Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2010, Т.7, №1, 235-263

УДК 517.5

В. В. Савчук (Ін–т математики НАН України, Київ)

ВЛАСТИВОСТІ ТВІРНИХ ЯДЕР КЛАСІВ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ І ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕННЯ

We investigate the properties of some classes of functions, which are reproduction kernels of class H_p^ψ and which have two characteristic properties. The role of this characteristic properties for solving of extremal problems of approximation theory, such as a problem of best linear method approximation of classes H_p^ψ, a problem of best approximation and n–widths of classes H_p^ψ, a Kolmogorov—Nikolskii problem (K—N problem) are shown. Short survey and bibliography for each of listed problems are given. Relative to a K—N problem we investigate some unknown cases.

Досліджено властивості одного класу голоморфних функцій ψ, які є твірними ядрами класів H_p^ψ і мають дві характеристичні властивості. Показано роль цих характеристичних властивостей в розв'язанні екстремальних задач теорії наближення голоморфних функцій таких, як задача про найкращий лінійний метод наближення на класі H_p^ψ, задача про найкраще наближення і поперечники класу H_p^ψ, задача Колмогорова—Нікольського (задача К—Н). До кожної з перелічених задач дано короткий огляд і бібліографію. Стосовно задачі К—Н вивчаються деякі, раніше не досліджені випадки.

1. Дана робота присвячена дослідженню властивостей голоморфних в крузі $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$ функцій $\psi(z) = \sum_{k=0}^\infty \widehat{\psi}_k z^k$, $\widehat{\psi}_k := \psi^{(k)}(0)/k!$, $\left|\widehat{\psi}_k\right| > 0$, які є твірними ядрами функціональних класів H_p^ψ (див. означення далі) та характеризуються двома умовами:

$$2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}_{k+\nu}}{\widehat{\psi}_k} z^\nu\right) \geq 1 \ \forall\ z \in \mathbb{D}, \tag{1}$$

і

$$\exists\ \{c_{\nu,k}\}_{\nu=k+1}^{\infty}, \quad c_{\nu,k} \in \mathbb{C} :$$

$$2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{\nu=0}^{k}\frac{\widehat{\psi}_k}{\widehat{\psi}_{k-\nu}}z^\nu+\sum_{\nu=k+1}^{\infty}c_{\nu,k}z^\nu\right)\ge 1\ \forall\ z\in\mathbb{D}, \qquad (2)$$

де $k\in\mathbb{Z}_+$ — фіксоване число.

Роль умови (1) була з'ясована вперше, мабуть, в [1], де показано, що вона є критерієм розв'язання низки екстремальних задач для обмежених голоморфних функцій. Для зручності наведемо тут основне твердження з [1] (див. також [2, с. 493]).

Нехай UH_∞ — одинична куля простору обмежених голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій, тобто

$$UH_\infty:=\left\{f\ \text{ – голоморфна в }\mathbb{D}:\|f\|_{H_\infty}:=\sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)|\le 1\right\}.$$

Теорема A. *Нехай $n\in\mathbb{Z}_+$ і $\{\gamma_\nu\}_{\nu=n}^{\infty}$ — послідовність комплексних чисел таких, що $\sum_{\nu=n}^{\infty}|\gamma_\nu|<\infty,\ |\gamma_n|>0$. Тоді*

$$\max_{f\in UH_\infty}\left|\frac{1}{\overline{\gamma}_n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\overline{\gamma_{2n-\nu}}\widehat{f}_\nu+\frac{1}{\gamma_n}\sum_{\nu=n}^{\infty}\gamma_\nu\widehat{f}_\nu\right|=1\Longleftrightarrow{}^{1} \qquad (3)$$

$$\Longleftrightarrow 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\gamma_{\nu+n}}{\gamma_n}z^\nu\right)\ge 1\quad\forall\ z\in\mathbb{T}:=\partial\mathbb{D}.$$

Максимум в (3) досягається тільки для функцій вигляду $f(z)=\ \alpha z^n$, де $|\alpha|=1$.

Покажемо, як можна застосувати це твердження, а також один прийом використаний в його доведенні до розв'язання деяких екстремальних задач теорії наближення голоморфних функцій.

Нехай $1\le p<\infty$ і UH_p — одинична куля простору Гарді H_p, тобто

$$UH_p:=\left\{f\ \text{ – голоморфна в }\mathbb{D}:\|f\|_{H_p}\le 1\right\},$$

де

$$\|f\|_{H_p}:=\sup_{0<\rho<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^p dt\right)^{1/p}.$$

[1] При $n=0$ перший доданок під знаком модуля вважається відсутнім.

Через H_p^ψ будемо позначати згортку одиничної кулі UH_p із заданою функцією ψ, яка є голоморфною в крузі $\mathbb{D}$, тобто

$$H_p^\psi := \psi * UH_p := \{f = \psi * g : g \in UH_p\},$$

де під згорткою функцій ψ і g, голоморфних в крузі $\mathbb{D}$ розуміємо згортку за Адамаром

$$(\psi * g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\psi}_k \widehat{g}_k z^k, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Функцію ψ далі будемо вважати такою, що $|\widehat{\psi}_k| > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, і називатимемо *твірним ядром класу* H_p^ψ.

Нехай

$$E_n(H_p^\psi; H_q) := \sup_{f \in H_p^\psi} \inf_{P \in \mathscr{P}_{n-1}} \|f - P\|_{H_q}$$

— найкраще наближення в просторі H_q, $1 \le q \le \infty$, класу H_p^ψ множиною $\mathscr{P}_{n-1}$ алгебраїчних многочленів степеня не більшого ніж $n-1$,

$$\mathcal{E}_n(H_p^\psi; H_q) := \inf_{\Lambda} \sup_{f \in H_p^\psi} \|f - U_{n,\Lambda}(f)\|_{H_q} \tag{4}$$

— найкраще лінійне наближення в H_q класу H_p^ψ множиною значень оператора $U_{n,\Lambda}$, який діє за правилом $U_{n,\Lambda}(f)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,n} \widehat{f}_k z^k$, де $\lambda_{k,n}$ — елементи нижньотрикутної числової матриці Λ і

$$R_n(H_p^\psi; H_q) := \sup_{f \in H_p^\psi} \|f - S_n(f)\|_{H_q}, \ S_n(f)(z) := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}_k z^k,$$

— наближення в H_q класу H_p^ψ частинними сумами рядів Тейлора.

Покладемо

$$E_0(H_p^\psi; H_q) = \mathcal{E}_0(H_p^\psi; H_q) = R_0(H_p^\psi; H_q) = \sup_{f \in H_p^\psi} \|f\|_{H_q}.$$

Нескладно показати, що, яким би не було твірне ядро ψ класу H_p^ψ, $1 \le p \le \infty$, і $q \in [1, \infty]$ завжди справджується низка нерівностей:

$$\left|\widehat{\psi}_n\right| \le E_n(H_p^\psi; H_q) \le \mathcal{E}_n(H_p^\psi; H_q), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Задача ж про опис множини усіх твірних ядер ψ, для яких останні співвідношення перетворюються в рівності (при даному фіксованому n) легко розв'язується у випадку $p = q = \infty$ за допомогою такого твердження, яке випливає з теореми A.

***Наслідок* 1.** *Нехай ψ — твірне ядро класу H^{ψ}_{∞}, $n \in \mathbb{Z}_+$ і*

$$U_n(f)(z) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(1 - \dfrac{\overline{\widehat{\psi}_{2n-\nu}}}{\widehat{\psi}_\nu} |z|^{2(n-\nu)} e^{2i \arg \widehat{\psi}_n}\right) \widehat{f}_\nu z^\nu, & n \geq 1. \end{cases}$$

Тоді кожна з рівностей

$$\max_{f \in H^{\psi}_{\infty}} \|f - U_n(f)\|_{H_\infty} = \left|\widehat{\psi}_n\right|, \tag{6}$$

$$\mathcal{E}_n(H^{\psi}_{\infty}; H_\infty) = \left|\widehat{\psi}_n\right| \tag{7}$$

і

$$E_n(H^{\psi}_{\infty}; H_\infty) = \left|\widehat{\psi}_n\right| \tag{8}$$

має місце тоді і тільки тоді, коли ядро ψ задовольняє умову (1) *при $k = n$.*

Єдиною з точністю до унімодулярного множника екстремальною функцією, для якої досягається максимум в (6) *є $f(z) = \widehat{\psi}_n z^n$.*

***Зауваження* 1.** Найкращий лінійний метод наближення класу H^{ψ}_{∞} в H_∞, тобто елементи матриці Λ^*, для якої досягається точна нижня межа в (4) знаходяться за формулою $\lambda^*_{n,\nu} = 1 - \overline{\widehat{\psi}_{2n-\nu}}/\widehat{\psi}_\nu e^{2i \arg \widehat{\psi}_n}$, $\nu = \overline{0, n-1}$. До того ж такий метод єдиний [3].

