Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2010, Т.7, №1, 162-186

УДК 517.5

Є. Ю. Овсій (Ін–т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ УЗАГАЛЬНЕНИМИ СУМАМИ ЗИГМУНДА

We obtain an asymptotic formula for the lest upper bounds of deviations in the uniform metric of the generalized Zygmund sums on classes of continuous 2π-periodic functions whose (ψ,β)-derivatives belong to the set H_{ω}. The assertions obtained here cover the known results on approximation by classical Zygmund sums on the classes $W^r_{\beta}H_{\omega}$ and W^r.

Одержано асимптотичну формулу для точних верхніх меж відхилень узагальнених сум Зигмунда в рівномірній метриці на класах неперервних 2π-періодичних функцій, (ψ,β)-похідні яких належать множині H_{ω}. Встановлені твердження охоплюють відомі результати по наближенню сумами Зигмунда на класах $W^r_{\beta}H_{\omega}$ та W^r.

Нехай L — простір сумовних на $(0,2\pi)$ 2π-періодичних функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_L := \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt$, M — простір вимірних і істотно обмежених 2π-періодичних функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_{M} = \|f\|_{\infty} := \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t} |f(t)|$, а C — простір неперервних 2π-періодичних функцій $f(t)$, в якому норма задається формулою $\|f\|_C := \max\limits_{t} |f(t)|$.

Множину неперервних 2π-періодичних функцій $f(\cdot)$, $(r-1)$-похідні $(r\in\mathbb{N})$ яких абсолютно неперервні і $f^{(r)}\in B_{\infty}$, де

$$B_{\infty} := \{\varphi\in M: \ \|\varphi\|_{\infty}\leqslant 1\},$$

позначимо через W^r.

Нехай

$$H_{\omega} := \{\varphi\in C: \ |\varphi(t)-\varphi(t')|\leqslant \omega(|t-t'|) \ \forall t,t'\in\mathbb{R}\},$$

де $\omega(t)$ — фіксована мажоранта типу модуля неперервності. Тоді W^rH_{ω} — клас функцій $f(t)$ з C, у яких $f^{(r)}\in H_{\omega}$, тобто

$$W^rH_{\omega} := \{f\in C: \ f^{(r)}\in H_{\omega}, \ r\in\mathbb{N}\}.$$

Через C^{ψ}_{β} позначимо введені О.І. Степанцем [1, 2] множини неперервних 2π-періодичних функцій $f(x)$, які визначаються в такий спосіб. Нехай $f \in C$, а a_k і b_k — її коефіцієнти Фур'є. Якщо послідовність дійсних чисел $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, і число $\beta \in \mathbb{R}$ такі, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \Big(a_k \cos\Big(kx + \frac{\beta\pi}{2}\Big) + b_k \sin\Big(kx + \frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big),$$

є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, то $\varphi(\cdot)$ називають (ψ,β)-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають через $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$. При цьому кажуть, що функція $f(\cdot)$ належить множині C^{ψ}_{β}. Якщо $f \in C^{\psi}_{\beta}$ і $f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset L$, то вважають, що $f \in C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Через $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ і $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ позначимо класи вигляду:

$$C^{\psi}_{\beta,\infty} := \{f: \ f \in C^{\psi}_{\beta}, \ f^{\psi}_{\beta} \in B_{\infty}\}$$

і

$$C^{\psi}_{\beta}H_{\omega} := \{f: \ f \in C^{\psi}_{\beta}, \ f^{\psi}_{\beta} \in H_{\omega}\}.$$

Якщо $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, то класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ і $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ є відомими класами Вейля–Надя, які позначаються відповідно через W^r_{β} і $W^r_{\beta}H_{\omega}$. Крім того, при $r = \beta$, $r > 0$, зазначені класи називаються класами Вейля і позначаються через W^r_r і $W^r_rH_{\omega}$. Якщо ж, при цьому, $r = \beta$, $\beta \in \mathbb{N}$, то мають місце рівності (див. [2]) $W^r_r = W^r$ і $W^r_rH_{\omega} = W^rH_{\omega}$.

Послідовності $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, які визначають класи $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$, зручно розглядати як звуження на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ деяких неперервних функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу t, що належать множині $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M} := \Big\{\psi(t), \ t \geqslant 1: \ \psi(t) > 0, \ \psi(t_1) - 2\psi\Big(\frac{t_1+t_2}{2}\Big) + \psi(t_2) \geqslant 0$$

$$\forall t_1, \ t_2 \in [1;\infty), \ \lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0\Big\}.$$

Наслідуючи О.І. Степанця (див., наприклад, [2, с. 160]), з множини $\mathfrak{M}$ будемо виділяти підмножини $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_C$ і $\mathfrak{M}^+_{\infty}$ вигляду

$$\mathfrak{M}_0 := \{\psi \in \mathfrak{M}: \ 0 < \mu(t) \leqslant K < \infty \quad \forall t \geqslant 1\},$$

$$\mathfrak{M}_C := \{\psi \in \mathfrak{M} : \ 0 < K_1 \leqslant \mu(t) \leqslant K_2 < \infty \quad \forall t \geqslant 1\},$$
$$\mathfrak{M}_\infty^+ := \{\psi \in \mathfrak{M} : \ \mu(t) \uparrow \infty, \ t \to \infty\},$$

де $\mu(t) = \mu(\psi;t) = \frac{t}{\eta(t)-t}$, $\eta(t) = \eta(\psi;t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, $\psi^{-1}(\cdot)$ — обернена до $\psi(\cdot)$ функція, а константи K, K_1 і K_2, взагалі кажучи, можуть залежати від функції ψ. Природними представниками множини $\mathfrak{M}_C$ є, наприклад, функції t^{-r}, $r > 0$, представниками множини $\mathfrak{M}_0 \setminus \mathfrak{M}_C$ — функції $\ln^{-\alpha}(t + e)$, $\alpha > 0$, а множини $\mathfrak{M}_\infty^+$ — функції вигляду $e^{-\alpha t^r}$, $\alpha > 0$, $r > 0$. Через $\mathfrak{M}'$ будемо позначати підмножину функцій $\psi(\cdot)$ з $\mathfrak{M}$, що задовольняють умову $\int\limits_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}\, dt < \infty$. Покладемо також $\mathfrak{M}'_0 := \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}'$.

Згідно з [1, с. 30], якщо $\psi \in \mathfrak{M}'$ і $\beta \in \mathbb{R}$ або $\psi \in \mathfrak{M}$ і $\beta = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$, то множина $C^\psi_\beta \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset M$, складається з функцій, які в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ можуть бути представлені рівністю

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^\psi_\beta(x + t)\Psi_\beta(t)\, dt,$$

де $\Psi_\beta(t)$ — сумовна на $(0, 2\pi)$ функція, ряд Фур'є якої має вигляд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\Big(kt + \frac{\beta\pi}{2}\Big).$$

Нехай $f \in C$. Розглядаємо поліноми вигляду

$$Z^\varphi_n(f;x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\varphi(k)}{\varphi(n)}\right)(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad (1)$$

де $n \in \mathbb{N}$, a_k, b_k — коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, а φ — деяка неперервна, додатна і монотонно зростаюча до нескінченності функція $\varphi(u)$, $u \geqslant 1$. Поліноми $Z^\varphi_n(f;x)$ вперше з'явились в роботах В.Т. Гаврилюк [3, 4] і отримали назву узагальнених сум Зигмунда. Зрозуміло, що якщо $\varphi(t) = t^s$, $s > 0$, то $Z^\varphi_n(f;x)$ співпадають з класичними сумами Зигмунда:

$$Z^s_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k^s}{n^s}\right)(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

При $s = 1$ суми Зигмунда $Z^s_n(f;x)$ є відомими сумами Фейєра $\sigma_n(f;x)$.

