Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2010, Т.7, №1, 7-20

УДК 517.51

С. П. Войтенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩЕ M-ЧЛЕННЕ ТРИГОНОМЕТРИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ФУНКЦІЙ МАЛОЇ ГЛАДКОСТІ

The best M-*term trigonometric approximation of low smoothness periodic multivariate function classes* $B^{\Omega}_{p,\theta}$ *is obtained in the space* L_q, $1 < p \le 2 < q < \infty$.

Одержана точна за порядком оцінка найкращого M-*членного тригонометричного наближення класів* $B^{\Omega}_{p,\theta}$ *періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості у просторі* L_q, $1 < p \le 2 < q < \infty$.

1. Постановка задачі та основні результати. В даній роботі досліджується найкраще M-членне тригонометричне наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості в просторі L_q, $1 < p \le 2 < q < \infty$.

Відповідна апроксимативна характеристика цих класів буде означена нижче, а спочатку наведемо необхідні позначення та означення.

Нехай $L_p(\mathbb{T}^d)$, $\mathbb{T}^d = \prod\limits_{j=1}^{d}[-\pi;\pi)$, $1 \le p < \infty$, — простір 2π–періодичних по кожній змінній функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$L_\infty(\mathbb{T}^d)$ — простір 2π-періодичних по кожній змінній істотно обмежених функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$ з нормою

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{T}^d} |f(x)|.$$

Далі, нехай $l \in \mathbb{N}$ і $h \in \mathbb{R}^d$. Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ покладемо

$$\triangle_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

і означимо кратну різницю порядку l функції $f(x)$ в точці $x=(x_1,...,x_d)$ з кроком $h=(h_1,...,h_d)$ за формулою

$$\Delta_h^l f(x)=\Delta_h\Delta_h^{l-1}f(x) \qquad (\Delta_h^0 f(x)=f(x)).$$

Кратну різницю $\Delta_h^l f(x)$ можна також записати у вигляді

$$\Delta_h^l f(x)=\sum_{n=0}^{l}(-1)^{l+n}C_l^n f(x+nh).$$

Означимо модуль неперервності порядку l функції $f\in L_p(\mathbb{T}^d)$, який позначимо через $\Omega_l(f,t)_p$, за формулою

$$\Omega_l(f,t)_p=\sup_{|h|\le t}||\Delta_h^l f(x)||_p,$$

де $|h|=\sqrt{h_1^2+...+h_d^2}$.

Нехай $\Omega(t)$ — функція типу модуля неперервності порядку l, яка задана на $\mathbb{R}_+=\{t: t\ge 0\}$ та задовольняє такі умови:

1) $\Omega(0)=0$, $\Omega(t)>0$ для $t>0$;
2) $\Omega(t)$ — неперервна;
3) $\Omega(t)$ — неспадна;
4) $\Omega(nt)\le Cn^l\Omega(t)$ для всіх $n\in\mathbb{N}$, де стала $C>0$ не залежить від n і t.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє також умови (S) і (S_β): так звані умови Барі–Стєчкіна [1]. Це означає наступне.

Функція $\Omega(\tau)\ge 0$ задовольняє умову (S), якщо $\Omega(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha>0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1>0$, що

$$\frac{\Omega(\tau_1)}{\tau_1^\alpha}\le C_1\frac{\Omega(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}\ , \qquad 0<\tau_1\le\tau_2.$$

Функція $\Omega(\tau)\ge 0$ задовольняє умову (S_β), $\beta>0$, якщо $\Omega(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при деякому $0<\gamma<\beta$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2>0$, що

$$\frac{\Omega(\tau_1)}{\tau_1^\gamma}\ge C_2\frac{\Omega(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}\ , \qquad 0<\tau_1\le\tau_2.$$

В роботі [2] (див. також [3–4]) наведено означення аналогів класів Бєсова таким чином.

