Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2010, Т.7, №1, 274-297

УДК 517.5

А. С. Сердюк, В. А. Войтович
(Ін–т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ АНАЛОГАМИ СУМ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

We find asymptotic equalities for the least upper bounds of approximation by interpolation analogues of de la Vallée Poussin sums on classes of 2π-periodic functions $C^{\psi}_{\beta,s}$, $1 \le s \le \infty$, and $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$, defined by multiplicators $\psi(k)$ and argument shifts β_k on condition that sequences $\psi(k)$ tend to the zero faster, than any geometrical progression (in this case functions from the noted classes assume regular extension on the whole complex plane).

Знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж наближень інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена на класах 2π-періодичних функцій $C^{\psi}_{\beta,s}$, $1 \le s \le \infty$, та $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$, що задаються мультиплікаторами $\psi(k)$ і зсувами по аргументу β_k за умови, що послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля швидше, ніж будь-яка геометрична прогресія (в цьому випадку функції із зазначених класів допускають регулярне продовження на всю комплексну площину).

Нехай L_s, $1 \leqslant s < \infty$, — простір сумовних на $(0, 2\pi)$ в s-му степені 2π-періодичних функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_{L_s} = \|f\|_s = \Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^s\, dt\Big)^{1/s}$, $L_\infty = M$ — простір вимірних і істотно обмежених 2π-періодичних функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_{L_\infty} = \|f\|_M = \operatorname*{ess\,sup}\limits_t |f(t)|$, C — простір неперервних 2π-періодичних функцій $f(t)$, в якому норма задається рівністю $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$.

Нехай f — 2π-періодична, сумовна на $[0, 2\pi)$ функція ($f \in L_1$) і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x)$$

– її ряд Фур'є. Якщо послідовності $\psi = \psi(k)$ і $\overline{\beta} = \beta_k$, $k \in \mathbb{N}$, дійсних чисел такі, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta_k \pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta_k \pi}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L_1$, то її називають $(\psi, \overline{\beta})$–похідною функції f і позначають через $f^{\psi}_{\overline{\beta}}$, при цьому кажуть, що f належить множині $L^{\psi}_{\overline{\beta}}$. Якщо $f \in L^{\psi}_{\overline{\beta}}$ і $f^{\psi}_{\overline{\beta}} \in \mathfrak{N} \subset L_1$, то вважають, що $f \in L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$. У випадку, коли $\beta_k \equiv \beta$ позначають $L^{\psi}_{\overline{\beta}} = L^{\psi}_{\beta}$ та $L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N} = L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Покладемо далі $C^{\psi}_{\overline{\beta}} = C \bigcap L^{\psi}_{\overline{\beta}}$ і $C^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N} = C \bigcap L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$. У випадку, коли $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$, $r > 0$, класи $L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$ і $C^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$ позначатимемо через $L^{\alpha,r}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$ і $C^{\alpha,r}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$ відповідно. Множини $L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$ та $C^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$ введено О.І. Степанцем [1, с. 142–145]. В роботі в якості множин $\mathfrak{N}$ виступатимуть множини

$$U^0_s = \left\{\varphi \in L_s : \|\varphi\|_s \leq 1, \int\limits_0^{2\pi} \varphi(t)dt = 0\right\},\ 1 \leq s \leq \infty,$$

а також

$$H_{\omega} = \{\varphi \in C : \omega(\varphi; t) \leq \omega(t)\}$$

і

$$H_{\omega_1} = \{\varphi \in L_1 : \omega_1(\varphi; t) \leq \omega(t)\},$$

де $\omega(\varphi; t)$ і $\omega_1(\varphi; t)$ — модулі неперервності функції φ в просторах C і L_1 відповідно, а $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності. Для зручності класи $C^{\psi}_{\overline{\beta}}U^0_s$ та $C^{\alpha,r}_{\overline{\beta}}U^0_s$ позначають відповідно через $C^{\psi}_{\overline{\beta},s}$ та $C^{\alpha,r}_{\overline{\beta},s}$. При $\psi(k) = k^{-r}$, $\beta_k \equiv r$, $r \in \mathbb{N}$, класи $C^{\psi}_{\overline{\beta},\infty}$ є відомими класами W^r_{∞} 2π-періодичних функцій f, що мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно і r-та похідна яких майже скрізь обмежена одиницею (див. §§1.4–1.9 в [1]).

Якщо послідовності ψ і $\overline{\beta}$ такі, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \frac{\pi \beta_k}{2})$ є рядом Фур'є деякої сумовної функції $\mathcal{D}_{\psi,\overline{\beta}}(t)$, то для будь-якої функції

f з множини $C^\psi_{\bar\beta}$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ справедлива рівність [1, с. 144]

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^\psi_{\bar\beta}(x+t)\mathcal{D}_{\psi,\bar\beta}(t)dt. \qquad (1)$$

Позначимо через $\mathcal{D}_0$ множину послідовностей $\psi(k) > 0$, $k \in \mathbb{N}$, для яких виконується умова

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0. \qquad (2)$$

Відомо (див., наприклад, [1, с. 139–141]), що класи $C^\psi_{\bar\beta}$, які задаються послідовностями $\psi \in \mathcal{D}_0$, складаються з функцій, регулярних у всій комплексній площині, тобто з цілих функцій.

Нехай $f \in C$. Через $\tilde{S}_{n-1}(f;x)$ будемо позначати тригонометричний поліном порядку $n-1$, що інтерполює $f(x)$ у точках $x_k^{(n-1)} = \frac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто такий, що

$$\tilde{S}_{n-1}(f;x_k^{(n-1)}) = f(x_k^{(n-1)}),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Інтерполяційний тригонометричний поліном $\tilde{S}_{n-1}(f;x)$, можна записати в такий спосіб (див., наприклад, [2, с. 13–14]):

$$\tilde{S}_{n-1}(f;x) = \frac{a_0^{(n-1)}}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k^{(n-1)}\cos kx + b_k^{(n-1)}\sin kx), \qquad (3)$$

де

$$a_k^{(n-1)} = \frac{2}{2n-1}\sum_{j=0}^{2n-2} f(x_j^{(n-1)})\cos kx_j^{(n-1)},\ k = 0,1,...,n, \qquad (4)$$

$$b_k^{(n-1)} = \frac{2}{2n-1}\sum_{j=0}^{2n-2} f(x_j^{(n-1)})\sin kx_j^{(n-1)},\ k = 1,2,...,n. \qquad (5)$$

