Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2010, Т.7, №1, 199-220

УДК 517.5

В. С. Романюк (Ин–т математики НАН Украины, Киев)

НЕЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ИЗ КЛАССОВ БЕСОВА

We establish exact in order for the values of n-term projective approximations in Faber–Schauder system for the functions defined on d-dimensional cube and which belong to Besov classes.

Установлены точные по порядку оценки величин n-членных проективных приближений по системе Фабера–Шаудера для функций, определенных на d-мерном кубе и принадлежащих классам Бесова.

Пусть $\mathcal{X}$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$, а $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}$ — базис Шаудера в пространстве $\mathcal{X}$, т.е. для любого $\varphi \in \mathcal{X}$ существует единственная последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$ такая, что $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k$ (ряд сходится по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$).

Известно, что если Φ — базис в $\mathcal{X}$, то существует единственное семейство линейных функционалов $\Phi^* = \{\varphi_k^*\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}^*$ ($\mathcal{X}^*$ — пространство, сопряженное к $\mathcal{X}$) такое, что $a_k = \langle\varphi;\varphi_k^*\rangle$, $\varphi \in \mathcal{X}$, $k = 1, 2, \ldots$. Семейства Φ и Φ^* являются биортогональными, т.е. $<\varphi_i;\varphi_k^*>= \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$

Для каждого $\varphi \in \mathcal{X}$ обозначим через $M_n(\varphi;\Phi)$ множество всех линейных (относительно системы Φ) комбинаций вида

$$\pi_Q(\varphi) = \sum_{k\in Q} a_k\varphi_k,$$

где Q — произвольное подмножество множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, $\#Q{=}n$ (полагаем также $M_0(\varphi;\Phi) = \{0\}$) и $a_k, k \in Q$ — коэффициенты из разложения φ по базису Φ.

Назовем n-членную аппроксимацию произвольного элемента $\varphi \in \mathcal{X}$ элементами семейства $M_n(\varphi;\Phi)$ n-членным *проективным* приближением φ по системе Φ.

Ошибка аппроксимации измеряется величиной

$$e_n^{\mathrm{pr}}(\varphi;\Phi;\mathcal{X}) := \inf_{u\in M_n(\varphi;\Phi)} \|\varphi-u\|_{\mathcal{X}}.$$

Полагаем

$$e_n^{\mathrm{pr}}(W;\Phi;\mathcal{X}) := \sup_{\varphi\in W} e_n^{\mathrm{pr}}(\varphi;\Phi;\mathcal{X}),$$

если W — произвольное подмножество в $\mathcal{X}$.

Заметим, что так как Φ — базис, то $\operatorname{span}\Phi$ — плотно в $\mathcal{X}$, т.е. для произвольного элемента $\varphi\in\mathcal{X}$: $e_n^{\mathrm{pr}}(\varphi;\Phi;\mathcal{X})\to 0$ при $n\to\infty$ и возникает задача об установлении скорости стремления к нулю последовательности $e_n^{\mathrm{pr}}(W;\Phi;\mathcal{X})$.

В связи с многочисленными приложениями подобного рода n-членных приближений (см., например, [1]), задача о нахождении ассимптотических оценок величин $e_n^{\mathrm{pr}}(W;\Phi;\mathcal{X})$ и более общая задача об оценках величин наилучшего n-членного приближения $\sigma_n(W;\Phi;\mathcal{X})$ решались для многих классов функций W и ортогональных базисов Φ (в соответствующем пространстве $\mathcal{X}\supset W$). Например, для тригонометрического базиса экспонент $\Phi=\{e^{i(k,x)}\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ известны ассимптотические оценки рассматриваемых величин в пространстве $L_q(\mathbb{T}^d)$ при всех $1\le q\le\infty$ в случае, когда W есть функциональный класс Соболева или Бесова–Никольского (см. [2]).

В [1] имеется довольно полная библиография работ, касающихся n-членной аппроксимации при помощи агрегатов, построенных и по другим базисам Φ, состоящих, например, из вейвлетов или сплайнов (см. также [3–9]).

Решаемая в работе задача состоит в установлении порядковых оценок величины $e_n^{\mathrm{pr}}(W;\Phi;\mathcal{X})$ при следующих предположениях:

$\mathcal{X}=L_q(\mathbf{I}^d),\ 1\le q\le\infty,\ \mathbf{I}^d:=\prod_{i=1}^{d}\mathbf{I},\ \mathbf{I}:=[0,1],\ d\ge 1$ — целое;

$W=SB^{\alpha}_{p,\theta}$ — единичный шар пространства Бесова $B^{\alpha}_{p,\theta}$, $0<\alpha<1$, $1\le p,\theta<\infty$;

Φ — так называемый "бриллиантовый" базис в пространстве $C(\mathbf{I}^d)$ непрерывных на $\mathbf{I}^d$ функций.

В §1 мы даем определения основных объектов (пространств, классов функций и базиса) и формулируем вспомогательные и основной результаты работы. В §2 решается задача о точных значениях величины n-членного проективного приближения в конечномерном пространстве l_q^m единичного шара $B_p^m \subset l_p^m$ по стандартному базису пространства $\mathbb{R}^m$. На основании этого результата в §3 доказывается основная теорема.

§1. **Определения и формулировка главного результата**

• $L_q(\mathbf{I}^d)$, $1 \le q < \infty$, — пространство функций φ, суммируемых в q-ой степени на $\mathbf{I}^d$ с нормой

$$\|\varphi\|_q := (\int\limits_{\mathbf{I}^d} |\varphi(x)|^q \, dx)^{1/q};$$

• $L_\infty(\mathbf{I}^d)$ — пространство функций, существенно ограниченных на $\mathbf{I}^d$, с нормой

$$\|\varphi\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbf{I}^d} |\varphi(x)|;$$

• $$B^\alpha_{p,\theta} = \left\{ \varphi \in L_p(\mathbf{I}^d) : \ \|\varphi\|^\alpha_{p,\theta} := \left[\int\limits_0^1 \left(\frac{\omega(\varphi;t)_p}{t^\alpha} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right]^{1/\theta} < \infty, \right.$$

$$\left. 0 < \alpha < 1, \ 1 \le p, \theta < \infty \right\},$$

где $\omega(\varphi;t)_p = \sup\limits_{0<|h|\le t} \big(\int\limits_{\mathbf{I}^d} |\triangle_h \varphi(x)|^p \, dx \big)^{1/p}$ — p-интегральный модуль непрерывности функции $\varphi \in L_p(\mathbf{I}^d)$, а для $h \in \mathbb{R}^d$

$$\triangle_h \varphi(x) = \left\{ \begin{array}{rl} \varphi(x+h) - \varphi(x) & \text{при } \ x, \ x+h \in \mathbf{I}^d \ , \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{array} \right.$$

— полная разность от φ с шагом $h = (h_1, h_2, \dots, h_d)$, $|h| := \big(\sum\limits_{i=1}^d h_i^2 \big)^{1/2}$.