Нехай $1 \le p, \theta \le \infty$. Будемо вважати, що $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$, якщо f задовольняє такі умови:

1) $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$;

2) $\|f\|_{b^{\Omega}_{p,\theta}} < \infty$, де

$$\|f\|_{b^{\Omega}_{p,\theta}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{+\infty} \left(\dfrac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \dfrac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} \dfrac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Простір $B^{\Omega}_{p,\theta}$ — лінійний нормований простір з нормою

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} := \|f\|_p + \|f\|_{b^{\Omega}_{p,\theta}}.$$

Якщо $\Omega(t) = t^r$, то простір $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадає з простором О.В. Бєсова $B^r_{p,\theta}$ [5] і, зокрема, при $\theta = \infty$ та $\Omega(t) = t^r$ $B^{\Omega}_{p,\theta} = H^r_p$, де H^r_p — простори, введені С.М. Нікольським [6]. Далі будемо вважати, що $B^{\Omega}_{p,\theta}$ — класи функцій $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, для яких $\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1$.

Перейдемо безпосередньо до означення апроксимативної характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, що будуть досліджуватись в даній роботі.

Для $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$ позначимо через $e_M(f)_q$ найкраще M-членне тригонометричне наближення функції f у просторі L_q, яке визначається наступним чином:

$$e_M(f)_q = \inf_{\{k^j\}_{j=1}^M} \inf_{\{c_j\}_{j=1}^M} \left\| f(x) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,x)} \right\|_q,$$

де $\{k^j\}_{j=1}^M$ — набір векторів $k^j = (k^j_1, ..., k^j_d)$ з цілочисловими координатами, c_j — довільні комплексні числа, $(k^j, x) = k^j_1 x_1 + \ldots + k^j_d x_d$.

Покладемо

$$e_M(F)_q := \sup_{f \in F} e_M(f)_q, \quad F \in L_q(\mathbb{T}^d). \tag{1}$$

Величина $e_M(f)_2$ для функції однієї змінної була введена С.Б. Стєчкіним [7] при формулюванні критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів. Згодом величини $e_M(f)_q$ і $e_M(F)_q$, $1 \leq q \leq \infty$, почали досліджуватись вже з точки зору апроксимації індивідуальних функцій і класів функцій відповідно. Перші оцінки величини $e_M(f)_\infty$ для деяких конкретних функцій було отримано Р.С. Ісмагіловим [8]. Систематичне вивчення величин (1) на класах С.Л. Соболєва $W^r_{p,\alpha}$ та С.М. Нікольського H^r_p періодичних функцій багатьох змінних було розпочато В.Н. Темляковим [9].

Відмітимо також, що для тих чи інших функціональних класів дослідження поведінки величин (1) проводились, зокрема, в роботах [10–15], в яких можна ознайомитися з більш детальною бібліографією.

Мета даної роботи — продовжити дослідження у цьому напрямку та отримати точні за порядком оцінки величин найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, що доповнюють результати, які були одержані в роботі [16]. Зокрема, розглянуто один з тих випадків, при дослідженні якого проявилося так зване явище "малої гладкості".

Відмітимо, що явище "малої гладкості" вперше було помічено Б.С. Кашиним [17] під час встановлення оцінок колмогорівських поперечників класів Соболева W^r_1 функцій однієї змінної в просторі L_q. Іншими словами, в [17] було виявлено, що поведінка поперечників $d_M(W^r_1, L_q)$, $2 < q < \infty$, у випадку $1 - 1/q < r < 1$ істотно відрізняється за порядком від випадку $r > 1$.

Отримані результати будемо формулювати в термінах порядкових співвідношень. Для функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\mu_1(N) \leq C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$. Зауважимо, що всі сталі $C_i, i = 1, 2, \dots$, які будуть зустрічатися в роботі, можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та вимірності d простору $\mathbb{R}^d$.

Перед тим, як безпосередньо перейти до формулювання основних результатів зробимо таке зауваження.

Метод, розроблений Р.А. ДеВором і В.М. Темляковим [14] для доведення оцінок зверху величини найкращого M-членного тригонометричного наближення класів Бєсова, не дозволив в [16] отримати відповідні оцінки зверху цієї величини у випадку малої гладкості. Тому в даній роботі використовується метод, що був запропонований Е.С. Бєлінським [10].

Для величини, означеної рівністю (1), має місце таке твердження.

