НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

Максименко Сергій Іванович

УДК 515.146.147.

МОРСІВСЬКІ ВІДОБРАЖЕННЯ ПОВЕРХОНЬ

01.01.04 – геометрія і топологія.

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник - доктор
фізико-математичних наук,
професор Шарко В. В.

Київ 1999

ЗМІСТ

ВСТУП

Гладкі функції з невиродженими особливостями (функції Морса), завдяки своїм "стійким" властивостям, відіграють суттєву роль у багатьох розділах математики. Основи теорії цих функцій закладено в роботах М. Морса в першій половині XX сторіччя, хоча розвинені ним ідеї були присутні ще в роботах Пуанкаре і навіть Мьобіуса. Теорія Морса відразу ж отримала значний розвиток в роботах Л. А. Люстерника, Л. Г. Шнірельмана, Г. С. Чогошвілі, Л. Е. Ельсгольца, Пітчера, Ріба [21, 31, 36, 37].

В 60-х роках нашого століття суттєвий вклад в теорію внесли Смейл та Серф. Смейл довів існування мінімальних функцій Морса на однозв'язних многовидах достатньо високих розмірностей. Для неоднозв'язних многовидів теорія була суттєво розвинута В. В. Шарко [23].

На сьогодні, теорія Морса має широкі узагальнення. Так, в 1982 році, в роботі С. П. Новікова [12] було побудовано теорію багатозначних відображень Морса. В роботах А. Т. Фоменко побудовано теорію типу Морса з інтегровними гамільтоновими системами [17].

Потрібно також відмітити "періодичний" випадок теорії – це морсівські відображення в коло. Вони виникають в періодичних задачах.

В даній дисертаційній роботі вивчаються властивості простору морсівських відображень поверхонь в одновимірні многовиди без краю – в пряму та в коло.

Опишемо структуру дисертації. В першому розділі зібрані необхідні означення та результати, пов'язані в основному з морсівськими відображеннями.

В другому розділі вивчаються компоненти лінійної зв'язності простору відображень Морса орієнтовної поверхні M в коло S^1.

Отриманий результат (теорема 2.3) доповнює класифікацію компонент простору функцій Морса на поверхнях (теорема 2.2), яка була недавно отримана В. В. Шарко [22] та С. В. Матвеєвим [4] незалежно один від одного, до класифікації компонент просторів відображень компактних орієнтовних поверхонь в одновимірні многовиди (пряму та коло).

В розділі доведено, що кожна компонента простору морсівських відображень орієнтовної компактної поверхні в коло, однозначно визначається двома об'єктами - гомотопічним класом та критичним типом відображень з цієї компоненти.

Нагадаємо, що відображення $f : M \to S^1$ називається відображенням Морса, якщо

(i) всі його критичні точки невироджені, і лежать в $\mathrm{Int} M$

(ii) f є постійним на кожній компоненті ∂M, хоча на різних компонентах може приймати різні значення.

Розглянемо інваріанти компонент зв'язності простору відображень Морса з M в S^1.

Нехай $f, g : M \to S^1$ відображення Морса. Це точки простору $\mathcal{M}(M, S^1)$, який є підпростором в просторі $C(M, S^1)$ усіх неперервних відображень з M в S^1. Тому, для того, щоб ці точки належали одній компоненті простору $\mathcal{M}(M, S^1)$ необхідно, щоб вони лежали в одній компоненті більшого простору $C(M, S^1)$, тобто були гомотопними.

З теорії перешкод відомо, що множина гомотопічних класів відображень M в S^1 співпадає з множиною гомоморфізмів

$$H^1(S^1, \mathbb{Z}) \to H^1(M, \mathbb{Z}).$$

Так як $H^1(S^1, \mathbb{Z})$ ізоморфна групі цілих чисел $\mathbb{Z}$, а $H^1(M, \mathbb{Z})$ – прямій сумі $2g + k - 1$ екземплярів групи $\mathbb{Z}$, де g - рід поверхні, а k - число компонент краю ∂M, то кожен гомотопічний клас відображення M в S^1 задається вектором з $2g+k-1$ цілих чисел. Але враховуючи обмеження, що відображення Морса є постійним на кожній компоненті краю, $k - 1$ фіксованих координат такого вектора повинні бути рівними нулю. Отже, гомотопічні класи відображень Морса M в S^1 фактично задаються цілочисленими векторами з $2g$ координат.

Означимо критичний тип відображення. Орієнтація кола S^1 дозволяє визначити поняття *індексу* невиродженої критичної точки гладкого відображення $f : M \to S^1$. Для цього потрібно розглядати такі локальні представлення $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ даного відображення, у яких стандартна орієнтація $\mathbb{R}^1$ індукована орієнтацією з S^1. І далі означення індексу звичайне. Позначимо через $c_k(f)$ число критичних точок відображення f індексу k.

Розглянемо ще поведінку відображення Морса f біля краю поверхні. Нехай V - компонента ∂M. Так як f, за означенням, постійне на V, то в деякому околі V відображення f можна розглядати як функцію. Крім того, $\operatorname{grad} f$ направлений або всередину, або зовні M у всіх точках V одночасно. Поставимо у відповідність компоненті V число ε_V рівне $+1$ якщо $\operatorname{grad} f$ направлений зовні M і $\varepsilon = -1$ в протилежному випадку.

Критичний тип відображення Морса – це наступний об'єкт

$$\big(c_0, c_1, c_2, \{(V, \varepsilon_V)\}_{V \in \partial M}\big)$$

Основний результат розділу – теорема 2.3 – стверджує, що два відображення Морса f і g компактної орієнтовної поверхні M в коло S^1 належать одній компоненті простору $\mathcal{M}(M, S^1)$ тоді і тільки тоді, коли вони гомотопні і мають однаковий критичний тип.

Третій розділ присвячено класифікації m-функцій на поверхнях.

Отриманий результат продовжує ідеї, закладені в роботах А. Т. Фоменко в 1986 році з топологічної класифікації гамільтонових систем, які потім були розвинені ним разом із С. В. Матвеєвим, Х. Цишангом, А. В. Болсіновим, А. В. Браіловим, А. А. Ошемковим, В. В. Трофимовим, В. В. Шарко та іншими [3, 13, 14, 18, 19, 27].

Зовсім недавно, В. В. Шарко [38] та А. А. Ошемков [13], незалежно і використовуючи дещо різні підходи, запропонували класифікації функцій Морса на поверхнях. Природним узагальненням функцій Морса служать m-функції [39]: за означенням функція Морса є постійною на кожній компоненті краю поверхні, а для m-функції ставиться вимога, щоб її обмеження на край многовиду було функцією Морса. В третьому розділі інваріант функції Морса, побудований В. В. Шарко в роботі [38], узагальнюється, і використовується для класифікації m-функцій.

Цей інваріант може бути використаний для крайових задач математичної фізики.

Нагадаємо означення m-функції на поверхні. Більш загальне означення буде сформульовано в розділі III.

Нехай M – поверхня з краєм. Функція $f : M \to \mathbb{R}$ називається m-функцією, якщо

(i) функція f має лише скінчену кількість критичних точок, всі вони

невироджені і лежать в $\mathrm{Int}M$
(ii) обмеження $f|_{\partial M}$ є також функцією Морса на одновимірному многовиді ∂M.

Нехай $f, g : M \to \mathbb{R}$ дві m-функції на поверхні M. Скажемо, що вони еквівалентні, якщо знайдуться такі дифеоморфізми $h : M \to M$, і $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, причому ϕ зберігає орієнтацію $\mathbb{R}$, що має місце комутативна діаграма:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ M & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \end{array}$$

тобто $\phi \circ f = g \circ h$.

Задача полягає в тому, щоб описати всі класи m-функцій з точністю до еквівалентності. Виявляється, що для цього достатньо знати структуру критичних рівнів цієї функції та їх положення на поверхні один відносно одного.

За кожною m-функцією на поверхні будується інваріант – так звана “молекула” – скінчений граф з додатковою інформацією (позначеннями). Основний результат цього розділу (теорема 3.3) полягає в тому, що дві функції $f, g : M \to \mathbb{R}$ еквівалентні тоді і тільки тоді, коли відповідні молекули ізоморфні.

Сама молекула будується з більш простих об’єктів, які називаються “атомами” і в свою чергу сконструйовані з іще простіших об’єктів – “елементарних частинок” .

Елементарна частинка – це граф ізоморфний околу критичної точки на критичному рівні, разом з інформацією, що дозволяє відновити m-функцію в околі цією точки. Атом – це граф ізоморфний вже всьому критичному рівню m-функції, разом з додатковою інформацією, яка дає можливість з точністю до еквівалентності визначити m-функцію в околі даного критичного рівня. Нарешті молекула – це сукупність всіх критичних рівнів m-функції разом з інформацією про їх взаємне розміщення на поверхні.

Використаний підхід є узагальненням класифікації функцій Морса на поверхнях, отриманої В. В. Шарко [38]. Терміни "молекула" та "атом" широко використовуються для подібного роду конструкцій і запропоновані А. Т. Фоменко (напр. [2]). Відмітимо також, що в роботі [38] та в даній дисертації ці терміни означають дещо інші об'єкти ніж в [2].

В четвертому розділі розглянуто один клас просторів і дано достатню умову тривіальності другої відносної гомотопічної групи π_2 просторів з цього класу.

Питання тривіальності гомотопічних груп, зокрема групи π_2, тісно пов'язане з вивченням сімей функцій Морса на поверхні залежних від параметру.

Нагадаємо, що лінійно зв'язний топологічний простір X називається *асферичним*, якщо $\pi_n(X) = 0$ для всіх $n \geq 2$.

Існує гіпотеза В. В. Шарко про те, що компоненти простору функцій Морса для кожної поверхні роду ≥ 1 асферичні. Простір функцій Морса являє собою нескінченно вимірний многовид, тому він має гомотопічний тип скінченновимірного CW-комплекса який, при умові, що гіпотеза вірна, також є асферичним. Перша група, тривіальність якої потрібна для асферичності, це $\pi_2(X)$. Крім того, для асферичності двовимірних CW-комплексів, достатньо тривіальності лише однієї групи $\pi_2(X)$. Це простий наслідок з теорії перешкод та теорії накриттів.

В руслі гіпотези В. В. Шарко в четвертому розділі вивчається питання тривіальності другої гомотопічної групи. Розглянуто один клас просторів, і для нього отримано достатню умову тривіальності цієї групи. Ця умова використовує поняття гомотопічної групи відображення. Отриманий результат (теорема 4.1) дає певний метод побудови просторів і, зокрема, CW-комплексів та многовидів будь-якої розмірності, з тривіальною групою π_2.

Зокрема в теоремі 4.2 говориться, як за лінком L в сфері S^3, який не розпадається, будувати асферичні 3-многовиди.

Отже, нехай A та X довільні топологічні простори і $f : A \to X$ неперервне відображення. Через C_f позначимо циліндр відображення f, тобто простір отриманий з незв'язного об'єднання $A \times [0,1] \cup X$ ототожненням кожної точки $(a,1) \in A \times 1$ з точкою $f(x) \in X$.

Група $\pi_n(C_f,\, A \times 0, x)$ називається n-тою гомотопічною групою відображення f в точці $x \in A = A \times 0$ і позначається $\pi_n(f,x)$.

Нехай тепер f^+ та f^- два відображення A в X, і C_{f^+} та C_{f^-} їх циліндри. Розглянемо простір Y, отриманий з незв'язного об'єднання $C_{f^+} \cup C_{f^-}$ природним ототожненням основ цих циліндрів: тобто точку $a \times 0 \in C_{f^+}$ ототожнюємо з точкою $a \times 0 \in C_{f^-}$, для всіх $a \in A$, і аналогічно, кожну точку $x \in C_{f^+}$ ототожнюємо з точкою $x \in C_{f^-}$, при $x \in X$.

Основний результат даного розділу міститься в наступній теоремі:

Теорема 4.1 *Якщо* $\pi_2(f^+,x) = \pi_2(f^-,x) = 0$, *для всіх точок* $x \in A$, *то* $\pi_2(Y,X,z) = 0$ *у всіх точках* $z \in X$.

Її доведення базується на так званому "методі усунення зайвих прообразів" ([8])

Робота проводилась згідно з загальним планом досліджень відділу теорії наближень.

Всі основні результати дисертації є новими і отримані автором самостійно. Вони доповідались міжнародній конференції з маловимірної топології та комбінаторної теорії груп (Челябінськ, 1999 р.), на міському семінарі з теорії функцій, багатьох семінарах відділу теорії наближень, та опубліковані автором в роботах [5, 6, 7, 34]

Результати дисертації можуть бути використані для подальших досліджень в теорії Морса, гамільтонових системах та крайових задачах математичної фізики.

На закінчення, хочу виразити вдячність своєму науковому керівникові В. В. Шарко за постановку задач, постійну увагу, допомогу і підтримку на протязі всього часу роботи.

Я також хочу подякувати моїм колегам Власенко І. Ю, Мозговій О. О, Панкову М. О., Полуляху Е. О. і Пришляку А. О. за увагу, цікавість до моєї роботи та корисні зауваження.

РОЗДІЛ I

Відображення Морса та m-відображення

Цей розділ носить допоміжний характер – в ньому приведені необхідні в подальшому означення та формулювання деяких результатів теорії морсівських відображень. Ми даємо означення відображень Морса та означення m-функцій, а також формулюємо твердження про локальне представлення функції в околі її невиродженої критичної точки – лему Морса, та більш загальну лему для m-функцій. Далі наводяться результати про зв'язки між відображеннями Морса та накриваючими відображеннями, а також деякі факти, пов'язані з неперервними відображеннями коло. В останньому підрозділі наведено твердження про існування та властивості мінімальних функцій Морса на поверхнях.

Якщо не сказане протилежне, всі многовиди та відображення між ними, належатимуть до класу C^∞.

1.1. Означення відображень Морса

Нехай P – гладкий одновимірний многовид без краю (тобто P є або колом S^1, або прямою $\mathbb{R}$), W – гладкий многовид розмірності n.

Нехай $f : W \to P$ гладке відображення і $x \in W$. Над кожною точкою $x \in W$ воно індукує лінійне відображення між дотичними просторами:

$$T_x f : T_x W \to T_{f(x)} P.$$

Фактично, це лінійне відображення $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, яке, очевидно, можна розглядати як елемент кодотичного розшарування T^*W в шарі над точкою x, причому залежність $T_x f$ від точки x є гладкою.

Ставлячи у відповідність кожній точці $x \in M$ елемент $T_x f$ кодотичного простору до W в цій точці, ми отримуємо гладкий розтин кодотичного розшарування, тобто відображення $W \to T^*W$. Його називають *диференціалом* f, і позначають Df.

Нехай тепер $z : W \to T^*W$ – нульовий розтин кодотичного розшарування, яке співставляє кожній точці $x \in W$ нульову 1-форму. Позначимо його образ через $Z^* \subset T^*W$.

Критичними точками відображення f називаються точки множини

$$Df^{-1}(Z^*) \subset W,$$

тобто точки, в яких $Df = 0$. Критична точка відображення f називається *невиродженою*, якщо в ній розтин Df трансверсальний нульовому розтину Z^*.

Можна дати означення невиродженої критичної точки і по-іншому. Зафіксуємо довільну локальну систему координат $(u_i)_{i=1..n}$ в точці $x \in W$, і розглянемо вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)$, складений з частинних похідних f по даним координатам. Точка x називається *критичною* точкою відображення f, якщо цей вектор нульовий.

Нехай

$$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \, \partial u_j}\right)$$

симетрична матриця складена з других частинних похідних відображення f. Її називають *гессіаном* відображення f в точці x.

Нехай x – критична точка відображення f. Вона називається *невиродженою*, якщо гессіан $H_f(x)$ відображення f в цій точці є невиродженою матрицею, в протилежному випадку x – *вироджена* критична точка.

Означення 1.1 *Відображення* $f : W \to P$ *називається* відображенням Морса*, якщо*

1) f *має лише скінчену кількість критичних точок, причому всі вони невироджені і лежать у внутрішності* W.

2) f *постійне на компонентах* ∂W

1.2. Кобордизми з кутами

Вивчаючи m-функції, зручно дозволяти, щоб вони були постійними на деяких підмножинах краю (тобто не обов'язково на цілих компонентах). Це послаблення формалізується наступним поняттям многовиду з кутами.

Нехай W^{n+1} – $n+1$-вимірний многовид, край якого представлено у вигляді об'єднання

$$\partial W^{n+1} = V_1 \cup V_2 \cup V_0,$$

де V_i, $i = 1..2$ – такі, можливо порожні, n-вимірні підмноговиди з краєм, що $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,

$$V_0 = \overline{\partial W^{n+1} \setminus (V_1 \cup V_2)}$$

і кожна з множин

$$V_{01} = V_0 \cap V_1 \qquad V_{02} = V_0 \cap V_2$$

є або замкнутим підмноговидом в ∂W розмірності $n-1$, або порожньою множиною.

Означення 1.2 *Четвірка* $\xi = (W^{n+1}; V_0, V_1, V_2)$ *називається* **кобордизмом з кутами**.

Відображення $f : W^{n+1} \to P$ належить до класу C^r-відображень кобордизму з кутами ξ в P $\quad (r = 0..\infty)$, якщо обмеження f на многовиди $\mathrm{Int}W^{n+1}$ та на $V_i\,(i = 0..2)$ належать класу C^r.

Дифеоморфізм між кобордизмами з кутами $\xi = (W^{n+1}; V_0, V_1, V_2)$ та $\xi' = (W^{n+1}; V_0', V_1', V_2')$, це такий гомеоморфізм $h : M \to M$, що $h(V_i) = V_i'$ і кожне з обмежень h на $\mathrm{Int}M$ та на V_i є дифеоморфізмом, де $i = 0, 1, 2$.

Означення 1.3 C^r*-функція* $f : W^{n+1} \to [a, b]$ *з* $r \geq 2$ *називається* m-функцією *на кобордизмі з кутами* ξ*, якщо*

1) *Функція* f *має лише скінчене число критичних точок, причому всі вони невироджені і лежать у внутрішності* $\mathrm{Int}W$

2) $V_1 = f^{-1}(a), \quad V_2 = f^{-1}(b)$,

3) *Обмеження* $f|_{V_0}$ *є функцією Морса на кобордизмі* $(V_0; V_{01}, V_{02})$.

Зауваження. Скрізь нижче, говорячи про m-функцію на многовиді з краєм, ми матимемо на увазі, що визначено деяке представлення цього многовиду у вигляді кобордизму з кутами. Причому для різних функцій, що розглядаються одночасно, це представлення може бути різним.

m-функції були введені в роботі А. Янковського та Р. Рубінштейна [39]. Їх m-функції, це функції на кобордизмі з кутами виду $(W; \partial W, \emptyset, \emptyset)$ в розумінні означення 1.3. Ці автори вказують, що такі функції розглядались ще Уоллом, який довів для них нерівності Морса, але робота не опублікована. Ними також доведено, що m-функції існують на кожному гладкому многовиді з краєм.

Властивості m-функцій у більшості подібні властивостям звичайних функцій Морса. Зокрема, в [39] доведено, що множина всіх m-функцій на W, обмеження яких на край ∂W співпадає з заданою функцією Морса $f : \partial W \to \mathbb{R}$ є всюди щільною підмножиною у множині всіх гладких функцій на W.

1.3. Лема Морса

Нехай $f : W \to P$ гладке відображення і $x \in W$ його невироджена критична точка. Тоді f можна розглядати як функцію $U_x \to V_{f(x)}$, яка відображає деякий окіл U_x точки x в окіл $V_{f(x)}$ точки $f(x) \in P$. Ця функція називається *локальним представленням* відображення f.

За означенням гессіан $H_f(x)$ є невиродженою симетричною матрицею, яка при заміні координат в околі точки x перетворюється за формулами, що аналогічні перетворенням квадратичної форми. Таким чином, виникають інваріанти невиродженої критичної точки – додатній та від'ємний індекси гессіана $H_f(x)$ як квадратичної форми. Насправді вони взаємно залежні, бо їх сума рівна n. Крім того, ці індекси залежать також від орієнтації околу $V_{f(x)}$ – при її зміні додатній і від'ємний індекси міняються місцями.

Означення 1.4 *Нехай $f : W \to P$ гладке відображення, $x \in W$ його невироджена критична точка і $U_x \to V_{f(x)}$ таке локальне представлення f, в якому орієнтація $V_{f(x)}$ індукована орієнтацією з P.* Індексом *точки x називається* від'ємний *індекс невиродженої квадратичної форми $H_f(x)$.*

Відомо, що кожну квадратичну форму можна привести до канонічного виду лінійною заміною системи координат. Аналогічна ситуація має місце і для функцій в околі невиродженої критичної точки:

Лема 1.1 (М. Морс) [20], ст. 192. *Нехай $x \in W$ невироджена критична точка індексу λ C^{r+2}-функції $f : M \to \mathbb{R}\,(1 \le r \le \infty)$. Тоді існує така C^r-карта (U, ϕ), яка покриває точку x, що*

$$f \circ \phi^{-1}(u_1, \dots, u_n) = f(x) - \sum_{i=1}^{\lambda} u_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^{n} u_i^2$$

Це твердження носить назву *леми Морса.*

Аналог леми Морса для m-функцій. У m-відображень виникають додаткові типи особливих точок, пов'язані з тим, що ці відображення не постійні на краї многовиду. Тому, для описання поведінки m-функції в околі критичної точки її обмеження на край, поняття індексу недостатнє.

