Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2010, Т.7, №1, 338-344

УДК 517.51

С. А. Стасюк (Ин–т математики НАН Украины, Киев)

ПРИБЛИЖЕНИЕ СУММАМИ ФУРЬЕ КЛАССОВ $B^{\omega}_{1,\theta}$ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ L_1

We receive exact order for the error estimation of approximation of periodic one-variable function from the classes $B^{\omega}_{1,\theta}$ by partial Fourier sums in the space L_1.

Получена точная по порядку оценка погрешности приближения частными суммами Фурье периодических функций одной переменной из классов $B^{\omega}_{1,\theta}$ в пространстве L_1.

Пусть $L_p[0;2\pi]$ — пространство 2π-периодических функций $f(x)$, для которых

$$||f||_p = \left((2\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[0;2\pi]} |f(x)| < \infty.$$

Пусть, далее, $l \in \mathbb{N}$ и $h \in \mathbb{R}$. Для $f \in L_p[0;2\pi]$ обозначим

$$\triangle_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

и определим кратную разность порядка k функции $f(x)$ в точке x с шагом h:

$$\Delta_h^l f(x) = \Delta_h \Delta_h^{l-1} f(x), \quad \Delta_h^0 f(x) = f(x).$$

Отправляясь от кратной разности $\Delta_h^l f(x)$, определим модуль l-го порядка функции $f \in L_p[0;2\pi]$ по формуле

$$\omega_l(f,t)_p = \sup_{|h|\le t} \|\Delta_h^l f\|_p.$$

Пусть $\omega(t)$ — функция типа модуля непрерывности порядка l.

Будем также считать, что $\omega(t)$ удовлетворяет условиям (S) и (S_l), которые называют условиями Бари–Стечкина [1]. Это значит следующее.

Функция $\varphi(\tau) \geq 0$ удовлетворяет условию (S), если $\varphi(\tau)/\tau^{\alpha}$ почти возрастает при некотором $\alpha > 0$, то есть существует такая независимая от τ_1 и τ_2 постоянная $C_1 > 0$, что

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\alpha}} \leq C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\alpha}}\ , \qquad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Функция $\varphi(\tau) \geq 0$ удовлетворяет условию (S_l), если $\varphi(\tau)/\tau^{\gamma}$ почти убывает при некотором $0 < \gamma < l$, то есть существует такая независимая от τ_1 и τ_2 постоянная $C_2 > 0$, что

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\gamma}} \geq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\gamma}}\ , \qquad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Пространство $B^{\omega}_{p,\theta}$, $1 \leq p, \theta \leq \infty$, — это множество функций $f \in L_p[0;2\pi]$ со следующей нормой:

$$\|f\|_{B^{\omega}_{p,\theta}} = \begin{cases} \|f\|_p + \left(\int\limits_0^{+\infty} \left(\dfrac{\omega_l(f,t)_p}{\omega(t)} \right)^{\theta} \dfrac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, & 1 \leq \theta < \infty, \\ \|f\|_p + \sup\limits_{t>0} \dfrac{\omega_l(f,t)_p}{\omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Пространства $B^{\omega}_{p,\theta}$ являются обобщением пространств Бесова–Никольского $B^{r}_{p,\theta}$ (см. [2, 3]), т.е. $B^{\omega}_{p,\theta} \equiv B^{r}_{p,\theta}$, если $\omega(t) = t^r$, $0 < r < l$. Далее через $B^{\omega}_{p,\theta}$ будем обозначать класс функций $f \in L_p[0;2\pi]$, для которых $\|f\|_{B^{\omega}_{p,\theta}} \leq 1$. Классы $B^{\omega}_{p,\theta}$ с аппроксимационной точки зрения ранее рассматривались в работах [4–11] и др.

В проводимых ниже рассуждениях будет удобно пользоваться эквивалентным (с точностью до абсолютных постоянных) определением нормы классов $B^{\omega}_{p,\theta}$.

