ позначено негативний простір Соболєва періодичних узагальнених функцій, а через $H_-^m[0,1]$ — простір Соболєва функцій, які на кінцях відрізку задовольняють антиперіодичну умову:

$$H_-^m[0,1] := \left\{u \in H^m[0,1] \,\middle|\, u^{(j)}(0) = -u^{(j)}(1),\ j = \overline{0, m-1}\right\}.$$

Детальний опис просторів Соболєва $H_\pm^s[0,1]$, $s \in \mathbb{R}$, *періодичних/півперіодичних* функцій та узагальнених функцій наведено в пункті 2.1.

Відомо, див. [6–8], що оператори $S_-(V)$ коректно визначені в гільбертовому просторі $L^2(0,1)$ як форм-суми [8] (Теорема 1). Оператори $S_-(V)$ можуть бути також визначені в еквівалентний спосіб як границі послідовностей операторів з гладкими потенціалами в сенсі рівномірної резольвентної збіжності [8] (Теорема 5). Оператори $S_-(V)$ є m-секторіальними відносно довільного сектора, що містить додатну піввісь; спектр операторів $S_-(V)$ є дискретним з єдиною граничною точкою на нескінченності; оператори $S_-(V)$ самоспряжені тоді і тільки тоді, коли потенціал $V(x)$ є дійсним [8] (Теорема 4). В роботах [6–8] були знайдені оцінки власних значень, зокрема асимптотичні.

Основна мета даної роботи — встановити повноту системи кореневих векторів сингулярно збурених, несамоспряжених операторів $S_{-}(V)$.

Теорема 1. *Система всіх кореневих векторів операторів* $S_{-}(V)$ *є повною в гільбертовому просторі* $L^2(0,1)$.

Випадок періодичних граничних умов був досліджений автором раніше в роботі [1]. Випадок $m=1$ вивчався в [9] та [10].

2. Допоміжні результати. В цьому розділі ми даємо опис просторів Соболєва *періодичних/півперіодичних* функцій та узагальнених функцій, а також доводимо теорему про квазіядерність резольвенти операторів $S_{-}(V)$.

2.1. Простори Соболєва періодичних узагальнених функцій. Нехай $C_{+}^{\infty} \equiv C_{1,+}^{\infty}([0,1])$ — простір 1-періодичних, нескінченно диференційовних функцій (простір основних функцій), елементи якого мають представлення:

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(k) e^{i\,k2\pi x} \in C_{+}^{\infty},$$
$$\widehat{\varphi}(k) = \left(\varphi(x), e^{i\,k2\pi x}\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Тут через $(\cdot\,,\cdot)$ позначено скалярний добуток в гільбертовому просторі $L^2(0,1)$:

$$(u,v) := \int_0^1 u(x)\overline{v(x)}d\,x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(k)\overline{\widehat{v}(k)}, \quad u,v \in L^2(0,1),$$

і

$$\widehat{u}(k) \;= \left(u(x), e^{i\,k2\pi x}\right), \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$\widehat{v}(k) \;= \left(v(x), e^{i\,k2\pi x}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Нехай тепер $\mathfrak{D}'_{+} \equiv \mathfrak{D}'_{1,+}([0,1])$ — простір 1-періодичних узагальнених функцій (простір лінійних неперервних функціоналів над простором основних функцій) [11, 12], елементи якого мають представлення:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{i\,k2\pi x} \in \mathfrak{D}'_+,$$
$$\widehat{f}(k) = \left\langle f(x), e^{i\,k2\pi x}\right\rangle_+, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Тут через $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_+$ позначено півторалінійну форму, яка спарює простори $\mathfrak{D}'_+$ та C^∞_+ відносно простору $L^2(0,1)$, і яка є розширенням за неперервністю скалярного добутку в $L^2(0,1)$ [13].