Нехай f є m-відображенням з W в P, і $x \in \partial W$ невироджена критична точка обмеження $f|_{\partial W}$. Тоді всі частинні похідні f за напрямами дотичними до ∂W рівні нулю. Але так як x не є критичною точкою відображення f всього многовиду W, то частинна похідна від f в довільному напрямку трансверсальному краю вже відмінна від нуля. Знак цієї похідної залежить також від локального представлення $U_x \to V_{f(x)}$ відображення f в точці x.

Аналогічно тому, як це робилось для означення індексу критичної точки, розглянемо таке локальне представлення $f : U_x \to V_{f(x)}$ для якого орієнтація околу $V_{f(x)}$ індукована орієнтацією з P.

Припишемо точці x число $\varepsilon = +1$ якщо похідна f за напрямом з поверхні в вибраному локальному представленні > 0, іншими словами, якщо вектор $\operatorname{grad} f$ направлений з поверхні. Якщо ж $\operatorname{grad} f$ направлений всередину поверхні, то покладемо $\varepsilon = -1$.

Тоді твердження аналогічне лемі Морса має місце і для невироджених особливих точок обмеження $f|_{\partial W}$.

Розглянемо в $\mathbb{R}^{n+1}$ підмножину

$$V_{\lambda,\varepsilon} = \left\{ (u_1, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \varepsilon \cdot \left(-\sum_{i=1}^{\lambda} u_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^{n} u_i^2 - u_{n+1} \right) \geq 0 \right\} \tag{1.1}$$

Нехай p_{n+1} проекція $\mathbb{R}^{n+1}$ на вісь Ox_{n+1}, і $g = p_{n+1}|_{V_{\lambda,\varepsilon}}$ - обмеження p_{n+1} на $V_{\lambda,\varepsilon}$. Тоді очевидно, що g є m-функцією на $V_{\lambda,\varepsilon}$ і початок координат є особливою точкою індексу (λ, ε) функції g.

Наступна лема є переформулюванням леми 3.1 з [39] в більш зручній для нас формі

Лема 1.2 [39] *Нехай f - m-функція на многовиді W, і $x \in \partial W$ точка індексу (λ, ε). Тоді існує така карта (U, ϕ), що покриває точку x, де ϕ - дифеоморфізм U на деякий окіл початку координат в $V_{\lambda,\varepsilon}$, що*

1. $\phi(x) = 0 \in \mathbb{R}^n$
2. $f \circ \phi^{-1}(u_1, \dots, u_n) = f(x) + u_n$
3. $\phi(\partial W \cap U) = \partial V_{\lambda,\varepsilon}$

1.4. Σ-гомотопія та накриваючі відображення

Нехай f_0 та f_1 відображення Морса з W в P. Вони належать одній компоненті простору $\mathcal{M}(M, P)$ тоді і тільки тоді, коли існує гомотопія складена з відображень Морса, яка з'єднує f_0 з f_1. Для спрощення термінології, таку гомотопію називатимемо Σ-гомотопією. Дамо точне означення.

Означення 1.5 *Говоритимемо, що гомотопія $H : W \times I \to P$ є* Σ-гомотопією, *якщо для кожного $t \in [0,1]$ відображення*

$$H_t = H(*, t) : W \to [0,1]$$

є відображенням Морса. Факт Σ-гомотопності відображень f та g записуватимемо так: $f \overset{\Sigma}{\sim} g$.

Наступне твердження описує деякі прості властивості відображень Морса та їх Σ-гомотопій.

Твердження 1.1 1) *Нехай $V, W \subset \mathbb{R}^n$ та $P, Q \subset \mathbb{R}^1$ відкриті підмножини, і $h : V \to W$ та $g : P \to Q$ дифеоморфізми. Припустимо, що $w \in W$ є невиродженою критичною точкою відображення $f : W \to P$, тоді $v = h^{-1}(w)$ є також невиродженою критичною точкою відображення $g \circ f \circ h : V \to Q$, того ж індексу, що і w.*

2) *Композиція відображення Морса з гладким накриваючим відображенням та підняття відображення Морса на гладкий накриваючий простір також являють собою відображення Морса.*

3) *Якщо* $H_t : W \to W$ *і* $G_t : P \to P$ *- гладкі ізотопії, то гомотопія*

$$G_t \circ f \circ H_t \, : \, W \, \to \, P$$

є Σ*-гомотопією.*

Доведення. 1) Відмітимо, що перехід від відображення f до $g \circ f \circ h$ фактично є заміною систем координат, в яких визначено відображення. Тепер наше твердження випливає з того, що при такій заміні координат, гессіан множиться на невироджені матриці та відмінне від нуля число, а тому точка залишається невиродженою.

2) Це випливає з п.1 і того, що накриваючі відображення гладких многовидів являють собою локальні дифеоморфізми.

3) Так як для кожного $t \in (0, 1)$ відображення H_t та G_t дифеоморфізми, то з п.1 даного твердження випливає, що відображення $f \circ H_t$ та $G_t \circ f$ морсівські. ■

Припустимо, що $f : W \to S^1$ таке відображення Морса, яке піднімається на нетривіальний накриваючий простір $\tilde{P}$ кола S^1 і $p : \tilde{P} \to S^1$ накриваюче відображення. Очевидно, що якщо $g \sim f$, то g також піднімається до відображення в $\tilde{P}$. Нехай далі $\tilde{f}$ та $\tilde{g}$ відповідні підняття.

Твердження 1.2 $f \overset{\Sigma}{\sim} g$ *тоді і тільки тоді, коли* $\tilde{f} \overset{\Sigma}{\sim} \tilde{g}$.

Доведення. З теорії накриваючих відображень відомо, що $f \sim g$ тоді і тільки тоді, коли $f = p \circ \tilde{f} \sim p \circ \tilde{g} = g$. Причому, якщо $\tilde{H} : M \times I \to \tilde{P}$ гомотопія між $\tilde{f}$ та $\tilde{g}$, то композиція $H = p \circ \tilde{H} : M \times I \to S^1$ є гомотопією між f та g. І навпаки, кожну гомотопію між f та g можна розкласти в композицію $H = p \circ \tilde{H}$, де $\tilde{H}$ гомотопія між $\tilde{f}$ та $\tilde{g}$.

Залишається довести, що H буде Σ-гомотопією тоді і тільки тоді, коли Σ-гомотопією є $\tilde{H}$, тобто, що для кожного $t \in [0,1]$ обидва відображення $\tilde{H}_t$ та $H_t = p \circ \tilde{H}_t$ або морсівські, або ні одночасно. Але це випливає з пункту 1 твердження 1.1. ∎

1.5. Неперервні відображення в коло

Лема 1.3 1. *Неперервні відображення $f, g : W \to S^1$ гомотопні тоді і тільки тоді, коли гомоморфізми груп когомологій*

$$f^1, g^1 : H^1(S^1, \mathbb{Z}) \to H^1(W, \mathbb{Z})$$

індуковані f та g співпадають.

2. *Неперервне відображення $f : W \to S^1$ піднімається на нетривіальний накриваючий простір $\hat{S}$ кола S^1 тоді і тільки тоді, коли гомоморфізм груп одновимірних гомологій індукований f не є епіморфізмом.*

Доведення. Перше твердження є твердженням теорії перешкод. [25]. Друге – прямо випливає з теореми про підняття для накриваючих просторів [24]. ∎

З твердження 1.1 та леми 1.3 випливає, що при вивченні компонент просторів відображень Морса многовидів достатньо обмежуватись двома класами відображень: функції Морса, та негомотопні нулю відображення в коло, які індукують в одновимірних гомологіях гомоморфізм “на” .

1.6. Мінімальні функції Морса на поверхнях

Відображення Морса називається *мінімальним*, або *точним*, якщо для кожного λ число c_λ критичних точок індексу λ є найменшим серед усіх відображень Морса W в P.

Нехай $\xi = (W; V_0, V_1)$ - кобордизм, де W - поверхня, можливо незв'язна.

Твердження 1.3 *На ξ існує функція Морса без критичних точок індексів 0 та 2 тоді і тільки тоді, коли для кожної компоненти $U \subset W$ обидві множини $U \cap V_0$ та $U \cap V_1$ непорожні. Функція з такою властивістю є мінімальною. Будь-які дві мінімальні функції мають однаковий критичний тип. Якщо f мінімальна функція Морса на ξ, то вводячи додаткові пари критичних точок індексів 0 та 1 чи 2 та 1 можна побудувати функцію довільного критичного типу.*

Доведення. За рівністю Морса [11], для кожної функції Морса на ξ має місце співвідношення

$$\chi M = c_0 - c_1 + c_2. \tag{1.2}$$

Так як $c_i \geq 0$, то мінімум суми $\sum_i c_i$ при умові (1.2) досягається тільки тоді, коли $c_0 = c_2 = 0$. Отже, функції без критичних точок індексів 0 та 2 дійсно мінімальні і мають однаковий критичний тип.

Існування мінімальних функцій Морса та можливість побудови функції Морса довільного критичного типу випливає з теорії сферичних перебудов (див. напр. [9]) ■

РОЗДІЛ II

Компоненти зв'язності простору відображень Морса

В цьому розділі ми дамо класифікацію компонент простору відображень Морса компактної орієнтовної поверхні M в коло S^1.

Якщо не сказано інше, всі розглядувані нижче відображення та многовиди будуть належати класу гладкості C^∞.

2.1. Постановка задачі

Нехай W – гладкий многовид, і P – або пряма $\mathbb{R}$, або коло S^1. Множина всіх відображень Морса многовиду W в P утворює підпростір $\mathcal{M} = \mathcal{M}(W, P)$ у просторі $C^\infty(W, P)$ всіх гладких відображень.

Нас цікавлять компоненти зв'язності простору $\mathcal{M}(W, P)$. Очевидно, що два відображення Морса f_0 та f_1 належать одній компоненті цього простору тоді і тільки тоді, коли існує гомотопія, яка складена з відображень Морса, і з'єднує f_0 з f_1. Для спрощення термінології гомотопію, що складається з функцій Морса називатимемо Σ-гомотопією (означення 1.5.) Крім того, якщо $H : M \times I \to P$ – Σ-гомотопія, то її завжди можна вважати гладким відображенням, більш точно: знайдеться як завгодно близьке до H гладке відображення $H' : M \times I \to P$ яке також є Σ-гомотопією між H_0 та H_1. Це випливає із стандартної апроксимаційної техніки, та стійкості відображень Морса.

Тому надалі, якщо не вказано протилежне, ми розглядатимемо лише Σ-гомотопії класу C^∞.

Якщо $P = \mathbb{R}$, то P є стягуваним простором, і тому будь-які дві функції Морса можна з'єднати гладкою гомотопією. У випадку $P = S^1$ ситуація додатково ускладнюється тим, що не кожні два відображення W в S^1 гомотопні. Отже, для опису компонент простору $\mathcal{M}(W, P)$ необхідною умовою є гомотопність відображень.

Якщо f_0 та f_1 гомотопні відображення Морса з $\mathcal{M}(W, P)$, то питання постає таким чином: чи можна гомотопію між f_0 та f_1 реалізувати за допомогою лише функцій Морса, і якщо ні, то в яких випадках це можливо. В загальному випадку для многовиду W відомо наступне.

В роботах [29], [30], [32] доведено, що будь-які дві функції Морса f_0 та f_1 можна з'єднати гомотопією f_t наступного виду: для всіх $t \in [0, 1]$ за виключенням скінченого числа значень $t_{i_1}, \ \dots \ , t_{i_k}$ функція f_t є функцією Морса загального положення. При $t = t_{i_1}, \ \dots \ , t_{i_k}$ виконується одна з умов:

1) Всі критичні точки функції f_t невироджені, і знайдеться критичний рівень, на якому рівно дві критичні точки, а на всіх інших рівнях лише по одній такій точці.

2) Функція f_t є функцією загального положення, і серед її критичних точок знайдеться лише одна вироджена критична точка, причому в її околі в деякій системі координат функцію можна представити у вигляді

$$-\sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^{n-1} x_i^2 + x_n^3$$

Таким чином, виникає доданок 3-го степеня, від якого не завжди можна позбавитись.

Необхідною умовою існування Σ-гомотопії між відображеннями Морса є так званий *критичний тип.*

Нехай $f : W \to P$ відображення Морса. Зафіксуємо деяку орієнтацію P і позначимо через $c_k(f)$ число критичних точок індексу k цього відображення.

Нехай тепер V довільна компонента ∂W. Так як f, за означенням, постійне на V, то в деякому околі N компоненти V відображення f можна розглядати як функцію $N \to \mathbb{R}$, так щоб стандартна орієнтація $\mathbb{R}$ була індукована орієнтацією з P. Крім того, $\operatorname{grad} f$ направлений або всередину, або зовні W у всіх точках V одночасно. Співставимо компоненті V число ε_V рівне $+1$ якщо $\operatorname{grad} f$ направлений зовні M і $\varepsilon = -1$ в протилежному випадку.

Назвемо *критичним типом* відображення Морса f наступний об'єкт

$$(c_0, c_1, c_2, \{(V, \varepsilon_V)\})$$

де V пробігає всі компоненти ∂W.

Клас всіх відображень Морса того ж критичного типу, що й f позначатимемо через $\Sigma(f)$.

Наступна теорема, є справедливою для довільних морсівських відображень W в P.

Теорема 2.1 *Якщо $f, g : W \to P$ відображення Морса, і існує Σ-гомотопія між ними, то ці відображення мають однаковий критичний тип:* $\Sigma(f) = \Sigma(g)$.

Вона належить "математичному фольклору" і автору невідомо чи було її доведення де-небудь опубліковане. Тому, для повноти викладення, ми доведемо цю теорему в наступному підрозділі.

Таким чином, для існування Σ-гомотопії між відображеннями Морса необхідно, щоб вони були гомотопними і мали однаковий критичний тип.

Відмітимо, що для функцій Морса на многовидах високих розмірностей умова співпадання критичних типів ще не є достатньою для існування Σ-гомотопії.

Нагадаємо, що відображення Морса $f \in \mathcal{M}(W, P)$ називається *точним*, або *мінімальним*, якщо для всіх $k = 0..\dim W$ число $c_k(f)$ його критичних точок індексу k є мінімальним серед усіх таких можливих чисел для всіх відображень Морса з $\mathcal{M}(W, P)$, тобто

$$c_k(f) = \min\{c_k(g) \mid g \in \mathcal{M}(W, P)\}$$

Очевидно, що два точних відображення Морса завжди мають однаковий критичний тип. В [23] (теорема 2.7), доведено, що дві точні функції Морса на замкнутому однозв'язному многовиді W розмірності $n \geq 6$, Σ-гомотопні тоді і тільки тоді, коли у них співпадають так звані гомологічні інваріанти. Ці інваріанти являють собою елементи групи періодичних частин груп гомологій многовиду. Якщо кручення відсутнє, то відповідний гомологічний інваріант рівний нулю, і тому будь-які дві точні функції Морса на такому многовиді Σ-гомотопні. Відмітимо, що останнє твердження було незалежно доведено Огюстеном [26].

У випадку, коли W – компактна поверхня, В. В. Шарко [22] і С. В. Матвеєв [4] незалежно один від одного, і використовуючи різні методи довели, що Σ-гомотопність функцій Морса на W рівносильна тому, що вони мають однаковий критичний тип.

Теорема 2.2 *Нехай $\mu = (M^2; V_0, V_1)$ - кобордизм, де M – довільна компактна (орієнтовна чи ні) поверхня з краєм $\partial M = V_0 \cup V_1$. Дві функції*

Морса $f, g : \mu \to \mathbb{R}$ належать одній компоненті зв'язності простору $\mathcal{M}(M^2, \mathbb{R})$ тоді і тільки тоді, коли вони мають однаковий критичний тип.

Якщо до того ж функція f співпадає з g на деяких компонентах з V_0 та V_1, то Σ-гомотопію, що з'єднує f та g можна вибрати гомотопією відносно деяких околів цих компонент.

Основний результат цього розділу – теорема 2.3, яка описує компоненти простору відображень Морса *орієнтовної* поверхні в коло.

Теорема 2.3 *Нехай M компактна орієнтовна поверхня. Два відображення Морса $f, g : M \to S^1$ належать одній компоненті простору $\mathcal{M}(M^2, S^1)$ тоді і тільки тоді, коли вони гомотопні і мають однаковий критичний тип.*

В доведенні цієї теореми ми використовуємо теорему 2.2.

2.2. Доведення теореми 2.1

Нехай $h : M \times I \to P$ – гладка Σ-гомотопія між $f = H_0$ та $g = H_1$. Потрібно довести, що f та g мають однаковий критичний тип.

Неважко показати, що H індукує гомотопію $dH : W \times I \to T^*M$ складену з диференціалів відображень H_t. Якщо всі $H_t = H|W \times \{t\}$ морсівські, тобто H є Σ-гомотопією, то DH_t для всіх $t \in I$ є трансверсальним до нульового розтину $Z^* \subset T^*W$, а тому відображення dH також трансверсальне до Z^*.

Звідси випливає, що прообраз $V = dH^{-1}(Z^*)$ є правильним гладким одновимірним підмноговидом в $W \times I$. Множина V є об'єднанням критичних точок всіх відображень H_t. Компоненти V – це кола, що лежать в $\mathrm{Int}W \times I$, та дуги з кінцями в в $W \times \{0;1\}$.

Ми покажемо, що

1) якщо дуга $\beta \in V$ перетинає множину виду $W \times \{t\}$, то цей перетин є трансверсальним.

2) для кожної такої дуги з V всі її точки мають однаковий індекс.

З 1) випливає, що насправді всі компоненти многовиду V являють собою дуги, кожна з яких перетинає кожну з множин виду $W \times \{t\}$ в єдиній точці. Звідси та з 2) слідує, що число точок кожного індексу в перетині $V \cap W \times \{t\}$ одне й те ж саме для всіх $t \in [0,1]$. Це і означає, що всі H_t мають однаковий критичний тип. Отже, доведемо твердження 1) та 2).

1) Нехай $x \in V \cap W \times \{t\}$ для деякого $t \in [0,1]$. Потрібно довести, що дотичні простори T_xV та $T_x(W \times \{t\})$ породжують дотичний простір $T_x(W \times I)$. Так як сума їх розмірностей рівна розмірності $T_x(W \times I)$, і T_xV – одновимірний простір, то достатньо довести, що $T_xV \not\subset T_x(W \times \{t\})$.

Припустимо протилежне, тобто, що $T_xV \not\subset T_x(W \times \{t\})$. Нехай $y = dH(x) = z \circ H_t(x) \in T^*W$ Легко бачити, що лінійне відображення

$$T_x(H_t) : T_x(W \times \{t\}) \to T_y(T^*W)\,,$$

дотичне до H_t є мономорфізмом. Звідси випливає T_xV відображається на ненульовий підпростір. Але ж T_xV є ядром відображення $T_x(H_t)$ яке індуковане дотичним відображенням $T_x(dH)$. Отримали протиріччя.

Покажемо нарешті, що $T_x(H_t)$ – мономорфізм. Дійсно, обмеження H на $W \times \{t\}$ трансверсальне до Z^*, це означає, що образ дотичного простору $T_x(W \times \{t\})$ разом з дотичним простором до Z^* в точці $y = z \circ H_t(x)$

породжують дотичний простір до T^*W в цій точці. Так як

$$\dim T_x(W \times \{t\}) + \dim T_x(W \times \{t\}) = n + n = 2n = \dim T_y(T^*W)$$

то ядро $T_x(H_t)$ тривіальне. ■

2) Нехай $p = (x_0, t_0)$ довільна точка з V. З того, що V одновимірний многовид, який трансверсально перетинає кожну множину $W \times t$ в єдиній точці, випливає, що існує така система координат $u_1, \ldots, u_{n+1}$ в околі точки $p = (0, \ldots, 0, t_0)$, в якій множина $M \times t$ задається рівнянням $u_{n+1} = t$, а V – рівнянням $u_1 = \ldots = u_n = 0$.

Аналізуючи метод доведення леми Морса, можна бачити, що вона вірна для сімей функцій Морса залежних від компактного параметра t: знайдеться такий окіл $N \subset V$ точки p і такий дифеоморфізм

$$\phi : D^n \times [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to N \times [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon],$$

що

$$H \circ \phi(u_1, \ldots, u_n, t) = H(0, \ldots, 0, t) - \sum_{i=1}^{\lambda} u_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^{n} u_i^2$$

Остання формула показує, що всі досить близькі до p точки з V мають один і той же індекс. Отже, всі точки компоненти V, що містить p, мають однаковий індекс. Теорему доведено. ■

2.3. Доведення достатності теореми 2.3

Необхідність теореми 2.3 міститься в теоремі 2.1. Нам потрібно довести достатність.

З твердження 1.1 та леми 1.3 випливає, що можна обмежитись випадком, коли f та g негомотопні нулю. Тоді теорема 2.3 слідує з наступних теорем, які ми доведемо нижче.

