УДК 519.652+517.548.5

Л. А. Янович (Ин-т математики НАН Беларуси, Минск)
Ю. В. Романовский (Белорусский гос. ун-т, Минск)

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ МАТРИЧНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ*

The problem of interpolation of multivariate matrix functions is considered. Interpolation polynomials are built both for stationary and for functional matrices. Some examples are given.

Рассматривается задача интерполирования функций многих матричных переменных. Построены интерполяционные многочлены на множествах стационарных и функциональных матриц. Приведены примеры.

Введение. Функции от одной и многих матричных переменных находят применение как в ряде областей самой математики, так и в многочисленных ее приложениях. Теория приближений, в том числе и теория интерполяции, в особенности функций многих матричных переменных разработана еще недостаточно полно. Дальнейшее развитие этого направления прикладной математики вызывает интерес как в теоретическом, так и в прикладном отношении. Ряд вопросов теории интерполирования лагранжева, эрмитова и других типов для функций от одной матричной переменной исследован в работах [1–5]. В данной статье продолжены исследования в этом направлении для случая функций многих матричных переменных: построены интерполяционные формулы разной структуры как на множестве постоянных матриц, так и на функциональных матрицах. Теория аналитических функций от многих матриц и счетного множества матриц, а также применение таких функций в теории обыкновенных дифференциальных уравнений рассмотрены в монографии [6]. Основы теории интерполирования операторов в общих линейных, гильбертовых и функциональных пространствах изложены в [7], интерполирование функционалов от многих переменных — в [8]. Пусть

---

*Работа выполнена в соответствии с заданием Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект №Ф09К–005).

$A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$, где A_k, $k = \overline{1,n}$ — квадратные или прямоугольные матрицы одинаковой размерности, $F(A) = F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ — заданная функция, принимающая матричные значения соответствующей размерности. Рассмотрим сначала интерполяционные алгебраические матричные многочлены первой и второй степеней.

1. Формулы линейной и квадратичной интерполяции. Пусть $A(t) = \big(A_1(t), A_2(t), \ldots, A_n(t)\big)$, а $B_0(t) = \big(B_{10}(t), B_{20}(t), \ldots, B_{n0}(t)\big)$ и $B_1(t) = \big(B_{11}(t), B_{21}(t), \ldots, B_{n1}(t)\big)$ — узлы интерполирования, причем координаты вектор-матриц $A(t)$, $B_0(t)$, $B_1(t)$ являются квадратными матрицами одинаковой размерности, координаты $\big[B_{k1}(t) - B_{k0}(t)\big]$, $k = \overline{1,n}$ непрерывного на отрезке $T = [a,b]$ вектора $B_1(t) - B_0(t)$ обратимы и значение функции F также является матрицей этой же размерности. Для любого матричного вектора $A(t)$ под $A^{-1}(t)$ будем понимать вектор $A^{-1}(t) = \big(A_1(t)^{-1}, A_2(t)^{-1}, \ldots, A_n(t)^{-1}\big)$, а для векторов $A(t) = \big(A_1(t), A_2(t), \ldots, A_n(t)\big)$ и $B(t) = \big(B_1(t), B_2(t), \ldots, B_n(t)\big)$ через $\big(A(t), B(t)\big)$ обозначим их "скалярное" произведение: $\big(A(t), B(t)\big) = \sum\limits_{j=1}^{n} A_j(t)B_j(t)$. Тогда для матричного многочлена

$$L_{10}(A) = F(B_0) + \int\limits_T l_{10}(A(\tau))d_\tau F\big[B_0(\cdot) + g(\tau,\cdot)\big(B_1(\cdot) - B_0(\cdot)\big)\big], \quad (1)$$

где $B_1(t) - B_0(t) = \big(B_{11}(t) - B_{10}(t), B_{21}(t) - B_{20}(t), \ldots, B_{n1}(t) - B_{n0}(t)\big)$,

$$l_{10}(A(\tau)) = \frac{1}{n}\big(A(\tau) - B_0(\tau), \big(B_1(\tau) - B_0(\tau)\big)^{-1}\big) =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big[A_k(\tau) - B_{k0}(\tau)\big]\big[B_{k1}(\tau) - B_{k0}(\tau)\big]^{-1},$$

а $g(\tau,t)$ — скалярная функция, для которой $g(a,t) \equiv 0$, $g(b,t) \equiv 1$, выполняются интерполяционные условия $L_{10}(B_i) = F(B_i)$, $i \in \{0,1\}$. Эти же интерполяционные условия также выполняются и для матричного многочлена первой степени

$$L_{01}(A)=F(B_0)+\int_T l_{01}(A(\tau))l_{01}^{-1}(B_1(\tau))d_\tau F\big[B_0(\cdot)+g(\tau,\cdot)\big(B_1(\cdot)-B_0(\cdot)\big)\big], \quad (2)$$

где

$$l_{01}(A(\tau)) = \big(A(\tau)-B_0(\tau), B_1(\tau)-B_0(\tau)\big) = \\ = \sum_{\nu=1}^{n}\big(A_\nu(\tau)-B_{\nu 0}(\tau)\big)\big(B_{\nu 1}(\tau)-B_{\nu 0}(\tau)\big).$$

