Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2010, Т.7, №1, 380-391

УДК 517.51

С. Я. Янченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ З КЛАСІВ БЄСОВА ЦІЛИМИ ФУНКЦІЯМИ У ПРОСТОРІ $L_q(\mathbb{R}^d)$

Exact-order estimates for the best approximation of classes $B^r_{p,\theta}$ of multivariable functions by entire functions in the space $L_q(\mathbb{R}^d)$ are obtained.

Одержано точні за порядком оцінки наближень класів Бєсова $B^r_{p,\theta}$ функцій багатьох змінних цілими функціями експоненціального типу у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$.

У даній роботі досліджується питання найкращого наближення ізотропних класів О. В. Бєсова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ і С. М. Нікольського $H^r_p(\mathbb{R}^d)$ функцій багатьох змінних у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$. В якості апарату наближення використовуються цілі функції експоненціального типу.

1. Основні позначення та допоміжні твердження. Нехай $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний евклідів простір з елементами $x = (x_1, ..., x_d)$, $(x, y) = x_1y_1 + ... + x_dy_d$ і $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, — простір вимірних функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_q := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \ 1 \leqslant q < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|.$$

Для $k \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}^d$ та $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ позначимо через $\Delta^k_h f(x)$ кратну різницю

$$\Delta^k_h f(x) = \Delta_h \Delta^{k-1}_h f(x),$$

де $\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x)$ і $\Delta^0_h f(x) = f(x)$.

Означимо модуль k-го порядку функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, який будемо позначати $\omega_k(f, t)_p$, такою формулою:

$$\omega_k(f,t)_p = \sup_{|h|\leqslant t} \|\Delta_h^k f(\cdot)\|_p,$$

де $|h| = \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_d^2}$.

Будемо говорити, що функція $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ належить простору $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $1 \leqslant\ p \leqslant \infty, r > 0$, якщо

$$\left(\int\limits_0^\infty (t^{-r}\omega_k(f,t)_p)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} < \infty \quad \text{при} \quad 1 \leqslant \theta < \infty$$

і

$$\sup_{t>0} \omega_k(f,t)_p t^{-r} < \infty \quad \text{при} \quad \theta = \infty.$$

Відзначимо, що при цьому виконується співвідношення $k > r$.

Якщо норму в просторі $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$ задати формулами

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_p + \left(\int\limits_0^\infty (t^{-r}\omega_k(f,t)_p)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, \ \ 1 \leqslant \theta < \infty,$$

і

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^r(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_p + \sup_{t>0} \omega_k(f,t)_p t^{-r},$$

то даний простір буде банаховим.

Простір $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$ був введений О. В. Бєсовим [1] і $B_{p,\infty}^r(\mathbb{R}^d) = H_p^r(\mathbb{R}^d)$, де $H_p^r(\mathbb{R}^d)$ — простір, який ввів С. М. Нікольський [2]. Таким чином, далі $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$ — це клас функцій $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, для яких $\|f\|_{B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1$.

Далі, для спрощення записів, замість $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$ та $H_p^r(\mathbb{R}^d)$ будемо використовувати позначення $B_{p,\theta}^r$ та H_p^r відповідно.

Відзначимо, що О. В. Бєсовим та С. М. Нікольським в [1, 3] була отримана низка результатів стосовно вкладення відповідно просторів $B_{p,\theta}^r$ і H_p^r, а також про продовження функцій з цих же просторів. Зауважимо, що подібного роду простори розглядалися в роботі [4], де було одержано аналогічні результати, з використанням іншого методу їх встановлення.

Зазначимо, що важливим для встановлення одержаних результатів є той факт, що класи $B^r_{p,\theta}$ зі зростанням параметра θ розширюються (див., наприклад, [5, с. 277]), тобто

$$B^r_{p,1} \subset B^r_{p,\theta} \subset B^r_{p,\theta'} \subset B^r_{p,\infty} = H^r_p, \quad 1 \leqslant \theta < \theta' \leqslant \infty.$$

Наведемо еквівалентне означення класів $B^r_{p,\theta}$, яким будемо користуватися в подальших міркуваннях (див., наприклад, [6, 7]). Для цього нагадаємо означення перетворення Фур'є (див., наприклад, [8]) з використанням якого дається відповідне означення.