Нехай $f, g : M \to S^1$ гомотопні, але не гомотопні нулю, відображення Морса.

Теорема 2.4 *Знайдуться Σ-гомотопії f та g у такі відображення*

$$f_1, g_1 : M \to S^1,$$

що для деяких регулярних значень $x, y \in S^1$ відображень f_1 та g_1 відповідно, виконується співвідношення

$$f_1^{-1}(x) \cap g_1^{-1}(y) = \emptyset.$$

Теорема 2.5 *Нехай $x, y \in S^1$ регулярні значення f та g відповідно. Якщо*

$$f^{-1}(x) \cap g^{-1}(y) = \emptyset,$$

то існує Σ-гомотопія відображення f у таке відображення $f_1 : M \to S^1$, що

$$f_1^{-1}(y) = g^{-1}(y).$$

Наступна теорема є прямим наслідком теореми 2.2.

Теорема 2.6 *Припустимо, що f і g гомотопні і мають однаковий критичний тип. Якщо знайдеться точка $x \in S^1$, яка є регулярним значенням обох відображень, і $f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$, то $f \overset{\Sigma}{\sim} g$.*

Доведення.

Нехай $X = f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$. Ми можемо вважати, що виконується більш сильна умова: $f = g$ в деякому околі X. Це гарантується наступною лемою, яка носить суто технічний характер, і випливає з теореми 5.3. [20] про ізотопії трубчатих околів підмноговидів.

Лема 2.1 *Відображення f Σ-гомотопне такому відображенню f_1, що*

$$f_1^{-1}(x) = g^{-1}(x) = X$$

і f_1 співпадає з g в деякому околі X. ■

Розріжемо M уздовж X. Отриману поверхню позначимо через M' і нехай $\psi : M' \to M$ фактор-відображення. Тоді відображення

$$f \circ \psi : M' \to S^1$$

є гомотопним нулю і тому піднімається на універсальне накриття $\mathbb{R}$ до деякого відображення

$$f' : M' \to \mathbb{R}.$$

Аналогічно $g \circ \psi \sim 0$, і нехай g' його підняття.

Ми отримали дві функції Морса f' і g' на M', які співпадають в околі $\partial M'$. За теоремою 2.2 вони Σ-гомотопні відносно околу краю $\partial M'$. Тоді ця Σ-гомотопія індукує гладку Σ-гомотопію між f і g відносно околу X. Теорему доведено. ■

Доведення теореми 2.3. За теоремою 2.4 відображення f та g Σ-гомотопні таким відображенням f_1 та g_1, що для деяких регулярних значень $x, y \in S^1$

$$f_1^{-1}(x) \cap g_1^{-1}(y) = \emptyset.$$

Тоді за теоремою 2.5 знайдеться Σ-гомотопія відображення f_1 у деяке відображення f_2, для якого y є регулярним значенням, і $f_2^{-1}(y) = g_1^{-1}(y)$. Тепер за теоремою 2.6 $f_2 \overset{\Sigma}{\sim} g_1$. ■

2.4. Допоміжні результати

В цьому параграфі ми введемо деякі позначення та доведемо кілька тверджень, що будуть далі використані.

2.4.1. "Несуттєві" компоненти прообразів

Нехай $f : M \to S^1$ відображення Морса, $x \in S^1$ довільне регулярне значення f і $X = f^{-1}(x)$. Множина X являє собою компактний одновимірний підмноговид без краю, тобто є сім'єю кіл. Розріжемо M уздовж X і позначимо отриману поверхню через M'. Нехай ще $\psi : M' \to M$ відображення склеювання. Край $\partial M'$ позначимо через B. Очевидно, що $B = \psi^{-1}(X)$.

Композиція $f \circ \psi : M' \to S^1$ є гомотопним нулю відображенням, і тому піднімається до деякого відображення

$$f' : M' \to \mathbb{R},$$

такого, що $q \circ f' = f \circ \psi$, де $q : \mathbb{R} \to S^1$ накриваюче відображення: $q(t) = e^{2\pi i t}$.

Не порушуючи загальності, можемо вважати, що $f'(M') = [0, 1]$. Тоді $q^{-1}(x) = \mathbb{Z}$ і $f'(B) = \{0, 1\}$. Покладемо

$$B_i = f'^{-1}(i)\,, \quad i = 0, 1.$$

Означення 2.1 *Назвемо компоненту V множини $M \setminus f^{-1}(x)$* несуттєвою *(відносно f та x), якщо $f(\overline{V}) \neq S^1$, тобто її замикання відображається не на все коло.*

Назва аргументується наступною лемою:

Лема 2.2 *Нехай V несуттєва компонента $M \setminus f^{-1}(x)$ відносно f та X і нехай $R = \overline{V} \cap X$. Якщо $R \neq \emptyset$, то f є Σ-гомотопним відносно доповнення до деякого околу множини $\overline{V}$ такому відображенню f_1, що x є регулярним значенням f_1 і*

$$f_1^{-1}(x) = X \setminus R.$$

Наслідок 2.1 *Кожне негомотопне нулю відображення Морса $f : M \to S^1$, для кожного свого регулярного значення x, Σ-гомотопне такому відображенню f_1, що множина*

$$M \setminus f_1^{-1}(x)$$

не містить несуттєвих компонент відносно f_1 та x.

Зауваження. Умова, що $M \setminus f_1^{-1}(x)$ не містить несуттєвих компонент відносно f_1 та x, очевидно, рівносильна тому, що кожна компонента поверхні M' перетинається з обома множинами $B_i, i = 0, 1$.

Доведення наслідку. Якщо твердження наслідку не вірне, то за індукцією f гомотопне такому відображенню, у якого прообраз регулярного значення X порожній, але тоді f гомотопне відображенню не на все коло, тобто є гомотопним нулю, що протирічить умові. Наслідок доведено. ■

Доведення леми 2.2. За умовою $f(\overline{V})$ є власною підмножиною S^1, тому обмеження f на $\overline{V}$ гомотопне нулю. Нехай

$$f' : \overline{V} \to \mathbb{R}$$

підняття, так що $f|_{\overline{V}} = q \circ f'$.

Не порушуючи загальності, можна вважати, що

$$f'(X) = 0, \qquad i \qquad f'(\overline{V}) = [0, a],$$

де $a < 1$. Візьмемо δ таке, щоб $0 < 4\delta < 1 - a$ і щоб множина

$$q\left([1 - 4\delta, 1]\right) \subset S^1$$

містила б лише регулярні значення f.

Нехай K - об'єднання тих компонент множини $f'^{-1}[1 - 4\delta, 1]$, які перетинаються з $\overline{V}$. Внаслідок вибору δ маємо, що

$$R = K \cap \overline{V} \subset X.$$

Нехай $N = K \cup \overline{V}$. Множина $\overline{V}$ є деформаційним ретрактом N, тому обмеження f на N також гомотопне нулю, і підняття $f'|_V$, продовжується до підняття $f'|_N$. При цьому $f'(N) = [-4\delta, a]$. Покладемо ще

$$N' = M \setminus \left(f'^{-1}\left[-3\delta, a\right] \cap N\right).$$

Очевидно, що

$$N \cap N' \subset f'^{-1}\left(-4\delta, -3\delta\right).$$

Нехай тепер $H : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$ гладка ізотопія тотожного відображення $\operatorname{id} \mathbb{R}$, нерухома на доповненні до інтервалу $(-3\delta, +\infty)$, яка стягує відрізок $[-3\delta, a]$ у відрізок $[-3\delta, -2\delta]$. Тоді відображення $F : M \times I \to S^1$ задане формулою

$$F(x,t) = \begin{cases} f\left(x\right) & x \in N' \\ q \circ H\left(f'\left(x\right), t\right) & x \in N \end{cases}$$

є Σ-гомотопією відображення f. Покажемо, що відображення $f_1 = F_1$ задовольняє твердженню даної леми. Дійсно, воно є гладким, бо при

$x \in N \cap N'$, $f'(x) \in [-4\delta, -3\delta]$, а тому

$$q \circ H\left(f'\left(x\right), t\right) = q \circ f'\left(x\right) = f\left(x\right)$$

Відмітимо тепер, що $f_1(N) \subset [-3\delta, -2\delta]$, тому

$$f_1^{-1}(x) = f^{-1}(x) \setminus N = X \setminus R$$

Лему доведено. ■

2.4.2. Функція Морса, у якої заданий набір кіл є прообразом регулярного значення

Нехай $\xi = (M'; B_0, B_1)$ кобордизм, де M' - компактна, можливо незв'язна, поверхня з краєм $B = B_0 \cup B_1$, причому $B_i \neq \emptyset$ для $i = 0, 1$.

Нехай далі $A \subset \mathrm{Int} M'$ деяка сім'я кіл, які попарно не перетинаються одне з одним, і U_i - об'єднання тих компонент множини $M' \setminus A$, які перетинаються з B_i, $i = 0, 1$.

Лема 2.3 *Припустимо, що виконуються наступні умови*

1. *кожна компонента поверхні M' має непорожній перетин з обома множинами B_i, $i = 0, 1$*

2. *сім'я A розбиває M' між множинами B_0 та B_1, тобто множина компонент доповнення $M' \setminus A$ розпадається на дві підмножини, що попарно не перетинаються, причому одна з них містить лише точки B_0, а друга – лише точки множини B_1*

3. $A \subset \overline{U}_0 \cap \overline{U}_1$

тоді існує така функція Морса

$$h : (M'; B_0, B_1) \to ([0,1]\,; 0, 1\,)\,,$$

що

a) *деяка, довільно наперед задана, точка* $z \in (0,1)$ *є регулярним значенням* h, *причому* $h^{-1}(z) = A$

b) *в деякому околі краю* B *функція* h *співпадає з довільною наперед заданою функцією Морса*

$$f' : (M'; B_0, B_1) \to ([0,1]\,; 0, 1)$$

c) $\Sigma(f') = \Sigma(h)$.

Доведення. За наслідком твердження 1.3 ми можемо обмежитись випадком, коли f' є мінімальною функцією Морса. Переходячи до загального випадку, ми побудуємо спочатку мінімальну функцію, яка задовольняє a) та b), а потім додамо нові пари критичних точок, так щоб виконувалась ще й умова c) і при цьому попередні умови a) та b) не порушились.

Відмітимо, що умова 1) даної леми означає, що

$$U_0 \cup U_1 = M' \setminus A. \tag{2.1}$$

Далі з умови 2) леми впливає, що кожна компонента множини $M' \setminus A$ перетинається рівно з однією з множин B_0 чи B_1, а так як U_i складаються з цілих компонент $M' \setminus A$, то це означає, що

$$U_0 \cap U_1 = \emptyset. \tag{2.2}$$

Зафіксуємо довільне число $z \in (0, 1)$. Візьмемо додатнє

$$\delta < \min\{z, 1 - z\}$$

і для кожного кола σ з A виберемо його регулярний окіл N_σ в M', так щоб для різних кіл σ та σ' з A їх околи N_σ та $N_{\sigma'}$ не перетинались.

Розглянемо множину $N_\sigma \setminus \sigma$. Вона складається з двох компонент K_0 та K_1. З формул (2.1) та (2.2) випливає, що кожна $K_i, i = 0, 1$ міститься лише в одній з компонент $U_j, j = 0, 1$. А так як за умовою 3) цієї леми окіл N_σ перетинається з обома множинами U_0 та U_1, то K_i містяться в різних U_j.

Отже, не втрачаючи загальності, можемо вважати, що $K_i \subset U_i, i = 0, 1$. Відмітимо також, що для $i = 0, 1$ виконується співвідношення:

$$\partial \overline{U}_i = B_i \cup A. \tag{2.3}$$

Так як окіл N_σ дифеоморфний добутку $\sigma \times [z - \delta, z + \delta]$, причому колу $\sigma \subset N_\sigma$ відповідає $\sigma \times 0$, то на N_σ існує функція Морса

$$\phi_\sigma : N_\sigma \to [z - \delta, z + \delta]$$

без критичних точок, для якої $\phi_\sigma^{-1}(z) = \sigma$. В якості ϕ_σ можна взяти проекцію на другу координату.

Можна також вважати, що

$$\phi_\sigma^{-1}[z - \delta, z] \subset \overline{U}_0\,, \qquad \phi_\sigma^{-1}[z, z + \delta] \subset \overline{U}_1.$$

Нехай $N_A = \cup_{\sigma \in A} N_\sigma$ - окіл A. Задамо функцію

$$\phi : N_A \to [z - \delta, z + \delta]$$

поклавши $\phi = \phi_\sigma$ на N_σ.

З (2.3) і того, що кожна компонента з U_i перетинається як з B так і з A, за твердженням 1.3, існують функції

$$h_- : (\overline{U}_0; B_0, A) \to \left(\left[0, \frac{1}{2}\right]; 0, \frac{1}{2}\right)$$
$$h_+ : (\overline{U}_1; A, B_1) \to \left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]; \frac{1}{2}, 1\right)$$

без критичних точок індексів 0 та 2, які співпадають з ϕ в околі A з f' в околі B, причому

$$h_+^{-1}(z) = h_-^{-1}(z) = A.$$

Поклавши $h = h_-$ на $\overline{U}_0$ і $h = h_+$ на $\overline{U}_1$, ми отримаємо шукану мінімальну функцію Морса на M'. ■

Зауважимо, що (2.3) означає, що $A \cup B_i$ обмежують деяку поверхню, що лежить в $\mathrm{Int}M$.

2.4.3. Орієнтація прообразів регулярних значень

Диференціал df та орієнтація поверхні дозволяють канонічним чином орієнтувати X. Нехай C компонента X, і $z \in C$. Так як x регулярне значення f, то f індукує ізоморфізм:

$$\phi : TM_z \approx TX_z \oplus TS^1_x$$

Зафіксуємо довільну точку $x \in C$. Виберемо в TC_x вектор v_x (тобто орієнтуємо C в точці x) так, щоб пара $(\mathrm{grad}_x f, v_x)$ визначала додатну орієнтацію M. Отримана орієнтація не залежить від вибору точки $x \in C$. Орієнтувавши таким чином всі компоненти $C \subset X$, ми отримаємо орієнтацію A. Отже, ми можемо розглядати X як орієнтований одновимірний цикл $[X] \in H_1 M$.

Зауваження. Для різних регулярних значень $x, y \in S^1$ відображення f підмноговиди $f^{-1}(x)$ та $f^{-1}(y)$ кобордантні, а отже цикли $[f^{-1}(x)]$ та $[f^{-1}(y)]$ гомологічні.

2.4.4. Гомологічність прообразів регулярних значень

Нагадаємо, що на H_1M визначена білінійна форма перетину

$$\phi : H_1M \times H_1M \to \mathbb{Z}.$$

Вона задає деякий ізоморфізм $p : H_1M \to H^1M$, який співставляє кожному $u \in H_1$ лінійну форму $\phi(*, u)$.

Нехай $f : M \to S^1$ гладке відображення, x його регулярне значення і $X = f^{-1}(x)$. Орієнтуємо X як вказано вище. Тоді $p(X)$ є коцикл з H^1M.

Нехай ξ - твірна групи $H^1S^1 \approx \mathbb{Z}$, тоді ми маємо ще один коцикл $f^\sharp(\xi) \in H^1M$, де

$$f^\sharp : H^1S^1 \to H^1M,$$

відповідне відображення одновимірних когомологій.

Твердження 2.1 *Має місце рівність одновимірних коциклів:*

$$p[X] = f^\sharp(\xi),$$

тобто індекс перетину довільного 1-циклу на M з прообразом регулярного значення дорівнює степені відображення цього циклу на S^1. ■

Наслідок 2.2 *Нехай $g : M \to S^1$ ще одне гладке відображення, y його регулярне значення і $Y = g^{-1}(y)$ орієнтований прообраз y. Умова $f \sim g$ рівносильна умові $[X] = [Y] \in H_1M$.* ■

2.5. Доведення теореми 2.4

Ми виведемо її з наступного, більш загального твердження:

Твердження 2.2 *Нехай $f : M \to S^1$ відображення Морса, яке не гомотопне нулю, а Y - сім'я кіл на M, які попарно не перетинаються, причому обмеження $f|_Y$ є гомотопним нулю. Тоді існує Σ-гомотопія f у таке відображення h, що для деякого регулярного значення z цього відображення*

$$h^{-1}(z) \cap Y = \emptyset.$$

Припустимо, що твердження 2.2 вже доведене. Розглянемо множину

$$Y = g^{-1}(y).$$

Вона є об'єднанням скінченого числа кіл, які між собою попарно не перетинаються. Обмеження, $f|_Y : Y \to S^1$ є гомотопним нулю, і тому до відображення f та множини Y можна застосувати твердження 2.2. Це доводить теорему 2.4.

Покажемо, що $f|_Y \sim 0$. Нехай K довільна компонента Y. Через $[K]$ позначимо одновимірний цикл, який представляється колом K в $H_1 M$.

Так як $g(K)$ є точкою, то $[K] \in \ker g_\sharp$. З того, що f та g гомотопні випливає, що $\ker f_\sharp = \ker g_\sharp$. Але тоді $[K] \in \ker f_\sharp$, і відображення

$$f|_K : K \to S^1$$

має степінь 0. Звідси $f|_K \sim 0$. ■

Доведення твердження 2.2. Нехай $x \in S^1$ таке регулярне значення f, що $X = f^{-1}(x)$ не перетинається з ∂M.

Ми можемо вважати, що Y і X перетинаються трансверсально. Дійсно, завжди існує гладка ізотопія $H : M \times I \to M$, для якої $H_0 = \mathrm{id}\, M$ так, що перетин $H_1(X)$ з Y трансверсальний. Тоді, за пунктом 2 твердження 1.1, композиція

$$F_t = f \circ H_t^{-1} : M \times I \to S^1$$

є Σ-гомотопією відображення f, для якої

$$F_1^{-1}(x) = (f \circ H^{-1})^{-1}(x) = H_1 \circ f^{-1}(x) = H_1(X)$$

перетинається з Y трансверсально і ми можемо замінити f на відображення F_1.

Розріжемо M уздовж X і позначимо отриману поверхню через M'. Нехай $\psi : M' \to M$ відображення склеювання, а $B = \partial M'$ край M'. Так як M за припущенням замкнута, то $B = \psi^{-1}(X)$.

Згідно зауваженню після наслідку до леми 2.2, можемо вважати, що кожна компонента M' перетинається з обома множинами $B_i, i = 0, 1$.

Композиція $f \circ \psi : M' \to S^1$ гомотопна нулю, і тому піднімається до деякого відображення $f' : M' \to \mathbb{R}$, такого, що $q \circ f' = f \circ \psi$, де $q : \mathbb{R} \to S^1$ накриваюче відображення: $q(t) = e^{2\pi i t}$.

Не порушуючи загальності, можемо вважати, що $f'(M') = [0, 1]$. Тоді $q^{-1}(x) = \mathbb{Z}$ і $f'(B) = \{0, 1\}$. Покладемо

$$B_i = f'^{-1}(i)\,, i = 0, 1.$$

Нехай далі $C = \psi^{-1}(Y)$. Тоді C є об'єднанням скінченого числа дуг та кіл на M, причому кінці цих дуг належать B. Розіб'ємо компоненти C на наступні 4 групи.

Для $i = 0, 1$ нехай α_i - множина тих дуг з C, у яких обидва кінці належать одній і тій самій множині B_i. Нехай далі β множина тих дуг з C, у яких один кінець належить B_0, а другий - B_1. Всі інші компоненти C являють собою кола, що не перетинаються з C. Позначимо множину цих кіл через γ.

Мають місце два твердження, які ми доведемо трохи нижче.

Лема 2.4 *Якщо $X \cap Y \neq \emptyset$, то кожна з множин α_i $(i = 0, 1)$ непорожня.*

Твердження 2.3 *З того, що кожна компонента M' перетинається з обома множинами B_0 та B_1 випливає, що існує сім'я кіл $A \subset \mathrm{Int}M'$ яка володіє такими властивостями:*

1) $A \cap (\alpha_0 \cup \alpha_1 \cup \gamma) = \emptyset$, $i = 0, 1$

2) *A перетинається з кожною дугою із β рівно в одній точці, і цей перетин є трансверсальним*

3) *A задовольняє умовам 2) та 3) леми 2.3.*

Припустимо, що ці твердження доведені. Тоді ми можемо побудувати сім'ю A і нехай $Y_1 = \psi(A)$. Застосувавши тепер до Y_1 лему 2.3 ми побудуємо функцію $h : M' \to \mathbb{R}$ яка співпадає з f' в околі B, має критичний тип $\Sigma(f')$ причому $h^{-1}(z) = A$ для деякого регулярного значення $z \in (0, 1)$.

Тоді, за теоремою 2.2 $h \stackrel{\Sigma}{\sim} f'$ і відображення h індукує таке відображення $f_1 : M \to S^1$, що

a) $f_1 \stackrel{\Sigma}{\sim} f$ відносно деякого околу X

b) $f_1^{-1}(x) = f^{-1}(x) = X$

c) точка $q(z) \in S^1$ є регулярним значенням f_1 і $f_1^{-1}(z) = Y_1$.