Значення функціонала $f(x) \in \mathfrak{D}'_+$ на елементі $\varphi \in C^\infty_+$ визначається формулою:

$$\langle f, \varphi\rangle_+ = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{\varphi}(k)}, \qquad f \in \mathfrak{D}'_+,\ \varphi \in C^\infty_+.$$

Через $H^s_+[0,1]$, $s \in \mathbb{R}$, позначимо простір Соболєва 1-періодичних функцій/узагальнених функцій, який ми визначимо за допомогою коефіцієнтів Фур'є:

$$H^s_+[0,1] := \left\{ f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{i\,k2\pi x} \in \mathfrak{D}'_+ \,\middle|\, \|f\|_{H^s_+[0,1]} < \infty \right\},$$
$$\|f\|_{H^s_+[0,1]} := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2}, \quad \langle k\rangle := 1 + |k|,$$
$$\widehat{f}(k) := \langle f(x), e^{i\,k2\pi x}\rangle_+, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Як добре відомо,

$$C^\infty_+ = \bigcap_{s\geq 0} H^s_+[0,1], \qquad \mathfrak{D}'_+ = \bigcup_{s\geq 0} H^{-s}_+[0,1].$$

Далі, нехай

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(k) e^{i\,k2\pi x} \in \mathfrak{D}'_+,$$
$$v(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{v}(k) e^{i\,k2\pi x} \in \mathfrak{D}'_+$$

— дві довільні періодичні узагальнені функції. Їх добуток $u \cdot v$ формально визначимо в такий спосіб (формально перемножимо два ряди та згрупуємо):

$$(u \cdot v)(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(k-j)\widehat{v}(j) \right) e^{i\, k2\pi x} \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\widehat{u \cdot v})(k) e^{i\, k2\pi x}.$$

Умову збіжності формального ряду

$$(\widehat{u \cdot v})(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(k-j)\widehat{v}(j)$$

дає відома лема про згортку (див. нижче).

Нехай

$$h^s \equiv h^s(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$$

— ваговий гільбертів простір двосторонніх послідовностей:

$$h^s := \left\{ a = \{a(k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \,\middle|\, \|a\|^2_{h^s} := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|)^{2s} |a(k)|^2 < \infty \right\}.$$

Для двох довільних двосторонніх послідовностей $a = \{a(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ та $b = \{b(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ операцію згортки визначимо таким чином:

$$(a, b) \mapsto a * b,$$
$$(a * b)(k) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} a(k-j) b(j).$$

Лема 2 (Лема про згортку [14, 15]). *Нехай* $s, r \in \mathbb{R}_+$, $t \in \mathbb{R}$ *і* $t \le \min(s, r)$.

(I) *Якщо* $s + r - t > 1/2$, *тоді операція згортки* $(a, b) \mapsto a * b$ *є неперервним відображенням, що діє в просторах*:

$$(a)\ h^s \times h^r \to h^t, \qquad (b)\ h^{-t} \times h^s \to h^{-r}.$$

(II) *У випадку* $s + r - t < 1/2$ *твердження про неперервність операції згортки є хибним.*

Нехай тепер $C_-^\infty \equiv C_{1,-}^\infty([0,1])$ — простір 1-півперіодичних, нескінченно диференційовних функцій:

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(k) e^{i\,(k+1/2)2\pi x} \in C_-^\infty,$$
$$\widehat{\varphi}(k) = \left(\varphi(x), e^{i\,(k+1/2)2\pi x}\right), \qquad k \in \mathbb{Z},$$

а $\mathfrak{D}'_- \equiv \mathfrak{D}'_{1,-}([0,1])$ — простір 1-півперіодичних узагальнених функцій:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{i\,(k+1/2)2\pi x} \in \mathfrak{D}'_-,$$
$$\widehat{f}(k) = \left\langle f(x), e^{i\,(k+1/2)2\pi x}\right\rangle_-, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Властивості простору $\mathfrak{D}'_-$ аналогічні до властивостей простору $\mathfrak{D}'_+$. Простори Соболєва $H_-^s[0,1]$, $s \in \mathbb{R}$, 1-півперіодичних функцій/узагальнених функцій визначаються за допомогою коефіцієнтів Фур'є аналогічно до визначення просторів $H_+^s[0,1]$, $s \in \mathbb{R}$.

Нехай маємо дві узагальнені функції: періодичну і півперіодичну:

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(k) e^{i\,k2\pi x} \in \mathfrak{D}'_+,$$
$$v(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{v}(k) e^{i\,(k+1/2)2\pi x} \in \mathfrak{D}'_-.$$

Їх добуток $u \cdot v$ формально визначимо таким чином:

$$(u \cdot v)(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(k-j)\widehat{v}(j) \right) e^{i\,(k+1/2)2\pi x} \equiv$$
$$\equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\widehat{u \cdot v})(k) e^{i\,(k+1/2)2\pi x}.$$

Умову збіжності формального ряду

$$(\widehat{u \cdot v})(k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(k-j)\widehat{v}(j)$$

визначає лема 2 про згортку. Варто зауважити, що результатом добутку є півперіодична узагальнена функція.