Нехай $S = S(\mathbb{R}^d)$ — простір основних функцій Л. Шварца (див., наприклад, [9, гл. 2]). Через S' позначимо простір лінійних функціоналів над S. Зазначимо, що елементами простору S' є узагальнені функції. Якщо $f \in S'$ і $\varphi \in S$, то $\langle f, \varphi \rangle$ позначає значення f на φ.

Перетворення Фур'є $\mathfrak{F}\varphi : S \to S$ визначається за формулою:

$$(\mathfrak{F}\varphi)(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(t) e^{-i(\lambda,t)} dt \equiv \widetilde{\varphi}(\lambda),$$

де $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, $t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ і $(\lambda, t) = \sum\limits_{i=1}^{d} \lambda_i t_i$ — скалярний добуток векторів λ і t.

Обернене перетворення Фур'є задається в такий спосіб:

$$(\mathfrak{F}^{-1}\varphi)(t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\lambda) e^{i(\lambda,t)} d\lambda \equiv \widehat{\varphi}(t).$$

Перетворення Фур'є узагальнених функцій (для нього ми зберігаємо те ж позначення) визначається формулою:

$$\langle \mathfrak{F}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}\varphi \rangle, \quad \langle \widetilde{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widetilde{\varphi} \rangle,$$

де $f \in S'$, а $\varphi \in S$.

Обернене перетворення узагальнених функцій також позначимо $\mathfrak{F}^{-1}f$, й визначається воно аналогічно до прямого перетворення Фур'є за правилом:

$$\langle \mathfrak{F}^{-1}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}^{-1}\varphi \rangle, \quad \langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle.$$

Зазначимо, що для кожного $1 < p < \infty$, існує природне неперервне вкладення L_p в S' і в цьому сенсі функції з $L_p(\mathbb{R}^d)$ ототожнюються з елементами з S'.

Носієм функції f будемо називати замикання множини точок, де вона не рівна нулю, й будемо позначати *supp* f.

Для проведення подальших міркувань нагадаємо означення цілої функції експоненціального типу (див., наприклад, [5, с. 118]).

Функцію

$$g = g_\nu(z) = g_{\nu_1,\ldots,\nu_d}(z_1,\ldots,z_d),$$

де $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_d) \geqslant 0$ — невід'ємний вектор, називають цілою функцією експоненціального типу ν, якщо вона володіє такими властивостями:

1) Вона є цілою функцією за всіма змінними, тобто розкладається в кратний степеневий ряд

$$g(z) = \sum_{k\geqslant 0} a_k z_k = \sum_{\substack{k_l\geqslant 0\\ l=\overline{1,d}}} a_{k_1,\ldots,k_d} z_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot z_d^{k_d}$$

зі сталими коефіцієнтами $a_k = (a_{k_1,\ldots,k_d})$, який збігається для всіх комплексних $z = (z_1,\ldots,z_d)$.

2) Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує додатне число A_ε таке, що для всіх комплексних $z_j = x_j + iy_j$, $j = \overline{1,d}$, виконується нерівність

$$|g(z)| \leqslant A_\varepsilon \exp\sum_{j=1}^{d}(\nu_j+\varepsilon)|z_j|.$$

Далі, нехай $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$ — незалежна змінна в просторі перетворень Фур'є; $\widetilde{f}(\lambda)$ — перетворення Фур'є функції $f(x)$; $D_{2^s} = D_{2^s,\ldots,2^s} = \{\lambda : -2^s \leqslant \lambda_j \leqslant 2^s,\ \ j=\overline{1,d}\}$, $s\in\mathbb{Z}_+$.

