УДК 517.5

В. В. Савчук (Ін–т математики НАН України, Київ)
М. В. Савчук (Ін–т підгот. кадрів держ. сл. зайнятості України, Київ)

ОЦІНКИ СУМ ФЕЙЄРА ДЛЯ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ КЛАСУ БЛОХА

We obtain bilateral estimates with explicit constants of the Fejér sum's norms in the L_p metrics, $p = 1, \infty$, for the holomorphic functions from Bloch classes $\mathscr{B}_p$.
Знайдено двосторонні оцінки з явними константами норм сум Фейєра в L_p–метриках, $p = 1, \infty$, для голоморфних функцій з класів Блоха $\mathscr{B}_p$.

Нехай функція f є голоморфною в крузі $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$ і

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k z^k, \quad \widehat{f}_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

— її розвинення в ряд Тейлора.

Сумою Фейєра порядку $n-1, n \in \mathbb{N}$, функції f називається алгебраїчний многочлен вигляду

$$\sigma_n(f)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \widehat{f}_k z^k.$$

Класом Блоха $\mathscr{B}$ (див., наприклад, [1, с. 281]) називається множина голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій f, для яких

$$\|f\|_{\mathscr{B}} := |f(0)| + \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

Нехай

$$\|f(\cdot)\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p dt\right)^{1/p}, \quad \|f(\cdot)\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0, 2\pi]} |f(e^{it})|$$

і

$$M_p(r, f) := \|f(r\,\cdot)\|_p, \quad 0 \le r < 1, \ p > 0.$$

p–Аналогом класу Блоха є множина голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій f, для яких

$$\|f\|_{\mathscr{B}_p} := |f(0)| + \sup_{r\in[0,1)} (1-r^2)M_p(r, f') < \infty.$$

Позначимо

$$\mathscr{B}_p := \left\{ f \text{ — голоморфна в } \mathbb{D} : f(0) = 0, \|f\|_{\mathscr{B}_p} \le 1 \right\}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

де при $p = \infty$ вважаємо, що $\|f\|_{\mathscr{B}_\infty} = \|f\|_{\mathscr{B}}$ і $\mathscr{B}_\infty = \mathscr{B}$.

Метою даної роботи є знаходження оцінок норм $\|\sigma_n(f)\|_p$ для функцій з класів $\mathscr{B}_p$.

Історія цього питання бере свій початок з такого твердження.

Нехай функція $f \in H_\infty$, *де* H_∞ — *множина голоморфних в* $\mathbb{D}$ *функцій* f, *для яких* $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \le 1$. *Тоді*

$$\|\sigma_n(f)\|_\infty \le 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Якщо до того ж для деякого $m \in \mathbb{Z}_+$ $\widehat{f}_j = 0,\ j = \overline{0, m}$, *то*

$$\|\sigma_n(f)\|_\infty \le 1 - \frac{m+1}{n} \quad \forall\, n \ge m+2. \tag{2}$$

Співвідношення (2) *є рівністю для функції* $f(z) = z^{m+1}$.

Співвідношення (1) поєднує в собі знамениті результати Л. Фейєра і Е. Ландау (див., наприклад, [2]).

Нерівність (2) нам не зустрічалася в математичній літературі. Проте навряд чи можна вважати її новою. Покажемо, як (2) можна отримати за допомогою теореми Рогозинського і Сегьо [3].

Згідно з цим твердженням, якщо $\{\lambda_k\}_{k=0}^{n-1}$, $n \ge 2$, — послідовність дійсних чисел, які задовольняють умови

$$\Delta^2\lambda_k := \lambda_k - 2\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2} \ge 0, \quad k = \overline{0, n-3};$$

$$\lambda_{n-2} - 2\lambda_{n-1} \ge 0;\ \lambda_{n-1} \ge 0,$$

то

$$\max\left\{ \left| \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \widehat{f}_k \right| : f \in H_\infty \right\} = \lambda_0.$$

У нашому випадку $f(z) = z^{m+1}g(z)$, де $g \in H_\infty$ і

$$\sigma_n(f)(z) = z^{m+1} \sum_{k=0}^{n-m-2} \left(1 - \frac{k+m+1}{n}\right) \widehat{g}_k z^k, \quad n \geq m+2.$$

За допомогою безпосередніх обчислень переконуємося в тому, що для послідовності $\lambda_k = (n-k-m-1)/n,\ k = \overline{0, N-1}$, де $N = \ n-m-1$, мають місце рівності

$$\Delta^2 \lambda_k = \lambda_{N-2} - 2\lambda_{N-1} = 0, \quad k = \overline{0, N-3}.$$

Тому, застосувавши теорему Рогозинського–Сегьо до функції g, отримаємо (2).