Заметим, что пространство $B^\alpha_{p,\theta}$ — сепарабельное банахово пространство для каждой тройки параметров $\alpha, p, \theta : 0<\alpha<1$,

$1 \le p, \theta < \infty$, и при $\alpha > \frac{d}{p}$ $\quad B^{\alpha}_{p,\theta} \subset C(\mathbf{I}^d)$.

• Определим семейство Φ (см. [10]).

Возьмем функцию $\psi(t) = \max\{0, 1-|t|\}$, $t \in \mathbb{R}$, и обозначим через D множество всех "двоичных" точек отрезка $\mathbf{I}$: $D = \bigcup\limits_{k \ge 0} D_k$, где $D_0 = \{0; 1\}$, $D_k = \left\{\dfrac{2j-1}{2^k},\ j = 1, \dots, 2^{k-1}\right\}$. Определим вначале семейство Фабера–Шаудера функций с носителями на $\mathbf{I}$ следующим образом:

$$\Phi_\tau(t) = \psi(2^k(t-\tau)) \text{ для } \ \tau \in D_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Теперь обозначим $C_0 := D_0$, $C_k = C_{k-1} \bigcup D_k$. Тогда $C^d_k = C^d_{k-1} \bigcup D_{k,d}$, где

$$D_{0,d} = D^d_0 = \prod_{j=1}^{d} D_0,$$

$$D_{k,d} = \Big\{\bar\tau = (\tau_1, \dots, \tau_d) \in C^d_k : \ (\exists i : \ \tau_i \in D_k)\Big\}, \quad k = 1, 2, \dots ,$$

и положим для $\bar t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbf{I}^d$

$$\phi_{\bar\tau}(\bar t) = \prod_{j=1}^{d} \psi(2^k(t_j - \tau_j)), \quad \bar\tau \in D_{k,d}, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Систему $\Phi = \{\phi_{\bar\tau} : \ \bar\tau \in D^d\}$ называют "бриллиантовым" или мультиафинным базисом, и если она упорядочена так, что $\phi_{\bar\tau}$ с $\bar\tau \in D_{k,d}$ предшествует $\phi_{\bar\tau}$ с $\bar\tau \in D_{k+1,d}$, то эта система (последовательность) является базисом в банаховом пространстве $C(\mathbf{I}^d)$ непрерывных на $\mathbf{I}^d$ функций относительно равномерной на $\mathbf{I}^d$ сходимости [11], т.е. для каждого $f \in C(\mathbf{I}^d)$ существует однозначно определенное семейство $\Phi^* = \{b_{\bar\tau} : \ \bar\tau \in D_{k,d},\ k = 0, 1, 2, \dots\}$ действительных чисел такое, что

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\bar\tau \in D_{k,d}} b_{\bar\tau} \phi_{\bar\tau}.$$

Коэффициенты $b_{\bar\tau} = b_{\bar\tau}(f)$ являются линейными функционалами от f и $b_{\bar\tau}(\phi_{\bar\tau'}) = \delta_{\bar\tau\bar\tau'}$, т.е. системы Φ и Φ^* — биортогональны.

Система Φ^* определяется явно по системе Φ (см. [11]) по следующим формулам:

$$b_{\bar\tau}(f) = f(\bar\tau), \quad \bar\tau \in D_{0,d},$$

и

$$b_{\bar\tau}(f) = \frac{1}{2^d} \sum_{\varepsilon=\{-1,1\}^d} (f(\bar\tau) - f(\bar\tau^\varepsilon)), \quad \bar\tau \in D_{k,d}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$\overline{\tau}^\varepsilon = \{\tau_1^\varepsilon, \dots, \tau_d^\varepsilon\} \text{ и } \tau_i^\varepsilon = \begin{cases} \tau_i + \varepsilon_i \cdot 2^{-k}, & \tau_i \in D_k, \\ \tau_i, & \tau_i \in C_{k-1}^d. \end{cases}$$

Рассмотрим следующий конечномерный проекционный оператор $R_k : \ C(\mathbf{I}^d) \to C(\mathbf{I}^d) : \ R_k(f) = \sum\limits_{\bar\tau \in D_{k,d}} b_{\bar\tau}(f)\phi_{\bar\tau}$. Известно, что для любого $f \in C(\mathbf{I}^d)$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} R_k(f)$ сходится к f по норме $\|\cdot\|_\infty$. Частные суммы $P_k(f) = \sum\limits_{l=0}^{k} R_l(f)$ интерполируют f на множестве C_k^d, т.е. $\forall k \ge 0 : \ f(\bar\tau) = P_k(f)(\bar\tau), \ \bar\tau \in C_k^d$.

Сформулируем известные утверждения, в которых отражены другие свойства системы Φ, и которые понадобятся при доказательстве теоремы 1.

Утверждение 1 [12]. *Для любых* $a_{\bar\tau} \in \mathbb{R}$ *и* $1 \le q \le \infty$

$$\Big\| \sum_{\bar\tau \in D_{k,d}} a_{\bar\tau}\phi_{\bar\tau} \Big\|_q \asymp 2^{-dk/q} \bigg(\sum_{\bar\tau \in D_{k,d}} |a_{\bar\tau}|^q \bigg)^{1/q}, \quad k = 0, 1, \dots.$$

В частности $\|\phi_{\bar\tau}\|_q \asymp 2^{-dk/q}, \ \ \bar\tau \in D_{k,d}$.

Утверждение 2 [12]. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$ *и* $\frac{d}{p} < \alpha < 1$. *Тогда* $\forall f \in B_{p,\theta}^\alpha$

$$\|f\|_{p,\theta}^\alpha \asymp \bigg(\sum_{k=0}^{\infty} \big[2^{k(\alpha - \frac{d}{p})} \big(\sum_{\bar\tau \in D_{k,d}} |b_{\bar\tau}|^p \big)^{1/p} \big]^\theta \bigg)^{1/\theta}.$$

Главный результат работы содержится в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty, 1 \le q \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $\frac{d}{p} < \alpha < 1$. *Тогда*

$$e_n^{\mathrm{pr}}(S\,B_{p,\theta}^{\alpha}; \Phi; L_q) \asymp n^{-\alpha/d}.$$

Запись $\alpha(n) \asymp \beta(n)$ означает, что существуют $C_1, C_2 > 0$ такие, что $C_1\alpha(n) \le \beta(n) \le C_2\alpha(n)$; если $\beta(n) \le C_2\alpha(n)$, то пишем $\beta(n) \ll \alpha(n)$.

§2. Нелинейная аппроксимация в конечномерных пространствах

Обозначим через l_p^m, $0 < p \le \infty$, пространство векторов $x = (x_k)_{k=1}^m$ действительных чисел, снабженное квазинормой

$$\|x\|_{l_p^m} = \Big(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\Big)^{1/p}, \qquad 0 < p < \infty,$$
$$\|x\|_{l_\infty^m} = \max_{1 \le i \le m} |x_i|, \qquad p = \infty.$$

Обозначим при $r > 0$ $B_p^m(r) = \{x \in l_p^m : \ \|x\|_{l_p^m} \le r\}$ и $B_p^m \equiv B_p^m(1)$.

