Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2010, Т.7, №1, 145-161

УДК 517.51

М. О. Назаренко (Київський національний ун–т ім. Т. Шевченка)
Я. О. Чкана (Сумський державний пед. ун–т ім. А. С. Макаренка)

ОПТИМАЛЬНЕ КОДУВАННЯ КЛАСІВ ПОВЕРХОНЬ, ЗАДАНИХ МОДУЛЯМИ НЕПЕРЕРВНОСТІ ТА НЕМОНОТОННОСТІ

The task of optimum code of classes of the self-reactance set surfaces has been investigated, if the restrictions on coordinate functions are given with the use of the modules of continuity and non-monotonicity. The bilateral estimations of informative diameters of these classes of surfaces are obtained.

Досліджено задачу оптимального кодування класів параметрично заданих поверхонь, коли обмеження на координатні функції задані за допомогою модулів неперервності та немонотонності. Отримано двосторонні оцінки інформаційних поперечників цих класів поверхонь, деякі з них є непокращуваними.

Розглянемо деякі аспекти задачі оптимального кодування поверхонь, заданих параметрично

$$\overline{\varphi}(u,v) = \{\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v)\},$$

де $(u,v) \in I = [0,1] \times [0,1]$. Загальну постановку задачі кодування елементів метричного простору X_ρ з метрикою ρ детально викладено в роботі [1]. В даній статті будемо притримуватись тієї ж термінології, символіки та позначень.

Елементу $x \in F \subset X_\rho$ за допомогою набору

$$M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$$

неперервних на X функціоналів поставимо у відповідність вектор $T(x, M_N) = \{\mu_1(x), \mu_2(x), ..., \mu_N(x)\}$. Діаметром області невизначеності називається величина

$$D(F, M_N, X_\rho) = \sup_{y,z \in F} \{\rho(y, z)_X : T(y, M_N) = T(z, M_N)\}, \qquad (1)$$

де $\rho(y, z)_X$ — відстань між елементами $\{y, z\} \subset X$(див., наприклад [12]). Однією з величин, що характеризує похибку відновлення елементів множини F за інформацією $T(x, M_N)$, є інформаційний поперечник

$$\gamma^N(F, X_\rho) = \inf_{M_N} D(F, M_N, X_\rho). \qquad (2)$$

Якщо при означенні величини (2) за чисельну характеристику розмірів області невизначеності використовувати не її діаметр, а чебишовський радіус [14], то всі отримані співвідношення для відповідних інформаційних поперечників будуть зменшені вдвічі.

Відмітимо, що задача оптимального кодування параметрично заданих кривих розглядалася в роботах [1-6]. Специфікою кодування поверхонь, так само, як і кривих, є, в першу чергу, вибір метрики.

Якщо $\rho(P, Q)$ — деяка відстань між точками простору, то відстань між поверхнями $\overline{\varphi}(u, v) = \{\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)\}$ та $\overline{\psi}(u, v) = \{\psi_1(u, v), \psi_2(u, v), \psi_3(u, v)\}$ можна визначити, зокрема, за формулою

$$R(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \sup_{0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1} \{\rho(P, Q) : P(u, v) \in \overline{\varphi}, Q(u, v) \in \overline{\psi}\}, \qquad (3)$$

де точки $P(u, v)$ та $Q(u, v)$ відповідають одним і тим самим значенням параметрів u і v . Проте відстань (3) залежить від способу параметризації поверхні, тому також доцільно розглядати хаусдорфову відстань між поверхнями, яка більш істотно відображає ступінь геометричної близькості і не залежить від вибору параметризації. Якщо $\rho(P, Q)$ — деяка відстань між точками простору, то під хаусдорфовою відстанню між множинами A та B розуміють величину [7]

$$h(A, B) = \max\left\{ \sup_{P \in A} \inf_{Q \in B} \rho(P, Q), \sup_{Q \in B} \inf_{P \in A} \rho(P, Q) \right\}. \qquad (4)$$

Класи поверхонь, які розглядаються в цій роботі, будемо задавати за допомогою двовимірних аналогів модуля неперервності та модуля немонотонності. Специфіка двовимірного випадку дозволяє для функції $f(x, y)$ сформулювати різні означення модуля неперервності:

1) повний модуль неперервності [13]:

$$\omega(f; \delta, \eta) = \sup_{|x'-x''|\leq\delta, |y'-y''|\leq\eta} \{|f(x', y') - f(x'', y'')|\}, \tag{5}$$

де $\{(x', y'), (x'', y'')\} \in I$;

2) модуль неперервності, який характеризує зміну $f(x, y)$ вздовж кожної змінної [13] :

$$\omega_1(f; \delta) = \sup_{|x'-x''|\leq\delta, \{x', x'', y\}\in[0,1]} \{|f(x', y) - f(x'', y)|\}, \tag{6}$$

$$\omega_2(f; \eta) = \sup_{|y'-y''|\leq\eta, \{x, y', y''\}\in[0,1]} \{|f(x, y') - f(x, y)|\}; \tag{7}$$

3) модуль неперервності спеціального вигляду [11]:

$$\omega^*(f; \delta, \eta) = \omega_1(f; \delta) + \omega_2(f; \eta), \tag{8}$$

де модулі неперервності $\omega_1(f; \delta)$ та $\omega_2(f; \eta)$ введені співвідношеннями (6) та (7) відповідно.

Функції (5)–(8) мають характеристичні властивості, аналогічні тим, які має одновимірний модуль неперервності, а саме: $\omega(0, 0) = 0$, $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$, $\omega^*(0, 0) = 0$, ці функції не спадають по змінним δ, η, неперервні та напівадитивні. Тому про функції $\omega(\delta, \eta)$, $\omega_1(\delta)$, $\omega_2(\eta)$, $\omega^*(\delta, \eta)$ можна говорити, як про модулі неперервності, безвідносно щодо функції $f(x, y)$.