Доведення. Поклавши $\gamma_\nu = \widehat{\psi}_\nu z^\nu, z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, для будь-якої функції $g \in UH_\infty$ отримаємо низку рівностей

$$\left|\frac{1}{\overline{\gamma}_n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{\gamma_{2n-\nu}} \widehat{g}_\nu + \frac{1}{\gamma_n} \sum_{\nu=n}^{\infty} \gamma_\nu \widehat{g}_\nu\right| =$$

$$= \frac{1}{|z|^n \left|\widehat{\psi}_n\right|} \left|\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\overline{\widehat{\psi}_{2n-\nu}}}{\widehat{\psi}_\nu} |z|^{2(n-\nu)} e^{2i \arg \widehat{\psi}_n} \widehat{\psi}_\nu \widehat{g}_\nu z^\nu + \sum_{\nu=n}^{\infty} \widehat{\psi}_\nu \widehat{g}_\nu z^\nu\right| =$$

$$= \frac{1}{|z|^n \left|\widehat{\psi}_n\right|} |f(z) - U_n(f)(z)|,$$

де $f = \psi * g$. З останніх співвідношень в силу теореми A, застосованої до функції g, випливає, що рівність

$$\max_{f \in H^\psi_\infty} |f(z) - U_n(f)(z)| = \left|\widehat{\psi}_n\right| |z|^n \quad \forall\ z \in \mathbb{D}$$

має місце тоді і тільки тоді, коли виконується (1). Цим доведено наслідок 1 стосовно рівності (6) при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і рівності (7) при $n = 0$.

Нехай $n \geq 1$ і виконується умова (1). Тоді внаслідок останньої рівності для довільної функції $f \in H^\psi_\infty$ і довільного $z \in \mathbb{D}$ на основі співвідношень $\left|\widehat{f}_\nu\right| \leq \left|\widehat{\psi}_\nu\right|$ маємо оцінку

$$\left| f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(1 - \frac{\overline{\widehat{\psi}_{2n-\nu}}}{\widehat{\psi}_\nu} e^{2i \arg \widehat{\psi}_n} \right) \widehat{f}_\nu z^\nu \right| \leq$$

$$\leq |f(z) - U_n(f)(z)| + \left| \sum_{\nu=0}^{n-1} (1 - |z|^{2(n-\nu)}) \frac{\overline{\widehat{\psi}_{2n-\nu}}}{\widehat{\psi}_\nu} e^{2i \arg \widehat{\psi}_n} \widehat{f}_\nu z^\nu \right| \leq$$

$$\leq \left|\widehat{\psi}_n\right| |z|^n + (1 - |z|^{2n}) \sum_{\nu=n+1}^{2n} \left|\widehat{\psi}_\nu\right|.$$

З цих співвідношень при $|z| \to 1$ випливає нерівність $\mathcal{E}_n(H^\psi_\infty; H_\infty) \leq \left|\widehat{\psi}_n\right|$, яка в поєднанні з (5) доводить (7) і (8).

Покладемо

$$H^\psi_{\infty,n} := \{ f = g * \psi : g \in UH_\infty, g(z) = O(z^n), z \to 0 \}, \ n \in \mathbb{Z}_+,$$

і розглянемо функцію $f = \psi * g$, в якій

$$g(z) = z^n \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}, \quad |\alpha| < 1.$$

Легко переконатися в тому, що $f \in H^{\psi}_{\infty,n}$ і

$$f(z) = -\widehat{\psi}_n \alpha z^n + (1-|\alpha|^2) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \widehat{\psi}_\nu \overline{\alpha}^{\nu-n-1} z^\nu. \tag{9}$$

Згідно з другою нерівністю в (5) і співвідношеннями двоїстості (див., наприклад, [31, с. 25, 81])

$$\mathcal{E}_n(H^{\psi}_{\infty}; H_\infty) \geq E_k(H^{\psi}_{\infty}; H_\infty) = \max_{h \in H^{\psi}_{\infty,k}} \|h\|_{H_\infty} \geq \|f\|_{H_\infty}.$$

Отже, якщо виконується кожна з рівностей (7) і (8), то на підставі останніх співвідношень за лемою Шварца маємо нерівності

$$|f(z)| \leq |z|^n \|f\|_{H_\infty} \leq |z|^n \left|\widehat{\psi}_n\right| \quad \forall\, z \in \mathbb{D},$$

які з урахуванням (9) є рівносильними нерівності

$$\left| -\alpha + \frac{1-|\alpha|^2}{\widehat{\psi}_n z^n} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \widehat{\psi}_\nu \overline{\alpha}^{\nu-n-1} z^\nu \right| \leq 1 \quad [1].$$

Піднісши до квадрата обидві частини нерівності, отримаємо

$$|\alpha|^2 - 2\operatorname{Re}\left(\frac{1-|\alpha|^2}{\widehat{\psi}_n z^n} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \widehat{\psi}_\nu \overline{\alpha}^{\nu-n} z^\nu \right) +$$

$$+ \left| \frac{1-|\alpha|^2}{\widehat{\psi}_n z^n} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \widehat{\psi}_\nu \overline{\alpha}^{\nu-n-1} z^\nu \right|^2 \leq 1.$$

Перенісши $|\alpha|^2$ в праву частину і скоротивши обидві частини нерівності на спільний множник $1-|\alpha|^2$, отримаємо

$$-2\operatorname{Re}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}_{\nu+n}}{\widehat{\psi}_n} \overline{\alpha}^\nu z^\nu \right) + (1-|\alpha|^2) \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}_\nu}{\widehat{\psi}_n} \overline{\alpha}^{\nu-n-1} z^{\nu-n} \right|^2 \leq 1.$$

[1] З цього місця міркування, які проводяться далі в доведенні, запозичено з [1] (див., також, [2, с. 495]).

Якщо тут $|\alpha| \to 1$, то, як наслідок, в силу довільності z отримуємо співвідношення (1).

Наслідок 2. *Нехай ψ — твірне ядро, яке задовольняє умову* (1) *для всіх $k \geq n, n \in \mathbb{Z}_+$. Тоді*

$$E_k(H_p^\psi; H_q) = \mathcal{E}_k(H_p^\psi; H_q) = \left|\widehat{\psi}_k\right|, \ 1 \leq q \leq p \leq \infty, \ \forall \ k \geq n, \qquad (10)$$

і

$$R_k(H_p^\psi; H_q) = \left|\widehat{\psi}_k\right|, \ 1 \leq q \leq 2 \leq p \leq \infty, \ \forall \ k \geq n.$$

Доведення. Якщо $f = g * \psi$, то застосовуючи до тотожності

$$f(\rho z) - U_k(f)(\rho z) =$$

$$= \frac{\widehat{\psi}_k \rho^k}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(ze^{it}) e^{-ikt} \left(2 \operatorname{Re} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}_{\nu+k}}{\widehat{\psi}_k} \rho^\nu e^{i\nu t} - 1 \right) dt,$$

спочатку інтегральну нерівність Мінковського, а потім нерівність Гельдера, при $\rho \to 1-$ отримаємо оцінку $\mathcal{E}_k(H_p^\psi; H_q) \leq \left|\widehat{\psi}_n\right|$, яка в поєднання з (5) й доводить (10).

Аналогічно, застосовуючи спочатку нерівність Гельдера, а потім рівність (10), одержуємо співвідношення

$$\begin{aligned} \|f - S_k(f)\|_{H_q} &\leq \|f - S_k(f)\|_{H_2} \leq \\ &\leq E_k(H_p^\psi; H_2) \leq \\ &\leq E_k(H_p^\psi; H_p) = \left|\widehat{\psi}_k\right|, \end{aligned}$$

які перетворюються в рівності для функції $f(z) = \widehat{\psi}_k z^k$.

Твердження наслідків 1 і 2 в поєднанні із зауваженням 1 охоплюють цілу низку відомих результатів, які у свій час були отримані без явного використання теореми A. Серед цих результатів згадаємо роботи [3—10].

Розглянемо тепер умову (2). За виглядом і суттю її можна пов'язати з такою задачею.

Для даного многочлена $P_n \in \mathscr{P}_n$ знайти голоморфну в $\mathbb{D}$ функцію φ таку, щоб функція $F(z) = P_n(z) + z^{n+1}\varphi(z)$ мала певну властивістю, яку умовно позначимо через $\mathscr{X}$. Якщо така задача має розв'язок, то кажуть, що P_n є *$\mathscr{X}$-продовжуваним многочленом.* У даній роботі під $\mathscr{X}$-властивістю будемо розуміти таке: $2\,\mathrm{Re}\,F(z) \geq 1$, $z \in \mathbb{D}$.

М. Г. Чеботарьов [11] був, мабуть, першим, хто розпочав систематичні дослідження за даною тематикою. Його попередниками на цьому шляху були Х. Каратеодорі, Л. Фейєр [12], Е. Ландау [13], Ф. Ріс [14]. Різноманітні зв'язки задачі про продовжувані многочлени з іншими розділами аналізу, зокрема, з проблемою моментів, оцінками многочленів, продовженням лінійних функціоналів, розкрито в [15—18].