Поліноми

$$\widetilde{V}_{n,p}(f;x) = \frac{a_0^{(n-1)}}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}(a_k^{(n-1)}\cos kx + b_k^{(n-1)}\sin kx), \qquad (6)$$

де

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant k \leqslant n-p, \\ 1 - \frac{k-n+p}{p}, & n-p+1 \leqslant k \leqslant n. \end{cases} \tag{7}$$

$p \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le n$, а $a_k^{(n-1)}$ і $b_k^{(n-1)}$ означені формулами (4) та (5) відповідно, є інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена з параметрами n та p. При $p = 1$ суми $\widetilde{V}_{n,p}(f;x)$ співпадають з інтерполяційними тригонометричними поліномами $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$. У випадку $p = n$ суми $\widetilde{V}_{n,p}(f;x)$ перетворюються в інтерполяційні суми Фейєра $\tilde{\sigma}_{n-1}(f;x)$ порядку $n-1$:

$$\tilde{\sigma}_{n-1}(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{S}_k^{(n-1)}(f;x),$$

де

$$\tilde{S}_k^{(n-1)}(f;x) = \frac{a_0^{(n-1)}}{2} + \sum_{j=1}^{k}(a_j^{(n-1)}\cos jx + b_j^{(n-1)}\sin jx).$$

В загальному випадку інтерполяційні суми $\widetilde{V}_{n,p}(f;x)$ записуються у вигляді

$$\tilde{V}_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} \tilde{S}_k^{(n-1)}(f;x).$$

Зазначимо, що звичайні суми Валле Пуссена $V_{n,p}(f;x)$ з параметрами n та p виражаються через частинні суми Фур'є $S_k(f;x)$ порядку k за допомогою рівностей

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x).$$

Для довільної $f \in C$ покладемо

$$\rho_{n,p}(f;x) = f(x) - V_{n,p}(f;x), \tag{8}$$

$$\tilde{\rho}_{n,p}(f;x) = f(x) - \tilde{V}_{n,p}(f;x), \tag{9}$$

і для фіксованої множини $\mathfrak{N}$ простору C, інваріантної відносно зсуву аргумента, розглянемо величини

$$\mathcal{E}_{n,p}(\mathfrak{N}) = \sup_{f\in\mathfrak{N}} |\rho_{n,p}(f;x)|, \quad \mathcal{E}_{n,p}(\mathfrak{N})_X = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \|\rho_{n,p}(f;x)\|_X, \tag{10}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(\mathfrak{N};x) = \sup_{f\in\mathfrak{N}} |\tilde{\rho}_{n,p}(f;x)|, \quad \tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(\mathfrak{N})_X = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \|\tilde{\rho}_{n,p}(f;x)\|_X, \tag{11}$$

де X є простором C або $L_s, 1 \le s \le \infty$, $x \in \mathbb{R}$.

У випадку $p = 1$ (коли $V_{n,p}(f;x) = S_{n-1}(f;x)$ і $\tilde{V}_{n,p}(f;x) = \tilde{S}_{n-1}(f;x)$) будемо писати

$$\mathcal{E}_{n,p}(\mathfrak{N}) = \mathcal{E}_n(\mathfrak{N}), \quad \mathcal{E}_{n,p}(\mathfrak{N})_X = \mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_X,$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(\mathfrak{N};x) = \tilde{\mathcal{E}}_n(\mathfrak{N};x), \quad \tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(\mathfrak{N})_X = \tilde{\mathcal{E}}_n(\mathfrak{N})_X.$$

Апроксимативні властивості сум $\tilde{V}_{n,p}(f;x)$ та $V_{n,p}(f;x)$ на класах періодичних функцій досліджувались у роботах Валле Пуссена [3], С.Н. Бернштейна [4], С.М. Нікольського [5], О.П. Тімана [6], С.О. Теляковського [23], О.В. Єфімова[8, 9], І.М. Ганзбурга [10], О.І. Степанця [1, 11, 14, 15], В.І. Рукасова [15, 20] та інших (див. коментарі та бібліографію до монографій [1, 12–15]).

Розглянемо задачу про знаходження асимптотичних рівностей для величин (10) та (11). При $p = 1$, $X = C$, $\mathfrak{N} = W^r_\infty$ асимптотичні оцінки для величин (10) при $n \to \infty$ одержані А.М. Колмогоровим (див., наприклад, [1, с. 215]), а для величин (11) — С.М. Нікольським [5]. У випадку $1 \le p \le \theta\, n$, $0 < \theta < 1$, для класів $\mathfrak{N} = W^r_\infty$ асимптотичні рівності для величин (10) при $n \to \infty$ встановлено в роботі О.П. Тімана [6] у вигляді

$$\mathcal{E}_{n,p}(W^r_\infty) = \frac{4}{\pi^2 n^r} \ln \frac{n-1}{p} + \frac{O(1)}{n^r}, \tag{12}$$

а для величин (11) — у роботі І.М. Ганзбурга [10]:

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(W^r_\infty, x) = \frac{2K_r}{\pi n^r} \ln \frac{n-1}{p} \left|\sin \frac{2n-1}{2} x\right| + \frac{O(1)}{n^r}, \tag{13}$$

де K_r — константи Фавара,

$$K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}},\ r=1,2,\ldots.$$

Із асимптотичних рівностей (12) та (13) випливає наступна рівність [10], яка виражає зв'язок між величинами $\mathcal{E}_{n,p}(W^r_\infty)$ та $\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(W^r_\infty;x)$:

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(W^r_\infty,x) = \frac{\pi}{2}K_r\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\mathcal{E}_{n,p}(W^r_\infty) + O\left(\frac{1}{n^r}\right). \qquad (14)$$

Для класів $C^\psi_\beta\mathfrak{N}$ асимптотична поведінка величин (10) та (11), коли послідовність ψ спадає до нуля швидше ніж довільна степенева функція, досліджувалась у роботах [16 — 21].

