Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2010, Т.7, №1, 325-337

УДК 517.51

К. В. Соліч (Ін-т математики НАН України, Київ)

БІЛІНІЙНІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

We obtain exact order estimates for the best bilinear approximations of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables in the space L_q.

Одержано точні за порядком оцінки найкращих білінійних наближень класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q.

Вступ. Нехай $\mathbb{R}^d, d \geq 1$, означає d-вимірний простір з елементами $x = (x_1, \dots, x_d)$, і $L_p(\mathbb{T}^d)$, $\mathbb{T}^d = \prod\limits_{j=1}^{d} [-\pi;\pi)$, — простір 2π–періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p, $1 \leq p < \infty$, (відповідно істотно обмежених при $p = \infty$), функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$. Норма в цьому просторі визначається наступним чином:

$$||f||_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{T}^d} |f(x)|.$$

Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ покладемо

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

і означимо кратну різницю порядку $l \in \mathbb{N}$ функції $f(x)$ у точці $x = (x_1, ..., x_d)$ з кроком $h = (h_1, ..., h_d) \in \mathbb{R}^d$ за формулою

$$\Delta^l_h f(x) = \Delta_h \Delta^{l-1}_h f(x), \quad \Delta^0_h f(x) = f(x).$$

Кратну різницю $\Delta^l_h f(x)$ можна також записати у вигляді:

$$\Delta^l_h f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l+n} C^n_l f(x + nh).$$

Модуль неперервності порядку l функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, який позначимо через $\Omega_l(f,t)_p$, означимо за формулою

$$\Omega_l(f,t)_p = \sup_{|h|\leq t} \parallel \Delta_h^k f(\cdot) \parallel_p,$$

де $|h| = \sqrt{h_1^2 + ... + h_d^2}$.

Нехай $\Omega(t)$ — функція типу модуля неперервності порядку $l \in \mathbb{N}$, яка задана на $\mathbb{R}_+ = \{t : \ t \geq 0\}$ та задовольняє наступні умови:

1) $\Omega(0) = 0$, $\Omega(t) > 0$ для $t > 0$;

2) $\Omega(t)$ є неперервною і зростає;

3) для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ $\Omega(nt) \leq Cn^l\Omega(t)$, де $C > 0$ не залежить від n і t.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє також умови (S) і (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [1]. Це означає наступне.

Функція $\Omega(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S), якщо $\Omega(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\Omega(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C_1 \frac{\Omega(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Функція $\Omega(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\Omega(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\Omega(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geq C_2 \frac{\Omega(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Варто зазначити, що функції, які задовольняють вказані вище умови $1-3$, (S) та (S_l), можуть мати, наприклад, такий вигляд

$$\Omega(t) = \begin{cases} t^r \left(\log^+ \left(\frac{1}{t} \right) \right)^\beta, & t > 0, \\ 0 & , t = 0, \end{cases}$$

де $\log^+(t) = \max\{1, \log(t)\}$, $0 < r < l$, а β – фіксоване дійсне число.

Для $1 \le p, \theta \le \infty$ і заданої функції $\Omega(t)$ типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови $1 - 3$, клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$ визначається наступним чином:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \{f \in L_p(\mathbb{T}^d) : \ \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \stackrel{df}{=} \|f\|_p + \|f\|_{b^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1\},$$

де

$$\|f\|_{b^{\Omega}_{p,\theta}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Якщо $\Omega(t) = t^r$, то класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають з класами О.В. Бєсова $B^r_{p,\theta}$ [2] і, зокрема, при $\theta = \infty$ та $\Omega(t) = t^r$ $B^r_{p,\infty} = H^r_p$, де H^r_p — класи, введені С.М. Нікольським [3]. Таким чином, вони є узагальненням (за гладкісним параметром) відомих класів Нікольського – Бєсова. З точки зору теорем вкладення, класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ розглядалися в роботах М.Л. Гольдмана [4] і Г.А. Калябіна [5]. Пізніше їх апроксимативні характеристики досліджувались в роботах Li Yongping та Xu Guiqiao [6], Xu Guiqiao [7], С.П. Войтенка [8], [9], С.А. Стасюка [10] та інших.