Метою даної роботи є знаходження асимптотичних при $n \to \infty$ рівностей для величини

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; Z^{\varphi}_n) := \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}} \|f(\cdot) - Z^{\varphi}_n(f;\cdot)\|_C$$

при деяких природних обмеженнях на функції φ, ψ, ω і параметр β.

Вперше задача такого типу була поставлена та розв'язана А.М. Колмогоровим [5], який розглянув величину вигляду

$$\mathcal{E}(W^r; S_{n-1}) := \sup_{f \in W^r} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C,$$

де

$$S_{n-1}(f;x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad n \in \mathbb{N},$$

— частинні суми Фур'є, і одержав асимптотичну рівність

$$\mathcal{E}(W^r; S_{n-1}) = \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r} + O(1)n^{-r}, \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Згодом В.Т. Пінкевич [6] встановив, що рівність (2) виконується і для дробових $r > 0$.

Дослідження за даною тематикою було продовжено С.М. Нікольським (див., зокрема, [7—9]) який вивчав швидкості наближення деяких важливих класів періодичних функцій різними лінійними методами підсумовування рядів Фур'є. Зокрема, в роботі [8] С.М. Нікольський при всіх $r > 0$ отримав асимптотичну при $n \to \infty$ рівність

$$\mathcal{E}(W^r_r H^{\alpha}; S_{n-1}) = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}} \int\limits_0^{\pi/2} t^{\alpha} \sin t \, dt + O(1)n^{-(r+\alpha)},$$

де $W^r_r H^{\alpha} := W^r_r H_{\omega}$ при $\omega(t) = t^{\alpha}$, $\alpha \in (0,1]$.

Вказані дослідження А.М. Колмогорова і С.М. Нікольського започаткували цілий напрямок в теорії наближення функцій. Узагальнення їх результатів відбувалося в різних напрямках. Зокрема, досліджувалися точні верхні межі норм відхилень тригонометричних поліномів, породжених різними лінійними методами підсумовування рядів Фур'є, на більш загальних класах функцій та в інших метриках. Вагомий внесок в розробку цього напрямку внесли Б. Надь, М.П. Корнєйчук, В.К. Дзядик, О.П. Тіман, М.П. Тіман, С.Б. Стєчкін, О.І. Степанець, О.В. Єфімов, С.О. Теляковський, В.П. Моторний, Р.М. Тригуб, В.І. Рукасов, П.В. Задерей та їх численні учні. Детальніше з історією даного питання можна ознайомитися, наприклад, в коментарях монографіях [1, 10].

Якщо для величини

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n) := \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(\cdot) - U_n(f; \cdot)\|_C,$$

де $\mathfrak{N}$ — фіксований клас неперервних 2π-періодичних функцій, а $U_n(f; \cdot)$ — тригонометричний поліном, породжений певним лінійним методом U_n підсумовування рядів Фур'є, одержано асимптотичну при $n \to \infty$ рівність, тобто рівність вигляду

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n) = \varphi(n) + o(\varphi(n)),$$

де $\varphi(n) = \varphi(\mathfrak{N}; n)$ — деяка конкретна функція натурального аргументу, то кажуть [2, 11], що розв'язано задачу Колмогорова–Нікольського для методу U_n на класі $\mathfrak{N}$ в метриці простору C.

На даний час розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського на класах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, при різних швидкостях спадання до нуля функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, знайдено для багатьох класичних лінійних методів підсумовування рядів Фур'є: Рогозинського [12], Стєклова [13], Фавара [14], Зигмунда [15] тощо.

Що ж стосується узагальненого методу Зигмунда Z^{φ}_n, то його апроксимативні властивості активно досліджувалися на класах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ В.І. Рукасовим, О.О. Новіковим [16—19], І.Б. Ковальською [20] та О.В. Островською [21]. З іншого боку, результатів, які б дозволяли одержувати розв'язки задачі Колмогорова–Нікольського для методу Z^{φ}_{n} на класах $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$, відомо значно менше. Це пов'язано з низкою принципових труднощів технічного характеру, подолання яких вимагає застосування інших, більш тонких, ніж для класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, методів та підходів. Зокрема, О.В. Островська [22, 23] в ряді випадків, одержала асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; Z^{\varphi}_{n})$, коли $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$, $\varphi(u)\psi(u) = 1$, $u \geqslant 1$ і $\beta \in \mathbb{R}$. В [22] показано, що якщо $\beta = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$, і $\omega(1/n)\ln(\min\{\mu(\psi; n), n\}) = o(1)$, $n \to \infty$, то при $n \to \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; Z^{\varphi}_{n}) =$$

$$= \frac{2\psi(n)}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/2}\omega(2t)\,dt + O(1)\psi(n)\omega(1/n)\ln(\min\{\mu(\psi; n), n\}).$$

В роботі [24] одержано асимптотичні формули для величин $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; Z^{\varphi}_{n})$ при $\varphi(u)\psi(u) = 1$, $u \geqslant 1$, у випадку, коли $\psi \in \mathfrak{M}_0$ і $\beta = 0$ або коли $\psi \in \mathfrak{M}'_0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Зокрема, в [24] встановлено такі твердження.

Теорема A. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}'_0$, $\beta = 2l + 1$, $l \in \mathbb{Z}$ і $\varphi(u)\psi(u) = 1$ при всіх $u \geqslant 1$. Тоді якщо*

$$\int\limits_{0}^{\delta}\frac{\omega(t)}{t}\,dt = O(1)\omega(\delta),$$

то при $n \to \infty$

$$\mathcal{E}\big(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; Z^{\varphi}_{n}\big) = \frac{\theta_n(\omega)}{\pi}\psi(n)\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\omega(2t)}{\sin t}\,dt + O(1)\psi(n)\omega(1/n), \qquad (3)$$

де $2/3 \leqslant \theta_n(\omega) \leqslant 1$, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n і β. Якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, то $\theta_n(\omega) = 1$.

Теорема B. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_0$, $\beta = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$ і $\varphi(u)\psi(u) = 1$ для всіх $u \geqslant 1$. Тоді при $n \to \infty$ справедлива асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\big(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; Z^{\varphi}_{n}\big) = \frac{2\psi(n)}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/2}\omega(2t)\,dt + O(1)\psi(n)\omega(1/n), \qquad (4)$$

де $O(1)$ — *величина, рівномірна обмежена по* n *і* β.