Модулем немонотонності функції $f(x, y)$ називають величину [11]:

$$\mu(f; t, \tau) = \frac{1}{2} \sup_{|x'-x''|\leq t, |y'-y''|\leq\tau} \{|f(x', y') - f(x, y)| +$$

$$+ |f(x'', y'') - f(x, y)| - |f(x', y') - f(x'', y'')|\}\,. \tag{9}$$

Оскільки функція $\mu(f; t, \tau)$ має властивості, аналогічні властивостям одновимірного модуля немонотонності, тобто $\mu(f; t, \tau)$ визначена для всіх $t, \tau \geq 0$, $\mu(f; 0, 0) = 0$, $\mu(f; t, \tau)$ не спадає по кожній змінній, то кожній обмеженій функції $f(x, y)$ можна поставити у відповідність таку функцію $\mu(f; t, \tau)$, яка має перераховані властивості, і навпаки, кожну функцію, яка задовольняє ці властивості, можна розглядати як модуль немонотонності деякої функції $f(x, y)$.

Введемо до розгляду такі класи неперервних на квадраті I функцій:

1) клас $H^1_\omega[I]$ — клас функцій $f \in C[I]$, для яких повний модуль неперервності $\omega(f; \delta, \eta) \le \omega(\delta, \eta)$, де $\omega(\delta, \eta)$— заданий опуклий вгору повний модуль неперервності;

2) клас $H^2_{\omega_1,\omega_2}[I]$ — клас функцій $f \in C[I]$ таких, що

$$|f(x', y) - f(x'', y)| \le \omega_1(|x'' - x'|), \{x', x'', y\} \in [0; 1],$$

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \le \omega_2(|y'' - y'|), \{y', y'', x\} \in [0; 1],$$

де $\omega_1(\delta)$, $\omega_2(\eta)$ — задані опуклі вгору модулі неперервності;

3) клас $H^3_{\omega^*}[I]$ — множина функцій $f \in C[I]$, які визначені модулем неперервності спеціального типу (8), тобто задовольняють умову

$$\omega^*(f; \delta, \eta) \le \omega^*(\delta, \eta) = \omega_1(\delta) + \omega_2(\eta),$$

де $\omega_1(\delta)$, $\omega_2(\eta)$ — задані опуклі вгору модулі неперервності;
4) клас $BH_\mu[I]$ — множина функцій $f \in C[I]$, для яких $\sup\limits_{x,y} |f(x, y)| \le B$ і $\mu(f; t, \tau) \le \mu(t, \tau)$, де $\mu(t, \tau)$ — заданий модуль немонотонності.

Класи поверхонь, у яких кожна координатна функція належить відповідно до класів $H^1_\omega[I]$, $H^2_{\omega_1,\omega_2}[I]$, $H^3_{\omega^*}[I]$, $BH_\mu[I]$ позначимо через $\overline{H}^1_\omega[I]$, $\overline{H}^2_{\omega_1,\omega_2}[I]$, $\overline{H}^3_{\omega^*}[I]$, $B\overline{H}_\mu[I]$.

Нехай $I = [0; 1] \times [0; 1]$ — одиничний квадрат зміни параметрів u та v , а n, m — довільні фіксовані натуральні числа; $\Delta_n : 0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = 1$ та $\delta_m : 0 = v_0 < v_1 < \ldots < < v_m = 1$ — відповідні розбиття відрізків зміни параметрів u та v. З множин $Q_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ та $Q_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ виділимо дві підмножини R_n та R_m.

При дослідженні задачі оптимального кодування будемо застосовувати такий спосіб, коли кожна координатна функція кодується одним і тим самим набором функціоналів. Відстань між точками

P і Q простору визначимо, як звичайну евклідову відстань r між точками простору, а через X_R і X_h позначимо метричні простори з метрикою (3) і (4) відповідно.

1. Оцінки зверху для величин (2) отримуємо, застосовуючи інтерполяційний метод кодування, коли μ_k — лінійні функціонали на $C[I]$, задані рівностями $\mu_{ik}(\varphi) = \varphi(u_i, v_k)$, де $i \in R_n$, $k \in R_m$. Таким чином, поверхню $\overline{\varphi}(u,v)$ закодуємо $N = m^* n^*$ точками $M_{i,k}\left(\varphi_1(u_i,v_k), \varphi_2(u_i,v_k), \varphi_3(u_i,v_k)\right)$, через які вона проходить (n^*, m^* — кількість елементів множин R_n, R_m відповідно).

Нехай для координатних функцій поверхонь $\overline{\varphi}$ та $\overline{\psi}$ з класу $\overline{H}^1_\omega[I]$ виконуються рівності

$$\varphi_p(u_i, v_k) = \psi_p(u_i, v_k),\ p = 1,2,3,\ i \in R_n,\ k \in R_m. \tag{10}$$

Якщо $P(u,v)$ та $Q(u,v)$ — точки відповідно поверхонь $\overline{\varphi}$ та $\overline{\psi}$, що визначаються одними і тими ж значеннями параметрів u, v , то $P_{i,k}(u_i,v_k) = Q_{i,k}(u_i,v_k)$ і

$$r\left(P,Q\right) \le r\left(P,P_{i,k}\right) + r\left(Q,Q_{i,k}\right) =$$

$$= \sqrt{\sum_{p=1}^{3}\left[\varphi_p(u,v) - \varphi_p(u_i,v_k)\right]^2} + \sqrt{\sum_{p=1}^{3}\left[\psi_p(u,v) - \psi_p(u_i,v_k)\right]^2} \le$$

$$\le 2\sqrt{3}\omega(|u-u_i|, |v-v_{k|}).$$

Оскільки це справедливо для довільних u_i та v_k, то

$$r(P,Q) \le 2\sqrt{3}\omega(|u-u_i|, |v-v_k|), 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1.$$

В точності цієї оцінки можна переконатися, якщо розглянути поверхні $\overline{\varphi}$ та $\overline{\psi}$ з координатними функціями відповідно $\varphi_p(u,v) = -\psi_p(u,v) = \min\limits_{i,k} \omega(|u-u_i|, |v-v_k|)$, $p = 1,2,3$.