Добре відомою є роль сум Фейєра в описі диференціально-гладкісних властивостей голоморфних функцій. А саме:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sigma_n(f)\|_p \leq 1 \Longleftrightarrow \sup_{r\in[0,1)} M_p(r, f) \leq 1, \quad 1 \leq p \leq \infty, \tag{3}$$

$$\|\sigma_n'(f)\|_p = O(n^{1-\alpha}),\ n \to \infty,\ 0 < \alpha \leq 1 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow M_p(r, f') = O\left((1-r)^{\alpha-1}\right),\ r \to 1-, \tag{4}$$

$$\|\sigma_n'(f)\|_\infty = O(n),\ n \to \infty \Longleftrightarrow \|f\|_{\mathscr{B}} < \infty, \tag{5}$$

$$\|\sigma_{2n-1}(f) - \sigma_n(f)\|_\infty = O(1),\ n \to \infty \Longleftrightarrow \|f\|_{\mathscr{B}} < \infty. \tag{6}$$

Твердження (3), (4) можна знайти, наприклад, в [4, с. 234, 469], (5) — це результат роботи [5], а (6) — роботи [6].

Стислий огляд інших важливих фактів про класи $\mathscr{B}$ можна знайти в [1, с. 281].

Варто звернути увагу на те, що, об'єднавши твердження (3), (5) і нерівність Бернштейна $\|\sigma_n'(f)\|_\infty \leq n\|\sigma_n(f)\|_\infty$, можна легко встановити включення $\mathscr{B} \supset H_\infty$.

У випадку, коли $1 < p < \infty$, нескладно показати, що $\mathscr{B}_p \supset H_p$, де H_p — одинична куля в просторі Гарді, тобто множина голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій f, для яких $\sup_{r\in[0,1)} M_p(r, f) \leq 1$. Якщо ж $p = 1$, то $\mathscr{B}_1 \supset K$, де K — множина інтегралів типу Коші–Стільтьєса комплекснозначних зарядів на $[0, 2\pi]$, варіації яких не перевищують 1.

Справді, якщо

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(t)}{1 - e^{-it}z}, \quad \bigvee_0^{2\pi} \mu \le 1,$$

то

$$f'(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-it} d\mu(t)}{(1 - e^{-it}z)^2}$$

і

$$M_1(r, f') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{-it} d\mu(t)}{(1 - re^{i(\theta - t)})^2} \right| d\theta \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|d\mu(t)|}{|1 - re^{i(\theta - t)}|^2} d\theta =$$

$$= \frac{1}{1 - r^2} \int_0^{2\pi} |d\mu(t)| \le \frac{1}{1 - r^2} \quad \forall\, r \in [0, 1).$$

В [6], відштовхуючись від (6), доведено імплікацію

$$f \in \mathscr{B} \Longrightarrow \|\sigma_n(f)\|_\infty = O(\ln n), \quad n \to \infty, \tag{7}$$

і показано, що обернена імплікація не справджується.

Наступне твердження є основним результатом нашого дослідження. З нього, зокрема, випливає аналогічна до (7) імплікація для класу $\mathscr{B}_1$. Крім того, конкретизується стала, яка розуміється під символом $O(\cdot)$.

Теорема 1. *Нехай* $p = 1, \infty$. *Тоді для кожного натурального* $n \ge 2$ *мають місце співвідношення*

$$C_p \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \le \sup\left\{\|\sigma_n(f)\|_p : f \in \mathscr{B}_p\right\} \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}, \tag{8}$$

де

$$C_p = \begin{cases} \pi^{-1}, & p = 1, \\ 2^{-1}, & p = \infty. \end{cases}$$

***Зауваження* 1.** Як буде видно з доведення, друга нерівність в (8) є правильною для всіх $p \in [1, \infty]$.

В теоремі 1.4 із [5] стверджується, що для голоморфної функції f

$$\|\sigma_n(f)\|_\infty = O(\ln n)\ \forall\ n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow |f(z)| = O\left(\ln \frac{1}{1-|z|}\right) \quad \forall\ z \in \mathbb{D}.$$

Об'єднавши це твердження із теоремою 1, отримаємо, що для будь-якої функції $f \in \mathscr{B}$

$$|f(z)| \le C \ln \frac{1}{1-|z|} \quad \forall\ z \in \mathbb{D},$$

де C — деяка стала.

В наступному твердженні показано, зокрема, що в останній нерівності можна взяти $C = 1$.