В даній роботі досліджується асимптотична поведінка при $n\to\infty$ величини $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega};Z^{\varphi}_{n})$ у нерозглянутому раніше випадку, коли $\psi\in\mathfrak{M}'_0$, $\beta\in\mathbb{R}$ і $\varphi(u)\psi(u)=u$ при всіх $u\geqslant 1$.

Має місце твердження.

Теорема. *Нехай* $\psi\in\mathfrak{M}'_0$, $\beta\in\mathbb{R}$ *і при всіх* $u\geqslant 1$ $\varphi(u)\psi(u)=u$. *Тоді при* $n\to\infty$

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega};Z^{\varphi}_{n})=$$

$$=\frac{2}{\pi}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\frac{\psi(n)}{n}\int\limits_{1/n}^{1}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt+\frac{\theta_n(\omega)}{\pi}\Big|\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big|\int\limits_{0}^{1/n}\psi\Big(\frac{1}{t}\Big)\frac{\omega(t)}{t}\,dt+$$

$$+O(1)\psi(n)\omega(1/n), \tag{5}$$

де $2/3\leqslant\theta_n(\omega)\leqslant 1$, *а* $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена по* n *і* β. *Якщо* $\omega(t)$ — *опуклий модуль неперервності, то* $\theta_n(\omega)=1$.

Якщо, наприклад, $\beta\neq 2l+1$, $l\in\mathbb{Z}$, і $\omega(t)=t$ або

$$\omega(t)=\begin{cases}0, & t=0,\\ t\ln(1/t), & 0<t\leqslant\frac{1}{e},\\ \frac{1}{e}, & t\geqslant\frac{1}{e},\end{cases}$$

то рівність (5) є асимптотичною. Коли ж β — непарне, то рівність (5) є асимптотичною у тому випадку, коли, наприклад, $\psi(t)=\ln^{-\alpha}(t+1)$, $\alpha>1$, і

$$\omega(t)=\begin{cases}0, & t=0,\\ (1+t/2)^{-1}\ln^{-1}(2/t+1), & 0<t\leqslant\frac{2}{e-1},\\ 1-\frac{1}{e}, & t\geqslant\frac{2}{e-1}.\end{cases}$$

Як показано в роботі [1, с. 250], якщо $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності і $\psi\in\mathfrak{M}_C$, $\beta\in\mathbb{R}$, або $\psi\in\mathfrak{M}_0$, $\beta\in\mathbb{R}$, то існують додатні константи K_1 і K_2 такі, що для величини

$$E_n(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}):=\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}}\inf_{t_{n-1}}\|f(\cdot)-t_{n-1}(\cdot)\|_C$$

— найкращого наближення класу $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ тригонометричними поліномами t_{n-1}, порядок яких не перевищує $n-1$, має місце співвідношення

$$K_1\psi(n)\omega(1/n) \leqslant E_n(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}) \leqslant K_2\psi(n)\omega(1/n).$$

Тоді, враховуючи оцінку

$$\int\limits_n^{\infty} \frac{\psi(t)}{t}\,dt = O(1)\psi(n) \quad \forall \psi \in \mathfrak{M}_C$$

(див. [2, с. 214]), із теореми даної роботи випливає таке твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_C$, $\beta \in \mathbb{R}$, або $\psi \in \mathfrak{M}'_0$, $\beta = 0$ і при всіх $u \geqslant 1$ $\varphi(u)\psi(u) = u$. Тоді якщо для модуля неперервності $\omega(t)$ виконується умова*

$$\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\delta\int\limits_{\delta}^{1}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt = O(1)\omega(\delta), \tag{6}$$

то справедлива порядкова оцінка

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; Z^{\varphi}_n) \asymp \psi(n)\omega(1/n). \tag{7}$$

Співставляючи оцінки (3), (4) і (7), приходимо до висновку, що якщо $\psi \in \mathfrak{M}_C$ і $\beta \in \mathbb{Z}$, або $\psi \in \mathfrak{M}'_0$ і $\beta = 0$, то при $\varphi(u) = u/\psi(u)$ поліноми $Z^{\varphi}_n(f;x)$ можуть давати кращий порядок наближення на класах $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$, ніж тоді, коли $\varphi(u) = 1/\psi(u)$. Модулем неперервності $\omega(t)$, який задовольняє умову (6) є, зокрема, функція $\omega(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

При $\psi(t) = t^{-r}$, $r > 0$ (в цьому випадку $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega} = W^r_{\beta}H_{\omega}$), і $\varphi(t) = t^s$, $s > 0$, із теореми одержуємо асимптотичні формули для точних верхніх меж наближень функцій $f \in W^r_{\beta}H_{\omega}$ за допомогою класичних сум Зигмунда.

***Наслідок* 2.** *Нехай $\beta \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $s = r+1$, і $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності. Тоді при $n \to \infty$*

$$\mathcal{E}(W^r_{\beta}H_{\omega}; Z^s_n) = \frac{2}{\pi}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\frac{1}{n^{r+1}}\int\limits_{1/n}^{1}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt + O(1)\frac{\omega(1/n)}{n^r}, \tag{8}$$

де $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена по* n *і* β*.*

Рівність (8) доведена О.В. Єфімовим [26, с. 42].

Оскільки при $\omega(t) = t$ має місце рівність $W^{r-1}_{r-1}H_\omega = W^r$, $r = 2, 3, \dots$, то з наслідка 2 одержуємо таке твердження.

Наслідок 3. *Нехай* $r = 2, 3, \dots$ *і* $s = r$*. Тоді при* $n \to \infty$

$$\mathcal{E}(W^r; Z^s_n) = \frac{2}{\pi}\Big|\sin\frac{r\pi}{2}\Big|\frac{\ln n}{n^r} + O(1)n^{-r}, \tag{9}$$

де $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена по* n*.*

Рівність (9) доведена Б. Надєм [27, с. 47].

Наведемо деякі відомі твердження, що будуть використовуватися для доведення теореми.

Нехай $f \in L$ і $\lambda_n = \{\lambda_1(u),\ \lambda_2(u), \dots, \lambda_n(u)\}$ — набір неперервних на $[0,1]$ функцій, для яких $\lambda_n(k/n) = \lambda^{(n)}_k$, $k = 0, 1, \dots, n$, де $\lambda^{(n)}_k$ — дійсні числа, які визначають поліноми вигляду

$$U_n(f; x; \lambda) := \frac{a_0}{2}\lambda^{(n)}_0 + \sum_{k=1}^{n}\lambda^{(n)}_k(a_k\cos kx + b_k\sin kx), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лема A [1, с. 56]. *Нехай* $f \in C^\psi_\beta M$ *і* $\tau_n(u)$ *— неперервна на* $[0,1]$ *функція, яка визначається співвідношенням*

$$\tau_n(u) = \tau_n(u; \lambda; \psi) = \begin{cases}(1-\lambda_n(u))\psi(nu), & \frac{1}{n} \leqslant u \leqslant 1,\\ \psi(nu), & u \geqslant 1,\end{cases} \tag{10}$$