Мінімум в цій нерівності буде реалізуватися при рівномірному розбитті відрізків $[0;1]$ відповідно точками u_i та v_k, тобто $u_i = \frac{i}{n}$, $i = \overline{0,n}$, $v_k = \frac{k}{m}$, $k = \overline{0,m}$. Таким чином, для величини

$D(\overline{H}^1_\omega, M^0_N, X_R)$, де M^0_N — набір інтерполяційних функціоналів, заданих по рівномірному розбиттю рівностями $\mu_{ik}(\overline{\varphi}) = \overline{\varphi}\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{m}\right)$, маємо співвідношення

$$D\left(\overline{H}^1_\omega[I], M^0_N, X_R\right) = 2\sqrt{3}\omega\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2m}\right). \tag{11}$$

Аналогічними міркуваннями для класу $\overline{H}^2_{\omega_1,\omega_2}[I]$ отримуємо оцінку

$$r(P,Q) \le 2\sqrt{3}\min_{i,k}\left[\omega_1(|u-u_i|) + \omega_2(|v-v_k|)\right],$$

$0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1$, точність якої перевіряється на поверхнях $\overline{\varphi}$ та $\overline{\psi}$ з координатними функціями

$$\varphi_p(u,v) = -\psi_p(u,v) = \min_{i,k}\left[\omega_1(|u-u_i|) + \omega_2(|v-v_k|)\right],$$

$p = 1,2,3,\ 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1$. При рівномірному розбитті $u_i = \frac{i}{n}$, $i = \overline{0,n}$, $v_k = \frac{k}{m}$, $k = \overline{0,m}$, реалізується відповідний мінімум відстані, тому для величини $D\left(\overline{H}^2_{\omega_1,\omega_2}[I], M^0_N, X_R\right)$ отримаємо таке співвідношення

$$D\left(\overline{H}^2_{\omega_1,\omega_2}[I], M^0_N, X_R\right) = 2\sqrt{3}\left[\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{2m}\right)\right]. \tag{12}$$

При знаходженні оцінки знизу величини (2) для класів поверхонь $\overline{H}^3_{\omega^*}[I]$ скористаємося результатом статті [8], в якій міститься оцінка наближення функції двох змінних даного класу багатогранними функціями в рівномірній метриці:

$$\sup_{f\in H^3_{\omega^*}[I]} \frac{||f(x,y) - L_{nm}(f;x,y)||_C}{\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{2m}\right)} = 1.$$

Якщо для координатних функцій поверхонь $\overline{\varphi}$ та $\overline{\psi}$ з класу $\overline{H}^3_{\omega^*}[I]$ виконуються рівності (10), і $P \in \overline{\varphi}$, $Q \in \overline{\psi}$, $P_{i,k} \in \overline{L}_{mn}$, то

$$r(P,Q) \le r(P,P_{i,k}) + r(Q,P_{i,k}) \le 2\sqrt{3}\left[\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{2m}\right)\right],$$

і тоді, аналогічно попередньому випадку, є справедливим співвідношення

$$D(\overline{H}^3_{\omega^*}[I], M_N^0, X_R) = 2\sqrt{3}\left[\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{2m}\right)\right]. \qquad (13)$$

У випадку хаусдорфової метрики, враховуючи нерівність $h(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) \le R(\overline{\varphi}, \overline{\psi})$, отримаємо, що оцінки для величин $D\left(\overline{H}^i[I], M_N^0, X_R\right)$, $i = 1, 2, 3$, є завищеними вдвічі. Дійсно, якщо для поверхонь $\overline{\varphi}$ та $\overline{\psi}$ виконуються рівності (10) при $u_i = u_i^0$, $v_k = v_k^0$, то для довільної точки $P = P(u, v)$ поверхні $\overline{\varphi}$ існує точка $P_{i,k}$ з координатами $\left(\varphi_1(u_i^0, v_k^0), \varphi_2(u_i^0, v_k^0), \varphi_3(u_i^0, v_k^0)\right)$ така, що $|u - u_i^0| \le \frac{1}{2n}$, $|v - v_k^0| \le \frac{1}{2m}$. А оскільки точка $P_{i,k}$ належить і поверхні $\overline{\psi}$, то

$$r(P, \overline{\psi}) = \inf_{Q \in \overline{\psi}} r(P, Q) \le r(P, P_{i,k}) =$$

$$= \sqrt{\sum_{p=1}^{3} \left[\varphi_p(u, v) - \varphi_p(u_i^0, v_k^0)\right]^2}.$$

Для класу $\overline{H}^1_\omega[I]$ отримуємо $r(P, \overline{\psi}) \le \sqrt{3}\omega\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2m}\right)$, а для класів $\overline{H}^2_{\omega_1,\omega_2}[I]$, $\overline{H}^3_{\omega^*}[I]$ —

$$r(P, \overline{\psi}) \le \sqrt{3}\left[\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right) + \omega_1\left(\frac{1}{2n}\right)\right].$$

Такі ж оцінки отримуємо і для $r(Q, \overline{\varphi}), Q \in \overline{\psi}$, причому знак рівності буде мати місце для поверхонь з координатними функціями, що реалізували мінімуми відповідних відстаней. Таким чином, мають місце рівності:

$$D\left(\overline{H}^1_\omega[I], M_N^0, X_h\right) = \sqrt{3}\omega\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2m}\right). \qquad (14)$$

$$D\left(\overline{H}^2_{\omega_1,\omega_2}[I], M_N^0, X_h\right) = \sqrt{3}\left[\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{2m}\right)\right]. \qquad (15)$$

$$D\left(\overline{H}^3_{\omega^*}[I], M^0_N, X_h\right) = \sqrt{3}\left[\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{2m}\right)\right]. \qquad (16)$$

Рівності (11)—(16) дозволяють виписати оцінки зверху для відповідних інформаційних поперечників в метриках (3) і (4).