2.2. Резольвента операторів $S_-(V)$. Основним результатом цього пункту є теорема про квазіядерність резольвенти $R(\lambda, S_-(V))$ операторів $S_-(V)$.

Теорема 3. *Резольвента $R(\lambda, S_-(V))$ оператора $S_-(V)$ є оператором Гільберта–Шмідта.*

3.1. ***Зауваження.*** Має місце більш сильний результат, але для доведення теореми 1 нам достатньо твердження теореми 3.

Оператори $S_-(V)$ визначені в гільбертовому просторі $L^2(0,1)$ як форм-суми, і, як відомо, мають компактну резольвенту $R(\lambda, S_-(V))$ [8] (Твердження 2).

При доведенні теореми 3 використаємо матричне представлення резольвенти $R(\lambda, S_-(V))$.

Нехай оператор A визначений в просторі $\mathfrak{D}'_-$ півперіодичних узагальнених функцій. Тоді його формальне матричне представлення знаходимо за формулами:

$$A = \{A(k,j)\}_{k,j\in\mathbb{Z}},$$
$$A(k,j) = \left\langle A\, e^{i\left(j+\frac{1}{2}\right)2\pi x}, e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)2\pi x} \right\rangle_-, \qquad k,j \in \mathbb{Z}.$$

Отже, при

$$\lambda \notin \operatorname{spec}(D_-^{2m}) = \{(n+1/2)^{2m}(2\pi)^{2m},\ n \in \mathbb{Z}_+\}$$

оператори D_-^{2m}, $V = V(x)\cdot$ (оператор множення на періодичну узагальнену функцію $V(x)$) та $(\lambda - D_-^{2m})^{-1}$ мають представлення ($k, j \in \mathbb{Z}$):

$$D_-^{2m}(k,j) = (k+1/2)^{2m}(2\pi)^{2m}\delta_{kj},$$
$$V(k,j) = \widehat{V}(k-j),$$
$$(\lambda - D_-^{2m})(k,j) = (\lambda - (k+1/2)^{2m}(2\pi)^{2m})\delta_{kj},$$

і

$$(\lambda - D_-^{2m})^{-1}(k,j) = \frac{1}{\lambda - (k+1/2)^{2m}(2\pi)^{2m}}\delta_{kj},$$

де δ_{kj} — символ Кронекера.

Розглянемо підмножину комплексної площини $\mathbb{C}$:

$$\mathrm{Ext}_M := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\lambda| \geq \mathrm{Re}\lambda + M\}, \quad M \geq 1,$$

яка є зовнішністю сектора, що містить додатну піввісь.

Твердження 4. *Нехай 1-періодичні узагальнені функції $V(x)$ належать негативному простору Соболева $H_+^{-m}[0,1]$ і $\|V\|_{H_+^{-m}[0,1]} \leq R$, $R > 0$. Існує таке число $M = M(m,R) \geq 1$, що множина Ext_M належить всім резольвентним множинам $\mathrm{Resolv}(S_-(V))$ операторів $S_-(V)$:*

$$\mathrm{Ext}_M \subset \bigcap_{V(x)\in\mathfrak{B}_R^{-m}} \mathrm{Resolv}(S_-(V)),$$

$$\mathfrak{B}_R^{-m} := \left\{ f(x) \in H_+^{-m}[0,1] \,\middle|\, \|f\|_{H_+^{-m}[0,1]} \leq R \right\},$$

і для $\lambda \in \mathrm{Ext}_M$ резольвента $R(\lambda, S_-(V)) \equiv R(\lambda)$ має представлення:

$$R(\lambda) = U_\lambda|\lambda - D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{Id} - |\lambda - D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}V|\lambda - D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}U_\lambda)^{-1}\times \\ \times|\lambda - D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

В представленні (1) оператори U_λ та $|\lambda - D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}$ визначаємо з полярного розкладу:

$$(\lambda - D_-^{2m})^{-1} = U_\lambda \left|(\lambda - D_-^{2m})^{-1}\right|.$$

