Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2010, Т.7, №1, 317-324

УДК 517.5

І. В. Соколенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ЛОКАЛЬНО СУМОВНИХ ФУНКЦІЙ ДЕЯКИМИ ЛІНІЙНИМИ ОПЕРАТОРАМИ*

We find asymptotic ($\sigma \to \infty$) formulas for the upper bounds of the deviations of Serdyuk operators $U_\sigma(f;\cdot)$ (entire functions of exponential type less than σ) on Stepanets classes $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ of locally summable functions given on the real axis in the metric of the space $\widehat{L}$.

Одержано асимптотичні (при $\sigma \to \infty$) формули для точних верхніх меж відхилень операторів Сердюка $U_\sigma(f;\cdot)$ — цілих функцій експоненціального типу не більшого ніж σ — на класах Степанця $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ локально сумовних на дійсній осі функцій в метриці простору $\widehat{L}$.

Нехай $\widehat{L}$ — множина функцій $\varphi(\cdot)$, які задані на дійсній осі $\mathbb{R}$ і мають скінченну норму $\|\varphi\|_{\widehat{L}}$, де

$$\|\varphi\|_{\widehat{L}} = \sup_{a\in\mathbb{R}} \int\limits_a^{a+2\pi} |\varphi(t)|dt. \tag{1}$$

Нехай, далі, $\psi(\upsilon)$ — функція, неперервна при всіх $\upsilon \geq 0$, і β — фіксоване дійсне число, для яких майже при всіх $t \in \mathbb{R}$ існує перетворення

$$\widehat{\psi}_\beta(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \psi(\upsilon)\cos(\upsilon t + \beta\pi/2)d\upsilon. \tag{2}$$

Тоді, згідно з роботами О.І. Степанця [1, 2], через $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ позначають множину функцій $f \in \widehat{L}$, які майже при всіх $x \in \mathbb{R}$ можуть бути представлені рівністю

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t)\widehat{\psi}_\beta(t)dt, \tag{3}$$

---

*Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект GP/F27/0103).

де $A_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \widehat{L}$, а інтеграл розуміють як границю інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються. Якщо $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ і при цьому $\varphi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з $\widehat{L}$, то покладають $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$.

Підмножини неперервних функцій з $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ і $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ позначають відповідно символами $\widehat{C}^{\psi}_{\beta}$ і $\widehat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Функцію $\varphi(\cdot)$ у (3) називають (ψ, β)–похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$.

Множини $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ було введено в [1]. З історією питання про дослідження наближень класів локально сумовних функцій $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ або $\widehat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ операторами Фур'є і операторами Валле Пуссена можна ознайомитись, наприклад, в книгах О.І. Степанця [2] та О.І. Степанця, В.І. Рукасова, С.О. Чайченка [3] (див. також наведену в них бібліографію).

Нехай $\mathfrak{A}$ — множина всіх неперервних при $v \geq 0$ функцій ψ, які задовольняють умови:
1) $\psi(v) \geq 0,\ \psi(0) = 0$;
2) ψ опукла донизу на $[1; \infty)$ і $\lim\limits_{v \longrightarrow \infty} \psi(v) = 0$;
3) $\psi'(v) := \psi'(v+0)$ є функцією обмеженої варіації на $[0, \infty)$: $\bigvee\limits_{0}^{\infty} \psi'(v) \leq K < \infty$, і

$$\mathfrak{A}' := \left\{ \psi \in \mathfrak{A} : \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t} dt < \infty \right\}$$

(див. [2]).