Покладемо

$$S_{2^s}[f] = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int\limits_{D_{2^s}} \widetilde{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int\limits_{-2^s}^{2^s}\ldots\int\limits_{-2^s}^{2^s}\widetilde{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t)\prod_{i=1}^{d}\frac{\sin 2^s t_i}{t_i}dt,$$

$$f_{2^0} = f_{(0)} = S_{2^0}[f], \qquad f_{2^s} = f_{(s)} = S_{2^s}[f] - S_{2^{s-1}}[f], \quad \text{якщо} \quad s \geqslant 1.$$

Зауважимо, що $f_{(s)}$ — цілі функції, які належать $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$ (див., наприклад, [8]), перетворення Фур'є $f_{(s)}$ зосереджене в області $2^{s-1} \leqslant \max\limits_{j=\overline{1,d}} |\lambda_j| \leqslant 2^s$ і співпадає там з $\widetilde{f}$.

Функція $f(x)$ належить простору $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, $r > 0$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, тоді і тільки тоді, коли

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \Big(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sr\theta} \|f_{(s)}(\cdot)\|_p^\theta \Big)^{1/\theta} < \infty,$$

якщо $1 \leqslant \theta < \infty$, і

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \sup_{s \geqslant 0} 2^{sr} \|f_{(s)}(\cdot)\|_p < \infty, \tag{1}$$

якщо $\theta = \infty$.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$, розглянемо суму виду

$$S_n(f, x) = \sum_{s=0}^{n} f_{(s)}(x),$$

і будемо позначати

$$\mathcal{E}_n(f)_q = \|f(\cdot) - S_n(f, \cdot)\|_q.$$

Якщо $F \subset L_q(\mathbb{R}^d)$ — деякий функціональний клас, то

$$\mathcal{E}_n(F)_q = \sup_{f \in F} \mathcal{E}_n(f)_q.$$

Для $n \in \mathbb{N}^d$ введемо таке позначення:

$$G_q(D_{2^n}) = \{g \in L_q(\mathbb{R}^d) : supp \mathfrak{F} g(x) \subseteq D_{2^n}\},$$

— множина цілих функцій, носій перетворення Фур'є яких зосереджений в D_{2^n}.

Нехай $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$. Покладемо

$$E_n(f)_q = E_n(f, G_q(D_{2^n}))_q = \inf_{g \in G_q(D_{2^n})} \|f(\cdot) - g(\cdot)\|_q.$$

Дана величина називається найкращим наближенням функції $f(x)$ в метриці простору $L_q(\mathbb{R}^d)$ функціями з $G_q(D_{2^n})$.

Відповідно, для функціонального класу F покладемо

$$E_n(F)_q = \sup_{f \in F} E_n(f)_q.$$

Для додатних функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\mu_1(N) \leqslant C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$.

Зауважимо, що при $1 < q < \infty$, має місце співвідношення (див., наприклад, [7])

$$E_n(f)_q \asymp \mathcal{E}_n(f)_q. \tag{2}$$

Сформулюємо твердження, яке буде істотно використовуватися при встановленні результатів.

Теорема A [5, с. 150]. *Якщо $1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty$, то для цілої функції експоненціального типу $g = g_\nu \in L_p(\mathbb{R}^d)$ має місце нерівність (різних метрик)*

$$\|g_\nu\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2^d \Big(\prod_{j=1}^{d} \nu_k \Big)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \|g_\nu\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}. \tag{3}$$

2. Наближення класів $B^r_{p,\theta}$ цілими функціями. Основний результат роботи міститься в такому твердженні.

Теорема 1. *Нехай $1 < p, q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Тоді, якщо $r > d(1/p - 1/q)_+$, то має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_n(B^r_{p,\theta})_q \asymp E_n(B^r_{p,\theta})_q \asymp 2^{-n(r - d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+)}, \tag{4}$$

де $a_+ = \max\{a;\ 0\}$.

Доведення. Спочатку отримаємо в (4) оцінки зверху. Оскільки $B^r_{p,\theta} \subset H^r_p$, $1 \leqslant \theta < \infty$, то шукану оцінку достатньо отримати для $\mathcal{E}_n(H^r_p)_q$. В залежності від співвідношень між параметрами p і q розглянемо кілька випадків.

