Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2010, Т.7, №1, 36-48

УДК 517.51

Т. В. Гориславець, П. В. Задерей
(Київ. нац. ун-т технологій та дизайну)

ПРО ВІДХИЛЕННЯ $\bar{\psi}$–ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВІД ЛІНІЙНИХ СЕРЕДНІХ ЇХ РЯДІВ ФУР'Є

Estimates for the exact upper bounds deviations of functions from linear mean of their Fourier series on the classes $C_{\infty}^{\bar{\psi}}$ are obtained, which are determined by restrictions on $\bar{\psi}$-derivative entered by O.I. Stepanets. Moreover conditions less strict than the convexity are stipulated by sequences $\psi_1(k)$ and $\psi_2(k)$.

Отримано оцінки для точних верхніх граней відхилень функцій від лінійних середніх їх рядів Фур'є на класах $C_{\infty}^{\bar{\psi}}$, що визначаються обмеженнями на $\bar{\psi}$-похідну, введену О.І. Степанцем. Причому на послідовності $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$ накладаються умови менш жорсткі, ніж випуклість.

О.І.Степанець ввів поняття $\bar{\psi}$-похідної функції і на його основі визначив нові класи функцій [1, с. 149]. Сформулюємо означення $\bar{\psi}$–похідної. Нехай 2π-періодична функція є сумовною ($f \in L$) і її ряд Фур'є має вигляд:

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(f;x),$$

де $A_k(f;x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx$, $k = 0, 1, ...$.

Через $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ будемо позначати пару довільних числових послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, $k = \overline{1,\infty}$, яка задовольняє умову $\bar{\psi}^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Розглянемо ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_1(k)}{\bar{\psi}^2(k)} A_k(f;x) - \frac{\psi_2(k)}{\bar{\psi}^2(k)} \overline{A}_k(f;x) \right), \tag{1}$$

де $\overline{A}_k(f;x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx$.

Якщо ряд (1) є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, то φ назвемо $\bar\psi$-похідною функції f і будемо писати $\varphi(\cdot) = f^{\bar\psi}(\cdot)$. Якщо покласти $\psi_1(k) = \psi(k)\cos\frac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(k) = \psi(k)\sin\frac{\beta\pi}{2}$, то одержимо (ψ,β)-похідну [1, с.132].

Через $C^{\bar\psi}_\infty$ позначимо клас неперервних 2π-періодичних функцій $f(\cdot)$ $(f \in C)$ таких, що $|f^{\bar\psi}(x)| \le 1$ майже скрізь. Якщо $\psi_1(k) = \frac{1}{k^r}\cos\frac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(k) = \frac{1}{k^r}\sin\frac{\beta\pi}{2}$, то $C^{\bar\psi}_\infty = W^r_\beta, 0 \le r < \infty$.

Нехай $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $k, n = 0, 1, ...,$ $(\lambda_0^{(n)} = 1\ \forall n)$ — довільна прямокутна матриця чисел, яка ставить у відповідність кожній функції $f \in L$ послідовність рядів:

$$U_n(f;x;\Lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(n)} A_k(f;x), \quad n = 1, 2, ... \tag{2}$$

Позначимо через $\delta_n(f;x;\Lambda)$ величину

$$\delta_n(f;x;\Lambda) = f(x) - U_n(f;x;\Lambda).$$

Згідно з роботою [1, с. 177,178], якщо ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\psi_1(k)\cos kx + \psi_2(k)\sin kx)$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(n)}(\psi_1(k)\cos kx + \psi_2(k)\sin kx) \tag{3}$$

є рядами Фур'є, то для будь-якої функції $f \in C^{\bar\psi}_\infty$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\delta_n(f;x;\Lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\bar\psi}(x-t)K_n(t)dt,$$

де

$$K_n(t) = K_n(\bar\psi;\Lambda;t) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})(\psi_1(k)\cos kx + \psi_2(k)\sin kx).$$

В даній роботі будемо розглядати асимптотичну поведінку при $n \to \infty$ величини:

$$\mathscr{E}(C^{\bar\psi}_\infty; U_n(\Lambda)) = \sup_{f \in C^{\bar\psi}_\infty} \| f(x) - U_n(f;x;\Lambda) \|_C \quad . \tag{4}$$

В 1935 р. А.М. Колмогоров [3] розглянув величину

$$\mathscr{E}(W^r; S_n) = \sup_{f \in W^r} \| f(x) - S_n(f;x) \|_C ,$$

де W^r, $r \in \mathbb{N}$, — клас 2π-періодичних функцій $f(x)$, у яких $(r-1)$ похідна абсолютно неперервна і майже скрізь виконується умова $|f^{(r)}(x)| \le 1$, а $S_n(f;x)$ — частинні суми ряду Фур'є. Він показав [3], що

$$\mathscr{E}(W^r; S_n) = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad n \to \infty,$$

тобто знайшов асимптотично точну рівність для $\mathscr{E}(W^r; S_n)$.

