Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2010, Т.7, №1, 298-316

УДК 517.51

А. С. Сердюк, А. П. Мусієнко
(Ін-т математики НАН України, Київ)

НЕРІВНОСТІ ТИПУ ЛЕБЕГА ДЛЯ СУМ ВАЛЛЕ ПУССЕНА ПРИ НАБЛИЖЕННІ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА

We obtain estimates of deviations of de la Vallée Poussin sums on sets of Poisson integrals of functions that belong to the space C and L_s, $1 \le s \le \infty$, which express in terms of the values of the best approximations of such functions by trigonometric polynomials in the metric L_s. We show that the obtained estimates are unimprovable on some important functional subsets.

Одержано оцінки норм відхилень сум Валле Пуссена на множинах інтегралів Пуассона функцій з просторів C та L_s, $1 \le s \le \infty$, що виражаються через значення найкращих наближень таких функцій тригонометричними многочленами в метриці L_s. Показано непокращуваність отриманих оцінок на деяких важливих функціональних підмножинах.

Нехай L_s — простір 2π-періодичних сумовних на $(0, 2\pi)$ функцій з нормою

$$\|f\|_{L_s} = \|f\|_s = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^s dt \right)^{\frac{1}{s}}, \quad 1 \le s < \infty,$$

C — простір неперервних 2π-періодичних функцій з нормою,

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|,$$

L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних та істотно обмежених функцій f, в якому норма задана рівністю

$$\|f\|_{L_\infty} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|.$$

Інтегралом Пуассона функції $\varphi \in L_1$ називають функцію $f(x)$, яка задається у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) P_{q,\beta}(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де $P_{q,\beta}(t)$ — відоме ядро Пуассона з параметрами $q \in (0,1)$ і $\beta \in \mathbb{R}$, тобто функція вигляду

$$P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{2}$$

Функцію φ в рівності (1) називають (q,β)-похідною функції f і позначають через f_β^q (див., наприклад, [1, с. 798]). Множину функцій, які можна представити у вигляді (1) при $\varphi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з L_1, позначають через $L_\beta^q \mathfrak{N}$.

Зауважимо, що функція $f(\cdot)$ вигляду (1) допускає аналітичне продовження до функції $f(z) = f(x+iy)$, аналітичної у смузі $|y| \le \ln \frac{1}{q}$ комплексної площини (див., наприклад, [2, с. 88]).

Одиничну кулю в просторі L_s, $1 \le s \le \infty$, позначимо через U_s, $U_s = \{f : f \in L_s, \|f\|_s \le 1\}$, крім того, покладемо $L_\beta^q U_s = L_{\beta,s}^q$.

Позначимо через $E_m(\varphi)_X$ величину найкращого наближення функції $\varphi \in X \subset L_1$ тригонометричними поліномами $t_{m-1}(\cdot)$, порядок яких не перевищує $m-1$ в метриці простору X, тобто величину вигляду

$$E_m(\varphi)_X = \inf_{t_{m-1}} \|\varphi(\cdot) - t_{m-1}(\cdot)\|_X.$$

Далі в ролі X виступатимуть простори C або L_s, $1 \le s \le \infty$.

Нехай $\varepsilon = \varepsilon_m$, $m \in \mathbb{N}$, — довільна монотонно спадна до нуля послідовність невід'ємних чисел. Через $C(\varepsilon)$ позначимо множину функцій $\varphi \in C$, для яких при заданому m виконується нерівність $E_m(\varphi)_C \le \varepsilon_m$, а через $L_\beta^q C(\varepsilon)$ — множину інтегралів Пуассона функцій φ із $C(\varepsilon)$.

Якщо $f \in L_1$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— ряд Фур'є функції f, то поліноми вигляду

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x), \tag{3}$$

де $S_k(f) = S_k(f;x)$ — частинні суми Фур'є порядку k функції f, називають сумами Валле Пуссена функції f (див., наприклад, [3, с. 406]). Очевидно, що при $p = 1$ поліноми $V_{n,p}(f)$ є звичайними частинними сумами Фур'є порядку $n-1$ ($V_{n,1}(f) = S_{n-1}(f)$); якщо ж $p = n$, то суми $V_{n,p}(f)$ перетворюються у відомі суми Фейєра $\sigma_{n-1}(f)$ порядку $n-1$:

$$\sigma_{n-1}(f) = \sigma_{n-1}(f;x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x).$$

Для поліномів Валле Пуссена має місце нерівність вигляду (див., наприклад, [4, с. 61]):

$$\|f - V_{n,p}(f)\|_C \leq (\|V_{n,p}\| + 1) E_{n-p+1}(f)_C, \tag{4}$$

де $\|V_{n,p}\| \overset{\text{df}}{=} \sup\limits_{\|f\|_C \leq 1} \|V_{n,p}(f)\|_C$. При $p = 1$ формула (4) перетворюється у відому нерівність Лебега [5] для сум Фур'є. Оцінки норм $\|V_{n,p}\|$ досліджувались в роботах Валле Пуссена [6], С.М. Нікольського [7], С.Б. Стєчкіна [8]. Подальший розвиток вказаної тематики пов'язаний з дослідженнями О.Д. Габісонії [9], А.А. Захарова [10] та інших, в цих роботах оцінки зверху величин $\|\rho_{n,p}(f;\cdot)\|_C$, $\rho_{n,p}(f;x) \overset{df}{=} f(x) - V_{n,p}(f;x)$ виражалися через найкращі наближення функцій f в рівномірній метриці. Зазначимо, що остаточні порядкові результати в даному напрямку належать С.Б. Стєчкіну [4], який довів, що

$$\|\rho_{n,p}(f;\cdot)\|_C \leq A \sum_{k=0}^{n-1} \frac{E_{n-p+k+1}(f)_C}{p+k} \ \forall f \in C, \tag{5}$$

де A — деяка абсолютна стала. В цій же роботі було показано, що на класах $C(\varepsilon)$ нерівність (5) за порядком покращена бути не може.