Ми розглянемо умову (2) з такої точки зору. Як виявилося в [3], умова (2) є критерієм виконання нерівності типу Бернштейна для довільного многочлена з $\mathscr{P}_n, n \in \mathbb{Z}_+$, тобто якщо $P_n \in \mathscr{P}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, і $P_n^{\psi}(z) := P_n(z) * \sum_{k=0}^{n} z^k/\widehat{\psi}_k$, то *нерівність*

$$\left\|P_n^{\psi}\right\|_{H_\infty} \leq \frac{1}{\left|\widehat{\psi}_n\right|}\|P_n\|_{H_\infty} \tag{11}$$

має місце для довільного многочлена $P_n \in \mathscr{P}_n$ тоді і тільки тоді, коли ψ задовольняє умову (2) *для даного $k = n$.*

На цей час є велика кількість робіт, присвячених дослідженням многочленів в контексті останньої нерівності та суміжних з нею питань. Про сучасний стан цієї теорії можна дізнатися з монографій [19—21].

Роль нерівності (11) в екстремальних задачах теорії наближень є добре відомою, але не буде зайвим нагадати її ще раз. Співвідношення (11) показує, що куля $\left|\widehat{\psi}_n\right|(UH_\infty \cap \mathscr{P}_n)$ вимірності $n+1$ міститься в H^{ψ}_∞. Тому з огляду на відому теорему Тихомирова [22] про поперечник кулі буде справджуватися імплікація

$$(2) \Longrightarrow \left|\widehat{\psi}_n\right| \leq d_n(H^{\psi}_\infty, H_\infty), \tag{12}$$

де $d_n(H^{\psi}_\infty, H_\infty)$ — поперечник за Колмогоровим класу H^{ψ}_∞ в H_∞ (див. означення в [22]).

Отже, якщо твірне ядро ψ класу H^ψ_∞ задовольняє одночасно умови (1) і (2) при всіх k, починаючи з деякого n, то на підставі наслідку 1 та імплікації (12) будуть справджуватися рівності

$$d_k(H^\psi_\infty, H_\infty) = E_k(H^\psi_\infty; H_\infty) = \mathcal{E}_k(H^\psi_\infty; H_\infty) = \left|\widehat{\psi}_k\right| \ \forall\ k \geq n.$$

Зауважимо, що аналогічні рівності за таких же умов мають місце і для поперечників Бернштейна, Гельфанда та лінійного класів H^ψ_p при $1 \leq p < \infty$ [3, 23].

Історія питання про поперечники класів голоморфних функцій є досить великою і навіть поверхневе її висвітлення призвело б до значного збільшення об'єму цієї статті. Тому тут згадаємо лише монографії [22], [24, 25], в яких можна знайти велику бібліографію.

З огляду на наведені вище факти, пов'язані з умовами (1) і (2), видається важливим *знайти опис множини всіх твірних ядер ψ, для яких при даному $n \in \mathbb{Z}_+$ умови* (1) *і* (2) *виконуються одночасно при всіх $k \geq n$.*

Подальший виклад матеріалу зроблено за такою схемою. У пункті 2, в контексті останнього питання, наведено низку властивостей коефіцієнтів твірних ядер ψ. В пункті 3 наведено одне загальне твердження про наближення функцій класів H^ψ_p частинними сумами їх рядів Тейлора. Зокрема, як наслідок з цього твердження, отримано розв'язок відомої задачі Колмогорова—Нікольського на класі H^ψ_∞ у випадку, коли твірне ядро ψ задовольняє одночасно умови (1) і (2), а модулі його коефіцієнтів утворюють числову послідовність, яка повільно змінюється (спадає). Така задача була розв'язана раніше для тих випадках, коли послідовності $\{\mathrm{Re}\,\widehat{\psi}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ і $\{\mathrm{Im}\,\widehat{\psi}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ є додатними і опуклими [26—29]. Зауважимо, що такі обмеження тягнуть за собою опуклість послідовності $\{|\widehat{\psi}_\nu|\}_{\nu=0}^\infty$, що, як буде показано нижче, взагалі кажучи, не є необхідним для виконання умов (1) і (2).

2. Нехай $n \in \mathbb{Z}_+$, $\mathscr{R}_n$ і $\mathscr{Q}_n$ — множини всіх твірних ядер, для яких відповідно виконуються умови (1) і (2) для всіх $k \geq n$.

Цілком зрозуміло, що

$$\mathscr{R}_0 \subset \mathscr{R}_1 \subset \ldots \subset \mathscr{R}_n \subset \ldots$$

і

$$\mathscr{Q}_0 \subset \mathscr{Q}_1 \subset \ldots \subset \mathscr{Q}_n \subset \ldots .$$

Зауважимо, що в роботі [8] для ядер класу $\mathscr{R}_n$ вжито термін *"допустимі ядра"*.

Розглянемо два приклади, якими проілюструємо співвідношення між класами $\mathscr{R}_n$ і $\mathscr{Q}_n$.

Приклад **1.** Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ і розглянемо функцію

$$\begin{aligned} \psi(z) &= -\frac{1-\alpha z^n}{1-\alpha^{1/n} z} + z^n \frac{z-\alpha}{1-\alpha z} = \\ &= -\sum_{\nu=0}^{n} \alpha^{\nu/n} z^\nu + (1-\alpha^2) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \alpha^{\nu-n-1} z^\nu, \quad 0<\alpha<1. \end{aligned}$$

Легко бачити, що для $z \in (0,1)$

$$\begin{aligned} 1 + 2\operatorname{Re}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}_{n+\nu}}{\widehat{\psi}_n} z^\nu \right) &= 1 - 2\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha z)^\nu = \\ &= \frac{\alpha - (2-\alpha^2) z}{\alpha(1-\alpha z)} < 0 \Leftrightarrow z > \frac{\alpha}{2-\alpha^2}, \end{aligned}$$

а для всіх $z \in \mathbb{D}$ і $c_{\nu,n} = \alpha^{\nu/n}$

$$\begin{aligned} 1 + 2\operatorname{Re}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\widehat{\psi}_n}{\widehat{\psi}_{n-\nu}} z^\nu + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_{\nu,n} z^\nu \right) &= 1 + 2\operatorname{Re}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha^{\nu/n} z^\nu \right) = \\ &= \frac{1-\alpha^{2/n}}{|1-\alpha^{1/n} z|^2} > 0. \end{aligned}$$

Отже, ядро ψ при $k=n$ не задовольняє умову (1), але задовольняє (2).

Покажемо тепер, що існують функції ψ, які задовольняють умову (1) і не задовольняють умову (2). Цей факт легко помітити, виходячи з такого твердження.

Твердження 1. *Нехай $n \in \mathbb{Z}_+$. Якщо твірне ядро $\psi \in \mathscr{R}_n$, то*

$$\left|\widehat{\psi}_n\right| \geq \left|\widehat{\psi}_{n+1}\right| \geq \left|\widehat{\psi}_{n+2}\right| \geq \ldots . \tag{13}$$

Якщо ж $\psi \in \mathscr{Q}_n$, *то*

$$\min_{0\le\nu\le n-1}\left|\widehat{\psi}_\nu\right| \ge \left|\widehat{\psi}_n\right| \ge \left|\widehat{\psi}_{n+1}\right| \ge \dots. \tag{14}$$

Для функції $\psi(z) = 1/(1-\zeta z)$, $\quad \zeta \in \mathbb{T}$, *співвідношення* (13) *і* (14) *перетворюються у рівності.*

Доведення. Якщо $\psi \in \mathscr{R}_n$, то з рівності

$$\frac{\widehat{\psi}_{k+1}}{\widehat{\psi}_k} = \frac{1}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi} e^{-it}\left(1 + 2\operatorname{Re}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\widehat{\psi}_{k+\nu}}{\widehat{\psi}_k}\rho^\nu e^{i\nu t}\right)\right)dt,\ 0<\rho<1,$$

випливає оцінка

$$\left|\frac{\widehat{\psi}_{k+1}}{\widehat{\psi}_k}\right| \le \frac{1}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi}\left|1 + 2\operatorname{Re}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\widehat{\psi}_{k+\nu}}{\widehat{\psi}_k}\rho^\nu e^{i\nu t}\right)\right|dt = \frac{1}{\rho}.$$

Отже, для всіх $k \ge n$ виконується нерівність $|\widehat{\psi}_k| \ge |\widehat{\psi}_{k+1}|$.

Співвідношення для коефіцієнтів функції $f \in \mathscr{Q}_n$ доводяться аналогічно.