Введемо позначення

$$A(\lambda, V(x)) \equiv A_\lambda := |\lambda - D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}V|\lambda - D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}.$$

Оператор $A(\lambda, V(x))$ є добре визначеним, обмеженим оператором в гільбертовому просторі $L^2(0,1)$:

$$\begin{aligned} |\lambda - D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}} &: \ L^2(0,1) \to H_+^m[0,1], \\ V &: \ H_+^m[0,1] \to H_+^{-m}[0,1], \\ |\lambda - D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}} &: \ H_+^{-m}[0,1] \to L^2(0,1). \end{aligned}$$

Знайдемо матричне представлення оператора $A(\lambda, V(x))$. Маємо $(k, j \in \mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned}
|(\lambda - D_-^{2m})^{-1}|(k,j) &= |(\lambda - D_-^{2m})|^{-1}(k,j) \\
&= \frac{1}{|\lambda - (k+1/2)^{2m}(2\pi)^{2m}|}\delta_{kj}, \\
|(\lambda - D_-^{2m})|^{-\frac{1}{2}}(k,j) &= \frac{1}{|\lambda - (k+1/2)^{2m}(2\pi)^{2m}|^{\frac{1}{2}}}\delta_{kj}, \\
U_\lambda(k,j) &= \frac{|\lambda - (k+1/2)^{2m}(2\pi)^{2m}|}{\lambda - (k+1/2)^{2m}(2\pi)^{2m}}\delta_{kj},
\end{aligned}$$

і

$$A_\lambda(k,j) = \frac{\widehat{V}(k-j)}{|\lambda - (k+1/2)^{2m}(2\pi)^{2m}|^{\frac{1}{2}}|\lambda - (j+1/2)^{2m}(2\pi)^{2m}|^{\frac{1}{2}}}.$$

Лема 5. *Нехай* $V(x) \in H_+^{-m}[0,1]$ *і* $\|V\|_{H_+^{-m}[0,1]} \leq R$, $R > 0$. *Оператор*

$$A(\lambda, V(x)) = |\lambda - D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}} V |\lambda - D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}$$

є оператором Гільберта–Шмідта в гільбертовому просторі $L^2(0,1)$, *і для* $\lambda \in \mathrm{Ext}_M$, $M \geq 1$, *виконуються оцінки*:

$$\|A(\lambda, V(x))\|_{HS} \leq \frac{2^{2m+1}\|V\|_{H_+^{-m}[0,1]}}{M^{1/4}} \leq \frac{2^{2m+1}R}{M^{1/4}}.$$

Тут через $\|\cdot\|_{HS}$ позначено норму Гільберта–Шмідта оператора.

Доведення. Нехай $\lambda \in \mathrm{Ext}_M$, $M \geq 1$, $\langle k \rangle = 1 + |k|$. Використовуючи лему A.1 (див. Додаток A), отримуємо:

$$\|A_\lambda\|_{HS}^2 = \sum_{k,j\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{V}(k-j)|^2}{|\lambda-(k+\frac{1}{2})^{2m}(2\pi)^{2m}||\lambda-(j+\frac{1}{2})^{2m}(2\pi)^{2m}|} \le$$

$$\le \sum_{k,j\in\mathbb{Z}} \frac{\langle k-j\rangle^{-2m}|\widehat{V}(k-j)|^2\langle k-j\rangle^{2m}}{|\lambda-(k+\frac{1}{2})^{2m}(2\pi)^{2m}||\lambda-(j+\frac{1}{2})^{2m}(2\pi)^{2m}|} \overset{\text{Л. A.1}(a),(d)}{\le}$$

$$\overset{\text{Л. A.1}(a),(d)}{\le} 2^{2m+1}\times$$

$$\times \sum_{k,j\in\mathbb{Z}} \frac{\langle k-j\rangle^{-2m}|\widehat{V}(k-j)|^2\left(\langle k\rangle^{2m}+\langle j\rangle^{2m}\right)}{|M+(k+\frac{1}{2})^{2m}(2\pi)^{2m}||M+(j+\frac{1}{2})^{2m}(2\pi)^{2m}|} =$$