Тоді, якщо виконуються такі умови: $\psi \in \mathfrak{A}$ і $\beta = 0$ або $\psi \in \mathfrak{A}'$ і $\beta \in \mathbb{R}$ (надалі скрізь вимагатимемо їх виконання), то, як випливає з твердження 9.5.1 із монографії [2], перетворення $\hat{\psi}_{\beta}(t)$ вигляду (2) є функцією, сумовною на $\mathbb{R}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}_{\beta}(t)| dt < \infty.$$

В якості агрегатів наближення для функцій $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ використаємо функції $U_{\sigma}(f; \cdot), \sigma \geq 0$, що мають вигляд

$$U_{\sigma}(f; x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x - t) \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} u_{\sigma}(t, v)\, dv\, dt, \tag{4}$$

де функція $u_\sigma(t,\upsilon) = u_\sigma(\psi,\beta;t,\upsilon)$ визначається такою рівністю:

$$u_\sigma(t,\upsilon) = \begin{cases} u^*_\sigma(t,\upsilon), & 0 \le \upsilon \le \sigma-1, \\ u^*_\sigma(t,\upsilon)+\psi(3\sigma)(\upsilon-\sigma+1)\cos(\upsilon t+\frac{\beta\pi}{2}), & \sigma-1 < \upsilon < \sigma, \\ 0, & \sigma \le \upsilon, \end{cases}$$

а $u^*_\sigma(t,\upsilon)=(\psi(\upsilon)-\psi(2\sigma-\upsilon))\cos(\upsilon t-\frac{\beta\pi}{2})-\psi(2\sigma+\upsilon)\cos(\upsilon t+\frac{\beta\pi}{2})$ при $\upsilon \in [0,\sigma]$.

Зазначимо, що у випадку, коли $f(\cdot)$ є 2π-періодичними функціями з множин $\widehat{L}^\psi_\beta\mathfrak{N}$, функції $U_n(f,\cdot), n \in \mathbb{N}$, є тригонометричними поліномами порядку $\le n-1$, апроксимаційні властивості яких досліджено А.С. Сердюком [4, 5]. У загальному випадку (див. [6] (твердження 1)) функції $U_\sigma(f;\cdot)$ є цілими функціями експоненціального типу, що не перевищує σ ($U_\sigma(f;\cdot) \in \mathcal{E}_\sigma$).

Мета даної роботи полягає в знаходженні асимптотичних при $\sigma \to \infty$ рівностей для величин

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^\psi_{\beta,1};U_\sigma)_{\widehat{L}} = \sup_{f\in \widehat{L}^\psi_{\beta,1}} \|f-U_\sigma(f)\|_{\widehat{L}},$$

де

$$\widehat{L}^\psi_{\beta,1} := \widehat{L}^\psi_\beta \widehat{S}_1, \quad \widehat{S}_1 := \{\varphi \in \widehat{L}: \ \|\varphi\|_{\widehat{L}} \le 1\},$$

за умови, що функція $\psi(\upsilon)$, яка задає клас $\widehat{L}^\psi_{\beta,1}$, належить до множини

$$\mathfrak{A}^+_\infty := \{\psi \in \mathfrak{A}: \ \ \mu(\psi,\upsilon) \uparrow \infty \text{ при } \ \upsilon \to \infty\},$$

де $\mu(\psi,\upsilon) = \frac{\upsilon}{\eta(\psi,\upsilon)-\upsilon}$, $\quad \eta(\psi,\upsilon) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(\upsilon)\right)$, $\quad \upsilon \ge 1$.

Теорема 1. *Нехай $\psi \in \mathfrak{A}^+_\infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $\sigma \to \infty$*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^\psi_{\beta,1};U_\sigma)_{\widehat{L}} = \frac{4}{\pi}\psi(\sigma)+$$

$$+O(1)\bigg(\psi(3\sigma)|\ln(\eta(\psi,3\sigma)-3\sigma)| + \psi(\sigma)\Big(\frac{1}{\mu(\psi,\sigma)}+\frac{1}{\eta(\psi,\sigma)-\sigma}\Big)\bigg), \quad (5)$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно σ і β.