Далі будемо використовувати еквівалентне (з точністю до абсолютних сталих) означення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Позначимо через $V_m(t)$, $m \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos kt.$$

Тоді багатовимірне ядро $V_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$, означимо згідно з формулою

$$V_m(x) = \prod_{j=1}^{d} V_m(x_j).$$

Нехай $\mathbf{V}_m$ — оператор, який задає згортку функцій $f \in L_p(\mathbb{T}_d)$ з багатовимірним ядром $V_m(x)$:

$$\mathbf{V}_m f \stackrel{\mathrm{df}}{=} f * V_m = V_m(f, x).$$

Таким чином, $V_m(f,x)$ — кратна сума Валле Пуссена функції f.

Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ покладемо

$$\Phi_0(f,x) = V_1(f,x),\ \Phi_s(f,x) = V_{2^s}(f,x) - V_{2^{s-1}}(f,x),\ \ s \in \mathbb{N}.$$

В прийнятих позначеннях (з точністю до абсолютних сталих) класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty$, можна означити наступним чином (див., наприклад, [7]):

$$\begin{aligned} B^{\Omega}_{p,\theta} &= \left\{ f : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\|\Phi_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \right)^{\theta} \right)^{1/\theta} \le 1 \right\}, 1 \le \theta < \infty, \\ B^{\Omega}_{p,\infty} &= \left\{ f : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_s \frac{\|\Phi_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \le 1 \right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Зауважимо, що зі збільшенням параметра θ класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ розширюються, тобто при $1 \le \theta \le \theta' \le \infty$ мають місце вкладення

$$B^{\Omega}_{p,\,1} \subset B^{\Omega}_{p,\,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\,\theta'} \subset B^{\Omega}_{p,\,\infty} = H^{\Omega}_{p}. \tag{2}$$

Нехай $L_q(\mathbb{T}^{2d})$, $q = (q_1, q_2)$ — множина функцій $f(x,y)$, $x, y \in \mathbb{T}^d$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(x,y)\|_{q_1,q_2} = \|\ \|f(\cdot,y)\|_{q_1}\|_{q_2},$$

де норма обчислюється спочатку в просторі $L_{q_1}(\mathbb{T}^d)$ по змінній $x \in \mathbb{T}^d$, а потім від результату — по змінній $y \in \mathbb{T}^d$ в просторі $L_{q_2}(\mathbb{T}^d)$. Для $f \in L_q(\mathbb{T}^{2d})$ означимо найкраще білінійне наближення порядку m:

$$\tau_m(f)_{q_1,q_2} = \inf_{u_i(x),v_i(y)} \left\| f(x,y) - \sum_{i=1}^{m} u_i(x) v_i(y) \right\|_{q_1,q_2},$$

де $u_i \in L_{q_1}(\mathbb{T}^d)$, $v_i \in L_{q_2}(\mathbb{T}^d)$.

Якщо $F \subset L_q(\mathbb{T}^{2d})$ — клас функцій, то покладемо

$$\tau_m(F)_{q_1,q_2} = \sup_{f \in F} \tau_m(f)_{q_1,q_2}. \tag{3}$$

Класичний результат для білінійних наближень $\tau_M(f)_{2,2}$ належить Шмідту [11].

Дослідженню величини (3), де замість F розглядаються класи $\mathrm{W}^r_{p,\alpha}$ і H^r_p, присвячені праці В.М. Темлякова [12 – 14], в яких можна знайти відповідну бібліографію про білінійні наближення в цьому напрямку. Що стосується білінійних наближень для класів Бєсова $B^r_{p,\theta}$, то вони досліджувалися у роботах А.С. Романюка [15 – 16].

Мета даної роботи — отримання точних за порядком оцінок величини

$$\tau_m(B^{\Omega}_{p,\theta})_{q_1,q_2} = \sup_{f\in B^{\Omega}_{p,\theta}} \tau_m(f)_{q_1,q_2} \tag{4}$$

в припущенні, що $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$, а білінійні наближення $\tau_m(f)_{q_1,q_2}$ розглядаються для функцій вигляду $f(x-y)$, $x, y \in \mathbb{T}^d$.