Теорема 1. *Для будь-яких опуклих вгору модулів неперервності* $\omega(\delta,\eta)$, $\omega_1(\delta)$, $\omega_2(\eta)$ *мають місце нерівності:*

$$\gamma^N\left(\overline{H}^1_{\omega}[I], X_R\right) \leq\ 2\sqrt{3}\omega\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2m}\right); \qquad (17)$$

$$\gamma^N\left(\overline{H}^2_{\omega_1,\omega_2}[I], X_R\right) = \gamma^N\left(\overline{H}^3_{\omega^*}[I], X_R\right) \leq$$
$$\leq 2\sqrt{3}\left[\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{2m}\right)\right]; \qquad (18)$$

$$\gamma^N\left(\overline{H}^1_{\omega}[I], X_h\right) \leq \sqrt{3}\omega\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2m}\right); \qquad (19)$$

$$\gamma^N\left(\overline{H}^2_{\omega_1,\omega_2}[I], X_h\right) = \gamma^N\left(\overline{H}^3_{\omega^*}[I], X_h\right) \leq$$
$$\leq \sqrt{3}\left[\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{2m}\right)\right]. \qquad (20)$$

2. Для отримання оцінок знизу для інформаційних поперечників класів поверхонь будемо розглядати лише множину $\mathbf{M}^*_\mathbf{N}$ функціоналів $M_N = \{\mu_1(f), \mu_2(f), \cdots, \mu_N(f)\}$, які є неперервними та непарними, тобто обмежимося розглядом величини

$$\gamma^N(F, X_\rho) = \inf_{M_N \in \mathbf{M}^*_\mathbf{N}} D(F, M_N, X_\rho) =$$
$$= \inf_{M_N \in \mathbf{M}^*_\mathbf{N}} \sup\left\{\rho(\overline{\phi}, \overline{\psi})_X : \overline{\phi}, \overline{\psi} \in F, \mu_k(\varphi_i) = \mu_k(\psi_i),\right.$$
$$\left. k = \overline{1, N}, i = 1, 2, 3\right\}. \qquad (21)$$

Справедливим є таке твердження.

Лема 1. *Нехай* K — *клас функцій* $f \in C[I]$, *що містить тотожний нуль і разом з функцією* $f(u, v)$ *містить також і* *функцію* $-f(u,v)$*; крім того, нехай* K_3 *— клас вектор–функцій* $\overline{f}(u,v) = \{f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v)\}$*, у якого кожна функція* $f_i \in K, i = 1,2,3$*. Якщо для набору* $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N\}$ *неперервних та непарних на* $C[I]$ *функціоналів в класі* K *існує функція* $g(u,v)$ *така, що* $\mu_k(g) = 0$*,* $k = \overline{1,N}$*,*

$$||g||_C = \max_{0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1} |g(u,v)| \ge q, \tag{22}$$

то

$$D(K_3, M_N, X_R) \ge 2\sqrt{3}q, \tag{23}$$

$$D(K_3, M_N, X_h) \ge \sqrt{3}q. \tag{24}$$

Доведення. Розглянемо вектор-функції $\overline{\varphi}(u,v)$ та $\overline{\psi}(u,v)$, де $\varphi_i(u,v) = -\psi_i(u,v) = g(u,v)$, $i = 1,2,3$, а $g(u,v)$ задовольняє співвідношення (22). Якщо $||\varphi_i||_C = |\varphi_i\,(u_0,v_0)|$, то $|\varphi_i(u_0,v_0)| - |\psi_i(u_0,v_0)| = 2|g(u_0,v_0)| \ge 2q$ і тому

$$R(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) \ge r(\overline{\varphi}(u_0,v_0), \overline{\psi}(u_0,v_0)) \ge 2\sqrt{3}q.$$

Далі, якщо в класі K розглянути вектор-функції $\overline{\varphi}(u,v)$ та $\overline{\psi}(u,v)$, у яких $\varphi_i(u,v) = g(u,v)$, $\psi_i(u,v) \equiv 0$, $i = 1,2,3$, то для хаусдорфової метрики отримуємо

$$h(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \left(\sum_{i=1}^{3} \varphi_i^2(u_0,v_0) \right)^{\frac{1}{2}} \ge \sqrt{3}q.$$

Перейдемо до аналізу конкретних ситуацій.

Нехай клас $K = H_\omega^1[I]$, $\omega(\delta,\eta)$ — заданий опуклий вгору модуль неперервності, S^N — одинична сфера в $(N+1)$ - вимірному просторі векторів $\overline{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N+1}\}$ з нормою $||\overline{\xi}|| = |\xi_1| + |\xi_2| + \cdots + |\xi_{N+1}|$. Покладемо $u_0 = v_0 = 0$, $u_k = = v_k = |\xi_1| + \cdots + |\xi_k|$, $k = 1, 2, \ldots, N+1$