***Зауваження* 1.** Для величин $\mathcal{E}(\widehat{C}^\psi_{\beta,\infty};U_\sigma)_C$, де

$$\widehat{C}^\psi_{\beta,\infty} = \widehat{C}^\psi_\beta \widehat{S}_\infty, \quad \widehat{S}_\infty := \big\{\varphi: \ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)| \le 1\big\}, \quad (6)$$

асимптотичні при $\sigma \to \infty$ формули було отримано в [6]. З формули (5) даної роботи і теореми 3 роботи [6] випливає, що величини $\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; U_\sigma)_C$ і $\mathcal{E}(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}; U_\sigma)_{\widehat{L}}$ асимптотично рівні у випадку, якщо $\psi \in \mathfrak{A}^+_\infty$, $\lim\limits_{\sigma\to\infty}(\eta(\psi;\sigma)-\sigma) = \infty$ і $\frac{\psi(3\sigma)}{\psi(\sigma)}|\ln(\eta(\psi,3\sigma)-3\sigma)| = o(1)$.

***Зауваження* 2.** За виконання умов теореми 1 та умов $\lim\limits_{\sigma\to\infty}(\eta(\psi;\sigma)-\sigma) = \infty$ і $\frac{\psi(3\sigma)}{\psi(\sigma)}|\ln(\eta(\psi,3\sigma)-3\sigma)| = o(1)$ співвідношення (5) є асимптотичною рівністю. Наприклад, це буде так для функцій $\psi_{\alpha,r} \in \mathfrak{A}^+_\infty$, які при $t \geq 1$ дорівнюють $e^{-\alpha t^r}$, $\alpha > 0$, $0 < r < 1$.

Доведення. Запишемо зручне для досліджень інтегральне представлення відхилень $f(x) - U_\sigma(f;x)$, $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}$. Міркуючи аналогічно, як і при доведенні леми з роботи [6], за умови $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ майже в кожній точці x отримуємо

$$f(x)-U_\sigma(f;x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x-t)\cos\left(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2}\right)\int\limits_{0}^{\infty}\psi(v+\sigma)\cos vt dv dt-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x-t)\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma-1}^{\sigma}\psi(3\sigma)(v-\sigma+1)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi(v+2\sigma)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right)dt. \tag{7}$$

Розглядаючи точну верхню межу по функціях $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ в рівності (7), одержуємо

$$\mathcal{E}_\sigma(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}; U_\sigma)_{\widehat{L}} =$$

$$=\frac{2}{\pi}\sup_{f\in\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}}\left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x-t)\cos\left(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2}\right)\int\limits_{0}^{\infty}\psi(v+\sigma)\cos vt dv dt\right\|_{\widehat{L}}+$$

$$+O(1)\sup_{f\in\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}}\left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x-t)\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma-1}^{\sigma}\psi(3\sigma)(v-\sigma+1)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi(v+2\sigma)\cos\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\,dv\Big)\,dt\Big\|_{\widehat{L}}. \qquad (8)$$

Позначимо перший доданок в правій частині останньої рівності через $I_\sigma(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1})$. Помічаючи, далі, що другий доданок є точною верхньою межею відхилень операторів Фур'є $F_\sigma(g;\cdot)$ від функцій g з класу $\widehat{L}^{\psi_\sigma}_{-\beta,1}$ в метриці простору $\widehat{L}$, тобто дорівнює величині $\mathcal{E}(\widehat{L}^{\psi_\sigma}_{-\beta,1};F_\sigma)$, де

$$\psi_\sigma(t)=\begin{cases}\psi\big((2\sigma+1)t\big), & 0\le t\le 1,\\ \psi(t+2\sigma), & t>1,\end{cases}$$

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N};F_\sigma)_{\widehat{L}}=\sup_{f\in\widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}}\|f(\cdot)-F_\sigma(f;\cdot)\|_{\widehat{L}},$$

$F_\sigma(f;x)$ — введені в [1] оператори Фур'є порядку σ :

$$F_\sigma(f;x)=A_0+\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^{\psi}_{\beta}(x-t)\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\psi(v)\lambda_\sigma(v)\cos(vt+\frac{\beta\pi}{2})dvdt,$$

$$\lambda_\sigma(v)=\begin{cases}1, & 0\le v\le\sigma-1,\\ 1-(v-\sigma+1)\psi(\sigma)/\psi(v), & \sigma-1<v<\sigma,\\ 0, & \sigma\le v,\end{cases}$$

