УДК 517.51

Н.М. Задерей (Нац. техн. ун-т України "КПІ", Київ)
Р.В. Товкач (Волинський нац. ун-т, Луцьк)

НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ СУМАМИ ФЕЙЄРА

Estimations of deviations of the Fejer sums on set of summable functions through the best approximation of these functions are found.

Знайдено оцінки відхилень сум Фейєра на множині сумовних функцій через найкращі наближення цих функцій.

Розглянемо $L_p(T^d)$, $1 \leq p < \infty$, – простір 2π-періодичних по кожній змінній функцій $f(x), x \in T^d$, $T^d = (-\pi;\pi]^d$, з нормою $\|f\|_p = (\int\limits_{T^d} |\, f(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}} < \infty$, $C(T^d)$ – простір неперервних 2π-періодичних по кожній змінній функцій з нормою $\|f\|_C = \max\limits_x |\, f(x)| < \infty$, надалі під X будемо розуміти $L_p(T^d)$ або $C(T^d)$.

Позначимо через W множину, що складається з поліедрів V з раціональними вершинами, зіркових відносно початку координат, який є внутрішньою точкою V. Позначення nV слід розуміти як множину точок x таких, що $\frac{x}{n} \in V$, тобто $nV = \{x : \frac{x}{n} \in V\}$.

Нехай $f(\cdot) \in L_1(T^d)$,

$$S_n(f;V;x) = \sum_{k \in nV} c_k e^{i(k,x)}, \tag{1}$$

$$v_n^m(f;V;x) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=n-m}^{n} S_k(f;V;x) \tag{2}$$

— відповідно частинні суми її ряду Фур'є і суми Валле Пуссена.

В одномірному випадку суми Валле Пуссена було визначено в [1]. При $m = n$ з (2) отримуємо суми Фейєра

$$\sigma_n(f;V;x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f;V;x). \tag{3}$$

Нехай далі $T_{n,V}$ – множина тригонометричних поліномів з гармоніками з nV, тобто

$$T_{n,V} = \{t_n : t_n(x) = \sum_{k \in nV} a_k e^{i(k,x)}\},$$

де a_k – довільні комплексні числа.

Позначимо через $E_{n,V}(f)_X$ найкраще наближення функцій $f(\cdot)$ тригонометричними поліномами з $T_{n,V}$ в метриці X, тобто

$$E_{n,V}(f)_X = \inf_{t_n \in T_{n,V}} \|f - t_n(x)\|_X .$$

Надалі через C будем позначати сталі, які залежать від вимірності d простору і гомотета V, але не залежать від n і f, і, можливо, не однакові в різних формулах.

Теорема 1. *Нехай.* $f(\cdot) \in X$*.Тоді* $\forall n$ *і* m *справедлива оцінка*

$$\|f(x) - v_n^m(f;V;x)\|_X \leq C \frac{n+1}{m+1} E_{(n-m),V}(f)_X. \tag{4}$$

С.Б.Стєчкін [2] вважав це найбільш важливою властивістю сум Валле Пуссена.

Доведення. Нехай $t_n^*(x) \in T_{n,V}$ – многочлен найкращого наближення функції $f(x)$. Тоді

$$\|f(x) - v_n^m(f;V;x)\|_X = \frac{1}{m+1} \left\| \sum_{k=n-m}^{n} (f(x) - S_k(f;V;x)) \right\|_X =$$

$$= \frac{1}{m+1} \left\| \sum_{k=n-m}^{n} (f(x) - t_{n-m}^*(x) - S_k(f - t_{n-m}^*;V;x)) \right\|_X \leq$$

$$\leq E_{(n-m),V}(f)_X + \frac{1}{m+1} \left\| \sum_{k=n-m}^{n} S_k(f - t_{n-m}^*;V;x) \right\|_X .$$

Оскільки

$$S_k(f - t_{n-m}^*;V;x) = \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{T^d} (f(x+u) - t_{n-m}^*(x+u)) \sum_{l \in kV} c_l e^{i(l,u)} du,$$