та поставимо у відповідність вектору $\overline{\xi} \in S^N$ функцію

$$g(\overline{\xi}, u, v) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega(2u_1 - 2u, 2v_1 - 2v) \text{ sign } \xi_1, \\ \qquad u \in [u_0; u_1], v \in [v_{i-1}; v_i], i = \overline{1, N+1}, \\ \frac{1}{2}\omega(2u_i - 2u, 2v_1 - 2v) \text{ sign } \xi_1, \\ \qquad u \in [u_{i-1}; u_i], v \in [v_0; v_1], i = \overline{1, N+1}, \\ \frac{1}{2}\min[\omega(2u - 2u_{i-1}, 2v - 2v_{k-1}), \\ \qquad \omega(2u_i - 2u, 2v_k - 2v)] \text{ sign } \xi_k, \\ u \in [u_{i-1}; u_i], v \in [v_{k-1}; v_k], \{i, k\} \in \{2, 3, \ldots, N\}, \\ \frac{1}{2}\omega(2u - 2u_N, 2v - 2v_i) \text{ sign } \xi_{N+1}, \\ \qquad u \in [u_N; u_{N+1}], v \in [v_{i-1}; v_i], i = \overline{1, N+1}, \\ \frac{1}{2}\omega(2u - 2u_i, 2v - 2v_N) \text{ sign } \xi_{N+1}, \\ \qquad u \in [u_{i-1}; u_i], v \in [v_N; v_{N+1}], i = \overline{1, N+1}, \end{cases}$$

яка належить до класу $H^1_\omega[I]$, виконується нерівність $||g(\overline{\xi})||_C \geq \geq \frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right)$.

Якщо $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N\}$ — набір неперервних та непарних функціоналів, то співвідношення

$$\eta_k(\overline{\xi}) = \mu_k\left(g(\overline{\xi})\right), \; k = 1, 2, \cdots, N,$$

задають на S^N неперервне та непарне ($\mu_k(-f) = -\mu_k(f)$) векторне поле. Тому за теоремою Борсука [9] для деякого вектора $\overline{\xi}^* \in S^N$ буде $\mu_k\left(g(\overline{\xi}^*)\right) = 0$, $k = 1, 2, \cdots, N$. Тоді згідно з лемою 1 отримаємо

$$D(\overline{H}^1_\omega[I], M_N, X_R) \geq \sqrt{3}\omega\left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right), \tag{25}$$

$$D(\overline{H}^1_\omega[I], M_N, X_h) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\omega\left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right). \tag{26}$$

Ці нерівності виконуються для кожного набору $M_N \in \mathbf{M}^*_\mathbf{N}$, а тому, враховуючи (17), (19), (25), (26), приходимо до висновку, що є справедливою теорема.

Теорема 2. *Для будь-якого опуклого вгору модуля неперервності* $\omega(\delta, \eta)$ *виконуються співвідношення*

$$\sqrt{3}\omega\left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right) \leq \gamma^N(\overline{H}^1_\omega[I], X_R) \leq 2\sqrt{3}\omega\left(\frac{1}{2N}, \frac{1}{2N}\right).$$

Нехай далі $K = H^3_{\omega^*}[I]$ або $H^2_{\omega_1,\omega_2}[I]$, де $\omega_1(\delta)$ і $\omega_1(\eta)$ — опуклі вгору модулі неперервності. Тоді так само, як і в попередньому випадку, вектору $\overline{\xi} \in S^N$ поставимо у відповідність функцію:

$$g(\overline{\xi}, u, v) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\omega(2u_1 - 2u) + (2v_1 - 2v)\right) \text{ sign } \xi_1, \\ \qquad u \in [u_0; u_1], v \in [v_{i-1}; v_i], i = \overline{1, N+1}, \\ \frac{1}{2}\left(\omega(2u_i - 2u) + (2v_1 - 2v)\right) \text{ sign } \xi_1, \\ \qquad u \in [u_{i-1}; u_i], v \in [v_0; v_1], i = \overline{1, N+1}, \\ \frac{1}{2}\min[\omega(2u - 2u_{i-1}) + (2v - 2v_{k-1}), \\ \qquad \omega(2u_i - 2u) + (2v_k - 2v)] \text{ sign } \xi_k, \\ u \in [u_{i-1}; u_i], v \in [v_{k-1}; v_k], \{i, k\} \in \{2, 3, \ldots, N\}, \\ \frac{1}{2}\left(\omega(2u - 2u_N) + (2v - 2v_i)\right) \text{ sign } \xi_{N+1}, \\ \qquad u \in [u_N; u_{N+1}], v \in [v_{i-1}; v_i], i = \overline{1, N+1}, \\ \frac{1}{2}\left(\omega(2u - 2u_i) + (2v - 2v_N)\right) \text{ sign } \xi_{N+1}, \\ \qquad u \in [u_{i-1}; u_i], v \in [v_N; v_{N+1}], i = \overline{1, N+1}, \end{cases}$$

що належить до класу $H^3_{\omega^*}[I]$ або $H^2_{\omega_1,\omega_2}[I]$, і справедлива нерівність $||g(\overline{\xi})||_C \geq \frac{1}{2}\left(\omega_1\left(\frac{1}{N}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{N}\right)\right)$.

Для набору $M_N \in \mathbf{M}^*_\mathbf{N}$ маємо неперервне та непарне векторне поле, тому для деякого $\overline{\xi}^* \in S^N$ буде виконуватись рівність $\mu_k\left(g(\overline{\xi}^*)\right) = 0$, і отже, оцінки знизу величини (1) для цих класів поверхонь мають вигляд:

$$D(\overline{H}^2_{\omega_1,\omega_2}[I], M_N, X_R) = D(\overline{H}^3_{\omega^*}[I], M_N, X_R) \geq$$
$$\geq \sqrt{3}\left(\omega_1\left(\frac{1}{N}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{N}\right)\right), \tag{27}$$
$$D(\overline{H}^2_{\omega_1,\omega_2}[I], M_N, X_h) = D(\overline{H}^3_{\omega^*}[I], M_N, X_h) \geq$$
$$\geq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\omega_1\left(\frac{1}{N}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{N}\right)\right). \tag{28}$$

Враховуючи отримані оцінки інформаційних поперечників (18), (20), (27), (28), приходимо до висновку, що має місце теорема.