Если $n \le m$, $\lambda_n = \{k_1, k_2, \dots, k_n\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$ и $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, то обозначим

$$\pi_{\lambda_n} x = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m) \in \mathbb{R}^m,$$

где $\tilde{x}_i = x_i$ при $i \in \lambda_n$ и $\tilde{x}_i = 0$ при $i \notin \lambda_n$. Пусть $B \subset l_p^m$ и

$$e_n^{\perp}(B)_q := \sup_{x \in B} e_n^{\perp}(x; p; q) = \sup_{x \in B} \inf_{\lambda_n} \|x - \pi_{\lambda_n} x\|_{l_q^m}, \quad 0 < p, q \le \infty.$$

Задача состоит в получении точных значений величин $e_n^{\perp}(B_p^m)_q$.

Замечание **1.** В дальнейшем будем считать, что компоненты векторов $x = (x_i)_{i=1}^m$, участвующие в определении $e_n^{\perp}(B_p^m)_q$, — неотрицательны, т.е. $x_i \ge 0, i = \overline{1, m}$. Это ограничение, очевидно, не сужает постановку задачи и не изменяет её решения.

Теорема 2. *Пусть* $0 < p \le \infty$ *и* $n < m$. *Тогда*

$$e_n^{\perp}(B_p^m)_q = \begin{cases} \max\limits_{n+1 \le k \le m} \dfrac{(k-n)^{1/q}}{k^{1/p}}, & 0 < q < \infty, \\[2ex] \dfrac{1}{(n+1)^{1/p}}, & q = \infty. \end{cases}$$

Замечание 2. В случаях $0 < q < p \le \infty$ и $0 < q = p < \infty$ максимум в теореме 2 достигается при $k = m$ (см. доказательство теоремы 2); в случаях $0 < p < q < \infty$ максимум достигается при одном из значений k: $k_1 = \left[\frac{n}{q/p-1}\right]$, $k_2 = \left[\frac{n}{q/p-1}\right] + 1$, $k_3 = m$ ($[a]$ — целая часть числа $a \in \mathbb{R}$), если $n < \frac{n}{q/p-1} < m$, при $k = n+1$, если $0 < \frac{n}{q/p-1} \leqslant n$, и при $k = m$, если $\frac{n}{q/p-1} \ge m$. В каждом из случаев при $n \asymp m$

$$C_1(p,q) m^{1/q-1/p} \le e_n^{\perp}(B_p^m)_q \le C_2(p,q) m^{1/q-1/p}.$$

Доказательство теоремы 2. Заметим, что поскольку при $0 < p, q < \infty$, очевидно,

$$e_n^{\perp}(B_p^m)_q = \left(e_n^{\perp}(B_{p/q}^m)_1\right)^{1/q}, \tag{1}$$

то достаточно получить значения $e_n^{\perp}(B_s^m)_1$ при $0 < s < \infty$, а также отдельно рассмотреть случаи $p = \infty$, $0 < q < \infty$; $p = \infty$, $q = \infty$; $0 < p < \infty$, $q = \infty$.

Легко заметить, что если

$$\overline{B}_s^{\,m} = \{x \in B_s^m : \ x_1 \ge \ldots \ge x_m \ge 0\},$$

то $e_n^{\perp}(B_s^m)_1 = e_n^{\perp}(\overline{B}_s^{\,m})_1$. Покажем теперь, что при

$$B_s^{m,n} = \{x \in B_s^m : \ x_1 = \ldots = x_{n+1} \ge x_{n+2} \ge \ldots \ge x_m \ge 0\}$$

имеет место равенство

$$e_n^{\perp}(B_s^{m,n})_1 = e_n^{\perp}(\overline{B}_s^{\,m})_1,$$

и в этом случае

$$e_n^{\perp}(B_s^m)_1 = \sup_{x \in B_s^{m,n}} \sum_{i=n+1}^{m} x_i.$$

Неравенство $e_n^{\perp}(B_s^{m,n})_1 \le e_n^{\perp}(\overline{B}_s^{\,m})_1$ — тривиально, так как $B_s^{m,n} \subset \overline{B}_s^{\,m}$.

Необходимо доказать обратное неравенство

$$e_n^{\perp}(B_s^{m,n})_1 \geq e_n^{\perp}(\overline{B}\,_s^m)_1.$$

Для этого достаточно показать, что если $x = (x_i)_{i=1}^m \in \overline{B}\,_s^m$, то найдется $\tilde{x} = (\tilde{x}_i)_{i=1}^m \in B_s^{m,n}$ такой, что $e_n^{\perp}(x; s; 1) \leq e_n^{\perp}(\tilde{x}; s; 1)$.

Пусть заданы $n < m$ и $x = (x_i)_{i=1}^m \in \overline{B}\,_s^m$. Рассмотрим последовательность $\tilde{x} = (\tilde{x}_i)_{i=1}^m$, определяющуюся следующим образом:

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} \dfrac{r}{(n+1)^{1/s}}, & i = 1, \dots, n+1, \\ x_i, & i = n+2, \dots, m, \end{cases}$$

где $r = \big(\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^s\big)^{1/s}$. Тогда, очевидно, что $\tilde{x} \in B_s^{m,n}$, причем

$$e_n^{\perp}(x; s; 1) = x_{n+1} + \sum_{i=n+2}^m x_i \leq \frac{r}{(n+1)^{1/s}} + \sum_{i=n+2}^m x_i = e_n^{\perp}(\tilde{x}; s; 1),$$

так как $\big(\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^s\big)^{1/s} \geq x_{n+1}$.

Таким образом,

$$e_n^{\perp}(B_s^m)_1 = \sup_{x \in B_s^{m,n}} \sum_{i=n+1}^m x_i,$$

и учитывая, что для $x \in B_s^{m,n}$ — $x_{n+1} = \big(\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^s\big)^{1/s}$, полагая при этом $y_{n+1} = \big(\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^s\big)^{1/s}$, $y_k = x_k$, $k = n+2, \dots, m$ (заметим, что тогда $\sum\limits_{i=n+1}^m y_i^s = 1$), приходим к выводу, что

$$e_n^{\perp}(B_s^m)_1 = \sup_{y \in \hat{B}_s^{m,n}} \sum_{k=n+1}^m \alpha_k y_k, \tag{2}$$

где $\hat{B}_s^{m,n} = \{y = (y_i)_{i=n+1}^m \in B_s^{m-n} : \alpha_k y_k \leq \alpha_{n+1} y_{n+1},$ $k = n+2, \dots, m\}$ и $\alpha_{n+1} = (n+1)^{-1/s}$, $\alpha_k \equiv 1$, $k = n+2, \dots, m$.

Теперь значение величины $e_n^{\perp}(B_s^m)_1$ будет найдено исходя из решения следующей более общей экстремальной задачи.