Метою даної роботи є знаходження при $n-p\to\infty$ асимптотичних рівностей для величин $\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(C^\psi_{\beta,s};x)$, $1\le s\le\infty$, і $\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(C^\psi_\beta H_\omega;x)$ при $n,p\in\mathbb{N}$, $1\le p\le n$, а також $\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(C^\psi_{\beta,1})_{L_s}$, $1\le s\le\infty$, і $\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(C^\psi_\beta H_{\omega_1})_{L_1}$ при $n,p\in\mathbb{N}$, $2\le p\le n$, у випадку, коли функціональні класи $C^\psi_\beta\mathfrak{N}$ породжуються послідовностями ψ, які задовольняють умову $\mathcal{D}_0$.

Основна ідея роботи полягає в тому, що на класах $C^\psi_\beta\mathfrak{N}$, $\psi\in\mathcal{D}_0$, вдається виявити асимптотичний зв'язок між величинами (8) та (9) і, як наслідок, отримати аналог рівності (14) для зазначених класів функцій.

Наступне твердження містить асимптотичні рівності для величин $\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(C^\psi_{\beta,s};x)$ та $\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(C^\psi_\beta H_\omega;x)$ при $p=1$.

Теорема 1. *Нехай $\psi\in\mathcal{D}_0$, $\beta_k\in\mathbb{R}$, $1\le s\le\infty$ і $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності. Тоді для будь-якого $x\in\mathbb{R}$ при $n\to\infty$ виконуються рівності*

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^\psi_{\beta,\infty};x) =$$

$$= \frac{8}{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\psi(n) + O(1)\left(\frac{\psi^2(n+1)}{\psi(n)} + \sum_{k=n+2}^{\infty}\psi(k)\right)\right), \qquad (15)$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\overline{\beta},s};x) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\Big(\|\cos t\|_{s'}\psi(n) + O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k)\Big), \qquad (16)$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\overline{\beta}}H_\omega;x) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\psi(n)\theta_\omega\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\Big(\frac{2t}{n}\Big)\sin t dt + O(1)\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k)\right), \qquad (17)$$

де $s' = \frac{s}{s-1}$, $\theta_\omega = \theta_\omega(n) \in [\frac{2}{3},1]$, *причому* $\theta_\omega = 1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності, а* $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Зауважимо, що асимптотична формула (15) уточнює асимптотичну рівність (3) роботи [16, с. 30] для точок x, близьких до вузлів інтерполяції $x_k^{(n-1)}$. Зазначимо також, що у випадку $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, формули (15) — (17) встановлено в [18, с. 1693–1694].

Доведення теореми 1 базується на наступному твердженні про інтегральне представлення величини $f(x) - \widetilde{S}_{n-1}(x)$.

Лемма 1. *Нехай* $\psi(k) > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$, $\beta_k \in \mathbb{R}$. *Тоді для довільної функції* $f \in C^{\psi}_{\overline{\beta}}$ *в кожній точці* $x \in \mathbb{R}$ *справедлива рівність*

$$f(x) - \widetilde{S}_{n-1}(f;x) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{2n-1}{2}x\int\limits_{-\pi}^{\pi}\delta_n(t+x)\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m(2n-1)+n}^{\infty}\psi(k)\sin\left(kt + \frac{(2n-1)(2m+1)}{2}x + \frac{\pi\beta_k}{2}\right)dt, \qquad (18)$$

де $\delta_n(\tau) = f^{\psi}_{\overline{\beta}}(\tau) - t_{n-1}(\tau)$, $t_{n-1}(\tau)$ *— довільний тригонометричний поліном порядку, не вищого ніж* $n-1$.

Доведення лемми 1 фактично повторює основні етапи доведення лемми 1 роботи [18]. Виходячи з умови $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$ та з рівності

(1), коефіцієнти Фур'є a_k та b_k функції $f \in C_{\beta}^{\psi}$ задаються співвідношеннями

$$a_k = \frac{\psi(k)}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(t) \cos\left(kt + \frac{\pi\beta_k}{2}\right) dt, \tag{19}$$

$$b_k = \frac{\psi(k)}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(t) \sin\left(kt + \frac{\pi\beta_k}{2}\right) dt. \tag{20}$$

Коефіцієнти $a_k^{(n)}$ та $b_k^{(n)}$ інтерполяційного полінома

$$\tilde{S}_n(f;x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx)$$

виражаються через коефіцієнти Фур'є a_k та b_k за допомогою таких рівностей [2, с. 28]:

$$a_k^{(n)} = a_k + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m(2n+1)+k} + a_{m(2n+1)-k}), \ k = 0, 1, ..., n, \tag{21}$$

$$b_k^{(n)} = b_k + \sum_{m=1}^{\infty} (b_{m(2n+1)+k} - b_{m(2n+1)-k}), \ k = 1, 2, ..., n. \tag{22}$$

Об'єднавши формули (3) і (19) — (22), отримуємо

$$\widetilde{S}_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(t+x) \sum_{k=1}^{n} \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\pi\beta_k}{2}\right) dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(t+x) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi(k) \cos\left(kt + (2n+1)mx + \frac{\pi\beta_k}{2}\right) dt. \tag{23}$$

Використовуючи (1) та (23), можемо записати

$$f(x) - \widetilde{S}_n(f;x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(t+x) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\pi\beta_k}{2}\right) dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(t+x)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n}\psi(k)\cos\left(kt+(2n+1)mx+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(t+x)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n}\psi(k)\Big(\cos\left(kt+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)-$$

$$-\cos\left(kt+(2n+1)mx+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)\Big)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(t+x)\sum_{m=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{k=m(2n+1)-n}^{\infty}\psi(k)\Big(\cos\left(kt+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)-$$

$$-\cos\left(kt+(2n+1)mx+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)\Big)-\sum_{k=m(2n+1)+n+1}^{\infty}\psi(k)\Big(\cos\left(kt+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)-$$

$$-\cos\left(kt+(2n+1)mx+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)\Big)\Bigg)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(t+x)\Bigg(\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\Big(\cos\left(kt+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)-$$

$$-\cos\left(kt+(2n+1)x+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)\Big)+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=m(2n+1)+n+1}^{\infty}\psi(k)\Big(\cos\left(kt+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)-$$

$$-\cos\left(kt+(2n+1)(m+1)x+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)\Big)-$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=m(2n+1)+n+1}^{\infty}\psi(k)\Big(\cos\left(kt+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)-$$

$$-\cos\left(kt+(2n+1)mx+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)\Big)\Bigg)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(t+x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m(2n+1)+n+1}^{\infty}\psi(k)\Big(\cos\left(kt+(2n+1)mx+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)-$$

$$-\cos\left(kt+(2n+1)(m+1)x+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)\Big)dt=\frac{2}{\pi}\sin\frac{2n+1}{2}x\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\psi}_{\overline{\beta}}(t+x)\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m(2n+1)+n+1}^{\infty}\psi(k)\sin\left(kt+\frac{(2n+1)(2m+1)}{2}x+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)dt. \quad (24)$$