а) Нехай $1 < p < q < \infty$. Оскільки для $f \in H^r_p$ виконується співвідношення $\|f_{(s)}(\cdot)\|_p \ll 2^{-sr}$, то скориставшись нерівністю Мінковського та нерівністю різних метрик Нікольського (3), отримуємо

$$\|f(\cdot) - S_n(f, \cdot)\|_q = \Big\| \sum_{s=n+1}^{\infty} f_{(s)}(\cdot) \Big\|_q \leqslant \sum_{s=n+1}^{\infty} \|f_{(s)}(\cdot)\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f_{(s)}(\cdot)\|_p \leqslant \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} 2^{-sr} =$$

$$= \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-sd(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \ll 2^{-n(r-d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}.$$

б) Розглянемо випадок $1 < p = q < \infty$. Тоді для $f \in H^r_p$, з урахуванням (1), маємо

$$\|f(\cdot) - S_n(f, \cdot)\|_q = \Big\| \sum_{s=n+1}^{\infty} f_{(s)}(\cdot) \Big\|_p \leqslant \sum_{s=n+1}^{\infty} \|f_{(s)}(\cdot)\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-sr} \ll 2^{-nr}. \tag{5}$$

в) У випадку $1 < q < p < \infty$ оцінка зверху величини $\mathcal{E}_n(H^r_p)_q$ випливає з (5). Оскільки $H^r_p \subset H^r_q$, $1 < q < p < \infty$, то

$$\mathcal{E}_n(H^r_p)_q \leqslant \mathcal{E}_n(H^r_q)_q \ll 2^{-nr}.$$

Оцінки зверху для величини $\mathcal{E}_n(B^r_{p,\theta})_q$ і, таким чином, згідно із (2) для $E_n(B^r_{p,\theta})_q$ для всіх випадків встановлено.

Отримаємо тепер в (4) оцінки знизу. Оскільки має місце вкладення $B^r_{p,1} \subset B^r_{p,\theta}$, $1 < \theta < \infty$, то шукану оцінку достатньо отримати для $\mathcal{E}_n(B^r_{p,1})_q$. Іншими словами достатньо оцінити знизу величину $\|f(\cdot) - S_n(f, \cdot)\|_q$ для довільної функції $f \in B^r_{p,1}$.

Нехай спочатку має місце випадок $1 < p < q < \infty$.

Для $k \in \mathbb{N}^d$ розглянемо функцію

$$D_k(x) = \prod_{j=1}^{d} D_{k_j}(x_j),$$

де для кожного натурального k_j функція $D_{k_j}(x_j)$ визначається наступним чином:

$$D_{k_j}(x_j) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\left(2\sin\frac{x_j}{2}\cos\frac{2k_j+1}{2}x_j\right)\cdot x_j^{-1}$$

та

$$D_{\frac{1}{2}}(x_j) = D_0(x_j) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin x_j}{x_j}.$$

Тоді, як зазначено в [10], для перетворення Фур'є функції $D_k(x)$ має місце співвідношення

$$\mathfrak{F}D_k(x) = \chi_k(x) = \prod_{j=1}^{d}\chi_{k_j}(x_j),$$

де

$$\chi_{k_j}(x_j) = \begin{cases} 1, & k_j < |x_j| < k_j+1; \\ \frac{1}{2}, & |x_j| = k_j \text{ або } |x_j| = k_j+1; \\ 0, & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

$$\chi_0(x_j) = \begin{cases} 1, & |x_j| < 1; \\ \frac{1}{2}, & |x_j| = 1; \\ 0, & |x_j| > 1. \end{cases}$$

Відповідно, для оберненого перетворення будемо мати

$$\mathfrak{F}^{-1}\chi_k(t) = D_k(x).$$

Враховуючи функції $D_k(x)$, побудуємо функцію, яка належить класу $B^r_{p,1}$.