Формулы (1) и (2) содержат соответственно обратные матрицы $\big[B_{k1}(\tau)-B_{k0}(\tau)\big]^{-1}$, $k=\overline{1,n}$ и $\big(B_1(\tau)-B_0(\tau), B_1(\tau)-B_0(\tau)\big)^{-1}$, практическое построение которых относится к достаточно трудоемкой задаче. Приведем пример узлов интерполирования, для которых эта задача решается элементарно. Такими узлами будут в частности

$$B_1(\tau)=\big(\beta_{11}(\tau)I+H_1(\tau),\beta_{21}(\tau)I+H_2(\tau),\ldots,\beta_{n1}(\tau)I+H_n(\tau)\big), \\ B_0(\tau)=\big(\beta_{10}(\tau)I+H_1(\tau),\beta_{20}(\tau)I+H_2(\tau),\ldots,\beta_{n0}(\tau)I+H_n(\tau)\big), \quad (3)$$

где вектора $\beta_1(\tau)$ и $\beta_0(\tau)$ с числовыми координатами $\beta_{\nu 1}(\tau)$ и $\beta_{\nu 0}(\tau)$ таковы, что $\beta_{\nu 1}(\tau)-\beta_{\nu 0}(\tau)\neq 0$ для $\tau\in T$, а единичная матрица I и произвольные матрицы $H_\nu(\tau)$, $\nu=\overline{1,n}$ той же размерности, что и компоненты матрицы $A(\tau)$. В этом случае формулы (1) и (2) приобретают вид

$$L_{10}(A)=F(B_0)+\frac{1}{n}\int_T\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k(\tau)-B_{k0}(\tau)}{\beta_{k1}(\tau)-\beta_{k0}(\tau)}d_\tau F\big[B_0(\cdot)+g(\tau,\cdot)\big(B_1(\cdot)-B_0(\cdot)\big)\big],$$

$$L_{01}(A)=F(B_0)+\int_T\frac{l_{01}(A(\tau))}{\sum\limits_{k=1}^{n}\big[\beta_{1\nu}(\tau)-\beta_{0k}(\tau)\big]^2}d_\tau F\big[B_0(\cdot)+g(\tau,\cdot)\big(B_1(\cdot)-B_0(\cdot)\big)\big].$$

Аналогом формулы (1) на множестве постоянных матриц по узлам B_0 и B_1 является интерполяционный многочлен

$$L_{10}(A) = (A-B_1,B_0-B_1)(B_0-B_1,B_0-B_1)^{-1}F(B_0) + \\ +(A-B_0,B_1-B_0)(B_1-B_0,B_1-B_0)^{-1}F(B_1), \quad (4)$$

а его ньютоновский вариант соответственно будет иметь вид

$$L_{10}(A)=F(B_0)+(A-B_0,B_1-B_0)(B_1-B_0,B_1-B_0)^{-1}\big[F(B_1)-F(B_0)\big]. \quad (5)$$

Многочлен первой степени

$$L_1(A) = F(B_0) + (A - B_0, C) +$$
$$+\frac{1}{n}\big[F(B_1) - F(B_0) - (B_1 - B_0, C)\big]((B_1 - B_0)^{-1}, A - B_0),$$

где $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ — произвольная вектор-матрица, также является интерполяционным для функции $F(A)$ относительно узлов B_0 и B_1. В случае стационарных узлов вида (3) интерполяционные многочлены (4) и (5) принимают соответственно вид

$$L_{10}(A) = \frac{(A - B_1, B_0 - B_1)}{(\beta_0 - \beta_1, \beta_0 - \beta_1)}F(B_0) + \frac{(A - B_0, B_1 - B_0)}{(\beta_1 - \beta_0, \beta_1 - \beta_0)}F(B_1),$$
$$L_{10}(A) = F(B_0) + \frac{(A - B_0, B_1 - B_0)}{(\beta_1 - \beta_0, \beta_1 - \beta_0)}\big[F(B_1) - F(B_0)\big]. \quad (6)$$

Одна из формул квадратичной интерполяции с узлами B_0, B_1, B_2 имеет вид

$$L_2(A) = l_{20}(A)F(B_0) + l_{21}(A)F(B_1) + l_{22}(A)F(B_2), \quad (7)$$

где

$$l_{20}(A)=(A-B_1,B_0-B_1)(A-B_2,B_0-B_2)(B_0-B_2,B_0-B_2)^{-1}(B_0-B_1,B_0-B_1)^{-1},$$
$$l_{21}(A)=(A-B_0,B_1-B_0)(A-B_2,B_1-B_2)(B_1-B_2,B_1-B_2)^{-1}(B_1-B_0,B_1-B_0)^{-1},$$
$$l_{22}(A)=(A-B_0,B_2-B_0)(A-B_1,B_2-B_1)(B_2-B_1,B_2-B_2)^{-1}(B_2-B_0,B_2-B_0)^{-1}.$$

Ньютоновским вариантом формулы (7) является интерполяционная формула

$$L_2(A) = L_{10}(A) + \big[F(B_2) - L_{10}(B_2)\big]l_2^{-1}(B_2)l_2(A),$$

где $l_2(A) = (A - B_0, B_2 - B_0)(A - B_1, B_2 - B_1)$, для которой также выполняются интерполяционные условия $L_2(B_1) = F(B_i)$, $i = 0, 1, 2$.