***Задача* 1.** *Найти максимум*

$$F(x_1,\ldots,x_l)=b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_lx_l$$

на множестве

$$\Omega=\{x=(x_i)_{i=1}^l\in B_p^l(R):\ b_1x_1\ge b_2x_2\ge\ldots\ge b_lx_l,$$
$$0<p<\infty,\ R>0\}$$

при каждом из следующих предположений

(i) $b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_l>0,$
(ii) $b_2\ge b_3\ge\ldots\ge b_l>0,\ b_1>0$— *произвольное* *и* $\sum\limits_{i=1}^{k} b_i^{-p}\ge kb_{k+1}^{-p}$ *при любом* $1\le k\le l-1.$

Замечание 3. a) В частности, в предположении (ii) содержится (при $k=1$) условие $0<b_1\le b_2$ и $b_2\ge\ldots\ge b_l>0$.
b) Условие (ii), очевидно, выполняется при $l=m-n,\ \ b_1=\alpha_{n+1}$ и $b_k=\alpha_{n+k},\ k=2,\ldots,l.$

Решение задачи 1 при предположении (i), когда $1<p<\infty$, можно найти, например, в [13, гл. 4, §4.3] (отметим, что при этом ограничения из Ω становятся излишними, так как выполняются автоматически):

$$\max F(x_1,\ldots,x_l)=F(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_l)=R\left(\sum_{i=1}^{l}b_i^{p'}\right)^{1/p'},$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ и экстремальный набор $\hat{x}=(\hat{x}_i)_{i=1}^l:$

$$\hat{x}_i=Rb_i^{p'-1}\left(\sum_{j=1}^{l}b_j^{p'}\right)^{-1/p}=R\left(b_i^{p'}/\sum_{j=1}^{l}b_j^{p'}\right)^{1/p}.$$

При $0<p\le 1$ легко показать, что

$$\max F(x_1,\ldots,x_l)=F(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_l)=Rb_1,$$

причем $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i=1}^{l}: \ \hat{x}_1 = R,$ а $\hat{x}_i = 0, \ i = 2, \ldots, l.$

Пусть теперь выполняется предположение (ii). Покажем, что в этом случае при $1 \le p < \infty$ $\max F(x_1, \ldots, x_l) = F(x_1^*, \ldots, x_l^*)$, где $(x_1^*, \ldots, x_l^*)$ — набор, "уравновешивающий" $(b_1, \ldots, b_l)$, т.е.

$$\begin{gathered} x_i^* = \frac{R}{b_i(\sum\limits_{j=1}^{l} b_j^{-p})^{1/p}}, \quad i = 1, \ldots, l, \\ F(x_1^*, \ldots, x_l^*) = \frac{l}{(\sum\limits_{j=1}^{l} b_j^{-p})^{1/p}} R, \end{gathered} \tag{3}$$

а при $0 < p < 1$ $\max F(x_1, ..., x_l) = \max\limits_{1 \le k \le l} F(x_1^{(k)}, ..., x_l^{(k)})$ и $x^{(k)} := (x_1^{(k)}, ..., x_l^{(k)}), \ k = 1, ..., l,$

$$\begin{gathered} x_i^{(k)} = \frac{R}{b_i(\sum\limits_{j=1}^{k} b_j^{-p})^{1/p}}, \ i = 1, \ldots, k, \ x_i^{(k)} = 0, \ i = k+1, ..., l, \\ F(x_1^{(k)}, \ldots, x_l^{(k)}) = \frac{k}{(\sum\limits_{j=1}^{k} b_j^{-p})^{1/p}} R. \end{gathered} \tag{3'}$$

Доказательство, однотипное для всех $0 < p < \infty$, проведем индукцией по l.

При $l = 1$ утверждение, очевидно, выполняется. Предположим, что утверждение верно при некотором $l = r - 1 \ge 2$ и докажем его при $l = r$.

Пусть $x = (x_i)_{i=1}^{r} \in \Omega$ — произвольное фиксированное и $\delta = \big(\sum\limits_{i=1}^{r-1} x_i^p\big)^{1/p}$. Пусть, далее, $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{r-1}$ — экстремальный набор вида (3) или (3′) в задаче 1 при $l = r-1$ и $R = \delta$, т.е. (для произвольного $d, 2 \le d \le r$) $\overline{x}_i = 0, i = d, ..., r,$ $\bar{x}_i = \frac{\delta}{b_i(\sum\limits_{k=1}^{d-1} b_k^{-p})^{1/p}}, i = 1, ..., d-1.$

Тогда $\big(\sum\limits_{i=1}^{r-1}\overline{x}_i^p\big)^{1/p}=\delta$ и

$$F(x_1,\dots,x_r)\le F(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_{r-1},x_r)=\sum_{i=1}^{r-1}b_i\bar{x}_i+b_rx_r=$$

$$=\sum_{i=1}^{r-1}\frac{(d-1)^{1/p}}{(\sum\limits_{k=1}^{d-1}b_k^{-p})^{1/p}}x_i^\circ+b_rx_r^\circ,$$

где $x_1^\circ=\ldots=x_{d-1}^\circ=\frac{\delta}{(d-1)^{1/p}},\ ,x_i^\circ=0, i=d,...,r-1,\ x_r^\circ=x_r$. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{r-1}(x_i^\circ)^p=\delta^p,\ \text{т.е.}\ (x_i^\circ)_{i=1}^{r-1}\in B_p^{r-1}(\delta),\ (x_i^\circ)_{i=1}^{r}\in B_p^r(R). \tag{4}$$

Положим

$$\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_{d-1}=\left((d-1)/\sum_{k=1}^{d-1}b_k^{-p}\right)^{1/p}\ \text{ и }\ \beta_r=b_r. \tag{5}$$

Тогда соотношения (4), (5) влекут $\beta_1x_1^\circ=\ldots=\beta_{d-1}x_{d-1}^\circ$ и $\beta_{d-1}x_{d-1}^\circ=b_{d-1}\overline{x}_{d-1}\ge b_rx_r=\beta_rx_r$ (неравенство выполняется, так как $(\overline{x}_1,\dots\overline{x}_{r-1},x_r)\in\Omega$). Значит,

$$\max_{x\in\Omega}F(x_1,\dots,x_r)\le\max_{x\in\Omega'}\sum_{i=1}^{d}\beta_ix_i=:\max_{x\in\Omega'}G(x_1,\dots,x_d), \tag{6}$$

где $\Omega'=\{x=(x_i)_{i=1}^d : x\in B_p^d(R),\quad \beta_1x_1=\ldots= =\beta_{d-1}x_{d-1}\ge\beta_rx_d,\ \beta_i,\ i=1,\dots,d,$ определяются соотношениями (5), $0<p<\infty,\ R>0\}$. Итак решаем задачу о нахождении $\max\limits_{x\in\Omega'}G(x_1,\dots,x_d)$, которая равносильна следующей задаче.

Задача 2. *Найти при любом* $1\le d\le r$

$$\max_{x_d\in I}\tilde{G}(x_d):=\max_{x_d\in I}\frac{d-1}{(\sum\limits_{k=1}^{d-1}b_k^{-p})^{1/p}}(R^p-x_d^p)^{1/p}+\beta_rx_d=$$

$$= \max_{x_d \in I} (d-1) D^{1/p} (R^p - x_d^p)^{1/p} + \beta_r x_d$$

при условии (ii) *задачи* 1.