Так як f та f_1 гомотопні, то обмеження f_1 на Y_1 також гомотопне нулю, але при цьому, з умов 1) та 2) випливає, що число точок перетину $X_1 \cap Y$ *строго менше* від числа точок перетину $X \cap Y$. Міркуючи далі за індукцією, ми побудуємо таке відображення $f_k : M \to S^1$, що для деякого його регулярного значення z

$$f_k^{-1}(z) \cap Y = \emptyset.$$

Тоді $h = f_k$ буде шуканим відображенням і теорему доведено.

Отже, залишилось довести лему 2.4 і твердження 2.3.

Доведення леми 2.4. Нехай $\bar{f} : Y \to \mathbb{R}$ підняття $f|_Y$, так що

$$q \circ \bar{f} = f : Y \to S^1.$$

Нехай далі $K \subset Y$ таке коло, що $K \cap X \neq \emptyset$. Тоді внаслідок компактності K, функція $\bar{f}$ має мінімум і максимум на K. З трансверсальності перетину Y з $X = f^{-1}(x)$, і того, що x регулярне значення f, критичні значення $\bar{f}$, (зокрема ці мінімум та максимум) не належать $q^{-1}(x) = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

Покажемо, що α_0 непорожня. Нехай $t = \max \bar{f}$. Розглянемо множину

$$W = \bar{f}^{-1}\left[[t], t, \right],$$

де $[a]$ означає цілу частину від a. Множина W непорожня, бо містить точку максимуму f на K, і складається з дуг K.

Нехай σ компонента $W \cap K$ і x_1, x_2 її кінці. Це точки перетину $K \cap X$. Так як $f(X) = q(\mathbb{Z}) = x$, то значення $\bar{f}$ в кожній точці x_i повинно бути цілим числом з відрізку $\bar{f}(W)$. Отже, $\bar{f}(x_i) = [\,t\,], i = 1, 2$.

Так як $\bar{f}|_\sigma$ та $f'|_\sigma$ підняття одного й того ж відображення $f|_\sigma$, то

$$f'|_\sigma = \bar{f}|_\sigma - [\,t\,].$$

З цієї формули випливає, що $f'(x_i) = 0$ для $i = 1, 2$, тобто, що $x_i \in B_0$. Це й означає, що $\sigma \subset \alpha_0$, отже α_0 непорожня. Аналогічно доводиться, що $\alpha_1 \neq \emptyset$. ■

Доведення твердження 2.3. Нам потрібно побудувати сім'ю кіл A, яка задовольняє умовам 1)-3) даного твердження.

Розріжемо M' уздовж $\alpha_0 \cup \alpha_1$. Ми отримали поверхню, край якої має кути. Позначимо її через L і нехай $r : L \to M'$ фактор-відображення. Покладемо

$$B' = r^{-1}(B)$$

$$B'_i = r^{-1}(B_i),\ i = 0, 1$$

Тоді край кожної компоненти ∂L перетинається з B', але лише з однією з множин B'_0 чи B'_1.

Для кожної компоненти $T \subset L$ для $i = 0, 1$, нехай T_i позначає об'єднання тих компонент краю ∂T, які перетинаються з B'_i.

Через L' позначимо множину тих зв'язних компонент L, які перетинаються з обома множинами B'_0 та B'_1, тобто це множина тих $T \subset L$ для яких обидві множини T_0 та T_1 непорожні.

Нехай ще L_i для $i = 0, 1$, буде об'єднанням тих компонент L, які перетинаються тільки з B'_i. Зрозуміло, що

$$L = L' \cup L_0 \cup L_1.$$

Покладемо $\beta' = r^{-1}(\beta)$ і $\gamma' = r^{-1}(\gamma)$. Відмітимо, що

$$\beta' \subset L', \qquad \gamma' \subset \mathrm{Int} L.$$

В кожній компоненті T з L' ми побудуємо деяку сім'ю кіл C_T. Їх об'єднання по всіх компонентах з L' і буде сім'єю A, яка задовольняє умовам даного твердження.

Отже, нехай T компонента L', $c : T_0 \times [0, 1] \subset T$ комір T_0 в T, причому $c(x, 0) = x \in T_0$. Тоді для досить малого $\tau \in [0, 1]$ множина кіл $C_T = c(T_0 \times \tau)$ є шуканою. Покажемо як вибрати τ.

Відмітимо, що перетин β з T_0 трансверсальний і кожна дуга з $\beta \cap T$ перетинається з T_0 рівно в одній точці (її початку). Звідси випливає, що для досить малого $\tau_\beta \in [0, 1]$ перетин $c(T_0 \times \tau)$ з кожною дугою $l \in \beta' \cap T$ залишається трансверсальним і складається з єдиної точки.

Далі, $\gamma' \subset \mathrm{Int} L$ тому знайдется $\tau_\gamma \in [0, 1]$ таке, що $c(T_0 \times \tau) \cap \gamma' = \emptyset$.

Покладемо $\tau_T = \min\{\, \tau_\beta, \tau_\gamma \,\}$. Нехай $C_T = c(T_0 \times \tau_T)$,

$$A' = \bigcup_{T \in L'} C_T$$

$$A = r(A')$$

Покажемо, що A є шуканою сім'єю.

Умови 1 та 2 твердження випливають прямо з побудови. Доведемо, що для A виконуються умови 2) та 3) леми 2.3.

Умова 2). A розбиває M' між B_i, $i = 0,1$. Нехай V - компонента M' і $\omega : [0,1] \to V$, такий шлях, що $\omega(i) \in B_i$, $i = 0,1$. Покажемо, що він обов'язково перетинає A.

Нехай t_0 - останнє з чисел $t \in [0,1]$, для яких $\omega(t) \in B_0 \cup \alpha_0$, і t_1 - перше з чисел $t \in [t_0,1]$ для яких $\omega(t) \in B_1 \cup \alpha_1$. Тоді шлях $r^{-1}(\omega[t_0,t_1])$ міститься в деякій компоненті $T \subset L'$ і перетинається як з T_0 так і з T_1.

За побудовою C_T розбиває T між T_0 та T_1, тому $r^{-1}(\omega[t_0,t_1])$ перетинається з $C_T \subset A'$, отже, $\omega[0,1]$ перетинається з A. ■

Умова 3). Нехай U_i об'єднання тих компонент $M' \setminus A$, які перетинаються з B_i, $i = 0,1$. Нехай σ компонента з A. Покажемо, що $\sigma \subset \overline{U}_i$.

Нехай $r^{-1}(\sigma) \subset C_T$, де T деяка компонента з L', тобто T перетинається з обома множинами $B'_i, i = 0,1$. Розглянемо множину $T \setminus C_T$. Існує єдина компонента цієї множини, яка перетинається з B'_1. Її замикання є доповненням до коміра T_0, і тому, воно містить C_T. Замикання всіх інших компонент являють собою коміри над компонентами T_0, і тому $r^{-1}(\sigma)$ належить замиканню однієї з таких компонент.

Таким чином, для кожного $i = 0,1$ коло σ належить замиканню деякої компоненти $M' \setminus A$, яка містить $r(T_i)$, а тому перетинається і з B_i. ■

2.6. Доведення теореми 2.5

Позначимо $X = f^{-1}(x)$, $Y = g^{-1}(y)$. За умовою $X \cap Y = \emptyset$.

Не втрачаючи загальності, ми можемо відразу припустити, що X та Y не містять зайвих компонент. Інакше, за лемою 2.2, таких компонент, за допомогою Σ-гомотопії, можна позбутись. При цьому перетин прообразів x та y у нових відображень залишиться порожнім.

Розріжемо M уздовж X, позначимо отриману поверхню через M' і збережемо всі інші позначення, що і в параграфі. Ми стверджуємо, що для сім'ї кіл

$$A = \psi^{-1}(Y) \subset \mathrm{Int}M'$$

виконуються умови 1)-3) леми 2.3.

Якщо це так, то ми можемо побудувати функцію $h : M' \to \mathbb{R}$, яка співпадає з f' в околі B, має критичний тип $\Sigma(f')$ і $h^{-1}(q^{-1}(y)) = A$.

Тоді за теоремою 2.2 $h \overset{\Sigma}{\sim} f'$ і функція h індукує таке відображення $f_1 : M \to S^1$, що

a) $f_1 \overset{\Sigma}{\sim} f$ відносно деякого околу X

b) $f_1^{-1}(x) = f^{-1}(x) = X$

c) точка $y \in S^1$ є регулярним значенням f_1 і $f_1^{-1}(y) = Y = g^{-1}(y)$.

Тепер за теоремою 2.6 $f_1 \overset{\Sigma}{\sim} g$ і теорему доведено.

Покажемо, що умови 1)-3) виконуються. Умова 1) виконана за припущенням.

2) Орієнтація M та диференціали відображень f і g індукують орієнтацію відповідних прообразів X та Y і їх можна розглядати як одно-

вимірні цикли $[X]$ та $[Y]$ групи гомологій H_1M. З $f \sim g \not\sim 0$, за наслідком 2.2, випливає, що ці цикли гомологічні: $[X] = [Y]$. Але тоді для $i = 0, 1$ цикли $[A]$ та $[B_i]$ з H_1M' також гомологічні. Вони не перетинаються, тому A розбиває M' між B_i, $i = 0, 1$.

3) З гомологічності A та B_i випливає їх кобордантність, тобто для $i = 0, 1$ знайдеться така сім'я U_i компонент множини $M' \setminus A$, що

$$\partial\overline{U}_i = A \cup B_i.$$

Зокрема, $A \subset \overline{U}_0 \cap \overline{U}_1$. Залишилось довести, що U_i є об'єднанням тих компонент з $M' \setminus A$, які перетинають B_i, але це випливає з умови 1). $\blacksquare$

2.7. Висновок

В цьому розділі була доведена основна теорема даної дисертаційної роботи (теорема 2.3): *два відображення Морса компактної орієнтовної поверхні M в коло S^1 належать одній компоненті простору відображень Морса $\mathcal{M}(M, S^1)$ тоді і тільки тоді, коли вони гомотопні і мають однаковий критичний тип.*

Аналіз доведення показує, що теореми 2.3 та 2.2 рівносильні: теорема 2.3 випливає з теореми 2.2, але з іншого боку містить її як частинний випадок.

Ідея доведення теореми 2.3 полягає в тому, що ми спочатку деформуємо обидва відображення у такі, що прообрази деяких їх регулярних значень не перетинаються. Далі, використовуючи вказану властивість, деформуємо нові відображення так, щоб прообрази деякого регулярного значення співпадали. Після цього ситуація фактично зводиться до функцій Морса і ми можемо застосувати теорему 2.2.

РОЗДІЛ III

Класифікація m-функцій на поверхнях

Одним з важливих питань теорії будь-яких відображень є питання їх класифікації. Задача повної класифікації в більшості випадків не має смислу, тому часто обмежуються лише деяким класом відображень, або розглядають ці відображення лише з точністю до певного відношення еквівалентності.

Важливою є задача класифікації відображень з точністю до заміни змінних в області визначення та області значень. Для функцій Морса загального положення на поверхнях така класифікація проведена в [33] (див. також [2], с.53.) Загальна класифікація функцій Морса на поверхнях отримана в роботах А. А. Ошемкова [13] та В. В. Шарко [38]. Еквівалентність функцій Морса на трьохвимірних многовидах вивчалась в [15].

Вказані праці базуються на ідеях, закладених А. Т. Фоменко при класифікації гамільтонових систем, які потім були розвинені ним разом із С. В. Матвєєвим, Х. Цишангом, А. В. Болсіновим, А. В. Браїловим, А. А. Ошемковим, В. В. Трофимовим, В. В. Шарко та іншими [3, 13, 14, 18, 19, 27]. Загальний огляд згаданих результатів можна знайти в книзі [2].

Підхід до розв'язання такого типу задач полягає в тому, що з функцією, векторним полем, гомеоморфізмом, динамічною системою та ін. канонічним чином зв'язується певний комбінаторний об'єкт – граф з додатковими позначеннями, який з точністю до еквівалентності визначає цю функцію, векторне поле і т.д.

В даному розділі проведено класифікацію m-функцій на поверхнях з кутами, яка узагальнює роботу [38].

Постановка задачі. Отже, нехай M – компактна поверхня і $f, g : M \to \mathbb{R}$ дві m-функції. Кожна з них індукує деяке представлення M у вигляді кобордизму з кутами.

Скажемо, що m-функції f та g *еквівалентні*, якщо існують такі гомеоморфізми $h : M \to M$ і $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, причому ϕ зберігає орієнтацію $\mathbb{R}$, що має місце комутативна діаграма:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ M & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R} \end{array}$$

3.1. Загальна ідея побудови

Нагадаємо, що у m-функцій, порівняно з функціями Морса, виникають додаткові типи особливих точок. Для їх опису потрібно розширити поняття індексу невиродженої критичної точки.

Якщо $x \in \mathrm{Int} M$ - невироджена критична точка обмеження функції f на $\mathrm{Int} M$, то означення її індексу звичайне.

Якщо ж $x \in \partial M$ - критична точка функції $f|_{\partial M}$, то її індекс – це пара (λ, ε), де λ - індекс точки x, як невиродженої критичної точки функції $f|_{\partial M}$, а $\varepsilon = +1$, якщо вектор $\mathrm{grad}_x f$ направлений зовні M, і $\varepsilon = -1$, якщо $\mathrm{grad}_x f$ направлений всередину M.

Очевидно, що m-функції на поверхнях можуть мати рівно 7 типів особливих точок: критичні точки у внутрішності M індексів $0, 1, 2$, та на краї ∂M – індексів $(0, \pm 1)$ та $(1, \pm 1)$.

Кожною такою критичною точкою ми співставляємо певний граф, так звану *елементарну частинку*, яка являє собою або дерево, або просто точку з додатковою інформацією (двома інволюціями, що діють на ребрах цього дерева). Нижче буде показано (теорема 3.1), що елементарна частинка, з точністю до еквівалентності, повністю описує поведінку m-функції в околі даної критичної точки.

Далі ми введемо об'єкт, який відповідає критичному рівню m-функції і дозволяє відновити її в околі цього критичного рівня (теорема 3.2.) Цей об'єкт називатимемо *атомом*. Він складається з елементарних частинок, які відповідають точкам, що лежать на даному критичному рівні, плюс додаткова інформація.

Нарешті, для того, щоб відновити функцію вже на всій поверхні, ми введемо ще одну конструкцію, яку назвемо *молекулою* - це набір атомів всіх критичних рівнів даної функції з додатковою інформацією про співвідношення між ними.

Основний результат даного розділу складає теорема 3.3 суть якої полягає в тому, що дві m-функції визначені на компактному двовимірному кобордизмі M з кутами еквівалентні тоді і тільки тоді, коли відповідні їм молекули ізоморфні.

Точні формулювання та означення буде дано нижче.

3.2. Допоміжні твердження

В цьому розділі ми доведемо кілька твердження, що будуть далі використовуватись.

Наступна лема дозволяє виділити підклас m-функцій, які достатньо розглядати. Ми будемо часто нею користуватись.

Лема 3.1 *Кожна m-функція f на кобордизмі з кутами, яка має рівно n критичних значень, еквівалентна такій m-функції g, у якої критичні значення це числа $1, \ldots, n$, і $M_-^h = g^{-1}(\frac{1}{2})$, $M_+^h = g^{-1}(n + \frac{1}{2})$.*

Доведення випливає з того, що для будь-якого скінченого набору точок на прямій існує строго монотонно зростаюча функція, яка в цих точках приймає послідовні цілі значення. ■

3.2.1. Векторне поле дотичне до краю

Нехай M – $n+1$-вимірний многовид і f - m-функція на M. Вона визначає деяке представлення M у вигляді многовиду з кутами

$$(M; M_0, M_+, M_-)$$

Нехай $K \subset M_0$ компактна підмножина, і $V \subset M$ – відкритий окіл множини K такі, що V (а тому й K) не містить критичних точок $f|_{\partial M}$.

Нехай далі, Ω – градієнтно подібне векторне поле функції f на M, тобто таке векторне поле, що $Df(\Omega) > 0$ на доповненні до множини критичних точок функції f.

Лема 3.2 *Існує таке градієнтно подібне векторне поле $\hat{\Omega}$ функції f, яке співпадає з Ω на $M \setminus V$, і є дотичним до $M_0 \subset \partial M$ в усіх точках множини K.*

Доведення. За умовою, множина K не містить критичних точок функції f, тому за теоремою про неявну функцію існує покриття множини K, такими локальними картами

$$(V_j, \phi_j),\ j = 1..m,$$

де ϕ_j дифеоморфізм V_j на деяку відкриту в $\mathbb{R}^n_- \times \mathbb{R}$ підмножину U_j, що $\overline{V}_j \ \subset \ V$ і

$$\phi_j(V_j \cap \partial M) \subset \{x_n = 0\},$$

а в локальних координатах $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ має місце рівність

$$f \circ \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1}.$$

Визначимо на множині $U_j = \phi_j(V_j)$ векторне поле

$$\hat{\Omega}_j : U_j \to TU_j \subset T\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$$

за формулою

$$\hat{\Omega}_j(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_{n+1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, 1) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$$

і перенесемо його на V_j до деякого векторного поля Ω_j поклавши

$$\Omega_j = (T\phi_j)^{-1} \circ \hat{\Omega}_j \circ \phi_j : V_j \xrightarrow{\phi_j} U_j \xrightarrow{\hat{\Omega}_j} TU_j \xrightarrow{(T\phi_j)^{-1}} TV_j \subset TM$$

Позначимо тепер $V_0 = M \setminus K$, і нехай ще $\Omega_0 = \Omega|_{V_0}$ – векторне поле на V_0. Очевидно, що тоді сім'я $\{V_j\,(j = 0..m)\}$ утворює відкрите покриття многовиду M.

Зафіксуємо довільне підпорядковане цьому покриттю розбиття одиниці, тобто таку сім'ю C^∞-функцій $\mu_j : M \to [0,1]$ $(j = 0..m)$, що $\operatorname{supp}\mu_j \subset V_j$, і $\sum\limits_{j=0}^{m} \mu_j \equiv 1$.

Побудуємо нарешті векторне поле на всьому многовиді M, поклавши

$$\hat{\Omega} = \sum_{j=0}^{m} \mu_j \cdot \Omega_j$$

Неважко пересвідчитись, що це векторне поле задовольняє твердженню леми.

Так як $\mu_j = 0$ для $j \neq 0$ на множині $M \setminus V$, то $\mu_0 = 1$ на цій множині, і отже $\hat{\Omega} = \Omega$ на $M \setminus V$.

Далі

$$Df(\hat{\Omega}) = \sum_{j=0}^{m} \mu_j \cdot Df(\Omega_j),$$

причому на множині V_j, $Df(\Omega_j) > 0$, тому на ній $Df(\Omega) > 0$.

Нарешті, в кожній точці $x \cup V_j$ кожне поле Ω_j дотичне до краю, тобто $\Omega_j(x) \in T_x M_0$. Тому довільна лінійна комбінація $\Omega_j(x)$ також належить $T_x M_0$. Зокрема, $\hat{\Omega}(x) \in T_x M_0$. Лему доведено. ■

3.2.2. Множина $W_{\lambda,\varepsilon}$

Нехай M - поверхня, і $p \in \partial M$ невироджена критична точка функції $f|_{\partial M}$ індексу (λ, ε).

За лемою 1.2 існує дифеоморфізм деякого околу точки p на множину $V_{\lambda,\varepsilon}$ (формула (1.1)), так що функція f в цих локальних координатах має вигляд $f(x, y) = y$. Позначимо $\Gamma = \partial V_{\lambda,\varepsilon}$. Очевидно, при $\lambda = 0$, Γ є графіком функції $y = x^2$, а при $\lambda = 1$ – графіком функції $y = -x^2$.

Для наших цілей зручно буде змінити систему координат, і замість $V_{\lambda,\varepsilon}$ розглядати іншу множину, позначимо її через $W_{\lambda,\varepsilon}$, яка володіє “кращими” властивостями ніж $V_{\lambda,\varepsilon}$. Ми визначимо деякий дифеоморфізм $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ і покладемо $W_{\lambda,\varepsilon} = \phi(V_{\lambda,\varepsilon})$.

Неважко перевірити, що має місце наступна:

Лема 3.3 *Для довільних трьох чисел a, b, c таких, що $0 < a < c < b$, існує така C^∞- функція $\phi : \mathbb{R} \to [0, 1]$, що:*

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & t \leq a \\ \frac{c}{\sqrt{t}} & t \geq b \end{cases}$$

Зафіксуємо такі числа a, b, c, щоб $0 < a < c < b$ і побудуємо за ними функцію $\phi(t)$, яка задовольняє твердженню попередньої леми 3.3.