зі співвідношення (8), маємо

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1};U_\sigma)_{\widehat{L}}=I_\sigma(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1})_{\widehat{L}}+O(1)\mathcal{E}(\widehat{L}^{\psi_\sigma}_{-\beta,1};F_\sigma)_{\widehat{L}}. \qquad (9)$$

Знайдемо оцінки кожного з доданків правої частини рівності (9). Застосовуючи нерівність Мінковського

$$\Big\|\int f(x-t)K(t)dt\Big\|_{\widehat{L}}\le\|f\|_{\widehat{L}}\cdot\int|K(t)|dt, \qquad (10)$$

отримуємо

$$I_\sigma(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1})_{\widehat{L}}\le\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big|\cos\Big(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\int\limits_{0}^{\infty}\psi(v+\sigma)\cos vt\,dv\Big|dt. \qquad (11)$$

При доведенні теореми 3 з роботи [6] було показано, що у випадку $\psi \in \mathfrak{A}_{\infty}^{+}$ і $\beta \in \mathbb{R}$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big|\cos\Big(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\int\limits_{0}^{\infty}\psi(v+\sigma)\cos vtdv\Big|dt=\frac{4}{\pi}\psi(\sigma)+O(1)\frac{\psi(\sigma)}{\mu(\psi,\sigma)}. \tag{12}$$

Підставивши співвідношення (12) в нерівність (11), одержуємо

$$I_{\sigma}(\widehat{L}_{\beta,1}^{\psi})_{\widehat{L}}\leq\frac{4}{\pi}\psi(\sigma)+O(1)\frac{\psi(\sigma)}{\mu(\psi,\sigma)}. \tag{13}$$

Для знаходження оцінки знизу величини $I_{\sigma}(\widehat{L}_{\beta,1}^{\psi})_{\widehat{L}}$ нам знадобиться таке відоме твердження (див., наприклад, [7, лема 3]).

Лема A. *Нехай функція* $K(\cdot)$ *є сумовною на* $[a,b]$. *Тоді*

$$\mathcal{E}(K):=\sup_{\varphi\in\widehat{S}_1}\int\limits_{a}^{b}\Big|\int\limits_{a}^{b}\varphi(x-t)K(t)dt\Big|dx\geq\int\limits_{a}^{b}|K(t)|dt.$$

Користуючись нерівністю (10) та лемою A, можемо записати наступний ланцюжок співвідношень:

$$I_{\sigma}(\widehat{L}_{\beta,1}^{\psi})_{\widehat{L}}=\frac{2}{\pi}\sup_{\varphi\in\widehat{S}_1}\Big\|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-t)\cos\Big(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\int\limits_{0}^{\infty}\psi(v+\sigma)\cos vtdvdt\Big\|_{\widehat{L}}\geq$$

$$\geq\frac{2}{\pi}\sup_{\varphi\in\widehat{S}_1}\Big\|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\cos\Big(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\int\limits_{0}^{\infty}\psi(v+\sigma)\cos vtdvdt\Big\|_{\widehat{L}}-$$

$$-\frac{2}{\pi}\sup_{\varphi\in\widehat{S}_1}\Big\|\int\limits_{|t|\geq\pi}\varphi(x-t)\cos\Big(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\int\limits_{0}^{\infty}\psi(v+\sigma)\cos vtdvdt\Big\|_{\widehat{L}}\geq$$

$$\geq\frac{2}{\pi}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}-\int\limits_{|t|\geq\pi}\Big)\Big|\cos\Big(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\int\limits_{0}^{\infty}\psi(v+\sigma)\cos vtdv\Big|dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big|\cos\Big(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\int\limits_{0}^{\infty}\psi(v+\sigma)\cos vt dv\Big|dt+O(1)\int\limits_{|t|\geq\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\psi(v+\sigma)\cos vt dv dt. \tag{14}$$