Наступний крок в цьому питанні належить В.Т. Пінкевичу [4], який також вивчав величину $\mathscr{E}(W^r; S_n)$ на класах W^r для випадку, коли r — дробове число, причому похідну розглядав в розумінні Вейля.

В 1945 р. С.М. Нікольський [5] узагальнив ці результати на класи $W^r H^\alpha$ 2π-періодичних функцій $f(x)$, у яких існують і є неперервними похідні до r-го порядку $r \ge 0$ включно, причому

$$|f^r(x) - f^r(x')| \le |x - x'|^\alpha, \quad 0 < \alpha \le 1,$$

і на більш загальні класи $W^r H_\omega$, які визначаються опуклими модулями неперервності $\omega(t)$. Зокрема, С.М.Нікольський [5] встановив, що для будь-яких r, α, $r \ge 0$, $0 < \alpha \le 1$, має місце рівність:

$$\mathscr{E}(W^r H^\alpha; S_n) = \frac{2^{\alpha+1} \ln n}{\pi^2 n^{r+\alpha}} \int\limits_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t dt + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Дослідження А.М. Колмогорова і С.М. Нікольського поклали початок новому напрямку в теорії наближень функцій.

Задача про відшукання асимптотичних рівностей для величин

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}; U_n(\Lambda)) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \| f(x) - U_n(f;x;\Lambda) \|_C , \tag{5}$$

де $\mathfrak{M}$ — фіксований клас неперервних функцій, називається задачею Колмогорова–Нікольського, і кажуть, що вона розв'язана для класу

$\mathfrak{M}$ і методу $U_n(\Lambda)$, якщо знайдена така функція $\varphi(n) = \varphi(\mathfrak{M}; U_n; n)$, що для неї $\mathscr{E}(\mathfrak{M}; U_n(\Lambda)) = \varphi(n) + o(\varphi(n)),\ n \to \infty$. [2, с. 8-9]

Для методів сумування, що задаються довільними трикутними матрицями $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\},\ n = 0, 1, \ldots;\ k = 0, 1, \ldots, n;\ k < n$, вивчення величин (5) на класах W_α^r ($r > 0,\ \alpha$ — довільне дійсне число) функцій $f(x)$, які мають представлення у вигляді згортки:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(t) B_\alpha^r(x - t) dt,$$

де $B_\alpha^r(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r^r} \cos\left(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\right)$, $\operatorname{ess\,sup}|\varphi(t)| \le 1$, було почато Б. Надем [7]. Ці дослідження були продовжені О.П. Тіманом [8], О.В. Єфімовим [9], С.О. Теляковським [4]. Л.І. Баусов [11] поширив результати робіт [4] на випадок прямокутних (нескінченно рядкових) матриць. Найбільш загальні результати на класах W_α^r було отримано С.О. Теляковським [5]. Більш повну бібліографію з цих питань дивись в монографіях [1,2].

На класах $W_\alpha^r H^\omega$ одержували асимптотичні рівності О.В. Єфімов, М.П. Корнійчук, В.К.Дзядик, О.І. Степанець, В.Т. Гаврилюк і багато інших математиків. Досить повний огляд результатів в цій області наведено в [2].

В 1983 році О.І. Степанець ввів поняття (ψ, β)-похідної, і на основі цього поняття визначив класи $C_{\beta,\infty}^\psi$ і $C_\beta^\psi H_\omega$. Ним та його учнями було розв'язано задачу Колмогорова–Нікольського для ряду лінійних методів. Причому на функцію $\psi(\cdot)$ накладалися певні умови, зокрема умови випуклості.

В 1988 році О.І. Степанець в статті [6] поставив ряд задач і серед них задачу про заміну умови випуклості функції $\psi(\cdot)$ менш жорсткою умовою.