1. Допоміжні твердження. При доведенні оцінок зверху величин $\tau_m(B^{\Omega}_{p,\theta})_{q_1,q_2}$ нами будуть використовуватись оцінки найкращих m-членних тригонометричних наближень класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які отримані С.П. Войтенком в [8]. Наведемо означення цих величин і сформулюємо відповідні результати.

Нехай $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$ і $\{k^j\}_{j=1}^m$ — довільний набір d-вимірних векторів $k^j = (k^j_1, ..., k^j_d)$ з цілочисловими координатами.

Найкращим m-членним тригонометричним наближенням функції $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$ називають величину

$$e_m(f)_q = \inf_{k^j, c_j} \|f(x) - \sum_{j=1}^{m} c_j e^{i(k^j,x)}\|_q,$$

де c_j — довільні числа, $(k^j, x) = k^j_1 x_1 + \ldots + k^j_d x_d$. Якщо $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$e_m(F)_q = \sup_{f\in F} e_m(f)_q.$$

В [8] доведено таке твердження.

Теорема А. *Нехай* $1 \le p, q, \theta \le \infty$, *і* $\Omega(t)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > \alpha(p, q)$, *а також умову* (S_l), *де*

$$\alpha(p,q) = \begin{cases} d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+, & 1 \le p \le q \le 2 \text{ або } 1 \le q \le p \le \infty, \\ \max\{\frac{d}{p}; \frac{d}{2}\} & \text{в інших випадках.} \end{cases} \tag{5}$$

Тоді для будь-яких $m \in \mathbb{N}$ має місце оцінка

$$e_m(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \Omega(m^{-\frac{1}{d}})m^{(\frac{1}{p}-\max\{\frac{1}{q};\frac{1}{2}\})_+},$$

де $a_+ = \max\{a;0\}$.

Тут і надалі співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$. Для додатних функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала C така, що $\mu_1(N) \le C\mu_2(N)$. Зауважимо, що всі сталі C_i, $i = 1, 2, ...$, які будуть зустрічатися в роботі, можуть залежати лише від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору $\mathbb{R}^d$.

Нехай

$$C^d(N) = \left\{k = (k_1, ..., k_d), |k_j| \le N, k_j \in \mathbb{Z}, j = \overline{1,d}\right\}.$$

Має місце лема.

Лема А [13]. *Нехай задано число N і $M = N^d$. Тоді для довільної функції*

$$g(x) = \sum_{k \in C^d(2N)} \widehat{g}(k) e^{i(k,x)}$$

такої, що $|\widehat{g}(k)| \le 1$ і $|\widehat{g}(k)| = 1$ при $k \in C^d(N)$, виконується співвідношення

$$\tau_M(g(x-y))_{2,1} \gg M^{\frac{1}{2}},$$

де $\widehat{g}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} g(y)\, e^{-i(k,\, y)} dy$.

Нехай $\mathcal{T}(C^d(2^{n+4}))$ позначає множину тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік з множини $C^d(2^{n+4})$.

Має місце твердження.

Теорема Б [3]. *Нехай $t \in \mathcal{T}(C^d(2^{n+4}))$. Тоді при $1 \le q \le p \le \infty$ має місце нерівність*

$$\|t\|_p \ll 2^{nd(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\|t\|_q. \qquad (6)$$

2. Основні результати. Перейдемо до формулювання і доведення отриманих результатів.