$$= 2^{2m+2}\sum_{k,j\in\mathbb{Z}} \frac{\langle k-j\rangle^{-2m}|\widehat{V}(k-j)|^2\langle k\rangle^{2m}}{|M+(k+\frac{1}{2})^{2m}(2\pi)^{2m}||M+(j+\frac{1}{2})^{2m}(2\pi)^{2m}|} \le$$

$$\le 2^{2m+2}\sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\langle k\rangle^{2m}}{M+k^{2m}\pi^{2m}}\times$$

$$\times \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{M+j^{2m}\pi^{2m}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k-j\rangle^{-2m}|\widehat{V}(k-j)|^2 \overset{\text{Л. A.1}(b),(c)}{\le}$$

$$\overset{\text{Л. A.1}(b),(c)}{\le} 2^{2m+2}\cdot 2^{2m}\cdot\frac{1}{\sqrt{M}}\cdot\|V\|^2_{H_+^{-m}[0,1]} = \frac{2^{4m+2}\|V\|^2_{H_+^{-m}[0,1]}}{\sqrt{M}}.$$

Таким чином, остаточно маємо необхідні нам оцінки:

$$\|A(\lambda,V(x))\|_{HS} \le \frac{2^{2m+1}\|V\|_{H^{-m}(\mathbb{T})}}{M^{1/4}} \le \frac{2^{2m+1}R}{M^{1/4}}.$$

Лему 5 доведено. □

***Доведення твердження* 4.** Введемо позначення

$$K(\lambda,V(x)) \equiv K_\lambda := (\mathrm{Id}-|\lambda-D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}V|\lambda-D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}U_\lambda)^{-1}. \qquad (2)$$

Оператори $K(\lambda,V(x))$ є коректно визначеними в гільбертовому просторі $L^2(0,1)$ за умови, що

$$\operatorname{spr}|\lambda-D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}V|\lambda-D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}U_\lambda < 1,$$

spr A — спектральний радіус оператора A.

Враховуючи, що $\|U_\lambda\| = 1$, отримуємо

$$\begin{aligned} \operatorname{spr} |\lambda - D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}} V |\lambda - D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}} U_\lambda \leq \\ \leq \left\| |\lambda - D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}} V |\lambda - D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}} U_\lambda \right\| \leq \\ \leq \left\| |\lambda - D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}} V |\lambda - D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}} \right\| \leq \|A(\lambda, V(x))\|_{HS} . \end{aligned}$$

Далі, враховуючи лему 5, можемо вибрати число $M = M(m, R) \geq 1$ таким чином, щоб виконувалася оцінка

$$\operatorname{spr} K_\lambda \leq \|A_\lambda\|_{HS} \leq \frac{2^{2m+1} R}{M^{1/4}} \leq \frac{1}{4}. \tag{3}$$

Нехай

$$M := \left(2^{2m+3} R\right)^4 ,$$

тоді виконується (3), і ми робимо висновок, що оператори $K(\lambda, V(x))$ є коректно визначеними в просторі $L^2(0,1)$.

Нехай тепер $\lambda \in \operatorname{Ext}_M$, $M = \left(2^{2m+3} R\right)^4$. Введемо позначення

$$T(\lambda, V(x)) \equiv T_\lambda := U_\lambda |\lambda - D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}} K(\lambda, V(x)) |\lambda - D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}} .$$

Згідно з наведеними вище міркуваннями оператори $T(\lambda, V(x))$ є коректно визначеними в гільбертовому просторі $L^2(0,1)$.

Тепер основна мета — це довести, що

$$R(\lambda, S_-(V)) \equiv T(\lambda, V(x)), \quad \lambda \in \operatorname{Ext}_M,\ M \geq \left(2^{2m+3} R\right)^4 .$$

Нехай $\{V_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ — послідовність 1-періодичних, нескінченно диференційовних функцій, яка збігається в негативному просторі Соболєва $H_+^{-m}[0,1]$ до 1-періодичної узагальненої функції $V(x)$:

$$V_n(x) \overset{H_+^{-m}[0,1]}{\longrightarrow} V(x), \quad n \to \infty.$$

Тоді для достатньо великих n маємо:

$$\|V_n(x)\|_{H_+^{-m}[0,1]} \leq 2R, \quad n \geq n_0(R).$$

Отже, при $M=(2^{2m+3}R)^4$ отримуємо

$$\operatorname{spr}|\lambda-D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}V_n|\lambda-D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}U_\lambda\le\|A(\lambda,V_n(x))\|_{HS}\le\frac{1}{2},$$

і тому оператори

$$T(\lambda,V_n(x))=U_\lambda|\lambda-D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}K(\lambda,V_n(x))|\lambda-D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}$$

є коректно визначеними в гільбертовому просторі $L^2(0,1)$.