Здесь $D = \left(\sum\limits_{k=1}^{d-1} b_k^{-p} \right)^{-1}$, $I = [0, \eta]$, а η *определяется из условия*

$$\frac{1}{d-1} \sum_{i=1}^{d-1} \beta_i x_i \geq \beta_r x_d \quad \text{или} \quad \frac{R^p - x_d^p}{\sum\limits_{i=1}^{d-1} b_i^{-p}} \geq (\beta_r x_d)^p,$$

$$D(R^p - x_d^p) \geq \beta_r^p x_d^p,$$

$$x_d \leq \left(\frac{D}{D + \beta_r^p} \right)^{1/p} \cdot R =: \eta.$$

Итак, при любом $x_d \in (0, R)$ $\widetilde{G}'(x_d) = -(d-1) D^{1/p} (R^p - x_d^p)^{1/p-1} x_d^{p-1} + \beta_r$ и $G'(x_d) = 0$ при

$$x_d = \eta_0 = \left[\frac{(d-1)^{\frac{p}{p-1}} D^{\frac{1}{1-p}}}{\beta_r^{\frac{p}{1-p}} + (d-1)^{\frac{p}{1-p}} D^{\frac{1}{1-p}}} \right]^{1/p} \cdot R.$$

Пусть теперь $1 < p < \infty$ (тогда $d = r$). Покажем, что в этом случае $\eta_0 \notin I$, а точнее, $\eta_0 \geq \eta$. В самом деле, последнее неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(r-1)^{\frac{p}{1-p}} D^{\frac{1}{1-p}}}{\beta_r^{\frac{p}{1-p}} + (r-1)^{\frac{p}{1-p}} D^{\frac{1}{1-p}}} \geq \frac{D}{\beta_r^p + D}$$

или, после элементарных преобразований,

$$(r-1)^{\frac{p}{1-p}} D^{\frac{1}{1-p}} D^{-1} \geq \beta_r^{\frac{p}{1-p}} \beta_r^{-p}.$$

Возводя обе части последнего неравенства в степень $\frac{1-p}{p} < 0$, получаем

$$(r-1) D \leq \beta_r^p \quad \text{или} \quad \left((r-1) / \sum_{i=1}^{r-1} b_i^{-p} \right)^{1/p} \leq b_r,$$

что согласуется с исходным условием (ii) задачи 1.

Таким образом, функция $\tilde{G}'(x_r)$ сохраняет знак на всем интервале $(0, \eta)$, т.е. функция $\tilde{G}(x_r)$ — монотонна на I и её максимум достигается на одном из концов отрезка I.

Но $\tilde{G}(0) = \beta_r \cdot R$, а в точке $x_r = \eta$ выполняются равенства $\beta_1 x_1 = \ldots = \beta_r x_r$, причем $\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^p = R^p$, а значит,

$$\tilde{G}(\eta) = G(x_1, \ldots, x_r) = \frac{r}{(\sum\limits_{i=1}^{r} b_i^{-p})^{1/p}} \cdot R.$$

Однако $\beta_r \leq r/(\sum\limits_{i=1}^{r} b_i^{-p})^{1/p}$, так как это неравенство равносильно следующему правильному неравенству: $\sum\limits_{i=1}^{r} b_i^{-p} \leq r b_r^{-p} \leq r^p b_r^{-p}$ при $1 < p < \infty$.

Поэтому окончательно

$$\max_{x \in \Omega'} G(x_1, \ldots, x_r) = \max_{x_r \in I} \tilde{G}(x_r) = \max\{\tilde{G}(0); \tilde{G}(\eta)\} = \tilde{G}(\eta) =$$

$$= \frac{r}{(\sum\limits_{i=1}^{r} b_i^{-p})^{1/p}} \cdot R.$$

При этом экстремальный набор имеет вид

$$\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i=1}^r : \quad \hat{x}_i = \frac{R}{b_i (\sum\limits_{j=1}^{r} b_j^{-p})^{1/p}}, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Но так как $\widehat{x} \in \Omega$, то на самом деле соотношение (6) является равенством и согласно принципу математической индукции решение задачи 1 при $1 < p < \infty$ при предположении (ii) дается формулами (3).

В случае $0 < p < 1$ критическая точка η_0 функции $G(x_d)$ принадлежит отрезку I (см. доказательство неравенства $\eta_0 \geq \eta$ при $1 < p < \infty$) и, более того, $\eta_0 \leq \frac{R}{2^{1/p}}$ (легко показать, что это неравенство является следствием предположения (ii) в задаче 1).

Точка $x_d = \eta_0$ это единственная критическая точка функции $\tilde{G}(x_d)$ на интервале $(0,R)$, и поскольку $\tilde{G}'(x_d)$ — непрерывна на $(0,R)$, а $\tilde{G}'(\frac{R}{2^{1/p}}) \geq 0$ (прямой подсчет с использованием предположения (ii)), то $\tilde{G}'(x_d) \geq 0$ при любом $x_d \in (\eta_0, R)$. Т.е. функция $\tilde{G}(x_d)$, непрерывная на $[0,R)$, не убывает, по крайней мере, на $[\eta_0, \eta]$. Следовательно,

$$\max_{x_d \in I} \tilde{G}(x_d) = \max\{\tilde{G}(0); \tilde{G}(\eta)\} = \max\{B(d-1,p); B(d,p)\},$$

где $B(k,p) = \frac{k}{(\sum\limits_{i=1}^{k} b_i^{-p})^{1/p}} \cdot R.$

Отсюда, так же как и в случае $1 < p < \infty$, следует, что

$$\max_{x \in \Omega'} G(x_1, \ldots, x_d) = \max\{B(d-1,p); B(d,p)\}.$$

и, как следствие, соотношения (6) и принципа математической индукции,

$$\max F(x_1, \ldots, x_l) = \max_{1 \leq k \leq l} F(x_1^{(k)}, ..., x_l^{(k)}) = \max_{1 \leq k \leq l} \frac{k}{(\sum\limits_{i=1}^{k} b_i^{-p})^{1/p}} \cdot R.$$

где

$$x_i^{(k)} = \frac{R}{b_i (\sum\limits_{i=1}^{k} b_i^{-p})^{1/p}}, \quad i = 1, 2, \ldots, k; \; x_i^{(k)} = 0, i = k+1, ..., l.$$

В случае $p = 1$ (тогда $d = r$) $\tilde{G}(x_r) = (r-1)D(R - x_r) + \beta_r x_r = = (\beta_r - (r-1)D)x_r + R(r-1)D$ и мы сразу получаем, что при любом $x_r \in (0,R)$:

$$\tilde{G}'(x_r) = \beta_r - (r-1)D = \beta_r - (r-1) / \sum_{i=1}^{r-1} \beta_i^{-1} \geq 0,$$

в силу предположения (ii) в задаче 1. Поэтому функция $\tilde{G}(x_l)$ не убывает на $I = [0, \eta]$, где, напомним, $\eta = \frac{D}{D + \beta_r} \cdot R$, и $\max\limits_{x_r \in I} \tilde{G}(x_r) =$

$\tilde{G}(\eta) = \frac{r}{\sum\limits_{i=1}^{r} b_i^{-1}} \cdot R$. Отсюда заключаем, что в случае $p = 1$

$$\max_{x\in\Omega} F(x_1, \ldots, x_l) = F(x_1^*, \ldots, x_l^*) = Rl / \sum_{j=1}^{l} b_j^{-1}.$$

где

$$x_i^* = R / \Big(b_i (\sum_{j=1}^{l} b_j^{-1}) \Big), \quad i = 1, \ldots, l.$$

Таким образом, доказано, что решение задачи 1 при $1 \le p < \infty$ определяется формулами (3), а при $0 < p < 1$ — формулами (3′).