А саме, існують абсолютні сталі A_1 і A_2 такі, що для всіх $n, p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$,

$$A_1 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon_{n-p+k+1}}{p+k} \leq \sup_{f \in C(\varepsilon)} \|\rho_{n,p}(f;\cdot)\|_C \leq A_2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon_{n-p+k+1}}{p+k}, \quad (6)$$

При $p = 1$ і $p = n$ співвідношення (6) було доведено в роботах [11] і [12] відповідно.

Асимптотична поведінка величин

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; V_{n,p})_X = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f - V_{n,p}(f)\|_X, \quad X \subset L_1 \quad (7)$$

на деяких важливих класах періодичних функцій $\mathfrak{N} \subset X$ при $X = C$ досліджувались у роботах А.М. Колмогорова [13], С.М. Нікольського [14 , 15], О.П. Тімана [16 , 17], С.О. Теляковського [18 – 20], О.В. Єфімова [21 – 22], В.І. Рукасова [23]та інших. Більш детально ознайомитись з відомими результатами у даному напрямку та з історією питання можна, наприклад, в бібліографічних коментарях до монографій [3, 24]

У 1989 році О.І. Степанець в [25] встановив нерівності типу Лебега на множинах (ψ, β)-диференційовних функцій, де оцінки відхилень $\|f - S_{n-1}(f)\|_C$ виражались через найкращі наближення (ψ, β)-похідних f_β^ψ. У цій же роботі, було встановлено, що на деяких важливих класах функцій вказані нерівності є асимптотично точними. Згодом в [1] було одержано аналогічні нерівності типу Лебега на множинах інтегралів Пуассона $L_\beta^q L_s$, $1 \leq s \leq \infty$ в метриках просторів L_s. А саме, встановлено, що для довільних $f \in L_{\beta,s}^q$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq s \leq \infty$,

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_s \leq \Big(\frac{8q^n}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\frac{q^n}{(1-q)^2 n}\Big) E_n(f_\beta^q)_{L_s}, \quad (8)$$

де

$$\mathbf{K}(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 v}} \quad (9)$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по параметрах n, q, β, s, $f \in L_\beta^q L_s$, а також наведено приклади її непокращуваності (в сенсі сильної асимптотики) на деяких важливих функціональних підмножинах.

В даній роботі одержано аналоги нерівності (8) для сум $V_{n,p}(f)$ на множинах інтегралів Пуассона функцій з просторів C та L_s, $1 \leq s \leq \infty$; вони виражаються через значення найкращих наближень таких функцій тригонометричними многочленами в метриці L_s. Показано непокращуваність отриманих оцінок на деяких важливих функціональних підмножинах.

Для формулювання основних результатів вводимо позначення:

$$K_{q,p}(u) \stackrel{df}{=} 2^{-1/u} \left\| \frac{\sqrt{1-2q^p \cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos t + q^2} \right\|_u, \tag{10}$$

$$1 \leq u \leq \infty, q \in (0,1), p \in \mathbb{N},$$

$$\sigma(u,p) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при} \quad u = 1 \quad \text{і} \quad p = 1, \\ 2 & \text{при} \quad 1 < u \leq \infty \quad \text{і} \quad p = 1, \\ 3 & \text{при} \quad 1 \leq u \leq \infty \quad \text{і} \quad p \in \mathbb{N} \backslash \{1\}. \end{cases} \tag{11}$$

Теорема 1. *Нехай $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n, p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$ і $1 \leq s \leq \infty$. Тоді для довільної функції $f \in L^q_\beta L_s$ має місце нерівність*

$$\|\rho_{n,p}(f;x)\|_s \leq$$

$$\leq \frac{q^{n-p+1}}{p} \left(\frac{4}{\pi^2} K_{q,p}(1) + O(1) \frac{q}{(1-q)^{\sigma(1,p)}(n-p+1)} \right) E_{n-p+1}(f^q_\beta)_{L_s}, \tag{12}$$

в якій величини $K_{q,p}(1)$ і $\sigma(1,p)$ визначаються рівностями (10) *і* (11) *відповідно, а $O(1)$ — величина рівномірно обмежена по параметрах n, p, q, β і s.*

Подібно до роботи [1], де було зазначено те, що нерівність (8) є точною на деяких важливих функціональних підмножинах, можемо виокремити ряд таких випадків для оцінки (12).

Якщо $f \in L^q_{\beta,s}$, то $\|f^q_\beta\|_s \leq 1$, і отже, $E_{n-p+1}(f^q_\beta)_{L_s} \leq 1$. Розглядаючи точні верхні межі обох частин (12) по класах $L^q_{\beta,s}$, $1 \leq s \leq \infty$, отримуємо

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,s}; V_{n,p})_{L_s} \leq$$

$$\leq \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{q,p}(1)+O(1)\frac{q}{(1-q)^{\sigma(1,p)}(n-p+1)}\right). \qquad (13)$$

Співставляючи це співвідношення з отриманими в роботі [26 , с. 99, 105], результатами, згідно з якими при $n-p\to\infty$

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,\infty};V_{n,p})_C =$$

$$= \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{q,p}(1)+O(1)\frac{q}{(1-q)^{\sigma(1,p)}(n-p+1)}\right), \qquad (14)$$

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1};V_{n,p})_{L_1} =$$

$$= \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{q,p}(1)+O(1)\frac{q}{(1-q)^{\sigma(1,p)}(n-p+1)}\right), \qquad (15)$$

приходимо до висновку, що при $s=1$ і $s=\infty$ в співвідношенні (13) можна поставити знак рівності.