***Приклад* 2.** Розглянемо функцію

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^2 z^{n-1}}{\alpha - z} + \frac{z^n}{1-\alpha z} = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha^{|n-\nu|}z^\nu, \quad \alpha \in (0,1).\end{aligned}$$

Очевидно, що ψ є голоморфною в $\mathbb{D}$ функцією,

$$\widehat{\psi}_\nu = \begin{cases}\alpha^{n-\nu}, & \nu = 0,1,\dots,n-1,\\ 1, & \nu = n,\\ \alpha^{\nu-n}, & \nu = n+1, n+2, \dots\end{cases}$$

і

$$\begin{aligned}2\operatorname{Re}\left(\frac{r_k(\psi)(z)}{\widehat{\psi}_k z^k}\right) - 1 &= 2\operatorname{Re}\left(\sum_{\nu=k}^{\infty}\frac{\alpha^{\nu-n}}{\alpha^{k-n}}z^{\nu-k}\right) - 1 = \\ &= \frac{1-\alpha^2}{|1-\alpha z|^2} > 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{D}\ \forall\, k \ge n.\end{aligned}$$

Отже, $\psi \in \mathscr{R}_n$.

З другого боку

$$\min_{0\le\nu\le n-1}\left|\widehat{\psi}_\nu\right| = \alpha^n \le \widehat{\psi}_k \quad \forall\ k,\ n \le k \le 2n-1.$$

Тому згідно з твердженням 1 $\psi \notin \mathscr{Q}_n$.

У наступному твердженні наведено достатню умову, за якої твірне ядро ψ належитиме одночасно класам $\mathscr{R}_n$ і $\mathscr{Q}_n$.

Твердження 2. *Нехай $n \in \mathbb{Z}_+$ і ψ — твірне ядро. Якщо $\widehat{\psi}_k > 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$, $\widehat{\psi}_k \downarrow 0$, а послідовності $\{\widehat{\psi}_k\}_{k=n}^{\infty}$ і $\{1/\widehat{\psi}_k\}_{k=0}^{\infty}$ — опуклі, то $\psi \in \mathscr{R}_n \cap \mathscr{Q}_n$.*

Доведення. Включення $\psi \in \mathscr{R}_n$ — це наслідок добре відомого твердження (див., наприклад, [30, с. 100]), яке стверджує, що тригонометричні ряди

$$\frac{\widehat{\psi}_k}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\widehat{\psi}_{\nu+k}\cos\nu t, \quad k = n+1,\ldots,$$

збігаються майже скрізь, крім, можливо, точок $t = 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$, до невід'ємних сумовних функцій, які позначаємо через Ψ_k та є їхніми рядами Фур'є. Справді, за цим твердженням, теоремою єдиності коефіцієнтів Тейлора голоморфної функції та за допомогою формули Коші маємо рівність

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\widehat{\psi}_{\nu+k}}{\widehat{\psi}_k}z^\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi\widehat{\psi}_k}\int_0^{2\pi}\Psi_k(x)\frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}dx \quad \forall\ z \in \mathbb{D}.$$

Звідси, внаслідок того, що $\Psi_k(x) \ge 0$, і випливає потрібне співвідношення

$$2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\widehat{\psi}_{\nu+k}}{\widehat{\psi}_k}z^\nu\right) - 1 =$$

$$= \frac{1}{\pi\widehat{\psi}_k}\int_0^{2\pi}\Psi_k(x)\frac{1-|z|^2}{|e^{ix}-z|^2}dx \ge 0 \quad \forall\ z \in \mathbb{D}. \tag{15}$$

Покажемо тепер, що $\psi \in \mathscr{Q}_n$. Для цього покладемо $\lambda_\nu := \widehat{\psi}_k/\widehat{\psi}_{k-\nu},\ \nu = 0,1,2,\ldots,k,\ k \ge n$. Якщо $n = 0,1$, то при

$k = n$ існування послідовностей $\{c_{\nu,k}\}_{\nu=k+1}^{\infty}$, для яких виконується співвідношення (2) є очевидним фактом. Тому далі вважаємо, що $k \geq n \geq 2$.

За умовою маємо співвідношення

$$\Delta\lambda_\nu := \lambda_\nu - \lambda_{\nu+1} > 0$$

$$\Delta^2\lambda_\nu := \lambda_\nu - 2\lambda_{\nu+1} + \lambda_{\nu+2} = \widehat{\psi}_k\left(\frac{1}{\widehat{\psi}_{k-\nu}} - \frac{2}{\widehat{\psi}_{k-\nu-1}} + \frac{1}{\widehat{\psi}_{k-\nu-2}}\right) =$$

$$= \widehat{\psi}_k\Delta^2\left(\frac{1}{\widehat{\psi}_{k-\nu-2}}\right) > 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, k-2,\ k \geq 2, \qquad (16)$$

які показують, що набір чисел $\{\lambda_0, \ldots, \lambda_k\}$ є фрагментом певної опуклої спадної послідовності.

Один з можливих варіантів відновлення такої послідовності можна здійснити в такий спосіб. В декартовій координатній площині $X0Y$ через точки з координатами $(k-1, \lambda_{k-1})$ і (k, λ_k) проведемо пряму. Ця пряма буде графіком лінійної функції $\varphi(x) := -\Delta\lambda_{k-1}(x - -k+1) + \lambda_{k-1}$. Покладемо

$$c_{\nu,k} = \begin{cases} \varphi(\nu), & k+1 \leq \nu \leq N, \\ 0, & \nu > N, \end{cases} \qquad N := N(k) := \left[\frac{\lambda_{k-1}}{\Delta\lambda_{k-1}}\right] + k - 1.$$

Оскільки мають місце співвідношення (16), то на основі простих геометричних міркувань приходимо до висновку, що послідовність $\{1, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, c_{k+1,k}, \ldots, c_{N,k}, 0, 0, \ldots\}$ є опуклою і, очевидно, монотонно спадною до нуля.

Отже, тригонометричний поліном

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu \cos \nu t + \sum_{\nu=k+1}^{N} c_{\nu,k} \cos kt$$

є невід'ємним для всіх $t \in [0, 2\pi]$.

Звідси, аналогічно до (15), випливає співвідношення

$$1 + 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\widehat{\psi}_k}{\widehat{\psi}_{k-\nu}} z^\nu + \sum_{\nu=k+1}^{N} c_{\nu,k} z^\nu\right) \geq 0 \quad \forall\ z \in \mathbb{D},\ k \geq 2,$$

яке й доводить включення $\psi \in \mathscr{Q}_0$, а тим більше — $\psi \in \mathscr{Q}_n$.

Для даної функції f, голоморфної в $\mathbb{D}$, означимо функцію $z^k f$ за допомогою правила $(z^k f)(\zeta) = \zeta^k f(\zeta),\ \zeta \in \mathbb{D}$.

Теорема 1. *Нехай $n \in \mathbb{Z}_+$ і ψ — твірне ядро. Тоді*

$$\psi \in \mathscr{R}_n \Leftrightarrow \left\| z^k P_m * \psi \right\|_{H_\infty} \leq \left| \widehat{\psi}_k \right| \left\| P_m \right\|_{H_\infty} \tag{17}$$

$$\forall\ P_m \in \mathscr{P}_m\ \forall\ k \geq n\ \forall\ m \in \mathbb{Z}_+.$$

Доведення. Імплікація " $\Rightarrow$ " випливає з рівності

$$(z^k P_m * \psi)(\rho\zeta) = \sum_{\nu=0}^{m} \psi_{k+\nu} a_\nu \rho^{k+\nu} \zeta^{k+\nu} =$$

$$= \frac{\widehat{\psi}_k \zeta^k}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_m\left(\zeta e^{-it}\right) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}_{k+\nu}}{\widehat{\psi}_k} \rho^\nu e^{i\nu t} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\overline{\widehat{\psi}_{k+\nu}}}{\overline{\widehat{\psi}_k}} \rho^\nu e^{-i\nu t} \right) dt,$$

в якій

$$P_m(w) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu w^\nu.$$

Ядро під знаком інтеграла внаслідок умови $\psi \in \mathscr{R}_n$ є невід'ємним. Тому, оцінюючи інтеграл за інтегральною нерівністю Мінковського, отримуємо співвідношення (17).

Для доведення оберненої імплікації " $\Leftarrow$ " покладемо

$$H^\psi_{\infty,k} := \left\{ f = z^k g * \psi : g \in UH_\infty \right\},\ k \in \mathbb{Z}_+,$$

і для голоморфної в $\mathbb{D}$ функції g —

$$g_\rho(z) := g(\rho z).$$

Нехай $f \in H^\psi_{\infty,k},\ k \in \mathbb{Z}_+$, і $f = z^k g * \psi$. Для довільного $\varepsilon > 0$ існує многочлен P_m деякого степеня m такий, що

$$\left\| f - z^k P_m \right\|_{H_\infty} = \left\| g - P_m \right\|_{H_\infty} < \varepsilon.$$

Тому, для будь-якого $\rho \in (0,1)$

$$\begin{aligned} \|f_\rho\|_{H_\infty} &= \|z^k g * \psi_\rho\|_{H_\infty} \le \\ &\le \|z^k(g-P_m) * \psi_\rho\|_{H_\infty} + \|z^k P_m * \psi_\rho\|_{H_\infty} \le \\ &\le \varepsilon\|\psi_\rho\|_{H_1} + \left|\widehat{\psi}_k\right| \|f\|_{H_\infty} + \left|\widehat{\psi}_k\right| \|f - z^k P_m\|_{H_\infty} \le \\ &\le \varepsilon\left(\|\psi_\rho\|_{H_1} + \left|\widehat{\psi}_k\right|\right) + \left|\widehat{\psi}_k\right| . \end{aligned}$$

Через довільність ε і ρ останні співвідношення доводять, що

$$\|f\|_{H_\infty} \le \left|\widehat{\psi}_k\right| \quad \forall\ f \in H^\psi_{\infty,k}\ \forall\ k \ge n\ .$$

Згідно зі співвідношеннями двоїстості (див., наприклад, [31, с. 25, 81])

$$E_k(H^\psi_\infty; H_\infty) = \max_{f \in H^\psi_{\infty,k}} \|f\|_{H_\infty} = \left|\widehat{\psi}_k\right|\ \forall\ k \ge n\ .$$

Отже, за наслідком 1 ядро ψ задовольняє умову (1) для всіх $k \ge n$, тобто $\psi \in \mathscr{R}_n$.