Пусть $V_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, обозначает ядро Валле Пуссена вида:

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m} \left(\frac{2m-k}{m} \right) \cos kt.$$

Тогда многомерное ядро $V_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \pi_d$, определим согласно формуле

$$V_m(x) = \prod_{j=1}^{d} V_m(x_j).$$

Пусть $\mathbb{V}_m$ — оператор, который задает свертку функции $f \in L_p(\pi_d)$ с многомерным ядром $V_m(x)$, т.е.

$$\mathbb{V}_m f(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} f(x) * V_m(x) = V_m(f, x).$$

Положим для $f \in L_1(\pi_d)$

$$\sigma_0(f,x) = V_1(f,x),\ \sigma_s(f,x) = V_{2^s}(f,x) - V_{2^{s-1}}(f,x),\ \ s = 1, 2, \dots.$$

В принятых обозначениях при $1 \le p \le \infty$ (с точностью до абсолютных постоянных) классы $B^{\omega}_{p,\theta}$ можно определить следующим образом (см., например, [7]):

$$B^{\omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\pi_d): \ \ ||f||_{B^{\omega}_{p,\theta}} \le 1 \right\},$$

где

$$||f||_{B^{\omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \omega^{-\theta}(2^{-s}) ||\sigma_s(f,\cdot)||_p^{\theta} \right)^{1/\theta},\ 1 \le \theta < \infty, \tag{1}$$

$$||f||_{B^{\omega}_{p,\infty}} = \sup_{s \ge 0} \frac{||\sigma_s(f,\cdot)||_p}{\omega(2^{-s})}, \tag{2}$$

если только функция $\omega(t)$ типа модуля непрерывности порядка l удовлетворяет условиям (S) и (S_l).

Пусть

$$\mathcal{T}_n = \left\{ t(x): \ t(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{i\,k\,x}, c_k \in \mathbb{C}, k = 0, \pm 1, \dots, \pm n \right\}$$

— множество тригонометрических полиномов степени n, а

$$S_n(f) = S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\, e^{i\,k\,x} \tag{3}$$

— частная сумма Фурье функции $f \in L_1[0; 2\pi]$ степени n, где

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt$$

— её коэффициенты Фурье.

Для $f \in L_1[0; 2\pi]$ обозначим через

$$E_n(f)_p = \inf_{t \in \mathcal{T}_n} \|f - t\|_p$$

наилучшее приближение в метрике пространства $L_p[0; 2\pi]$ функции f тригонометрическими полиномами степени n, а через

$$\mathcal{E}_n(f)_p = \|f - S_n(f)\|_p$$

— погрешность отклонения (в метрике пространства $L_p[0; 2\pi]$) от функции f её суммы Фурье вида (3). Тогда для некоторого класса $F \subset L_p[0; 2\pi]$ полагаем

$$E_n(F)_p = \sup_{f \in F} E_n(f)_p, \qquad \mathcal{E}_n(F)_p = \sup_{f \in F} \mathcal{E}_n(f)_p.$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема. *Пусть* $1 \le \theta \le \infty$, *а функция* $\omega(\tau)$ *удовлетворяет условию* (S) *с некоторым* $\alpha > 0$, *и кроме того, условию* (S_l). *Тогда*

$$\mathcal{E}_n(B^{\omega}_{1,\,\theta})_1 \asymp \omega(n^{-1}) \ln n. \tag{4}$$

Доказательство. Докажем сначала оценку сверху.

Известно (см., например, [10] (для $\theta = \infty$) и [11] (для $1 \le \theta < \infty$)), что

$$E_n(B^{\omega}_{1,\,\theta})_1 \asymp \omega(n^{-1}), \tag{5}$$

если $\omega(\tau)$ удовлетворяет и условию (S) с некоторым $\alpha > 0$, и условию (S_l).

Поэтому оценка сверху в (4) вытекает из неравенства Лебега (для $f \in L_1[0, 2\pi]$)

$$\mathcal{E}_n(f)_1 \le C\ \ln n\ E_n(f)_1$$

вследствие (5).

Соответствующую оценку снизу в (4) достаточно получить при $\theta = 1$, поскольку $B^{\omega}_{1,\,1} \subset B^{\omega}_{1,\,\theta}$, $1 < \theta \le \infty$, а правая часть (4) от θ не зависит.

Пусть $K_N(x)$ обозначает ядро Фейера порядка N:

$$K_N(x) = \sum_{|k| \le N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) e^{i\,k\,x}.$$