Теорема 3. *Якщо $\omega_1(\delta)$ і $\omega_1(\eta)$ — довільні опуклі вгору модулі неперервності, то*

$$\sqrt{3}\left(\omega_1\left(\frac{1}{N}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{N}\right)\right) \leq \gamma^N(\overline{H}^2_{\omega_1,\omega_2}[I], X_R) =$$

$$= \gamma^N(\overline{H}^3_{\omega^I}[I], X_R) \geq 2\sqrt{3}\left(\omega_1\left(\frac{1}{2N}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{2N}\right)\right),$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\omega_1\left(\frac{1}{N}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{N}\right)\right) \leq \gamma^N(\overline{H}^2_{\omega_1,\omega_2}[I], X_h) =$$

$$= \gamma^N(\overline{H}^3_{\omega^*}[I], X_h) \geq \sqrt{3}\left(\omega_1\left(\frac{1}{2N}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{2N}\right)\right).$$

3. Перейдемо до розгляду класів $\overline{BH}_\mu[I]$ поверхонь, у яких обмеження на координатні функції задаються за допомогою двовимірного модуля немонотонності (9). Для отримання оцінок інформаційних поперечників знайдемо оцінки наближення функції двох змінних класу $BH_\mu[I]$ багатогранними поверхнями.

Лема 2. *Нехай $f(x, y)$ — задана на $I = [0; 1] \times [0; 1]$ обмежена функція, t, τ — довільні невід'ємні числа, $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ — довільні точки квадрата I такі, що $|x_1 - x_2| \leq t, |y_1 - y_2| \leq \tau$. Тоді для довільних $(x, y) \in I$ мають місце нерівності*

$$M_1 - \mu(f; t, \tau) \leq f(x, y) \leq M_2 + \mu(f; t, \tau),$$

де $\mu(f; t, \tau)$ — модуль немонотонності функції $f(x, y)$,
$M_1 = \min[f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)]$, $M_2 = \max[f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)]$.

Доведення проведемо методом від супротивного. Нехай існує точка $M_0(x_0, y_0)$, $x_1 < x_0 < x_2$, $y_1 < y_0 < y_2$, така, що, наприклад, $f(M_0) < M_1 - \mu(f; t, \tau)$. Тоді $f(M_0) < f(M_1)$, $f(M_0) < f(M_2)$, і за означенням модуля немонотонності буде мати місце

$$\mu(f; t, \tau) > \frac{1}{2}\left(|f(M_1) - f(M_0)| + \right.$$

$$\left. + |f(M_2) - f(M_0)| - |f(M_1) - f(M_2)|\right) =$$

$$= \begin{cases} f(M_2) - f(M_0), \text{якщо } f(M_1) > f(M_2) \\ f(M_1) - f(M_0), \text{якщо } f(M_1) < f(M_2) \end{cases} =$$

$$= \min[f(M_1), f(M_2)] - f(M_0) = M_1 - f(M_0) > \mu(f; t, \tau).$$

Отримане протиріччя доводить справедливість нерівності $M_1 - \mu(f; t, \tau) \leq f(x, y)$. Друга частина нерівності доводиться аналогічно.

Нехай далі маємо деяку поверхню $\overline{\varphi}(u,v)$ з класу $\overline{BH}_\mu[I]$, на якій виберемо довільним чином точки $A\,(\varphi_1(u_1,v_1),\varphi_2(u_1,v_1),\varphi_3(u_1,v_1))$, $B\,(\varphi_1(u_2,v_2),\varphi_2(u_2,v_2),\varphi_3(u_2,v_2))$, $C\,(\varphi_1(u_3,v_3),\varphi_2(u_3,v_3),\varphi_3(u_3,v_3))$, які утворюють трикутну площину, вписану в поверхню $\overline{\varphi}(u,v)$. Далі, будь-яку точку $P_0(x_0,y_0,z_0)\in\overline{\varphi}$, якій відповідають значення параметрів $u=u_0,\ v=v_0$, виберемо так, щоб точка (u_0,v_0) належала трикутнику, утвореному точками (u_1,v_1), (u_2,v_2), (u_3,v_3). А в площині трикутника ABC візьмемо точку $Q(x_*,y_*,z_*)$ так, щоб вона лежала на середині однієї з його сторін, наприклад, $x_*=\frac{\varphi_1(u_1,v_1)+\varphi_1(u_2,v_2)}{2}$, $y_*=\frac{\varphi_2(u_1,v_1)+\varphi_2(u_2,v_2)}{2}$, $z_*=\frac{\varphi_3(u_1,v_1)+\varphi_3(u_2,v_2)}{2}$. Також для визначеності покладемо $M_2^i=\max[\varphi_i(u_1,v_1),\varphi_i(u_2,v_2)]=\varphi_i(u_1,v_1),\ i=1,2,3$.

За лемою 2 маємо нерівності:

$$M_1^1-\mu\left(\varphi_1;|u_2-u_1|,|v_2-v_1|\right)\le x_0\le$$
$$\le M_2^1+\mu\left(\varphi_1;|u_2-u_1|,|v_2-v_1|\right),$$

$$M_1^2-\mu\left(\varphi_1;|u_2-u_1|,|v_2-v_1|\right)\le y_0\le$$
$$M_2^2+\mu\left(\varphi_1;|u_2-u_1|,|v_2-v_1|\right),$$

$$M_1^3-\mu\left(\varphi_1;|u_2-u_1|,|v_2-v_1|\right)\le z_0\le$$
$$\le M_2^3+\mu\left(\varphi_1;|u_2-u_1|,|v_2-v_1|\right).$$