Ця задача для класів $C_{\beta,\infty}^\psi$ була розв'язана одним із авторів [10].

В 1996 році О.І. Степанцем [1, с. 197] було введено класи $C_\infty^{\bar{\psi}}$, і для цих класів розв'язано задачу Колмогорова–Нікольського для ряду методів $U_n(\Lambda)$, причому послідовності $\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot)$ — опуклі.

В подальшому через K будемо позначати абсолютні сталі, можливо, не однакові в різних формулах.

Нехай $\mathfrak{M}$ — множина функцій $\psi(t)$, для яких: 1) $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)=0$; 2) $\Delta^2\psi(t)\geq 0$; $\eta(t)=\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$; $\mu(t)=\frac{t}{\eta(t)-t}$, де $\psi^{-1}(t)$ — функція, обернена до $\psi(t)$;

$\mathfrak{M}_0=\{\psi:\psi\in\mathfrak{M}, 0\leq\mu(\psi;t)\leq K\}$, $\mathfrak{M}'=\{\psi\in\mathfrak{M}:\int\limits_1^\infty\frac{\psi(t)}{t}dt<\infty\}$.

О.І. Степанцем для величини (4), зокрема, було знайдено асимптотичні рівності для випадку, коли $U_n(f;x;\Lambda)=S_n(f;x)$, і встановлено таке твердження.

Теорема ([1], с.214) **.** *Нехай* $\pm\psi_1\in\mathfrak{M}_0$ *і* $\pm\psi_2\in\mathfrak{M}_0'=\mathfrak{M}'\cap\mathfrak{M}_0$. *Тоді величина*

$$\mathscr{E}_n(C^{\bar\psi}_\infty;S_n)=\sup\{|f(x)-S_{n-1}(f;x)|:\ f\in C^{\bar\psi}_\infty\}$$

не залежить від значення x *і при* $n\to\infty$ *виконується асимптотична рівність:*

$$\mathscr{E}_n(C^{\bar\psi}_\infty;S_n)=\frac{2}{\pi}\int\limits_n^\infty\frac{|\psi_2(t)|}{t}dt+\frac{4}{\pi^2}\bar\psi(n)\ln n+O(1)\bar\psi(n),$$

де $\bar\psi(n)=(\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n))^{\frac{1}{2}}$, *а* $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена по* n.

Нехай

$$\tau_k^{(n)}=(1-\lambda_k^{(n)})\psi_1(k),$$
$$\nu_k^{(n)}=(1-\lambda_k^{(n)})\psi_2(k),$$

де $k,n=0,1,\ldots,$ та

$$\xi(t,u)=\begin{cases}\frac{\pi|t|}{2}, & |u|\leq|t|,\\ |t|\arcsin(\frac{|t|}{|u|})+\sqrt{u^2-t^2}, & |t|<|u|,\end{cases}$$

$$r_{k,m}=\min\left\{\left[\frac{k}{2}\right],\left[\frac{m-k}{2}\right]\right\}.$$

Тоді в прийнятих позначеннях має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $\Lambda=\{\lambda_k^{(n)}\}$, $k,n=0,1,...,$ $(\lambda_0^{(n)}=1,\ \forall n)$, *— довільна прямокутна матриця чисел, і нехай виконуються умови*

$$\lim_{k\to\infty}\psi_1(k)=0,\ \lim_{k\to\infty}\psi_2(k)=0, \tag{6}$$

ряд (3) *є рядом Фур'є деякої функції з* L, *а також збігаються ряди:*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(|\Delta\tau_k^{(n)}|+|\Delta\nu_k^{(n)}|\right), \tag{7}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\left|\sum_{l=1}^{[k/2]}\frac{1}{l}(\Delta\tau_{k-l}^{(n)}-\Delta\tau_{k+l}^{(n)})\right|+\left|\sum_{l=1}^{[k/2]}\frac{1}{l}(\Delta\nu_{k-l}^{(n)}-\Delta\nu_{k+l}^{(n)})\right|\right), \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\nu_k^{(n)}|}{k}. \tag{9}$$

Тоді $\forall n,\ m\in\mathbb{N}$ *справедлива рівномірна по* m *та* n *оцінка:*

$$\mathscr{E}(C_{\infty}^{\bar{\psi}},U_n(\Lambda))=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\xi_k}{k}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2m+1}^{\infty}\frac{|\nu_k^{(n)}|}{k}+O(I_n+H_{m,n}), \tag{10}$$