а на відрізку $[0, \frac{1}{n}]$ *доозначена таким чином, щоб* $\tau_n(0) = 0$ *і її перетворення Фур'є*

$$\widehat{\tau}_n(t) := \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau_n(u)\cos\Big(ut + \frac{\beta\pi}{2}\Big)\,du, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

було сумовним на всій осі. Тоді в кожній точці x *виконується рівність*

$$f(x) - U_n(f; x; \lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^\psi_\beta\Big(x + \frac{t}{n}\Big)\widehat{\tau}_n(t)\,dt, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Лема B [25, с. 71]. *Нехай функція $\tau(u)$ задана на $[0,\infty)$, неперервна та її перетворення $\widehat{\tau}(t)$ — сумовна на $(-\infty,\infty)$ функція, тобто $\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\tau}(t)|\,dt<\infty$. Тоді для всіх $u\geqslant 0$ справедлива рівність*

$$\tau(u)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\Big(ut+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\widehat{\tau}(t)\,dt.$$

Лема C [2, с. 206]. *Нехай $\Phi(t)$ — сумовна на $\mathcal{J}=\{x:\ x\geqslant a\}$ функція ($\Phi\in L(\mathcal{J})$). Тоді якщо x_k, $k=1,2,\ldots$, $a\leqslant x_1<x_2<\ldots$ — деякий набір точок, для яких*

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\Phi(t)\,dt=0,\qquad k=1,2,\ldots,$$

то для будь-якої функції f з множини

$$H_{\omega}(\mathcal{J}):=\{f:\ |f(x)-f(x')|\leqslant\omega(|x-x'|)\ \ \forall x,x'\in\mathcal{J}\}$$

має місце оцінка

$$\bigg|\int\limits_{a}^{\infty}f(t)\Phi(t)\,dt\bigg|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant x_1}|f(t)|\int\limits_{a}^{x_1}|\Phi(t)|\,dt+\omega(\Delta)\int\limits_{x_1}^{\infty}|\Phi(t)|\,dt,$$

де $\Delta:=\sup\limits_{k}(x_{k+1}-x_k)$.

Доведення теореми. Припустимо, що виконуються всі умови теореми. Покладемо

$$\tau_n(u)=\begin{cases}\psi(n)u, & 0\leqslant u\leqslant 1,\\ \psi(nu), & u\geqslant 1.\end{cases}\tag{12}$$

Згідно з лемою 3.1 роботи [2, с. 186]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\tau}_n(t)|\,dt<\infty.\tag{13}$$

Далі, візьмемо в умовах леми **A** в якості $\tau_n(u)$ функцію, що визначається співвідношенням (12), тоді одержуємо для довільної $f \in C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}$ таке інтегральне зображення:

$$\rho_n(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}\Big(x + \frac{t}{n}\Big)\widehat{\tau}_n(t)\,dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \psi \in \mathfrak{M}'_0, \tag{14}$$

де $\rho_n(f;x) := f(x) - Z^{\varphi}_n(f;x)$. Покладемо

$$\widehat{\tau}_{n+}(t) := \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \tau_n(u)\cos ut\,du, \qquad \widehat{\tau}_{n-}(t) := \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \tau_n(u)\sin ut\,du. \tag{15}$$

Оскільки $\tau_n(0) = 0$, то згідно з лемою **B**, при $\beta \neq 2l-1,\ l \in \mathbb{Z}$, маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\tau}_n(t)\,dt = \frac{\tau_n(0)}{\cos\frac{\beta\pi}{2}} = 0. \tag{16}$$

Якщо $\beta = 2l-1,\ l \in \mathbb{Z}$, то внаслідок непарності функції $\widehat{\tau}_{n-}(t)$ одержуємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\tau}_n(t)\,dt = -\sin\frac{\beta\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\tau}_{n-}(t)\,dt = 0. \tag{17}$$

Отже, рівність (14) можна записати в такий спосіб:

$$\rho_n(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(f^{\psi}_{\beta}\Big(x + \frac{t}{n}\Big) - f^{\psi}_{\beta}(x)\Big)\widehat{\tau}_n(t)\,dt, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Далі, оскільки $f^{\psi}_{\beta} \in H^0_{\omega}$, де $H^0_{\omega} := \{\nu \in H_{\omega} :\ \varphi \perp 1\}$ і для будь-якої $\nu \in H^0_{\omega}$ існує функція $f^* \in C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}$ така, що $f^{*\psi}_{\beta}(\cdot) = \nu(\cdot)$, то для величини $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}; Z^{\varphi}_n)$ із (18) отримуємо

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}; Z^{\varphi}_n) = \sup_{\nu \in H^0_{\omega}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\nu\Big(x + \frac{t}{n}\Big) - \nu(x)\Big)\widehat{\tau}_n(t)\,dt \right| =$$

$$= \sup_{\nu\in H^0_\omega}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\nu\Big(\frac{t}{n}\Big)-\nu(0)\Big)\widehat{\tau}_n(t)\,dt\right| =: \sup_{\nu\in H^0_\omega}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\widehat{\tau}_n(t)\,dt\right|. \tag{19}$$

Далі будемо спрощувати інтеграл в правій частині рівності (19), не втрачаючи при цьому його головного значення. Нехай

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\widehat{\tau}_n(t)\,dt = \cos\frac{\beta\pi}{2}I_{1,n} - \sin\frac{\beta\pi}{2}I_{2,n}, \tag{20}$$

де

$$I_{1,n} := \int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\widehat{\tau}_{n+}(t)\,dt, \tag{21}$$

$$I_{2,n} := \int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\widehat{\tau}_{n-}(t)\,dt. \tag{22}$$

Інтегруючи частинами і враховуючи те, що $\tau_n(0)=\tau_n(\infty)=0$, будемо мати

$$\widehat{\tau}_{n+}(t) = \frac{\psi(n)}{\pi}\frac{\cos t-1}{t^2} - \frac{n}{\pi t}\int\limits_{1}^{\infty}\psi'(nu)\sin ut\,du, \tag{23}$$

де $\psi'(u) := \psi'(u+0)$. Підставляючи у формулу (21) значення $\widehat{\tau}_{n+}(t)$, отримуємо

$$I_{1,n} = \frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\frac{\cos t-1}{t^2}\,dt-$$

$$-\frac{n}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\frac{1}{t}\int\limits_{1}^{\infty}\psi'(nu)\sin ut\,du\,dt. \tag{24}$$

Згідно з [2, с. 223] (див. також [11, с. 121]) для будь-якої $\psi\in\mathfrak{M}_0$ справедлива оцінка

$$\frac{n}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\frac{1}{t}\int\limits_{1}^{\infty}\psi'(nu)\sin ut\,du\,dt = O(1)\psi(n)\omega(1/n). \tag{25}$$

Розглядаємо перший доданок правої частини формули (24). Маємо

$$\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\frac{\cos t-1}{t^2}\,dt=\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2}\,dt+$$

$$+\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\frac{\cos t-\cos\frac{t}{n}}{t^2}\,dt=:I_{3,n}+I_{4,n}. \qquad (26)$$

Знайдемо оцінку величини $I_{3,n}$. Користуючись формулою

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\nu(t)\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\nu(t)\,dt \qquad \forall\nu\in L$$