Эта же формула в случае узлов B_0, B_1 и B_2 вида (3) соответственно будет иметь вид

$$L_2(A) = L_{10}(A) + \big[F(B_2) - L_{10}(B_2)\big] \frac{(A - B_0, B_2 - B_0)(A - B_1, B_2 - B_1)}{(\beta_2 - \beta_0, \beta_2 - \beta_0)(\beta_2 - \beta_1, \beta_2 - \beta_1)},$$

где $L_{10}(A)$ — одна из формул (6). Приведем в случае прямоугольных матриц одну из формул вида $P_{10}(A) = C + (A, D)$, где матрица C и матрицы $A_i D_j$ в "скалярном" произведении $(A, D) = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i D_i$ векторов $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ и $D = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$ имеют одинаковую размерность. Такой интерполяционной формулой будет матричный многочлен

$$L_{10}(A) = F(B_0) + (B_0 - A, B_0 - B_1)\big\{(B_0 - B_1, B_0 - B_1)^{+}\big[F(B_1) - F(B_0)\big] + N\big\},$$

где $(B_0 - B_1, B_0 - B_1)^{+}$ — псевдообратная матрица Мура–Пенроуза для $(B_0 - B_1, B_0 - B_1)$, $N \in \ker\{(B_0 - B_1, B_0 - B_1)\} = \{N : \big(B_0 - B_1, B_0 - B_1\big)N = 0\}$. Эта формула имеет место при выполнении условий $F(B_1) - F(B_0) = (B_0 - B_1, B_0 - B_1)V$, где V — некоторая матрица. Равенство $L_{10}(B_1) = F(B_1)$ выполняется в силу предыдущего соотношения и того, что $N \in \ker\{(B_0 - B_1, B_0 - B_1)\}$.

1.1 Интерполяционные формулы для дифференцируемых функций. Рассмотрим сначала формулу линейной интерполяции. Пусть $B_0(t)$ и $B_1(t)$ — узлы интерполирования и оператор $F(A)$ дифференцируем по Гато в точке $A = B_0 + \tau(B_1 - B_0)$, где τ — числовой параметр $(0 \le \tau \le 1)$. Через $\delta_{A_k} F[B; H]$ обозначим частный дифференциал Гато по A_k функции $F(A)$ в точке $A = B$ по направлению H. Рассмотрим далее формулу вида

$$L_1(A) = F(B_0) + \sum_{\nu=1}^{n} \int_0^1 \delta_{A_\nu} F[B_0 + \tau(B_1 - B_0); A_\nu - B_{\nu 0}]d\tau,$$

или в более компактной записи:

$$L_1(A) = F(B_0) + \int_0^1 \delta F[B_0 + \tau(B_1 - B_0); A - B_0]d\tau. \tag{8}$$

По определению дифференциал $\delta F[A;H]$ функции $F(A)$ в точке $A=(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ по направлению $H=(h_1,h_2,\ldots,h_n)$ задается формулой $\delta F[A;H]=\sum\limits_{\nu=1}^{n}\delta_{A_k}F[A;h_k]$, где $\delta_{A_k}F[A;h_k]$ означает частный дифференциал Гато по переменной A_k функции $F(A)$ по направлению h_k относительно этой переменной. Далее будем использовать равенство

$$\delta F[A+\tau H;H]=F'_\tau(A+\tau H)=F'_\tau(A_1+\tau h,A_2+\tau h_2,\ldots,A_n+\tau h_n). \quad (9)$$

Так как $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\delta_{A_\nu}F[B_0+\tau(B_1-B_0);A_\nu-B_{\nu 0}]=F'_\tau(B_0+\tau(B_1-B_0))$ при $A=B_1$, то для формулы (8) будет выполняться равенство $L_1(B_1)=F(B_1)$. Очевидно, что $L_1(B_0)=F(B_0)$. Интерполяционная формула (8) инвариантна относительно матричных многочленов первой степени вида $P_1(A)=C+\sum\limits_{\nu=1}^{n}\int\limits_T C_{\nu 1}(t)A_\nu(t)C_{\nu 2}(t)dt$, где C, $C_{\nu 1}(t)$ и $C_{\nu 2}(t)$ — заданные матрицы. В самом деле,

$$\delta P_1[B_0+\tau(B_1-B_0);A-B_0]=\sum_{\nu=1}^{n}\int\limits_T C_{\nu 1}(t)\big(A_\nu(t)-B_{\nu 0}(t)\big)C_{\nu 2}(t)dt=$$
$$=P_1(A)-P_1(B_0).$$

Отсюда следует, что $L_1(A)\equiv F(A)$ для $F(A)=P_1(A)$. Рассмотрим далее еще один вариант формулы квадратичной интерполяции. Пусть заданы узлы интерполирования $B_i=B_i(t)$, $i=0,1,2$, функция $F(A)$ дважды дифференцируема по Гато в точке $A=B_0+\tau(B_1-B_0)+\tau s(B_2-B_1)$ по направлениям $H_1=H_1(t)$ и $H_2=H_2(t)$, где $t\in T$, $0\le\tau,s\le 1$. Тогда матричный многочлен второй степени

$$L_2(A)=F(B_0)+\int\limits_0^1\delta F[B_0+\tau(B_1-B_0);A-B_0]d\tau+$$
$$+\int\limits_0^1\int\limits_0^1\tau\delta^2F[B_0+\tau(B_1-B_0)+\tau s(B_2-B_1);(A-B_0)(A-B_1)]d\tau ds, \quad (10)$$