Оцінимо спочатку $\left\|\sum\limits_{|k|=2^n}^{2^{n+1}-1} D_k(\cdot)\right\|_q$, при $1<q<\infty$. Маємо

$$\left\|\sum_{|k|=2^n}^{2^{n+1}-1} D_k(\cdot)\right\|_q = \left\|\sum_{|k|=2^n}^{2^{n+1}-1}\prod_{j=1}^{d} D_{k_j}(x_j)\right\|_q = \left\|\prod_{j=1}^{d}\sum_{|k|=2^n}^{2^{n+1}-1} D_{k_j}(x_j)\right\|_q =$$

$$= \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 2^{n+1}x_j - \sin 2^n x_j}{x_j} \right\|_q =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{d} \int\limits_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \frac{\sin 2^{n+1}x_j - \sin 2^n x_j}{x_j} \right|^q dx_j \right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp \left(\prod_{j=1}^{d} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin 2^{n-1}x_j}{x_j} \right|^q dx_j \right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp 2^{nd(q-1)/q} \left(\prod_{j=1}^{d} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin x_j}{x_j} \right|^q dx_j \right)^{\frac{1}{q}} \asymp 2^{nd(q-1)/q} = 2^{nd/q'}. \qquad (6)$$

Покладемо

$$F_n(x) = \sum_{|k|=2^n}^{2^{n+1}-1} D_k(x).$$

Тоді, скориставшись (6), будемо мати

$$\|F_n\|_{B^r_{p,1}} = \sum_s 2^{sr} \|(F_n)_{(s)}\|_p \asymp 2^{(n+1)r} \|F_n\|_p \asymp$$

$$\asymp 2^{(n+1)r} 2^{nd(1-\frac{1}{p})} \asymp 2^{nd(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p})}. \qquad (7)$$

Враховуючи (7), отримаємо, що функція

$$f_1(x) = C_3 \ 2^{-nd(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p})} F_n(x),$$

з деякою константою $C_3 > 0$, належить класу $B^r_{p,1}$.

Оскільки $S_n(f_1, x) = 0$, то

$$\mathcal{E}_n(B^r_{p,1})_q \geqslant \mathcal{E}_n(f_1)_q = \|f_1(\cdot) - S_n(f_1, \cdot)\|_q =$$

$$= \|f_1(\cdot)\|_q \asymp 2^{-nd(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p})} \|F_n(\cdot)\|_q \asymp 2^{-nd(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p})} 2^{nd(1-\frac{1}{q})} =$$

$$= 2^{-n(r-d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}.$$

Оцінка знизу в даному випадку встановлена.

Розглянемо тепер випадок $1 < q \leqslant p < \infty$.

При встановленні оцінки знизу будемо використовувати наступне твердження.

Лема A [10]. *Нехай $1 < p < \infty$. Тоді для функції*

$$f(x) = \sum_{k \geqslant 0} c_k \prod_{j=1}^{d} D_{2^{k_j - 1}}(x_j)$$

виконується співвідношення

$$\|f\|_p \asymp \left(\sum_{k \geqslant 0} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тепер розглянемо функцію

$$f_2(x) = C_4 2^{-nr} \prod_{j=1}^{d} D_{2^n}(x_j), \quad C_4 > 0.$$

Оцінимо спочатку $\Big\| \prod\limits_{j=1}^{d} D_{2^n}(x_j) \Big\|_p$, $1 < p < \infty$. Маємо

$$\Big\| \prod_{j=1}^{d} D_{2^n}(x_j) \Big\|_p \ll \Big\| \prod_{j=1}^{d} \Big| \frac{\sin(x_j/2)}{x_j} \Big| \Big\|_p =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} \Big| \frac{\sin(x_j/2)}{x_j} \Big|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} \ll \left(\prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} \Big| \frac{\sin x_j}{x_j} \Big|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} = C_5.$$

Далі, оскільки $(f_2)_{(s)} = 0$, при $s > n$, то для функції $f_2(x)$ можемо записати

$$\|f_2\|_{B^r_{p,1}} = \sum_s 2^{sr} \|(f_2)_{(s)}\|_p \asymp \sum_s 2^{sr} \Big\| 2^{-nr} \prod_{j=1}^{d} D_{2^n}(x_j) \Big\|_p \ll$$

$$\ll 2^{nr} 2^{-nr} \Big\| \prod_{j=1}^{d} D_{2^n}(x_j) \Big\|_p = C_6.$$

Отже, функція $f_2(x)$ належить класу $B^r_{p,1}$ з деякою константою $C_4 > 0$.