Теорема. *Нехай* $1 < p \le 2 < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > d(1/p - 1/q)$, *а також умову* $(S_{\min\{\frac{d}{p};l\}})$. *Тоді має місце оцінка*

$$e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \Omega(M^{-\frac{q}{2d}}) M^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \qquad (2)$$

Зауваження 1. Оскільки $B^{\Omega}_{p,\infty} \equiv H^{\Omega}_p$, то в (2) міститься, зокрема, результат і для величини $e_M(H^{\Omega}_p)_q$, а саме:

$$e_M(H^{\Omega}_p)_q \asymp \Omega(M^{-\frac{q}{2d}}) M^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Зауваження 2. Якщо $\Omega(t) = t^r$, то при цьому $B^{\Omega}_{p,\theta} = B^r_{p,\theta}$ і тоді при $d(1/p - 1/q) < r < d/p$ та $1 < p \le 2 < q < \infty$ безпосередньо з (2) випливає

$$e_M(B^r_{p,\theta})_q \asymp M^{-\frac{q}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}. \qquad (3)$$

Оцінка (3) встановлена С.А. Стасюком [18], а у випадку $d = 1$ — Е.С. Бєлінським [10].

Для порівняння наведемо з [16] оцінку величини $e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$, $1 < p \le 2 < q < \infty$, де $\Omega(t)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > d/p$, а також умову (S_l):

$$e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \Omega(M^{-1/d}) M^{1/p-1/2}. \qquad (4)$$

Зауваження 3. Таким чином, співставляючи (2) та (4), бачимо, що оцінка $e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$ при $\alpha > d/p$ не співпадає з оцінкою $e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$ при $d(1/p - 1/q) < \alpha < d/p$.

2. Допоміжні твердження. Наведемо деякі відомі твердження, що будуть використовуватися.

Позначимо через $V_m(t), m \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos kt.$$

Тоді багатовимірне ядро $V_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$, означимо за допомогою формули

$$V_m(x) = \prod_{j=1}^{d} V_m(x_j).$$

Нехай $\mathbb{V}_m$ — оператор, який визначається згорткою функцій $f(x)$ із багатовимірним ядром $V_m(x)$, тобто

$$\mathbb{V}_m f = f * V_m = V_m(f, x).$$

Таким чином, результатом дії оператора $\mathbb{V}_m$ на функцію $f(x)$ є $V_m(f, x)$ — кратна сума Валле Пуссена функції $f(x)$. Покладемо для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$

$$\Phi_0(f, x) = V_1(f, x), \quad \Phi_s(f, x) = V_{2^s}(f, x) - V_{2^{s-1}}(f, x), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Наведемо також кілька відомих тверджень, які будуть використовуватися далі в роботі.

Лема 1 [19]. *Нехай* $1 \le p, \theta \le \infty$ *і* $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$. *Тоді функцію* f *можна подати у вигляді ряду*

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \Phi_s(f, x),$$

збіжного до цієї функції в просторі $L_p(\mathbb{T}^d)$, *та*

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_{s=0}^{\infty} \left(\dfrac{\|\Phi_s(f, x)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \right)^{\theta} \right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{s} \dfrac{\|\Phi_s(f, x)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{5}$$

Варто зазначити, що у випадку $1 < p < \infty$ можна записати еквівалентне співвідношення для норм функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, використовуючи в (5) замість $\Phi_s(f, x)$ "блоки" ряду Фур'є функції $f(x)$.

Для $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ введемо позначення:

$$f_0(x) = \widehat{f}(0) \quad \text{і} \quad f_s(x) = \sum_{\substack{2^{s-1} \le \max\limits_{j=\overline{1,d}} |k_j| < 2^s}} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)}, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

де

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$$

— коефіцієнти Фур'є функції f.

Таким чином, при $1 < p < \infty$ будемо мати

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_{s=0}^{\infty} \left(\dfrac{\|f_s(x)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \right)^{\theta} \right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{s} \dfrac{\|f_s(x)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{6}$$

Нехай Θ_M — набір з M d-вимірних цілочисельних векторів, тобто $\Theta_M = \{k^j = (k_1^j, \ldots, k_d^j), k^j \in \mathbb{Z}^d, j = \overline{1, M}\}$. Покладемо

$$P(\Theta_M, x) = \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j, x)}.$$

Тоді має місце лема.