то
$$\|f(x)-v_n^m(f;V;x)\|_X \le E_{(n-m),V}(f)_X +$$
$$+\frac{C}{m+1}E_{(n-m),V}(f)_X \int\limits_{T^d}\left|\sum_{k=n-m}^{n}\sum_{l\in kV} e^{i(l,t)}\right|dt.$$

О.І. Кузнєцова довела (див.[3] , лема 2.3), що якщо $V\in W$, а $|a_k|\le 1$, то
$$\int\limits_{T^d}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{\nu\in kV} e^{i(\nu,x)}\right|dx \le Cn.$$

Використовуючи цю оцінку, отримуємо формулу (4). Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай* $f(\cdot)\in X$. *Тоді*
$$\|f(x)-\sigma_n(f;V;x)\|_X \le \frac{C}{n+1}\sum_{k=0}^{n} E_{k,V}(f)_X. \tag{5}$$

Доведення. При доведенні цієї теореми будемо використовувати метод роботи С.Б. Стєчкіна [2].

Для $n\in N$ знайдемо таке $\mu\in N$, що
$$2^\mu \le n < 2^{\mu+1}.$$

Тоді
$$\sigma_n(f;V;x)=\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} S_\nu(f;V;x)=\frac{1}{n+1}(S_0(f;V;x)+$$
$$+\sum_{r=1}^{\mu}\sum_{\nu=2^{r-1}}^{2^r-1} S_\nu(f;V;x)+\sum_{\nu=2^\mu}^{n} S_\nu(f;V;x))$$

і
$$f(x)-\sigma_n(f;V;x)=\frac{1}{n+1}((f(x)-S_0(f;V;x))+$$
$$+\sum_{r=1}^{\mu}\sum_{\nu=2^{r-1}}^{2^r-1}(f(x)-S_\nu(f;V;x)+$$

$$+\sum_{\nu=2^{\mu}}^{n}(f(x)-S_{\nu}(f;V;x))).$$

Враховуючи (2), можемо записати

$$f(x)-\sigma_n(f;V;x)=\frac{1}{n+1}((f(x)-v_0^0(f;V;x))+$$

$$+\sum_{r=1}^{\mu}2^{r-1}(f(x)-v_{2^{r}-1}^{2^{r-1}-1}(f;V;x))+$$

$$+(n-2^{\mu}+1)(f(x)-v_n^{n-2^{\mu}}(f;V;x))).$$

Далі, використовуючи нерівність (4), встановлюємо, що

$$\|f(x)-\sigma_n(f;V;x)\|_X\le\frac{C}{n+1}(E_{0,V}(f)_X+\sum_{r=1}^{\mu}2^rE_{2^{r-1},V}(f)_X+$$
$$+(n-2^{\mu}+1)\frac{n+1}{n-2^{\mu}+1}E_{2^{\mu},V}(f)_X).$$

Внаслідок монотонності $E_{n,V}(f)_X$ отримуємо оцінки:

$$2^rE_{2^{r-1},V}(f)_X\le 4\sum_{\nu=2^{r-2}+1}^{2^{r-1}}E_{\nu,V}(f)_X$$

і

$$(n+1)E_{2^{\mu},V}(f)_X<\frac{n+1}{2^{\mu-1}}\sum_{\nu=2^{\mu-1}+1}^{2^{\mu}}E_{\nu,V}(f)_X<4\sum_{\nu=2^{\mu-1}+1}^{2^{\mu}}E_{\nu,V}(f)_X,$$

і тому

$$\|f(x)-\sigma_n(f;V;x)\|_X\le\frac{C}{n+1}\sum_{k=0}^{n}E_{k,V}(f)_X.$$

Теорему 2 доведено.

1. *Vallée Poussin Ch. J.La.,* Leçons sur l'approximation des fonction d'une variable réelle. — Paris, 1919.
2. *Стечкин С.Б.* О приближеннии периодических функций суммами Фейера// Тр. Матем. ин–та им. В.А.Стеклова.– 1961. — Т. 62. — С.48–60.
3. *Кузнецова О.И.* Константы Лебега и аппроксимативные свойства линейных средних кратных рядов Фурье // Дис. ... канд. физ–мат. наук. — Донецк, 1985.