Теорема 2. *Нехай $n \in \mathbb{Z}_+$ і ψ — твірне ядро. Тоді*

$$\psi \in \mathscr{Q}_n \Leftrightarrow \|P_k * \psi\|_{H_\infty} \ge \left|\widehat{\psi}_k\right| \|P_k\|_{H_\infty} \quad \forall\ P_k \in \mathscr{P}_k\ \forall\ k \ge n. \tag{18}$$

Доведення. Візьмемо довільний многочлен $P_n(z) = \sum_{\nu=0}^k c_\nu z^\nu$ і покладемо $a_\nu = c_\nu/\psi_\nu$. Тоді нерівність в (18) перетворюється в нерівність (11), для виконання якої згідно з [3] необхідно й достатньо, щоб $\psi \in \mathscr{Q}_n$.

Зауваження 2. Включення $\psi \in \mathscr{Q}_n$ і $\psi \in \mathscr{R}_n$ забезпечують виконання нерівностей в правих частинах (17) і (18) відповідно із заміною H_∞ на H_p, де $1 \le p < \infty$.

Зауваження 3. Для будь-якого твірного ядра ψ і будь-якого многочлена $P_k(z) = \sum_{\nu=0}^k a_\nu z^\nu$ з рівності

$$\widehat{\psi}_k a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}(P_k * \psi)(e^{it})dt.$$

випливає, що $\left|\widehat{\psi}_k\right| |a_k| \le \|P_k * \psi\|_{H_\infty}$.

Цікаво відмітити ще й такий факт. Якщо ψ — довільне ядро з додатними коефіцієнтами і $P_k(z) = \sum_{\nu=0}^{k} z^\nu$, то згідно з нерівністю Фейєра [32]

$$\|P_k * \psi\|_{H_1} \ge \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \mathrm{Re} \left(\sum_{\nu=0}^{k} \widehat{\psi}_\nu e^{i\nu t} \right) \right| dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{k} \widehat{\psi}_\nu \cos \nu t \right| dt \ge L_k \min_{0 \le \nu \le k} \psi_\nu^*,$$

де

$$L_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin(k+1/2)t}{\sin t/2} \right| dt$$

і $\psi_0^* = 2\widehat{\psi}_0$, $\psi_\nu^* = \widehat{\psi}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$.

Наслідок 3. *Нехай $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le p \le \infty$ і ψ — твірне ядро. Тоді*

$$\psi \in \mathscr{R}_n \cap \mathscr{Q}_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\| z^k P_k * \psi \right\|_{H_p} \le \left| \widehat{\psi}_k \right| \|P_k\|_{H_p} \le \|P_k * \psi\|_{H_p} \ \ \forall\ P_k \in \mathscr{P}_k \ \forall\ k \ge n.$$

Рівності досягаються для ядра $\psi(z) = 1/(1 - \zeta z)$, $\zeta \in \mathbb{T}$.

Нехай ψ — функція, голоморфна в $\mathbb{D}$ і g — функція, голоморфна в $\{z : |z| > 1\}$. Покладемо

$$r_k(\psi)(z) := \psi(z) - S_k(\psi)(z).$$

і

$$\|\psi + g\|_1^* := \lim_{\rho \to 1-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \psi(\rho e^{it}) + g\left(\frac{e^{it}}{\rho}\right) \right| dt.$$

Клас $\mathscr{R}_n$ можна описати ще й так.

Теорема 3. *Нехай $n \in \mathbb{Z}_+$, ψ — твірне ядро і $\widehat{\psi}_k \ne 0 \ \forall\ k \ge n$. Наступні твердження рівносильні:*

1) $\psi \in \mathscr{R}_n$;

2) $\min\limits_{g} \|\psi + g\|_1^* = \left|\widehat{\psi}_k\right| \quad \forall\ k \geq n$, *де точна нижня межа береться по всіх функціях g, які є мероморфними в $\widehat{\mathbb{C}}$, а їх правильні частини належать $\mathscr{P}_{k-1}$;*[1]

3) $|r_n(\psi)(z)| \geq |r_{n+1}(\psi)(z)| \geq |r_{n+2}(\psi)(z)| \geq \ldots \quad \forall\ z \in \mathbb{D}.$

Доведення. Рівносильність 1) $\Leftrightarrow$ 2) доведена в [3], а рівносильність 1) $\Leftrightarrow$ 3) — це перефразування теореми A з урахуванням такого очевидного твердження:

$$2\operatorname{Re}\zeta \geq 1 \Longleftrightarrow |\zeta| \geq |1-\zeta| \quad \forall\ \zeta \in \mathbb{C}.$$

Наслідок 4. *Якщо $\psi \in \mathscr{R}_n \cap H_1,\ n \in \mathbb{Z}_+$, то*

$$\lim_{k\to\infty} \|r_k(\psi)\|_{H_1} = 0. \tag{19}$$

Справді, згідно з пунктом 3) твердження

$$M_1(r_n(\psi))(\rho) \geq M_1(r_{n+1}(\psi))(\rho) \geq M_1(r_{n+2}(\psi))(\rho) \geq \ldots\ \forall\ \rho \in [0,1),$$

де

$$M_1(\psi)(\rho) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\psi(\rho e^{it})|dt.$$

Звідси внаслідок того, що $\psi \in H_1$ випливають співвідношення

$$\|r_n(\psi)\|_{H_1} \geq \|r_{n+1}(\psi)\|_{H_1} \geq \|r_{n+2}(\psi)\|_{H_1} \geq \ldots. \tag{20}$$

Відомо (див., наприклад, [33, с. 96; 34]), що для будь-якої функції $\psi \in H_1$

$$\varliminf_{k\to\infty} \|r_k(\psi)\|_{H_1} = 0.$$

Тому співвідношення (20) дають рівності

$$\varlimsup_{k\to\infty} \|r_k(\psi)\|_{H_1} = \varliminf_{k\to\infty} \|r_k(\psi)\|_{H_1} = 0.$$

Повернемося до твердження 1 і зазначимо, що його в певному розумінні можна обернути. А саме, правильним є

[1]При $k = 0$ вважаємо, що g — функція, голоморфна в $\{z : |z| > 1\}$.

Твердження 3. *Нехай $n \in \mathbb{Z}_+$ і ψ — твірне ядро. Тоді*

$$(14) \Rightarrow \psi_\rho \in \mathscr{R}_n \cap \mathscr{Q}_n \quad \forall\ \rho \in (0, 1/3].$$

Для будь-яких $n \in \mathbb{Z}_+$ і $\rho \in (1/3, 1)$ існує твірне ядро ψ, коефіцієнти Тейлора якого задовольняють умову (13), але $\psi_\rho \notin \mathscr{R}_n$.

Доведення. Зафіксуємо $n \in \mathbb{Z}_+$ і покладемо $g(z) = \psi_\rho(z)$. Зрозуміло, що $\widehat{g}_k = \widehat{(\psi_\rho)}_k = \rho^k \widehat{\psi}_k$.

Оскільки для всіх $k \geq n$

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{\widehat{g}_{k+\nu}}{\widehat{g}_k} \right| |z|^\nu &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{\widehat{\psi}_{k+\nu}}{\widehat{\psi}_k} \right| \rho^\nu |z|^\nu \leq \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \rho^\nu |z|^\nu = \frac{\rho|z|}{1-\rho|z|},\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}1 + 2\operatorname{Re}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\widehat{g}_{k+\nu}}{\widehat{g}_k} z^\nu \right) &\geq 1 - 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{\widehat{g}_{k+\nu}}{\widehat{g}_k} \right| |z|^\nu \geq \\ &\geq 1 - \frac{2\rho|z|}{1-\rho|z|} \geq 0 \Leftrightarrow \rho|z| \leq \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Отже, якщо $0 \leq \rho \leq 1/3$, то остання нерівність має місце для всіх $z \in \mathbb{D}$.