Нехай

$$\alpha_1(p,q_1)=\begin{cases} d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1})_+, & 1\le p\le q_1\le 2 \quad \text{або} \\ & 2\le q_1\le p\le\infty; \\ \\ \max\{\frac{d}{p};\frac{d}{2}\}, & 2\le p\le q_1\le\infty \quad \text{або} \\ & 1\le p<2<q_1\le\infty. \end{cases}$$

Теорема 1. *Нехай* $1\le q_2,\theta\le\infty$ *і* $\Omega(t)$ *задовольняє умову* (S) *з* $\alpha>\alpha_1(p,q_1)$, *а також умову* (S_l). *Тоді для* $m\in\mathbb{N}$ *мають місце оцінки*

$$\tau_m(B^{\Omega}_{p,\theta})_{q_1,q_2}\asymp\begin{cases} \Omega(m^{-\frac{1}{d}})m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}}, & 1\le p\le q_1\le 2, \\ \Omega(m^{-\frac{1}{d}}), & 2\le p\le q_1\le\infty \text{ або} \\ & 2\le q_1\le p\le\infty, \\ \Omega(m^{-\frac{1}{d}})m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1\le p<2<q_1\le\infty. \end{cases} \tag{7}$$

Доведення. Оцінки зверху в (7) можна легко отримати як наслідок відповідних результатів теореми А. Для визначеності розглянемо, наприклад, випадок $2\le p\le q_1\le\infty$.

З одного боку, згідно з оцінкою

$$e_m(B^{\Omega}_{p,\theta})_{q_1}\asymp\Omega(m^{-\frac{1}{d}}),$$

для довільної функції f з класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ знайдеться множина векторів $k^1,...,k^m$, $k^j=(k^j_1,...,k^j_d)$, $k^j\in\mathbb{Z}^d$, $j=\overline{1,m}$ і чисел $c_1,...,c_m$ таких, що

$$\left\|f(x)-\sum_{j=1}^{m}c_je^{i(k^j,x)}\right\|_{q_1}\ll\Omega(m^{-\frac{1}{d}}). \tag{8}$$

З іншого боку, для лівої частини (8) можна записати

$$\left\|f(x)-\sum_{j=1}^{m}c_je^{i(k^j,x)}\right\|_{q_1}=\left\|f(x-y)-\sum_{j=1}^{m}c_je^{i(k^j,(x-y))}\right\|_{q_1,\infty}=$$

$$=\left\|f(x-y)-\sum_{j=1}^{m}c_je^{i(k^j,x)}e^{-i(k^j,y)}\right\|_{q_1,\infty}. \tag{9}$$

З (8) і (9) одержимо

$$\left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{m} c_j e^{i(k^j,x)} e^{-i(k^j,y)} \right\|_{q_1,\infty} \ll \Omega(m^{-\frac{1}{d}}). \tag{10}$$

Тепер, поклавши в (10) $c_j e^{i(k^j,x)} = u_j(x)$ і $e^{-i(k^j,y)} = v_j(y)$ отримаємо шукану оцінку зверху величини $\tau_m(B^{\Omega}_{p,\theta})_{q_1,\infty}$ і, як наслідок, величини $\tau_m(B^{\Omega}_{p,\theta})_{q_1,q_2}$.

При інших співвідношеннях між p і q_1 оцінки зверху величин $\tau_m(B^{\Omega}_{p,\theta})_{q_1,q_2}$ доводяться аналогічно з використанням відповідних оцінок найкращих m-членних тригонометричних наближень $e_m(B^{\Omega}_{p,\theta})_{q_1}$.

Переходячи до доведення в (7) оцінок знизу зауважимо, що, внаслідок вкладень (2), їх достатньо отримати у випадку $\theta = 1$, тобто для класів $B^{\Omega}_{p,1}$.

Нехай спочатку має місце співвідношення $1 \le p \le q_1 \le 2$. В такому випадку для отримання оцінки знизу величини $\tau_m(B^{\Omega}_{p,\theta})_{q_1,q_2}$ будемо використовувати лему A.