(див., наприклад, [1, с. 43]), маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2}\,dt=-\frac{1}{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t,\nu)\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\delta(t,\nu)\,dt.$$

Тому, враховуючи нерівність $|\delta(t,\nu)|\leqslant\omega(t)$, отримуємо

$$I_{3,n}=-\frac{\psi(n)}{2\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\delta(t,\nu)\,dt=O(1)\frac{\psi(n)}{n}. \qquad (27)$$

Перейдемо до оцінки величини $I_{4,n}$. Для цього представимо її у вигляді

$$I_{4,n}=\frac{\psi(n)}{\pi}\left(\int\limits_{|t|\leqslant 1}+\int\limits_{1\leqslant|t|\leqslant n}+\int\limits_{|t|\geqslant n}\right)\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\frac{\cos t-\cos\frac{t}{n}}{t^2}\,dt=$$

$$=:I_{5,n}+I_{6,n}+I_{7,n}. \qquad (28)$$

Оскільки при кожному фіксованому n функція $\frac{\cos t - \cos(t/n)}{t^2}$ обмежена в околі нуля, то

$$I_{5,n} = O(1)\psi(n)\omega(1/n). \tag{29}$$

Для оцінки інтегралів $I_{6,n}$ та $I_{7,n}$ нам знадобиться така формула:

$$\mathcal{J}_{b,\alpha,\gamma} = O(1)\frac{\omega(1/n)}{\alpha b}, \tag{30}$$

де

$$\mathcal{J}_{b,\alpha,\gamma} := \int\limits_{|t|\geqslant b} \nu\Big(\frac{t}{n}\Big)\frac{\cos(\alpha t - \gamma)}{t^2}\,dt, \tag{31}$$

$\nu \in H_\omega$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $b > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Встановимо істинність формули (30). Функція

$$\int\limits_x^\infty \frac{\cos(\alpha n t - \gamma)}{t^2}\,dt$$

на кожному проміжку (t_k, t_{k+1}), $t_k = \frac{(2k-1)\pi/2+\gamma}{\alpha n}$, $k \in \mathbb{N}$, перетворюється в нуль в деякій точці x_k. Очевидно, що набір таких точок x_k, $k \in \mathbb{N}$, задовольняє умову

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\cos(\alpha n t - \gamma)}{t^2}\,dt = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Нехай $x_k^{(1)}$ — найближчий до точки $t = b/n$ такий нуль праворуч. Виконуючи заміну змінних в інтегралі

$$\int\limits_b^\infty \nu\Big(\frac{t}{n}\Big)\frac{\cos(\alpha t - \gamma)}{t^2}\,dt$$

і використовуючи лему **C**, отримуємо

$$\left|\int\limits_b^\infty \nu\Big(\frac{t}{n}\Big)\frac{\cos(\alpha t - \gamma)}{t^2}\,dt\right| = \frac{1}{n}\left|\int\limits_{b/n}^\infty \nu(t)\frac{\cos(\alpha n t - \gamma)}{t^2}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left(\max_{b/n\leqslant t\leqslant x_k^{(1)}}|\nu(t)|\int\limits_{b/n}^{x_k^{(1)}}\frac{dt}{t^2}+\omega(\Delta)\int\limits_{x_k^{(1)}}^{\infty}\frac{dt}{t^2}\right), \tag{32}$$

де Δ має той же сенс, що і в лемі **C**. В даному випадку $\Delta < 2\pi/\alpha n$, а тому $x_k^{(1)} < \frac{2\pi}{\alpha n} + \frac{b}{n}$, і з (32) випливають співвідношення

$$\left|\int\limits_{b}^{\infty}\nu\Big(\frac{t}{n}\Big)\frac{\cos(\alpha t-\gamma)}{t^2}\,dt\right| <$$

$$< \frac{1}{n}\left(\omega\Big(\frac{2\pi}{\alpha n}+\frac{b}{n}\Big)\int\limits_{b/n}^{\frac{2\pi}{\alpha n}+\frac{b}{n}}\frac{dt}{t^2}+\omega\Big(\frac{2\pi}{\alpha n}\Big)\int\limits_{b/n}^{\infty}\frac{dt}{t^2}\right)\leqslant K\frac{\omega(1/n)}{\alpha b}. \tag{33}$$

Аналогічно встановлюємо нерівність

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{-b}\nu\Big(\frac{t}{n}\Big)\frac{\cos(\alpha t-\gamma)}{t^2}\,dt\right|\leqslant K\frac{\omega(1/n)}{\alpha b}\quad \forall\nu\in H_\omega. \tag{34}$$

Об'єднуючи формули (33) і (34), одержуємо оцінку (30). Оскільки функція $\frac{1-\cos t}{t^2}$ обмежена в околі нуля, то

$$I_{6,n}=\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{1\leqslant|t|\leqslant n}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\left(-\frac{1}{t^2}+\frac{\cos t}{t^2}+\frac{1-\cos\frac{t}{n}}{t^2}\right)dt=$$

$$=-\frac{\psi(n)}{\pi}\left(\int\limits_{1\leqslant|t|\leqslant n}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\frac{dt}{t^2}-\left(\int\limits_{|t|\geqslant 1}-\int\limits_{|t|\geqslant n}\right)\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\frac{\cos t}{t^2}\,dt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n}\int\limits_{1/n\leqslant|t|\leqslant 1}\delta(t,\nu)\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt\right)=$$

$$=-\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{1\leqslant|t|\leqslant n}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\frac{dt}{t^2}+\frac{\psi(n)}{\pi}\Big(\mathcal{J}_{1,1,0}-\mathcal{J}_{n,1,0}\Big)+O(1)\frac{\psi(n)}{n}.$$

Тепер, застосовуючи (30), можемо записати

$$\mathcal{J}_{1,1,0} = O(1)\omega(1/n) \quad \text{і} \quad \mathcal{J}_{n,1,0} = O(1)\frac{\omega(1/n)}{n}.$$

І далі, враховуючи, що для будь-якого модуля неперервності $1/n = O(1)\omega(1/n)$, будемо мати

$$I_{6,n} = -\frac{\psi(n)}{\pi} \int\limits_{1\leqslant|t|\leqslant n} \delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\,\frac{dt}{t^2} + O(1)\psi(n)\omega(1/n). \tag{35}$$

Перейдемо до оцінки інтеграла $I_{7,n}$. Використовуючи оцінку (30), отримуємо

$$I_{7,n} = \frac{\psi(n)}{\pi}\Big(\mathcal{J}_{n,1,0} - \mathcal{J}_{n,\frac{1}{n},0}\Big) = O(1)\psi(n)\omega(1/n). \tag{36}$$

Зіставляючи формули (24)—(29) і (35), (36), одержуємо

$$I_{1,n} = -\frac{\psi(n)}{\pi} \int\limits_{1\leqslant|t|\leqslant n} \delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\,\frac{dt}{t^2} + O(1)\psi(n)\omega(1/n). \tag{37}$$