Оскільки, як зазначалося вище, при $p=1$ суми Валле Пуссена $V_{n,p}(f)$ перетворюються в суми Фур'є $S_{n-1}(f)$, то із (12) випливає нерівність

$$\|f(x)-S_{n-1}(f;x)\|_s \leq \left(\frac{8q^n}{\pi^2}\mathbf{K}(q)+O(1)\frac{q^n}{(1-q)n}\right)E_n(f^q_\beta)_{L_s}, \qquad (16)$$

у якій $\mathbf{K}(q)$ і $O(1)$ мають той же сенс, що й у формулі (8).

Щоб отримати нерівність (16) із (12), досить врахувати, що внаслідок (10) і (11)

$$K_{q,1}(1) = \int_0^\pi \frac{dv}{\sqrt{1-2q\cos v+q^2}} = 2\mathbf{K}(q) \qquad (17)$$

та $\sigma(1,1)=1$. Нерівність (16) дещо уточнює (8) за рахунок кращої оцінки другого доданку.

***Доведення теореми* 1.** Нехай $f\in L^q_\beta L_s$. Як випливає з [26, с. 100], для величини $\rho_{n,p}(f;x)$ має місце зображення:

$$\rho_{n,p}(f;x) =$$

$$= \frac{1}{\pi p}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)Z_q(t)\sum_{k=n-p}^{n-1}q^{k+1}\cos\left((k+1)t+\theta_q(t)-\frac{\beta\pi}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi p} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) Z_q(t) P_{q,\beta,n,p}(t) dt, \tag{18}$$

де

$$\theta_q(t) \stackrel{\text{df}}{=} \operatorname{arctg} \frac{q \sin t}{1 - q \cos t}, \tag{19}$$

$$Z_q(t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - 2q \cos t + q^2}}, \tag{20}$$

$$P_{q,\beta,n,p}(t) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=n-p+1}^{n} q^k \cos\left(kt + \theta_q(t) - \frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{21}$$

Функції $P_{q,\beta,n,p}(t) Z_q(t)$ ортогональні до будь-якого полінома t_{n-p} порядку $n-p$. Тому

$$\rho_{n,p}(f;x) = \frac{1}{\pi p} \int_{-\pi}^{\pi} \delta_{n-p+1}(x-t) Z_q(t) P_{q,\beta,n,p}(t) dt, \tag{22}$$

де

$$\delta_{n-p+1}(\cdot) \stackrel{\text{df}}{=} \varphi(\cdot) - t_{n-p}(\cdot). \tag{23}$$

Використовуючи твердження 1.5.5 роботи [27, с. 43], отримуємо

$$\|\rho_{n,p}(f)\|_s \le \frac{1}{\pi p} \|Z_q(t) P_{q,\beta,n,p}(t)\|_1 \|\delta_{n-p+1}(t)\|_s, \ 1 \le s \le \infty. \tag{24}$$

Обравши в якості t_{n-p} поліном найкращого наближення t^*_{n-p} функції f в метриці простору L_s, з (24) одержимо

$$\|\rho_{n,p}(f)\|_s \le \frac{1}{\pi p} \|Z_q(t) P_{q,\beta,n,p}(t)\|_1 E_{n-p+1}(f^q_\beta)_{L_s}. \tag{25}$$

У роботі [26] було доведено, що

$$\left.\begin{array}{r} \|Z_q(t) P_{q,\beta,n,p}(t)\|_1 \\ \inf\limits_{c\in\mathbb{R}} \|Z_q(t) P_{q,\beta,n,p}(t) - c\|_1 \\ \frac{1}{2} \max\limits_h \|Z_q(\cdot + h) P_{q,\beta,n,p}(\cdot + h) - Z_q(t) P_{q,\beta,n,p}(t)\|_1 \end{array}\right\} =$$

$$= q^{n-p+1} \left(\frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Z_q^2(t)}{Z_{q^p}(pt)} dt + O(1) \frac{q}{(1-q)^{\sigma(1,p)}(n-p+1)} \right). \tag{26}$$

Об'єднавши формули (25) і (26), приходимо до нерівності (12). Теорему доведено.

Другий приклад непокращуваності оцінки (12) дає така теорема.

Теорема 2. *Нехай* $f \in L^q_\beta C$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$\|\rho_{n,p}(f;x)\|_C = \|\rho_{n,p}(f;x)\|_\infty \leq$$

$$\leq \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{q,p}(1) + O(1)\frac{q}{(1-q)^{\sigma(1,p)}(n-p+1)}\right)E_{n-p+1}(f^q_\beta)_C, \tag{27}$$

де $K_{q,p}(1)$ *і* $\sigma(1,p)$ *визначаються формулами* (10) *і* (11) *відповідно.*

При цьому для будь-якої функції $f \in L^q_\beta C$ *і довільних* $n,p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$, *в просторі* $L^q_\beta C$ *знайдеться функція* $F(x) = F(f;n;p;x)$ *така, що* $E_{n-p+1}(F^q_\beta)_C = E_{n-p+1}(f^q_\beta)_C$, *і для неї при* $n-p \to \infty$ *виконується рівність:*

$$\|\rho_{n,p}(F;x)\|_C =$$

$$= \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{q,p}(1) + O(1)\frac{q}{(1-q)^{\sigma(1,p)}(n-p+1)}\right)E_{n-p+1}(F^q_\beta)_C. \tag{28}$$

У (27) *і* (28) $O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені по параметрах* n,p,q,β *і* $f \in L^q_\beta C$.