Лема 2 [11]. *Нехай $2 < q < \infty$. Тоді для довільного тригонометричного полінома $P(\Theta_N, x)$ і для будь-якого $M < N$ знайдеться тригонометричний поліном $P(\Theta_M, x)$, для якого справедлива оцінка*

$$\|P(\Theta_N, \cdot) - P(\Theta_M, \cdot)\|_q \le C(q) \sqrt{NM^{-1}} \|P(\Theta_N, \cdot)\|_2,$$

крім того, $\Theta_M \subset \Theta_N$.

Теорема А [20]. *Нехай задано $1 < p < \infty$. Існують додатні числа $C_1(p)$ і $C_2(p)$ такі, що для кожної функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ виконуються співвідношення*

$$C_1(p) \|f\|_p \le \left\| \Big(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} |f_s(\cdot)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \le C_2(p) \|f\|_p. \tag{7}$$

Співвідношення (20) є аналогом відомого твердження Літтлвуда–Пелі.

Теорема Б [6]. *Нехай* $n_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, *та*

$$t(x) = \sum_{|k_j| \le n_j} c_k e^{i(k,x)}.$$

Тоді при $1 \le q < p \le \infty$ *має місце нерівність*

$$\|t\|_p \le 2^d \left(\prod_{j=1}^{d} n_j \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|t\|_q. \tag{8}$$

Нерівність (8) встановлена С.М. Нікольським і отримала назву "нерівність різних метрик".

3. Доведення теореми. Зважаючи на те, що права частина (2) від θ не залежить, а зі збільшенням параметра θ класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ розширюються, тобто при $1 \le \theta \le \theta' \le \infty$ мають місце вкладення

$$B^{\Omega}_{p,1} \subset B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\theta'} \subset B^{\Omega}_{p,\infty} \equiv H^{\Omega}_{p},$$

необхідну оцінку зверху достатньо встановити для $e_M(B^{\Omega}_{p,\infty})_q$, а знизу — для $e_M(B^{\Omega}_{p,1})_q$.

Спочатку встановимо в (2) оцінку зверху. Нехай n — довільне натуральне число таке, що $2^{dn} < M \le 2^{d(n+1)}$. Нехай $f \in B^{\Omega}_{p,\infty}$, тоді в цьому випадку згідно з (6)

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} f_s(x), \tag{9}$$

і при цьому $\|f_s(\cdot)\|_p \le \Omega(2^{-s})$.

Наближаючий поліном, який дає для f необхідну оцінку наближення, будемо підбирати у вигляді

$$P(\Theta_M, x) = \sum_{s=0}^{n-1} f_s(x) + \sum_{n \le s < \frac{qn}{2}} P(\Theta_{N_s}, x), \tag{10}$$

де поліноми $P(\Theta_{N_s},x)$ будуть побудовані для кожного "блоку"$f_s(x)$ у відповідності до леми 2, а числа N_s підберемо у вигляді

$$N_s=[2^{nd}2^{-\frac{qnd}{2p}}\Omega^{-1}(2^{-\frac{qn}{2}})2^{s\frac{d}{p}}\Omega(2^{-s})]+1, \tag{11}$$

де $[a]$ — ціла частина числа a.

Переконаємося, що при такому виборі чисел N_s поліном (10) містить за порядком не більше, ніж M гармонік. Нехай $\#A$ означає кількість елементів множини A, тоді

$$\sum_{s=0}^{n-1}\#\{k=(k_1,\ldots,k_d):2^{s-1}\le max|k_j|<2^s, j=\overline{1,d}\}+\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}}N_s\ll$$

$$\ll 2^{nd}+(\frac{q}{2}-1)n+2^{nd}2^{-\frac{qnd}{2p}}\Omega^{-1}(2^{-\frac{qn}{2}})\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}}2^{s\frac{d}{p}}\Omega(2^{-s})=:I_0$$

Оскільки $\Omega(t)$ задовольняє умову $(S_{\min\{\frac{d}{p};l\}})$, то має місце співвідношення

$$\frac{\Omega(2^{-\frac{qn}{2}})}{2^{-\gamma\frac{qn}{2}}}\gg\frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\gamma s}},\quad 0\le s\le\frac{qn}{2}.$$