Теперь, полагая в условии задачи 1 $p = s$, $R = 1$, $l = m - n$, $b_1 = \alpha_{n+1} = (\frac{1}{n+1})^{1/s}$ и $b_k = \alpha_{n+k} = 1$, $k = 2, \ldots, l$, и сопоставляя его с правой частью соотношения (2), в соответствии с формулами (3) и (3′), заключаем, что при $1 \le s < \infty$

$$e_n^{\perp}(B_s^m)_1 = (m - n) / \Big(\sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i^{-s} \Big)^{1/s} = \frac{m - n}{m^{1/s}}, \tag{7}$$

а при $0 < s < 1$

$$e_n^{\perp}(B_s^m)_1 = \max_{n+1 \le k \le m} \frac{k - n}{k^{1/s}}. \tag{7'}$$

Теперь возвратимся к исходной задаче о вычислении $e_n^{\perp}(B_p^m)_q$.

Пусть $0 < p, q < \infty$. Тогда, полагая $s = \frac{p}{q}$, согласно (1), (7), (7′) приходим к равенствам

$$e_n^{\perp}(B_p^m)_q = \Big(e_n^{\perp}(B_{p/q}^m)_1 \Big)^{1/q} = \left(\frac{m - n}{m^{1/s}} \right)^{1/q} = \frac{(m - n)^{1/q}}{m^{1/p}},$$

$0 < q < p < \infty$ и

$$e_n^{\perp}(B_p^m)_q = \max_{n+1 \le k \le m} \frac{(k - n)^{\frac{1}{q}}}{k^{1/p}}, \quad 0 < p < q < \infty.$$

При $p = \infty$, $0 < q < \infty$.

$$e_n^{\perp}(B_\infty^m)_q = \sup_{u \in B_\infty^m} \inf_{\lambda_n} \left(\sum_{i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \lambda_n} u_i^q \right)^{1/q},$$

и значит,
$$e_n^{\perp}(B_\infty^m)_q = (m-n)^{1/q}.$$

При $p = q = \infty$, очевидно, $e_n^{\perp}(B_\infty^m)_\infty = 1$.

При $0 < p < \infty$, $q = \infty$, аналогично доказательству равенства (2), устанавливаем, что $e_n^{\perp}(B_p^m)_\infty = \sup\limits_{y \in \hat{B}_p^{m,n}} \alpha_i y_i$, где, напомним, $\hat{B}_p^{m,n} = \big\{y = (y_i)_{i=n+1}^m \in B_p^{m,n} : \ \alpha_k y_k \le \alpha_{n+1} y_{n+1}, k = n+2, \ldots, m\big\}$ и $\alpha_{n+1} = (n+1)^{-1/p}$, $\alpha_k = 1$, $k = n+2, \ldots, m$.

Теперь, очевидно, что $e_n^{\perp}(B_p^m)_\infty = (n+1)^{-1/p}$ и равенство достигается на наборе $x = (x_i)_{i=1}^m : x_1 = \ldots = x_{n+1} = = \frac{1}{(n+1)^{1/p}}$, $x_i = 0$, $i = n+2, \ldots, m$.

Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

§3. Доказательство теоремы 1

3.1. *Оценка сверху.* Пусть
$$\mathcal{F}_k = \mathrm{lin}\big\{\phi_{\bar\tau}, \bar\tau \in D_{k,d}\big\} = \Big\{\varphi : \ \varphi(t) = \sum_{\bar\tau \in D_{k,d}} a_{\bar\tau}\phi_{\bar\tau}(t), \ a_{\bar\tau} \in \mathbb{R}, \ t \in \mathbf{I}^d\Big\},$$
$k = 0, 1, \ldots$. Если $\varphi \in \mathcal{F}_k \cap B_{p,\theta}^\alpha$, то согласно утверждениям 2 и 1 соответственно:
$$\text{(I)} \ \ \|\varphi\|_{p,\theta}^\alpha \asymp 2^{k(\alpha - d/p)} \|a\|_{l_p^{m_k}},$$
где $a = \{a_{\bar\tau}\}_{\bar\tau \in D_{k,d}}$, $m_k = \# D_{k,d}$;
$$\text{(II)} \ \|\varphi\|_q \asymp 2^{-dk/q} \|a\|_{l_q^{m_k}}, \quad k = 0, 1, \ldots$$
(здесь и далее $\# A$ обозначает количество точек конечного множества $A \subset \mathbb{Z}^d$).

Для $\varphi \in \mathcal{F}_k$ через $G_m(\varphi)$, $m \le m_k$, обозначим алгоритм
$$G_m(\varphi)(t) = \sum_{\bar\tau \in \Lambda_k^{(m)}} a_{\bar\tau}\phi_{\bar\tau}(t),$$
где $\Lambda_k^{(m)} \subset D_{k,d}$ и $\# \Lambda_k^{(m)} = m$, так что
$$\min\{|a_{\bar\tau}|, \ \bar\tau \in \Lambda_k^{(m)}\} \ge \max\{|a_{\bar\tau}|, \ \bar\tau \in D_{k,d} \backslash \Lambda_k^{(m)}\}.$$

Заметим, что, вообще говоря, $\Lambda_k^{(m)}$ при заданном m может быть определено таким способом не однозначно, но это несущественно.

Для $n = 0, 1, \ldots$ пусть $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ последовательность неотрицательных целых чисел такая, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} n_k \leq n$. Понятно, что такая последовательность содержит только конечное число ненулевых n_k.

Для $f \in B_{p,\theta}^{\alpha}$ оптимальный (в смысле точности по порядку) агрегат проективной n-членной аппроксимации строим в виде

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{\infty} G_{n_k}(f).$$

Тогда

$$\|f - S_n(f)\|_q \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k - G_{n_k}(f_k)\|_q, \tag{8}$$

где $f_k(t) = \sum\limits_{\bar{\tau} \in D_{k,d}} b_{\bar{\tau}} \phi_{\bar{\tau}}(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$ а $b_{\bar{\tau}}$ — коэффициенты из разложения (1).