где $\delta^2 F[A; H_1 H_2]$ — дифференциал Гато второго порядка в точке A по направлениям H_1 и H_2, является интерполяционным для $F(A)$ относительно узлов B_0, B_1 и B_2. Выполнение условия $L_2(B_0) = F(B_0)$ очевидно; $L_2(B_1) = F(B_1)$ выполняется в силу равенства (9), а также обращения в ноль двойного интеграла в (10). Для проверки совпадения $L_2(A)$ и $F(A)$ в узле B_2 необходимо воспользоваться равенством вида

$$\frac{\partial}{\partial s}\delta F[B + \tau H_1 + \tau s H_2; H_2] = \tau\delta^2 F[B + \tau H_1 + \tau s H_2; H_1 H_2], \qquad (11)$$

где B — фиксированная матрица, $H_1 = (h_{11}, h_{21}, \ldots, h_{n1})$ и $H_2 = (h_{12}, h_{22}, \ldots, h_{n2})$ — произвольные направления, при которых операции дифференцирования в (11) возможны. Равенство (11) получено в результате использования определения дифференциала Гато второго порядка и понятие производной абстрактной функции скалярного аргумента. Действительно,

$$\tau\delta^2 F[B + \tau H_1 + \tau s H_2; H_1 H_2] = \delta^2 F[B + \tau H_1 + \tau s H_2; H_1 \tau H_2] =$$
$$= \lim_{\lambda\to 0}\{\delta F[B + \tau H_1 + \tau(s+\lambda)H_2; H_1] - \delta F[B + \tau H_1 + \tau s H_2; H_1]\} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial s}\delta F[B + \tau H_1 + \tau s H_2; H_1].$$

С учетом этого соотношения для $B = B_0$ и $H_1 = B_1 - B_0$, $H_2 = B_2 - B_1$ получаем, что второй интеграл в точке $A = B_2$ в (10) будет равен

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\delta F[B_0 + \tau(B_1 - B_0) + \tau s(B_2 - B_1); B_2 - B_0]\,ds\,d\tau =$$
$$= \int_0^1 \delta F[B_0 + \tau(B_2 - B_0); B_2 - B_0]\,d\tau - \int_0^1 \delta F[B_0 + \tau(B_1 - B_0); B_2 - B_0]\,d\tau =$$
$$= F(B_2) - F(B_0) - \int_0^1 \delta F[B_0 + \tau(B_1 - B_0); B_2 - B_0]\,d\tau.$$

Таким образом, имеем $L_2(B_2) = F(B_2)$. Интерполяционный многочлен (10) инвариантен относительно матричных многочленов

$P_2(A) = P_1(A) + P_{22}(A)$, если $P_1(A)$ — приведенный ранее матричный многочлен первой степени, а $P_{22}(A)$ — однородный многочлен второй степени вида

$$P_{22}(A) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_T \int_T b_{ij}(t,s) A_i(t) c_{ij}(t,s) A_j(s) d_{ij}(t,s) dt ds, \tag{12}$$

где $b_{ij}(t,s)$, $c_{ij}(t,s)$ и $d_{ij}(t,s)$ — заданные функциональные матрицы. Так как $\delta^2 P_1[A; H_1 H_2] \equiv 0$, то $L_2(P_1; A) \equiv P_1(A)$. Покажем далее, что интерполяционная формула (10) точна для многочленов вида (12). Имеет место равенство

$$\delta P_{22}[A; H_1] = \sum_{i,j=1}^{n} \int_T \int_T b_{ij}(t,s) \big[h_{i1}(t) c_{ij}(t,s) A_j(s) + \\ + A_i(t) c_{ij}(t,s) h_{j1}(s) \big] d_{ij}(t,s) dt ds, \tag{13}$$

а дифференциал второго порядка $\delta^2 P_{22}[A; H_1 H_2]$ не зависит от точки A и равен

$$\delta P_{22}[A; H_1 H_2] = \sum_{i,j=1}^{n} \int_T \int_T b_{ij}(t,s) \big[h_{i1}(t) c_{ij}(t,s) h_{j2}(s) + \\ + h_{i2}(t) c_{ij}(t,s) h_{j1}(s) \big] d_{ij}(t,s) dt ds. \tag{14}$$

Для доказательства точности формулы (10) достаточно показать ее точность для многочленов вида

$$p_{ij}(A) = A_i(t) c_{ij}(t,s) A_j(s), \ \ t, s \in T; 0 \le i, j \le n.$$

Из (13) и (14) следует, в частности, что

$$\delta p_{ij}[A; H_1] = h_{i1}(t) c_{ij}(t,s) A_j(s) + A_i(t) c_{ij}(t,s) h_{j1}(s),$$
$$\delta^2 p_{ij}[A; H_1 H_2] = h_{i1} c_{ij}(t,s) h_{j2}(s) + h_{i2} c_{ij}(t,s) h_{j1}(s).$$

В случае $H_1 = A - B_0$ и $H_2 = A - B_1$ двойной интеграл в формуле (10) при $F(A) = p_{ij}(A)$ равен $p_{ij}(A) - Q(t,s)$, где

$$Q(t,s) = \frac{1}{2} \big[A_i(t) c_{ij}(t,s) \big(B_{j0}(s) + B_{j1}(s) \big) + \\ + B_{i0}(t) c_{ij}(t,s) \big(A_j(s) - B_{j1}(s) \big) + B_{i1}(t) c_{ij}(t,s) \big(A_j(s) - B_{j0}(s) \big) \big].$$

Проводя необходимые вычисления также для случая $F(A) = p_{ij}(A)$, получаем, что сумма первых двух слагаемых в формуле (10) равна $Q(t,s)$. Таким образом, показано, что интерполяционная формула (10) точна для матричных многочленов второй степени $P_2(A) = P_1(A) + P_{22}(A)$.