Для різниці x_0-x_* виконується співвідношення, з одного боку,

$$x_0-x_*\le\varphi_1(u_1,v_1)+$$
$$+\mu\left(\varphi_1;|u_2-u_1|,|v_2-v_1|\right)-\frac{\varphi_1(u_1,v_1)+\varphi_1(u_2,v_2)}{2}=$$
$$=\frac{\varphi_1(u_1,v_1)-\varphi_1(u_2,v_2)}{2}+\mu\left(\varphi_1;|u_2-u_1|,|v_2-v_1|\right)\le$$
$$\le\frac{|\varphi_1(u_1,v_1)-\varphi_1(u_2,v_2)|}{2}+\mu\left(\varphi_1;|u_2-u_1|,|v_2-v_1|\right)\le$$
$$\le A_1+\mu\left(\varphi_1;|u_2-u_1|,|v_2-v_1|\right);$$

а з іншого —

$$x_0 - x_* \geq \varphi_1(u_2, v_2) -$$

$$-\mu\left(\varphi_1; |u_2 - u_1|, |v_2 - v_1|\right) - \frac{\varphi_1(u_1, v_1) + \varphi_1(u_2, v_2)}{2} =$$

$$= \frac{\varphi_1(u_2, v_2) - \varphi_1(u_1, v_1)}{2} - \mu\left(\varphi_1; |u_2 - u_1|, |v_2 - v_1|\right) \geq$$

$$\geq -\left(A_1 + \mu\left(\varphi_1; |u_2 - u_1|, |v_2 - v_1|\right)\right),$$

тобто

$$|x_0 - x_*| \leq A_1 + \mu\left(\varphi_1; |u_2 - u_1|, |v_2 - v_1|\right), \tag{29}$$

де $A_1 = \max\limits_{i,j,i \neq j} |\varphi_1(u_i, v_i) - \varphi_1(u_j, v_j)|$, $i, j = 1, 2, 3$.

Аналогічним чином встановлюємо

$$|y_0 - y_*| \leq A_2 + \mu\left(\varphi_2; |u_2 - u_1|, |v_2 - v_1|\right); \tag{30}$$

$$|z_0 - z_*| \leq A_3 + \mu\left(\varphi_3; |u_2 - u_1|, |v_2 - v_1|\right). \tag{31}$$

Нехай, як і раніше, $I = [0; 1] \times [0; 1]$ — одиничний квадрат зміни параметрів u та v, і n, m — довільні фіксовані натуральні числа; Δ_i та δ_k — відповідні розбиття відрізків зміни параметрів u та v. Точки $M_{i,k}\left(\varphi_1(u_i, v_k), \varphi_2(u_i, v_k), \varphi_3(u_i, v_k)\right)$ лежать на поверхні $\overline{\varphi}(u, v)$. Через $L_{n,m}$ позначимо багатогранну поверхню, утворену з трикутників, зі сторонами, якими є відрізки $[M_{i,k}; M_{i,k+1}]$, $[M_{i,k}; M_{i+1,k+1}]$, $[M_{i,k+1}; M_{i+1,k+1}]$ та $[M_{i,k}; M_{i+1,k+1}]$, $[M_{i,k}; M_{i+1,k}]$, $[M_{i+1,k}; M_{i+1,k+1}]$. Таким чином побудовану багатогранну поверхню будемо називати вписаною в поверхню $\overline{\varphi}(u, v)$. Зрозуміло, що заданий набір точок $M_{i,k}$ визначає багатогранну поверхню $L_{n,m}$ неоднозначно, але кожна така поверхня має $2nm$ трикутні грані.

Розглянемо випадок, коли розбиття Δ_i і δ_k є рівномірними, тобто $u_i = \frac{i}{n}$, $v_k = \frac{k}{m}$, а за вписану площину візьмемо площину, утворену, наприклад, точками $M_{i,k}$, $M_{i,k+1}$, $M_{i+1,k+1}$. Тоді нерівності (29), (30), (31) набирають вигляду:

$$|x_0 - x_*| \leq A_1 + \mu\left(\varphi_1; \frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right),$$

$$|y_0 - y_*| \leq A_2 + \mu \left(\varphi_2; \frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right),$$

$$|z_0 - z_*| \leq A_3 + \mu \left(\varphi_3; \frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right).$$

Таким чином, внаслідок довільності вибору трикутної площини є справедливою оцінка

$$r(\overline{\varphi}, L_{n,m}) \leq \sqrt{\sum_{s=1}^{3} \left(A_s + \mu \left(\varphi_s, \frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)\right)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{s=1}^{3} \left(A_s + \mu \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)\right)^2} \leq \sqrt{3} \left(A + \mu \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)\right),$$

де $A_s = \max\limits_{i,j,i \neq j} |\varphi_s(u_i, v_i) - \varphi_s(u_j, v_j)|, \{i, j\} \in \{1, 2, 3\}$, а також $A = \max\limits_{s} A_s, s = 1, 2, 3$. Справедлива теорема.

Теорема 4. *Якщо* $\overline{\varphi} \in \overline{BH}_\mu[I]$ *— неперервна параметрично задана поверхня,* $\mu(t, \tau)$ *— заданий модуль немонотонності,* $L_{n,m}$ *— багатогранна поверхня, вписана в* $\overline{\varphi}$ *в точках* $M_{i,k}\left(\varphi_1\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{m}\right), \varphi_2\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{m}\right), \varphi_3\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{m}\right)\right)$, $i = \overline{0, n}$, $k = \overline{0, m}$ *, то має місце нерівність:*

$$r(\overline{\varphi}, L_{n,m}) \leq \sqrt{3} \left(A + \mu \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)\right),$$

де $A = \max\limits_{i,j,i \neq j,s} |\varphi_s(u_i, v_i) - \varphi_s(u_j, v_j)|$, $\{i, j, s\} \in \{1, 2, 3\}$.