Розглянемо відображення $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задане формулою:

$$\gamma(x, y) = (x \cdot \phi(y), y)$$

Лема 3.4 *Відображення γ є дифеоморфізмом $\mathbb{R}^2$ на себе, який зберігає орієнтацію $\mathbb{R}^2$ і до того ж $f \circ \gamma = f$.*

Доведення. 1. Бієктивність. Якщо $\gamma(x, y) = \gamma(x_1, y_1)$, то $y = y_1$ і $x \cdot \phi(y) = x_1 \cdot \phi(y_1)$, а так як $\phi(y) = \phi(y_1) \neq 0$, то $x = x_1$.
2. Невиродженість та збереження орієнтації. Очевидно, що матриця $D\gamma$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} \phi(y) & x\phi'(y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Її визначник $|D\gamma| = \phi(y) > 0$. Це показує, що γ невироджене в кожній точці і зберігає орієнтацію. ∎

Отже, нехай $W_{\lambda,\varepsilon} = \gamma(V_{\lambda,\varepsilon})$ і $P = \partial W_{\lambda,\varepsilon}$. Якщо $(x, y) \in \Gamma$, тобто $y = \varepsilon x^2$, то при $y \leq a$ маємо $\gamma(x, y) = (x, y)$, тобто $(x, y) \in \gamma(\Gamma) = P$. Далі, при $y \geq b$

$$\gamma(x, y) = \left(x \cdot \frac{c}{\sqrt{x^2}}, y\right) = (c, y),$$

тобто при таких значеннях y множина P співпадає з частинами прямих паралельних осі Oy.

Відмітимо ще деякі прості властивості поля градієнта $\operatorname{grad} g$ функції g на W, які ми будемо використовувати:

1) Інтегральні траєкторії поля – це прямі паралельні осі Oy.

2) При $y \geq b$ інтегральні траєкторії дотикаються до краю ∂W

3) Кожна траєкторія, яка проходить через точку $(x, 0)$ де $x > c$ перетинає $f^{-1}(t)$, тобто пряму $y = t$, рівно в одній точці і не перетинається з ∂W.

3.3. m-функції без особливих точок

В цьому розділі ми розглядаємо m-функції без критичних точок на многовидах довільних розмірностей.

Твердження про дифеоморфність многовиду, на якому визначена гладка функція без критичних точок, прямому добутку мають місце як для функцій Морса ([10], теорема 3.4.), так і для m-функцій ([39], лема 3.1.) Означення m-функції, яким ми користуємось, більш загальне ніж в [39], тому нам потрібні деякі уточнення згаданих результатів. Основним інструментом служитиме лема 3.2, про існування векторного поля дотичного до краю.

Отже, нехай $f : \xi \to [0, 1]$ – m-функція на кобордизмі з кутами $\xi =$

$(M; M_0, M_-, M_+)$, і Ω – векторне поле на M. Припустимо, що

1) f взагалі не має особливих точок

2) Ω є градієнтно подібним векторним полем функції f

3) це поле є дотичним до краю ∂M у всіх точках $x \in M_0$.

Тоді має місце така

Лема 3.5 a) *Через кожну точку $x \in M$ проходить єдина траєкторія поля Ω, яка гладко залежить від x.*

b) *Всі траєкторії поля Ω починаються на M_- і закінчуються на M_+.*

c) *Для кожної траєкторії ω поля Ω і для кожного значення $y \in [0,1]$ перетин $\omega \cap f^{-1}(y)$ непорожній, трансверсальний і складається з єдиної точки.*

d) *Відображення $h : M \to M_- \times [0,1]$, яке співставляє точці $x \in M$ точку $(p(x), f(x))$, де $p(x) \in M_-$ – початок траєкторії, що проходить через точку x, є дифеоморфізмом.*

Доведення. Твердження a) випливає з умови 1) за теоремами про існування і єдиність розв'язку диференціальних рівнянь та гладку залежність цих розв'язків від початкових даних (напр. [1]).

b) В загальному випадку траєкторії градієнтноподібного векторного поля функції можуть починатись (чи закінчуватись), або в її критичних точках, або в некритичних точках краю многовиду ∂M. Але в нашій ситуації, завдяки умовам 1) та 3), жодна з вказаних можливостей не реалізується.

З b) також слідує, що коли траєкторія проходить через деяку точку з M_0, то вона повністю міститься в M_0.

Твердження c) випливає з b) та теореми про проміжне значення функції на відрізку.

Доведемо нарешті d). З c) слідує, що h визначено коректно і є відображенням “на” . З a) випливає гладкість h, а з умови 2) та теореми про неявну функцію випливає гладкість h^{-1}. ■

3.3.1. Еквівалентність m-функцій без особливих точок

Нехай M - компактний многовид з краєм і $f, g : M \to [0, 1]$ дві m-функції без критичних точок.

Твердження 3.1 *Припустимо, що існує дифеоморфізм $\phi : M^f_- \to M^g_-$. Тоді він продовжується до такого дифеоморфізму многовидів з кутами $h : M \to M$, що $f = g \circ h$.*

Доведення. Так як M^f_0 та M^g_0 не містять особливих точок функцій f та g відповідно, то за лемою 3.2, на M існують градієнтноподібні векторні поля цих функцій Ω_f та Ω_g які дотикаються до ∂M в точках множин M^f_0 та M^g_0 відповідно.

Нехай $p : M \to M^f_-$ та $q : M \to M^g_-$ відображення, які співставляють точці $x \in M$ початок траєкторії векторних полів Ω_f та Ω_g відповідно.

За попередньою лемою 3.5 ці відображення визначені коректно і наступні відображення $\alpha = p \times f : M \to M^f_- \times [0, 1]$ та $\beta = q \times g : M \to M^g_- \times [0, 1]$ являють собою дифеоморфізми між многовидами з кутами.

Покладемо

$$\psi = \phi \times \text{ id } : M^f_- \times [0, 1] \to M^g_- \times [0, 1].$$

Тоді очевидно, що дифеоморфізм $h = \beta^{-1} \circ \psi \circ \alpha$ задовольняє твердженню леми. ■

3.3.2. Продовження дифеоморфізмів

Нехай f та g, як і вище, дві m-функції на поверхні M, які не мають особливих точок. Зафіксуємо два довільних градієнтноподібних векторних поля Ω^f і Ω^g функцій f та g, так щоб ці поля були дотичними до краю ∂M в точках множин M_0^f та M_0^g відповідно. За лемою 3.5, для кожного $t \in [0,1]$ векторні поля Ω^f та Ω^g визначають відображення

$$p_t : C_0 \to C_t\,, \qquad\qquad q_t : D_0 \to D_t$$

та дифеоморфізми

$$\alpha : M \to C_0 \times [0,1]\,, \qquad\qquad \beta : M \to D_0 \times [0,1]]$$

за формулами

$$\alpha\,(x) = \bigl(p_{f(x)}\,(x)\,, f\,(x)\bigr)$$

$$\beta\,(x) = \bigl(q_{g(x)}\,(x)\,, g\,(x)\bigr)$$

Візьмемо довільне $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ і покладемо $K_0 = [0,\delta]$, $K_1 = [1-\delta, 1]$, $K = K_0 \cup K_1$.

Лема 3.6 *Припустимо, що* $h : C_K \to D_K$ *такий дифеоморфізм, що* $f = g \circ h$, *і поле* Ω^g *індукується полем* Ω^f *за допомогою* h. *Якщо дифеоморфізми*

$$h_1 \circ p_1, \;\; q_1 \circ h_0 : C_0 \to D_0$$

ізотопні, тобто наступна діаграма ізотопічно *комутативна*

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{h_1} & D_1 \\ {\scriptstyle p_1}\Big\uparrow & & {\scriptstyle q_1}\Big\uparrow \\ C_0 & \xrightarrow{h_0} & D_0, \end{array}$$

то існує такий дифеоморфізм $\hat{h} : M \to M$*, що* $\hat{h}|_{C_K} = h$*, і* $f = g \circ \hat{h}$*.*

Доведення. Розглянемо відображення

$$\theta = \beta \circ h \circ \alpha^{-1} \, : C \times K \xrightarrow{\alpha^{-1}} C_K \xrightarrow{h} D_K \xrightarrow{\beta} D \times K. \qquad (3.1)$$

З того, що поле Ω^g є образом поля Ω^f за допомогою h випливає, що

$$\theta_{K_i} = h_i \times \operatorname{id} K_i \qquad i = 0, 1$$

тобто $\theta\,(x, t) = (h_i\,(x)\,, t)$ при $x \in K_i, i = 0, 1$.

Нехай $H : C_0 \times [0, 1] \to D_1$ довільна гладка ізотопія між відображеннями $h_1 \circ p_1 = H_0$ та $q_1 \circ h_0 = H_1$. Тоді

$$q_1^{-1} \circ H : C_0 \times [0, 1] \to D_0$$

є ізотопією між дифеоморфізмами $q_1^{-1} \circ h_1 \circ p_1$ та h_0.

Зафіксуємо ще таку C^∞-функцію $\phi : [0, 1] \to [0, 1]$, щоб $\phi[0, \delta] = 0$ і $\phi[1 - \delta, 1] = 1$.

Покладемо $\theta' : C \times K \to D \times K$

$$\theta'\,(x, t) = \left(q_1^{-1} \circ H_{\phi(t)}\,(x)\,, t\right).$$

Тоді

$$\theta'\,|_{C_K} = \theta\,|_{C_K}. \qquad (3.2)$$

Задамо тепер відображення $\hat{h} : M \to M$ формулою

$$\hat{h}(x) = \beta^{-1} \circ \theta' \circ \alpha(x)$$

Неважко перевірити, що $\hat{h}$ задовольняє твердженню даної леми. Дійсно, на множині K маємо

$$\hat{h} = \beta^{-1} \circ \theta' \circ \alpha = \beta^{-1} \circ \theta \circ \alpha = \beta^{-1} \circ \left(\beta \circ h \circ \alpha^{-1}\right) \circ \alpha = h$$

Крім того,

$$g \circ \hat{h}(x) = g \circ \beta^{-1} \circ \theta' \circ \alpha(x) = \left(g \circ \beta^{-1}\right)\left[q_1^{-1} \circ H_{\phi \circ f(x)} \circ p_0(x), f(x)\right] = f(x)$$

що і потрібно було довести. Лему доведено. ■

3.4. Критичні точки m-функцій на поверхнях та їх елементарні частинки

Твердження 3.1 показує, що m-функції без критичних точок мають досить просту струкутру. Тому нижче ми розглядатимемо лише такі m-функції, які мають критичні точки. Крім того, якщо явно не сказано, вважатимемо поверхню M зв'язною.

3.4.1. Означення елементарних частинок

Для кожної особливої точки m-функції на поверхні опишемо відповідну їй елементарну частинку.

Нехай f – m-функція, визначена на відкритій підмножині U півпростору $\mathbb{R}^{n+1}_{-}$, що має в U єдину особливу точку p і $f(p) = 0$.

Зафіксуємо настільки мале $\delta > 0$, щоб множина $[-\delta, \delta]$ містила єдине критичне значення $f(p) = 0$. Позначимо

$$U_{-} = U \cap f^{-1}(-\delta, 0), \qquad U_{+} = U \cap f^{-1}(0, +\delta).$$

і назвемо ці множини відповідно *докритичною* та *післякритичною* множинами критичного рівня $f^{-1}(0)$.

Загальний підхід до означення елементарної частинки полягає в наступному. Елементарна частинка – це граф ізоморфний околу особливої точки на критичному рівні m-функції, причому на ребрах цього графа визначено такі дві інволюції τ та ν (що можуть бути і постійними відображеннями), що два ребра належать одній орбіті інволюції τ (ν) тоді і тільки тоді, коли вони належать замиканню докритичної (відповідно післякритичної) множини.

Властивості, докритичної та післякритичної множин, які тут нас цікавлять, очевидно не залежать від δ.

Елементарна частинка критичної точки індексу 1**.** Нехай U це 2-диск на площині $\mathbb{R}^2$ з центром в точці $p = (0,0)$, причому p - невироджена критична точка індексу 1. Тоді за лемою Морса, в деякій локальній системі координат (x, y) в околі точки p, ця функція записується у вигляді $f = x^2 - y^2$.

Окіл критичної точки p на критичному рівні, очевидно, є деревом з чотирма ребрами, що мають спільну вершину. Позначимо цей граф через T_1, множину його вершин - через $V(T_1)$, а множину ребер - через $E(T_1)$.

Розглянемо докритичну множину U_-. Очевидно, що вона складається з двох компонент, позначимо їх U_-^1 та U_-^2. При цьому замикання U_-^1 перетинається рівно з двома ребрами, а замикання U_-^2 - з двома іншими. Таким чином, докритична множина U_- визначає розбиття множини ребер $E(T_1)$ на пари. Відмітимо, що будь-яке розбиття на пари рівносильне визначенню на $E(T_1)$ деякої інволюції, позначимо її через τ.

Аналогічно, післякритична множина породжує іншу інволюцію ν. Очевидно, що ці інволюції не мають нерухомих ребер, і не мають співпадань, тобто, для кожного ребра $a \in E(T_1)$ виконується умова: всі три ребра a, $\tau(a)$ та $\nu(a)$ різні.

Означення 3.1 *Елементарною частинкою критичної точки індексу* 1 *називається граф наступної структури:*

1) це дерево, яке складається з чотирьох ребер зі спільною вершиною;

2) на множині ребер визначено дві нетривіальні інволюції τ *та* ν*, які не мають нерухомих ребер та не мають співпадань.*

Спільну вершину називатимемо *центральною*, а всі інші *висячими* вершинами.

Елементарна частинка індексу $(0,1)$**.** Розглянемо особливу точку $p \in \partial M$ індексу $(0,1)$. За лемою 1.2 існує такий дифеоморфізм деякого околу цієї точки на множину

$$V_{0,1} = \big\{(x,y) \mid x^2 \geq y\big\} \subset \mathbb{R}^2\,,$$

що f співпадає з функцією $(x,y) \mapsto y$.

Очевидно, що критичний рівень цієї функції є деревом, яке утворене з двох ребер з однією спільною точкою p. Докритична множина зв'язна, а її замикання перетинається з обома ребрами критичного рівня. Таким чином, вважатимемо, що докритична множина визначає (єдину нетривіальну) інволюцію τ на двох ребрах.

З іншого боку післякритична множина незв'язна. Вона складається рівно з двох компонент, і замикання кожної з яких містить рівно одне ребро. Отже, вважатимемо, що післякритична множина визначає на ребрах тотожну інволюцію ν.

Якщо тепер розглянути функцію $-f$, то точка p для цієї функції матиме індекс $(1,-1)$. Докритична та післякритична множини поміняються місцями, і відповідно до цього післякритична множина індукуватиме на ребрах (єдину можливу) нетривіальну інволюцію ν, а інволюція τ, індукована докритичною множиною - тотожна.

Означення 3.2 *Нехай p - особлива точка індексу $(0,1)$ чи $(1,-1)$. Елементарна частинка такої точки це дерево, що складається з двох ребер зі спільною вершиною, на яких визначено дві інволюції τ та ν, одна з* *яких тотожна, а інша ні. Для точки індексу (0,1) нетривіальною є τ, а для точки індексу $(1,-1)$ – ν.*

Елементарні частинки особливих точок індексів $0, 2$, $(0,-1)$ та $(1,1)$. Критичний рівень у кожної з цих критичних точок є точкою, а одна з множин – докритична, чи післякритична – порожня.

Елементарна частинка кожної з таких особливих точок це точка, якій приписано відповідний індекс, а обидві інволюції τ та ν тривіальні.

3.4.2. Еквівалентність m-функцій в околі особливої точки

Для кожного $i = 0, 1$, нехай f_i - елементарна частинка, τ_i та ν_i її інволюції. Відображення між множинами вершин графів цих частинок $\phi : V(f_1) \to V(f_2)$ називається *ізоморфізмом* елементарних частинок, якщо

1) f_0 та f_1 мають однаковий тип
2) ϕ індукує ізоморфізм графів цих частинок
3) виконуються співвідношення $\phi \circ \tau_0 = \tau_1 \circ \phi$ та $\phi \circ \nu_0 = \nu_1 \circ \phi$.

Наступна теорема показує, що елементарні частинки з точністю до еквівалентості визначають m-функцію в околі відповідної критичної точки.

Теорема 3.1 *Нехай $p \in U$ та $q \in V$ - точки відкритих підмножин півплощини $\mathbb{R}^2_-$, $f : U \to \mathbb{R}$ та $g : V \to \mathbb{R}$ такі m-функції з критичними точками p та q, що $f(p) = g(q)$. Через $\mathcal{F}_p$ та $\mathcal{F}_q$ позначимо елементарні частинки точок p та q відповідно.*

1. *Якщо $h : U \to V$ - дифеоморфізм, причому $h(p) = q$, то h індукує ізоморфізм елементарних частинок $\mathcal{F}_p \sim \mathcal{F}_q$.*

2. *Навпаки, кожен ізоморфізм $\mathcal{F}_p \sim \mathcal{F}_q$ індукується деяким дифеоморфізмом $h : U' \to V'$ між деякими околами $U' \subset U$ та $V' \subset V$ точок p та q відповідно, так що $f = g \circ h$.*

Доведення. 1. За лемою Морса 1.1 та лемою 1.2, частинки $\mathcal{F}_p$ та $\mathcal{F}_q$ мають однакові індекси.

З умови $f = g \circ h$ випливає, що h гомеоморфно відображає докритичну, післякритичну множини та критичний рівень функції f на відповідні множини функції g. Тому h індукує ізоморфізм $\phi : \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_q$ графів елементарних частинок.

Залишилось показати, що ϕ комутує з інволюціями. Для частинок індексів $0, 2$, $(0, -1)$ та $(1, 1)$ це очевидно, бо у них обидві інволюції тривіальні.

Графи всіх інших частинок мають щонайменше 2 ребра. Нехай a – ребро графа частинки $\mathcal{F}_p$. Тоді ребра a і $\tau(a)$ належать замиканню однієї компоненти U_- докритичної множини функції f. Множина $h(U_-)$ є компонентою докритичної множини функції g, а ребра $\phi(a)$ та $\phi(\tau(a))$ належать її замиканню. Це означає, що вони зв'язані співвідношенням $\tau(\phi(a)) = \phi(\tau(a))$, тобто, ϕ комутує з інволюцією τ. Аналогічно доводиться, що ϕ комутує і з ν. Твердження 1 доведено.

2. За лемою Морса 1.1 та лемою 1.2, в околі критичної точки m-функція може бути приведена до певного стандартного виду. Отже, достатньо довести, що кожен автоморфізм елементарної частинки критичної точки відповідного стандартного виду породжується дифеоморфізмом. Розглянемо по порядку всі елементарні частинки.

Нехай $p = (0,0)$ критична точка m-функції, $f(p) = 0$, і $V \subset \mathbb{R}^2$ окіл точки p, який гарантується лемою Морса, чи лемою 1.2 і в якому f має відповідний запис.

Елементарні частики індексів $0, 2$, $(0,-1)$ та $(1,1)$. Графи кожної такої частинки є точкою, тому, очевидно, існує єдиний (тотожний) автоморфізм кожної з таких частинок, який індукується тотожним відображенням деякого околу відповідної критичної точки.

Елементарні частики типів $(0,1)$ та $(1,-1)$. Граф такої частинки складається з двох ребер, що мають одну спільну вершину. Існує всього 2 автоморфізми: тотожний і автоморфізм, що переставляє ребра місцями. Неважко бачити, що останній автоморфізм індукується дифеоморфізмом $(x,y) \mapsto (-x,y)$.

Елементарна частика індексу 1. Існує рівно 4 автоморфізми цієї частинки: $\mathrm{id}, \tau, \nu, \nu\tau$. Група автоморфізмів діє точно і транзитивно, тобто, для кожної пари ребер a, b цієї частинки існує єдиний автоморфізм ϕ, такий, що $\phi(a) = b$. Тобто кожен автоморфізм однозначно визначається образом деякого фіксованого ребра a. Це випливає з умови комутування ізоморфізму (а отже і автоморфізму) частинки з інволюціями та з того, що для кожного ребра a, всі три ребра $a, \tau(a), \nu(a)$ різні.

В околі точки p функція f має вигляд $f(x,y) = -x^2 + y^2$, тому очевидно, що τ індукується дифеоморфізмом $(x,y) \mapsto (-x,y)$, ν – дифеоморфізмом $(x,y) \mapsto (x,-y)$, а $\nu\tau$ – $(x,y) \mapsto (-x,-y)$. Твердження 2 доведено. $\blacksquare$

3.5. Атоми критичних рівнів

Нехай f – m-функція на кобордизмі з кутами, і C – деякий її критичний рівень. Кожній особливій точці, яка лежить на C, а також кожній регулярній компоненті цього рівня ми співставили її елементарну частинку, Доповнення на C до деяких, достатньо малих околів критичних точок функції f являє собою незв'язне об'єднання відрізків та кіл. Фактично, можна вважати, що C утворений ототожненням деяких пар висячих вершин відповідних елементарних частинок. Цю процедуру формалізує поняття атому.

Нехай $\mathcal{F}$ довільна сім'я елементарних частинок. Незв'язне об'єднання їх графів можна розглядати як граф. Нехай $V(\mathcal{F})$ множина його вершин, а $E(\mathcal{F})$ - об'єднання ребер графів елементарних частинок з $\mathcal{F}$ всіх індексів.

Означення 3.3 Атомом *називається пара* $A = (\mathcal{F}, \sigma)$, *де* $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in I}$ – *довільна сім'я елементарних частинок довільних індексів, а*

$$\sigma : E(\mathcal{F}) \to E(\mathcal{F})$$

відображення, яке є інволюцією, тобто, $\sigma^2 = \operatorname{id} E(\mathcal{F})$.

Побудова критичного рівня m-функції. Нехай $A = (\mathcal{F}, \sigma)$ - атом. Ми хочемо ототожнити вершини та ребра графа A за допомогою відображення σ.