1.2. Интерполяционные формулы на множестве дифференцируемых матриц. Обозначим через $C_n^p[a,b]$ пространство матричных векторов $A(t) = \big(A_1(t), A_2(t), \dots, A_n(t)\big)$ с непрерывной на $T = [a,b]$ порядка p производной $A^{(p)}(t) = \big(A_1^{(p)}(t), A_2^{(p)}(t), \dots, A_n^{(p)}(t)\big)$; $B_1(t)$ и $B_2(t)$ — узлы интерполирования из этого же пространства. Положим

$$\sigma_{-1}(t) = B_0(t),$$

$$\sigma_k(t) = B_0(t) + \sum_{\nu=0}^{k} \tfrac{(t-a)^\nu}{\nu!}\big[B_1^{(\nu)}(a) - B_0^{(\nu)}(a)\big],\ k = \overline{0, p-1}.$$

Как и раньше, для матричного вектора $A(t)$ под $A^{-1}(t)$ понимается вектор $\big(A_1^{-1}(t), A_2^{-1}(t), \dots, A_n^{-1}(t)\big)$. Заметим, что на пространстве $C_n^p[a,b]$ матричные многочлены первой степени имеют вид

$$P_1(A) = C + \sum_{\nu=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{n} C_{j\nu} A_j^{(\nu)}(a) D_{j\nu} + \sum_{j=1}^{n}\int_T Q_j(t) A_j^{(p)}(t) G_j(t)dt, \tag{15}$$

где заданы матрица C и вектора $C_\nu = (C_{1\nu}, C_{2\nu}, \dots, C_{n\nu})$, $D_\nu = (D_{1\nu}, D_{2\nu}, \dots, D_{n\nu})$, $\nu = \overline{0, p-1}$, $Q(t) = \big(Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_n(t)\big)$, $G(t) = \big(G_1(t), G_2(t), \dots, G_n(t)\big)$. Приведенные далее интерполяционные матричные многочлены имеют структуры аналогичного вида. Введем следующие обозначения:

$$l_{0p}(A) = F(B_0) + \sum_{k=0}^{p-1}\big[F(\sigma_k) - F(\sigma_{k-1})\big] V_{0k}\big(A(a)\big), \tag{16}$$

$$l_{p0}(A) = F(B_0) + \sum_{k=0}^{p-1} V_{0k}\big(A(a)\big)\big[F(\sigma_k) - F(\sigma_{k-1})\big], \tag{17}$$

где $V_{0k}(A(t)) = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\big(B_{j1}^{(k)}(t) - B_{j0}^{(k)}(t)\big)^{-1}\big(A_j^{(k)}(t) - B_{j0}^{(k)}(t)\big)$,

$V_{k0}(A(t)) = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\bigl(A_j^{(k)}(t) - B_{j0}^{(k)}(t)\bigr)\bigl(B_{j1}^{(k)}(t) - B_{j0}^{(k)}(t)\bigr)^{-1}$, $k = \overline{0,p}$. Заметим при этом, что здесь обратимость матриц $B_{j1}^{(k)}(t) - B_{j0}^{(k)}(t)$, $j = \overline{1,n}$ предполагается в точке $t = a$ для $k = \overline{0, p-1}$ и только при $k = p$ на всем отрезке $[a,b]$.

Теорема 1. *Матричные многочлены*

$$L_{01}(A) = l_{0p}(A) + \int\limits_T d_\tau F\bigl[g(\tau,\cdot)\bigr]V_{0p}\bigl(A(\tau)\bigr), \tag{18}$$

$$L_{10}(A) = l_{p0}(A) + \int\limits_T V_{p0}\bigl(A(\tau)\bigr)d_\tau F\bigl[g(\tau,\cdot)\bigr], \tag{19}$$

где $g(\tau,t) = \sigma_{p-1}(t) + B_1\bigl(\min(\tau,t)\bigr) - \sigma_{p-1}\bigl(\min(\tau,t)\bigr)$, *являются интерполяционными многочленами на* $C_n^p[a,b]$ *для функции* $F(A)$ *относительно узлов* $B_0(t)$ *и* $B_1(t)$.