Розглянемо тепер другий інтеграл в правій частині формули (20). Маємо

$$I_{2,n} = \Bigg(\int\limits_{|t|\leqslant 1} + \int\limits_{|t|\geqslant 1}\Bigg)\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\widehat{\tau}_{n-}(t)\,dt =: I_{8,n} + I_{9,n}. \tag{38}$$

Оскільки

$$\int\limits_0^\infty \tau_n(u)\sin ut\,du = \psi(n)\int\limits_0^1 u\sin ut\,du + \int\limits_1^\infty \psi(nu)\sin ut\,du,$$

то

$$I_{8,n} = \frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant 1} \delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\int\limits_0^1 u\sin ut\,du\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\int\limits_{1}^{\infty}\psi(nu)\sin ut\,du\,dt.$$

Проте

$$\Bigg|\int\limits_{|t|\leqslant 1}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\int\limits_{0}^{1}u\sin ut\,du\,dt\Bigg|\leqslant 2\omega(1/n)\int\limits_{0}^{1}\Bigg|\int\limits_{0}^{1}u\sin ut\,du\Bigg|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant 2\omega(1/n),$$

а тому

$$I_{8,n}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\int\limits_{1}^{\infty}\psi(nu)\sin ut\,du\,dt+O(1)\psi(n)\omega(1/n). \qquad (39)$$

Далі, для оцінки величини $I_{9,n}$ застосуємо інтегрування частинами до інтеграла $\widehat{\tau}_{n-}(t)$, внаслідок чого, з урахуванням рівностей $\tau_n(0)=\tau_n(\infty)=0$, маємо

$$\widehat{\tau}_{n-}(t)=\frac{\psi(n)}{\pi}\frac{\sin t}{t^2}+\frac{n}{\pi t}\int\limits_{1}^{\infty}\psi'(nu)\cos ut\,du.$$

Тоді

$$I_{9,n}=\int\limits_{|t|\geqslant 1}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\widehat{\tau}_{n-}(t)\,dt=$$

$$=\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\frac{\sin t}{t^2}\,dt+$$

$$+\frac{n}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\frac{1}{t}\int\limits_{1}^{\infty}\psi'(nu)\cos ut\,du\,dt=$$

$$=\frac{\psi(n)}{\pi}\mathcal{J}_{1,1,\frac{\pi}{2}}+\frac{n}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\frac{1}{t}\int\limits_{1}^{\infty}\psi'(nu)\cos ut\,du\,dt. \qquad (40)$$

З формули (3.1.32) роботи [11, с. 126] (див. також [2, с. 227, 228]) випливає, що для будь-якої $\psi\in\mathfrak{M}_0'$

$$\frac{n}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\frac{1}{t}\int\limits_{1}^{\infty}\psi'(nu)\cos ut\,du\,dt=O(1)\psi(n)\omega(1/n). \tag{41}$$

Об'єднуючи формули (38)—(41) і (30), одержуємо

$$I_{2,n}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\int\limits_{1}^{\infty}\psi(nu)\sin ut\,du\,dt+O(1)\psi(n)\omega(1/n). \tag{42}$$

Із (20), (37) і (42) випливає

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\widehat{\tau}_n(t)\,dt=-\frac{\psi(n)}{\pi}\cos\frac{\beta\pi}{2}\int\limits_{1\leqslant|t|\leqslant n}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\,\frac{dt}{t^2}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sin\frac{\beta\pi}{2}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\int\limits_{1}^{\infty}\psi(nu)\sin ut\,du\,dt+O(1)\psi(n)\omega(1/n). \tag{43}$$

Виходячи з формули (43), одержимо тепер оцінку величини $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega};Z^{\varphi}_{n})$. Оскільки

$$\Bigg|\int\limits_{1\leqslant|t|\leqslant n}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\frac{dt}{t^2}\Bigg|=\Bigg|\int\limits_{1\leqslant|t|\leqslant n}\frac{\nu(t/n)-2\nu(0)+\nu(-t/n)}{2t^2}\,dt\Bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{1}^{n}\frac{|\nu(t/n)-2\nu(0)+\nu(-t/n)|}{t^2}\,dt\leqslant\int\limits_{1}^{n}\frac{|\nu(t/n)-\nu(0)|}{t^2}\,dt+$$

$$+\int\limits_{1}^{n}\frac{|\nu(-t/n)-\nu(0)|}{t^2}\,dt\leqslant\frac{2}{n}\int\limits_{1/n}^{1}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt\quad\forall\nu\in H_{\omega}$$

і має місце оцінка

$$\Big|\int\limits_{|t|\leqslant 1}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)\int\limits_{1}^{\infty}\psi(nu)\sin ut\,du\,dt\Big| =$$

$$= \Big|\int\limits_{0}^{1}\Big(\delta\Big(\frac{t}{n},\nu\Big)-\delta\Big(-\frac{t}{n},\nu\Big)\Big)\int\limits_{1}^{\infty}\psi(nu)\sin ut\,du\,dt\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{0}^{1}\omega\Big(\frac{2t}{n}\Big)\int\limits_{1}^{\infty}\psi(nu)\sin ut\,du\,dt = \int\limits_{0}^{1/n}\psi\Big(\frac{1}{t}\Big)\frac{\omega(t)}{t}\,dt+$$

$$+O(1)\psi(n)\omega(1/n), \tag{44}$$

яка є наслідком нерівності $\int_1^{\infty}\psi(nu)\sin ut\,du > 0$, $t \in (0,1]$ (див., наприклад, [11, с. 143]) та формули

$$\int\limits_{0}^{1}\omega\Big(\frac{2t}{n}\Big)\int\limits_{1}^{\infty}\psi(nu)\sin ut\,du\,dt = \int\limits_{0}^{1/n}\psi\Big(\frac{1}{t}\Big)\frac{\omega(t)}{t}\,dt+$$

$$+O(1)\psi(n)\omega(1/n) \tag{45}$$

(див. [24, с. 528]), із (19) і (43) випливає нерівність

$$\mathcal{E}\big(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega};Z^{\varphi}_{n}\big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\frac{\psi(n)}{n}\int\limits_{1/n}^{1}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt + \frac{1}{\pi}\Big|\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big|\int\limits_{0}^{1/n}\psi\Big(\frac{1}{t}\Big)\frac{\omega(t)}{t}\,dt+$$

$$+O(1)\psi(n)\omega(1/n). \tag{46}$$

Покажемо, що в класі H^0_{ω} існує функція $\nu^*(t)$, для якої

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu^*\Big)\widehat{\tau}_n(t)\,dt =$$

$$
= \frac{2}{\pi}\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big|\frac{\psi(n)}{n}\int\limits_{1/n}^{1}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt + \frac{c_\omega}{\pi}\Big|\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big|\int\limits_{0}^{1/n}\psi\Big(\frac{1}{t}\Big)\frac{\omega(t)}{t}\,dt +
$$

$$
+O(1)\psi(n)\omega(1/n), \tag{47}
$$

де $c_\omega = 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, і $c_\omega = 2/3$ — в інших випадках. Цим і буде доведено теорему. З цієї метою покладемо

$$
\varphi_1(t) = \omega(|t|), \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi, \quad \varphi_1(t+2\pi) = \varphi_1(t),
$$