Теорема 2. *Нехай* $p = 1, \infty$. *Тоді для кожного* $\rho \in [0, 1)$

$$C_p \log \frac{1}{1-\rho} \le \sup\{M_p(\rho, f) : f \in \mathscr{B}_p\} \le \log \frac{1}{1-\rho}, \tag{9}$$

де C_p *— стала така, як в теоремі 1.*

***Зауваження* 2.** Як буде видно з доведення, верхня оцінка середніх $M_p(\rho, f)$ в (9) є чинною для всіх $p \in [1, \infty]$, проте при $2 < p < \infty$ вона є завищеною за порядком, коли $\rho \to 1-$. Адже в [7] доведено, що для будь-якої функції $f \in \mathscr{B}_p$, $2 < p < \infty$,

$$M_p(\rho, f) = O\left(\left(\ln \frac{1}{1-\rho}\right)^\beta\right),\ \rho \to 1-,\ \forall\ \beta > \frac{1}{2}.$$

Доведення теореми 1 спирається на такі факти.

Лема 1. *Нехай* $m \in \mathbb{Z}_+$ *і*

$$\mu_{k,m}(r) := \begin{cases} r^k - r^{2(m+1)-k}, & k = 0, 1, \ldots, m, \\ \\ 0, & k = m+1, \ldots. \end{cases}$$

Тоді для будь-якого $r \in [0, 1]$ *послідовність* $\{\mu_{k,m}(r)\}_{k=0}^\infty$ *є опуклою, тобто* $\Delta^2 \mu_{k,m}(r) := \mu_{k,m}(r) - 2\mu_{k+1,m}(r) + \mu_{k+2,m}(r) \ge 0$ *для всіх* $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Доведення. Безпосередньою перевіркою пересвідчуємося в тому, що

$$\Delta^2\mu_{k,m}(r) = \begin{cases} r^k(1-r)^2\left(1-r^{2(m-k)}\right), & k = 0,1,\ldots,m-1, \\ r^m(1-r^2), & k = m, \\ 0, & k = m+1, m+2, \ldots. \end{cases}$$

Отже, $\Delta^2\mu_{k,m}(r) \geq 0$.

Лема 2. *Нехай f — функція, голоморфна в $\mathbb{D}$, і*

$$Q_n(f)(z) := \sum_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}|z|^{n-k-1}\right)\widehat{f}_k z^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Якщо $f(0) = 0$, то для будь-яких $\rho \in [0,1)$, $1 \leq p \leq \infty$ і натурального $n \geq 2$ справджуються нерівності

$$M_p\left(\rho^2, Q_n(f)\right) \leq 2\int_0^\rho M_p(r, f')(1 - r^{2(n-1)})rdr \tag{10}$$

і

$$M_p(\rho^2, f) \leq 2\int_0^\rho M_p(r, f')rdr. \tag{11}$$

Доведення. За формулою (7) з роботи [8], для будь-якої голоморфної функції f такої, що $f(0) = 0$, маємо

$$Q_n(f)(\rho^2 e^{i\theta}) =$$

$$= \frac{e^{i\theta}}{\pi}\int_0^\rho\int_0^{2\pi} f'(re^{it})\sum_{k=0}^{n-2}\left(1 - r^{2(n-k-1)}\right)r^k e^{ik(\theta-t)}dt\ rdr. \tag{12}$$

Позначимо

$$K_{n-2}(x,r) := 1 - r^{2(n-1)} + 2\sum_{k=1}^{n-2}(r^k - r^{2(n-1)-k})\cos kx.$$

Тоді внаслідок того, що для голоморфної функції $\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{ikt}dt = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, формулу (12) після заміни змінних інтегрування приводимо до вигляду

$$Q_n(f)(\rho^2 e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}}{\pi} \int_0^\rho \int_0^{2\pi} f'(re^{i(t+\theta)}) K_{n-2}(t, r) dt \; rdr. \tag{13}$$

Покладаючи $m = n - 2$ та використовуючи позначення із леми 1, ядро $K_{n-2}(x, r)$ запишемо у вигляді

$$K_{n-2}(x, r) = K_m(x, r) = \mu_{0,m}(r) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mu_{k,m}(r) \cos kx.$$

Оскільки згідно з лемою 1 послідовність $\{\mu_{k,m}(r)\}_{k=0}^{\infty}$ є опуклою для всіх $r \in [0, 1]$, і очевидно, $\mu_{k,m}(r) \downarrow 0$, то за відомою теоремою (див., наприклад, [4, с. 294]) для будь-яких $x \in [0, 2\pi]$ і $r \in [0, 1]$ справджується нерівність

$$K_{n-2}(x, r) \geq 0. \tag{14}$$

Оцінюючи інтеграл в правій частині (13) за інтегральною нерівністю Мінковського, з урахуванням (14), одержимо співвідношення

$$M_p\left(\rho^2, Q_n(f)\right) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\rho \int_0^{2\pi} M_p(r, f') K_{n-2}(t, r) dt \; rdr =$$

$$= 2\int_0^\rho M_p(r, f')(1 - r^{2(n-1)}) \; rdr \quad \forall \; \rho \in [0, 1).$$