Доказательство. Совпадение $L_{01}(A)$ и $L_{10}(A)$ с $F(A)$ в узлах B_0 и B_1 проверяется элементарно: $V_{0k}\bigl(B_0(a)\bigr) = V_{k0}(B_0(a)) = 0$, а $V_{0k}\bigl(B_1(a)\bigr) = V_{k0}\bigl(B_1(a)\bigr) = I$ для $k = \overline{0,p-1}$, а также $V_{p0}\bigl(B_0(t)\bigr) \equiv \equiv V_{0p}\bigl(B_0(t)\bigr) \equiv 0$ и $V_{p0}\bigl(B_1(t)\bigr) \equiv V_{0p}\bigl(B_1(t)\bigr) \equiv I$ для $t \in T$. Поэтому $l_{0p}(B_0) = l_{p0}(B_0) = L_{01}(B_0) = L_{10}(B_0) = F(B_0)$. В узле B_1 имеем $l_{0p}(B_1) = l_{p0}(B_1) = F(\sigma_{p-1})$, а интегралы (18) и (19) в этом узле равны $F(B_1) - F(\sigma_{p-1})$. Таким образом, интерполяционные условия для матричных многочленов (18) и (19) имеют место.

Теорема 2. *Матричные многочлены*

$$L_{01}(A) = l_{0p}(A) + \int\limits_0^1 \delta F\bigl[\sigma_{p-1}(\cdot) + \tau\bigl(B_1(\cdot) - \sigma_{p-1}(\cdot)\bigr); H(\cdot)\bigr]d\tau, \tag{20}$$

$$L_{10}(A) = l_{p0}(A) + \int\limits_0^1 \delta F\bigl[\sigma_{p-1}(\cdot) + \tau\bigl(B_1(\cdot) - \sigma_{p-1}(\cdot)\bigr); H(\cdot)\bigr]d\tau, \tag{21}$$

где $\delta F[y;H]$ — *дифференциал Гато оператора* F *в точке* y *по направлению* H, *а*

$$H(t) = A(t) - B_0(t) - \sum_{k=0}^{p-1}\frac{(t-a)^k}{k!}\bigl[A^{(k)}(a) - B_0^{(k)}(a)\bigr], \tag{22}$$

являются интерполяционными многочленами первой степени для оператора $F(A)$ и узлов $B_0(t)$ и $B_1(t)$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы. При этом надо учесть, в частности, что для $A(t) = B_1(t)$ направление $H(t) = B_1(t) - \sigma_{p-1}(t)$ и интеграл в формулах (20) и (21) может быть вычислен. Он равен $F(B_1) - \sigma_{p-1}(t)$. Следовательно, интерполяционные условия для многочленов (20) и (21) выполняются.

2. Интерполяционные матричные многочлены произвольной степени. Пусть $F(A) = F(A_1, A_2, \dots, A_n)$ — функция от n матричных переменных $A_1, A_2, \dots, A_n$; $B_k = (B_{1k}, B_{2k}, \dots, B_{nk})$ — узлы интерполирования, $k = \overline{0, m}$. Введем, как и раньше, для векторов $A - B_\nu = (A_1 - B_{\nu 1}, A_2 - B_{\nu 2}, \dots, A_n - B_{\nu n})$ и $B_k - B_\nu = (B_{k1} - B_{\nu 1}, B_{k2} - B_{\nu 2}, \dots, B_{kn} - B_{\nu n})$ их "скалярное" произведение

$$(A - B_\nu, B_k - B_\nu) = \sum_{i=1}^{n} (A_\nu - B_{\nu i})(B_{ki} - B_{\nu i}),\ 0 \le \nu, k \le m.$$

Тогда для многочлена

$$L_m(A) = \sum_{k=0}^{m} l_k(A) l_k^{-1}(B_k) F(B_k), \tag{23}$$

где $l_k(A) = (A - B_0, B_k - B_0) \cdots (A - B_{k-1}, B_k - B_{k-1})(A - B_{k+1}, B_k - B_{k+1}) \cdots (A - B_n, B_k - B_n)$ при условии, что обратные к $l_k(B_k)$ матрицы $l_k^{-1}(B_k)$ для $k = \overline{0, m}$ существуют, будут выполняться интерполяционные условия $L_m(B_k) = F(B_k)$, $k = \overline{0, m}$. Формула (23) точна для матричных многочленов вида $P_m(A) = = \sum\limits_{k=0}^{m} l_k(A) l_k^{-1}(B_k) C_k$, где C_k — произвольные фиксированные матрицы. Действительно, если $F(A) = P_m(A)$, то в силу равенства $F(B_k) = C_k$ следует, что $L_m(A) \equiv P_m(A)$. Пусть узлы интерполирования B_k имеют вид

$$B_k = \beta_k I + H = (\beta_{1k} I + H_1, \beta_{2k} I + H_2, \dots, \beta_{nk} I + H_n), \tag{24}$$

где числовые вектора $\beta_k = (\beta_{1k}, \beta_{2k}, \dots, \beta_{nk})$ таковы, что скалярное произведение $(\beta_k - \beta_\nu, \beta_k - \beta_\nu) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\beta_{ik} - \beta_{i\nu})^2$ отлично от нуля при

$k \neq \nu$, а H_ν — как и раньше, произвольные фиксированные матрицы, $0 \le k, \nu \le m$. Тогда $l_k(B_k) = l_k(\beta_k)I$, где

$$l_k(\beta_k) = |\beta_k - \beta_0|^2 |\beta_k - \beta_1|^2 \cdots |\beta_k - \beta_{k-1}|^2 |\beta_k - \beta_{k+1}|^2 \cdots |\beta_k - \beta_n|^2,$$

и соответственно формула (23) для узлов (24) принимает вид:

$$L_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{l_k(A)}{l_k(\beta_k)} F(B_k),$$