де

$$\xi_k=\xi\left(\nu_k^{(n)},\ \sqrt{\left(\tau_{m-k}^{(n)}-\tau_{m+k}^{(n)}\right)^2+\left(\nu_{m-k}^{(n)}-\nu_{m+k}^{(n)}\right)^2}\right),$$

$$I_n=\sum_{k=0}^{\infty}\left(|\Delta\tau_k^{(n)}|+|\Delta\nu_k^{(n)}|\right),$$

$$H_{m,n}=\sum_{k=2}^{m-2}\left(\left|\sum_{l=1}^{r_{k,m}}\frac{1}{l}\left(\Delta\tau_{k-l}^{(n)}-\Delta\tau_{k+l}^{(n)}\right)\right|+\left|\sum_{l=1}^{r_{k,m}}\frac{1}{l}\left(\Delta\nu_{k-l}^{(n)}-\Delta\nu_{k+l}^{(n)}\right)\right|\right)+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\left|\sum_{l=1}^{[k/2]}\frac{1}{l}\left(\Delta\tau_{m+k-l}^{(n)}-\Delta\tau_{m+k+l}^{(n)}\right)\right|+\left|\sum_{l=1}^{[k/2]}\frac{1}{l}\left(\Delta\nu_{m+k-l}^{(n)}-\Delta\nu_{m+k+l}^{(n)}\right)\right|\right).$$

Доведення. Внаслідок умов (6) і того, що коефіцієнти ряду (3) прямують до нуля, можемо зробити висновок, що

$$\lim_{k\to\infty}\tau_k^{(n)}=0,\ \lim_{k\to\infty}\nu_k^{(n)}=0. \tag{11}$$

Із співвідношення (11) і збіжності рядів (7) – (9) згідно [3] випливає, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\tau_k^{(n)}\cos kt+\nu_k^{(n)}\sin kt)$ збігається скрізь, крім, можливо, точки $t=0$, і є рядом Фур'є деякої сумовної функції $K_n(\bar{\psi},\Lambda,t)$. Тому $\forall f\in C_{\infty}^{\bar{\psi}}$ в кожній точці x має місце така рівність:

$$\delta_n(f;x;\Lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\bar{\psi}}(x-t)K_n(\bar{\psi};\Lambda;t)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\bar{\psi}}(x-t)\sum_{k=1}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})(\psi_1(k)\cos kt+\psi_2(k)\sin kt)dt.$$

Таким чином,

$$\mathscr{E}(C_{\infty}^{\bar{\psi}};U_n(\Lambda))=$$

$$=\sup_{f\in C_{\infty}^{\bar{\psi}}}\left\|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\bar{\psi}}(x-t)\sum_{k=1}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})(\psi_1(k)\cos kt+\psi_2(k)\sin kt)dt\right\|_C\leq$$

$$\leq\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\Big((1-\lambda_k^{(n)})\psi_1(k)\cos kt+(1-\lambda_k^{(n)})\psi_2(k)\sin kt\Big)\right|dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\tau_k^{(n)}\cos kt+\nu_k^{(n)}\sin kt\Big)\right|dt=:J_n(\tau,\nu). \qquad (12)$$

З іншого боку, для 2π-періодичної функції $\varphi(t)$, яка дорівнює $sign\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Big(\tau_k^{(n)}\cos kt+\nu_k^{(n)}\sin kt\Big)\right)$ при $|t|\leq\frac{\pi}{2}$, і крім того, $\varphi(t)=-\varphi(t+\pi)$, виконуються умови: $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)dt=0$, $|\varphi(t)|\leq 1$. При цьому для так визначеної функції існує функція $\Phi(\cdot)\in C_{\infty}^{\bar{\psi}}$, для якої $\Phi^{\bar{\psi}}(t)=\varphi(t)$.