Тому

$$I_0=2^{nd}+2^{nd}2^{-\frac{qnd}{2p}}\Omega^{-1}(2^{-\frac{qn}{2}})\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}}\frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-s\frac{d}{p}}}\ll$$

$$\ll 2^{nd}+2^{nd}2^{-\frac{qnd}{2p}}\Omega^{-1}(2^{-\frac{qn}{2}})\Omega(2^{-\frac{qn}{2}})2^{\frac{qnd}{2p}}\ll 2^{nd}\asymp M,$$

Таким чином, враховуючи (9), (10), нерівність Мінковського, а також теорему A, будемо мати

$$\|f(\cdot)-P(\Theta_M,\cdot)\|_q\ll\Big\|\Big(\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}}|f_s(\cdot)-P(\Theta_{N_s},\cdot)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_q+$$

$$+\Big\|\sum_{s\ge\frac{qn}{2}}f_s(\cdot)\Big\|_q=:I_1+I_2. \tag{12}$$

Для оцінки доданка I_1 використаємо послідовно нерівність Мінковського, лему 2, нерівність різних метрик та підставляємо замість N_s їх значення з (11), тоді одержуємо

$$I_1 = \Big\| \sum_{n \le s < \frac{qn}{2}} |f_s(\cdot) - P(\Theta_{N_s}, \cdot)|^2 \Big\|_{q/2}^{1/2} \le$$

$$\le \Big(\sum_{n \le s < \frac{qn}{2}} \big\| f_s(\cdot) - P(\Theta_{N_s}, \cdot) \big\|_q^2 \Big)^{1/2} \ll \Big(\sum_{n \le s < \frac{qn}{2}} \frac{2^{ds}}{N_s} \big\| f_s(\cdot) \big\|_2^2 \Big)^{1/2} \ll$$

$$\ll \Big(\sum_{n \le s < \frac{qn}{2}} \frac{2^{ds} 2^{2ds(1/p-1/2)}}{N_s} \big\| f_s(\cdot) \big\|_p^2 \Big)^{1/2} \le \Big(\sum_{n \le s < \frac{qn}{2}} \frac{2^{2ds/p}}{N_s} \Omega^2(2^{-s}) \Big)^{1/2} \le$$

$$\le 2^{-\frac{nd}{2}} 2^{\frac{qnd}{4p}} \Omega^{1/2}(2^{-\frac{qn}{2}}) \Big(\sum_{n \le s < \frac{qn}{2}} 2^{s\frac{d}{p}} \Omega(2^{-s}) \Big)^{1/2} \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{nd}{2}} 2^{\frac{qnd}{4p}} \Omega^{1/2}(2^{-\frac{qn}{2}}) 2^{\frac{qnd}{4p}} \Omega^{1/2}(2^{-\frac{qn}{2}}) =$$

$$= 2^{\frac{qn}{2} d(1/p-1/q)} \Omega(2^{-\frac{qn}{2}}) \asymp \Omega(M^{-\frac{q}{2d}}) M^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{13}$$

Тепер оцінимо доданок I_2. Скористаємося нерівностями Мінковського, різних метрик і $\|f_s(\cdot)\|_p \le \Omega(2^{-s})$, внаслідок яких отримаємо

$$I_2 \le \sum_{s \ge \frac{qn}{2}} \|f_s(\cdot)\|_q \ll \sum_{s \ge \frac{qn}{2}} 2^{ds(1/p-1/q)} \|f_s(\cdot)\|_p \le \sum_{s \ge \frac{qn}{2}} 2^{ds(1/p-1/q)} \Omega(2^{-s}).$$

Далі, оскільки $\Omega(t)$ задовольняє умову (S) з $d(1/p - 1/q) < \alpha < d/p$, то має місце співвідношення

$$\frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} \ll \frac{\Omega(2^{-\frac{qn}{2}})}{2^{-\alpha \frac{qn}{2}}}, \quad s \ge \frac{qn}{2}.$$

Таким чином,

$$I_2 \ll \sum_{s \ge \frac{qn}{2}} 2^{ds(1/p-1/q)} \frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-\alpha s} \ll$$

$$\ll \frac{\Omega(2^{-\frac{qn}{2}})}{2^{-\alpha\frac{qn}{2}}} \sum_{s\geq \frac{qn}{2}} 2^{-s(\alpha-d(1/p-1/q))} \ll$$

$$\ll \Omega(2^{-\frac{qn}{2}}) 2^{\frac{qn}{2}d(1/p-1/q)} \asymp \Omega(M^{-\frac{q}{2d}}) M^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \qquad (14)$$

Отже, підставляючи (13) і (14) в (12), одержимо необхідну оцінку зверху для величини $e_M(B^{\Omega}_{p,\infty})_q$, а звідси — і для величини $e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$, $1 \leq \theta < \infty$.