Далі,

$$\begin{aligned}&T(\lambda,V(x))-T(\lambda,V_n(x))=U_\lambda|\lambda-D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}\times\\&\times\left(K(\lambda,V(x))-K(\lambda,V_n(x))\right)|\lambda-D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}=\\&=U_\lambda|\lambda-D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}K(\lambda,V(x))|\lambda-D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}\times\\&\times(V-V_n)|\lambda-D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}U_\lambda K(\lambda,V_n(x))|\lambda-D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Тому при $\lambda\in\mathrm{Ext}_M$, $M=\left(2^{2m+3}R\right)^4$, отримуємо

$$\begin{aligned}&\|T(\lambda,V(x))-T(\lambda,V_n(x))\|\le\\&\le C\||\lambda-D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}(V-V_n)|\lambda-D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}\|\le\\&\le C\|A(\lambda,V(x)-V_n(x))\|_{HS}\le C\|V(x)-V_n(x)\|_{H_+^{-m}[0,1]},\end{aligned}$$

тобто

$$T(\lambda,V_n(x))\rightrightarrows T(\lambda,V(x)),\ n\to\infty. \tag{A}$$

З іншого боку [8] (Теорема 5):

$$R(\lambda,S_-(V_n))\rightrightarrows R(\lambda,S_-(V)),\ n\to\infty. \tag{B}$$

Але при $V_n(x)\in L^2(0,1)$, $n\ge n_0(R)$, неважко переконатися, що

$$R(\lambda,S_-(V_n))\equiv T(\lambda,V_n(x)). \tag{4}$$

Далі, приймаючи до уваги [8] (Теорема 4(a)), приходимо до висновку, що існує таке число $M=M(m,R)\ge 1$, що

$$\mathrm{Ext}_M\subseteq\mathrm{Resolv}(S_-(V))\bigcap\bigcap_{n\ge n_0(R)}\mathrm{Resolv}(S_-(V_n)).$$

Застосовуючи тепер (A), (B) та (4), отримуємо потрібний нам результат:

$$R(\lambda, S_-(V)) \equiv T(\lambda, V(x)), \quad \lambda \in \mathrm{Ext}_M,\ M \geq \left(2^{2m+3}R\right)^4.$$

Твердження 4 повністю доведено. $\square$

Доведення теореми 3. Згідно з твердженням 4 існує таке число $M = M(m, R) \geq 1$, що

$$\mathrm{Ext}_M \subseteq \mathrm{Resolv}(S_-(V)),$$

і для $\lambda \in \mathrm{Ext}_M$ резольвента $R(\lambda, S_-(V))$ має представлення (1).

Приймаючи до уваги, що оператор $|\lambda - D_-^{2m}|^{-\frac{1}{2}}$ є оператором Гільберта–Шмідта в гільбертовому просторі $L^2(0,1)$ ($\in \mathfrak{S}_2$ — двосторонній ідеал в кільці $\mathscr{L}(L^2(0,1))$ обмежених операторів в $L^2(0,1)$), і що оператори $K(\lambda, V(x))$ (2) є обмеженими в просторі $L^2(0,1)$, отримуємо:

$$R(\lambda, S_-(V)) \in \mathfrak{S}_2, \qquad \lambda \in \mathrm{Ext}_M,\ M \geq \left(2^{2m+3}R\right)^4. \tag{5}$$

Застосовуючи тепер тотожність Гільберта:

$$R(\mu) = R(\lambda) + (\mu - \lambda)R(\mu)R(\lambda), \quad \mu \in \mathrm{Resolv}(S_-),\ \lambda \in \mathrm{Ext}_M,$$

і враховуючи, що $\mathfrak{S}_2$ — двосторонній ідеал, отримуємо:

$$R(\lambda, S_-(V)) \in \mathfrak{S}_2, \qquad \lambda \in \mathrm{Resolv}(S_-(V)).$$

Теорему 3 доведено. $\square$

3. Доведення теореми 1. Оператори $S_-(V)$ визначені в гільбертовому просторі $L^2(0,1)$ як форм-суми [8] (Теорема 1) і згідно з [8] (Теорема 4) є m-секторіальними відносно довільного сектора, що містить додатну піввісь.