Доведення теореми 2. Оскільки $C \subset L_\infty$ і для функції $f \in C$ $\|f\|_\infty = \|f\|_C$, то нерівність (27) є наслідком нерівності (12) . Тому залишається довести другу частину теореми.

Нехай $f \in L^q_\beta C$, $n,p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$. Згідно з рівністю (22) справедлива формула

$$\|\rho_{n,p}(f;x)\|_C = \frac{1}{\pi p}\left\|\int_{-\pi}^{\pi}\delta_{n-p+1}(x-t)Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)dt\right\|_C, \tag{29}$$

де функції $P_{q,\beta,n,p}(t)$ і $\delta_{n-p+1}(\cdot)$ визначаються рівностями (21) і (23) відповідно. Отже, необхідне твердження буде доведено, якщо для довільної функції $\varphi \in C$ можна вказати неперервну функцію $\Phi(\cdot) = \Phi(\varphi;\cdot)$, для якої $E_{n-p+1}(\Phi)_C = E_{n-p+1}(\varphi)_C$ при всіх $n,p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$, і крім того, має місце рівність:

$$\frac{1}{\pi p}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\Phi(-t) - t^*_{n-p}(-t)\Big)Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)dt\right| =$$

$$= \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{q,p}(1) + O(1)\frac{q}{(1-q)^{\sigma(1,p)}(n-p+1)}\right)E_{n-p+1}(\varphi)_C, \tag{30}$$

де t^*_{n-p} — поліном найкращого наближення порядку $n-p$ функції $\Phi(\cdot)$ в просторі C . Внаслідок (19) — (21)

$$\frac{1}{\pi p}\int_{-\pi}^{\pi}\delta_{n-p+1}(-t)Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi p}\int_{-\pi}^{\pi}\delta_{n-p+1}(t)Z_q(t)P_{q,-\beta,n,p}(t)dt. \tag{31}$$

Далі, покладемо

$$\varphi_0(t) = E_{n-p+1}(\varphi)_C \ \mathrm{sign} P_{q,-\beta,n,p}(t), \tag{32}$$

де $P_{q,-\beta,n,p}(t)$ означається рівністю (21). Згідно з рівностями (17) — (18$'$) роботи [26, с. 101],

$$P_{q,-\beta,n,p}(t) = q^{n-p+1}Z_q(t)\Bigg(\cos\left((n-p+1)t + \frac{\beta\pi}{2}\right)G_{p,q}(t) -$$

$$- \sin\left((n-p+1)t + \frac{\beta\pi}{2}\right)H_{p,q}(t)\Bigg), \tag{33}$$

де

$$G_{p,q}(t) = \cos 2\theta_q(t) - q^p\cos(pt + 2\theta_q(t)),$$
$$H_{p,q}(t) = \sin 2\theta_q(t) - q^p\sin(pt + 2\theta_q(t)).$$

Подамо $G_{p,q}(t)$ і $H_{p,q}(t)$ у вигляді

$$G_{p,q}(t) = \sqrt{1-2\cos pt + q^{2p}}\Bigg(\cos 2\theta_q(t)\frac{1-q^p\cos pt}{\sqrt{1-2\cos pt+q^{2p}}} +$$

$$+ q^p\sin 2\theta_q(t)\frac{\sin pt}{\sqrt{1-2\cos pt+q^{2p}}}\Bigg) = (Z_{q^p}(pt))^{-1}\cos\big(2\theta_q(t) - \theta_{q^p}(pt)\big), \tag{34}$$

$$H_{p,q}(t) = \sqrt{1-2\cos pt + q^{2p}}\Bigg(\sin 2\theta_q(t)\frac{1-q^p\cos pt}{\sqrt{1-2\cos pt+q^{2p}}} -$$

$$-q^p \cos 2\theta_q(t) \frac{\sin pt}{\sqrt{1-2\cos pt + q^{2p}}}\Bigg) = (Z_{q^p}(pt))^{-1} \sin\big(2\theta_q(t) - \theta_{q^p}(pt)\big), \tag{35}$$

де $\theta_q(t)$ та $Z_q(t)$ означені за допомогою рівностей (19) і (20) відповідно.

Внаслідок (33) — (35) отримуємо:

$$P_{q,-\beta,n,p}(t) =$$

$$= q^{n-p+1} \frac{Z_q(t)}{Z_{q^p}(pt)} \Bigg(\cos\left((n-p+1) + \frac{\beta\pi}{2}\right) \cos\Big(2\theta_q(t) - \theta_{q^p}(pt)\Big) -$$

$$- \sin\left((n-p+1)t + \frac{\beta\pi}{2}\right) \sin\Big(2\theta_q(t) - \theta_{q^p}(pt)\Big)\Bigg) =$$

$$= q^{n-p+1} \frac{Z_q(t)}{Z_{q^p}(pt)} \cos\left((n-p+1)t + 2\theta_q(t) - \theta_{q^p}(pt) + \frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{36}$$