Замінивши в (24) n на $n-1$ і взявши до уваги, що функції $\Phi_{m,n}(t)=\sum\limits_{k=m(2n-1)+n}^{\infty}\psi(k)\sin\left(kt+\frac{(2n-1)(2m+1)}{2}x+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)$, $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{Z}_+$, ортогональні будь-якому тригонометричному поліному t_{n-1} порядку не вищого ніж $n-1$, отримуємо (18). Лему доведено.

Доведення теореми 1. Згідно з лемою 1 для довільної $f\in C^{\psi}_{\overline{\beta}}$, $\psi\in\mathcal{D}_0$, в кожній точці $x\in\mathbb{R}$ виконується рівність

$$f(x)-\widetilde{S}_{n-1}(f;x)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\sin\frac{2n-1}{2}x\int\limits_{-\pi}^{\pi}\delta_n(t+x)\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos(kt+\gamma_{n,k})+r_n\right)dt, \quad (25)$$

де $\delta_n(\tau)=f^{\psi}_{\overline{\beta}}(\tau)-t_{n-1}(\tau)$, $t_{n-1}(\cdot)$ — довільний тригонометричний поліном порядку, не вищого ніж $n-1$,

$$\gamma_{n,k}:=\gamma_{n,k}(\overline{\beta},x)=\frac{(2n-1)x+\pi(\beta_k-1)}{2}, \quad (26)$$

$$r_n:=r_n(\psi;\overline{\beta};x;t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=m(2n-1)+n}^{\infty}\psi(k)\times$$

$$\times\cos\left(kt+\frac{(2n-1)(2m+1)+\pi(\beta_k-1)}{2}x\right). \quad (27)$$

Очевидно, що для величини r_n виконується нерівність

$$|r_n|\le\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=m(2n-1)+n}^{\infty}\psi(k). \quad (28)$$

Розглядаючи точні верхні межі модулів в обох частинах рівності (25) по класу $C^{\psi}_{\bar{\beta},s}$, $1 \le s \le \infty$, а також враховуючи (28), інваріантність множини U^0_s відносно зсуву аргумента, та відому нерівність

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)K(t)dt \le \|\varphi\|_s \|K\|_{s'}, \tag{29}$$

$$\varphi \in L_s, \quad K \in L_{s'}, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1, \ 1 \le s \le \infty,$$

(див., наприклад, [24, с. 391]), отримуємо

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\bar{\beta},s}; x) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left|\sin \frac{2n-1}{2}x\right|\Big(\sup_{\varphi \in U^0_s} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \gamma_{n,k}) dt \right| +$$

$$+ O(1) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \Big). \tag{30}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

На підставі теореми 4 роботи [22] при $n \to \infty$ маємо

$$\sup_{\varphi \in U^0_s} \frac{1}{\pi} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \gamma_{n,k}) dt \right| =$$

$$= \frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi} \psi(n) + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k), \ 1 \le s \le \infty, \tag{31}$$

де $s' = \frac{s}{s-1}$, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів. Зіставляючи (30), (31) та використовуючи те, що для будь-якого $\psi \in \mathcal{D}_0$ при досить великих n (див., наприклад, [18, с. 1700])

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=m(2n-1)+n}^{\infty} \psi(k) \le \frac{1}{1 - \varepsilon_{3n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \psi((2k+1)n - k), \tag{32}$$

де $\varepsilon_n = \sup\limits_{k\geq n} |\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}|$, отримуємо (16).

Якщо $s=\infty$, то на підставі теореми 2 роботи [23] при $n \to \infty$ можемо записати більш точну оцінку порівняно з оцінкою (31):

$$\sup_{\varphi\in U^0_\infty} \frac{1}{\pi}\Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\cos(kt+\gamma_{n,k})dt\Big| =$$

$$= \frac{4}{\pi}\psi(n) + O(1)\Big(\frac{\psi^2(k+1)}{\psi(k)} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \psi(k)\Big), \tag{33}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів. Зіставляючи (30), (32) та використовуючи (33), будемо мати (15).

Розглядаючи точні верхні межі модулів обох частин рівності (25) по класу $C^\psi_\beta H_\omega$ і враховуючи інваріантність множини H_ω відносно зсуву аргумента, одержуємо

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^\psi_\beta H_\omega; x) = \frac{2}{\pi}\Big|\sin\frac{2n-1}{2}x\Big| \sup_{\varphi\in H_\omega} \Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\times$$

$$\times \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\cos(kt+\gamma_{n,k})dt + R^*_n(\varphi)\Big|, \tag{34}$$

де

$$R^*_n(\varphi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta^*_n(t) r_n(t)dt,\ \ \delta^*_n(\tau) = \varphi(\tau) - t^*_{n-1}(\tau),$$

$t^*_{n-1}(\tau)$ — поліном найкращого наближення в просторі C функції φ, тобто такий, що

$$\|\varphi(t) - t^*_{n-1}(t)\|_C = \inf_{t_{n-1}} \|\varphi(t) - t_{n-1}(t)\|_C = E_n(\varphi)_C.$$

На підставі (28) та (32), а також нерівності Джексона (див., наприклад, [12, с. 272]) та (32) одержимо оцінку

$$|R^*_n(\varphi)| \leq 2\pi\|\delta^*_n\|_C \|r_n\|_C =$$

$$= O(1) \sum_{k=3n-1}^{\infty} \psi(k) E_n(\varphi)_C = O(1)\omega(\frac{1}{n}) \sum_{k=3n-1}^{\infty} \psi(k). \tag{35}$$

Внаслідок рівності (15.6) роботи [1, с. 295] одержуємо

$$\sup_{\varphi \in H_\omega} \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \gamma_{n,k}) dt \right| =$$

$$= \frac{2\theta_\omega}{\pi} \psi(n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t dt + O(1)\omega\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k), \tag{36}$$

де $\theta_\omega = \theta_\omega(n) \in [\frac{2}{3}, 1]$, причому $\theta_\omega = 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів. Із (34) — (36) отримаємо (17). Теорему 1 доведено.