За числом $m \in \mathbb{N}$ підберемо $n(m) \in \mathbb{N}$ із співвідношення $2^{(n-1)d} \le m < 2^{nd}$, тобто $m \asymp 2^{nd}$, і розглянемо білінійне наближення функції $V_{2^{n+2}}(x-y)$. Нехай системи функцій $\{u_i(x)\}_{i=1}^m$ і $\{v_i(y)\}_{i=1}^m$, $x, y \in \mathbb{T}^d$, такі, що

$$\left\| V_{2^{n+2}}(x-y) - \sum_{i=1}^{m} u_i(x) v_i(y) \right\|_{q_1,1} \le 2\tau_m(V_{2^{n+2}}(x-y))_{q_1,1}.$$

Оскільки

$$V_{2^{n+4}} * V_{2^{n+2}} = V_{2^{n+2}}$$

і для $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \le q \le \infty$,

$$\|\mathbf{V}_{2^{n+4}} f\|_q \le 3^d \|f\|_q,$$

то, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що функції $u_i(x)$ і $v_i(y)$ є тригонометричними поліномами з множини $\mathcal{T}(C^d(2^{n+4}))$ і при цьому має місце оцінка

$$\left\| V_{2^{n+2}}(x-y) - \sum_{i=1}^{m} u_i(x) v_i(y) \right\|_{q_1,1} \ll \tau_m(V_{2^{n+2}}(x-y))_{q_1,1}. \tag{11}$$

Тепер, скориставшись нерівністю різних метрик Нікольського (6) і (11), можемо записати

$$\left\| V_{2^{n+2}}(x-y) - \sum_{i=1}^{m} u_i(x)v_i(y) \right\|_{2,1} \ll$$

$$\ll 2^{nd(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})} \left\| V_{2^{n+2}}(x-y) - \sum_{i=1}^{m} u_i(x)v_i(y) \right\|_{q_1,1} \ll$$

$$\ll 2^{nd(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})} \tau_m(V_{2^{n+2}}(x-y))_{q_1,1}. \tag{12}$$

Використовуючи співвідношення між m і n та лему A, з (12) отримаємо

$$\tau_m(V_{2^{n+2}}(x-y))_{q_1,1} \gg$$

$$\gg 2^{-nd(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})} \left\| V_{2^{n+2}}(x-y) - \sum_{i=1}^{m} u_i(x)v_i(y) \right\|_{2,1} \gg$$

$$\gg 2^{-nd(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})} m^{\frac{1}{2}} \asymp 2^{-nd(\frac{1}{q_1}-1)}. \tag{13}$$

Розглянемо функцію

$$f_1(x) = C_1\Omega(2^{-n})2^{-nd(1-\frac{1}{p})}V_{2^{n+2}}(x), C_1 > 0.$$

Враховуючи, що (див., наприклад, [17, с. 28])

$$\|V_{2^{n+2}}\|_p \asymp 2^{nd(1-\frac{1}{p})},\ 1 \le p \le \infty, \tag{14}$$

та (1) можемо записати

$$\|V_{2^{n+2}}\|_{B^{\Omega}_{p,1}} = \sum_{s} \frac{\|\Phi_s(V_{2^{n+2}},\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \le \sum_{s=0}^{n+3} \frac{\|\Phi_s(V_{2^{n+2}},\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} =$$

$$= \sum_{s=0}^{n+3} \frac{\|(V_{2^s} - V_{2^{s-1}}) * V_{2^{n+2}})\|_p}{\Omega(2^{-s})} \le \sum_{s=0}^{n+3} \frac{\|V_{2^s} - V_{2^{s-1}}\|_p \cdot \|V_{2^{n+2}}\|_1}{\Omega(2^{-s})} \le$$

$$\leq \sum_{s=0}^{n+3} \frac{(\|(V_{2^s}\|_p + \|V_{2^{s-1}}\|_p) \cdot \|V_{2^{n+2}}\|_1}{\Omega(2^{-s})} \asymp$$

$$\asymp \sum_{s=0}^{n+3} \frac{(2^{(s-2)d(1-\frac{1}{p})} + 2^{(s-3)d(1-\frac{1}{p})}) \cdot \|V_{2^{n+2}}\|_1}{\Omega(2^{-s})} \ll$$

$$\ll \sum_{s=0}^{n+3} \frac{2^{sd(1-\frac{1}{p})}(2^{-2d(1-\frac{1}{p})} + 2^{-3d(1-\frac{1}{p})})}{\Omega(2^{-s})} \ll \sum_{s=0}^{n+3} \frac{2^{sd(1-\frac{1}{p})}}{\Omega(2^{-s})} = I_1.$$