Покладемо

$$y(t) = t + \frac{2\theta_q(t) - \theta_{q^p}(pt) + \frac{\beta\pi}{2}}{n-p+1}.$$

Покажемо, що функція $y(t)$ монотонно зростає, починаючи з деякого достатньо великого номера $n-p$. Оскільки

$$y'(t) = 1 + \frac{1}{n-p+1}\Big(2\theta'_q(t) - \theta'_{q^p}(pt)\Big) \tag{37}$$

і, як неважко переконатися,

$$\theta'_q(t) = \frac{q\cos t - q^2}{1 - 2q\cos t + q^2} < \frac{2q}{(1-q)^2}, \tag{38}$$

$$\theta'_{q^p}(t) = \frac{q^p p \cos pt - q^{2p} p}{1 - 2q^p \cos pt + q^{2p}} < \frac{2q^p p}{(1-q^p)^2}, \tag{39}$$

то

$$\Big|2\theta'_q(t) - \theta'_{q^p}(pt)\Big| < \frac{4q}{(1-q)^2} + \frac{2q^p p}{(1-q^p)^2} \le \frac{6q}{(1-q)^2}. \tag{40}$$

Тому, згідно з (37) і (40), для всіх

$$n-p+1>\frac{6q}{(1-q)^2} \tag{41}$$

функція $y(t)$ зростає. Далі будемо вважати, що параметри n і p вибрані таким чином, що нерівність (41) завжди виконується. Оскільки $y(0) = \frac{\beta\pi}{2(n-p+1)}$, $y(2\pi) = 2\pi + \frac{\beta\pi}{2(n-p+1)}$, то $\cos\big((n-p+1)y(t)\big)$, а разом з нею і функція

$$P_{q,-\beta,n,p}(t)=q^{n-p+1}\frac{Z_q(t)}{Z_{q^p}(pt)}\cos\Big((n-p+1)y(t)\Big).$$

має точно $2(n-p+1)$ простих нулів на проміжку $[0,2\pi)$. Очевидно, що прості нулі z_k функції $P_{q,-\beta,n,p}(t)$ мають вигляд $z_k=y^{-1}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{n-p+1}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, де y^{-1} — функція, обернена до y.

Нехай $\xi=\min\limits_{k\in\mathbb{Z}}\{z_{k+1}-z_k\}$. Через $\varphi_\delta(t)$ позначимо функцію, що співпадає з функцією $\varphi_0(t)$ скрізь, за виключенням δ-околів ($\delta<\frac{\xi}{2}$) точок z_k, де вона лінійна і її графік з'єднує точки $(z_k-\delta;\varphi_0(z_k-\delta))$ і $(z_k+\delta;\varphi_0(z_k+\delta))$. Функція $\varphi_\delta(t)$ при кожному δ $(0<\delta<\frac{\xi}{2})$ неперервна, має на $[0,2\pi)$ точно $2(n-p+1)$ нулів в яких змінює знак по черзі. Тому, згідно з критерієм Чебишова, поліном t^*_{n-p} найкращого наближення в рівномірній метриці функції $\varphi_\delta(t)$ порядку, не вищого ніж $n-p$, буде тотожно дорівнювати нулеві ($t^*_{n-p}\equiv 0$), причому $E_{n-p+1}(\varphi_\delta)_C=E_{n-p+1}(\varphi)_C$.

Тому

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi_\delta(t)-t^*_{n-p})Z_q(t)P_{q,-\beta,n,p}(t)dt=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_\delta(t)Z_q(t)P_{q,-\beta,n,p}(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_0(t)Z_q(t)P_{q,-\beta,n,p}(t)dt+R(\delta), \tag{42}$$

де

$$R(\delta)=\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi_0(t)-\varphi_\delta(t))Z_q(t)P_{q,-\beta,n,p}(t)dt.$$

Вибираємо δ так, щоб

$$\delta < \frac{q(1-q)}{2(n-p+1)^2},$$

тоді отримуємо

$$|R(\delta)| \le 2\delta \frac{q^{n-p+1}}{(1-q)^2}(n-p+1)E_{n-p+1}(\varphi)_C <$$

$$< \frac{q^{n-p+2}}{(1-q)(n-p+1)}E_{n-p+1}(\varphi)_C. \qquad (43)$$

Із (26), (31), (42) і (43) випливає, що для вказаних δ функція $\Phi(\cdot) = \varphi_\delta(\cdot)$ така, що $E_{n-p+1}(\Phi)_C = E_{n-p+1}(\varphi)_C$, і для неї виконується (30). Теорему доведено.

Ще один приклад непокращуваності нерівності (8) дає така теорема.

Теорема 2′. *Нехай $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, тоді при будь-яких $n, p \in \mathbb{N}$, $p \le n$, і для будь-якого класу $L^q_\beta C(\varepsilon)$*

$$\mathcal{E}(L^q_\beta C(\varepsilon); V_{n,p})_C =$$

$$= \left(\frac{4}{\pi^2}K_{q,p}(1) + O(1)\frac{q}{(1-q)^{\sigma(1,p)}(n-p+1)}\right)\varepsilon_{n-p+1}, \qquad (44)$$

де $K_{q,p}(1)$ і $\sigma(1,p)$ визначаються формулами (10) і (11) відповідно, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по параметрах n, q, p і β.