Далее, из соотношений (II) и (I) вытекает, что если $f \in SB_{p,\theta}^{\alpha}$, то $\|f_k\|_p \asymp 2^{-dk/p} \|\{b_{\bar{\tau}}\}_{\bar{\tau} \in D_{k,d}}\|_{l_p^{m_k}} \asymp 2^{-k(\alpha - d/p)} 2^{-dk/p} \|f\|_{p,\theta}^{\alpha} \ll 2^{-k\alpha}$, т.е.

$$f_k \in C\, 2^{-k\alpha} (\mathcal{F}_k \cap B_p), \tag{9}$$

где $B_p = \{f \in L_p(\mathbf{I}^d) : \ \|f\|_p \leq 1\}$ — единичный шар в пространстве $L_p(\mathbf{I}^d)$, а $C > 0$ — некоторая постоянная.

Теперь рассмотрим семейство линейных операторов $A_k : \ \mathcal{F}_k \to \mathbb{R}^{m_k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ действующих по правилу

$$\varphi_k(t) = \sum_{\bar{\tau} \in D_{k,d}} a_{\bar{\tau}} \phi_{\bar{\tau}}(t) \to a^{(k)} = \{a_{\bar{\tau}}\}_{\bar{\tau} \in D_{k,d}}.$$

При каждом $k = 0, 1, \ldots$ оператор A_k осуществляет взаимнооднозначное отображение между линейными пространствами $\mathcal{F}_k$ и $\mathbb{R}^{m_k}$ и, согласно соотношению (II),

$$\|A_k\|_p := \|A_k\|_{L_p(\mathbf{I}^d) \to l_p^{m_k}} \ll 2^{dk/p}, \tag{10}$$

а для обратного к нему $A_k^{-1} : R^{m_k} \to \mathcal{F}_k$

$$\|A_k^{-1}\|_q := \|A_k^{-1}\|_{l_q^{m_k} \to L_q(\mathbf{I}^d)} \ll 2^{-dk/q}. \tag{11}$$

Поэтому из (8), учитывая (9)—(11), получаем

$$\sup_{f \in SB^\alpha_{p,\theta}} \|f - S_n(f)\|_q \ll \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{f_k \in 2^{-k\alpha} B_p} \|f_k - G_{n_k}(f_k)\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{k=0}^{\infty} \|A_k^{-1}\|_q \cdot \|A_k\|_p \cdot 2^{-k\alpha} \sup_{b^{(k)} \in B_p^{m_k}} \|b^{(k)} - \mathcal{J}_{n_k}(b^{(k)})\|_{l_q^{m_k}} \ll$$

$$\ll \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(\alpha + d(1/q - 1/p))k} \sup_{b^{(k)} \in B_p^{m_k}} \|b^{(k)} - \mathcal{J}_{n_k}(b^{(k)})\|_{l_q^{m_k}}, \tag{12}$$

где $b^{(k)} = \{b_{\overline{\tau}}\}_{\overline{\tau} \in D_{k,d}}$, и для $x = \sum\limits_{s=1}^{m} x_s e_s$ $\big(\varepsilon = (e_s)_{s=1}^m$ — канонический базис в $l_q^m\big)$ $\mathcal{J}_n(x) := \sum\limits_{j=1}^{n} x_{s_j} e_{s_j}$, а $(s_j)_{j=1}^m$ — система натуральных чисел такая, что $|x_{s_1}| \geq |x_{s_2}| \geq \ldots \geq |x_{s_m}|$.

Теперь легко заметить, что

$$\sup_{b^{(k)} \in B_p^{m_k}} \|b^{(k)} - \mathcal{J}_{n_k}(b^{(k)})\|_{l_q^{m_k}} = e_{n_k}^{\perp}(B_p^{m_k}; l_q^{m_k}). \tag{13}$$

Сопоставляя соотношения (12) и (13), получаем

$$e_n^{\mathrm{pr}}(B^\alpha_{p,\theta}; \Phi; L_q) \ll \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\alpha k} 2^{dk(1/p - 1/q)} e_{n_k}^{\perp}(B_p^{m_k}; l_q^{m_k}) \tag{14}$$

(напомним, что $m_k = \# D_{k,d} \asymp 2^{kd}$).

Прежде, чем продолжить оценку (14), сделаем следующее замечание.

Пусть задано натуральное $n \geq 2^d$. Выберем $s \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ так, чтобы

$$\sum_{k=0}^{s} \# D_{k,d} \leq n < \sum_{k=0}^{s+1} \# D_{k,d},$$

т.е. $M_s \leq n < M_{s+1}$. Поскольку, очевидно, при любых $1 < p < \infty,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty,\ \ 1 \leq \theta < \infty,\ \ d/p < \alpha < 1$

$$e^{\mathrm{pr}}_{M_{s+1}}(B^\alpha_{p,\theta};\Phi;L_q) \leq e^{\mathrm{pr}}_n(B^\alpha_{p,\theta};\Phi;L_q) \leq e^{\mathrm{pr}}_{M_s}(B^\alpha_{p,\theta};\Phi;L_q)$$

и $M_s \asymp 2^{sd} \asymp n$, то это позволяет сделать заключение о справедливости утверждения теоремы 1 при всех $n \in \mathbb{N}$ в предположении, что оно выполняется при $n = M_s,\ s = 0, 1, \ldots,$ т.е. теорему достаточно доказать для n, пробегающих последовательность $\{M_s\}_{s=0}^\infty$.

Теперь отметим, что в силу неравенства $\|\cdot\|_\gamma \leq \|\cdot\|_\infty$ при $1 < \gamma < \infty$ оценку сверху в теореме 1 при $n = M_s$ достаточно установить для $q = \infty$.

Пусть $n = M_s$, где $s \in \mathbb{N}$ — фиксировано. Положим для заданного $0 < \delta < \alpha p - d$ (согласно условию $\alpha > d/p$)

$$n_k = \begin{cases} m_k, & 0 \leq k \leq s-1, \\ [C2^{-\delta(k-s)}m_s], & k \geq s, \end{cases}$$

где $[x]$ — целая часть числа $x \in \mathbb{R}$, $C > 0$ — постоянная, выбор которой уточняем ниже.

Имеем

$$\sum_{k=0}^\infty n_k \leq \sum_{k=0}^{s-1} m_k + m_s C \sum_{k=s}^\infty 2^{-\delta(k-s)} \leq M_s = n,$$

если $C < C_\delta = 1 - 2^{-\delta}$.