Для доведення (11) застосуємо формулу Пуассона до функції $f'(rz)$ при $0 \leq r < 1$:

$$f'(r^2 e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(re^{i(t+\theta)}) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2} dt \quad \forall \; \theta \in [0, 2\pi].$$

Домножимо обидві частини останньої рівності на $2e^{i\theta}r$ і проінтегруємо відносно r вздовж відрізка $[0, \rho]$, $0 < \rho < 1$. Отримуємо

$$f(\rho^2 e^{i\theta}) = e^{i\theta} 2 \int_0^\rho \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\widehat{f}_{k+1} r^{2k} e^{ik\theta} \right) rdr =$$

$$= \frac{e^{i\theta}}{\pi} \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} f'(re^{i(t+\theta)}) \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} dt\ rdr.$$

Залишається оцінити інтеграл в правій частині за інтегральною нерівністю Мінковського і врахувати невід'ємність ядра Пуассона.

Доведення теорем 1 і 2. Проведемо його одночасно.

Скористаємося лемою 2. Оскільки $M_p(r, f') \le 1/(1-r^2)$, то за допомогою співвідношення (10) легко показати, що

$$M_p\left(\rho^2, Q_n(f)\right) \le 2\int_0^{\rho} \frac{1-r^{2(n-1)}}{1-r^2}\ rdr \le$$

$$\le 2\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-2} r^{2k}\right) rdr = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \quad \forall\ f \in \mathscr{B}_p,$$

звідки при $\rho \to 1-$ і випливає (8). Аналогічно, зі співвідношення (11) отримуємо

$$M_p(\rho^2, f) \le 2\int_0^{\rho} \frac{r}{1-r^2} dr = \ln \frac{1}{1-\rho^2} \quad \forall\ f \in \mathscr{B}_p,\ \rho \in [0,1).$$

Для оцінок знизу у випадку, коли $p = 1$, візьмемо функцію

$$f(z) = \frac{z}{1-z} = \sum_{k=1}^{\infty} z^k, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Легко бачити, що $f'(z) = 1/(1-z)^2$ і

$$M_1(r, f') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-re^{it}|^2} dt = \frac{1}{1-r^2} \quad \forall\ r \in [0,1).$$

Тому $f \in \mathscr{B}_1$.

За допомогою нерівності Гарді (див., наприклад, [4, с. 454]) отримуємо такий ланцюжок співвідношень:

$$\|\sigma_n(f)\|_{H_1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) e^{ikt} \right| dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{n-2}\left(1-\frac{k+1}{n}\right)e^{ikt}\right|dt \geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-2}\left(1-\frac{k+1}{n}\right)\frac{1}{k+1} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \quad \forall\, n \geq 2$$

і

$$M_1(\rho, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho}{|1-\rho e^{it}|}dt \geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{1-\rho}.$$

Для оцінки знизу у випадку, коли $p = \infty$, візьмемо функцію

$$f(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Легко бачити, що $f'(z) = 1/(2-2z)$ і $M_\infty(r, f') = 1/(2-2r)$. Тому $f \in \mathscr{B}$.

Маємо

$$\sigma_n(f)(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{z^k}{k}.$$

Оскільки коефіцієнти многочлена $\sigma_n(f)$ додатні, то

$$\|\sigma_n(f)\|_{H_\infty} = \sigma_n(f)(1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{1}{k} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \quad \forall\, n \geq 2$$

і

$$M_\infty(\rho, f) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-\rho} \quad \forall\, \rho \in [0, 1).$$

1. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. — М.: Мир, 1984, — 469 с.
2. *Dienes P.* The Taylor series. — New York: Dover publ. inc., 1957. — 552 p.
3. *Rogosinski W., Szegö G.* Über die Abschnitte von Potenzreihen, die in einem Kreise beschränkt bleiben // Math. Z. — 1928. — **28**. — P. 73 — 94.

4. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. — М.: Мир, 1965. — Т.1. — 615 с.
5. *Bennett G., Stegenga D. A., Timoney R.* Coefficients of Bloch and Lipschitz functions // Illinois J. Math. — 1981. — **25**, № 3. — P. 520 — 531.
6. *Holland F. Walsh D.* Criteria for Membership of Bloch Space and its Subspace, BMOA // Math. Ann. — 1986. — **273**. — P. 317 — 335.
7. *Girela D., Paláez J. Á.* Integral means of analytic functions // Ann. Acad. Scient. Fen. Math. — 2004. — **29.** — P. 459 — 469.
8. *Савчук В. В.* Приближения средними Фейера функций класса Дирихле // Мат. заметки — 2007. — **81**, № 5. — С. 744 — 750.