Дійсно, якщо $f \in L^q_\beta C(\varepsilon)$, то $f^q_\beta(\cdot)$ неперервна, і тоді $E_{n-p+1}(f^q_\beta)_C \le \varepsilon_{n-p+1}$. Тому, враховуючи (27), маємо:

$$\|\rho_{n,p}(f;x)\|_C \le$$

$$\le \left(\frac{4}{\pi^2}K_{q,p}(1) + O(1)\frac{q}{(1-q)^{\sigma(1,p)}(n-p+1)}\right)\varepsilon_{n-p+1} \quad \forall f \in L^q_\beta C(\varepsilon).$$

З іншого боку, для функції $\Phi(x)$ із теореми 2, яка побудована по функції $\varphi \in C(\varepsilon)$ такій, що $E_{n-p+1}(\varphi)_C = \varepsilon_{n-p+1}$, ця нерівність перетворюється в рівність. Звідси і випливає теорема 2′.

При $p=1$ формула (44) запишеться у вигляді

$$\mathcal{E}_n(L^q_\beta C(\varepsilon))_C=\left(\frac{8q^n}{\pi^2}\mathbf{K}(q)+O(1)\frac{q^n}{(1-q)n}\right)\varepsilon_n, \qquad (45)$$

де $\mathbf{K}(q)$ визначається рівністю (9), а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по параметрах n,q і β. Формула (45) уточнює за рахунок кращої оцінки залишкового члена асимптотичну рівність для величини $\mathcal{E}_n(L^q_\beta C(\varepsilon))_C$, отриману в роботі [1, с. 800].

Теорема 3. *Нехай $q\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$, $n,p\in\mathbb{N}$, $p\le n$ і $1\le s\le\infty$. Тоді для довільної функції $f\in L^q_\beta L_s$ справедлива нерівність*

$$\|\rho_{n,p}(f;x)\|_C\le\frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s')+\right.$$

$$\left.+O(1)\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}\right)E_{n-p+1}(f^q_\beta)_{L_s}, \qquad (46)$$

в якій $s'=\frac{s}{s-1}$,

$$\delta(s)=\begin{cases}0, & s=2,\\ 1, & s\in[1,\infty]\setminus\{2\},\end{cases} \qquad (47)$$

а $K_{q,p}(s')$ і $\sigma(s',p)$ визначаються формулами (10) і (11) відповідно.

При цьому для будь-якої функції $f\in L^q_\beta L_s, 1\le s\le\infty$, і довільних $n,p\in\mathbb{N}$, $p\le n$, в просторі $L^q_\beta L_s, 1\le s\le\infty$, знайдеться функція $F(x)=F(f;n;p;x)$ така, що $E_{n-p+1}(F^q_\beta)_{L_s}=E_{n-p+1}(f^q_\beta)_{L_s}$, і для неї при $n-p\to\infty$ виконується рівність:

$$\|\rho_{n,p}(F;x)\|_C=\frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s')+\right.$$

$$\left.+O(1)\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}\right)E_{n-p+1}(F^q_\beta)_{L_s}. \qquad (48)$$

У (46) і (48) $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені по параметрах n,p,q,β,s і $f\in L^q_\beta L_s$.

Доведення теореми 3. Нехай $f \in L^q_\beta L_s, 1 \leq s \leq \infty$. Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$ внаслідок (22) та твердження 1.5.5 із роботи [27, с. 43], отримуємо

$$\|\rho_{n,p}(f)\|_C \leq \frac{1}{\pi p}\|Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)\|_{s'}\|\delta_{n-p+1}(t)\|_s,\ 1 \leq s \leq \infty, \quad (49)$$

де $Z_q(t)$, $P_{q,\beta,n,p}(t)$, $\delta_{n-p+1}(\cdot)$ визначаються рівностями (20), (21) і (23) відповідно.

Обравши в якості t_{n-p} поліном найкращого наближення t^*_{n-p} функції f в метриці простору L_s, з (49) одержимо

$$\|\rho_{n,p}(f)\|_C \leq \frac{1}{\pi p}\|Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)\|_{s'}E_{n-p+1}(f^q_\beta)_{L_s}. \quad (50)$$

Як випливає з результатів роботи [28 , с. 35], для довільних $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq s \leq \infty$, $p \leq n$, $n, p \in \mathbb{N}$, $1 \leq s' \leq \infty$ виконується рівність

$$\left.\begin{array}{r} \|Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)\|_{s'} \\ \inf\limits_{c\in\mathbb{R}}\|Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)-c\|_{s'} \\ \frac{1}{2}\max\limits_{h\in\mathbb{R}}\|Z_q(t+h)P_{q,\beta,n,p}(t+h)-Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)\|_{s'} \end{array}\right\} =$$

$$= q^{n-p+1}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s') + O(1)\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}\right). \quad (51)$$

Об'єднавши формули (50) і (51), отримуємо таку нерівність:

$$\|\rho_{n,p}(f;x)\|_C \leq \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s') + \right.$$

$$\left. + O(1)\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}\right)E_{n-p+1}(f^q_\beta)_{L_s}. \quad (52)$$

Доведемо другу частину теореми. Згідно з (22) і (31) необхідне твердження буде доведено, якщо для довільної функції $\varphi \in L_s, 1 \leq s \leq \infty$, можна вказати функцію $\Phi(\cdot) = \Phi(\varphi;\cdot)$, для якої $E_{n-p+1}(\Phi)_{L_s} = E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}$ при всіх $n, p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$, і крім того, має місце рівність:

$$\frac{1}{\pi p}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(\Phi(t) - t^*_{n-p}(t)\right)Z_q(t)P_{q,-\beta,n,p}(t)dt\right| =$$

$$= \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s')+\right.$$

$$\left.+O(1)\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}\right)E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}, \qquad (53)$$

де t^*_{n-p} — поліном найкращого наближення порядку $n-p$ функції $\Phi(\cdot)$ в метриці простору $L_s, 1 \le s \le \infty$.