Согласно неравенству (14)

$$e^{\mathrm{pr}}_n(B^\alpha_{p,\theta};\Phi;L_\infty) \ll \sum_{k=0}^\infty 2^{-\alpha k} 2^{dk/p} e^\perp_{n_k}(B^{m_k}_p; l^{m_k}_\infty). \tag{15}$$

Теперь при $0 \leq k \leq s-1$

$$e^\perp_{n_k}(B^{m_k}_p; l^{m_k}_\infty) = 0, \tag{16}$$

а при $k \geq s$, согласно теореме 2, —

$$e^\perp_{n_k}(B^{m_k}_p; l^{m_k}_\infty) \ll (2^{-\delta(k-s)}m_s)^{-1/p}. \tag{17}$$

Здесь учтено, что существует $s^* \geq s$ такое, что при $k > s^*$ $n_k = 0$, и соответственно, при таких k, очевидно, $e^{\perp}_{n_k}(B^{m_k}_p; l^{m_k}_\infty) < 1$ $\big($достаточно воспользоваться неравенством

$$\left(\sum_{s=1}^{N} |a_s|^\nu\right)^{1/\nu} \leq \left(\sum_{s=1}^{N} |a_s|^\mu\right)^{1/\mu}, \quad 1 \leq \mu \leq \nu \leq \infty\big),$$

т.е. при $k > s^*$ оценку для $e^{\perp}_{n_k}(B^{m_k}_p; l^{m_k}_\infty)$ также можем записать в виде (17).

Таким образом, из соотношения (15) с учетом (16) и (17) получаем

$$e^{\mathrm{pr}}_n(B^\alpha_{p,\theta}; \Phi; L_\infty) \ll \sum_{k=s+1}^{\infty} 2^{-\alpha k} 2^{dk/p} (2^{-\delta(k-s)} m_s)^{-1/p} =$$

$$= m_s^{-1/p} 2^{\delta s(-1/p)} \sum_{k=s+1}^{\infty} 2^{-\alpha k} 2^{dk/p} 2^{\delta k/p} =$$

$$= m_s^{-1/p} 2^{\delta s(-1/p)} \sum_{k=s+1}^{\infty} 2^{-\beta k},$$

где $\beta = \alpha - \frac{d}{p} - \delta \cdot \frac{1}{p}$.

Поскольку $\delta < \alpha p - d$, то $\beta > 0$ и

$$e^{\mathrm{pr}}_n(B^\alpha_{p,\theta}; \Phi; L_\infty) \ll m_s^{-1/p} 2^{\delta s(-1/p)} 2^{-\beta s} \asymp 2^{-\alpha s} \asymp n^{-\alpha/d},$$

а значит, при всех $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$ и $\frac{d}{p} < \alpha < 1$

$$e^{\mathrm{pr}}_n(B^\alpha_{p,\theta}; \Phi; L_q) \ll n^{-\alpha/d}.$$

3.2. *Оценка снизу.* Пусть $n \geq 2^d$ задано. Подберем $k \geq 2$ из условия

$$\#D_{k-2,d} \leq n < \#D_{k-1,d},$$

и рассмотрим пространство $B(k)$ полиномов по системе $\widetilde{\Phi}_k = \{\phi_{\bar\tau}\}_{\bar\tau \in D_{k,d}}$ вида

$$R_k(f) = \sum_{\bar\tau \in D_{k,d}} b_{\bar\tau}(f) \phi_{\bar\tau}, \quad f \in L_q(\mathbf{I}^d),$$

и пусть $B(k)^{\alpha}_{p,\theta}$ — подпространство из $B^{\alpha}_{p,\theta}$, состоящее из функций $f \in B(k)$, т.е.

$$B(k)^{\alpha}_{p,\theta} = B(k) \bigcap B^{\alpha}_{p,\theta}.$$

Тогда, очевидно, (из определения e_n^{pr}) что

$$e_n^{\mathrm{pr}}(B^{\alpha}_{p,\theta}; \Phi; L_q) \geq e_n^{\mathrm{pr}}(B(k)^{\alpha}_{p,\theta}; \widetilde{\Phi}_k; L_q).$$

Рассмотрим отображение $A' : B(k) \to \mathbb{R}^{m_k}$ (где, напомним, $m_k = \# D_{k,d}$) такое, что $A'(f) := \{b_{\bar{\tau}}(f)\}_{\bar{\tau} \in D_{k,d}}$, если $f \in B(k)$. Тогда, согласно утверждению 2, для $f \in B(k)^{\alpha}_{p,\theta}$

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{p,\theta}} \asymp 2^{k(\alpha - d/p)} \|A'(f)\|_{l_p^{m_k}},$$

и для $f \in B(k)$

$$\|f\|_{L_q} \asymp 2^{-\alpha\, k/q} \|A'(f)\|_{l_q^{m_k}}.$$

Поэтому, понятно, что

$$e_n^{\mathrm{pr}}(B(k)^{\alpha}_{p,\theta}; \widetilde{\Phi}_k; L_q) \asymp 2^{kd(1/p - 1/q)} \cdot 2^{-k\alpha} \cdot e_n^{\perp}(B_p^{m_k}; l_q^{m_k}),$$

и для завершения оценки осталось воспользоваться теоремой 2 (см. также замечание 2), в соответствии с которой

$$e_n^{\perp}(B_p^{m_k}; l_q^{m_k}) \asymp 2^{kd(1/q - 1/p)}.$$

Окончательно получаем

$$e_n^{\mathrm{pr}}(B^{\alpha}_{p,\theta}; \Phi; L_q) \geq e_n^{\mathrm{pr}}(B(k)^{\alpha}_{p,\theta}; \widetilde{\Phi}_k; L_q) \asymp 2^{-k\alpha} \asymp n^{-\alpha/d}.$$

Теорема 1 доказана.

1. *De Vore R.* Nonlinear approximation// Acta Numer. — 1998. — **7**. — P. 51–150.
2. *De Vore R., Temlyakov V.* Nonlinear approximation by trigonometric sums // J. Fourier Anal. Appl. — 1995. — **2**. — P. 29–48.
3. *Temlyakov V.N.* Greedy Algorithms with Regard to Multivariate Systems with Special Structure // Constr.Approx. — 2000. — **16**. — P. 399–425.
4. *Temlyakov V.N.* Universal Bases and Greedy Algorithms for Anisotropic Function Classes// Constr.Approx. — 2002. — **18**. — P. 529–550.

5. *Temlyakov V.N.* The best m-term approximation and greedy algorithms// Adv.Comp.Math. — 1998. — **8**. — P. 249–265.
6. *Temlyakov V.N.* Non-linear m-term approximation with regard to the multivariate Haar system// East J.Appr. — 1998. — **4**. — P. 87–106.
7. *Dinh Dung.* Continuous algorithms in n-term approximation and non-linear widths // J.Appr.Theory. — 2000. — **102**. — P. 217–242.
8. *Dinh Dung.* Non-linear approximations using wavelet decompositions// Vietnam J.Math. — 2001. — **29**. — P. 197–224.
9. *Dinh Dung.* Asymptotic orders of optimal non-linear approximations// East J.Appr. — 2001. — **7**. — P. 55–76.
10. *Ciesielski B., Ciesielski Z.* Image compession with Schauder bases// Appl. Math. — 2001. — **28**, № 4. — P. 367–390.
11. *Ryll J.* Schauder bases for the space of continuous functions on n-dimensional cube// Comment. Math. Prace Mat. — 1973. — **27**. — P. 201–213.
12. *Ciesielski Z., Camont A.* Levy's fractional Browian random field and function spaces// Acta Sci. Math. (Szeged). — 1995. — **60**. — P. 99-118.
13. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 307 с.