Покажемо тепер, що $\psi_\rho \in \mathscr{Q}_n$. Для цього покладемо $c_{k,\nu} = \rho^\nu$. Тоді

$$\sum_{\nu=1}^{k} \left| \frac{\widehat{g}_k}{\widehat{g}_{k-\nu}} \right| |z|^\nu + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} c_{k,\nu} |z|^\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{k} \left| \frac{\widehat{\psi}_k}{\widehat{\psi}_{k-\nu}} \right| \rho^\nu |z|^\nu + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \rho^\nu |z|^\nu \leq \frac{\rho|z|}{1-\rho|z|}.$$

Аналогічно до попереднього переконуємося в тому, що для будь-якого $k \geq n$

$$1 + 2\operatorname{Re}\left(\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\widehat{g}_k}{\widehat{g}_{k-\nu}} z^\nu + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \rho^\nu z^\nu \right) \geq 0 \Leftrightarrow \rho|z| \leq \frac{1}{3}.$$

Для доведення другої частини твердження зафіксуємо $\rho \in (1/3, 1)$ і розглянемо функцію

$$\psi(z) := P_{n-1}(z) - \frac{\alpha^n z^n}{1 - \alpha z},$$

де α — число з проміжку $(0, 1)$ і $P_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}$ — довільний алгебраїчний многочлен.

Очевидно, що функція ψ є голоморфною в $\mathbb{D}$,

$$r_k(\psi)(z) = -\sum_{\nu=k}^{\infty} \alpha^\nu z^\nu \quad \forall\, z \in \mathbb{D},\ k \geq n,$$

$\widehat{\psi}_\nu = -\alpha^\nu$ і $|\widehat{\psi}_\nu| \geq |\widehat{\psi}_{\nu+1}| > 0, \quad \nu \geq n$.

Але, якщо $1/(3\rho) < \alpha < 1$, то для будь-якого $\zeta \in (1/(3\alpha\rho), 1)$

$$\begin{aligned} 1 + 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}_{k+\nu}}{\widehat{\psi}_k} \rho^\nu \zeta^\nu\right) &= 1 - 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha^\nu \rho^\nu \zeta^\nu = \\ &= \frac{1 - 3\alpha\rho\zeta}{1 - \alpha\rho\zeta} < 0 \quad \forall\, k \geq n. \end{aligned}$$

Твердження 4. *Нехай ψ — твірне ядро і $n \in \mathbb{Z}_+$. Тоді:*

1) $\psi \in \mathscr{R}_n \cap H_1 \Rightarrow \widehat{\psi}_k = o\left(\dfrac{1}{\ln k}\right),\ k \to \infty;$

2) $\psi \in \mathscr{Q}_n \cap H_1 \Rightarrow \widehat{\psi}_k = O\left(\dfrac{1}{\ln k}\right),\ k \to \infty.$

Доведення. 1). Застосувавши до функції $\varphi(z) := z^{-k} r_k(\psi)(z)$, $k \geq n$, нерівність Гарді (див., наприклад, [30, с. 545]) та співвідношення (13), одержимо низку нерівностей

$$\pi \|r_k(\psi)\|_{H_1} = \pi \|\varphi\|_{H_1} \geq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left|\widehat{\psi}_{\nu+k}\right|}{\nu+1} \geq \sum_{\nu=0}^{k} \frac{\left|\widehat{\psi}_{\nu+k}\right|}{\nu+1} \geq$$

$$\geq \left|\widehat{\psi}_{2k}\right| \sum_{\nu=0}^{k} \frac{1}{\nu+1} \geq \left|\widehat{\psi}_{2k}\right| \ln(k+2).\ [1]$$

[1] Як показав Г. М. Голузін [25] (див. також [36]) такі нерівності залишаються чинними, якщо у знаменику замість $\nu + 1$ взяти значення $\nu + 1/2$.

Звідси випливає співвідношення

$$\pi \varliminf_{k\to\infty} \|r_k(\psi)\|_{H_1} \ge \varliminf_{k\to\infty} \left|\widehat{\psi}_{2k}\right| \ln(k+2),$$

яке в поєднанні з (19) й доводить імплікацію 1).

2). Покладемо

$$P_k(z) = \sum_{\nu=0}^{k} \left(1 - \frac{\nu}{k+1}\right) z^\nu.$$

Тоді

$$\sigma_k(\psi)(z) := (P_k * \psi)(z) = \sum_{\nu=0}^{k} \left(1 - \frac{\nu}{k+1}\right) \widehat{\psi}_\nu z^\nu$$

— це середні Фейєра функції ψ.

Оскільки $\sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \|\sigma_k(\psi)\|_{H_1} \le \|\psi\|_{H_1}$, то згідно з наслідком 2 і нерівністю Гарді

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{H_1} \ge \|\sigma_k(\psi)\|_{H_1} \quad &\ge \quad \left|\widehat{\psi}_k\right| \|P_k\|_{H_1} \ge \\ &\ge \quad \frac{1}{\pi}\left|\widehat{\psi}_k\right| \sum_{\nu=0}^{k} \left(1 - \frac{\nu}{k+1}\right) \frac{1}{\nu+1} \ge \\ &\ge \quad \frac{1}{\pi}\left|\widehat{\psi}_k\right| (\ln(k+2) - 1) \quad \forall\, k \ge n. \end{aligned}$$

3. Метою цього пункту є ілюстрація можливостей методу, що ґрунтується на теоремі A, із залученням властивостей твірних ядер, встановлених у попередньому пункті, при дослідженнях швидкостей збіжності рядів Тейлора голоморфних функцій з класів H_p^ψ. Ми не стільки прагнемо розкрити це питання в повній мірі, як намітити деякі нові підходи до досліджень у даному напрямку.

Покладемо

$$G_0(\psi)_{p,q} := 0, \ G_k(\psi)_{p,q} := \sup_{g\in UH_p} \left\| \sum_{\nu=0}^{k-1} \overline{\widehat{\psi}_{2k-\nu}} \widehat{g}_\nu z^\nu \right\|_{H_q}, \ k \in \mathbb{N},$$

і
$$G_{0,p,q} := 0,\ G_{k,p,q} := \sup_{g\in UH_p} \|S_k(g)\|_{H_q}.$$

Припустимо, що $\psi \in \mathscr{R}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Для даної функції $f \in H_p^{\psi}$, $f = g * \psi$, візьмемо многочлен $U_k(f), k \geq n$, який будується так, як про це сказано в зауваженні 1. Легко бачити, що

$$U_k(f)(z) = S_k(f)(z) - e^{2i\arg\widehat{\psi}_k} \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{\overline{\widehat{\psi}_{2k-\nu}}}{\widehat{\psi}_\nu} \widehat{f}_\nu z^\nu.$$

Отже, залишок ряду Тейлора можна зобразити у вигляді

$$r_k(f)(z) = f(z) - U_k(f)(z) - e^{2i\arg\widehat{\psi}_k} \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{\overline{\widehat{\psi}_{2k-\nu}}}{\widehat{\psi}_\nu} \widehat{f}_\nu z^\nu, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Звідси за наслідком 2 з урахуванням того, що $\widehat{f}_k/\widehat{\psi}_k = \widehat{g}_k$ випливає теорема.

Теорема 4. *Нехай $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Якщо $\psi \in \mathscr{R}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то*

$$\left| G_k(\psi)_{p,q} - \left|\widehat{\psi}_k\right| \right| \leq R_k(H_p^{\psi}; H_q) \leq G_k(\psi)_{p,q} + \left|\widehat{\psi}_k\right| \ \ \forall\ k \geq n. \qquad (21)$$

Згідно з цим твердженням для того, щоб оцінити величини $R_k(H_p^{\psi}; H_q)$ досить знайти оцінки величин $G_k(\psi)_{p,q}$. Розглянемо деякі випадки.

Твердження 5. *Нехай $1 \leq q, p \leq \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тоді:*

1) $\psi \in \mathscr{R}_n \Rightarrow G_k(\psi)_{p,q} \leq \left|\widehat{\psi}_{k+1}\right| G_{k,p,q} \quad \forall\ k \geq n$;

2) $\psi \in \mathscr{Q}_n \Rightarrow G_k(\psi)_{p,q} \geq \left|\widehat{\psi}_{2k}\right| G_{k,p,q} \quad \forall\ k \geq n$.

Функція $\psi(z) = 1/(1-\zeta z)$, $\quad \zeta \in \mathbb{T}$, належить $\mathscr{R}_n \cap \mathscr{Q}_n$ і для неї співвідношення в імплікаціях 1) і 2) перетворюються в рівності.

Доведення. 1). Покладемо $\mu_\nu = 1/\overline{\widehat{\psi}_{2k-\nu}}$, $\nu = 0, 1, \ldots, k-1$. Тоді внаслідок того, що ψ задовольняє умову (1), отримаємо

$$2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{\mu_{k-1}}{\mu_{k-\nu-1}} z^\nu + \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\overline{\widehat{\psi}_{k+\nu+1}}}{\overline{\widehat{\psi}_{k+1}}} z^\nu \right) \geq 1 \quad \forall\ z \in \mathbb{D}\ \forall\ k \geq n.$$

Отже, ядро $\mu(z) := \sum_{\nu=0}^{k-1}\mu_\nu z^\nu + O(z^k)$ задовольняє умову (2), а тому згідно з (11) для будь-якої функції $g \in UH_p$ мають місце співвідношення

$$\left\|\sum_{\nu=0}^{k-1}\overline{\widehat{\psi}_{2k-\nu}}\widehat{g}_\nu z^\nu\right\|_{H_q} = \left\|S_k^\mu(g)\right\|_{H_q} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\mu_{k-1}|}\left\|S_k(g)\right\|_{H_q} = \left|\widehat{\psi}_{k+1}\right|\left\|S_k(g)\right\|_{H_q},$$

які перетворюються в рівності у випадку, коли $\widehat{\psi}_\nu = \zeta^\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots,\ \zeta \in \mathbb{T}$.