Розглянемо спочатку випадок $1 \le s < \infty$. Покладемо

$$\Phi(t) = \|Z_q(t)P_{q,-\beta,n,p}(t)\|_{s'}^{1-s'}\times$$

$$\times|Z_q(t)P_{q,-\beta,n,p}(t)|^{s'-1}\mathrm{sign}(Z_q(t)P_{q,-\beta,n,p}(t))E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}, \qquad (54)$$

Легко переконатися в тому, що

$$\|\Phi(t)\|_s = \|Z_q(t)P_{q,-\beta,n,p}(t)\|_{s'}^{1-s'}E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}\times$$

$$\times\left(\int_{-\pi}^{\pi}|Z_q(t)P_{q,-\beta,n,p}(t)|^{(s'-1)s}dt\right)^{\frac{1}{s}} =$$

$$= \|Z_q(t)P_{q,-\beta,n,p}(t)\|_{s'}^{1-s'}\|Z_q(t)P_{q,-\beta,n,p}(t)\|_{s'}^{s'-1}E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s} =$$

$$= E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}. \qquad (55)$$

Покажемо, що поліном найкращого наближення порядку $n-p$ в метриці простору L_s функції $\Phi(t)$ тотожно дорівнює нулеві. Для довільного тригонометричного полінома порядку $n-p$

$$\int_0^{2\pi} t_{n-p}(t)|\Phi(t)|^{s-1}\mathrm{sign}(\Phi(t))dt =$$

$$= \|Z_q(t)P_{q,-\beta,n,p}(t)\|_{s'}^{1-s'}E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}\int_0^{2\pi} t_{n-p}(t)Z_q(t)P_{q,-\beta,n,p}(t)dt. \qquad (56)$$

Оскільки, згідно з формулою (8) роботи [26]

$$Z_q(t)P_{q,-\beta,n,p}(t) = \sum_{k=n-p}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{\infty} q^j\cos\left(jt-\frac{\beta\pi}{2}\right),$$

то

$$\int_0^{2\pi} t_{n-p}(t)Z_q(t)P_{q,-\beta,n,p}(t)dt = 0, \tag{57}$$

а отже, внаслідок (56)

$$\int_0^{2\pi} t_{n-p}(t)|\Phi(t)|^{s-1}\mathrm{sign}(\Phi(t))dt = 0. \tag{58}$$

Тоді на підставі твердження 3.3.3 роботи [29 , с. 56] можемо зробити висновок, що поліном $t^*_{n-p} \equiv 0$, є поліномом найкращого наближення функції $\Phi(t)$ в метриці простору $L_s, 1 \le s < \infty$. Тому внаслідок (55) $E_{n-p+1}(\Phi)_{L_s} = E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}$, $1 \le s < \infty$, і крім того, з урахуванням (51)

$$\frac{1}{\pi p}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(\Phi(t) - t^*_{n-p}(t)\right)Z_q(t)P_{q,-\beta,n,p}(t)dt\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi p}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(t)Z_q(t)P_{q,-\beta,n,p}(t)dt\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi p}\|Z_q(t)P_{q,-\beta,n,p}(t)\|_{s'}E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s} =$$

$$= \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s') + \right.$$

$$\left. + O(1)\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}\right)E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}. \tag{59}$$

Отже, рівність (53) доведено для випадку $1 \le s < \infty$.

Розглянемо випадок $s = \infty$. Покладемо

$$\varphi_0(t) = E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty}\ \mathrm{sign}P_{q,-\beta,n,p}(t). \tag{60}$$

Виходячи із функції $\varphi_0(t)$ вигляду (60), побудуємо неперервну функцію $\varphi_\delta(t)$ так, як це було зроблено в ході доведення теореми 2. Якщо вибрати параметр $\delta > 0$ достатньо малим, то функція $\Phi(t) = \varphi_\delta(t)$ буде мати на $[0, 2\pi)$ точно $2(n-p+1)$ нулів, в яких вона змінюватиме знак по черзі, і згідно з критерієм Чебишова, поліном $t^*_{n-p} \equiv 0$ буде поліномом найкращого рівномірного наближення порядку $n-p$

функції $\Phi(t)$. Отже, $E_{n-p+1}(\Phi)_C = E_{n-p+1}(\Phi)_{L_\infty} = E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty}$. Внаслідок тих же міркувань, які використовувалися при доведені (42) та (43), переконуємось у справедливості (53) і при $s=\infty$. Теорему доведено.

Якщо $f \in L^q_{\beta,s}$, то $\|f^q_\beta\|_s \le 1$, і отже, $E_{n-p+1}(f^q_\beta)_{L_s} \le 1$. Розглядаючи точні верхні межі обох частин (46) по класах $L^q_{\beta,s}$, $1 \le s \le \infty$, отримуємо

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,s}; V_{n,p})_C \le$$
$$\le \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}} K_{q,p}(s') + O(1)\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}\right). \quad (61)$$

Співставляючи це співвідношення з отриманими в роботі [28, с. 35] результатами, згідно з якими при $n-p\to\infty$

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,s}; V_{n,p})_C =$$
$$= \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}} K_{q,p}(s') + O(1)\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}\right), \quad (62)$$

приходимо до висновку, що при довільних $1 \le s \le \infty$ нерівність (46) на класах $L^q_{\beta,s}$ є асимптотично непокращуваною.