На множині вершин і орієнтованих ребер графа A вводимо наступне відношення еквівалентності $\sim$.

Для $i = 0, 1$, нехай f_i - елементарна частинка атому A, C_i - центральна, а H_i - деяка висяча вершина f_i, причому $\sigma(C_0 H_0) = (C_1 H_1)$.

Розглянемо 3 випадки.

1) Частинки f_i різні, тобто, $f_0 \neq f_1$, тоді покладемо $H_i \sim C_{1-i}$ для $i = 0, 1$, і $(C_0H_0) \sim (H_1C_0)$.

2) Частинки f_i співпадають, тобто, $C_0 = C_1 = C$, але ребра різні, тобто, $H_0 \neq H_1$. Покладемо $H_0 \sim H_1 \sim C$, і $(CH_0) \sim (H_1C)$. Зрозуміло, що ми отримали петлю в точці C.

3) Частинки f_i співпадають, і $(C_0H_0) = (C_1H_1)$. В цьому випадку ніяких ототожнень не проводимо.

Отриманий граф $K(A)$ і буде критичним рівнем функції.

3.5.1. τ- та ν-маршрути

Інволюції, визначені в околі кожної критичної точки дозволяють визначити на отриманому графі $K(A)$ дві системи маршрутів - τ та ν-маршрути. τ-маршрути описують докритичні рівні, ν-маршрути - післякритичні рівні функції.

Визначимо поняття τ-образу орієнтованого ребра. Нехай $(Z'Z)$ орієнтоване ребро (зокрема орієнтована петля) графа $K(A)$. Розрізнятимемо два випадки, в залежності від вершини Z. Нагадаємо, що за побудовою, кожна вершина графа $K(A)$ є класом еквівалентності деяких вершин графа атома A.

Клас Z містить центральну вершину C деякої елементарної частинки f. Тоді точці Z' відповідає деяка висяча вершина H' частинки f, а ребру (ZZ') ребро $(H'C)$. На f визначена інволюція τ, яка співставляє ребру (CH') деяке ребро (H''). Нехай Z'' вершина графа $K(A)$, яка представляє клас еквівалентності вершини H''. τ-образом ребра (Z, Z') назвемо ребро

(Z', Z'').

Клас Z не містить центральної вершини, тоді він складається лише з однієї висячої вершини H деякої елементарної частинки f. τ-образом ребра $(Z'Z)$ будемо вважати саме ребро $(Z'Z)$.

Аналогічно означаються ν-образи ребер.

Нехай тепер $\xi = \{a_1, ..., a_n\}$ - послідовність орієнтованих ребер графа.

Послідовність ξ називається *простою*, якщо всі її ребра різні, і початок a_{i+1} співпадає з кінцем a_i, для $i = 1, n-1$. Проста послідовність називається *замкнутою*, якщо її кінець (кінець a_n) співпадає з її початком (початком a_1).

Означення 3.4 *Проста послідовність ребер $a_1, ..., a_n$ графа $K(A)$ називається* τ-послідовністю*, якщо ребро a_{i+1} є τ-образом ребра a_i для всіх $i = 2..n$. Якщо, додатково, a_1 (відповідно a_n) співпадають із своїми τ-образами, то послідовність називається* максимальною *в напрямку a_1 (відповідно a_n).*

Проста τ-послідовність, яка є максимальною в обох напрямках, називатиметься τ-маршрутом*. Простий замкнутий τ-маршрут називатимемо* τ-циклом.

Аналогічно формулюються означення ν-послідовностей, ν-маршрутів, та ν-циклів.

Зауваження. Означені τ- та ν-маршрути не повністю вичерпують можливі компоненти близьких до критичного некритичних рівнів функції. Тому потрібно додатково ввести ще деякі інші маршрути

Розглянемо довільний досить близький докритичний рівень критичної точки індексу $(1, 1)$. Очевидно, що він являє собою просту дугу, яка не містить критичних точок функції, і кінці якої належать краю ∂M.

Аналогічно, для елементарної частинки, наприклад, індексу 0, її післякритичний рівень є колом, яке не містить критичних точок.

Таким чином, ми вважатимемо, що *кожна* елементарна частинка індексу $(1,1)$ (індексу $(0,-1)$) породжує τ-маршрут (ν-маршрут). *Аналогічно, кожна* елементарна частинка індексу 0 (індексу 2) породжує ν-цикл (τ-цикл). *Ці маршрути ми називатимемо* **віртуальними**, *всі інші* – **справжніми**.

Для атома A - атом, через A_τ позначатимемо множину τ- маршрутів, через $Z_\tau \subset A_\tau$ підмножину замкнутих τ- маршрутів (тобто, τ-циклів). Аналогічно означаються множини A_ν та Z_ν.

Орієнтація атомів Кожен з маршрутів та циклів допускає орієнтацію. Для справжніх маршрутів, орієнтація означає вибір напрямку на відрізку чи на колі. Для віртуальних маршрутів, під орієнтацією розумітимемо орієнтацію відповідного до- чи післякритичного рівня. Вибраний напрямок позначається числом $+1$, протилежний – числом -1.

Атом називається орієнтованим, якщо для кожного маршруту з A_τ та A_ν зафіксована деяка орієнтація.

Означення 3.5 *Нехай $A = (\mathcal{F}, \sigma)$ та $\bar{A} = (\bar{\mathcal{F}}, \bar{\sigma})$ атоми. Ізоморфізм їх графів $\alpha : A \to \bar{A}$ називається* ізоморфізмом *атомів, якщо α зберігає індекс кожної елементарної частинки і комутує з інволюціями, заданими на ребрах цих частинок та розбиттям на пари. Тобто*

1) *для кожної елементарної частинки $f_i \in \mathcal{F}$ її образ $\alpha(f_i)$ є елементарною частинкою атому $\bar{A}$, і обмеження α на f_i є ізоморфізмом цих частинок;*

2) *має місце співвідношення:* $\sigma \circ \alpha = \alpha \circ \bar{\sigma}$.

З означення випливає, що ізоморфізм атомів переводить τ- та ν-цикли в τ- та ν-цикли, а маршрути в маршрути.

Ізоморфізм орієнтованих атомів, це ізоморфізм атомів, що зберігає орієнтацію маршрутів.

3.5.2. Еквівалентність m-функцій з лише одним критичним рівнем

Теорема 3.2 *Нехай* $f, g : M \to [-1, 1]$ *дві* m*-функції на поверхні* M*, кожна з яких має лише одне критичне значення* 0*. Позначимо через* A *та* B *атоми їх критичних рівнів.*

1. *Кожен дифеоморфізм* $h : M \to M$ *такий, що* $f = g \circ h$*, індукує ізоморфізм атомів* A *та* B*.*

2. *Навпаки, кожен ізоморфізм* α *між атомами критичних рівнів* A *та* B *індукований таким дифеоморфізмом* $h : M \to M$*, що* $f = g \circ h$*.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай дифеоморфізм $h : M \to M$, такий, що $f = g \circ h$. Покажемо, що тоді h індукує ізоморфізм атомів цих функцій.

Очевидно, що h переводить критичні точки f у критичні точки g, а отже індукує відображення між вершинами графів атомів цих функцій. Неважко перевірити, що це відображення є ізоморфізмом атомів. Дійсно, так як h дифеоморфно відображає околи критичних точок на околи критичних точок, то за теоремою 3.1, він індукує ізоморфізм α між відповідними елементарними частинками.

Потрібно довести, що α комутує з σ. Нехай a – ребро деякої елементарної частинки атому $\mathcal{A}^f$. Припустимо спочатку, що ребра a та $\sigma(a)$ різні. Тоді вони з'єднуються між собою одним ребром графа C. Але тоді ребра $\alpha(a)$ і $\alpha(\sigma(a))$ різні і також з'єднуються ребром. Це якраз і означає, що $\bar{\sigma}(\alpha(a)) = \alpha(\sigma(a))$.

Якщо $\sigma(a) = a$, то ребро a закінчується на краї M в регулярній точці функції f. Тоді із співвідношення $f = g \circ h$ випливає, що ребро $\alpha(a)$ також закінчується на краї M, тобто,

$$\bar{\sigma}(\alpha(a)) = \alpha(a) = \alpha(\sigma(a)).$$

Необхідність доведено.

3.5.3. Доведення достатності теореми 3.2

Введення позначень. Нехай M - поверхня з краєм, $f, g : M \to \mathbb{R}$ дві m-функції, кожна з яких має лише один критичний рівень, $x_i, i = 1..k$ критичні точки f, а y_i, $i = 1..k$ критичні точки g. Не порушуючи загальності, можемо вважати, що $y_1, \ldots, y_k \in \mathrm{Int}M$, а $y_{k+1}, \ldots, y_n \in \partial M$.

m-функції f та g індукують представлення M у вигляді кобордизму з кутами. Позначимо ці представлення через ξ_f та ξ_g відповідно.

Нехай $\mathcal{A}^f, \mathcal{A}^g$ атоми критичних рівнів функцій f і g відповідно. Через f_i позначимо елементарну частинку точки x_i, а через g_i – елементарну частинку точки y_i, для всіх $i = 1..k$.

Припустимо, що атоми $\mathcal{A}^f$ і $\mathcal{A}^g$ ізоморфні, і нехай $\alpha : \mathcal{A}^f \to \mathcal{A}^g$ деякий ізоморфізм. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $\alpha(f_i) = g_i$. Нам потрібно побудувати такий дифеоморфізм $h : M \to M$, що $f = g \circ h$.

Для довільної підмножини $K \subset \mathbb{R}$ позначатимемо

$$C_K = f^{-1}(K), \qquad D_K = g^{-1}(K)$$

Тоді множини C_0 та D_0 являють собою критичні рівні відповідно функцій f та g. Нехай ще $p : M \to C_0$ та $q : M \to D_0$ – проекції M на критичні рівні.

Якщо Ω деяке векторне поле на M, ω його інтегральна траєкторія, і $K \subset \mathbb{R}^1$ - довільна множина, то множину $\omega \cap g^{-1}(K)$ називатимемо K-*частиною* траєкторії ω і позначатимемо ω_K.

За теоремою 3.1 ізоморфізми α елементарних частинок f_i та g_i індукуються деякими дифеоморфізмами $h_i : U_i \to V_i$, між околами відповідних критичних точок, причому для кожної точки $x \in U_i$ виконується співвідношення

$$f(x) = g \circ h_i \tag{3.3}$$

Додатково можна вважати, що

$$U_i \cap U_j \ = \ V_i \cap V_j \ = \ \emptyset, \quad \forall i = 1..k$$

Ідея доведення полягає в наступному. Ми побудуємо на M два таких градієнтноподібних векторних поля Ω^f та Ω^g функцій f та g відповідно, що дифеоморфізм h можна буде задати, відображаючи траєкторії поля Ω^f в траєкторії поля Ω^g.

Побудова поля Ω^g. Це поле ми отримаємо як результат "склеювання" кількох градієнтно подібних векторних полів Σ_i^g функції g визначених на відкритих множинах з M.

Нехай Σ_0^f та Σ_0^g - поля градієнтів функцій f та g відповідно.

Поле Σ_1^g ми визначимо в околах V_i особливих точок функції g наступним чином.

Для $i = 1..k$, через Ω_i^g позначимо обмеження поля градієнта Σ_0^g на V_i.

Знайдеться таке $\delta' > 0$, і для кожної точки y_i , $i = 1..k$ на критичному рівні D_0 такий її окіл N_i, що $\overline{N_i} \subset V$, а для кожної траєкторії ω поля Ω_i^g, яка проходить через $\overline{N}$, виконується умова: $\omega_{[-3\delta',3\delta']} \subset V_i$.

Тепер для $i = k + 1..m$, за допомогою наступного твердження 3.2, визначимо поля Ω_i^g.

Твердження 3.2 *Якщо $\delta > 0$ достатньо мале число, то для всіх $i = k+1, \dots, m$ на V_i існує векторне поле Ω_i^g, яке задовольняє наступним умовам:*

1) *це поле градієнтно подібне для функції g*

2) *поле Ω_i^g дотичне до краю ∂M в усіх точках множини $V_i \cap (M_0^g \setminus D_{[-\delta,\delta]})$*

3) *знайдуться такі околи N_i', $N_i \subset D_0$ точки y_i на D_0, причому*

$$\overline{N_i'} \subset N_i \quad , \quad \overline{N_i} \subset V_i,$$

що для кожної траєкторії ω поля Ω_i^g виконуються умови

a) *якщо $\omega_0 \in D_0 \setminus N_i$, то $\omega_{[-3\delta,3\delta]} \subset V_i \setminus \partial M$*

b) *якщо ж $\omega_{[-3\delta,3\delta]} \cap \partial M \neq \emptyset$, то $\omega_0 \in N_i'$.*

Доведення. Зменшивши, якщо потрібно окіл V_i, можемо вважати, що існує дифеоморфізм ϕ_i околу V_i на деякий окіл початку координат в множині $W_{\lambda_i,\varepsilon_i}$ побудованої для чисел $0 < a, b, c < \delta$ з леми 3.3, так що $g \circ \phi_i^{-1}(x, y) = y$.

Тоді очевидно, що поле градієнта функції $g\circ\phi_i^{-1}$ задовольняє подібним умовам. Переносячи це поле на V_i за допомогою ϕ_i ми отримаємо поле Ω_i^g, яке задовольняє умовам 1)-3). ■

Візьмемо достатньо мале $\delta > 0$, щоб $\delta < \delta'$ і побудуємо на V_i градієнтноподібні поля Ω_i^g для $i = k+1..m$ які задовольняють умовам 1-3 попереднього твердження 3.2.

Побудовані векторні поля $\Omega_i^g, (i = 1..m)$ визначають на множині

$$V^1 = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$$

векторне поле, яке ми позначимо через Σ_1^g.

Визначимо поле Σ_2^g. Нехай $L_i, i = 1, \ldots, n$ – множина $[-2\delta, 2\delta]$-частин всіх тих траєкторій, що проходять через N_i, і

$$L^1 = \bigcup_{i=1}^{n} L_i.$$

Виберемо такий окіл V^2 множини

$$L^2 = M_0^g \setminus (V^1 \cap D_{[-3\delta,3\delta]}),$$

щоб його замикання не перетиналось з L^1. Очевидно, що на L^2 функція g не має критичних точок, тому за лемою 3.2 на V^2 існує градієнтноподібне для g векторне поле Σ_2^g дотичне до краю в кожній точці $y \in L^2$.

Нарешті, нехай V^0 окіл $L^0 = M \setminus (V^1 \cup V_2)$, замикання якого не перетинається з $L^1 \cup L^2$

Отримуємо покриття M множинами $V^i, i = 1..3$ на кожній з яких визначено векторне поле Σ_i^g. Візьмемо таке розбиття одиниці

$$\nu^i : M \to [0, 1]$$

підпорядковане даному покриттю, щоб

$$L^i \subset \operatorname{supp} \nu^i \subset V^i.$$

Склеїмо тепер векторні поля Σ_i^g за допомогою ν^i, і позначимо отримане поле через Ω^g. Воно є градієнтноподібним полем функції g.

Побудова поля Ω^f. Тепер побудуємо градієнтноподібне векторне поле функції f на M. Його ми також склеїмо з кількох полів.

Для кожного $i = 1..n$ дифеоморфізм h_i та поле Ω_i^g індукують на U_i векторне поле Ω_i^f, інтегральні лінії якого при h_i переходять в інтегральні лінії поля Ω_i^g.

Покладемо

$$K_i = h_i^{-1}(L_i) \;\; i = 1..n, \tag{3.4}$$

тоді K_i це множина $[-2\delta', 2\delta']$-частин траєкторій поля Ω_i^f, які проходять через $h_i^{-1}(\overline{N_i})$. Позначимо

$$K^1 = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \quad , \quad U^1 = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

Нехай U^2 - окіл множини

$$K^2 = M_0^g \setminus (U^1 \cap C_{[-3\delta, 3\delta]})$$

замикання якого не перетинається з K^1.

Нехай ще U^0 окіл $K^0 = M \setminus (U^1 \cup U_2)$, замикання якого не перетинається з $K^1 \cup K^2$

Знову отримали покриття M множинами $U^i, i = 1..3$ на кожній з яких визначено векторне поле Σ_i^f. Візьмемо таке розбиття одиниці

$$\mu^i : M \to [0, 1]$$

підпорядковане даному покриттю, щоб

$$K^i \subset \operatorname{supp} \mu^i \subset U^i.$$

Склеїмо ці векторні поля Σ_i^f за допомогою μ^i, і позначимо отримане поле через Ω^f відповідно.

Почнемо тепер будувати дифеоморфізм h.

Продовження h на окіл критичного рівня. Задамо гомеоморфізм $h : K^1 \to L^1$ формулою: $h(x) = h_i(x)$ при $x \in K^1 \cap U_i$. Тоді з формул (3.4) випливає, що на множині K^1 умова (3.3) виконується.

Тепер продовжимо h до гомеоморфізму між критичними рівнями C_0 та D_0 так, щоб на доповненні до множин критичних точок він був дифеоморфізмом.

Ізоморфізм α атомів $\mathcal{A}^f$ та $\mathcal{A}^g$ індукує ізоморфізм між їх графами. Геометричні реалізації даних графів - це критичні рівні відповідних функцій. h визначено на околах кінців деяких відповідних ребер. Очевидно, що h продовжується до гомеоморфізму між цими графами, який на доповнення до множини критичних точок є дифеоморфізмом (в достатньо малому околі регулярної точки рівень функції є многовидом, тому остання вимога дифеоморфності є коректною.)

Таким чином, ми маємо гомеоморфізм $h : C_0 \to D_0$.

Нехай A - множина $[-2\delta, 2\delta]$-частин траєкторій поля Ω^f, що проходять через

$$C' = C_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} h_i^{-1}(N_i').$$

Аналогічно, нехай B - множина $[-2\delta, 2\delta]$-частин траєкторій поля Ω^g, які

проходять через
$$D' = D_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} N_i'.$$
Тоді з умов 3 a) - b) випливає, що кожна траєкторія з A перетинає кожну множину $C_t, t \in [-2\delta, 2\delta]$, причому, так як поле Ω^f градієнтноподібне для f, то цей перетин є трансверсальним, і отже, складається з єдиної точки. Аналогічне твердження має місце для траєкторій з B.

Неважко бачити, що для кожного з обмежень $f|_A$ та $g|_B$ виконуються умови леми 3.5. Тому існують дифеоморфізми $\alpha : A \to C' \times [-2\delta, 2\delta]$ та $\beta : B \to D' \times [-2\delta, 2\delta]$, для яких $p_2 \circ \alpha = f$, $q_2 \circ \beta = g$, де p_2 та q_2 відповідні проекції на другу координату.

А так як існує дифеоморфізм $h : C' \to D'$, то за твердженням 3.1 він продовжується до дифеоморфізму
$$h : C_{[-2\delta,2\delta]} \to D_{[-2\delta,2\delta]}$$
для якого $f = g \circ h$.

Застосовуючи тепер твердження 3.1 до многовиду з кутами $C_{[\delta,1]}$ та дифеоморфізму $\phi = h|C_\delta$, та використовуючи умову, що поле Ω^f дотичне до краю M в точках множини $M_0^f \cap C_\delta$, дифеоморфізм h можна продовжити на $C_{[\delta,1]}$, відображаючи траєкторії поля Ω^f в траєкторії поля Ω^g так, що на $C_{[\varepsilon,1]}$ виконуватиметься умова $f = g \circ h$.

З вибору δ та з побудови h випливає, що на множині $C_{[\delta,2\delta]}$ поле Ω^f індуковане полем Ω^g за допомогою h. Тому побудоване продовження співпадає з h на $C_{[\varepsilon,2\varepsilon]}$ і таким чином, ми отримуємо дифеоморфізм між $C_{-2\varepsilon,1]}$ та $D_{-2\varepsilon,1]}$. Аналогічно можемо продовжити h всю поверхню. При цьому умова $f = g \circ h$ буде виконана. Теорему доведено. ■

3.6. Молекули m-функцій

Нехай f – m-функція визначена на поверхні M. В околі кожного критичного рівня вона задається відповідним атомом. Між критичними рівнями поверхня є прямим добутком деякого інтервалу на регулярний рівень. Щоб правильно "з'єднати" між собою околи критичних рівнів, нам потрібно встановити відповідність між маршрутами атомів різних критичних рівнів. Така відповідність є відображенням деякої підмножини множини ν-маршрутів кожного рівня, у об'єднання τ-маршрутів всіх вищих рівнів, яке переводить цикли в цикли, а маршрути в маршрути.

Нехай $\Sigma = \{\mathcal{A}_i, (i = 1..m)\}$ довільна впорядкована сім'я атомів. Через Σ_ν та Σ_τ позначимо відповідно об'єднання всіх ν та τ-маршрутів всіх атомів з Σ. Номер атому називатимемо *рівнем.*

Означення 3.6 Молекулою *називаеться пара*

$$M = (\Sigma,\ \mu),$$

де $\Sigma = \{A_i, (i = 1..m)\}$ *– скінчена впорядкована сім'я орієнтованих атомів* A_i, *а*

$$\mu : \hat{\Sigma}_\nu \to \hat{\Sigma}_\tau$$

така біекція *між деякими підмножинами* $\hat{\Sigma}_\nu \subset \Sigma_\nu$ *і* $\hat{\Sigma}_\tau \subset \hat{\Sigma}_\tau$, *що для кожного* ν*-маршуруту* $Z \in \hat{\Sigma}_\nu$, *маршрути* Z *та* $\mu(Z)$

1) *мають однаковий тип*

2) *рівень маршруту* $\mu(Z)$ *строго більший від рівня маршруту* Z.