Якщо $\psi\in\mathfrak{A}_{\infty}^{+}$, то функція $\psi'(\sigma+v)$ — від'ємна й зростаюча при $v\geq 0$, $\sigma\geq 1$, $\lim\limits_{v\to\infty}\psi'(\sigma+v)=0$, і, як випливає із зауваження 3.13.1 [2]

$$K_1(\eta(\psi,v)-v)\leq\frac{\psi(v)}{|\psi'(v)|}\leq K_2(\eta(\psi,v)-v).$$

Враховуючи цю інформацію й інтегруючи частинами при $t\neq 0$, маємо

$$\int\limits_{0}^{\infty}\psi(v+\sigma)\cos vt\,dv=-\frac{1}{t}\int\limits_{0}^{\infty}\psi'(v+\sigma)\sin vt\,dv\leq-\frac{1}{t}\int\limits_{0}^{\pi/t}\psi'(v+\sigma)\,dv\leq$$

$$\leq\frac{\pi}{t^2}|\psi'(\sigma)|\leq\frac{K\pi\psi(\sigma)}{t^2(\eta(\psi,\sigma)-\sigma)}$$

і

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\infty}\Big|\int\limits_{0}^{\infty}\psi(v+\sigma)\cos vt\,dv\Big|dt\leq\frac{O(1)\psi(\sigma)}{\eta(\psi,\sigma)-\sigma}. \tag{15}$$

Співставляючи співвідношення (9), (14) і (15), одержуємо

$$I_\sigma(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1})_{\widehat{L}}=\frac{4}{\pi}\psi(\sigma)+O(1)\bigg(\frac{\psi(\sigma)}{\mu(\psi,\sigma)}+\frac{\psi(\sigma)}{\eta(\psi,\sigma)-\sigma}\bigg). \tag{16}$$

Повертаючись до рівності (9), бачимо, що для завершення доведення теореми 1 достатньо отримати таку оцінку:

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\psi_\sigma}_{-\beta,1};F_\sigma)_{\widehat{L}}\leq O(1)\psi(3\sigma)|\ln(\eta(\psi,3\sigma)-3\sigma)|. \tag{17}$$

Застосовуючи нерівність (10), можемо записати

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\psi_\sigma}_{-\beta,1};F_\sigma)_{\widehat{L}}\leq\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma-1}^{\sigma}\psi(3\sigma)(v-\sigma+1)\cos\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)dv+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi(v+2\sigma)\cos\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\,dv\Big|\,dt=$$

$$=\sup_{\varphi\in\widehat{S}_\infty}\Big\|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-t)\Big(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma-1}^{\sigma}\psi(3\sigma)(v-\sigma+1)\cos\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)dv+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi(v+2\sigma)\cos\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\,dv\Big)\,dt\Big\|_C=\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi_\sigma}_{-\beta,\infty};F_\sigma)_C, \qquad (18)$$

де $\|f\|_C=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.

Як випливає з теореми 9.12.2 [2], якщо функція $\psi_\sigma(v)$, що задає клас $\widehat{C}^{\psi_\sigma}_{-\beta,\infty}$, належить до класу $\mathfrak{A}^+_\infty$, то при $\sigma\to\infty$

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi_\sigma}_{-\beta,\infty};F_\sigma)_C=O(1)\psi(3\sigma)|\ln(\eta(\psi,3\sigma)-3\sigma)|. \qquad (19)$$

Об'єднуючи співвідношення (18) і (19), отримуємо оцінку (17). Теорему 1 доведено.

1. *Степанец А.И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 303, №1. — С. 50–53.
2. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 2. — 468 с.
3. *Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О.* Приближение суммами Валле Пуссена периодических функций // Праці Інституту математики НАН України. — 2007. — Т.68. — 400 с.
4. *Сердюк А.С.* Про один лінійний метод наближення періодичних функцій // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 296–338.
5. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуассона одним лінійним методом наближення в рівномірній та інтегральній метриках // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 7. — С. 976–982.
6. *Соколенко І.В.* Наближення операторами Сердюка неперервних (ψ,β)-диференційовних функцій, заданих на дійсній осі // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2007. — Т. 4, № 1. — С. 318–334.
7. *Дрозд В.В.* Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье в среднем // Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье. — Киев, 1989. — С. 20-59. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 89.17).