$|\beta_k - \beta_j|$ — длина вектора $\beta_k - \beta_j$, $0 \le k, j \le m$. Рассмотрим несколько другой вариант формулы (23). Полагаем

$$\tilde{l}_{mk}(A) = l_{0,k}(A) l_{1,k}(A) \cdots l_{k-1,k}(A) l_{k+1,k}(A) \cdots l_{m,k}(A),$$

где $l_{\nu,k}(A) = \frac{1}{n}(A - B_\nu, (B_k - B_\nu)^{-1}) = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (A_\nu - B_{j\nu})(B_{j,k} - B_{j\nu})^{-1}$. Тогда для матричного многочлена

$$L_n(A) = \sum_{k=0}^{m} \tilde{l}_{mk}(A) F(B_k)$$

будут выполняться интерполяционные условия $L_n(B_\nu) = F(B_\nu)$, $\nu = \overline{0,m}$, так как $l_{\nu,k}(B_\nu) = 0$ $(\nu \neq k)$, а $l_{\nu,k}(B_k) = I$, $0 \le \nu, k \le m$. Приведем интерполяционную формулу для функций, заданных на множестве прямоугольных матриц. Предположим, что координаты A_i вектора A — это прямоугольные матрицы размерности $p \times q$, $\operatorname{rank} A_i = r$, $A_i = C_i D_i$ — скелетное разложение матрицы A_i, в котором C_i и D_i — матрицы соответственно размерностей $p \times r$ и $r \times q$, $i = \overline{1,n}$. Обозначим через K_{pq} множество всех $(p \times q)$-матриц и пусть $F : K_{pq} \to K_{p'q'}$, через S_{lr}, S_{rl} обозначим матрицы размерностей $l \times r$ и $r \times l$, $r \ge l$ соответственно вида $S_{lr} = \begin{bmatrix} I_l & 0_{l,r-l} \end{bmatrix}$, $S_{rl} = \begin{bmatrix} I_l \\ 0_{r-l,l} \end{bmatrix}$, где $0_{l,r-l}$ и $0_{r-l,l}$ — нулевые матрицы соответственно размерностей $l \times r - l$ и $r - l \times l$; $S_{lr} S_{rl} = I_l$. Пусть, как и раньше, $B_0, B_1, \ldots, B_m$ — узлы интерполирования, координаты которых также являются матрицами размерности $p \times q$. Обозначим через $\omega_{mk}(A)$ следующее выражение:

$$\omega_{mk}(A) = l_{k,0}(A) l_{k,1}(A) \cdots l_{k,k-1}(A) l_{k,k+1}(A) \cdots l_{k,m}(A),$$

где $(A - B_\nu, (B_k - B_\nu)^+)$, $(B_k - B_\nu)^+$ — матрица (Мура–Пенроуза), псевдообратная к матрице $(B_k - B_\nu)$.

Теорема 3. *Пусть* $\operatorname{rank}\omega_{mk}(B_k) = r_k$, $\operatorname{rank} F(B_k) = l_k$, *а* $\omega_{mk}(B_k) = G_k Q_k$ *и* $F(B_k) = M_k N_k$ *— соответственно скелетное разложение матриц* $\omega_{mk}(B_k)$ *и* $F(B_k)$, $k = \overline{0,m}$. *Тогда для матричного многочлена*

$$L_n(A) = \sum_{k=0}^{m} F(B_k) N_k^+ S_{l_k r_k} G_k^+ \omega_{mk}(A) Q_k^+ S_{r_k l_k} M_k^+ F(B_k)$$

при условии $l_\nu \leq r_\nu$, $\nu = \overline{0,m}$ *выполняются равенства* $L_n(B_k) = F(B_k)$, $k = \overline{0,m}$.

Доказательство. Так как $\omega_{mk}(B_\nu) = \delta_{k\nu}\omega_{mk}(B_k)$, $\omega_{mk}(B_k) = G_k Q_k$, а для матриц G_k и Q_k полного ранга имеют место равенства $G_k^+ = (G_k^* G_k)^{-1} G_k^*$ и $Q_k^+ = Q_k^*(Q_k Q_k^*)^{-1}$ (* — знак сопряжения), $G_k^+ G_k = Q_k Q_k^+ = I_{r_k}$, то получаем, что

$$\begin{aligned} L_m(B_\nu) &= F(B_\nu) N_\nu^+ S_{l_\nu r_\nu} G_\nu^+ G_\nu Q_\nu Q_\nu^+ S_{r_\nu l_\nu} M_\nu^+ F(B_\nu) = \\ &= F(B_\nu) N_\nu^+ S_{l_\nu r_\nu} S_{r_\nu l_\nu} M_\nu^+ F(B_\nu) = F(B_\nu) N_\nu^+ M_\nu^+ F(B_\nu) = \\ &= F(B_\nu) F^+(B_\nu) F(B_\nu) = F(B_\nu),\ \nu = \overline{0,m}. \end{aligned}$$