Зауваження. З умови 2) випливає, що $\hat{\Sigma}_\nu$ не містить ν-маршрутів атому $\mathcal{A}_m$, в той час як $\hat{\Sigma}_\tau$ – не містить τ-маршрутів атому $\mathcal{A}_1$.

Твердження 3.3 *Кожна m-функція визначена на* зв'язному *двовимірному кобордизмі з кутами, і яка має особливі точки, визначає молекулу.*

Доведення. Нехай $\xi = (M; M_-, M_+, M_0)$ – зв'язний двовимірний кобордизм з кутами, і $f : \xi \to [0, 1]$ – m-функція, що має критичні точки і $M_- = f^{-1}(0)$ і $M_+ = f^{-1}(1)$. Ми побудуємо за цією функцією деяку молекулу $\mathcal{M}$.

Нехай $y_1 < y_2 < \cdots < y_m$ – всі критичні значення функції f впорядковані за зростанням. Позначимо ще $y_0 = 0$, $y_{m+1} = 1$.

Нехай K_i – об'єднання тих компонент критичного рівня $f^{-1}(y_i)$, які містять особливі точки m-функції f. Зафіксуємо таке достатньо мале $\varepsilon > 0$, щоб $y_i - y_{i-1} > 3\varepsilon$ для всіх $i = 1..m+1$ і нехай M_i – об'єднання тих компонент множини $f^{-1}(y_i - \varepsilon, y_i + \varepsilon)$, які містять точки з K_i. Тоді M_i – кобордизм з кутами, а обмеження f на M_i має лише один критичний рівень. Нехай $\Sigma = \{\mathcal{A}_i, (i = 1..m)\}$, де $\mathcal{A}_i$ – атом критичного рівня m-функції $f|_{M_i}$.

Розглянемо тепер множину $V = M \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} K_i$, і нехай Γ – довільна її компонента.

Позначимо $\gamma = \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$. Тоді неважко бачити, що

1) $\emptyset \neq \gamma \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} K_i$;

Звідси випливає, що f постійна на компонентах γ, і приймає на них критичні значення.

2) число компонент γ не більше двох; якщо їх рівно дві, то f приймає на них різні значення.■

Припустимо, що γ містить дві компоненти, які лежать на K_{i_1} та K_{i_2}, де $i_1 < i_2 = 1..m$. Візьмемо довільну точку $y \in (y_{i_1}, y_{i_2})$, і нехай $Z =$

$f^{-1}(y) \cap \Gamma$.

Тоді Z відповідає деякому ν-маршруту атому $\mathcal{A}_{i_1}$ і деякому τ-маршруту того ж типу атому $\mathcal{A}_{i_2}$. Очевидно, що ці τ- та ν-маршрут не залежать від вибору точки $y \in (y_{i_1}, y_{i_2})$ і визначаються лише самою компонентою Γ.

Нехай V_2 – множина всіх тих компонент $\Gamma \subset V$, для яких $\gamma = \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ має рівно 2 компоненти.

Тоді попередня побудова показує, що існують два ін'єктивних відображення V_2 в множини маршрутів Σ_ν та Σ_τ. Позначимо їх відповідно через p_ν та p_τ, а їх образи через $\hat{\Sigma}_\nu$ та $\hat{\Sigma}_\tau$. Покладемо ще $\mu = p_\tau \circ p_\nu : \hat{\Sigma}_\nu \to \hat{\Sigma}_\tau$. Очевидно, що при цьому виконуються умови 1) та 2) означення 3.6. Таким чином, пара $\{\Sigma, \mu\}$ є молекулою. Твердження доведено. ■

Ізоморфізм молекул Нехай $\mathcal{M} = \{\Sigma, \mu\}_{i=1..m}$ та $\mathcal{M}' = \{\Sigma', \mu'\}_{i=1..n}$ дві молекули, що складаються з однакового числа атомів.

Бієктивне відображення множин вершин графів цих молекул

$$\rho : V(\mathcal{M}) \to V(\mathcal{M}')$$

називається *ізоморфізмом* молекул, якщо виконуються наступні умови:

1) ρ індукує ізоморфізм графів цих молекул

2) для кожного атому $\mathcal{A}_i \in \mathcal{M}$ образ його графа $\rho(\Gamma(\mathcal{A}_i))$ є графом атому з тим самим номером $\mathcal{A}'_i \in \mathcal{M}'$ причому обмеження ρ на $\Gamma(\mathcal{A}_i)$ є ізоморфізмом орієнтованих атомів $\mathcal{A}_i$ та $\mathcal{A}'_i$

Відмітимо, що ізоморфізм атомів індукує бієкцію між множинами τ- та ν-маршрутів та циклів.

3) Наступна діаграма комутативна

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Sigma}_\nu & \xrightarrow{\rho} & \hat{\Sigma}_\nu \\ {\scriptstyle\mu}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\mu'} \\ \hat{\Sigma}_\tau & \xrightarrow{\rho} & \hat{\Sigma}_\tau \end{array}$$

і зберігає орієнтацію, тобто, для кожного ν-маршруту $z \in \hat{\Sigma}_\nu$ маршрути $\rho \circ \mu(z)$ та $\mu' \circ \rho(z)$ співпадають і мають однакову орієнтацію.

3.6.1. Еквівалентність m-функцій на всій поверхні

В цьому підрозділі ми доводимо основну теорему розділу III. Наведемо її точне формулювання.

Теорема 3.3 *Нехай $f, g : M \to \mathbb{R}$ дві m-функції на поверхні M. Позначимо через ξ_f та ξ_g кобордизми з кутами, а через $\mathcal{M}^f$ та $\mathcal{M}^g$ їх молекули відповідно. Тоді*

1. *Якщо $h : \xi_f \to \xi_g$ - дифеоморфізм кобордизмів з кутами, що визначаються m-функціями f та g, то h індукує ізоморфізм молекул $\mathcal{M}^f \sim \mathcal{M}^g$.*

2. *Навпаки, кожен ізоморфізм $\rho : \mathcal{M}^f \sim \mathcal{M}^g$ індукується таким дифеоморфізмом $h : \xi_f \to \xi_g$, що $f = g \circ h$.*

Доведення. Необхідність умов випливає з доведення твердження 3.3 – при побудові молекули за m-функцією, використовувались лише такі властивості цієї функції, які зберігаються при заміні функції еквівалентною. Доведемо достатність.

Позначення. Не втрачаючи загальності, можемо вважати, що M - зв'язна поверхня, f, g - дві m-функції визначені на M і

$$\xi_f = (M,\ M^f_+,\ M^f_-,\ M^f_0) \quad , \quad \xi_g = (M,\ M^g_+,\ M^g_-,\ M^g_0)$$

відповідні кобордизми з кутами, які ці функції визначають, а

$$\mathcal{M}^f = \{\Sigma^f, \mu^f\} \quad , \quad \mathcal{M}^g = \{\Sigma^g, \mu^g\}$$

молекули їх функцій відповідно.

Нехай $\rho : V(\mathcal{M}^f) \to V(\mathcal{M}^g)$ ізоморфізм молекул. Можемо вважати, що $\rho(\mathcal{A}^f_i) = \mathcal{A}^g_i$ для всіх $i = 1..m$.

За лемою 3.1 вважатимемо, для всіх $i = 1..n$, критичний рівень атома $\mathcal{A}^f_i$ це $f^{-1}(i)$,

$$f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = M^f_-, \qquad f^{-1}\left(n + \frac{1}{3}\right) = M^f_+$$

і аналогічні співвідношення виконуються для g.

Критичні рівні функцій Зафіксуємо $i = 1..n$ і розглянемо компоненти множин $C_i = f^{-1}(i)$.

Граф атома $\mathcal{A}^f_i$ гомеоморфний об'єднанню тих компонент відповідного критичного рівня, які містять критичні точки, в той час як критичний рівень C_i може містити ще регулярні компоненти - кола та відрізки.

Регулярні компоненти можна описати в термінах τ- та ν-маршрутів молекули.

Нехай $R^f_k \subset \hat{\Sigma}^f$ підмножина, складена з таких ν-маршрутів рівнів строго нижчих від k-го, образи яких при μ^f являють собою τ-маршрути рівнів строго вищих k-го. Назвемо її множиною *регулярних* ν-маршрутів k-го рівня m-функції f.

Має місце проста

Лема 3.7 *Існує канонічна бієкція між множиною регулярних ν-маршрутів k-го рівня і множиною регулярних компонент критичного рівня C_i.*$\blacksquare$

Побудова h в околах критичних рівнів. Покажемо тепер, що для кожного $i = 1..n$ існує дифеоморфізм

$$h_i : C_{[i-\frac{1}{3},i+\frac{1}{3}]} \to D_{[i-\frac{1}{3},i+\frac{1}{3}]},$$

такий, що $f = g \circ h_i$.

Очевидно, що ці дифеоморфізми досить визначити на компонентах $C_{[i-\frac{1}{3},i+\frac{1}{3}]}$.

Для критичних компонент множини $C_{[i-\frac{1}{3},i+\frac{1}{3}]}$ існування h_i випливає з теореми 3.2.

Нехай Y_i та Z_i множини регулярних компонент критичних рівнів відповідно C_i та D_i. Через Y_i' та Z_i' позначимо об'єднання тих компонент $C_{[i-\frac{1}{3},i+\frac{1}{3}]}$ та $D_{[i-\frac{1}{3},i+\frac{1}{3}]}$ відповідно, які містять Y_i та Z_i.

З того, що ρ ізоморфізм, та з леми 3.7, випливає, що існує бієкція між множинами регулярних компонент рівнів C_i та D_i. При цьому колам відповідають кола, а маршрутам - маршрути. Тому знайдеться дифеоморфізм $h_i' : Y_i \to Z_i$, який відображає кожну компоненту множини Y_i на відповідну їй компоненту в Z_i.

За лемою 3.5 існують дифеоморфізми $\alpha_i : Y_i' \to Y_i \times [i-\frac{1}{3}, i+\frac{1}{3}]$ та $\beta_i : Z_i' \to Z_i \times [i-\frac{1}{3}, i+\frac{1}{3}]$

Поклавши

$$h_i = \beta^{-1} \circ (h_i' \times \mathrm{id}\,) \circ \alpha : Y_i' \to Z_i'$$

ми отримаємо дифеоморфізм між регулярними компонентами множин $C_{[i-\frac{1}{3},i+\frac{1}{3}]}$ та $D_{[i-\frac{1}{3},i+\frac{1}{3}]}$, причому виконується умова $f = g \circ h_i$.

Продовження h на всю поверхню. Покладемо $h = h_i$ на $C_{[i+\frac{1}{3},i+\frac{2}{3}]}$, і продовжимо h до дифеоморфізму всієї поверхні. Залишилось гладко продовжити h на всю поверхню, так щоб зберігалась умова $f = g \circ h$.

Для $i = 1..n$ розглянемо множину $C_{[i+\frac{1}{4},i+\frac{3}{4}]}$. Вона дифеоморфна прямому добутку

$C_{i+\frac{1}{4}} \times [i+\frac{1}{4}, i+\frac{3}{4}]$. Крім того, виникають відображення

$$p_i : C_{i+\frac{1}{4}} \to C_{i+\frac{3}{4}} \quad , \quad q_i : D_{i+\frac{1}{4}} \to D_{i+\frac{3}{4}}$$

З умови узгодження орієнтації для ізоморфізму молекул випливає, що дифеоморфізми $h_{i+1} \circ p_i$ та $q_i \circ h_{i+1}$ між $C_{i+\frac{1}{4}}$ і $D_{i+\frac{3}{4}}$ ізотопні. Крім того, за побудовою h відображає траєкторії поля Ω^f, які проходять через

$$f^{-1}\left(\left[i+\frac{1}{4}, i+\frac{1}{3}\right] \cup \left[i+\frac{2}{3}, i+\frac{3}{4}\right]\right)$$

у відповідні траєкторії поля Ω^g.

Тепер за лемою 3.6 дифеоморфізм h продовжується на всю поверхню так, що виконується умова $f = g \circ h$. Теорему доведено. ∎

3.7. Висновок

В даному розділі отримано класифікацію m-функцій на двовимірних кобордизмах з кутами. Основним є випадок m-функцій, які мають особливі точки. Для них побудовано скінчений інваріант – "молекула" – граф з додатковою інформацією, який визначає m-функцію з точністю до заміни координат на поверхні.

Побудова складається з трьох кроків. Спочатку для кожного індексу особливих точок m-функції вводиться "елементарна частинка" – граф, ізоморфний околу відповідної критичної точки на критичному рівні разом з двома інволюціями на ребрах. Теорема 3.1 стверджує, що елементарна частинка є повним інваріантом відношення еквівалентності m-функції в околі цієї точки.

Далі з цих елементарних частинок утворюють атом – сукупність елементарних частинок критичних точок разом з ототожнення деяких пар висячих вершин графів цих частинок. Додатково на ребрах графа атому можна визначити τ- та ν-маршрути, які відповідають компонентам докритичних та післякритичних рівнів. Це дозволяє з точністю до еквівалентності відновити m-функцію в околі даного критичного рівня – теорема 3.2.

Нарешті, останній крок – побудова молекули. Набір атомів критичних рівнів, тобто задання m-функції в околі кожного з її критичних рівнів, ще не дає можливості задати її на всій поверхні. Потрібно доозначити m-функцію між критичними рівнями. Це досягається заданням відображення з множини ν-маршрутів у множину τ-маршрутів, яке зберігає тип маршруту та підвищує рівень. Сукупність всіх атомів критичних рівнів разом з таким відображенням і є молекула. Основна теорема даного розділу – теорема 3.3 показує, що молекула, з точністю до еквівалентності, є повним інваріантом m-функції.

Ця побудова узагальнює роботу В. В. Шарко [38] з класифікації m-функцій.

РОЗДІЛ IV

Тривіальність групи π_2 деяких просторів

4.1. Вступ

Вивчення сімей функцій Морса залежних від параметра t, рівносильне вивченню відображень області визначення T цього параметру в простір функцій Морса. Це, в свою чергу, часто приводить до питання асферичності множини T. Особливо важливим, з точки зору асферичності, є випадок двовимірних та трьохвимірних многивидів та CW-комплексів. В даному розділі ми доведемо твердження, яке стосується тривіальності другої гомотопічної групи одного класу просторів. Зокрема, це дасть спосіб побудови трьохвимірних многовидів (як з краєм так і без краю) у яких $\pi_2 = 0$. Серед них всі многовиди з непорожнім краєм матимуть гомотопічний тип двовимірного CW-комплекса і тому будуть асферичними.

Скрізь нижче, для простру A, запис $\pi_n A = 0$ означатиме, що кожне відображення S^n в A є гомотопним нулю, а запис $\pi_n(X, A) = 0$ - що довільне відображення пари (D^n, S^{n-1}) в пару (X, A) гомотопне, як відображення пар відображенню в A. Очевидно, що це є рівносильним тривіальності груп $\pi_n(A, a) = 0$ і $\pi_n(X, A, a) = 0$ в кожній точці $a \in A$.

Для відображення $g : A \to X$ через C_g ми позначаємо його *циліндр* – простір, отриманий приклеюванням $A \times 1$ до X за допомогою відображення g. Ототожнимо A з множиною $A \times 0 \subset C_g$, і для кожного $n \geq 1$ покладемо $\pi_n(g, a) = \pi_n(C_g, A, a)$. Запис $\pi_n(g) = 0$, таким чином, означатиме, що $\pi_n(C_f, A) = 0$ в розумінні вказаному вище. Підпростори A та X називаються відповідно *нижньою* та *верхньою* основами C_g.

Нехай A та X довільні топологічні простори, які не обов'язково лінійно зв'язні. Розглянемо циліндр $A \times [1, 1]$, зафіксуємо два відображення

$$f^+ : A \times \{1\} \to X, \qquad f^- : A \times \{-1\} \to X$$

і приклеїмо за допомогою них, $A \times [1, 1]$ до X. Отриманий простір позначимо через Y. Відмітимо, що простір Y можна отримати, ототожнивши відповідні основи циліндрів відображень f^+ та f^-.

Основний результат даного розділу міститься в наступній теоремі.

Теорема 4.1 *Якщо* $\pi_2(f^+) = \pi_2(f^-) = 0$, *то* $\pi_2(Y, X) = 0$.

Наслідок 4.1 *Якщо в умовах теореми* $\pi_2 X = 0$, *тоді також* $\pi_2 Y = 0$.

Доведення наслідку. Твердження випливає з точної послідовності гомотопічних груп пари (Y, X):

$$\cdots \to \pi_2(X) \to \pi_2(Y) \to \pi_2(Y, X) \to \cdots$$

крайні члени якої $\pi_2(X)$ та $\pi_2(Y, X)$ за умовою тривіальні групи. Звідси середній член також тривіальний $\pi_2(Y) = 0$. ■

4.2. Допоміжні результати

Лема 4.1 *Нехай $f : X \to Y$ неперервне замкнуте відображення топологічного простору X в метричний простір Y і R компактна підмножина в Y. Для довільного околу U множини $P = f^{-1}(R) \subset X$ знайдеться таке $\varepsilon > 0$, що для довільного відображення $g : X \to Y$, такого, що $\rho(f, g) < \varepsilon$ виконується умова $g^{-1}(R) \subset U$.*

Доведення. Нехай U відкритий окіл множини $f^{-1}(R)$. Так як відображення f замкнуте, то малий образ (тобто доповнення до образу доповнення) кожної відкритої в X множини відкритий в Y, зокрема відкритою є множина

$$V = Y \setminus f(X \setminus U).$$

Зрозуміло також, що $R \subset V$. Внаслідок компактності R, в V міститься також деякий ε- окіл $V_\varepsilon(R)$. Ми стверджуємо, що це ε є шуканим.

Дійсно, нехай $g : X \to Y$ відображення, що задовольняє умові $\rho(f, g) < \varepsilon$. Розглянемо дві довільні точки $x \in X \backslash U$, $y \in R$ і покажемо, що $g(x) \neq y$. Це і доведе нашу лему. Отже, ми маємо нерівність:

$$\rho\left(g\left(x\right), y\right) \geq \left|\, \rho\left(f\left(x\right), y\right) - \rho\left(f\left(x\right), g\left(x\right)\right) \,\right|.$$

Відмітимо, що $f(x) \notin V$, тому $\rho(f(x), y) > \varepsilon$. З іншого боку, в силу вибору g маємо $\rho(f(x), g(x)) < \varepsilon$. Звідки $\rho(g(x), y) > 0$. Лему доведено.

Лема 4.2 *Припустимо, що відображення пар*

$$g : (B, C) \to (Y, Z)$$

гомотопне відображенню в Z. Якщо пара (B, C) задовольняє аксіому поширення гомотопії, то g гомотопне (як відображення пар) відображенню в Z відносно C.

Доведення. Гомотопія пар $G : (B, C) \times I \to (Y, Z)$, яка стягує g в Z, це відображення, що задовольняє умовам

a) $G_0 = g$,

b) $G(C \times I) \subset Z$,

c) $G(B \times 1) \subset Z$.

Якщо G – гомотопія відносно C, то це означає виконання умов a), c) і більш загальної ніж b) умови:

b$'$) $G(x, t) = g(x)$ для всіх $(x, t) \in C \times I$.

Потрібно довести, що коли G задовольняє a), b), c), то існує гомотопія

$$G' : B \times I \to Y,$$

яка задовольняє a), b$'$), c).

Нехай I, J два екземпляри відрізка $[0, 1]$, і

$$\mu : I \times J \to I \times J, \qquad \mu(t, \tau) = (\tau, t)$$

гомеоморфізм, що переставляє координати.

Аксіома поширення гомотопії для пари (B, C) означає, що множина

$$V = B \times 0 \bigcup C \times I$$

у ретрактом $B \times I$. Зафіксуємо довільну ретракцію $r : B \times I \to V$, тоді відображення

$$R = \mu \circ (r \times \mathrm{id}_J) \circ \mu : B \times I \times J \to W = B \times I \times 0 \bigcup C \times I \times J$$

є ретракцією, яка зберігає другу координату. Розглянемо відображення $H : W \to Y$

$$H(x, t, \tau) = \begin{cases} G(x, t) & (x, t, \tau) \in B \times I \times 0 \\ G\left(x, t\,(1 - \tau)\right) & (x, t, \tau) \in C \times I \times J \end{cases}$$

і позначимо

$$K = 0 \times J \bigcup I \times 1 \subset I \times J.$$

Зрозуміло, що множина K гомеоморфна відрізку: кінці K – це точки $(0,0), (1,1) \in I \times J$. Відмітимо ще, що

$$K = \{(t,\tau) \in I \times J \,|\, t\,(1-\tau) = 0\}.$$

Ми стверджуємо, що гомотопія

$$G' = (H \circ R)|_{B \times K} : B \times K \to Y$$

є шуканою. Для цього потрібно перевірити виконання умов a), b′), та c).

a) $G'_0(x) = H \circ R(x,0,0) = H(x,0,0) = G(x,0) = g(x)$

b′) Нехай $x \in C$, $s = (t,\tau) \in K$. Тоді

$$G'_s(x) = H \circ R(x,t,\tau) = H(x,t,\tau) = G\left(x, t\,(1-\tau)\right) = G(x,0) = g(x).$$

c) Покажемо, що образ $G'_1(B) = H \circ R(B \times 1 \times 1)$ кінцевого відображення гомотопії G' міститься в Z:

$$H \circ R(B \times 1 \times 1) \;\subset\; H\left(B \times 1 \times 0 \bigcup C \times 1 \times J\right) \;\subset$$

$$\subset\; G(B \times 1) \bigcup g(C) \;\subset\; Z.$$

Лему доведено.