Враховуючи, що

$$\sum_{s=0}^{n} \Omega^{-1}(2^{-s}) = \sum_{s=0}^{n} \frac{\Omega^{-1}(2^{-s})}{2^{\alpha s}} 2^{\alpha s} \ll \frac{\Omega^{-1}(2^{-n})}{2^{\alpha n}} \sum_{s=0}^{n} 2^{\alpha s} \asymp$$

$$\asymp \frac{\Omega^{-1}(2^{-n})}{2^{\alpha n}} \cdot 2^{\alpha n} = \Omega^{-1}(2^{-n}) \tag{15}$$

та оцінку (14) матимемо

$$I_1 = \sum_{s=0}^{n+3} \frac{2^{sd(1-\frac{1}{p})}}{\Omega(2^{-s})} \asymp \Omega^{-1}(2^{-(n+3)}) \sum_{s=0}^{n+3} 2^{sd(1-\frac{1}{p})} \asymp$$

$$\asymp \Omega^{-1}(2^{-(n+3)}) 2^{(n+3)d(1-\frac{1}{p})} \asymp \frac{2^{nd(1-\frac{1}{p})}}{\Omega(2^{-n})}.$$

Отже, при певному виборі сталої $C_1 > 0$ функція f_1 належить класу $B^{\Omega}_{p,1}$.

Таким чином, використавши (13), отримаємо оцінку

$$\tau_m(B^{\Omega}_{p,1})_{q_1,q_2} \geq \tau_m(f_1(x-y))_{q_1,q_2} \gg$$

$$\gg \Omega(2^{-n}) 2^{-nd(1-\frac{1}{p})} \tau_m(V_{2^{n+2}}(x-y))_{q_1,1} \gg$$

$$\gg \Omega(2^{-n}) 2^{-nd(1-\frac{1}{p})} \cdot 2^{-nd(\frac{1}{q_1}-1)} \asymp \Omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}}.$$

З доведеної вище оцінки при $q_1 = 2$ випливає оцінка знизу величини $\tau_m(B^{\Omega}_{p,1})_{q_1,q_2}$ у випадку $1 \leq p < 2 < q_1 < \infty$.

Тепер знайдемо необхідну оцінку у випадку $q_1 = 2$ і $q_2 = 1$.

За даним $m \in \mathbb{N}$ підберемо число $n(m) \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувались співвідношення $2^{nd} \geq 2m$ і $2^{nd} \asymp m$ і розглянемо функцію

$$f_2(x) = C_2 \Omega(2^{-n}) 2^{-\frac{nd}{2}} R_n(x), C_2 > 0,$$

де

$$R_n(x) = \prod_{j=1}^{d} \sum_{l_j = 2^n}^{2^{n+1}-1} \varepsilon_l e^{ilx_j}, \varepsilon_{l_j} = \pm 1,$$

— поліноми Рудіна–Шапіро. Добре відомо (див., наприклад, [18, с. 155]), що

$$\|R_n\|_\infty \ll 2^{\frac{nd}{2}}. \tag{16}$$

Враховуючи (1), (14), (15) та (16), одержуємо

$$\|R_n\|_{B^{\Omega}_{p,1}} = \sum_s \frac{\|\Phi_s(R_n, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \asymp \sum_{s=0}^{n+1} \frac{\|\Phi_s(R_n, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} =$$

$$= \sum_{s=0}^{n+1} \frac{\|(V_{2^s} - V_{2^{s-1}}) * R_n\|_p}{\Omega(2^{-s})} \leq \sum_{s=0}^{n+1} \frac{\|V_{2^s} - V_{2^{s-1}}\|_1 \cdot \|R_n\|_p}{\Omega(2^{-s})} \leq$$

$$\leq \sum_{s=0}^{n+1} \frac{(\|V_{2^s}\|_1 + \|V_{2^{s-1}}\|_1) \cdot \|R_n\|_p}{\Omega(2^{-s})} \ll \|R_n\|_p \sum_{s=0}^{n+1} \Omega^{-1}(2^{-s}) \ll$$

$$\ll \frac{\|R_n\|_p}{\Omega(2^{-(n+1)})} \leq \frac{\|R_n\|_\infty}{\Omega(2^{-(n+1)})} \ll \frac{2^{\frac{nd}{2}}}{\Omega(2^{-n})}.$$

Тому функція f_2 належить класу $B^{\Omega}_{p,1}$ при відповідному виборі сталої $C_2 > 0$.