Співставляючи теорему 2 роботи [23] з рівністю (15), теорему 4 роботи [22] з (16) та рівності (15.6) роботи [1, с. 295] з (17) отримуємо аналоги рівності (14) при $p = 1$ для класів $C^\psi_{\bar{\beta},s}$, $1 \leq s \leq \infty$, та $C^\psi_{\bar{\beta}} H_\omega$, $\psi \in \mathcal{D}_0$, за умови, що $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^\psi_{\bar{\beta},\infty}; x) = 2\left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \Bigg(\mathcal{E}_n(C^\psi_{\bar{\beta},\infty}) +$$

$$+ O(1)\Big(\frac{\psi^2(n+1)}{\psi(n)} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \psi(k) \Big) \Bigg), \tag{37}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^\psi_{\bar{\beta},s}; x) = 2\left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\mathcal{E}_n(C^\psi_{\bar{\beta},s}) + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) \right), \tag{38}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^\psi_{\bar{\beta}} H_\omega; x) = 2\left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\mathcal{E}_n(C^\psi_{\bar{\beta}} H_\omega) + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) \right). \tag{39}$$

Наступне твердження містить асимптотичні рівності для величин $\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(C^\psi_{\bar{\beta},s}; x)$ та $\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(C^\psi_{\bar{\beta}} H_\omega; x)$ при $p = 2, 3, \ldots$.

Теорема 2. *Нехай* $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $n, p \in \mathbb{N}$, $2 \le p \le n$, $1 \le s \le \infty$, *і* $\omega(t)$ — *довільний модуль неперервності. Тоді при* $n - p \to \infty$ *виконуються рівності*

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(C^{\psi}_{\beta,s}; x) = \frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi p}\psi(n-p+1)+$$

$$+O(1)\Big(\sum_{k=n-p+2}^{n-1}\frac{(k-n+p)}{p}\psi(k)+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\Big), \qquad (40)$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; x) = \frac{2\theta_{\omega}}{\pi p}\psi(n-p+1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n-p+1}\right)\sin t dt+$$

$$+O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\left(\sum_{k=n-p+2}^{n-1}\frac{(k-n+p)}{p}\psi(k)+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\right), \qquad (41)$$

де $\theta_{\omega} = \theta_{\omega}(n) \in [\frac{2}{3}, 1]$, *причому* $\theta_{\omega} = 1$, *якщо* $\omega(t)$ —*опуклий модуль неперервності, а* $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів (тут і далі будемо вважати, що будь-який вираз вигляду* $\sum\limits_{k=n}^{n-1} A_k$ *дорівнює нулю).*

Доведення теореми 2 базується на наступному твердженні, яке пов'язує відхилення інтерполяційних аналогів сум Валле Пуссена $\tilde{\rho}_{n,p}(f; x)$ на множинах C^{ψ}_{β} з відхиленнями звичайних сум Валле Пуссена $\rho_{n,p}(f; x)$.

Лемма 2. *Нехай* $\psi(k) > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$, $\beta_k \in \mathbb{R}$. *Тоді для довільної функції* $f \in C^{\psi}_{\beta}X$, *де* $X = L_s$ *або* C, *в кожній точці* $x \in \mathbb{R}$ *мають місце рівності*

$$\tilde{\rho}_{n,p}(f; x) = \rho_{n,p}(f; x) + O(1)E_n(f^{\psi}_{\beta})_X\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k), \qquad (42)$$

де $E_n(\varphi)_X$ — *найкраще наближення функції* φ *тригонометричними поліномами порядку не вищого ніж* $n-1$ *в метриці простору* X, *а*

$O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Доведення. Взявши до уваги, що інтерполяційна сума $\widetilde{V}_{n,p}(f;x)$ задається співвідношеннями (6) і (7) та використавши формули (19) — (22), для довільної $f \in C^{\psi}_{\beta}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$, отримаємо рівність:

$$\widetilde{V}_{n,p}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(t+x) \sum_{k=1}^{n-p} \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\pi\beta_k}{2}\right) dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(t+x) \sum_{k=n-p+1}^{n-1} \left(1 - \frac{k-n+p}{p}\right) \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\pi\beta_k}{2}\right) dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(t+x) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p} \sum_{j=n-p}^{n-1} \sum_{k=m(2n-1)-j}^{m(2n-1)+j} \psi(k) \times$$

$$\times \cos\left(kt + (2n-1)mx + \frac{\pi\beta_k}{2}\right) dt. \qquad (43)$$

На підставі (1) та (43) маємо

$$\tilde{\rho}_{n,p}(f;x) = f(x) - \widetilde{V}_{n,p}(f;x) =$$

$$= \frac{\psi(n-p+1)}{\pi p}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(t+x) \cos\left((n-p+1)t + \frac{\pi\beta_{n-p+1}}{2}\right) dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(t+x) \sum_{k=n-p+2}^{\infty} \tau_{n,p}(k) \cos\left(kt + \frac{\pi\beta_k}{2}\right) dt -$$

$$-\frac{1}{\pi p}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(t+x) \sum_{j=n-p}^{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=m(2n-1)-j}^{m(2n-1)+j} \psi(k) \times$$

$$\times \cos\left(kt + (2n-1)mx + \frac{\pi\beta_k}{2}\right) dt, \qquad (44)$$

де

$$\tau_{n,p}(k) = \tau_{n,p}(\psi; k) := \begin{cases} \frac{k-n+p}{p}\psi(k), & n-p+1 \leqslant k \leqslant n, \\ \psi(k), & k \geqslant n. \end{cases} \quad (45)$$

Згідно з пунктом 3.1 роботи [11, с. 51] для довільної функції $f \in C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, коли $\mathfrak{N} \subset L_1$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$,

$$\rho_{n,p}(f; x) = f(x) - V_{n,p}(f; x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(t+x) \sum_{k=n-p+1}^{\infty} \tau_{n,p}(k) \cos\left(kt + \frac{\pi\beta_k}{2}\right) dt, \quad (46)$$

де $\tau_{n,p}(k)$ визначається формулою (45).