2). Для даної функції $g \in UH_p$ покладемо $P_{2k}(z) = \sum_{\nu=k+1}^{2k}\overline{\widehat{g}_{2k-\nu}}z^\nu = z^{2k}\overline{S_k(g)(1/\overline{z})}$. Тоді згідно з (18)

$$\left\|\sum_{\nu=0}^{k-1}\overline{\widehat{\psi}_{2k-\nu}}\widehat{g}_\nu z^\nu\right\|_{H_q} = \left\|P_{2k} * \psi\right\|_{H_q} \geq$$

$$\geq \left|\widehat{\psi}_{2k}\right|\left\|P_{2k}\right\|_{H_q} = \left|\widehat{\psi}_{2k}\right|\left\|S_k(g)\right\|_{H_q}.$$

Останні співвідношення перетворюються в рівності, якщо $\widehat{\psi}_\nu = \zeta^\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots,\ \zeta \in \mathbb{T}$.

Зауважимо, що за умов теореми 4, застосувавши до функції $f \in H_p^\psi$, $f = g * \psi$, спочатку нерівність Лебега—Ландау:

$$\left\|f - S_k(f)\right\|_{H_q} \leq (G_{k,p,q} + 1)E_k(f)_{H_q},$$

де

$$E_k(f)_{H_q} := \inf_{P \in \mathscr{P}_{k-1}}\left\|f - P\right\|_{H_q},$$

а потім оцінивши $E_n(f)_{H_q}$ згідно з наслідком 2, отримаємо нерівність

$$\mathcal{E}_k(H_p^\psi, H_q) \leq \left|\widehat{\psi}_k\right|(G_{k,p,q} + 1) \quad \forall\ k \geq n. \tag{22}$$

За цих же умов з другої нерівності в (21), внаслідок імплікації 1) твердження 5, випливає точніша оцінка:

$$\mathcal{E}_k(H_p^\psi, H_q) \leq \left|\widehat{\psi}_{k+1}\right|G_{k,p,q} + \left|\widehat{\psi}_k\right| \quad \forall\ k \geq n.$$

Кажуть [37, гл. 10], що для величини $R_k(H_p^\psi; H_p)$ розв'язано задачу Колмогорова—Нікольського, якщо знайдено таку функцію φ натурального аргументу, що

$$R_k(H_p^\psi; H_p) = \varphi(k) + o(\varphi(k)), \quad k \to \infty.$$

***Наслідок* 5.** *Нехай $p = 1, \infty$. Якщо $\psi \in \mathscr{R}_n \cap \mathscr{Q}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то*

$$R_k(H_p^\psi; H_p) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\left|\widehat{\psi}_k\right| \ln n + O\Big(\left|\widehat{\psi}_k\right|\Big), & \frac{|\widehat{\psi}_{2k}|}{|\widehat{\psi}_k|} \to 1, \ k \to \infty, \\ \left|\widehat{\psi}_k\right| + O\left(\left|\widehat{\psi}_{k+1}\right| \ln n\right), & \frac{|\widehat{\psi}_{k+1}| \ln k}{|\widehat{\psi}_k|} \to 0, \ k \to \infty. \end{cases}$$

Справді, згідно з твердженням 5

$$\left|\widehat{\psi}_{2k}\right| G_{k,p,q} \le G_k(\psi)_{p,q} \le \left|\widehat{\psi}_{k+1}\right| G_{k,p,q}$$

і (див., наприклад, [38, с. 178; 27])

$$G_{k,1,1} = G_{k,\infty,\infty} = \frac{1}{\pi}\ln k + O(1), \quad k \to \infty. \quad ^1 \tag{23}$$

До того ж, внаслідок твердження 1

$$1 \ge \frac{\left|\widehat{\psi}_{k+1}\right|}{\left|\widehat{\psi}_k\right|} \ge \frac{\left|\widehat{\psi}_{2k}\right|}{\left|\widehat{\psi}_k\right|} \to 1, \quad k \to \infty, \quad ^2$$

у першому випадку, і $\left|\widehat{\psi}_{2k}\right| \ln k \le \left|\widehat{\psi}_{k+1}\right| \ln k = o\left(\left|\widehat{\psi}_k\right|\right), \quad k \to \infty$ — у другому.

Зазначимо, що у випадку, коли $q = p = \infty$, знаходження величини $G_k(\psi)_{p,q}$ складає зміст відомої екстремальної задачі теорії голоморфних функцій (див., наприклад, [2, с. 491]) та двоїстої до неї

[1] Усі рівності тут розуміються як асимптотичні.

[2] Послідовність додатних чисел $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ таких, що $a_k \to 0$, $k \to \infty$, і $a_{2k}/a_k \to 1$, $k \to \infty$, називається послідовністю, що повільно спадає [39, §2] (див. також [40]).

задачі Ф. Ріса [14]. Так, згідно з [14] (див. також [2]) для довільного ядра ψ

$$G_k(\psi)_{\infty,\infty} = \|P^*_{2(k-1)}\|_{H_1}, \tag{24}$$

де $P^*_{2(k-1)}$ — многочлен степеня $2(k-1)$ вигляду

$$P^*_{2(k-1)}(z) = \left(\sum_{j=0}^{\nu} \alpha_j z^j\right)^2 \left(\sum_{j=0}^{k-\nu-1} \beta_j z^j\right) \left(\sum_{j=0}^{k-\nu-1} \overline{\beta_j} z^{k-\nu-1-j}\right),$$

$$\nu \le k-1, \quad \sum_{j=0}^{\nu} \alpha_j z^j \ne 0 \ \forall\ z \in \mathbb{D},$$

який визначається однозначно за числами $\overline{\widehat{\psi}_{k+1}}, \overline{\widehat{\psi}_{k+2}}, \ldots, \overline{\widehat{\psi}_{2k}}$. Причому $P^*_{2(k-1)}(z) = \sum_{j=0}^{k-1} \overline{\widehat{\psi}_{k+1+j}} z^j + O(z^k)$ і $\|P^*_{2(k-1)}\|_{H_1} = \inf \|g\|_{H_1}$, де точна нижня межа береться за всіма функціями g, які є голоморфними в $\mathbb{D}$ і для яких $\widehat{g}_j = \overline{\widehat{\psi}_{k+1+j}}$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$.

З рівності (24) на підставі сказаного та нерівності Гарді (див. виноску на с. 253) випливає, зокрема, таке твердження.

Твердження 6. *Нехай ψ — твірне ядро. Тоді для будь-якого $k \in \mathbb{N}$*

$$G_k(\psi)_{\infty,\infty} \ge \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=k+1}^{2k} \frac{\left|\widehat{\psi}_\nu\right|}{\nu - k - 1/2}.$$

В загальному випадку спроби залучення результату Ф. Ріса до обчислення точного значення величини $G_k(\psi)_{\infty,\infty}$ стикається з певними труднощами, пов'язаними зі знаходженням коефіцієнтів α_j і β_j у виразі многочлена $P^*_{2(k-1)}$. Але в окремих деяких випадках ці коефіцієнти вдається знайти досить просто (див., наприклад, [38, с. 176—178]).

Розглянемо наступний приклад. Нехай $\widehat{\psi}_\nu = \rho^\nu$, $0 < \rho \le 1$, тобто $\psi(z) = 1/(1-\rho z)$. Тоді, повторюючи майже дослівно доведення теореми Е. Ландау [13] (див. також [38, с. 178]) про норми частинних сум ряду Тейлора, знаходимо точне значення:

$$\begin{aligned} G_k(\psi)_{\infty,\infty} &= \sup_{g\in UH_\infty} \left\| \sum_{\nu=0}^{k-1} \rho^{2k-\nu} \widehat{g}_\nu z^\nu \right\|_{H_\infty} = \\ &= \rho^{2k} \sup_{g\in UH_\infty} \left| S_k(g)\left(\frac{1}{\rho}\right)\right| = \\ &= \rho^{k+1} \sum_{\nu=0}^{k-1} \left(\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}\right)^2 \rho^{2\nu}. \end{aligned} \qquad (25)$$

При цьому многочлен $P^*_{2(k-1)}$ в (24) матиме вигляд

$$P^*_{2(k-1)}(z) = \rho^{k+1} \left(\sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} \rho^\nu z^\nu \right)^2.$$

Безпосередньо з теореми 4 та рівності (25) випливає

Наслідок 6. *Нехай* $\psi(z) = 1/(1-\rho z)$, $0 < \rho \le 1$, *і* $H^\rho_\infty := H^\psi_\infty$. *Тоді для будь-якого* $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} R_k(H^\rho_\infty; H_\infty) &= \sup_{f\in UH_\infty} \|f_\rho - S_k(f_\rho)\|_{H_\infty} = \\ &= \rho^{k+1} \sum_{\nu=0}^{k-1} \left(\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}\right)^2 \rho^{2\nu} + \varepsilon_{k,\rho}\rho^k, \end{aligned} \qquad (26)$$

де $|\varepsilon_{k,\rho}| \le 1$.