Використовуючи нерівність трикутника, отримуємо, що відстань між точками поверхонь $\overline{\varphi}$ та $\overline{\psi}$ з класу $\overline{BH}_\mu[I]$, що мають однакові значення в вузлах квадрату I, задовольняє нерівність

$$r(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) \leq 2\sqrt{3} \left(A + \mu \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)\right).$$

Далі, шляхом міркувань, використаних при отриманні оцінки зверху для класів поверхонь, заданих за допомогою модуля неперервності, прийдемо до такого результату.

Теорема 5. *Для довільного заданого модуля немонотонності $\mu(t,\tau)$ є справедливою оцінка*

$$\gamma^N(\overline{BH}_\mu[I], X_R) \le 2\sqrt{3}\left(A+\mu\left(\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)\right), \tag{32}$$

$$\gamma^N(\overline{BH}_\mu[I], X_h) \le \sqrt{3}\left(A+\mu\left(\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)\right), \tag{33}$$

де $A = \max\limits_{i,j,i\neq j,s} |\varphi_s(u_i,v_i)-\varphi_s(u_j,v_j)|,\ \{i,j,s\}\in\{1,2,3\}.$

Використовуючи лему 1 та теорему Борсука, отримуємо оцінку знизу для відповідних інформаційних поперечників. Тут в якості функції $g(\overline{\xi},u,v)$ візьмемо функцію:

$$g(\overline{\xi},u,v)=\begin{cases} (\mu(u_k,v_i)-\mu(2u^*-2u,2v^*-2v))\operatorname{sign}\xi_k, \\ \qquad \text{якщо } u_{k-1}\le u\le u^*, v_{i-1}\le v\le v^*, \\ (\mu(u_k,v_i)-\mu(2u-2u^*,2v-2v^*))\operatorname{sign}\xi_k, \\ \qquad \text{якщо } u^*\le u\le u_k, v^*\le v\le v_i, \\ \qquad u^*=\frac{u_{k-1}+u_k}{2}, v^*=\frac{v_{i-1}+v_i}{2}, \\ \qquad \{i,k\}\in\{0,\dots,N+1\}, \end{cases}$$

яка належить класу $\overline{BH}_\mu[I]$ при заданому опуклому модулі немонотонності і $||g(\overline{\xi})||_C \ge \mu\left(\frac{1}{N},\frac{1}{N}\right)$.

Отже, разом з оцінками (32), (33), отримуємо теорему.

Теорема 6. *Для опуклого заданого модуля немонотонності мають місце такі співвідношення:*

$$2\sqrt{3}\mu\left(\frac{1}{N},\frac{1}{N})\right) \le \gamma^N(\overline{BH}_\mu[I], X_R) \le 2\sqrt{3}\left(A+\mu\left(\frac{1}{N},\frac{1}{N}\right)\right),$$

$$\sqrt{3}\mu\left(\frac{1}{N},\frac{1}{N})\right) \le \gamma^N(\overline{BH}_\mu[I], X_h) \le \sqrt{3}\left(A+\mu\left(\frac{1}{N},\frac{1}{N}\right)\right).$$

Зауважимо, що в цій роботі ми отримали певні результати для випадку, коли відстань між поверхнями задавалася за допомогою евклідової відстані між точками простору. Очевидно, що, коли відстань між точками простору задавати формулами $\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{3}|x_i-y_i|$

або $\rho(x, y) = \max\limits_{1 \le i \le 3} |x_i - y_i|$, то можна отримати оцінки відповідних інформаційних поперечників такі ж самі за порядком, як і у випадку евклідової відстані.

1. *Корнейчук Н.П.* Об оптимальном кодировании вектор-функций // Укр. мат. журн. — 1988. — **40**, № 6. — С.737–743.
2. *Корнейчук Н.П.* Приближение и оптимальное кодирование гладких плоских кривых // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 4. — С.492–499.
3. *Половина А.А.* Об оптимальном кодировании одного класса вектор-функций // Укр. мат. журн. — 1997. — **49**, № 12. — С.1638–1645.
4. *Назаренко М.О., Чкана Я.О.* Про оптимальне кодування деяких класів плоских та просторових кривих // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2003. — **46**. — С.116–130.
5. *Назаренко М.О., Чкана Я.О.* Про інформаційний поперечник одного класу кривих // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання. — 2004. — **1**, № 1. — С.216–226.
6. *Назаренко М.О., Чкана Я.О.* Про інформаційний поперечник одного класу вектор-функцій // Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. — 2004. — № 11-12. — С.91–95.
7. *Сендов Бл.* Хаусдорфовы приближения. — София: Изд-во Болгар. АН, 1979. — 372 с.
8. *Сторчай В.Ф.* Приближение непрерывных функций двух переменных многогранными функциями и сплайн-функциями в равномерной метрике. // Исслед. по соврем. проблемам суммиров. и приближ. функций и их приложениям. — Днепропетровск: Изд-во Днепропетровского ун-та, 1976. — С.50–54.
9. *Тихомиров В.Н.* Некоторые вопросы теории приближения. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 304 с.
10. *Мартынюк В.Т.* О приближении ломаными кривых, заданных параметрическими уравнениями в хаусдорфовой метрике // Укр. мат. журн. — 1976. — **28**, № 1. — С.87–92.
11. *Мартынюк В.Т.* О линейных методах приближения ограниченных функций двух переменных относительно одной метрики хаусдорфова типа // Изв. ВУЗов. Математика. — 1968. — **74**, № 7. — С.42–50.
12. *Корнейчук Н.П.* Информационные поперечники // Укр. мат. журн. — 1995. — **47**, № 11. — С.1506–1518.
13. *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения. — М.: Наука, 1984. — 352 с.
14. *Корнейчук Н.П.* Сложность аппроксимационных задач // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 12. — С.1683–1694.