Нагадаємо, що оператор A визначений в гільбертовому просторі H називається *m-секторіальним*, якщо його числова область значень $\Theta(A)$:

$$\Theta(A) := (Au, u)_H, \quad u \in \mathrm{Dom}(A), \quad \|u\|_H = 1,$$

міститься в секторі $\mathrm{Sect}(\gamma,\theta)$ (з *вершиною* γ та *півкутом* θ) комплексної площини $\mathbb{C}$:

$$\Theta(A) \subseteq \mathrm{Sect}(\gamma,\theta),$$
$$\mathrm{Sect}(\gamma,\theta) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg(\lambda-\gamma)| \le \theta\}, \qquad 0 \le \theta < \frac{\pi}{2},$$

а зовнішність сектора $\mathrm{Sect}(\gamma,\theta)$ належить резольвентній множині $\mathrm{Resolv}(A)$ оператора A [16] (Гл. V, §3.10).

Отже, існує таке число $c = c(1, \frac{\pi}{4}) \ge 0$, що

$$\Theta(S_-(V) + c\mathrm{Id}) \subseteq \mathrm{Sect}\left(1, \frac{\pi}{4}\right).$$

Неважко переконатися, що $(S_-(V) + c\mathrm{Id})^{-1}$ є компактними, m-секторіальними операторами з вершиною 0 та півкутом $\frac{\pi}{4}$.

Далі, за теоремою 3 оператори $(S_-(V) + c\mathrm{Id})^{-1}$ є операторами Гільберта–Шмідта: $(S_-(V) + c\mathrm{Id})^{-1} \in \mathfrak{S}_2$.

Враховуючи тепер, що системи кореневих векторів операторів $S_-(V)$, $S_-(V) + c\mathrm{Id}$ та $(S_-(V) + c\mathrm{Id})^{-1}$ збігаються, для завершення доведення теореми 1 достатньо до операторів $(S_-(V) + c\mathrm{Id})^{-1}$ застосувати [17] (Теорема 6.1), згідно з якою система всіх кореневих векторів компактного оператора A є повною в гільбертовому просторі H, якщо:

$$\mathtt{i)}\ \Theta(A) \subseteq \mathrm{Sect}\left(0, \frac{\pi}{2p}\right), \qquad \mathtt{ii)}\ A \in \mathfrak{S}_p, \quad p \ge 1,$$

де $\mathfrak{S}_p$ — двосторонній ідеал Неймана–Шаттена в кільці $\mathscr{L}(L^2(0,1))$ обмежених операторів.

Теорему 1 доведено. $\square$

Додаток А: Допоміжні оцінки. В цьому додатку доводимо допоміжні оцінки, які використовуються при доведенні.

Лема А.1. *Нехай* $m \in \mathbb{N}$ *і* $\lambda \in \mathrm{Ext}_M$, $M \ge 1$:

$$\mathrm{Ext}_M = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\lambda| \ge \mathrm{Re}\lambda + M\}.$$

Виконуються оцінки ($k \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{R}$):

$$(a) \qquad |\lambda - k^{2m}\pi^{2m}| \geq \sin\frac{\pi}{4}\left(M + k^{2m}\pi^{2m}\right),$$

$$(b) \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{M + k^{2m}\pi^{2m}} \leq \frac{1}{M^{1/2}},$$

$$(c) \qquad \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(1+|k|)^{2m}}{M + k^{2m}\pi^{2m}} \leq 2^{2m},$$

$$(d) \qquad (|a| + |b|)^m \leq 2^m(|a|^m + |b|^m).$$

Доведення. Нерівності (a) випливають з достатньо очевидних геометричних міркувань.

Доведемо оцінку (b). Маємо

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{M + k^{2m}\pi^{2m}} \leq 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{M + k^{2m}\pi^{2m}} \leq 2\int_0^{\infty} \frac{d\,x}{M + x^2\pi^2} =$$
$$= \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\infty} \frac{d\,x}{\frac{M}{\pi^2} + x^2} = \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{M}}\arctan\frac{x\pi}{\sqrt{M}}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Оцінку (b) доведено.