Перейдемо до доведення в (12) оцінки знизу. Для цього скористаємося співвідношенням, яке випливає з більш загального результату С.М. Нікольського (див., наприклад, [21, с. 25]):

$$e_M(f)_q = \inf_{\Theta_M} \sup_{\substack{P\in L^{\perp}(\Theta_M)\\ \|P\|_{q'}\leq 1}} \Big| \int_{\pi^d} f(x)P(x)dx \Big|, \qquad (15)$$

де $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, а $L^{\perp}(\Theta_M)$ — множина функцій, ортогональних підпростору тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік з множини Θ_M.

Нехай M — довільне натуральне число, а $n \in \mathbb{N}$, як і при проведенні оцінки зверху, виберемо з умови $2^{dn} < M \leq 2^{d(n+1)}$. Розглянемо функцію

$$F_{q,n}(x) = \sum_{\substack{|k_j|<2^{[\frac{qn}{2}]}\\ j=\overline{1,d}}} e^{i(k,x)}, \qquad (16)$$

на основі якої побудуємо функцію $P(x)$, яка задовольняє умови рівності (15).

Нехай Θ_M — довільний набір векторів з цілочисельними координатами. Покладемо

$$g(x) = F_{q,n}(x) - \sum_{k\in\Theta_M}{}^{*} e^{i(k,x)},$$

де $\sum\limits_{k\in\Theta_M}{}^{*} e^{i(k,x)}$ — поліном, який містить лише ті доданки функції $F_{q,n}(x)$, що мають "номери" з Θ_M.

Оскільки (див., наприклад, [8])

$$\Big\| \sum_{\substack{|k_j|<2^l \\ j=\overline{1,d}}} e^{i(k,\cdot)} \Big\|_q \asymp 2^{dl(1-1/q)}, \quad 1<q<\infty, \tag{17}$$

то при $1<q'<2$ з (17) знаходимо

$$\|g\|_{q'} \le \|F_{q,n}\|_{q'} + \Big\| \sum_{k\in\Theta_M}{}^{*} e^{i(k,\cdot)} \Big\|_2 \ll 2^{\frac{qn}{2}d(1-1/q')} + \sqrt{M} \asymp 2^{\frac{dn}{2}} + 2^{\frac{dn}{2}} \asymp 2^{\frac{dn}{2}}.$$

Звідси випливає, що функція

$$P_1(x) = C_3 2^{-\frac{dn}{2}} \Big(\sum_{\substack{|k_j|<2^{[\frac{qn}{2}]} \\ j=\overline{1,d}}} e^{i(k,x)} - \sum_{k\in\Theta_M}{}^{*} e^{i(k,x)} \Big), \tag{18}$$

із відповідною сталою $C_3>0$ задовольняє умови із (15).

В якості $f(x)$ із (15) вибираємо функцію

$$f_{p,n}(x) = C_4 \Omega(2^{-\frac{qn}{2}}) 2^{\frac{qn}{2}d(1/p-1)} F_{q,n}(x), \quad C_4>0, \tag{19}$$

і покажемо, що з деякою сталою $C_4>0$ вона належить класу $B^{\Omega}_{p,1}$.