Як видно із рівностей (44) та (46), має місце таке співвідношення:

$$\tilde{\rho}_{n,p}(f; x) = \rho_{n,p}(f; x) - \frac{1}{\pi p} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(t+x) \times$$

$$\times \sum_{j=n-p}^{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=m(2n-1)-j}^{m(2n-1)+j} \psi(k) \cos\left(kt + (2n-1)mx + \frac{\pi\beta_k}{2}\right) dt. \quad (47)$$

Внаслідок ортогональності функції

$$\Phi_n(t) = \sum_{j=n-p}^{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=m(2n-1)-j}^{m(2n-1)+j} \psi(k) \cos\left(kt + (2n-1)mx + \frac{\pi\beta_k}{2}\right)$$

до будь-якого тригонометричного полінома $t_{n-1}(\cdot)$ порядку, який не перевищує $n-1$, можемо записати

$$\frac{1}{\pi p} \Big| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(t+x) \Phi(t) dt \Big| \leq \frac{1}{\pi p} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big| (f^{\psi}_{\beta}(t+x) - t_{n-1}(t+x)) \times$$

$$\times \sum_{j=n-p}^{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=m(2n-1)-j}^{m(2n-1)+j} \psi(k) \cos\left(kt + (2n-1)mx + \frac{\pi\beta_k}{2}\right)\Bigg| dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi p} \int_{-\pi}^{\pi} |f_{\beta}^{\psi}(t+x) - t_{n-1}(t+x)| \sum_{j=n-p}^{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=m(2n-1)-j}^{m(2n-1)+j} \psi(k) dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi p} \int_{-\pi}^{\pi} |f_{\beta}^{\psi}(t+x) - t_{n-1}(t+x)| \sum_{j=n-p}^{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=m(2n-1)-n+1}^{m(2n-1)+n-1} \psi(k) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_{\beta}^{\psi}(t+x) - t_{n-1}(t+x)| \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) dt. \qquad (48)$$

Вибравши в якості $t_{n-1}(\cdot)$ поліном $t_{n-1}^{*}(\cdot)$ – найкращого наближення в просторі C функції $f_{\beta}^{\psi}(\cdot)$, для довільної функції $f \in C_{\beta}^{\psi}C$ можемо записати

$$\frac{1}{\pi p}\left| \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(t+x)\Phi(t)dt\right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_{\beta}^{\psi}(t+x) - t_{n-1}^{*}(t+x)| \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) dt \leq$$

$$\leq 2E_n(f_{\beta}^{\psi})_C \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k). \qquad (49)$$

Розглянувши в якості $t_{n-1}(\cdot)$ поліном $t_{n-1}^{**}(\cdot)$ — найкращого наближення в просторі L_s функції $f_{\beta}^{\psi}(\cdot)$, внаслідок (29) для будь-якої функції $f \in C_{\beta}^{\psi}L_s$,

$$\frac{1}{\pi p}\left| \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(t+x)\Phi(t)dt\right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_{\beta}^{\psi}(t+x) - t_{n-1}^{**}(t+x)| \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) dt \leq$$

$$\leq \frac{2^{1/s'}}{\pi^{1/s}} E_n(f_{\beta}^{\psi})_s \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \leq 2E_n(f_{\beta}^{\psi})_s \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k). \qquad (50)$$

Враховуючи (49) і (50), отримуємо (42). Лемму доведено.

Доведення теореми 2. Згідно з лемою 2 для довільної $f \in C^{\psi}_{\overline{\beta},s}$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathcal{D}_0$, в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ має місце рівність

$$\tilde{\rho}_{n,p}(f;x) = \rho_{n,p}(f;x) + O(1) E_n(f^{\psi}_{\overline{\beta}})_s \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k), \qquad (51)$$

$$1 \le s \le \infty.$$

Розглянувши верхні межі від модулів обох частин рівності (51) по класу $C^{\psi}_{\overline{\beta},s}$, отримуємо

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(C^{\psi}_{\overline{\beta},s};x) = \mathcal{E}_{n,p}(C^{\psi}_{\overline{\beta},s}) + O(1) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k). \qquad (52)$$

В роботі [21] показано, що для довільних $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $1 \le s \le \infty$, при $n - p \to \infty$ виконується асимптотична рівність

$$\mathcal{E}_{n,p}(C^{\psi}_{\overline{\beta},s};x) = \frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi p} \psi(n-p+1) +$$

$$+ O(1) \Big(\sum_{k=n-p+2}^{n-1} \frac{k-n+p}{p} \psi(k) + \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \Big). \qquad (53)$$

Об'єднавши формули (52) та (53), одержимо (40).

Розглянувши верхні межі від модулів обох частин рівності (42) по класу $C^{\psi}_{\overline{\beta}} H_{\omega}$ при $X = C$ та скориставшись нерівністю Джексона (див., наприклад, [12, с. 272; 14, с. 61], будемо мати оцінку

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(C^{\psi}_{\overline{\beta}} H_{\omega};x) = \mathcal{E}_{n,p}(C^{\psi}_{\overline{\beta}} H_{\omega}) + O(1) \omega \left(\frac{1}{n-p+1} \right) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k), \qquad (54)$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

В роботі [21] показано, що для довільних $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$ при $n - p \to \infty$ виконуються рівності

$$\mathcal{E}_{n,p}(C^{\psi}_{\overline{\beta}} H_{\omega};x) = \frac{4\theta_{\omega}}{\pi p} \psi(n-p+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega \left(\frac{2t}{n-p+1} \right) \sin t dt +$$

$$+O(1)\omega\Big(\frac{1}{n-p+1}\Big)\Big(\sum_{k=n-p+2}^{n-1}\frac{k-n+p}{p}\psi(k)+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\Big). \qquad (55)$$

З (54) та (55) випливає (56). Теорему 2 доведено.

Зауважимо, що асимптотичні рівності (52) та (54), є аналогами рівності (14) для класів $C^{\psi}_{\bar{\beta},s}$ та $C^{\psi}_{\bar{\beta}}H_{\omega}$, $\psi \in \mathcal{D}_0$, при $p = 2, 3, ...$ і доповнюють рівності (37) — (39).