Рассмотрим функции

$$\varphi(x) = e^{i(2^m + 2^{m+1})x} K_{2^m}(x) \tag{6}$$

и

$$g_{1}(x) = C_1\,\omega(2^{-m})\,\varphi(x), \quad C_1 > 0. \tag{7}$$

Покажем, что $g_1 \in B^{\omega}_{1,\,1}$. Учитывая, что спектр полиномов $\varphi(x)$ и $g_1(x)$ принадлежит отрезку $[2^{m+1}; 2^{m+2}]$, а также, что (см., например, [12, гл. 1]) $||\mathbb{V}_m||_{1\to 1} \le 3$ и $\|K_{2^m}(\cdot)\|_1 = 1$, получаем

$$\|g_1\|_{B^{\omega}_{1,\,1}} = \sum_s (\omega(2^{-s}))^{-1} \|\sigma_s(g_1,\cdot)\|_1 = \sum_{s=m+1}^{m+2} (\omega(2^{-s}))^{-1} \|\sigma_s(g_1,\cdot)\|_1 \ll$$

$$\ll (||\mathbb{V}_{m+1} - \mathbb{V}_m||_{1\to 1} + ||\mathbb{V}_{m+2} - \mathbb{V}_{m+1}||_{1\to 1})||K_{2^m}(\cdot)||_1 \ll 1. \tag{8}$$

Поэтому, как видно из (8), $g_1 \in B^{\omega}_{1,\,1}$ при соответствующем значении $C_1 > 0$.

Рассматриваем приближение функции $\varphi(x)$ (см. (6)) ее частной суммой Фурье $S_n(\varphi, x)$, где $n = 3 \cdot 2^m$. При помощи элементарных преобразований получаем

$$\mathcal{E}_n(\varphi)_1 = ||\varphi - S_n(\varphi)||_1 = \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) e^{i(k + 2^m + 2^{m+1})x} \right\|_1 =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \cos k\,x + i \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin k\,x \right\|_1 \ge$$

$$\geq \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin k\,x \right\|_1 . \tag{9}$$

Обозначим

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin k\,x$$

и рассмотрим функцию $g_2(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in (0, 2\pi)$. Обозначим через $g_2^*(x)$ её 2π–периодическое продолжение на действительную ось. Нетрудно показать, что почти для всех $x \in \mathbb{R}$

$$g_2^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\,x}{k}.$$

Пусть $\mathcal{J} = (F, g_2^*)$. Тогда в силу неравенства Гельдера можем записать

$$\mathcal{J} \leq \| F \|_1 \ \|g_2^*\|_\infty = \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin k\,x \right\|_1 \left\| \frac{\pi - x}{2} \right\|_\infty \ll$$

$$\ll \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin k\,x \right\|_1 . \tag{10}$$

Учитывая (9) и (10), получаем

$$\mathcal{E}_n(\varphi)_1 \gg \mathcal{J} = (F, g_2^*) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \frac{1}{k} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{2^m} \frac{1}{k} \asymp m \asymp \ln n. \tag{11}$$

Таким образом, принимая во внимание (6), (7), в силу (11) находим

$$\mathcal{E}_n(B^{\omega}_{1,\theta})_1 \geq \mathcal{E}_n(g_1)_1 \gg \omega(n^{-1}) \ln n.$$

Оценка снизу и вместе с ней теорема доказана.

Замечание. Теорема в случае $\omega(\tau) = \tau^r$, $0 < r < l$, для $\theta = \infty$ доказана в [12, гл. 1], а для $1 \leq \theta < \infty$ — в [13].

1. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — Т. 5. — С. 483 – 522.

2. *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1951. — **38**. — С. 244–278.

3. *Бесов О.В.* Исследования одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1961. — **60**.— С. 42–61.

4. *Пустовойтов Н.Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — Т. 20, № 1. — С. 35–48.

5. *Sun Youngsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. — 1997. — **219**.— С. 396–377.

6. *Пустовойтов Н.Н.* Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Матем. заметки. — 1999. — Т. 65, № 1. — С. 105–118.

7. *Liu Yongping, Xu Guiqiao.* The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes // J. Complexity. — 2002. — **18**, № 3. — P. 815–832.

8. *Dinh Dung, Mai Xuan Thao.* Optimal recovery of periodic functions using wavelet decompositions // Vietnam J. Math. — 2002. — **30**, № 3. — P. 295–298.

9. *Xu Guiqiao.* The n-widths for a generalized periodic Besov classes // Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. — 2005. — **25**, № 4. — P. 663–671.

10. *Пустовойтов Н.Н.* О приближении и характеризации периодических функций многих переменных, имеющих мажоранту смешанных модулей непрерывности специального вида // Anal. Math. — 2003. — Т. 29, № 3. — С. 201–218.

11. *Стасюк С.А.* Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ // Матем. заметки. — 2010. — Т. 87, № 1. — С. 108–121.

12. *Temlyakov V.N.* Approximation of periodic functions. — New York: Nova Science, 1993. — 272 p.

13. *Романюк А.С.* Приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций одной и многих переменных // Матем. заметки. — 2010. — Т. 87, № 3. — С. 429–442.