$$
\varphi_2(t) = \begin{cases} \frac{c_\omega}{2}\omega(2t), & [0, \frac{1}{n}], \\ \frac{c_\omega}{2}\omega(\frac{4}{n} - 2t), & [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ -\varphi_2(-t), & [-\frac{2}{n}, 0], \\ 0, & [-\pi, -\frac{2}{n}] \cup [\frac{2}{n}, \pi], \end{cases}
$$

$$
\varphi_2(t+2\pi) = \varphi_2(t),
$$

$$
\varphi_3(t) =
$$

$$
= \begin{cases} -\varphi_2(t)\operatorname{sign}\sin\frac{\beta\pi}{2} - \\ \qquad -\frac{c_\omega}{2}\omega(\frac{2}{n})\operatorname{sign}\cos\frac{\beta\pi}{2}, & t \in [-\frac{2}{n}, \frac{2}{n}], \\ -\frac{c_\omega}{2}\omega(\frac{2}{n})\operatorname{sign}\cos\frac{\beta\pi}{2}, & t \in [-\frac{a}{n}, -\frac{2}{n}] \cup [\frac{2}{n}, \frac{a}{n}], \\ -\varphi_1(t - \frac{3}{n})\operatorname{sign}\cos\frac{\beta\pi}{2}, & t \in [\frac{a}{n}, 1 + \frac{3}{n}], \\ -\varphi_1(t + \frac{3}{n})\operatorname{sign}\cos\frac{\beta\pi}{2}, & t \in [-1 - \frac{3}{n}, -\frac{a}{n}], \\ -\varphi_1(2 + \frac{3}{n} - t)\operatorname{sign}\cos\frac{\beta\pi}{2}, & t \in [1 + \frac{3}{n}, 2 + \frac{3}{n}], \\ -\varphi_1(2 + \frac{3}{n} + t)\operatorname{sign}\cos\frac{\beta\pi}{2}, & t \in [-2 - \frac{3}{n}, -1 - \frac{3}{n}], \\ 0, & t \in [-\pi, -2 - \frac{3}{n}] \cup [2 + \frac{3}{n}, \pi], \end{cases}
$$

$$
\varphi_3(t+2\pi) = \varphi_3(t),
$$

де a — таке дійсне число з проміжку $(3, 5)$, що $\omega(\frac{a-3}{n}) = \frac{c_\omega}{2}\omega(\frac{2}{n})$. Оскільки $\varphi_2 \in H_\omega$ (див. [1, с. 69, 70]) і досить нескладно переконатися, що для всіх t' і t'' з множини $[-\pi, -\frac{2}{n}] \cup [\frac{2}{n}, \pi]$ виконується нерівність

$$
|\varphi_3(t'') - \varphi_3(t')| \leqslant \omega(|t'' - t'|), \tag{48}
$$

то стає цілком очевидним, що у випадку цілих β функція $\varphi_3(t)$ належить множині H_ω. Якщо ж β не є цілим, то для встановлення включення $\varphi_3 \in H_\omega$ досить показати, що нерівність (48) виконується для всіх $t' \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ і $t'' \in [\frac{a}{n}, 1+\frac{3}{n}]$ (якщо $\operatorname{sign}\sin\frac{\beta\pi}{2} = -\operatorname{sign}\cos\frac{\beta\pi}{2}$) або $t' \in [-1-\frac{3}{n}, -\frac{a}{n}]$ і $t'' \in [-\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}]$ (якщо $\operatorname{sign}\sin\frac{\beta\pi}{2} = \operatorname{sign}\cos\frac{\beta\pi}{2}$).

Припустимо, що $-\operatorname{sign}\sin\frac{\beta\pi}{2} = \operatorname{sign}\cos\frac{\beta\pi}{2} = 1$. Тоді

$$|\varphi_3(t'') - \varphi_3(t')| = \left| -\varphi_1\Big(t'' - \frac{3}{n}\Big) - \Big(\varphi_2(t') - \frac{c_\omega}{2}\omega\Big(\frac{2}{n}\Big)\Big)\right| =$$

$$= \left|\omega\Big(t'' - \frac{3}{n}\Big) + \frac{c_\omega}{2}\Big(\omega\Big(\frac{4}{n} - 2t'\Big) - \omega\Big(\frac{2}{n}\Big)\Big)\right|,$$

де $t' \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ і $t'' \in [\frac{a}{n}, 1+\frac{3}{n}]$. І оскільки

$$\omega\Big(t'' - \frac{3}{n}\Big) \geqslant \frac{c_\omega}{2}\omega\Big(\frac{2}{n}\Big) \geqslant \frac{c_\omega}{2}\omega\Big(\frac{4}{n} - 2t'\Big),$$

то

$$|\varphi_3(t'') - \varphi_3(t')| \leqslant \omega\Big(t'' - \frac{3}{n}\Big) = \omega\Big(t'' - t' - \Big(\frac{3}{n} - t'\Big)\Big) < \omega(t'' - t').$$

Отже, в цьому випадку $\varphi_3 \in H_\omega$. Також неважко показати за аналогією, що у випадках, коли $\operatorname{sign}\sin\frac{\beta\pi}{2} = -\operatorname{sign}\cos\frac{\beta\pi}{2} = 1$ і $\operatorname{sign}\sin\frac{\beta\pi}{2} = \operatorname{sign}\cos\frac{\beta\pi}{2} = \pm 1$, має місце включення $\varphi_3 \in H_\omega$. Звідси випливає, що для будь-якого модуля неперервності $\omega(t)$ 2π-періодична функція

$$\nu^*(t) = \varphi_3(t) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-2-3/n}^{2+3/n} \varphi_3(\tau)\, d\tau$$

належить множині H_ω^0. Переконаємося в тому, що дана функція є шукана.

Оцінимо тепер інтеграл $\int\limits_{1\leqslant|t|\leqslant n} \delta(t/n, \nu^*)t^{-2}\, dt$. Маємо

$$\int\limits_{1\leqslant|t|\leqslant n} \delta\Big(\frac{t}{n}, \nu^*\Big)\frac{dt}{t^2} = \int\limits_{1\leqslant|t|\leqslant n} \frac{\varphi_3(t/n) - \varphi_3(0)}{t^2}\, dt =$$

$$= \int\limits_{1\leqslant|t|\leqslant n} \frac{\varphi_3(t/n)}{t^2}\,dt + \frac{c_\omega}{2}\omega\Big(\frac{2}{n}\Big)\operatorname{sign}\cos\frac{\beta\pi}{2}\int\limits_{1\leqslant|t|\leqslant n}\frac{dt}{t^2} =$$

$$= \frac{1}{n}\int\limits_{1/n\leqslant|t|\leqslant 1}\frac{\varphi_3(t)}{t^2}\,dt + O(1)\omega(1/n) =$$

$$= -\frac{1}{n}\operatorname{sign}\sin\frac{\beta\pi}{2}\int\limits_{1/n\leqslant|t|\leqslant 2/n}\frac{\varphi_2(t)}{t^2}\,dt -$$