Тому

$$\mathscr{E}(C^{\bar{\psi}}_{\infty}; U_n(\Lambda)) \geq J_n(\tau,\nu) - \frac{2}{\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{2}\leq|t|\leq\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tau_k^{(n)} \cos kt + \nu_k^{(n)} \sin kt \right) \right| dt. \tag{13}$$

Із співвідношень (12) і (13) випливає, що

$$\mathscr{E}(C^{\bar{\psi}}_{\infty}; U_n(\Lambda)) = J_n(\tau,\nu) + O\left(\int\limits_{\frac{\pi}{2}\leq|t|\leq\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tau_k^{(n)} \cos kt + \nu_k^{(n)} \sin kt \right) \right| dt \right).$$

Виконавши перетворення Абеля, знаходимо:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}\leq|t|\leq\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tau_k^{(n)} \cos kt + \nu_k^{(n)} \sin kt \right) \right| dt \leq K \sum_{k=0}^{\infty} \left(|\Delta\tau_k^{(n)}| + |\Delta\nu_k^{(n)}| \right).$$

Таким чином, отримуємо:

$$\mathscr{E}(C^{\bar{\psi}}_{\infty}; U_n(\Lambda)) = J_n(\tau,\nu) + O\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(|\Delta\tau_k^{(n)}| + |\Delta\nu_k^{(n)}| \right) \right).$$

Далі, використовуючи теорему 1 [5], будемо мати

$$J_n(\tau,\nu) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{\xi_k}{k} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2m+1}^{\infty} \frac{|\nu_k^{(n)}|}{k} + O(I_n + H_{m,n}).$$

Теорема 1 доведена.

Теорема 2. *Нехай* $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $k, n = 0, 1, ...,$ $(\lambda_0^{(n)} = 1\ \forall n)$ — *довільна прямокутна матриця чисел та виконуються умови* (6). *Ряд* (3) *є рядом Фур'є деякої функції з* L, *а також збігаються ряди:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\nu_k^{(n)}|}{k},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\left|\Delta^2 \tau_{k-1}^{(n)}\right| + \left|\Delta^2 \nu_{k-1}^{(n)}\right| \right).$$

Тоді $\forall n,\ m\in\mathbb{N}$ *має місце рівномірна по* m *та* n *оцінка*

$$\mathscr{E}(C^{\bar\psi}_{\infty},U_n(\Lambda))=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\xi_k}{k}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2m+1}^{\infty}\frac{|\nu_k^{(n)}|}{k}+$$

$$O\Bigg(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{k(m-k)}{m}\left(\left|\Delta^2\tau_{k-1}^{(n)}\right|+\left|\Delta^2\nu_{k-1}^{(n)}\right|\right)+|\tau_m^{(n)}|+|\nu_m^{(n)}|+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\left|\Delta^2\tau_{m+k-1}^{(n)}\right|+\left|\Delta^2\nu_{m+k-1}^{(n)}\right|\right)\Bigg),$$

де $\xi_k=\xi\left(\nu_k^{(n)},\ \sqrt{\left(\tau_{m-k}^{(n)}-\tau_{m+k}^{(n)}\right)^2+\left(\nu_{m-k}^{(n)}-\nu_{m+k}^{(n)}\right)^2}\right).$

При доведенні теореми 2 використовуємо теорему 1 і оцінки; встановлені С.О. Теляковським ([5], с.85, (3.73),(3.74)):

$$\sum_{k=2}^{m-2}\left|\sum_{l=1}^{r_{k,m}}\frac{1}{l}\left(\Delta\tau_{k-l}^{(n)}-\Delta\tau_{k+l}^{(n)}\right)\right|+\sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{[k/2]}\frac{1}{l}\left(\Delta\tau_{m+k-l}^{(n)}-\Delta\tau_{m+k+l}^{(n)}\right)\right|\le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{m-1}\frac{k(m-k)}{m}\left|\Delta^2\tau_{k-1}^{(n)}\right|+C\sum_{k=1}^{\infty}k\left|\Delta^2\tau_{m+k}^{(n)}\right|,$$