Теорема 3. *Нехай $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $n, p \in \mathbb{N}$, $2 \le p \le n$, $1 \le s \le \infty$. Тоді при $n-p \to \infty$ має місце асимптотична рівність*

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(C^{\psi}_{\bar{\beta},1})_{L_s} = \frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi p}\psi(n-p+1)+$$

$$+O(1)\Big(\sum_{k=n-p+2}^{n-1}\frac{k-n+p}{p}\psi(k)+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\Big), \qquad (56)$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

Доведення. Нехай $f \in C^{\psi}_{\bar{\beta},1}$, де $\psi \in \mathcal{D}_0$. Тоді на підставі рівності (42) при $X = L_1$ та із врахуванням відомої нерівності

$$\Big\|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)K(t)dt\Big\|_s \le \|\varphi\|_1\|K\|_s, \quad \varphi \in L_1, \quad K \in L_s, \quad 1 \le s \le \infty, \qquad (57)$$

(див., наприклад, [24, с. 43]), отримаємо

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(C^{\psi}_{\bar{\beta},1})_{L_s} = \mathcal{E}_{n,p}(C^{\psi}_{\bar{\beta},1})_{L_s} + O(1)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \qquad (58)$$

В [21, с. 345] показано, що для довільних $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $1 \le s \le \infty$ при $n-p \to \infty$, виконується асимптотична рівність

$$\mathcal{E}_{n,p}(C^{\psi}_{\bar{\beta},1}; x)_{L_s} = \frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi p}\psi(n-p+1)+$$

$$+O(1)\Big(\sum_{k=n-p+2}^{n-1}\frac{(k-n+p)}{p}\psi(k)+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\Big). \qquad (59)$$

Об'єднавши формул (58) та (59), одержимо (56). Теорему доведено.

Теорема 4. *Нехай* $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $n, p \in \mathbb{N}$, $2 \le p \le n$, $\omega(t)$ *— довільний фіксований модуль неперервності. Тоді при* $n - p \to \infty$ *виконується рівність*

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega_1})_{L_1} = \frac{2\theta^{(1)}_{\omega}}{\pi p}\psi(n-p+1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n-p+1}\right)\sin t dt +$$

$$+O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\left(\sum_{k=n-p+2}^{n-1}\frac{(k-n+p)}{p}\psi(k)+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\right), \quad (60)$$

де $\theta^{(1)}_{\omega} = \theta^{(1)}_{\omega}(n) \in [\frac{1}{2}, 1]$, *причому* $\theta^{(1)}_{\omega} = 1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності, а* $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Доведення. Нехай $f \in C^{\psi}_{\beta}H_{\omega_1}$, де $\psi \in \mathcal{D}_0$. Тоді внаслідок (42), при $X = L_1$ та із вврахуванням нерівності Джексона в просторі L_1 (див., наприклад, [14, с. 61]) отримуємо

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega_1}; x)_{L_1} =$$

$$= \mathcal{E}_{n,p}(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega_1}; x)_{L_1} + O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \quad (61)$$

В роботі [21] показано, що для довільних $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$ при $n - p \to \infty$

$$\mathcal{E}_{n,p}(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega_1}; x)_{L_s} = \frac{2\theta^{(1)}_{\omega}}{\pi p}\psi(n-p+1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n-p+1}\right)\sin t dt +$$

$$+O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\left(\sum_{k=n-p+2}^{n-1}\frac{(k-n+p)}{p}\psi(k)+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\right). \quad (62)$$

З формул (61) та (62) випливає (60). Теорему доведено.

Наведемо наслідки з теорем 1—4 для випадку, коли $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$, $r > 1$. Як зазначено вище, в цьому випадку класи $C^{\psi}_{\bar{\beta},s}$, $C^{\psi}_{\bar{\beta}}H_{\omega}$

і $C^{\psi}_{\bar{\beta}}H_{\omega_1}$ позначаються через $C^{\alpha,r}_{\bar{\beta},s}$, $C^{\alpha,r}_{\bar{\beta}}H_{\omega}$ і $C^{\alpha,r}_{\bar{\beta}}H_{\omega_1}$ відповідно. Оскільки для довільних $r>1$, $\alpha>0$ має місце оцінка

$$\sum_{k=m}^{\infty} e^{-\alpha k^r} < \left(1+\frac{1}{\alpha r (m)^{r-1}}\right) e^{-\alpha (m)^r},\ m\in\mathbb{N}, \tag{63}$$

(див. [23, с. 515]), то з теореми 1 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 1. *Нехай $\alpha>0$, $r>1$, $\beta_k\in\mathbb{R}$, $1\le s\le\infty$ і $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності. Тоді для будь-якого $x\in\mathbb{R}$ при $n\to\infty$ виконуються рівності*

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\bar{\beta},\infty};x)=\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|e^{-\alpha r^n}\Bigg(\frac{8}{\pi}+$$

$$+O(1)\left(\frac{e^{2\alpha n^r}}{e^{2\alpha(n+1)^r}}+\left(1+\frac{1}{\alpha r(n+2)^{r-1}}\right)\frac{e^{\alpha n^r}}{e^{\alpha(n+2)^r}}\right)\Bigg), \tag{64}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\bar{\beta},s};x)=\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|e^{-\alpha r^n}\Bigg(\frac{2}{\pi}\|\cos t\|_{s'}+$$

$$+O(1)\left(1+\frac{1}{\alpha r(n+1)^{r-1}}\right)\frac{e^{\alpha n^r}}{e^{\alpha(n+1)^r}}\Bigg),1\le s<\infty, \tag{65}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\bar{\beta}}H_{\omega};x)=\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|e^{-\alpha r^n}\Bigg(\frac{4\theta_\omega}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t dt+$$

$$+O(1)\omega\left(\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{\alpha r(n+1)^{r-1}}\right)\frac{e^{\alpha n^r}}{e^{\alpha(n+1)^r}}\Bigg), \tag{66}$$

де $s'=s/s-1$, $\theta_\omega=\theta_\omega(n)\in[\frac{2}{3},1]$, причому $\theta_\omega=1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

Взявши до уваги, що при $\psi(k)=e^{-\alpha k^r}$ для довільних $r>1$, $\alpha>0$ має місце оцінка

$$\sum_{k=n-p+2}^{\infty}\tau_{n,p}(k)=O(1)\left(1+\frac{1}{\alpha r(n-p+2)^{r-1}}\right)^{\xi(p)}e^{-\alpha(n-p+2)^r},$$

де $\tau_{n,p}(k)$ означається формулою (45), а

$$\xi(p) := \begin{cases} 1, & \text{якщо, } p \leqslant 2, \\ 2, & \text{якщо, } p > 2, \end{cases} \tag{67}$$

(див. [21, с. 348]) то із теорем 2—4, випливає твердження.