$$- \frac{c_\omega}{2}\omega\Big(\frac{2}{n}\Big)\frac{1}{n}\operatorname{sign}\cos\frac{\beta\pi}{2}\int\limits_{1/n\leqslant|t|\leqslant a/n}\frac{dt}{t^2} -$$

$$- \frac{1}{n}\operatorname{sign}\cos\frac{\beta\pi}{2}\left(\int\limits_{a/n}^{1}\frac{\varphi_1(t-3/n)}{t^2}\,dt + \int\limits_{-1}^{-a/n}\frac{\varphi_1(t+3/n)}{t^2}\,dt\right) +$$

$$+ O(1)\omega(1/n) =$$

$$= -\frac{1}{n}\operatorname{sign}\cos\frac{\beta\pi}{2}\int\limits_{a/n}^{1}\frac{\varphi_1(t-3/n)+\varphi_1(3/n-t)}{t^2}\,dt + O(1)\omega(1/n) =$$

$$= -\frac{2}{n}\operatorname{sign}\cos\frac{\beta\pi}{2}\int\limits_{a/n}^{1}\frac{\omega(t-3/n)}{t^2}\,dt + O(1)\omega(1/n) =$$

$$= -\frac{2}{n}\operatorname{sign}\cos\frac{\beta\pi}{2}\left(\int\limits_{a/n}^{1}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt + \int\limits_{a/n}^{1}\frac{\omega(t-3/n)-\omega(t)}{t^2}\,dt\right) +$$

$$+ O(1)\omega(1/n) =$$

$$= -\frac{2}{n}\operatorname{sign}\cos\frac{\beta\pi}{2}\int\limits_{a/n}^{1}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt + O(1)\left(\frac{1}{n}\int\limits_{a/n}^{1}\frac{\omega(3/n)}{t^2}\,dt + \omega(1/n)\right) =$$

$$= -\frac{2}{n}\operatorname{sign}\cos\frac{\beta\pi}{2}\int\limits_{1/n}^{1}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt + O(1)\omega(1/n). \tag{49}$$

Далі, з урахуванням формули (45) одержуємо

$$\int\limits_{|t|\leqslant 1}\delta\Big(\frac{t}{n},\nu^*\Big)\int\limits_{1}^{\infty}\psi(nu)\sin ut\,du\,dt =$$

$$= \int\limits_{|t|\leqslant 1}(\varphi_3(t/n)-\varphi_3(0))\int\limits_{1}^{\infty}\psi(nu)\sin ut\,du\,dt =$$

$$= -c_\omega\operatorname{sign}\sin\frac{\beta\pi}{2}\int\limits_{0}^{1}\omega\Big(\frac{2t}{n}\Big)\int\limits_{1}^{\infty}\psi(nu)\sin ut\,du\,dt =$$

$$= -c_\omega\operatorname{sign}\sin\frac{\beta\pi}{2}\int\limits_{0}^{1/n}\psi\Big(\frac{1}{t}\Big)\frac{\omega(t)}{t}\,dt + O(1)\psi(n)\omega(1/n). \tag{50}$$

Об'єднуючи формули (43), (49) і (50), отримуємо (47). Теорему доведено.

1. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.

2. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **40**. — Ч. I. — 427 с.

3. *Гаврилюк В.Т.* О характеристике класса насыщения $C_0^{\psi}L_\infty$ // Укр. мат. журн. — 1986. — **38**, № 4. — С. 421—427.

4. *Гаврилюк В.Т.* О классах насыщения линейных методов суммирования рядов Фурье // Укр. мат. журн. — 1988. — **40**, № 5. — С. 569—576.

5. *Kolmogoroff A.N.* Zur Grössenordnung des Restliedes Fouriershen Reihen differenzierbaren Funktionen // Ann. Math. — 1935. — **36**. — S. 521—526.

6. *Пинкевич В.Т.* О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Weyl'я // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1940. — **4**, № 5. — С. 521—528.

7. *Никольский С.М.* Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1940. — **4**, № 6. — С. 501—508.
8. *Никольский С.М.* Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1945. — **15**. — С. 1—76.
9. *Никольский С.М.* Ряд Фурье функции с данным модулем непрерывности // Докл. АН СССР. — 1946. — **52**, № 3. — С. 191—194.
10. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 424 с.
11. *Степанец А.И., Рукасов В. И., Чайченко С.О.* Приближения суммами Валле Пуссена // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2007. — **68**. — 386 с.
12. *Ковальчук И.Р.* Приближение классов (ψ,β)-дифференцируемых функций полиномами Рогозинского. — Киев. — 1988. — 56 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.4).
13. *Ковальчук И.Р.* Приближение классов (ψ,β)-дифференцируемых функций суммами Стеклова // Некоторые вопросы теории приближения функций и их приложения. — Киев: Ин-т математики АН Украины, 1988. — С. 61—70.
14. *Новиков О.А.* Приближение классов непрерывных периодических функций суммами Фавара. — Киев, 1991. — 35 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 91.21).
15. *Бушев Д.Н.* Приближение классов непрерывных периодических функций суммами Зигмунда. — Киев, 1984. — 62 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 84.56).
16. *Новиков О.А.* Приближение классов непрерывных периодических функций линейными методами. — Киев, 1991. — 38 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 91.50).
17. *Новиков О.А., Рукасов В.И.* Приближение классов непрерывных функций обобщенными суммами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 1995. — **47**, № 8. — С. 1069—1079.
18. *Рукасов В.И., Новиков О.А.* Приближение функций с небольшой гладкостью из классов $C^{\bar{\psi}}_{\infty}$ линейными методами // Теорія наближень та гармонічний аналіз : Праці Українського математичного конгресу — 2001. — Київ: Ін-т математики НАН України. — 2002. — С. 184—193.
19. *Рукасов В.І.* Дослідження екстремальних задач теорії наближення функцій: Дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. — Слов'янськ, 2003. — 349 с.
20. *Ковальская И.Б.* Приближение классов периодических функций аналогами сумм Зигмунда в метрике C // Приближение классов периодических функций одной и многих переменных в метрике C и L_p. — Киев, 1988. — С. 3—28. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 88.14).

21. *Островская О.В.* Приближение классов непрерывных периодических функций обобщенными суммами Зигмунда // Исследования по теории приближения функций.— Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991. — С. 57—71.

22. *Островская О.В.* Приближение классов периодических функций обобщенными суммами Зигмунда в метрике C // Ряды Фурье: теория и приложения. — Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. — С. 69—87.

23. *Островська О.В.* Наближення узагальненими сумами Зигмунда періодичних функцій класів $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ // Ряди Фур'є: теорія і застосування : Праці Ін-ту математики НАН України. — 1998. — **20**. — С. 181—191.

24. *Сердюк А.С., Овсий Е.Ю.* Приближение классов $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ обобщенными суммами Зигмунда // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**. — № 4. — С. 524—537.

25. *Теляковский С.А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1961. — **62**. — С. 61—97.

26. *Ефимов А.В.* Линейные методы приближения некоторых классов непрерывных периодических функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1961. — **62**. — С. 3—47.

27. *Nagy B.* Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier // Hung. Acta Math. — 1948. — № 3. — P. 14—52.