$$\sum_{k=2}^{m-2}\left|\sum_{l=1}^{r_{k,m}}\frac{1}{l}\left(\Delta\nu_{k-l}^{(n)}-\Delta\nu_{k+l}^{(n)}\right)\right|+\sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{[k/2]}\frac{1}{l}\left(\Delta\nu_{m+k-l}^{(n)}-\Delta\nu_{m+k+l}^{(n)}\right)\right|\le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{m-1}\frac{k(m-k)}{m}\left|\Delta^2\nu_{k-1}^{(n)}\right|+C\sum_{k=1}^{\infty}k\left|\Delta^2\nu_{m+k}^{(n)}\right|,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta\tau_k^{(n)}\right|\le\sum_{k=1}^{m-1}\frac{k(m-k)}{m}\left|\Delta^2\tau_{k-1}^{(n)}\right|+\left|\tau_m^{(n)}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}k\left|\Delta^2\tau_{m+k-1}^{(n)}\right|,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta\nu_k^{(n)}\right| \le \sum_{k=1}^{m-1}\frac{k(m-k)}{m}\left|\Delta^2\nu_{k-1}^{(n)}\right| + \left|\nu_m^{(n)}\right| + \sum_{k=1}^{\infty}k\left|\Delta^2\nu_{m+k-1}^{(n)}\right|.$$

Наслідок 1. *Нехай*

$$\mu_k^{(n)} = \left(1-\lambda_k^{(n)}\right)\psi(k),\quad \tau_k^{(n)} = \mu_k^{(n)}\cos\frac{\beta_k\pi}{2},\quad \nu_k^{(n)} = \mu_k^{(n)}\sin\frac{\beta_k\pi}{2},$$

де $k = 1, 2, \ldots$.

Якщо

$$\lim_{k\to\infty}\psi(k) = 0, \tag{14}$$

ряд (3) *є рядом Фур'є деякої функції з* L, *а також збігаються ряди* (7) – (9), *то* $\forall n, m \in \mathbb{N}$ *має місце рівномірна по* m *та* n *оцінка*

$$\mathscr{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; U_n) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\xi_k}{k} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\nu_k^{(n)}|}{k} + O\left(I_n + H_{m,n}\right),$$

де $\xi_k = \left(\nu_k^{(n)}, \sqrt{(\mu_{m-k}^{(n)})^2 + (\mu_{m+k}^{(n)})^2 - 2\mu_{m-k}^{(n)}\mu_{m+k}^{(n)}\cos(\beta_{m-k}-\beta_{m+k})\frac{\pi}{2}}\right)$.

Це твердження встановлено в [10].

Наслідок 2. *Якщо кожна з чотирьох послідовностей:*

$$\tau_1^{(n)}, \tau_2^{(n)}, \ldots, \tau_m^{(n)}$$
$$\tau_{m+1}^{(n)}, \tau_{m+2}^{(n)}, \ldots$$
$$\nu_1^{(n)}, \nu_2^{(n)}, \ldots, \nu_m^{(n)}$$
$$\nu_{m+1}^{(n)}, \nu_{m+2}^{(n)}, \ldots$$

випукла, а також виконується співвідношення (14) *і збігається ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|\nu_k^{(n)}|}{k}$, *то має місце оцінка*

$$\mathscr{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; U_n) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\xi_k}{k} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2m+1}^{\infty}\frac{|\nu_k^{(n)}|}{k} + O\left(\max_k\left(|\tau_k^{(n)}|, |\nu_k^{(n)}|\right)\right).$$

Наслідок 3. *Нехай виконуються умови* (6), *і*

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le n, \\ 0, & k > n; \end{cases}$$

$\psi_i(k) \ge \psi_i(k+1), k = 1, 2, \ldots, i = 1, 2,$ *а також збігається ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k}$. *Тоді при* $n \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathscr{E}(C_{\infty}^{\bar{\psi}}; S_n) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sqrt{\psi_1^2(n+k) + \psi_2^2(n+k)} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} + O(1)\bar{\psi}(n). \tag{15}$$

Цей наслідок виходить з теореми 1 [10, с. 102–104]. При $\psi_1(k) = \psi(k) \cos \beta_k \frac{\pi}{2}, \psi_2(k) = \psi(k) \sin \beta_k \frac{\pi}{2}$ і випуклій $\psi(k)$ рівність (15) було одержано в [12].

Наведемо приклад функцій $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, які не є випуклими, але задовольняють умови теореми 1.