Теорема 4. *Нехай $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n,p \in \mathbb{N}$, $p \le n$ і $1 \le s \le \infty$. Тоді для довільної функції $f \in L^q_\beta L_1$ має місце нерівність*

$$\|\rho_{n,p}(f;x)\|_{L_s} \le \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1+1/s}} K_{q,p}(s) + \right.$$
$$\left. + O(1)\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s,p)}}\right) E_{n-p+1}(f^q_\beta)_{L_1}, \quad (63)$$

де $K_{q,p}(s)$, $\sigma(s,p)$ та $\delta(s)$ означені рівностями (10), (11) *та* (47) *відповідно, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по параметрах n,p,q,β і s.*

***Доведення теореми* 4.** Доведення будемо проводити за схемою, використаною при доведенні теореми 3. Нехай $f \in L^q_\beta L_1$. Тоді внаслідок інтегрального зображення (22) та твердження 4.1.1 із роботи [29, с. 71], отримуємо

$$\|\rho_{n,p}(f)\|_{L_s} \le \frac{1}{\pi p}\|Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)\|_s \|\delta_{n-p+1}(t)\|_1, \ 1 \le s \le \infty, \quad (64)$$

де $\delta_{n-p+1}(\cdot) = \varphi(\cdot) - t_{n-p}(\cdot)$. Обравши в (64) в якості t_{n-p} поліном найкращого наближення t^*_{n-p} функції f в метриці простору L_1, одержимо

$$\|\rho_{n,p}(f)\|_{L_s} \leq \frac{1}{\pi p}\|Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)\|_s E_{n-p+1}(f^q_\beta)_{L_1}. \qquad (65)$$

Враховуючи (51), з нерівності (65) отримуємо нерівність (63) . Теорему 4 доведено.

1. *Степанец А.И., Сердюк А.С.* Неравенства Лебега для интегралов Пуассона // Укр.мат.журн. — 2000. — **52**, № 6. — С. 798 – 808.
2. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. // М.: Физматгиз, 1961. — 936 с.
3. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Пр. Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **40**. Ч. II. — 424 с.
4. *Steckin S.B.* On the appoximation of periodic functions by de la Vallée Poussin sums // Anal. math. — 1978. — **4**. — P. 61 – 74.
5. *Lebesgue H* Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisantes á une condition de Lipschitz // Bull. Soc. Math. France. – 1910. — **38**. — P. 184 – 210.
6. *Vallée Poussin Ch. J.* Lecons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. — Paris: Gautier-Villars, 1919. — 150 p.
7. *Никольский С.М.* О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1940. — **4**. — С. 509 – 520.
8. *Стечкин С.Б.* О суммах Валле Пуссена // Докл. АН СССР. — 1951. — **80**. — С. 545 – 548.
9. *Габисония О.Д.* О приближении функций многих переменных целыми функциями // Изв. вуз. Матем. — 1965. — **2(45)**. — С. 30 – 35.
10. *Захаров А.А.* Об оценке уклонения непрерывных периодических функций от сумм Валле Пуссена // Мат. заметки. — 1968. — **3**. — С. 77 – 84.
11. *Осколков К.И.* К неравенству Лебега в равномерной метрике и на множестве полной меры // Мат. заметки. — 1975. — **18**. — С. 515 – 526.
12. *Стечкин С.Б.* О приближении периодических функций суммами Фейера // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1961. — **62**. — С. 48 – 60.
13. *Колмогоров А.Н.* Zur Grössenordnung des Restgliedes Fouriershen Reihen differenzierbarer Funktionen // Ann. Math. — 1935. — **36**. — S. 521 – 526.
14. *Никольский С.М.* Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье // Докл. АН СССР. — 1941. — **22**, № 6. — С. 386 – 389.
15. *Никольский С.М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1945. — **15**. — С. 1 – 76.

16. *Тиман А.Ф.* Обобщение некоторых результатов А.Н. Колмогорова и С.М. Никольского // Докл. АН СССР. — 1951. — **81**, № 4. — С. 509 – 511.
17. *Тиман А.Ф.* Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1953. — **17**, № 2. — С. 99 – 134.
18. *Теляковский С.А.* Приближение дифференцируемых функций суммами Валле Пуссена // Докл. АН СССР. — 1958. — **121**, № 3. — С. 426 – 429.
19. *Теляковский С.А.* Приближение функций, дифференцируемых в смысле Вейля, суммами Валле Пуссена // Докл. АН СССР. — 1960. — **131**, № 2. — С. 259 – 262.
20. *Теляковский С.А.* О приближение дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1960. — **24**, № 2. — С. 213 – 242.
21. *Ефимов А.В.* О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1959. — **23**, № 5. — С. 737 – 770.
22. *Ефимов А.В.* О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена. II // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1960. — **24**, № 3. — С. 431 – 468.
23. *Рукасов В.И.* Приближение операторами Валле Пуссена функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. — 1992. — **44**, № 5. — С. 682 – 690.
24. *Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О.* Приближения суммами Валле Пуссена // Пр. Ін-ту метематики НАН України. — 2007.— **68**. — 386 с.
25. *Степанец А.И.* К неравенству Лебега на класах (ψ,β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 4. — С. 499 – 510.
26. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 1. — С. 97 — 107.
27. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука. — 1987. — 422 с.
28. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена в рівномірній та інтегральних метриках // Доп. НАН України. — 2009. — № 6. — С. 34 — 39.
29. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. — 320 с.