Внаслідок леми А для $R_n(x)$ можемо записати

$$\tau_m(R_n(x-y))_{2,1} \gg m^{\frac{1}{2}}.$$

Скориставшись останньою оцінкою отримаємо

$$\tau_m(f_2(x-y))_{2,1} \gg \Omega(2^{-n})2^{-\frac{nd}{2}}\tau_m(R_n(x-y))_{2,1} \gg$$

$$\gg \Omega(2^{-n})2^{-\frac{nd}{2}}m^{\frac{1}{2}} \asymp \Omega(m^{-\frac{1}{d}})m^{-\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}} = \Omega(m^{-\frac{1}{d}}).$$

Для завершення доведення у випадках $2 \le p \le q_1 \le \infty$ і $2 \le q_1 \le p \le \infty$ запишемо

$$\tau_m(B^{\Omega}_{p,\theta})_{q_1,q_2} \ge \tau_m(B^{\Omega}_{p,\theta})_{q_1,1} \ge$$

$$\ge \tau_m(B^{\Omega}_{p,\theta})_{2,1} \ge \tau_m(f_2)_{2,1} \gg \Omega(m^{-\frac{1}{d}}).$$

Отже, оцінки знизу встановлені.

Теорема доведена.

Зауваження. Якщо покласти $\Omega(t) = t^r$, то при певних обмеженнях на r з (7) отримаємо відповідні оцінки для величини $\tau_m(B^r_{p,\theta})_{q_1,q_2}$, які встановлені в [16].

1. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483–522.
2. *Бесов О.В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. — 1959. — **126**, № 6. — С. 1163–1165.
3. *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. — 1951. — **38**. — С. 244–278.
4. *Гольдман М.Л.* Теоремы вложения для анизотропных пространств Никольского – Бесова с модулями непрерывности общего вида / М.Л. Гольдман // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. — 1984. — **170**. — С. 84–106.
5. *Калябин Г.А.* Теоремы вложения для обобщенных пространств Бесова и Лиувилля // Докл. АН СССР. — 1977. — **232**, № 6. — С. 1245–1248.
6. *Li Yongping, Xu Guiqiao.* The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes // J. Complexity. — 2002. — **18**, № 4. — P. 815–832.
7. *Xu Guiqiao.* The n-wigths for a generalized periodic Besov classes // Acta Math. Sci. — 2005. — **25B**, № 4. — P. 663–671.
8. *Войтенко С.П.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 9. — С. 1189–1199.

9. *Войтенко С.П.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, 11. — С. 1473–1484.
10. *Стасюк С.А.* Приближение классов $B^{\omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных полиномами со спектром в кубических областях // Мат. студії. — В друці.
11. *Schmidt E.* Zur Theoric der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I // Math. Ann. — 1907. — **63**. — P. 433–476.
12. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр.Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. — 1986. — **178**. — С. 1–112.
13. *Темляков В.Н.* Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций, зависящих от меньшего числа переменных // Тр.Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. — 1986. — **173**. — С. 243–252.
14. *Темляков В.М.* Билинейная аппроксимация и близкие вопросы // Тр. Мат. ин-та РАН. — 1991. — **194**. — С. 229–248.
15. *Романюк А.С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. матем. — 2006. — **70**, № 2. — С. 69–98.
16. *Романюк А.С.* Билинейные приближения и колмогоровские поперечники периодических классов Бесова // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2009. — **6**, № 1. — С. 222–236.
17. *Temlyakov V.N.* Approximation of periodic functions. — New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. — 419 p.
18. *Кашин С.Б., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. — М.: Наука, 1984. — 495 с.