3. Примеры

3.1 Решение линейных матричных уравнений. Сначала рассмотрим уравнение относительно одной неизвестной матричной переменной

$$Ax = B, \tag{25}$$

где A и B — заданные квадратные матрицы (причем матрица A обратима), а x — искомая матрица. Решение этого уравнения представимо в виде

$$x = (x_1 - x_0)(B_1 - B_0)^{-1} B,$$

где $Ax_0 = B_0$, $Ax_1 = B_1$, т. е. по двум решениям x_0 и x_1, соответствующим правым частям B_0 и B_1, мы восстанавливаем решение для произвольной правой части B уравнения (25) по предыдущей формуле. Рассмотрим один из многомерных аналогов уравнения (25):

$$S(X) \equiv \sum_{i=1}^{n} C_i X_i D_i = G, \tag{26}$$

где матрица G, координаты искомого вектора $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и заданных векторов $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$ и $D = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$ являются квадратными матрицами одной и той же размерности. Очевидно, что уравнение (26) имеет бесконечно много решений. В случае обратимости матриц C_i, D_i, $i = \overline{1,n}$ решением уравнения (26) будет вектор X с координатами

$$X_i = C_i^{-1}(P_i G + G Q_i) D_i^{-1},\ i = \overline{1,n},$$

где квадратные матрицы P_i и Q_i удовлетворяют условиям $\sum\limits_{i=1}^{n} P_i = \alpha I$, $\sum\limits_{i=1}^{n} Q_i = \beta I$, $\alpha + \beta = 1$. Пусть $\tilde{X}_0 = (\tilde{X}_{10}, \tilde{X}_{20}, \ldots, \tilde{X}_{n0})$, $\tilde{X}_1 = (\tilde{X}_{11}, \tilde{X}_{21}, \ldots, \tilde{X}_{n1})$ – решения уравнения (26) соответственно для правых частей G_0, G_1 и фиксированных векторов $P = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$, $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$, причем обратная матрица $(G_1 - G_0)^{-1}$ существует. Тогда вектор X с координатами

$$X_i = C_i^{-1}[P_i(G_1 - G_0) + (G_1 - G_0)Q_i](G_1 - G_0)^{-1} G D_i^{-1},\ i = \overline{1,n}$$

будет решением уравнения (26) для произвольной правой части G.

3.2 Интерполяционные многочлены первой степени. Пусть $F(A) = e^{S(A)}$, где $S(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i A_i D_i$. Дифференциал Гато $\delta F[A, H]$ в точке A по направлению H этой функции находится в замкнутой форме

$$\delta F[A, H] = \int\limits_0^1 e^{(1-\tau)S(A)} S(H) e^{\tau S(A)} d\tau.$$

Соответственно, интерполяционный многочлен $L_1(A)$ для функции F и узлов B_0 и B_1 в этом случае задаётся формулой

$$L_1(A) = e^{S(B_0)} + \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 e^{(1-\tau)S[B_0 + t(B_1 - B_0)]} S(A - B_0) e^{\tau S[B_0 + t(B_1 - B_0)]} dt d\tau.$$

Очевидно, что $L_1(B_0) = e^{S(B_0)}$. Выполнение интерполяционного условия во втором узле B_1 легко проверить, если учесть, что

$$\frac{d}{d\tau}F[B_0+\tau(B_1-B_0)]=\int_0^1 e^{(1-\tau)S[B_0+t(B_1-B_0)]}S(B_1-B_0)e^{\tau S[B_0+t(B_1-B_0)]}dt.$$

Если матрицы $S(A)$, $S(B_0)$ и $S(B_1)$ взаимно коммутируют и обратная матрица $\big[S(B_1)-S(B_0)\big]^{-1}$ существует, то

$$L_1(A)=e^{S(B_0)}+S(A-B_0)S^{-1}(B_1-B_0)\big[e^{S(B_1)}-e^{S(B_0)}\big].$$

Пусть $F(A) = S^2(A)$, где $S(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_iA_iD_i$, и заданы вектора $C=(C_1,C_2,\ldots,C_n)$ и $D=(D_1,D_2,\ldots,D_n)$ с квадратными матричными компонентами. Тогда многочлен первой степени

$$L_1(A)=S^2(B_0)+\frac{1}{2}\big[S(B_0+B_1)S(A-B_0)+S(A-B_0)S(B_0+B_1)\big]$$

является интерполяционным для $F(A)$ относительно узлов B_0 и B_1.

1. *Янович Л.А.* Об одной формуле Эрмита–Биркгофа для функций матричной переменной// Докл. НАН Беларуси. 2005. — **49**, №3. — С. 30–33.
2. *Янович Л.А., Тарасевич А.В.* Сходимость интерполирования по скалярным матричным узлам в классе аналитических функций// Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. — 2006. — **14**, №2. — С. 102–111.
3. *Янович Л.А.* Приближение функций от стохастических матриц интерполяционными многочленами// Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. — 2007. — **15**, №2. — С. 121–129.
4. *Янович Л.А.* Интерполяционные формулы для аналитических функций матричной переменной// Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications. — 2007. — №2(13). — P. 84–92.
5. *Yanovich L.A., Romanovski I.V.* On matrix function interpolation// J. Numer. Appl. Math. — 2009. — №1(97). — P. 122–131.
6. *Лаппо-Данилевский И.А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1957. — 456 с.
7. *Макаров В.Л., Хлобыстов В.В., Янович Л.А.* Интерполирование операторов. — Киев: Наукова думка, 2000. — 407 с.
8. *Макаров В.Л., Хлобистов В.В., Демкiв I.I.* Iнтерполяцiя функцiоналiв багатьох змiнних// Доп. НАН Українı. — 2009. — №5. — С. 29–35.