4.3. Доведення теореми 4.1

Розглядатимемо множини $A \times (-1,1)$ і X як підпростори в Y. Тоді $Y = A \times (-1,1) \cap X$. Нехай p_A та p_I позначають проекції $A \times (-1,1)$ відповідно на A та $(-1,1)$

Через $U^{\varepsilon}(t)$ позначатимемо відрізок $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$.

Отже, розглянемо довільне неперервне відображення

$$g : (D^2, S^1) \to (Y, X).$$

Нам потрібно довести, що як відображення пар, g гомотопне відображенню в X.

Очевидно, що для кожного $\tau \in (-1,1)$ множина X є сильним деформаційним ретрактом для $Y \setminus (A \times \tau)$, тому для доведення теореми досить встановити, що g можна продеформувати у відображення, образ якого не перетинається з $A \times \tau$ для деякого $\tau \in (-1,1)$.

Для того, щоб побудувати таку деформацію, ми приведемо g в "загальне положення" з $A \times \tau$ і, використовуючи умови теореми, застосуємо "метод усунення зайвих прообразів" .

Отже, візьмемо довільні $\tau \in (-1,1)$ і $\varepsilon > 0$ такі, щоб

$$[\tau - 4\varepsilon, \tau + 4\varepsilon] \subset (-1,1).$$

Введемо позначення:

$$U_n = [\tau - n\varepsilon, \tau + n\varepsilon], \qquad V_n = A \times U_n \;\; n = 1..4$$

Твердження 4.1 *Існує таке відображення $h : (D^2, S^1) \to (Y, X)$, яке гомотопне g відносно S^1, що для деякого відкритого околу W множини $A \times [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$ в $A \times (-1,1)$, виконуються умови:*

1. *Функція*

$$v = p_I \circ h|_{h^{-1}(W)} : h^{-1}(W) \xrightarrow{h} W \subset A \times (-1,1) \xrightarrow{p_I} (-1,1)$$

є гладкою класу C^∞

2. *Кожне* $t \in [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$ *є регулярним значенням* u.

Доведення. Покладемо $K_n = g^{-1}(V_n), n = 1, 4$. І нехай

$$u = p_I \circ g|_{K_4} : K_4 \to U_4.$$

Очевидно, що $K_n, n = 1, 2, 3$ – це компактні підмножини відкритого 2-многовиду $\mathrm{Int}K_4$, тому u можна як завгодно близько апроксимувати таким відображенням v, що

1. $v \simeq u \ \ \mathrm{rel}\ \overline{K_4 \setminus K_3}$
2. $v^{-1}(U_1) \subset \mathrm{Int}K_2$
3. обмеження v на $\mathrm{Int}K_3$ є гладким відображенням класу C^∞ і всі точки множини K_2 регулярні для v

Можливість задовольнити умови 1 та 3 випливає із стандартних апроксимаційних теорем (напр. [20]). При цьому u можна вибрати як завгодно близьким до v, а, отже, внаслідок леми 4.1, досягнути виконання умови 2.

Нехай $G : K_4 \times I \to U_4$ гомотопія відносно $\overline{K_4 \setminus K_3}$, що з'єднує $u = G_0$ з $v = G_1$. Задамо відображення $H : D^2 \times I \to Y$ формулою:

$$H(x,t) = \begin{cases} g(x), & x \in D^2 \setminus \mathrm{Int}K_3 \\ (p_A \circ g(x), G(x,t)), & x \in K_3 \end{cases}$$

Покажемо його неперервність. При $x \in \partial K_3$ ми маємо

$$G\left(x,t\right) = G(x,0) = u\left(x\right) = p_I \circ g\left(x\right),$$

звідки

$$\left(\, p_A \circ g\left(x\right)\,,\, G\left(g\left(x\right)\,,\, t\,\right)\right) \;=\; \left(\, p_A \circ g\left(x\right)\,,\, p_I \circ g\left(x\right)\,\right) \;=\; g\left(x\right).$$

Звідси ж випливає, що $H_0 = g(x)$. Очевидно, що відображення $h = H_1$ є шуканим. Твердження доведено.

Візьмемо $t \in [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$ і розглянемо множину $h^{-1}(A \times t)$. Ясно, що

$$h^{-1}(A \times t) = h^{-1}\left(p_I^{-1}\left(t\right)\right) = \left(p_I \circ h\right)^{-1}\left(t\right).$$

З умови (2) випливає, що остання множина є правильним компактним підмноговидом D^2 корозмірності 1, тобто незв'язним об'єднанням скінченого числа кіл. Крім того, якщо ε досить мале, то для всіх

$$t \in [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$$

кількість цих кіл одна й та сама. Позначимо її через r.

Таким чином, ми замінили наше початкове відображення g гомотопним йому відображенням h, яке для деяких $\tau \in (-1, 1)$ та $\varepsilon > 0$ володіє наступними властивостями:

(i) Відображення $p_I \circ h$ визначене на $h^{-1}(A \times [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$ є гладким відображення класу C^∞ і кожне $t \in [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$ є його регулярним значенням

$(\mathrm{ii})_r$ Для всіх $t \in [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$ множина $h^{-1}(A \times t)$ є незв'язним об'єднанням r кіл.

Ми покажемо, що в умовах теореми, h гомотопне відображенню $\hat{h}$, яке має властивості (i), (ii)$_{r-1}$ для деякого іншого τ. Звідси за індукцією випливає, що h гомотопне відображенню з властивістю (ii)$_0$, тобто відображенню, образ якого не перетинається з $A \times \tau$. Як вже відмічалось, це означає, що g, гомотопне відображенню в X.

Покладемо

$$V = A \times U^{\varepsilon}(\tau), \qquad N = h^{-1}(V).$$

Тоді N – компактний підмноговид S^2, і число його компонент також рівне r. Позначимо їх $N_1, \dots, N_r$ і покладемо

$$N_i^- = N_i \cap h^{-1}(A \times [\tau - \varepsilon, \tau]), \qquad N_i^+ = N_i \cap h^{-1}(A \times [\tau, \tau + \varepsilon]).$$

За теоремою Жордана-Шонфліса [28] кожне коло C_i розбиває D^2 на дві компоненти, і є їх спільною границею. Крім цього, замикання компоненти, що міститься в $\mathrm{Int} D^2$, гомеоморфне замкнутому 2-диску. Позначимо це замикання через B_i, а замикання другої компоненти через Q_i. Тоді очевидно, що одна з множин N_i^+ чи N_i^- повністю міститься в B_i, а друга – в Q_i. Ясно також, що при $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq r$, диски B_i та B_j або не перетинаються зовсім, або один з них міститься у внутрішності іншого.

Так як дисків скінчена кількість, то знайдеться хоча б один диск, внутрішність якого не містить інших дисків. Не порушуючи загальності, можна вважати, що цим диском є B_r, і що $N_r^+ \subset B_r$. Тоді $N_r^- \subset Q_r$, і $h(C_r) \subset A \times \tau$. Тепер легко перевірити, що

$$h(B_r) \subset T = X \bigcup A \times (\,(-1, \tau - \varepsilon] \cup [\tau, 1)\,)$$

звідки $h|_{B_r}$ є відображенням пар:

$$h|_{B_r} : (B_r, C_r) \to (T, A \times \tau),$$

тобто представником деякого елемента групи $\pi_2(T, A \times \tau)$. Ця група тривіальна. Дійсно, очевидно, що множина

$$R = A \times [\tau, 1] \cup_{f^+} X \subset T$$

гомеоморфна циліндру відображення f^+ і є сильним деформаційним ретрактом T, тому за умовою теореми отримуємо

$$\pi_2(T, A \times \tau) = \pi_2(R, A \times \tau) = \pi_2(f^+) = 0.$$

Отже, $h|_{B_r}$ гомотопне відображенню в $A \times \tau$.

Так як пара (B_r, C_r) задовольняє аксіому поширення гомотопії, то, за лемою 4.2 цю гомотопію можна вважати гомотопією відносно C_r. Звідси слідує, що вона продовжується до гомотопії відносно Q_r всього диску D^2. Так як $S^1 \subset Q_r$, то остання гомотопія є гомотопією пари (D^2, S^1).

Позначимо її кінцеве відображення через $\hat{h}$. Тепер неважко перевірити, що $\hat{h}$ є шуканим, тобто задовольняє умовам (i)-(ii)$_{r-1}$ для $\hat{\tau} \in (\tau, \tau+\varepsilon)$. Теорему доведено.

4.4. Тривимірні многовиди з $\pi_2 = 0$

З теореми випливає один спосіб конструювання 3-многовидів (як з краєм так і без краю) у яких $\pi_2 = 0$. Для многовидів з краєм – це означає асферичність.

Нагадаємо, що *лінком* в 3-сфері S^3 називається PL-вкладення незв'язного об'єднання скінченого числа кіл, образи яких називають компонентами лінка. Кажуть, що лінк $L \subset S^3$ *розпадається*, якщо в S^3 знайдуться такі два замкнутих трьохвимірних диски D_1 та D_2, що

$$L \subset D_1 \cup D_2, \qquad D_1 \cap D_2 = \emptyset,$$

$$L \cap D_1 \neq \emptyset \neq L \cap D_2.$$

Нехай $L \subset S^3$ – лінк з $n > 1$ компонент, N регулярний окіл L в S^3 і $X = S^3 \subset \mathrm{Int}N$. Очевидно, що компоненти ∂X це 2-тори. Нехай $T_1, \ldots, T_n$ компоненти ∂X,

$$i_k : T_k \subset X, \;\; k = 1, \ldots, n$$

відповідне вкладення. З того, що ∂X має комір в X, випливає, що X гомеоморфний циліндру відображення вкладення $i : \partial X \subset X$, причому ∂X ототожнюється з нижньою основою циліндру C_i.

Тому $\pi_2(X, T_k) = \pi_2(i_k)$.

Відмітимо також, що X є сильним деформаційним ретрактом $S^3 \setminus L$, тому $\pi_2(S^3 \setminus L) = \pi_2(X)$.

Твердження 4.2 *X Наступні умови еквівалентні:*

1. *L не розпадається;*

2. *$\pi_2(S^3 \setminus L) = \pi_2(X) = 0$;*

3. $\pi_2(X, T_k) = \pi_2(i_k) = 0$ *для всіх* $k = 1, \ldots, m$.

Доведення.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) за теоремою 27.1, [35]

(3) $\Rightarrow$ (2). Розглянемо частину точної послідовності пари $(X, \partial X)$:

$$\pi_2 T_k \longrightarrow \pi_2 X \longrightarrow \pi_2(X, T_k)$$

Відомо, що $\pi_2 T_k = 0$, крім того, за умовою $\pi_2(X, T_k) = 0$. З точності послідовності тепер випливає, що $\pi_2 X = 0$.

(1), (2) $\Rightarrow$ (3). Припустимо, що $\pi_2 X = 0$, але для деякого k маємо $\pi_2(X, T_k) \neq 0$. Тоді гомоморфізм $\pi_1 T_k \to \pi_1 X$ має нетривіальне ядро, а тому за відомою лемою Дена [35] в X існує такий двовимірний диск B, що $\partial B \subset T_k$. Це означає, що компонента C_k лінка L не зачеплена з іншими, а отже L розпадається. Отримали протиріччя. Твердження доведено. ■

Нехай тепер $S_1, \ldots S_n$ – n-екземплярів трьохвимірної сфери S^3 і для кожного $i = 1..n$ нехай $L_i \subset S_i$ – лінк. Нехай далі N_i регулярний окіл лінку L_i [16] і $X_i = S_i \setminus \mathrm{Int} N_i$. Покладемо

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i \qquad X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i \,.$$

Компоненти ∂X це 2-тори. Занумеруємо їх в довільному порядку через $T_1, \ldots, T_n$. Нехай

$$i_k : T_k \subset X, \;\; k = 1, \ldots, n$$

відповідне вкладення.

Нехай тепер $m > 0$ таке, що $2m \leq n$. Для кожного $k = 1, ...m$ зафіксуємо деякий гомеоморфізм

$$f_k : T_{2k-1} \to T_{2k}$$

і ототожнимо T_{2k-1} та T_{2k} в X за допомогою f_k. Позначимо отриманий многовид через Y. З твердження 4.2 та теореми 4.1 випливає така

Теорема 4.2 *Якщо жоден L_i не розпадається і не є тривіальним вузлом, то $\pi_2 Y = 0$.*

Ця теорема дає широкий клас трьохвимірних многовидів з тривіальною групою π_2. Якщо такий многовид має край, то він гомотопічно еквівалентний двовимірному комплексу у якого також $\pi_2 = 0$, а для двовимірних комплексів ця умова тривіальності групи π_2 рівносильна асферичності.

4.5. Висновок

В даному розділі доведено теорему 4.1 про тривіальність групи π_2 одного класу просторів. Питання про цю групу та про інші вищі гомотопічні групи многовиду виникає, зокрема, при вивченні сімей функцій Морса, що залежать від параметру. Гомотопічні групи простору функцій Морса на многовиді сильно пов'язані з відповідними гомотопічними групами самого многовиду.

Існує гіпотеза В. В. Шарко про асферичність простору функцій Морса на асферичних поверхнях (це всі поверхні, за виключенням сфери та проективної площини). В рамках згаданої гіпотези вивчались загальні питання пов'язані з найпершою групою, що відповідає за асферичність простору, тобто групою π_2. Доведена в розділі теорема дозволяє побудувати широкий клас трьохвимірних многовидів з тривіальною групою π_2 (теорема 4.2). Причому можна отримувати многовиди з краєм та без краю. Ті, що мають край, вже будуть асферичними.

Ідея доведення теореми базується на так званому методі усунення зайвих прообразів.

ВИСНОВКИ

В дисертації вивчалась структура простору морсівських відображень поверхонь. В другому розділі отримано повну класифікацію компонент простору морсівських відображень поверхні в коло. Такі відображення виникають в періодичних задачах. Компоненти описуються двома інваріантами – гомотопічним класом та критичним типом. Доведення базується на теоремі Матвєєва-Шарко про компоненти простору функцій Морса на компактних поверхнях.

В третьому розділі розглянуто більш загальний клас функцій ніж функції Морса – так звані m-функції. Такі функції можуть не бути постійними на компонентах краю, але вимагається, щоб їх обмеження на край та на внутрішність многовиду були функціями Морса. Отримано класифікацію m-функцій на двовимірних кобордизмах з кутами. Побудовано інваріант – граф з додатковою інформацією, який канонічним чином зв'язується з m-функцією і визначає її з точністю до еквівалентості – теорема 3.3. Цей результат узагальнює роботу В. В. Шарко [38] з класифікації функцій Морса на поверхнях.

В останньому розділі отримано достатню умову тривіальності другої гомотопічної групи π_2 одного класу просторів – теорема 4.1. Це дало метод побудови широкого класу асферичних 3-многовидів з краєм. Питання асферичності розглядалось у зв'язку з гіпотезою В. В. Шарко про асферичність компонент простору функцій Морса на поверхнях роду $g > 0$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Арнольд В. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1971, 240 с.

[2] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем. – М.: Наука, 1997. – 352 с.

[3] Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности. // Успехи мат. наук., 1990, т. 45, № 2, с. 49-77.

[4] Кудрявцева Е. А. Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты. // Мат. сборник. 1999, том. 190, № 3, с.29-88.

[5] Максименко С. И. Классификация m-функций на поверхностях. // УМЖ, - 1999, т. 51 №8, с. 1129-1135

[6] Максименко С. И. Компоненты пространства отображений Морса // Некоторые вопросы современной математики. Праці Інституту Математики НАН України, 1998, т. 25, с. 135-153.

[7] Максименко С. І. Про топологічні простори у яких $\pi_2 = 0$ // УМЖ, - 1998, - т. 50, №8, с.1144-1146

[8] Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. - М.: Изд-во МГУ, - 1991, 301 с.

[9] Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. - М.: Мир. - 1972, 280с.

[10] Милнор Дж. Теорема об h-кобордизме. - М.: Мир, - 1969, 116 с.

[11] Милнор Дж. Теория Морса. - М.: Мир, - 1971.

[12] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи мат. наук, 1982. - т. 37, вып. 5(227), с.3-49.

[13] Ошемков А. А. Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей. // Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем. - М.: Наука, 1994, труды МИРАН, т. 205, с. 131-140.

[14] Ошемков А. А., Шарко В. В. О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях. // Мат. сборник, 1998, т. 189, № 8, с. 93-140.

[15] Пришляк А. О. Сопряженность функций Морса. // Некоторые вопросы современной математики. Праці Інституту Математики НАН України, 1998, т. 25, с. 319-325.

[16] Рурк К., Сандерсон Б. Введение в кусочно линейную топологию. - М.: Мир. - 1974, - 208 с.

[17] Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия. - М.: Изд-во Московского ун-та, 1988. - 413 с.

[18] Фоменко А. Т. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем. // Успехи мат. наук., 1989, т. 44, № 1, с. 145-173.

[19] Фоменко А. Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерии эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. // Известия АН СССР, сер. мат., 1990, т. 54, с. 546-575.

[20] Хирш М. Дифференциальная топология. - М.: Мир, - 1979, 280 с.

[21] Чогошвили Г. С. О поверхностях уровня и областях меньших значений функции заданной на ограниченном многообразии // Докл. АН СССР. - 1939. - т. 24, № 3. - с. 635-639

[22] Шарко В. В. Функции на поверхностях, I.// Некоторые вопросы современной математики. Праці Інституту Математики НАН України, 1998. - т. 25, с. 408-433.

[23] Шарко В. В. Функции на многообразиях. Киев: Наук. думка, - 1990, 196 с.

[24] Спеньер Э. Алгебраическая топология. - М.: Мир. - 1971, 680 с.

[25] Ху Сы-Цзян Теория гомотопий. - М.: Мир. - 1964, 468 с.

[26] Agoston M. K. On handle decomposition and diffeomorphisms // Trans. Amer. Math. Soc., 1969, vol. 137, № 1, pp. 21-26

[27] Bolsinov A. V., Oshemkov A. A., Sharko V. V. On classification of flows on manifolds, I // Methods of functional analysis and topology, vol. 2, 1996, pp. 51-60.

[28] Brown M. A proof of the generalized Shönflies theorem. // Bull. AMS. - vol. 66. - 1960, pp. 74-76.

[29] Cerf J. Stratification naturelle des espaces de functiones differentables réeles et le théoreme de la pseudo-isotopie // Publ. math. Inst. hautes étud. sci. - 1970. - vol. 39. - pp. 371-372.

[30] Chenciner A., Laudenbach F. Contribution à une théorie de Smale à une parametre dans le cas non simplement connexe // Ann. sci. Ecole norm. super. - 1970. - 3, № 4. - pp. 3-68.

[31] Elsholc L. Die Anderung der Bettishe Zahlen der Niveaflachen einer stetige Function die auf Manifeltigkkeiten definirt is // Mat. Sbornik. - 1939. - vol. 47, № 4. - pp. 559-564

[32] Hatcher H., Wagon J. Pseudo-isotopies of compact manifolds // Asterique. - 1973. - vol. 6 - pp. 3-247

[33] Kulinich E. V. On topological equivalent Morse functions on surfaces. // Methods of Functional Analysis and Topology, vol. 14, No 1, 1998, pp. 59-65.

[34] Maksimenko S. I. Pathcomponents of Morse map spaces of surfaces // International conference at Chelyabinsk State University: Lowdimensional Topology and Combinatorial Group Theory // 1999, pp. 31-32.

[35] Papakiriakopoulos C. D. Dehn's lemma and aspherity of knots // Ann. Math. - 1957. - vol. 66 - pp. 1-26.

[36] Pitcher E. Inequalities of critical point theory // Bull. Amer. Math. Soc. - 1958. - vol. 64, № 3. - p. 1-30.

[37] Reeb G. Sur les varietes niveau d'une function numerique // C. R. Acad. Scie. Paris. - 1947. - vol. 224, № 46. - pp. 1324-1325.

[38] Sharko V. V. Classification of Morse functions on surfaces. International conference at Chelyabinsk State Universitate: Lowdimensional Topology and Combinatorial Group Theory // 1996, pp. 10-13.

[39] Yankowski A., Rubinsztein R. Functions with non-degenerate critical points on manifolds with boundary. // Comm. Math. XVI, 1972, pp. 99-112.