Наслідок 2. *Нехай $\alpha > 0$, $r > 1$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k, p, n \in \mathbb{N}$, $2 \leq p \leq n$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$ і $x \in \mathbb{R}$. Тоді при $n - p \to \infty$*

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(C^{\alpha,r}_{\bar{\beta},s}; x) = \frac{e^{-\alpha(n-p+1)^r}}{p}\Bigg(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi} +$$

$$+O(1)\left(1 + \frac{1}{\alpha r(n-p+2)^{r-1}}\right)^{\xi(p)} \frac{e^{\alpha(n-p+1)^r}}{e^{\alpha(n-p+2)^r}}\Bigg), \tag{68}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(C^{\alpha,r}_{\bar{\beta},1})_{L_s} = \frac{e^{-\alpha(n-p+1)^r}}{p}\Bigg(\frac{\|\cos t\|_{s}}{\pi} +$$

$$+O(1)\left(1 + \frac{1}{\alpha r(n-p+2)^{r-1}}\right)^{\xi(p)} \frac{e^{\alpha(n-p+1)^r}}{e^{\alpha(n-p+2)^r}}\Bigg), \tag{69}$$

де $\xi(p)$ означається формулою (67), $s' = s/(s-1)$, а $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.

Наслідок 3. *Нехай $\alpha > 0$, $r > 1$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k, p, n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant p \leqslant n$, $x \in \mathbb{R}$ і $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності. Тоді при $n - p \to \infty$*

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(C^{\alpha,r}_{\bar{\beta}} H_\omega; x) = \frac{e^{-\alpha(n-p+1)^r}}{p}\Bigg(\frac{2\theta_\omega}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n-p+1}\right)\sin t dt +$$

$$+O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\left(1 + \frac{1}{\alpha r(n-p+2)^{r-1}}\right)^{\xi(p)} \frac{e^{\alpha(n-p+1)^r}}{e^{\alpha(n-p+2)^r}}\Bigg), \tag{70}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,p}(C^{\alpha,r}_{\bar{\beta}} H_{\omega_1})_{L_1} = \frac{e^{-\alpha(n-p+1)^r}}{p}\Bigg(\frac{2\theta^{(1)}_\omega}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n-p+1}\right)\sin t dt +$$

$$+O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\left(1+\frac{1}{\alpha r(n-p+2)^{r-1}}\right)^{\xi(p)}\frac{e^{\alpha(n-p+1)^r}}{e^{\alpha(n-p+2)^r}}\right), \quad (71)$$

де $\xi(p)$ означається формулою (67), величини θ_ω, $\theta_\omega^{(1)}$ мають той же сенс, що і в теоремах 2 і 4 відповідно, а $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.

1. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч.//Праці Інституту математики НАН України. — 2002. — Т.40. — Ч.1. — 468 с.

2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. — М.: Мир, 1965. — Т.2. — 538 с.

3. *La Vallé Poussin. Ch.* Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle par des expressions d'ordre donné // C.r. Acad. sci. Paris. — 1918. — **166**. — P. 799 — 802.

4. *Бернштейн С.Н.* О тригонометрическом интерполировании по способу наименьших квадратов// Докл. АН СССР. — 1934. — **4**, — С. 1 – 8.

5. *Никольский С.М.* Асимптотическая оценка остатка при приближении интерполяционными тригонометрическими полиномами// Докл. АН СССР. — 1941. — **31**, № 3. — С. 215 – 218.

6. *Тиман А.Ф.* Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1953. — **17**, №2, — С. 99–134.

7. *Теляковский С.А.* Приближение дифференцируемых функций суммами Валле Пуссена// Докл. АН СССР. — 1958. — **121**, №3. — С. 426 — 429.

8. *Ефимов А.В.* О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена. I//Изв. АН СССР Сер. мат. — 1959. – **23**, № 5. – С. 737 — 770.

9. *Ефимов А.В.* О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена. II//Изв. АН СССР Сер. мат. — 1960. – **24**, № 3. – С. 431 – 468.

10. *Ганзбург И.М.* Распостранение одной асимптотической формулы А. Ф. Тимана на класы фукций с заданым модулем непрерывности // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1963. — **27**—С. 487–528.

11. *Степанец А.И.* Класификация и приближение периодических функций. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.

12. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

13. *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций. — М.: Физматгиз, 1954. – 328 с.

14. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч.//Праці Інституту математики НАН України. — 2002. — Т.40. — Ч.2. — 468 с.

15. *Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О.* Приближения суммами Валле Пуссена // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2007. — **68**. — 386 с.

16. *Сердюк А.С.* Про асимптотично точні оцінки похибки наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами функцій високої гладкості// Доп. НАН України. – 1999, № 8. – С. 29 – 33.

17. *Степанець О.І., Сердюк А.С.* Оцінка залишку наближення інтерполяційними тригонометричними многочленами на класах нескінченно диференційовних функцій // Теорія наближення функцій та її застосування: Праці інституту математики НАН України. — 2000. — 468 с.

18. *Степанец А.И., Сердюк А.С.* Приближение периодических аналитических функций интерполяционными тригонометрическими многочленами// Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 12. – С. 1689–1701.

19. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена в рівномірній та інтегральній метриках// Доп. НАН України. – 2009. № 6. – С. 34 – 39.

20. *Рукасов В.И.* Приближение суммами Валле-Пуссена классов аналитических функций// Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 6. – С. 806–816.

21. *Сердюк А.С., Овсій Є.Ю.* Наближення на класах цілих функцій сумами Валле Пуссена // Зб. праць Ін–ту математики НАН України. — 2008. Т. **5**, № 1. С. 334–351.

22. *Сердюк А.С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2005.— **57**, № 8. — С. 1079–1096.

23. *Теляковский С.А.* О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости // Укр. мат. журн. — 1989.— **41**, № 4. — С. 510–518.

24. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 423 с.