Насамкінець, оскільки $S_n(f_2, x) = 0$, то, скориставшись лемою А, отримуємо

$$\mathcal{E}_n(B^r_{p,1})_q \geqslant \mathcal{E}_n(f_2)_q = \|f_2(\cdot) - S_n(f_2, \cdot)\|_q =$$

$$= \|f_2(\cdot)\|_q = \left\|2^{-nr} \prod_{j=1}^{d} D_{2^n}(x_j)\right\|_q \asymp 2^{-nr}.$$

Оцінки знизу в (4) встановлено.

Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо $d = 1$, то класи $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R})$ збігаються з класами $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R})$ (див., [10, 11]) і відповідні оцінки величин $E_n(S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}))$ та $\mathcal{E}_n(S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}))$ у випадках $1 < p = q < \infty$ та $1 < p < q < \infty$ встановлено в роботі [10], а у випадку $1 < q < p < \infty$, $p \geqslant 2$ — в роботі [12].

Наслідок 1. *Якщо $d = 1$ і $1 < q < p < 2$, то згідно з (4) мають місце співвідношення*

$$E_n(S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}))_q \asymp \mathcal{E}_n(S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}))_q \asymp 2^{-nr}.$$

Цей результат доповнює оцінки, що були встановлені в [10] для відповідних величин для інших співвідношень між параметрами p і q.

На завершення роботи зазначимо, що порядкові оцінки величини найкращого наближення класів $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних тригонометричними поліномами зі спектром у відповідних областях встановлено в [13]. Також відмітимо, що питання найкращого наближення цілими функціями експоненціального типу у просторі $L_2(\mathbb{R}^d)$ розглядалися в роботі [14].

1. *Бесов О.В.* О некотором семействе функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1961. — **60**. — С. 42 – 81.

2. *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1951. — **38**. — С. 244 – 278.

3. *Никольский С.М.* Об одном семействе функциональных пространств // Успехи мат. наук. — 1956. — **11**, в. 6 (72). — С. 203 – 212.
4. *Ильин В.П., Солонников В.А.* О некоторых свойствах дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1962. — **66**. — С. 205 – 227.
5. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969. — 480 с.
6. *Лизоркин П.И.* О преобразовании Фурье в пространствах Бесова. Нулевая шкала $B^0_{p,\theta}$ // Докл. АН СССР. — 1965. — **163**, № 6. — С. 1318 – 1321.
7. *Лизоркин П.И.* Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношение с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$ // Сиб. мат. журн. — 1968. — **9**, № 5. — С. 1127 – 1152.
8. *Лизоркин П.И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1969. — **105**. — С. 89 – 167.
9. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1967. — 436 с.
10. *Wang Heping, Sun Yongsheng.* Approximation of multivariate functions with certain mixed smoothness by entire functions// Northeast. Math. J. — 1995. — **11(4)**. — С. 454 – 466.
11. *Аманов Т.И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{r*}_{p,\theta}B$ $(0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi;\ j = 1, \ldots, n)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1965. — **77**. — С. 5 – 34.
12. *Янченко С.Я.* Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ функцій багатьох змінних у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$ // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 1. — С. 123 – 135.
13. *Романюк А.С.* Приближение изотропных классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **5**, № 1. — С. 263 – 278.
14. *Stepanets A.I., Shidlich A.L.* Best approximation of integrals by integrals of finite rank// J. Approx. Theory. — 2010. — **162**. — С. 323 – 348.