Дійсно, виходячи з (6), (16) та (17), маємо

$$\|f_{p,n}\|_{B^{\Omega}_{p,1}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\|(f_{p,n})_s\|_p}{\Omega(2^{-s})} \ll \Omega(2^{-\frac{qn}{2}}) 2^{\frac{qn}{2}d(1/p-1)} \sum_{s=0}^{[\frac{qn}{2}]} \frac{\|(F_{q,n})_s\|_p}{\Omega(2^{-s})} \asymp$$

$$\asymp \Omega(2^{-\frac{qn}{2}}) 2^{\frac{qn}{2}d(1/p-1)} \sum_{s=0}^{[\frac{qn}{2}]} \frac{2^{ds(1-1/p)}}{\Omega(2^{-s})} \ll$$

$$\ll \Omega(2^{-\frac{qn}{2}}) 2^{\frac{qn}{2}d(1/p-1)} 2^{\frac{qn}{2}d(1-1/p)} \sum_{s=0}^{\frac{qn}{2}} \frac{\Omega^{-1}(2^{-s})}{2^{\alpha s}} 2^{\alpha s} \ll$$

$$\ll \Omega(2^{-\frac{qn}{2}}) \Omega^{-1}(2^{-\frac{qn}{2}}) 2^{-\alpha\frac{qn}{2}} 2^{\alpha\frac{qn}{2}} = 1.$$

Таким чином, підставивши (18) і (19) в (15), отримуємо

$$e_M(f_{p,n})_q \geq \inf_{\Theta_M} \Big| \int\limits_{\pi^d} f_{p,n}(x) P_1(x) dx \Big| \gg$$

$$\gg \Omega(2^{-\frac{qn}{2}}) 2^{\frac{qn}{2} d(1/p-1)} 2^{-\frac{dn}{2}} \Big(\|F_{q,n}\|_2^2 - M \Big) \asymp$$

$$\asymp \Omega(2^{-\frac{qn}{2}}) 2^{\frac{qn}{2} d(1/p-1)} 2^{-\frac{dn}{2}} 2^{\frac{qdn}{2}} =$$

$$= \Omega(2^{-\frac{qn}{2}}) 2^{\frac{qn}{2} d(1/p-1/q)} \asymp \Omega(M^{-\frac{q}{2d}}) M^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Теорему доведено.

1. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483 – 522.
2. *Li Yongping, Xu Guiqiao.* The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes // Journal of Complexity. — 2002. — **18**(4). — P. 815 – 832.
3. *Пустовойтов Н.Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — **20**. — P. 35 – 48.
4. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1997. — **219**. — С. 356 – 377.
5. *Бесов О.В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения. // Докл. АН СССР. — 1959. — **126**, №6. — С. 1163 – 1165.
6. *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1951. — **38**. — С. 244–278.
7. *Стечкин С.Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. — 1955. — **102**, №1. — С. 37 – 40.
8. *Исмагилов Р.С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими полиномами // Успехи мат. наук. — 1974. — **29**, № 3. — С. 161–178.
9. *Темляков В.Н.* О приближении периодических функций многих переменных // Докл. АН СССР. — 1984. — **279**, №2. — С. 301 – 305.
10. *Белинский Э.С.* Приближение "плавающей" системой экспонент на классах периодических гладких функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1987. — **180**. — С. 46 – 47.

11. *Белинский Э.С.* Приближение "плавающей" системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль: Яросл. ун-т, 1988. — С. 16–33.

12. *Романюк А.С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. матем. — 2003. — **67**, № 2. — С. 61 – 100.

13. *Романюк А.С.* Аппроксимативные характеристики изотропных классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, №4. — С. 513 – 523.

14. *DeVore R.A., Temlyakov V.N.* Nonlinear approximation by trigonometric sums // J. Fourier Anal. Appl. — 1995. — **2**, № 1. — P. 29 – 48.

15. *Конограй А.Ф., Стасюк С.А.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 9. — С. 1206–1224.

16. *Войтенко С.П.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 9. — С. 1189–1199.

17. *Кашин Б.С.* О поперечниках классов Соболева малой гладкости // Вестн. Моск. ун-та. Мат. и мех. — 1981. № 5. — С. 50–54.

18. *Стасюк С.А.* Наилучшее m-членное тригонометрическое приближение классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ функций малой гладкости //Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 1. — С. 104–111.

19. *Xu Guiqiao.* The n-widths for a generalized periodic Besov classes // Acta Mathematica Scientia. — 2005. — **25B**(4). — P. 663 – 671.

20. *Лизоркин П.И.* Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношения с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$ // Сибирский матем. журн. — 1968. — **9**, № 5. — С. 1127–1152.

21. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 424 с.