Нам відомо тільки про два випадки, коли величину $R_k(H^\rho_\infty; H_\infty)$ підраховано точно (див. [41, 42]):

$$R_k(H^\rho_\infty; H_\infty) = \begin{cases} \dfrac{2\rho}{1+\sqrt{1-\rho^2}}, & k = 1, \\[2ex] \dfrac{2\rho^2}{1+\sqrt{1-\rho^2}} + \dfrac{\rho^6}{4(1+\sqrt{1-\rho^2})^4}, & k = 2. \end{cases}$$

Зіставлення цих рівностей з (26) дає таку оцінку: $0 < \varepsilon_{k,\rho} \le 1$, $k = 1, 2$, $\rho \in (0, 1)$.

У зв'язку з цим показово відмітити, що

$$\sum_{\nu=0}^{k-1}\left(\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}\right)^2\rho^{2\nu} <$$

$$< \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}\right)^2\rho^{2\nu} = \frac{2}{\pi}\mathbf{K}(\rho) \quad \forall\, \rho\in(0,1),$$

і

$$|f(\rho)-S_k(f)(\rho)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(e^{it})\frac{\rho^k e^{-ikt}}{1-\rho e^{-it}}dt\right| \le \quad ^{1}$$

$$\le \rho^k\frac{2}{\pi}\mathbf{K}(\rho) \quad \forall\, f\in UH_\infty,\ \forall\, \rho\in(0,1),$$

де

$$\mathbf{K}(\rho) = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-\rho^2\sin^2 t}} = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{|1-\rho e^{it}|}$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду.

Тому

$$\lim_{k\to\infty}\rho^{-k}R_k(H_\infty^\rho; H_\infty) = \frac{2}{\pi}\mathbf{K}(\rho)\rho+\theta_\rho \quad \forall\, \rho\in(0,1), \tag{27}$$

де $\theta_\rho := \lim_{k\to\infty}\varepsilon_{k,\rho}$ і

$$|\theta_\rho| \le \frac{2}{\pi}\mathbf{K}(\rho)(1-\rho).$$

З певних міркувань, шляхом порівняння результату про асимптотичну рівність для відхилень частинних сум Фур'є на класі інтегралів Пуассона 2π – періодичних функцій (див., наприклад, [43, с. 302]) з рівністю (27), а також з огляду на рівність Стєчкіна [26, с. 462], цілком імовірно, що в оцінці $|\theta_\rho|$ строгої нерівності бути не може. Було б цікаво довести або спростувати це.

1. *Голузин Г. М.* Некоторые оценки для ограниченных функций // Матем. сб. — 1950. — **26**, № 1. — С. 7 — 18.

[1] Тут під $f(e^{it})$ розуміються кутові граничні значення функції f на колі $\{w : |w| = 1\}$.

2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966. — 623 с.

3. *Савчук В. В.* Найкращі наближення голоморфними функціями. Застосування до найкращих многочлених наближень класів голоморфних функцій // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 8. — С. 1047 — 1067.

4. *Бабенко К. И.* Наилучшие приближения классов аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1958. — **22**, № 5. — С. 631 — 640.

5. *Тайков Л. В.* О наилучших линейных методах приближения классов B^r и H^r // Успехи мат. наук. — 1963. — **18**, № 4. — С. 183 — 189.

6. *Тайков Л. В.* О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. — 1967. — **1**, № 2. — С. 155 — 162.

7. *Тайков Л. В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. — 1977. — **22**, № 2. — С. 285 — 295.

8. *Белый В. И., Двейрин М. З.* О наилучших линейных методах приближения на классах функций, определяемых союзными ядрами // Метрические вопросы теории функций и отображений. — К.: Наук. думка, 1971. — **5**. — С. 37 — 54.

9. *Двейрин М. З.* Приближение функций, аналитических в единичном круге // Мат. сборник. — К.: Наук. думка. — 1976. — С. 47 — 50.

10. *Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Мат. заметки. — 1976. — **19**, № 1. — С. 29 — 40.

11. *Чеботарев Н. Г.* О продолжаемых полиномах I. Общая постановка проблемы // Собрание сочинений: В 3 т. — М.–Л.: Изд—во АН СССР, 1949. — Т. 2. — 419 с.

12. *Caratheodory C., Fejer L.* Über den Zusam menhung der extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard—Landau'schen Satz // Rend. Cir. Mat. di Palermo. — 1911. — № 32. — P. 218 — 239.

13. *Landau E.* Darstellung und Bergrundung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie.—Berlin; New York: Springer–Verlag, 1929.— 122 p.

14. *Riesz F.* Über Potenzreihen mit vorgeschriebenen Anfangsgliedern // Acta Mathem. — 1920. — **42**. — P. 145 — 171.

15. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О некоторых вопросах теории моментов. — Харьков: ГОНТИ, 1938. — 255 с.

16. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973. — 552 с.

17. *Rogosinski W.* Extremum problems for polynomials and trigonometrical polynomials // J. London Math. Soc. — 1954. — **29**, № 3. — P. 259 — 275.

18. *Стечкин С. Б., Тайков Л. В.* О минимальных продолжениях линейных функционалов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1965. — **78.** — С. 12 — 23.
19. *Milovanović G. V., Mitrinović D. S., Rassias Th. M.* Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros. — Singapore; New Jersey; London; Hong Kong: World Scientific Pub. Co. Inc., 1994. — 821 p.
20. *Borwein P., Erdélyi T.* Polynomials and Polynomial Inequalities. — New York: Springer—Verlag, 1995. — 480 p.
21. *Sheil–Small T.* Complex polynomials. — New York: Cambridge Univ. Press, 2002. — 428 p.
22. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. — М.: Моск. гос. ун–т, 1976. — 304 с.
23. *Савчук В. В.* Найкращі наближення деяких класів голоморфних функцій //Доп. НАН України – 2007. – № 5. – С. 36 – 46.
24. *Pinkus A.* n–Widths in approximation theory. — Berlin: Springer—Verlag, 1985. — 291 p.
25. *Osipenko K. Y.* Optimal recovery of analytic functions. — Huntington; New York: Nova Science Publishers, 2000 — 220 p.
26. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1953. — Т.17, № 5. — С. 462 — 472.
27. *Тайков Л. В.* О методах суммирования рядов Тейлора // Успехи мат. наук. — 1962. — **17**, № 1. — С. 252 — 254.
28. *Степанец А. И., Савчук В. В.* Приближения интегралов типа Коши // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 5. — С. 706 — 740.
29. *Швецова А. М.* Приближение частными суммами ряда Тейлора и наилучшее приближение некоторых классов функций, аналитических в единичном круге // Вiсник Харкiв. нац. ун—ту. Серiя "Математика, прикладна математика i механiка". — 2000. — № 475. — С. 208 — 217.
30. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961. — 936 с.
31. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. — М.: Наука, 1976. — 320 с.
32. *Fejer L.* Two inequalities concerning trigonometric polynomials // J. London Math. Soc. — 1939. — **14**. — P. 44 — 46.
33. *Pavlović M.* Introduction to Function Spaces on the Disk. — Beograd: Matematički institut SANU, 2004. — 184 p.
34. *Савчук В. В., Савчук М. В.* Декілька тверджень про суми Валле Пуссена функцій з простору Гарді // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2005. — Т.2, № 2 — С. 238 — 257.

35. *Голузин Г. М.* Некоторые неравенства для аналитических функций // Изв. АН Казах. ССР. Сер. матем. и мех. — 1949. — **3**. — С. 101 — 105.

36. *Стечкин С. Б.* Несколько замечаний о тригонометрических полиномах // Успехи мат. наук. — 1955. — **10**, № 1. — С. 159 — 166.

37. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2-х ч. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. II. — 467 с.

38. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. — М.: Мир, 1984. — 469 с.

39. *Шмуклер А. И.* О некоторых специальных тригонометрических рядах // Мат. сб. — 1967. — **114**, № 3. — С. 339 — 364.

40. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 144 с.

41. *Waadeland H.* Zur Theorie der beschrankten Funktionen // Kgl., norske e vid. selskabs forhandl. — 1962. — **35**, № 15. — P. 80 — 85.

42. *Турковский В. А.* О некоторых экстремальных свойствах регулярных ограниченных в круге $|z| < 1$ функций // Изв. высших учеб. зав. — 1966. — **52**, № 3. — С. 166 — 170.

43. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2-х ч. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. I. — 412 с.