Приклад . Нехай

$$\psi_1(k) = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} |\sin k \frac{\pi}{2}|, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\psi_2(k) = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} |\sin k \frac{\pi}{2}| \right) \frac{1}{\ln(k+1)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Наведені послідовності $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$ є монотонно спадними:

$$\Delta(\psi_1(2k)) = \frac{1}{2k(2k+1)} - \frac{1}{(2k+1)^2} > 0,$$

$$\Delta(\psi_2(2k)) = \left(\frac{1}{2k(2k+1)} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right) \frac{1}{\ln(2k+1)} > 0;$$

не випуклими:

$$\Delta^2(\psi_1(2k)) = \frac{2}{2k+1} \left(\frac{1}{2k(2k+2)} - \frac{1}{2k+1} \right) < 0,$$

$$\Delta^2(\psi_1(2k-1)) = \frac{1}{2k-1} - \frac{2}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2k+1)^2} > 0,$$

$$\Delta^2(\psi_2(2k)) = \frac{2}{2k+1}\left(\frac{1}{2k(2k+2)} - \frac{1}{2k+1}\right)\frac{1}{\ln(2k+1)} < 0,$$

$$\Delta^2(\psi_2(2k-1)) = \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{2}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2k+1)^2}\right)\frac{1}{\ln(2k)} > 0.$$

Крім того,

$$\sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} = \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{\left|\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}|\sin k\frac{\pi}{2}|\right|}{k} =$$

$$= \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2\ln(k+1)} + \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\sin k\frac{\pi}{2}|}{k^3\ln(k+1)} \leq K\frac{1}{n\ln n},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sqrt{\psi_1^2(n+k) + \psi_2^2(n+k)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n+k)\ln(n+k+1)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}|\sin(n+k)\frac{\pi}{2}|\frac{\sqrt{\ln^2(n+k+1)+1}}{\ln(n+k+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n} - \frac{k}{n(n+k)}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n+k)\ln(n+k+1)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}|\sin(n+k)\frac{\pi}{2}|\frac{\sqrt{\ln^2(n+k+1)+1}}{\ln(n+k+1)} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+k}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n+k)\ln(n+k+1)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}|\sin(n+k)\frac{\pi}{2}|\frac{\sqrt{\ln^2(n+k+1)+1}}{\ln(n+k+1)} =$$

$$= \frac{1}{n}\ln n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(n+k)\ln(n+k+1)} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}|\sin(n+k)\frac{\pi}{2}|\frac{\sqrt{\ln^2(n+k+1)+1}}{\ln(n+k+1)} = \frac{1}{n}\ln n + O(\frac{1}{n}).$$

Тому при $n\to\infty$ має місце асимптотична рівність (15), тобто

$$\mathscr{E}(C_{\infty}^{\bar{\psi}}; S_n) = \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n} + O(\frac{1}{n}).$$

1. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч.– Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч.I. — 427 с.
2. *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. –Киев:Наук. думка, 1981.—340 с.
3. *Теляковский С.А.* Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приближение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье//Изв. АН СССР. — 1964. — 28. — С. 1209–1236.
4. *Теляковский С.А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье.1// Тр. Мат. Ин–та АН СССР. — 1961. — 62. — С. 61–97.
5. *Теляковский С.А.* Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории апроксимаций // Тр. Мат. Ин–та АН СССР. — 1971. — 109. — С. 65–97.
6. *Степанец А.И.* Суммы Фурье: новые результаты и нерешенные задачи // Укр.мат. журн. — 1988. — 40. — №5. — С. 547–562.
7. *B.Sz.-Nagy* Sur une class générale de procédés de sommation pour las séries de Fourier // Hungarica Acta Mathem. — 1, №3. — 1948. — С. 14–52.
8. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного // М., Физматгиз, 1960.
9. *Ефимов А.В.* Линейные методы приближения некоторых классов непрерывных периодических функций // Тр. Мат. Ин–та АН СССР. – 1961. — **62**. – С. 3–47.
10. *Задерей П.В.* Об уклонении (ψ,β)-дифференцируемых периодических функций от линейных средних их рядов Фурье // Препринт 482. Institute of mathematics Polish Academy of Sciences. XXXIV Semester in Banach center Theory of real functions. — 1990. — С. 96–109.
11. *Баусов Л.И.* Линейные методы суммирования рядов фурье с заданными прямоугольными матрицами. I // Изв. вузов, Мататматика. — 1965. — **3**(46). — С. 15–31.
12. *Теляковский С.А.* О приближении функций заданных классов суммами Фурье // Теория функций и приближений: Тр. 3–й Сарат. зимней школы. (27 января– 7 февраля 1986г): В 2-х ч. — Саратов: Изд-во Сарат. ун–та, 1987. — Ч.1. – С. 156.