Доведемо оцінку (c). Маємо

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(1+|k|)^{2m}}{M + k^{2m}\pi^{2m}} \leq \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(1+|k|)^{2m}}{1 + k^{2m}\pi^{2m}}.$$

Нехай

$$f(x) := \frac{(1+x)^{2m}}{1 + x^{2m}\pi^{2m}}, \qquad x \in [0, \infty).$$

Тоді

$$f'(x) = \frac{2m(1+x)^{2m-1}\left(1 - x^{2m-1}\pi^{2m}\right)}{(1 + x^{2m}\pi^{2m})^2}.$$

Таким чином,

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{для} \quad x_0 = \left(\frac{1}{\pi^{2m}}\right)^{\frac{1}{2m-1}},$$

і

$$f'(x) > 0, \quad \text{якщо} \quad x \in [0, x_0),$$
$$f'(x) < 0, \quad \text{якщо} \quad x \in [x_0, \infty).$$

Отже, в точці x_0 функція $f(x)$ має максимум.

Далі

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = \frac{1}{\pi^{2m}},$$
$$f(x_0) = \frac{(1+x_0)^{2m}}{1+x_0^{2m}\pi^{2m}} \le 2^{2m}.$$

Звідси випливають нерівності

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(1+|k|)^{2m}}{M+k^{2m}\pi^{2m}} \le \sup_{x\in[0,\infty)} f(x) \le 2^{2m}.$$

Оцінку (c) доведено.

Доведемо тепер (d). Для довільних $a, b \in \mathbb{R}$ маємо

$$|a| + |b| \le 2\max\{|a|, |b|\}.$$

І тому

$$(|a| + |b|)^m \le 2^m \max{}^m\{|a|, |b|\} \le 2^m(|a|^m + |b|^m).$$

Оцінку (d) доведено.

Лему A.1 повністю доведено. □

1. *Molyboga V.* Completeness of the rootvector system of the two-terms non-selfadjoint differential operators of an even order with periodic distribution potentials // Bulletin of University of Kyiv (Physics and Math.) — 2010, to appear.
2. *Kronig R. de L., Penney W.G.* Quantum mechanics of electrons in crystal lattices // Proc. Roy. Soc. (London) A. — 1931. — **130**, no. 814. — P. 499–513.
3. *Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Хольден Х.* Решаемые модели в квантовой механике. — М.: Мир. — 1991. — 568 с.
4. *Djakov P., Mityagin B., Spectral gaps of Schrödinger operators with periodic singular potentials* // Dynamics of PDE. — 2009. — **6**, no. 2. — P. 95–165.

5. *Mikhailets V., Molyboga V.* Hill's potentials in Hörmander spaces and their spectral gaps // arXiv: math.SP/0905.4655. — 9 pp.
6. *Михайлець В.А., Молибога В.М.* Спектральні задачі на класах періодичних узагальнених функцій. — Київ, 2004. — 46 с. — (Препринт / Ін-т математики НАН України; 2004.10).
7. *Михайлец В.А., Молибога В.Н.* Возмущение периодических и полупериодических операторов распределением Шварца // Доп. НАН України. — 2006. — № 7. — С. 26–31.
8. *Mikhailets V., Molyboga V.* Singularly perturbed periodic and semiperiodic differential operators // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 6. — С. 785–797.
9. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. — 1999. — **66**, № 6. — С. 897–912.
10. *Djakov P., Mityagin B.* Bari–Marcus property for Riesz projections of Hill operators with singular potentials. — Providence, RI: AMS, Contemp. Math., 481 (Functional analysis and complex analysis). — 2009. — P. 59–80.
11. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука. — 1976. — 280 с.
12. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. — К.: Наукова думка. — 1984. — 284 с.
13. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — К.: Наукова думка. — 1965. — 800 с.
14. *Kappeler T., Möhr C.* Estimates for periodic and Dirichlet eigenvalues of the Schrödinger operator with singular potentials // J. Func. Anal. — 2001. — **186**. — P. 62–91.
15. *Möhr C.* Schrödinger operators with singular potentials on the circle: spectral analysis and applications // Thesis at the University of Zürich. — 2001. — 134 pp.
16. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир. — 1972. — 740 с.
17. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука. — 1965. — 448 с.